استعاره‌ای برای آموزش ریاضی*

گرگ مکالم*
ترجمهٔ امیرحسین اصغری، زهرا گویا

اکنون فلسفهٔ ریاضی دغدغهٔ اغلب ما ریاضیدانها نیست. اگر هم بحرانهای فلسفی اوایل قرن گذشته را رفع نکرده باشیم، دست‌کم یاد گرفته‌ایم که چگونه بی‌توجه به آنها به کارمان ادامه دهیم. روشن نیست که فلاسفهٔ معاصر چه چیزی دارند که به ریاضیدانان بگویند: در حالی‌که فلسفه و منطق همچنان با هم گام برمی‌دارند ــ بیشتر به‌موازات هم پیش می‌روند تا یکی به دنبال دیگری ــ و در حالی‌که دانشمندان علوم شناختی و معرفت‌شناسان با یکدیگر تشریک‌مساعی دارند، به نظر می‌رسد فلسفه کمتر از گذشته کالایی برای عرضه کردن به ریاضیات دارد.

با این حال، فلسفه می‌تواند خودآگاهی را به ما اهدا کند.

چنین هدیه‌ای، کالای غریبی است زیرا به نظر می‌رسد ما ریاضیدانها از کاری که می‌کنیم آگاهیم. ما حدس‌پردازی می‌کنیم، تعریفهای جدید ارائه می‌دهیم، قضیه ثابت می‌کنیم، الگوریتم می‌سازیم، مقاله می‌نویسیم، به دانشجویان درس می‌دهیم و حتی در کمیته‌های مختلف فعالیت می‌کنیم. ما می‌دانیم چه می‌کنیم، این‌طور نیست؟

از این گذشته، دغدغهٔ فلسفهٔ معاصر ریاضی، نه ارائهٔ خودآگاهی، بلکه شناخت ماهیت اشیای ریاضی (در واقع، اشیای نظریهٔ مجموعه‌ها)ست، زیرا فیلسوفان سعی می‌کنند ریاضیاتی را که ما در مجلات خود روی‌هم انباشته‌ایم درک کنند.

اما سرگذشت غم‌انگیز هرمان گراسمان گواهی می‌دهد که شاید آنچه ما به آن نیاز داریم خودآگاهی باشد.

در سال ۱۸۴۴، هرمان گراسمان در متنی با عنوان نظریهٔ توسیع [Ausdehnungslelire] پس از یک مقدمهٔ بسیار فلسفی، نظریهٔ «حساب توسیع»[1] خود را ارائه داد، نظریه‌ای جبری که برای هم‌عصران او عجیب و نامأنوس بود. هم‌عصران معروف او، هریک بنابه خصلت خود واکنشی نشان داد که انتظارش می‌رفت: گاوس ادعا کرد که کار گراسمان شبیه کارهای قبلی خود اوست، موبیوس با اعتراف به هراس خود از فلسفه، اظهارنظر را به دوستی واگذار کرد که ظاهراً هیچ‌گاه پاسخی نداد، کوشی نسخهٔ خود را گم کرد، یا با خواندن آن گیج شد یا چیزی شبیه اینها، همیلتن از آن خوشش آمد ولی کاری هم برای معرفی آن انجام نداد. به نظر می‌رسد هم‌عصران گراسمان، در خوش‌بینانه‌ترین حالت، تنها برداشتی کلی از جبر او داشتند؛ آنها به‌طور حتم چیزی را که ما اکنون با نگاه به گذشته قادر به دیدن آن هستیم نمی‌دیدند: نطفهٔ حساب برداری. در سال ۱۸۶۲، گراسمان با حذف مقدمهٔ فلسفی نظریهٔ توسیع، نسخهٔ تجدید نظر شده‌ای از آن را در قالبی اقلیدسی‌تر و حتی طولانی‌تر از نسخهٔ اول (ولی از نظر ناقدان، همچنان مبهم و پیچیده) منتشر کرد، اما آن هم با اقبال روبه‌رو نشد. به مدت یک ربع قرن، گراسمان ویراستهای گوناگونی از کتابی دشوار و تقریباً بی‌خواننده را تهیه کرد، مقاله‌هایی نوشت که خواندن آنها برای ریاضیدانان مشکل بود و با حوصلهٔ فراوان به افراد سرشناس نامه نوشت، نامه‌هایی که اغلب بی‌جواب ماندند.

