a چه ساکت است!

امیرحسین اصغری، استادیار آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

در شماره‌های ۹۲ و ۹۵ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، مقاله‌هایی با عنوان «a چه خوشمزه است» و «گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری» از دکتر امیرحسین اصغری به چاپ رسید که در مقاله‌ی نخست، مشکلات آموزش جبر با بررسی روش معرفی نمادها و بدفهمی‌های حاصل از آن، بررسی شد. مقاله‌ی حاضر، در ادامه‌ی آن مقاله‌ها و از زاویه‌ای دیگر به بررسی این مشکلات، می‌پردازد. در این مقاله، مشکلات جبر، که به عنوان «زبان ریاضی» است، زمانی که به عنوان «زبانی برای ریاضی» در نظر گرفته می‌شود و در آموزش نمادین آن، بسیاری از ظرافت‌ها، فراموش شده یا بدیهی فرض می‌شوند، مطرح شده است. امید داریم با این مقالات، دبیران گرامی، خود با هوشیاری بیش‌تری به رفع مشکلات آموزش جبر نائل آیند.

رشد آموزش ریاضی

اولی: دوست من می‌تونه به شش زبان زنده‌ی دنیا صحبت کند!
دومی: عجب! حالا اون با این شش زبان چه می‌گه؟!

گفت‌وگوی واقعی بالا یادآورِ داستانی واقعی‌تر است:

داستان جبری که «زبان ریاضی» است نه «زبانی برای بیان ریاضی»؛ جبری که به ترجمه‌ای خالی از معنی تقلیل یافته است، جبری که با نمادها، تنها با جملاتی این چنینی پیوند می‌خورد:

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود...

ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان، ص ۲۰

اما افسوس که نمادها خود سخن نمی‌گویند (اسفارد، لینچنسکی؛ ۱۹۹۴، ص ۸۷) اگرچه بهترین ابزار برای بیان تعمیم‌اند. ولی وقتی نه موقعیتی در کار است نه مسئله‌ای که نیازمند به کارگیری این ابزار است، آن‌چه که می‌ماند «تمرین در کلاسی» است برای ترجمه‌ی لفظ به لفظ:

تمرین در کلاس:

۱. جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به کار برده می‌شوند، بنویسید.

الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با

خودش .
ب) ......
۲ . جمله‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید .
الف) $a \times a > 0$ یا $a \times a = 0$
ب) ......
ریاضیات ۱ ، سال اول دبیرستان، ص ۲۲

اشکال در کجاست؟ «مگر علامت گذاری حرفی چیزی جز ... یک تندنویسی مناسب است؟» (دانتزیگ، ص ۱۱۵) . اگر شما در پاسخ به سؤال دانتزیگ عجله کنید، احتمالاً پاسخ خواهید داد :

البته که نه؛

و اضافه خواهید کرد :

علاوه بر این، می‌توان برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده کرد! !

چنین پاسخی شاید شمای ریاضی خوانده (مؤلف، محقق، معلم) را قانع کند، اما شمای آموزشگر (مؤلف، محقق، معلم) را با چالشی جدی‌تر روبه‌رو می‌کند، چالشِ پاسخ به سؤال بعدی دانتزیگ (همان‌جا، ص ۱۱۵) :

بی‌شک در طرز نوشتن $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ صرفه‌جویی وجود دارد، اما آیا حقیقتاً این شکل نوشتن بیش از شکل بیانی این رابطه، یعنی «مجذور حاصل جمع دو عدد برابر است با مجموع مجذورات هر یک از آن‌ها به علاوه‌ی دو برابر حاصل ضرب یکی در دیگری» چیزی به شخص می‌آموزد؟

پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول، به معنی پاک کردن صورت سؤال دوم و تلاش برای به دست آوردن ابزار به قیمت محروم کردن دانش‌آموزان از لزوم و هدف جبر است :

«نیاز به تعمیم، بیان و توجیه آن» (می‌سون، ۲۰۰۵)

اما بسیاری از دانش‌آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادتر است (کوچمن، هویلس؛ ۲۰۰۵) . پس پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول و تأکید بر جنبه‌ی «زبانی» جبر، به تعبیری «ساده»ترین کار ممکن است؛ چرا که دانش‌آموزان از قسمت سخت کار (و البته معنی‌دار آن) معاف و عهده‌دار ترجمه‌ی جمله‌های فارسی یا جبری ما خواهند شد؛ و اگر ما موفق شویم که مترجم خوبی تربیت کنیم، در نهایت فردی خواهیم داشت که می‌تواند به هفت زبان «زنده‌ی» دنیا صحبت کند ولی چیزی برای گفتن نمی‌یابد، نحوی خوبی که شنا کردن نمی‌داند!

