گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری*

کی استیسی، دانشگاه ملبورن، استرالیا
امیر حسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی، ایران

«جبر» دروازه‌ی ورود به قلمرویی است که در آن دانش ما از ریاضیات شکل می‌گیرد، توسعه می‌یابد و به جهان پیرامون ما پیوند می‌خورد. این چنین است که جبر بخشی مهم از آموزش ریاضی در دوره‌های عمومی را نه تنها در استرالیا و ایران، بلکه در دیگر کشورهای دنیا، به خود اختصاص داده است. با این وجود، این دروازه برای بسیاری از دانش‌آموزان بسته می‌ماند، چرا که هم یادگیری جبر دشوار است و هم یاددهی آن (استیسی، چیک و کندال؛ ۲۰۰۴). بنابراین، در طول یک ربع قرن گذشته، تلاش‌های فراوانی در جهت شناخت و بهبود موقعیت‌های یادگیری جبر انجام گرفته است. در نتیجه‌ی این تلاش‌ها، ما هم‌اکنون می‌دانیم که مسیر یادگیری جبر از حساب می‌گذرد. هم‌چنین می‌دانیم که پیمودن این مسیر برای دانش‌آموزان دشوار است، و بدون داشتن راهنمایی آگاه از چالش‌های پیش‌رو، دشوارتر. ما در این مقاله، به بعضی از این چالش‌ها اشاره خواهیم کرد و سپس به ارائه‌ی راه‌کاری خواهیم پرداخت که به اعتقاد ما می‌تواند به دانش‌آموزان در گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری کمک کند.

جبر، فرزند تاریخی حساب

جبر، فرزند تاریخی حساب است؛ فرزندی که چنان متفاوت رفتار می‌کند که برای مدت‌ها، «ترتیب تاریخی»، تنها اثر مشهود تاریخ در آموزش بود: اول حساب، بعد جبر. حساب بر محاسبات عددی متمرکز بود و جبر، دستگاهی صوری با قواعدی دقیق و مشخص. از طرفی، فرض بر این بود که جبر با قابلیت‌های فراوانش، قلمروی ریاضیات دانش‌آموزان را وسیع‌تر، و توانایی حل مسئله‌ی آن‌ها را افزون‌تر خواهد کرد؛ و این همه تنها یک شرط داشت: که دانش‌آموزان از قواعد جبری به‌درستی استفاده کنند. ولی، هم‌چون بسیاری از مواقع دیگر، آن‌چه دانش‌آموزان به نمایش می‌گذاشتند مطابق آن‌چه طراحان این برنامه انتظار داشتند نبود.

تحقیقات کوچک و بزرگ، ملی و بین‌المللی متعدد به ما نشان دادند که بسیاری از دانش‌آموزان، قابلیت‌های جبر را به درستی درک نمی‌کنند و حتی وقتی وادار به استفاده از آن می‌شوند، از آن تنها به سطحی‌ترین شکل ممکن استفاده می‌کنند.

این چنین بود که جنبشی برای بازنگری در آموزش جبر شکل گرفت؛ جنبشی که متأسفانه نامش («جبر پیش از موعد»[1])، در نگاه اول چندان گویای هدفش نیست. هدف این جنبش کمک به تولد (آموزش) زودهنگام نمادهای جبری نیست، بلکه هدف آن توجه به رشد جبر در دوران جنینی است؛ دورانی که جبر (نمادین) هنوز از حساب جدا نشده است، دورانی که تفکر جبری در دل حساب رشد می‌کند. به اعتقاد ما، تحقق چنین هدفی، بیش‌تر از آن‌که نیازمند فعالیت‌های ویژه و جدید باشد، نیازمند نگاهی متفاوت و معلمینی آگاه است؛ معلمینی که تفاوت‌های حساب و جبر را به درستی می‌شناسند و قادرند از موقعیت‌های «حسابی» در جهت اشاره کردن به این تفاوت‌ها و به بحث گذاشتن آن‌ها در کلاس، استفاده کنند. این چنین است که انتقال از حساب به جبر، معنایی بیش‌تر از یک «ترتیب تاریخی» خواهد داشت.