به نظر مایکل کرو[۱] مشکل گراسمان نداشتن دانشجو، نداشتن سابقهٔ آکادمیک مربوط (زیرا او در براین، فلسفه و الهیات خوانده بود و اگر چه در مدارس فنی تدریس کرد، هرگز یک شغل دانشگاهی نداشت)، نو بودن رویکردش و پیچیدگی بیانش بود. به بیان دیگر، گراسمان نه هم‌عصران خود را به دنبال کردن کارهایش ترغیب کرد و نه برای آنها یک مسیر پیمودنی ایجاد کرد که از طریق آن به کشفش دست یابند: مشکل گراسمان اساساً از نوع آموزشی بود.

در اینجاست که شاید فلسفه به ما کمک کند: «مسیری پیمودنی»؟ از میان چه؟ و به سمت چه؟

ما ریاضیدانها به‌گونه‌ای عمل می‌کنیم که انگار چیزها را کشف می‌کنیم نه اختراع. ما به‌گونه‌ای رفتار می‌کنیم که انگار در آنجا، جایی خارج از ذهن

1. calculus of extension

ما، آن اسپانسر معروف بسیاری از قسمتهای سریال «خیابان کنجد»[۱]، یعنی عدد هفت، واقعاً وجود دارد. طبق این دیدگاه افلاطونی، ریاضیات به‌نحوی به‌وسیلهٔ ایده‌های مجرد یا «صورتها»یی مانند عدد هفت تولید می‌شود. اما از دیدگاه ارسطویی، نه تنها شکلها تولیدکنندهٔ اشیا نیستند، بلکه برعکس، (دانش ما از) اشیای ریاضی، از مشاهدهٔ پدیده‌ها به‌دست می‌آید. افلاطون و ارسطو دو قطب طیف وسیعی از فلاسفه هستند، دوقطبی که حتی فلاسفهٔ امروز، تمایل به یکی از آنها دارند.

بعد از گذشت دو هزار سال هنوز هیچ اجماعی وجود ندارد که آیا موجودات ریاضی، مثلاً عملگرهای خطی روی فضاهای هیلبرت، به اندازهٔ شیرهای جنگلهای آفریقا واقعی‌اند یا خیر. اما می‌توان بر این نکته توافق کرد که: هر چند چیزی که «واقعی» است، ممکن است ناشناخته یا حتی غیرقابل شناخت باشد، ادراکات ما و تفکرات ما دربارهٔ این ادراکات قابل شناخت‌اند و این، برای علم کافی است[۲]ــ حداقل برای علمی که دغدغهٔ توضیح دارد نه «حقیقت».

به همین دلیل هیلبرت می‌گوید که اگر چه ممکن است ما نتوانیم «عدد اصلی پیوستار» را تصور کنیم، می‌توانیم با مهندسی یک نظام نامگذاری، آن را با مهارت به‌کار بریم[۳]. کلمهٔ «مهندسی» را به خاطر پیچیدگیهایی که در این نظام پیش می‌آید به‌کار بردیم، پیچیدگیهایی از این قبیل که مفهومی که فکر می‌کردیم به شیئ خاصی دلالت کند به آن دلالت نمی‌کند، یا مفاهیم کاملاً متفاوتی به یک شیئ واحد دلالت می‌کنند، و یا مفاهیمی به مفاهیم دیگر دلالت می‌کنند[۴]. ریاضیات موجود در کتابها و مقاله‌های ما، مخلوق ماست، متمایز از ریاضیات «واقعی» که «در جایی خارج از ذهن» است و ما «دربارهٔ» آن می‌نویسیم.

استعارهٔ زیر به درک این تمایز کمک خواهد کرد.