باد کشتی را به گردابی فکند
گفت کشتی‌بان به آن نحوی بلند
هیچ دانی آشنا کردن بگو
گفت نی ای خوش جواب خوب‌رو
گفت کل عمرت ای نحوی فناست
زانک کشتی غرق این گرداب‌هاست

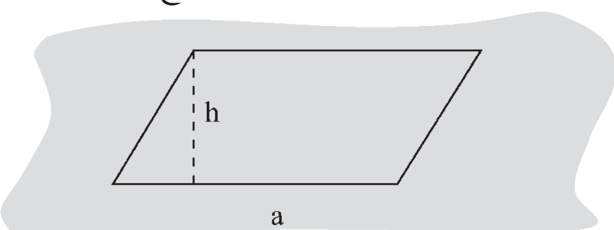
دفتر اول مثنوی
حکایت نحوی و کشتی‌بان

مترجم خوب، نحوی خوب

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم . در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان دهنده‌ی عدد دلخواهی باشند .
(کتاب ریاضیات ۱ ، سال اول دبیرستان، ص ۲۲)

مثال . (این مثال برگرفته از کتاب ریاضیات ۱ نیست، ولی کاملاً به سبک و سیاق مثال‌های آن کتاب تنظیم شده است؛ مثال کتاب در مورد مساحت مثلث است .) برای بیان این که «مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول یک قاعده در ارتفاع نظیر آن قاعده»، می‌گوییم : یک متوازی‌الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این صورت :

مساحت متوازی‌الاضلاع = ah



اکنون دانتزیگ حق دارد بپرسد (به بخش قبل نگاه کنید) : آیا حقیقتاً نوشتن مساحت متوازی‌الاضلاع به شکل ah، بیش از شکل کلامی این مساحت، چیزی به شخص می‌آموزد؟ و شما ممکن است پاسخ دهید :

خُب، این سؤال در این مورد بی‌ربط است . دانش‌آموزانی که در سال اول دبیرستان درس می‌خوانند مساحت متوازی‌الاضلاع را در سال چهارم دبستان یاد گرفته‌اند، پس می‌توان از آن برای دست‌یابی به اهداف این فصل (فصل یک، کتاب ریاضیات ۱) استفاده کرد؛ بنابر راهنمای تدریس، یکی از اهداف این فصل

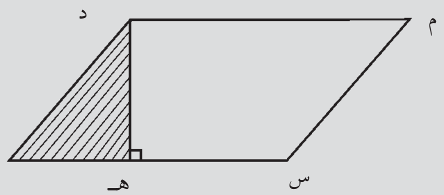
«ترجمه‌ی بین جملات فارسی و ریاضی» است.

این جواب می‌تواند قانع‌کننده باشد، در صورتی که بپذیریم که دانش‌آموز ما «معنی ریاضی» نهفته در جمله‌ی فارسی موردنظر برای ترجمه را به درستی درک می‌کند؛ اما، به نظر می‌رسد چنین درکی با درک مورد نظر مؤلفین کتاب ریاضیات ۱ متفاوت است. فرض مؤلفین کتاب این است که:

- دانش‌آموزان جملات فارسی را به خوبی می‌فهمند و درک می‌کنند. بنابراین یک عمل ترجمه از زبان فارسی به زبان نمادین و برعکس به خوبی می‌تواند معنای جملات نمادین را مشخص سازد (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱، ص ۳۳).

برای روشن کردن تفاوت بین «درک جمله‌ی فارسی» و «درک ریاضیات نهفته در جملهٔ فارسی» اجازه دهید با ورت هایمر (۱۹۴۵) به یک کلاس درس ریاضی برویم. معلم کلاسی که ورت‌هایمر آن را مشاهده می‌کند، مساحت متوازی‌الاضلاع را بسیار شبیه آن روشی که در کتاب چهارم دبستان ما آمده است آموزش می‌دهد؛ بنابراین من این قسمت داستان را از کتاب چهارم دبستان (ص ۱۷۵) نقل می‌کنم:

در متوازی‌الاضلاع زیر، ارتفاع (د هـ) رسم شده است.