جبر، انتظارات برآورده نشده

به داستان واقعی زیر توجه کنید (برگرفته از برهمند، ۱۳۸۶):

عنوان درس «حل مسئله به کمک معادله» است. معلم پس از کمی توضیح، مسئله‌ی زیر را مطرح و کمی صبر می‌کند:

زهرا به کتاب‌فروشی رفت و ۴ مداد خرید و ۶۰۰ ریال به فروشنده داد. فروشنده ۴۰ ریال به او پس داد. قیمت هر مداد چند ریال بوده است؟

هیچ پاسخی شنیده نمی‌شود. معلم، برای کمک به دانش‌آموزان، از آن‌ها می‌خواهد که خود را در موقعیت زهرا تصور کنند. سپس مسئله را در کلاس اجرا می‌کند. اکنون جواب چنان واضح است که دانش‌آموزان می‌پرسند «آیا سؤال واقعاً همین است؟»

دانش‌آموزان بالا برای بسیاری از ما آشنایند؛ دانش‌آموزانی که به جبر احساس نیاز نمی‌کنند و حتی در بسیاری از مواقع، بدون آن راحت‌تر و موفق‌ترند! اگر به بدشانسی این معلم هم نباشیم و همه‌ی دانش‌آموزان ما چنین نباشند، می‌توان انتظار داشت که درصد بالایی از آن‌ها چنین باشند (ونگ، ۲۰۰۸؛ استیسی و مک‌گیرگور، ۲۰۰۰، ۱۹۹۷)!

ونگ، از ۱۳۴ دانش‌آموز سنگاپوری که در پایه‌های ششم تا هفتم تحصیل می‌کردند خواست که ۱۲ مسئله؛ مشابه مسئله‌ی زیر را حل کنند:

۱۰۰ راهب، ۱۰۰ کلوچه را خوردند. هر راهب ارشد ۳ کلوچه، و هر ۳ راهب تازه‌وارد فقط یک کلوچه خورد. چند تا راهب ارشد و چند تا راهب تازه کار داریم؟

به‌طور متوسط؛ فقط ۱۰٪ از دانش‌آموزان برای حل مسایل داده شده از معادله‌های جبری استفاده کردند، و در این میان، تنها ۵۰٪ از راه‌حل‌های ارائه شده درست بود. این درحالی است که همه‌ی روش‌های دیگر، از جمله روش «حدس ـ امتحان ـ اصلاح» به طور قابل توجهی از نرخ موفقیت بهتری برخوردار بود (حدود ۷۵٪).

ارشد	تازه‌وارد	جمع کلوچه‌های خورده شده
۴۰	۶۰	۱۲۰+۲۰=۱۴۰×
۴۶	۵۴	۱۳۸+۱۹=۱۵۷ ×
۱۰	۹۰	۳۰+۳۰=۶۰ ×
۲۸	۷۲	۸۴+۲۹=۱۰۸ ×
۲۵	۷۵	۷۵+۲۵=۱۰۰✓

راهب‌های ارشد، ۲۵ تا هستند.

راه‌حلی مبتنی بر حدس ـ امتحان ـ اصلاح

اکثر دانش‌آموزان، روش‌های عددی را به روش‌های جبری ترجیح می‌دهند. مهم‌تر این که، بسیاری از آن‌هایی هم که به هر دلیل از روش‌های «جبری» استفاده می‌کنند. تعبیری را که مورد انتظار شما است به کار نمی‌گیرند. برای مثال به راه‌حل زیر توجه کنید.

تعداد راهب‌های ارشد، x

تعداد راهب‌های تازه‌وارد، y

۳ کلوچه = x

۱ کلوچه = 3y

۴ کلوچه = x+3y

۲۰ کلوچه = 5x + 15y

۱۰۰ کلوچه = 25x + 75y

راهب‌های ارشد، ۲۵ تا هستند.

راه‌حلی با استفاده از «معادله»

در این‌جا، اگرچه در ابتدا از x و y به ترتیب برای نمایش تعداد راهب‌های ارشد و تعداد راهب‌های تازه‌وارد استفاده شده است، اما خیلی زود این تعبیر جبری از دست رفته و جای خود را به پدیده‌ای شایع سپرده است که در آن x و y نه تعداد اشیاء (در این‌جا، تعداد راهب‌ها) را بلکه خود اشیاء (در این‌جا، راهب‌ها) را نشان می‌دهند. این چنین است که هریک از «معادلات» نوشته شده تنها صورتی نمادین از شرایط مسئله است. با این تعبیر، ۳ کلوچه=x، یعنی هر راهب ارشد ۳ کلوچه می‌خورد، ۱ کلوچه=3y، یعنی هر سه راهب تازه‌وارد یک کلوچه می‌خورند، و بالاخره، ۴ کلوچه=x + 3y، یعنی گروهی متشکل از یک راهب ارشد و سه راهب تازه‌وارد روی هم چهار کلوچه می‌خورند. جواب داده شده در انتها درست است، اما جواب درست از راه‌حلی به دست آمده که در آن «جبر» چیزی جز کلمات خلاصه شده نیست.