تصور کنید روی زمینی مسطح، عمارتی بزرگ و نامرئی وجود دارد که ارتفاع آن پیوسته بیشتر می‌شود. ما از روی تأثیر عمارت بر محیط اطرافش می‌دانیم که چنین عمارتی وجود دارد. مردم در جایی که به نظر می‌رسد پایهٔ عمارت باشد، بذر یک نوع گیاه پیچکی را می‌کارند. پیچکهای گیاه از گوشه‌ها، شکافها، و برجستگیهای دیوار نامرئی راه خود را پیدا می‌کنند و بالا می‌روند، و به آرامی طرحی از چیزی که آنجاست ترسیم می‌کنند. گیاه پیچکی به میل خود رشد نمی‌کند و نیازمند مراقبت دائم، آب، کود، و حتی هدایت است، و به این دلیل به چندین باغبان نیاز دارد. باغبانها، ایستاده روی زمین یا بر نردبانهای بلند لرزان، دائماً آن را هرس می‌کنند. در نتیجه، شکل گیاه و طرحی که ترسیم می‌کند، نه تنها نشان‌دهندهٔ عمارتی است که در آغوش گرفته، بلکه بازتابی است از علایق باغبانها و مسیر رشدی که آنها برای گیاه تعیین کرده‌اند.

گیاه پیچکی تجسمی از تاریخ یک گفتگو با جهان است. X یک خط فکری را بررسی می‌کند، Y آزمایشی انجام می‌دهد و Z یک کتاب می‌نویسد. وقتی X به نتایج جدیدی می‌رسد، آنچه همکاران او می‌بینند مانند تصویر مبهمی نیست که X در یک لحظهٔ کوتاه از پشت شیشه دیده، بلکه چیزی است که روی کاغذ آورده است. وقتی Y آن نتایج را در آزمایشگاه خود به‌کار می‌بندد، [در واقع] از چیزی استفاده می‌کند که تا حدی از عمارت و تا حدی از گیاه پیچکی منشأ گرفته است. و سپس Z، چمباتمه‌زده در میان انبوهی از مقالات که می‌خواهد مطالب منسجمی از آنها بیرون بکشد با مقاله‌هایی روبه‌روست که تصاویر مبهم گذرایی از پدیدهٔ مورد نظرند، و بدین‌ترتیب او خودش نیز گفتگویی به‌راه می‌اندازد. X، Y و Z، هر سه، جوهرهٔ گیاه پیچکی را تولید می‌کنند.

این گیاه به سه طریق رشد می‌کند، یکی رشد مرزگستر است: پیچکها با حرکت به جلو، بالا، و درون، راه خود را کشف می‌کنند؛ روزنامه‌ها و کتابهای تاریخ دربارهٔ این رشد مرزگستر می‌نویسند. دیگر رشد درون‌گستر است: در حالتی که شاخه‌ها طرحی از برجهای کوچک ترسیم می‌کنند، پیچکها باز هم در جستجوی الگوها و شکلهای بیشتر روی دیوار (و گذرگاههای پراکنده) و پر کردن فضاهای خالی بین کشفهای بزرگ اولیه ــ به اطراف سرک می‌کشند. این همان «علم بالغ» توماس کوهن[۵] است؛ و سوم، رشد تراکمی است: شاخه‌های گیاه پیچکی درهم تنیده می‌شوند، با ادغام شاخه‌ها و تشکیل شاخه‌های بزرگ‌تر (تجریدات حاصل از نظریه‌های کوچک‌تر قبلی) ساختار گیاه دوباره سازماندهی، و ریاضیات مورد نیاز ترکیب‌گران، شارحان، و معلمان تولید می‌شود.

ما باغبانیم؛ خالقان و حافظان آفریدهٔ فرهنگی کهنسالی هستیم که من آن را گیاه پیچکی نامیدم، آفریده‌ای که از آن برای مطالعهٔ واقعیتی که مستقیماً در دسترسمان نیست استفاده می‌کنیم، و اگر مسألهٔ فلسفی (و اجتماعی!) نحوهٔ رشد این گیاه را درک کنیم بهتر می‌توانیم کارمان را انجام دهیم. پس به نظر می‌رسد که فیلسوفان به هر حال حرف مهمی دارند که به ما بگویند.

بیایید دوباره به آموزش برگردیم.