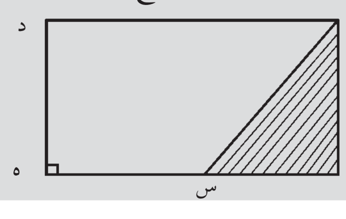
ضلع (س ر) قاعده‌ی نظیر این ارتفاع است. این ارتفاع و قاعده‌ی نظیر آن را اندازه بگیرید و جمله‌های زیر را کامل کنید.

ارتفاع (د هـ)... سانتی‌متر و قاعده‌ی نظیر آن... سانتی‌متر است.

اگر در متوازی‌الاضلاع بالا، مثلث (در هـ) را جدا کنیم و آن را در طرف دیگر متوازی‌الاضلاع بچسبانیم، مستطیلی به شکل زیر به دست می‌آید. مساحت متوازی‌الاضلاع بالا با مساحت این مستطیل برابر است...

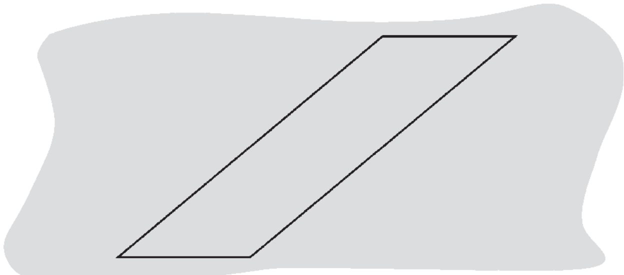
پس

مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع آن

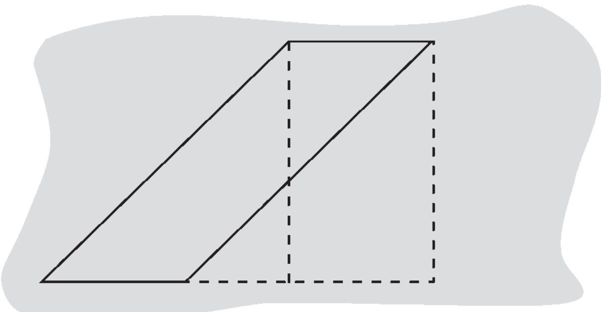


پس از انجام «فعالیت» بالا و با به‌کارگیری چند متوازی‌الاضلاع دیگر، معلم مطمئن می‌شود که «همه‌ی بچه‌های کلاس» می‌دانند که مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن. اکنون، به طور یقین، همه‌ی دانش‌آموزان معنی جمله‌ی فارسی مورد نظر را به خوبی درک می‌کنند، و حتی کمی بیش‌تر، به نظر می‌رسد که معنی ریاضی نهفته در آن را نیز می‌فهمند؛ چرا که روز بعد همه‌ی دانش‌آموزان می‌توانند فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع را به درستی تکرار کنند و حتی یکی از دانش‌آموزان «متوسط» کلاس به درخواست معلم نحوه‌ی به دست آوردن مساحت را شرح می‌دهد.

اما ماجرا هنوز تمام نشده است. ورت‌هایمر (پس از اجازه گرفتن از معلم کلاس) شکل زیر را روی تخته رسم می‌کند.



بعضی از بچه‌ها اعتراض می‌کنند که ما این را نخوانده‌ایم، و بعضی دیگر همان کاری را می‌کنند که معلم به آن‌ها «آموزش» داده است: قاعده‌ی پایینی را کمی گسترش می‌دهند و از دو رأس بالایی دو عمود بر آن رسم می‌کنند (شکل زیر):



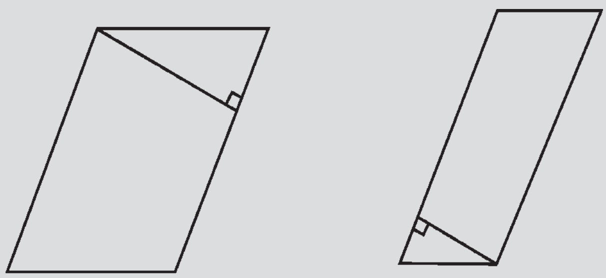
و سپس به فارسی سلیس (البته در مورد کلاس مورد بحث، به انگلیسی سلیس!) اعلام می‌کنند که «مساحت برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع»! ولی وقتی از آن‌ها خواسته می‌شود که با استفاده از شکلی که رسم کرده‌اند، «معنی» جمله‌ی سلیس خود را روشن کنند، گیج و بهت‌زده به ورت‌هایمر و البته به معلم خود نگاه می‌کنند!!