هم‌چنان که می‌توان حدس زد، همه‌ی دانش‌آموزان به خوش‌شانسی دانش‌آموزان بالا نیستند که با چنین تعبیری از «جبر»، مسأله را حل کنند و به جواب درست هم برسند. لیونی یکی از این دانش‌آموزان است.

لیونی یکی از دانش‌آموزانی است که در تحقیق استیسی و

مک گرگور شرکت داشت . در این تحقیق از دانش آموزان پایه‌های ۹ تا ۱۱ خواسته شد که مسأله‌ی زیر را به طور جبری حل کنند .

مارک و جان روی‌هم ۴۷ دلار دارند. پول مارک، ۵ دلار بیش‌تر از پول جان است. هریک از آن‌ها چقدر پول دارند؟

راه‌حل جبری این مسئله ، چیزی شبیه راه‌حل ویلیام است :

ویلیام

$$x + (x + ۵) = ۴۷$$

$$۲x + ۵ = ۴۷$$

$$۲x = ۴۲$$

$$x = ۲۱$$

حل مسئله ی مارک و جان با استفاده از معادله

اما ، هم‌چون تحقیق ونگ در سنگاپور ، در اینجا نیز چنین راه‌حل‌هایی به ندرت ارائه شد و با وجود این که از دانش آموزان خواسته شده بود که مسئله را به طور جبری حل کنند ، هم چنان بیش‌تر راه‌حل‌ها غیر جبری بود تا جبری ، و هم‌چنان دانش‌آموزان بدون استفاده از جبر موفق‌تر بودند تا با استفاده از آن ، و هم‌چنان شئ‌پنداری حروف در میان راه‌حل‌های «جبری» ارائه شده فراوان بود . «راه‌حل» لیونی یکی از آن‌هاست .

برای درک راه‌حل لیونی ، اجازه بدهید به جواب مسئله نگاهی بیاندازیم . ما اکنون می‌دانیم که جان ، ۲۱ دلار و مارک ۲۶ دلار دارد . هم‌چنین می‌دانیم که در استرالیا سکه‌های ۵ سنتی ، ۱۰ سنتی ، ۲۰ سنتی ، ۵۰ سنتی ، ۱ دلاری و ۲ دلاری ، و اسکناس‌های ۵ دلاری ، ۱۰ دلاری ، ۲۰ دلاری ، ۵۰ دلاری و ۱۰۰ دلاری رایج است . به این ترتیب ۲۱ دلار جان می‌تواند ۴ اسکناس ۵ دلاری و یک سکه‌ی ۱ دلاری یا ۲ اسکناس ۱۰ دلاری و دو سکه‌ی ۵۰ سنتی ، یا بسیاری ترکیبات دیگر از سکه‌ها و اسکناس‌ها به ارزش ۲۱ دلار باشد . به همین ترتیب ، ۲۶ دلار مارک می‌تواند از ترکیبات متعددی از سکه‌ها و اسکناس‌ها به ارزش ۲۶ دلار باشد . مشکل لیونی از اینجا آغاز می‌شود که او نمی‌تواند بین اشیاء (در اینجا ، سکه‌ها و اسکناس‌ها) و ارزش آن اشیاء (در اینجا ، سکه‌ها و اسکناس‌ها) به طور جبری تفاوت قائل شود . این چنین است که معادله‌ای که او می‌نویسد $(y + (x + ۵) = ۴۷)$ ، هیچ کمکی جز «خلاصه‌نویسی» مسئله به او نمی‌کند ؛ چرا که در این معادله ، y نشان‌دهنده‌ی پول جان است و پول جان با خود سکه‌ها و اسکناس‌هایی که در دست اوست تعیین می‌شود نه با ارزش آن‌ها! با داشتن چنین تعبیری ، او نمی‌توانست متقاعد شود که معادله را به شکل $x + (x + ۵) = ۴۷$ بنویسد و متقاعد نشد! ولی به هر حال ، او مسئله را خلاصه‌نویسی کرده بود! به توضیح زیر نگاه کنید .