مخمصهٔ گراسمان برای بسیاری از معلمان آشناست. درس بسیار روشن است، اما دانشجویان نمی‌توانند یا نمی‌خواهند آن را دنبال کنند. در حقیقت معرفی چیزی جدید به دانشجویان خود، تا حدودی شبیه معرفی چیزی جدید به همکاران خود است. خود را همچون یکی از چندین باغبان گیاه پیچکی تصور کنید که پیچکهایش به آرامی روی دیوار نامرئی به بالا می‌روند. این نوعی از تحقیق است که بسیاری از ما، به همراه پنج تا پنجاه همکار دیگر از سراسر دنیا، انجام می‌دهیم، ما تنها با بخشی از دیوار سروکار داریم. ما نتایج خود را به مجلاتی می‌فرستیم که متخصص شمالی‌ترین بخش شمال غرب هستند، اگر چه همه می‌دانند که مجلات برجهای غربی‌ترین بخش شمال نیز مقالات ما را می‌پذیرند؛ به این ترتیب، در شمالی‌ترین بخش شمال غربِ عمارت، توده‌ای از گیاه رشد می‌کند و روی دیوار بالا می‌رود، در حالی‌که در غرب، توده‌ای از گیاه به شکل استوانه در حال رشد است. پس از چنین ارزیابیهایی، انجمن ریاضی آمریکا گیاه پیچکی را چنان تقسیم‌بندی کرده است که گویی طرحی از معماری خود عمارت می‌دهد، و بنیاد ملی علوم، بودجهٔ خود را به پیروی از مُد روز و بر اساس سودآوری احتمالی بخشهای مختلف گیاه پیچکی تقسیم می‌کند.

اما فرض کنید پیچک شما با چیزی غیرقابل انتظار مواجه شود، چیزی مانند یک فضای باز در میان چند برآمدگی؛ یک گذرگاه مسدود؟ شما خوشحال و در عین حال نگران، این‌فضای عجیب را بررسی می‌کنید. مقاله‌ای دربارهٔ آن می‌نویسید و آنگاه... اولین مجله فکر می‌کند که شما یک علامت منفی را جا انداخته‌اید، دومی گمان می‌کند که شما عقل خود را از دست داده‌اید

۱. یک سریال تلویزیونی آمریکایی، مخصوص کودکان، که در آن به تقلید از سریالها و برنامه‌های تلویزیونی دیگر که اسپانسر [حامی مالی] دارند، عددها به‌خصوص عدد هفت به‌عنوان اسپانسر قسمتهای مختلف سریال معرفی می‌شدند.ــم.

و نتایج شما برای سومی «جالب» نیستند. شما کاری انجام داده‌اید و تعجب می‌کنید که چرا دیگران چنین واکنشی نشان می‌دهند.

داورها چه فکر می‌کنند؟ شاید فکر کنند که پیچکهای شما از عمارت جدا شده و تنها به‌صورت کلاف سردرگمی رشد می‌کنند، که شاید چیز جالبی در آن باشد ولی آنها نمی‌توانند مسیرها را در این تودهٔ درهم‌وبرهم پیدا کنند. (ریاضیدانها محتاط‌اند و بیمناک از آشفتگی، مگر اینکه مرجعی موثق مدافع آن باشد؛ ما نیز همچون دانشجویانمان اطمینان می‌خواهیم ــ شاید اعتبارنامه‌ای حک‌شده بر لوح که شایستگی راه‌نمای ما را تأیید کند ــ تا ساعتها وقت خود را صرف کنیم.) برای هدایت همکارانمان به چیزی جدید، باید از مسیرهای به نظر آشنا استفاده کرد، زیرا بنابه نظریهٔ «روانی پردازش» [۶] بیان ثقیل و غرابتِ آشکار موضوع ممکن است از اعتبار نظریه (نزد دیگران) بکاهد.