اکنون، دوباره می‌توان پرسید: آیا بیان نمادین مساحت متوازی‌الاضلاع به شکل ah، چیزی بیش‌تر به این دانش‌آموزان می‌آموزد؟ اگر شما چالشی را که ورت‌هایمر برای دانش‌آموزان ایجاد کرد «غیرمنصفانه» می‌دانید، اجازه دهید که یک دانش‌آموز چهارم دبستان را (که از این شانس که ورت‌هایمر از کلاس او دیدن کند برخوردار نبوده است!) تا اول دبیرستان دنبال کنیم.

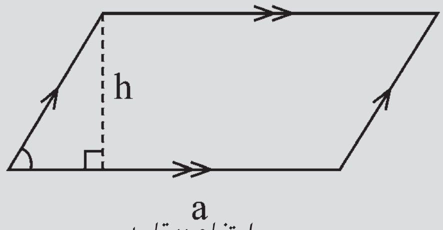
دانش‌آموز ما پس از انجام موفقیت‌آمیز کار در کلاس، تمرین‌های زیر را نیز به درستی حل می‌کند (کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص ۱۷۵):

تمرین

در هر متوازی‌الاضلاع قاعده و ارتفاع داده شده را برحسب سانتی‌متر اندازه بگیرید و مساحت آن را حساب کنید.



توجه کنید در همه‌ی این تمرین‌ها طول ارتفاع رسم شده برای دانش‌آموز، کمتر از طول قاعده‌ی نظیر آن است. سپس تا دوم راهنمایی از متوازی‌الاضلاع در کتاب‌های درسی ریاضی خبری نیست تا این‌که از دانش‌آموز ما خواسته می‌شود که تمرین زیر را حل کند (کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی، ص ۱۷۳):



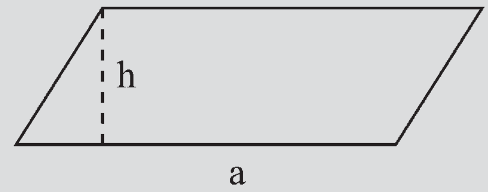
ارتفاع × قاعده

مساحت هر یک از شکل‌ها را با عبارت جبری بنویسید.

و دوباره در سوم راهنمایی (کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی، ص ۵۳):

کار در کلاس

مساحت هر یک از شکل‌های زیر را با یک عبارت جبری بیان کنید.

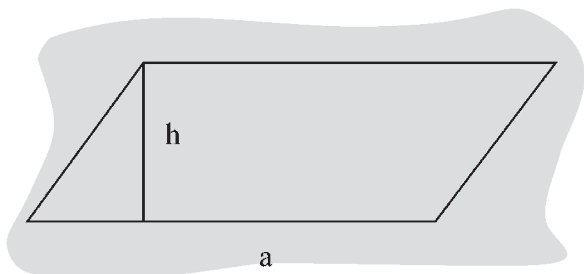


اکنون دانش‌آموز «خوب» ما در کلاس اول دبیرستان است و ما برای این‌که دوباره (!) به او نشان دهیم که در اوقاتی که «می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان‌دهنده‌ی عدد دلخواهی باشند.» (ریاضی ۱، ص ۲۲) مساحت متوازی‌الاضلاع را به زبان نمادین ترجمه می‌کنیم. اما اعداد مربوط به طول قاعده و طول ارتفاع نظیر آن، تا چه اندازه برای دانش‌آموزی با تجربه‌ی دانش‌آموز ما **اعدادی دلخواه** محسوب می‌شوند؟ آیا عجیب است که او (حتی اگر با کمال خوش‌بینی فرض کنیم که به چیزی فرای یک ترجمه به این مثال نگاه کند)، عدد منسوب به طول قاعده را بزرگ‌تر از عدد منسوب به طول ارتفاع فرض کند! شاید همین قدر درک هم مورد نظر نباشد، چرا که ما مترجم خوب می‌خواهیم، چرا که «اهداف کلی رفتاری و عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز» این است که «با نمادها جملات ریاضی را بیان کند و جملات ریاضی را به زبان فارسی