لیونی

لیونی می‌نویسد $y + (x + ۵) = ۴۷$ و نمی‌تواند کار دیگری انجام دهد. در مصاحبه‌ای هم که با او انجام گرفت، با وجود همه‌ی تلاش‌های مصاحبه کننده، هیچ کمکی به او نشد.
لیونی برای مصاحبه کننده توضیح می‌دهد که برای او y پول جان است و $(x + ۵)$ پول مارک و روی‌هم آن‌ها ۴۷ دلار پول دارند. او مطمئن است که $x + (x + ۵) = ۴۷$ اشتباه است چون y مثل x نیست.

راه‌حل لیونی برای مسئله‌ی مارک و جان

چنین نتایجی بیش‌تر از آن که ناامیدکننده باشند ، آگاهی دهنده‌اند . ما هم‌اکنون می‌دانیم که ترتیب صرفاً تاریخی «اول حساب ، بعد جبر» انتظارات ما را برآورده نمی‌کند . هم‌چنین می‌دانیم که دانش‌آموزان روش‌های عددی را به روش‌های جبری ترجیح می‌دهند ؛ پس می‌توانیم از این تمایل و توانایی در جهت کمک به آن‌ها در گذر از حساب به جبر استفاده کنیم . اما برای این کار ، نیازمندیم که تفاوت‌های حساب و جبر را به درستی بشناسیم ، چرا که هم‌چنان که در بخش بعدی ملاحظه خواهیم کرد ، عدم توجه به این تفاوت‌ها می‌تواند بازدارنده‌ی درک مناسبی از جبر باشد .

جبر، حساب نیست!

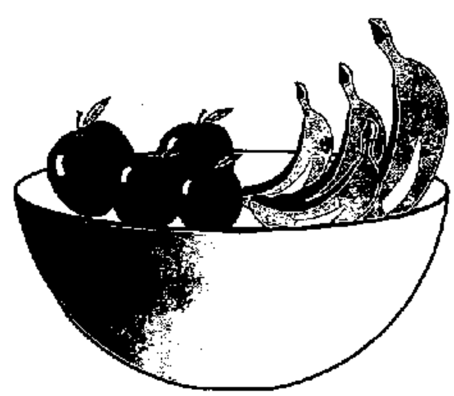
جبر ، حساب نیست! این جمله‌ی واضح چنان عمیق است

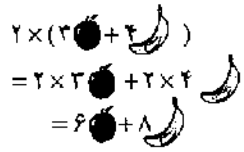
که هربار می‌توان از زاویه‌ای تازه به آن نگریست. ما هم تلاش می‌کنیم که از زاویه‌ای به آن بنگریم که به نظر متناسب با هدف غایی ما است: کمک به دانش‌آموزان در گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری. در این راستا، به سه تفاوت عمده بین حساب و جبر اشاره خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که توجه یا عدم توجه به آن‌ها، چگونه ممکن است ما را در دست‌یابی به هدفمان یاری دهد یا از دست‌یابی به آن دور کند. سه تفاوت مورد نظر عبارت‌اند از:

الف) تفاوت اشیاء حسابی و اشیاء جبری؛
ب) تفاوت اعمال حسابی و اعمال جبری؛
ج) تفاوت حل مسئله در حساب و جبر.

تفاوت اشیاء حسابی با اشیاء جبری

اشیاء حسابی اعدادند و اشیاء جبری نمادها (حروف)، متغیرها، عبارت‌ها و معادلات. عدم توجه به تفاوت در طبیعت این اشیاء می‌تواند تصمیم‌های آموزشی ما را به طور ناخواسته تحت تأثیر قرار دهد. برای مثال، راهی «ساده» برای معرفی متغیرها، استفاده از روش میوه‌های فصل است. این روش در کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی در ایران و هم‌چنین در بعضی از کتاب‌های درسی ریاضی در استرالیا مورد استفاده قرار گرفته است. تصویر زیر از یکی از کتاب‌های درسی در استرالیا است (برای دیدن نمونه‌ی ایرانی آن، به کتاب درسی مربوطه یا به مقاله‌ی امندیا و عبدالله‌پور (۱۳۸۷) مراجعه کنید).





سپس سیب برداشته می‌شود و به جای آن a، و موز برداشته می‌شود و به جای آن b قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} &۲\times(۳a+۴b)\\ &=۲\times۳a+۲\times۴b\\ &=۶a+۸b \end{aligned}$$

روش میوه‌های فصل، روشی ساده ولی اشتباه است چرا که ما با استفاده از این روش به‌طور ناخواسته این تصور را به دانش‌آموز خود القاء می‌کنیم که حروف به‌کار گرفته شده، خود شیئ را نشان می‌دهد؛ و چنین تصوری حتماً مخالف آن چیزی است که ما مایل به آموزش آن بودیم: مفهوم متغیر.