گراسمان برجکی یافت که همه در پی آن بودند (چگونگی انجام دادن حساب در فضای اقلیدسی)، اما رویکرد او دشوار بود و او هرگز راهی برای هدایت دیگران به آنجا پیدا نکرد. بعدها، وقتی گیاه پیچکی رشد کرده و به برجک نزدیک‌تر شد و مکانهای بیشتری برای حرکت به سوی آن پیدا شد (از مکانیک گیبس تا الکتریسیتهٔ هویساید)، دو نفر آن محل را کشف کردند و با توصیف کارآمدتر مسیر دیگران را به دیدن محل ترغیب کردند ــ به‌خصوص ویلارد گیبس که همکاران خود را با رگبار بی‌وقفهٔ پیش‌چاپهایش به ستوه آورد. بنابراین، جایگاه محکم حساب برداری در برنامهٔ درسی، بیش از گراسمان مدیون گیبس و هویساید است.

چون گیاه پیچکی تنها چیزی است که ما می‌توانیم ببینیم، همکاران ما فقط می‌توانند بخشی از گیاه را که ما برای آنها رویانده‌ایم از طریق مسیرهایی که ایجاد کرده‌ایم بیابند و ببینند. مسأله، مسألهٔ آموزش است، و اگر در اتاق نشیمن فلسفهٔ غرب فیلی هست که آن را نمی‌بینند، همان آموزش است [۷]. بخش عمده‌ای از «تحقیق» ریاضی، تدریس ریاضی به همکارانمان است. مشکل گراسمان این بود که وقتی راهی به برجک یافت، با پیچکهای خود مسیری برای راحت رسیدن به آن نپروراند.

اکتشافات فقط توده‌های سازمان‌نیافته‌ای از گزارشهای پیشروی در اینجا و آنجا پدید می‌آورند. علم فعالیتی اجتماعی است، بنابراین فقط کشف نیست سازماندهی هم هست؛ سخنرانیهای عمومی، مقالات توصیفی، درسهایی در مباحث پیشرفته، پروژه‌های چند سالهٔ منتهی به تک‌نگاشتهایی گذشته‌نگر، و بالاخره، درس‌نامه‌های دوره‌های تحصیلات تکمیلی، در پی کشف می‌آیند. بازدیدکنندگانی متعلق به سایر حوزه‌ها، تکه‌هایی از اطلاعات حاصل را برمی‌دارند تا آنها را در کوره‌های آکادمیک خود بپزند و به شکلی ظریف‌تر یا زمخت‌تر، برای کاربردهای عجیبی که کاشفان اولیه هرگز تصورش را نمی‌کردند، مهیا کنند. و سپس، این همه، به تشکیلات وسیع دورهٔ کارشناسی سرازیر می‌شود.

برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی مانند شاخه‌ها و پیچکهای انبوه بالای گیاه درهم‌وبرهم نیست. دانشجویان از سطح زمین شروع می‌کنند، از جایی که از علفهای هرز و زوائد پاک‌شده و تنهٔ گیاه با شاخه‌های کاملاً مرتب‌شده («مثالها» و «تعریفها») به صعود تازه‌کارها کمک می‌کنند. دانشجویان ما به آهستگی، از باغچه‌ای که ما برای تازه‌کارها ساخته‌ایم، شروع به حرکت می‌کنند و به سمت بالا می‌روند. مسائل به‌تدریج پیچیده‌تر، وضوح تعریفها کمتر، و شاخه‌های پراکنده و سرگردان بیشتر می‌شود (آیا واقعاً آن شاخه‌ها سرگردان‌اند؟)، تا سرانجام، دانشجویان به موقعیتی شبیه موقعیت ما می‌رسند.

یکی از موضوعهای بغرنج ریاضیات عمومی [حسابان] سال اول را در نظر بگیرید: در مورد حد چه کنیم؟ به نظر می‌رسد که با صرف‌نظر کردن از دقتِ εـδای، دانشجویان کنجکاوتر و متوقع‌تر ما محروم یا حتی مأیوس خواهند شد [۸]. بنابراین، مرسوم است که در ریاضیات عمومی I دانشجویان خود را به سمت شاخهٔ εـδ، در ریاضیات عمومی II به سمت شاخهٔ εـN و دوباره در ریاضیات عمومی III به سمت εـδ بکشانیم، تا بعد از این ورزش یوگا، آنها بتوانند موضوع را در حسابان پیشرفته کاملاً درک کنند.