بیان کند و توضیح دهد» (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱، ص۲). اگر چنین است، اگر قرار است که نمادها تنها «برچسب»هایی باشند برای کلمات فارسی، چرا از مثال زیر استفاده نکنیم که حداقل برای دانش‌آموز ما تازگی دارد (ایده‌ی این مثال از ورت‌هایمر است):

مثال: برای بیان این که: «مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل تفریقِ طول ارتفاع از طول قاعده‌ی نظیر آن تقسیم بر حاصل تفریق معکوسِ طول قاعده از معکوس طول ارتفاع نظیر آن»، می‌گوییم: یک متوازی‌الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این صورت:

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$$

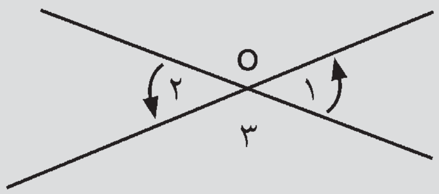


دانش‌آموزی که از پس حل این مثال برآید، به‌طور یقین مترجم خوبی است و اگر علاوه بر ترجمه، بتواند نشان دهد که عبارت $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ با ah برابر است، به طور یقین نحوی خوبی نیز خواهد بود چرا که توانسته است «بدون توجه به معنی نمادها و بر طبق قوانینی معین» (دمبی، ۱۹۹۷، ص ۶۶)، عبارت گویای $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ را ساده کند[1]. با این حساب، ما با یک تیر دو نشان زده‌ایم، هم مترجم خوبی تربیت کرده‌ایم، هم نحوی خوبی؛ اما افسوس که نشان اصلی را نزده‌ایم!

نشان اصلی

نشان اصلی جبر به بزرگی و وسعت همه‌ی آموزش عمومی ماست. ولی ما با جدا کردن آن از حساب در دبستان (استیسی، اصغری، ۱۳۸۸)، با تقلیل آن به یک زبان در راهنمایی و اول دبیرستان، با تأکید بیش از اندازه به زبان جبری به جای تفکر جبری (استیسی و اصغری؛ همان‌جا)، و به‌طور کلی، با جداکردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصالِ نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها، همه‌ی فرصت‌های زدن نشانی بهِ این بزرگی را از دست داده‌ایم. «فعالیت» زیر شاهد دیگَری است از آن‌چه بر دانش‌آموز اول نظری ما گذشته (و می‌گذرد و به نظر می‌رسد که خواهد گذشت!)

فعالیت *(کتاب ریاضی اول راهنمایی، ص ۹۱)*
در شکل مقابل، دو نوار مقوایی را می‌بینید که در نقطه‌ی O



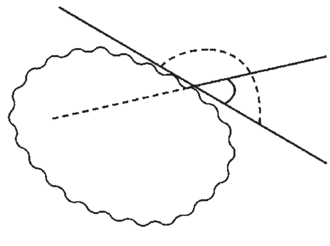
لولا شده‌اند. زاویه‌های ۱ و ۲ را دو زاویه‌ی متقابل به رأس می‌نامیم.

آیا این دو زاویه با هم مساوی‌اند؟
با کامل کردن رابطه‌ها نشان دهید که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند؟

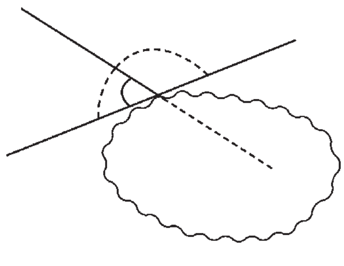
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_2+\ldots=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \ldots=\ldots$$

فرض کنید که دانش‌آموز شما لـزومِ «اثبات» این که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند را درک می‌کند (و این خود تقریباً فرضی محال است!)؛ آیا حتی با این فرض، «اثبات» داده شده به او کمک می‌کند که درک کند چه چیزهایی در این

«ساختار» هندسی ثابت‌اند و چه چیزهایی متغیر؟ یا این‌که چرا از O_4 استفاده نشده در حالی که زاویه‌های دیگر نام‌گذاری شده‌اند؟ یا این‌که چرا این روابط خاص نوشته شده‌اند و نه بسیاری از روابط ممکن دیگر؟ و آیا این «اثبات» چیزی بیش‌تر از استدلال کلامی و نمایشی که با پوشاندن بخشی از شکل با دست حاصل می‌شود به دانش‌آموز می‌آموزد (شکل زیر):



این قسمت را با دست بپوشانید

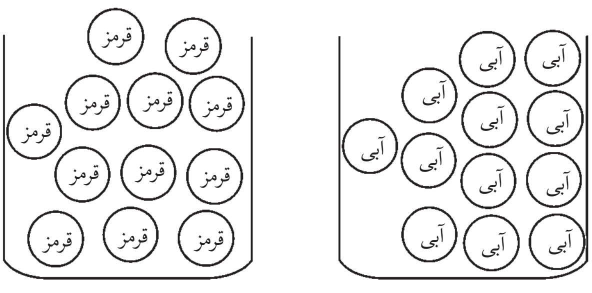


این قسمت را با دست بپوشانید

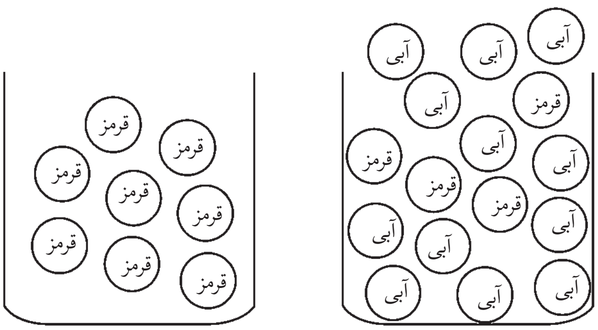
از آن‌جایی که این مثال بسیار آشنا است (هم‌چنان که مثال متوازی‌الاضلاع بود) و از آن‌جا که این آشنایی ممکن است که اهمیت سؤال‌های بالا را پنهان کند، اجازه دهید شما را به حل مسئله‌ی دیگری دعوت کنم.

فرض کنید دو کیسه دارید. در یکی از کیسه‌ها (کیسه‌ی قرمز)، ۱۸۰ مهره‌ی قرمز یک شکل و یک اندازه و در کیسه‌ی دیگر (کیسه‌ی آبی)، ۱۸۰ مهره‌ی آبی به همان شکل و اندازه است. شخصی تعدادی مهره‌ی قرمز را از کیسه‌ی قرمز برمی‌دارد و در کیسه‌ی آبی قرار می‌دهد، سپس کیسه‌ی آبی را خوب به هم می‌زند به طوری که مهره‌های قرمز در لابه‌لای مهره‌های آبی پخش شود. همان شخص، با چشمانی بسته، به تعداد مهره‌های قرمزی که به کیسه‌ی آبی انتقال داده است، از کیسه‌ی آبی مهره برمی‌دارد (توجه کنید که این تعداد می‌تواند هم شامل مهره‌های آبی باشد و هم مهره‌های قرمز) و در کیسه‌ی قرمز قرار می‌دهد. اکنون در انتهای این جابه‌جایی، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز بیش‌تر است یا تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی؟

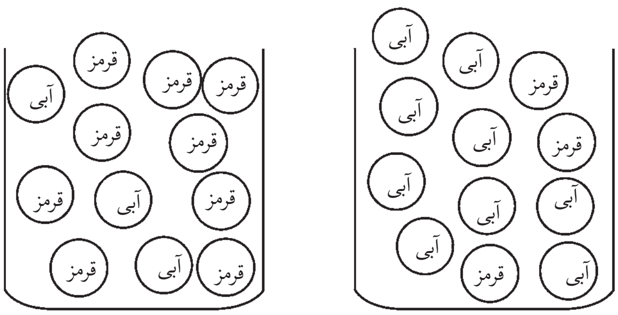
لطفاً قبل از خواندن «فعالیت» زیر، به مسئله‌ی مهره‌ها فکر و سعی کنید آن را حل کنید، چرا که «فعالیت» مذکور هم مسئله را خراب و هم آن را حل می‌کند!!