اما بسیاری از دانشجویان بعد از مدتی تکان تکان خوردن شاخه را رها می‌کنند؛ بنابراین، در بیشتر کلاسهای درس ریاضیات عمومی از روش اپسیلون دلتا صرف‌نظر می‌شود. بعضی معلمان، آنالیز نااستاندارد آبراهام رابینسون را مسیر بدیلی می‌دانند که گزارشهایی دربارهٔ موفقیت آن در دست است [۹]. صرف‌نظر از موضع شخص در این بحث، که اپسیلونها را ترجیح بدهد یا بینهایت کوچکها را، آنچه در اینجا برای ما اهمیت دارد، وجه درخت‌گونهٔ ریاضیات است [۱۰]. بر اثر یک تصادف تاریخی (مثلاً ر.ک. [۱۱])، دو شاخهٔ گیاه پیچکی باروی نامرئی یکسانی را در آغوش کشیده‌اند و حالا، ما بحث‌وجدل می‌کنیم که کدام‌یک عقلانی‌تر، قدرتمندتر، عملی‌تر و غیره و غیره است. (بعضی از حریفان، حتی جدل می‌کنند که کدام‌یک به باروی نامرئی شبیه‌تر است، انگار که این مسأله قابل حل است.) هر دو درخت، آفریدهٔ انسان و حاصل تلاش ما برای دیدن و درنوردیدنِ این ساختار نامرئی پیچیده اما آشکارا حیاتی است، و جدال نهایی بر سر سودمندیِ هر بخش از گیاه پیچکی در این دریافت و درنوردیدن است.

ما نیز همچون دانشجویانمان ترجیح می‌دهیم که بر آرایه‌ای منظم از شاخه‌های آراسته بایستیم. حتی استادان ذِن، پیشوایان پیچیدگی، استعداد خود را با به نظم در آوردن آشفتگیهایی که با آن روبه‌رو می‌شوند به نمایش می‌گذارند؛ حتی حل‌کنندگان مسأله‌های مهم و آشفته به محل قابل اطمینانی برای ایستادن نیاز دارند. اگر چه هر محققی آرایهٔ شاخه‌های خود را می‌بیند، کسی که بیرون از گود است غالباً تنها تودهٔ درهم‌وبرهمی را می‌بیند. اگر می‌خواهیم افراد بیرون از گود را ترغیب کنیم که به ما بپیوندند، باید مخاطبان خود را به حساب آوریم و قسمت خود را از گیاه پیچکی چنان بیاراییم که بازدیدکنندگان را وسوسه کند. حقیقت ریاضی ــ هر چه باشد ــ چیزی نیست که ما روزانه با آن سروکار داریم؛ آنچه ما با دیگران در میان می‌گذاریم، حاصل باغبانیِ ریاضی ماست، و مانند تمام تولیدات انسانی، محصولات ریاضی نیز مستلزم راه‌نمای عمل برای مصرف‌کننده، بسته‌بندی و بازاریابی است.

یادداشتها و مراجع

۱. نظر کرو از صفحه‌های ۹۴ـ۹۵ کتاب زیر نقل شده است:

M. J. Crowe, *A History of the Vector Calculus: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Dover, rev. ed. (1994).

۲. فیلسوفی که نام او بیش از همه با این دیدگاه مربوط است، ایمانویل کانت است. ر.ک. مدخلی بر هر نوع متافیزیک آینده [*Prolegomena to Any Future Metaphysics*] که خیلی کوتاه‌تر از نقد عقل محض، و درک آن آسان‌تر است. برای ملاحظهٔ شرح خلاصه‌وار معتدلی از این دیدگاه، ر.ک. ←

F. Chalmers, *What is This Thing Called Science*? Univ. of Queensland Press, 2nd ed., (1976)

3. D. Hilbert, "*On the infinite*", *reprinted in* Philosophy of Mathematics (P. Benacerraf and H. Putnam, eds.), Cambridge Univ. Press, 1983, pp. 183-201.
4. I. Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, (J. Worrall and E. Zahar, eds.), Cambridge Univ. Press, 1976, for examples.
5. T. Kuhn, *Structure of Scientific Revolutions*, Univ. of Chicago Press, 2nd ed., 1970
6. R. Reber, N. Schwarz and P. Winkielman, "Processing fluency and aesthetic pleasure: Is beauty in the perceiver's processing experience?", Personality and Social Psychology Review **8**:4 (2004), 364-382.