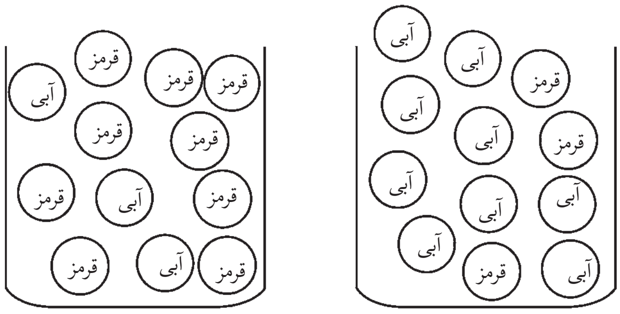
موقعیت مسئله در شروع



موقعیت مسئله پس از انتقال مهره‌های قرمز از کیسه‌ی قرمز به کیسه‌ی آبی



موقعیت مسئله در انتها



کیسه‌ی آبی　　　　کیسه‌ی قرمز

$O_۲$ ، تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی؛ $O_۱$ ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی، قرمز $O_۳$ ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی آبی

فعالیت[۲]

فرض کنید دو کیسه دارید که در هر کدام ۱۸۰ مهره‌ی ... [مسئله‌ی بالا را دوباره بخوانید، فقط سؤال آخر مسئله را با سؤال‌های زیر جایگزین کنید.]

آیا تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز با تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی برابر است؟ با کامل کردن رابطه‌ها نشان دهید که چرا تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز با تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی برابر است؟

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{O}_۲ + \ldots = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \ldots = \ldots$$

شکلِ بیان مسئله‌ی مهره‌ها، اگرچه ممکن است برای شما چندان نامَناسب نباشد، برای اکثر دانش‌آموزان شما بسیار نامناسب و گیج‌کننده خواهد بود [برای دیدن شکل هیجان‌انگیزتر و قابل استفاده‌تری از این مسأله به مقاله‌ی «بهترین شروع کدام است؟» (اصغری، ۱۳۷۹) نگاه کنید.] از طرفی، به طور یقین، «فعالیت» طرح شده براساس مسئله‌ی گوی‌ها، حتی برای شما نیز گیج‌کننده خواهد بود، و این نه به خاطر پیچیدگی آن، بلکه به دلیل بی‌محتوا شدن آن است. در واقع من برای طرح فعالیت مذکور دو دلیل دارم. اول این‌که در شما همان حسی را ایجاد کنم که دانش‌آموز اول راهنمایی شما آن را در مواجهه با «اثبات» تساوی زاویه‌های متقابل به رأس تجربه می‌کند؛ اکنون شاید

بسیاری از دانش‌آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادتر است

همه‌ی آن سؤال‌هایی که در وحله‌ی اول، به دلیل عادت کردن به موضوع (زاویه‌های متقابل به رأس) بی‌ربط به نظر می‌رسید، موضوعیت پیدا کنند: چرا از $O_۴$ (تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی قرمز) استفاده نشده است؟ چرا این روابط خاص نوشته شده‌اند و نه بسیاری از روابط ممکنِ دیگر؟ آیا «استدلال» نمادین بالا، اصولاً چیزی به شخص می‌آموزد؟ آیا او درک خواهد کرد که در این مسئله، چه چیزهایی ثابت‌اند و چه چیزهایی متغیر؟ آیا «استدلال» مذکور، تجربه‌ی جبری بیش‌تری از استدلال کلامی ـ عددی زیر به همراه خواهد آورد؟

	مهره‌ی آبی	مهره‌ی قرمز
کیسه‌ی آبی	۱۶۳	
کیسه‌ی قرمز		

فرض کنید در انتها ۱۶۳ مهره‌ی آبی در کیسه‌ی آبی باقی‌مانده باشد. با توجه به این تعداد مهره‌ها در دو کیسه، برابر با ۱۸۰ تا است، از این‌جا به بعد اعداد خود را به شما تحمیل می‌کنند.

اکنون اجازه دهید به راه‌حل «جبری» که در فعالیت گوی‌ها به شما تحمیل شد نگاهی بیاندازیم:

$$\left.\begin{array}{l}O_۱ + O_۳ = ۱۸۰^\circ \\ O_۲ + O_۳ = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow O_۱ = O_۲$$

این عبارت‌ها، دقیقاً همان عبارت‌هایی است که ما به دانش‌آموز خود (در مسئله‌ی زاویه‌های متقابل به رأس) تحمیل کرده‌ایم و این دلیل دوم من برای طرح آن چنانی فعالیت گوی‌ها است. توجه کنید که $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ «وجودی دارند مستقل از اشیای مشخصی که به نمایندگی آن‌ها مورد قبول قرار گرفته‌اند»

با جدا کردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصالِ نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها، همه‌ی فرصت‌های زدنِ نشانی به این بزرگی را از دست داده‌ایم

(دانتزیگ، ص ۱۱۷). از طرفی «قابلیت نمادها برای انجام اعمال ریاضی» (دانتزیک، همان‌جا) امکان می‌دهد که تساوی O_1 با O_2 مستقل از معنی‌ای که ما برای O_1، O_2 (و در این جا O_4) قائلیم از دو تساوی $O_1 + O_3 = 180$ و $O_2 + O_3 = 180$ به دست آید.

این سکوت نمادها نسبت به زمینه‌ای که به آن‌ها معنی می‌بخشد همه‌یَ قدرت جبر نمادین است. اما همین سکوت، «چشم اسفندیار» آموزش جبر است؛ جبری که یا پیوند خود را از زمینه بریده یا پیوند معنی‌داری با زمینه برقرار نکرده است؛ آموزشی که با گرفتن موضوعِ صحبت از دانش‌آموز، تأکید بر آسان صحبت کردن می‌کند! این چنین است که برای دانش‌آموز، سکوت نمادها نه نشانه‌ی قدرت، بلکه فریادی بی‌محتوا است.

پی‌نوشت

۱. پیشنهاد استفاده از این مثال را جدی نگیرید! توجه کنید که عبارت $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ در مورد ساختار هندسی متوازی‌الاضلاع هیچ چیزی نمی‌گوید و کاملاً به آن بی‌ربط است.

۲. این «فعالیت» با آگاهی از این تنظیم شده است که استفاده از عنوان «فعالیت» چیزی را تبدیل به فعالیت نمی‌کند!

منابع

1. Demby, A: (1997), Algebraic Procedures Used By 13-15-Years-Olds, *Educational Studies in Mathematics,* 33, 45-70.

2. Küchemann, D. and Hoyles, C: (2005), Pupils' Awareness of Structure on Two Number/Algebra Questions, *Proceedings of the Fourth Conference of the European,* 438-448.

3. Mason, J: (2005), Frameworks for Learning, Teaching and Research: Theory and Practice, in Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.). *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

4. Sfard, A. and Linchevski, L: (1994), The Gains and the Pitfalls of Reification- The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics,* 26, 191-228.

5. Wertheimer, M: 1945, *Productive Thinking.*

۶. استیسی، کبی و اصغری، امیرحسین (۱۳۸۸): گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۹۵، صص ۱۱-۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. اصغری، امیرحسین (۱۳۷۹): بهترین شروع کدام است؟، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۵۹-۶۰، صص ۵۳-۵۲، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۸. اصغری، امیرحسین و عبدالله‌پور، مریم (۱۳۸۷): a چه خوشمزه است!، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۹۲، صص ۴۹-۴۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۹. دانتزیگ، توبیاسر (۱۳۶۱): **عدد، زبان علم**. ترجمه‌ی مهندس عباس گرمان، شرکت سهامی کتاب‌های جیبی.

۱۰. **کتاب ریاضی چهارم دبستان** (۱۳۸۶): دکتر عبدالله شیدفر، دکتر مسعود فرزان، پرویز فرهودی مقدم و دکتر رحیم کریمپور، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۱. **کتاب ریاضی سال اول راهنمایی** (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزان، صفر با همت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبائی و پرویز فرهودی مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۲. **کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی** (۱۳۸۳): دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی‌مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۳. **کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی** (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی‌مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۴. **ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان** (۱۳۸۷): شهرناز بخشعلی‌زاده، دکتر ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، دکتر فرزاد دیده‌ور، محمد تقی طاهری تنجانی، دکتر وحید عالمیان و دکتر حمید مسگرانی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۵. **راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱**،

http://math-dept.talif.sch.ir