۷. اما فلسفهٔ شرقی توجه زیادی به آموزش داشته است.

8. J. E. Szydlik, "Mathematicial beliefs and conceptual understanding of the limit of a function", J. Res. Math. Ed. **13**:3 (2002), 258-276.
9. K. Sullivan, "The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach", Amer. Math. Monthly **85**:5 (1976), 370-375.

۱۰. به یاد آورید که هیلبرت این وجه را به‌عنوان وجه مهندسی تعبیر کرد.

11. I. Kleiner, "History of the infinitely large small and the infinitely in calculus", Ed. Stud. Math. **48** (2001), 137-174.

* * * * * *

• Greg McColm, "A metaphor for mathematics education", *Notices Amer. Math. Soc.*, (4) **54** (2007) (499-502).

* گرگ مکالم، دانشگاه فلوریدای جنوبی، آمریکا

mccolm@cas.usf.edu.

مقادیر گویای توابع مثلثاتی•

همهٔ محصلان ریاضی مقادیر تابعهای مثلثاتی را به‌ازای زاویه‌های π، $\pi/2$، $\pi/3$، $\pi/4$، و $\pi/6$ (و مضربهای صحیح آنها) یاد می‌گیرند. آیا مضربهای گویای دیگری از π وجود دارند که به‌ازای آنها تابعی مثلثاتی مقدارهای گویا اختیار کند؟ ایدهٔ مبنایی اثبات زیر برای دست‌اندرکاران نظریهٔ اعداد آشناست (ر.ک. [۲]، ص۱۵، پاراگراف آخر). اثبات دیگری ازحکم مربوط در ([۱]، فرع ۱۲.۳، ص۴۱) آمده است.

قضیه. فرض کنید θ مضرب گویایی از π باشد. در این‌صورت
(۱) اگر $\cos\theta \in \mathbb{Q}$، آنگاه $\cos\theta = 0, \pm 1, \pm 1/2$
(۲) اگر $\sin\theta \in \mathbb{Q}$، آنگاه $\sin\theta = 0, \pm 1, \pm 1/2$
(۳) اگر $\tan\theta \in \mathbb{Q}$، آنگاه $\tan\theta = 0, \pm 1$.

اثبات. (۱) فرض می‌کنیم $\theta = m\pi/n$ که در آن m و n نسبت به هم اول‌اند، و $\cos\theta \in \mathbb{Q}$، و قرار می‌دهیم $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. در این‌صورت، α هم ریشه‌ای از چندجمله‌ای $f(x) = x^2 - 2(\cos\theta)x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ و هم ریشه‌ای از چندجمله‌ای دایره‌بری $\Phi_n(x)$ است. پس $\varphi(n) \leq 2$ زیرا $\Phi_n(x)$ روی $\mathbb{Q}$ تحویل‌ناپذیر و دارای درجهٔ $\varphi(n)$ است (ر.ک. [۲]، ص۱۲). از این‌رو $n = 1, 2, 3, 4, 6$. با محاسبهٔ $\cos m\pi/n$ به‌ازای این مقادیر n، درمی‌یابیم که تنها مقادیر گویا عبارت‌انداز: ۰، ۱±، و ۱/۲±.
(۲) این حکم از (۱) و رابطهٔ $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$ نتیجه می‌شود.
(۳) این حکم از (۱) و رابطهٔ $\cos 2\theta = (1 - \tan^2\theta)/(1 + \tan^2\theta)$ نتیجه می‌شود.

مراجع

1. I. Niven, *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monographs, vol. 11, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1956.
2. L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer, New York, 1997.

کائورو موتوسه، ژاپن

• نقل از مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ نوامبر ۲۰۰۷، ص۸۱۸