در بهترین حالت، می‌توان تصور کرد که چنین روش‌هایی دانش‌آموزان ما را برای درک، خلاصه‌نویسی و استفاده از خواصی هم‌چون توزیع‌پذیری آماده خواهد کرد. اما هم‌چنان که در قسمت بعد نشان خواهیم داد، این تصور نیز چندان مطابقتی با مشاهدات ندارد.

تفاوت اعمال حسابی و اعمال جبری

مسئله‌ی زیر برگرفته از کتاب ریاضی چهارم دبستان در ایران است:

۴ بچه هر کدام دیروز ۲ تا شکلات خوردند و امروز ۳ تا. در این دو روز آن‌ها روی هم چند شکلات خورده‌اند.

کتاب، دو راه‌حل برای این مسئله پیشنهاد می‌کند که در یکی از آن‌ها، جواب مسئله (۲۰) از محاسبه‌ی (۳+۲)×۴ به‌دست می‌آید و در دیگری از ۳×۴+۲×۴؛ ابتدا بر این اساس نتیجه گرفته می‌شود که ۳×۴+۲×۴=(۳+۲)×۴، سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنند:

$$۸×(۴۰+۲)=۸×۴۰+۸×۲$$

$$۶×(۱۰+۷) = ...$$

$$۲×(۳+۶) = ...$$

بسیار محتمل است که دانش‌آموز با پیروی از الگوی داده شده تساوی‌های بعدی را به درستی کامل کند؛ بدون این که متوجه باشد که علامت تساوی (=) در این جا دارای معنایی متفاوت با تجربه‌های حسابی او از این علامت است: در حساب، = یعنی محاسبات را انجام بده، در حالی که در عبارت‌های عددی بالا، = یعنی عبارت سمت چپ با عبارت سمت راست برابر است. برای دانش‌آموز خوبی که تجربه‌ی کافی از این معنای جبری ندارد، در غیاب نمونه‌ی داده شده، طرف دوم عبارت عددی =(۳+۲)×۴ نه با ۳×۴+۲×۴ بلکه با ۵×۴، و سپس چون نماد ضرب (×) هم فرمان دیگری برای انجام محاسبه است، با حاصل ضرب ۲۰ کامل خواهد شد.

بعدها، در حالی که هنوز تجربیات جبری دانش‌آموزان از اعمالی هم‌چون جمع و ضرب از طرفی، و علامت تساوی از طرف دیگر، در میان تجارب محاسبه‌ای آن‌ها ناپیداست، فقط با تکیه بر نمونه‌های محدودی هم‌چون نمونه‌ی بالا، خواصی هم‌چون توزیع‌پذیری، بیان می‌گردند، خلاصه‌نویسی می‌شوند و مهم‌تر این که به طور نامحسوسی به **همه‌ی اعداد** تعمیم داده می‌شوند. و این چنین است که مشکل دیگری به مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری جبر افزوده می‌شود چرا که بسیاری از آن‌ها حتی در مورد درستی این خواص در حساب هم تردید دارند (بل و دیگران، ۱۹۹۳).

بخشی از این تردید ناشی از تأکید آموزش حساب بر محاسبات است و بخش دیگر، ناشی از درک ناپخته‌ی دانش‌آموزان از خود چهار عمل اصلی. و این همه، پیشرفت آن‌ها را در حل مسایل با جبر و هم‌چنین در جبر دشوار خواهد کرد.

تفاوت حل مسئله در حساب و جبر

می‌توان نمودهایی از تأکید سنتی حساب بر محاسبات و عدم توجه کافی به تفاوت اشیاء حسابی و جبری را در ناتوانی دانش‌آموزان در ارائه‌ی راه‌حل جبری مسایل مشاهده کرد؛ و این در حالی است که بسیاری از این دانش‌آموزان، در ارائه‌ی حل حسابی برای همان مسایل، بسیار توانا هستند. برای مثال، به دو راه‌حل زیرکانه‌ی زیر برای حل مسئله‌ی «مارک و جان» توجه کنید.

وایل

$$y = (۴۷ - ۵) ÷ ۲ + ۵ = \frac{۴۴}{۲} + ۵ = ۲۶$$

$$x = (۴۷ - ۵) ÷ ۲ = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

براندا

$$۴۷ ÷ ۲ = ۲۳/۵ - ۲/۵ = x$$

$$۴۷ ÷ ۲ = ۲۳/۵ + ۲/۵ = y$$

براندا، ابتدا ۴۷ دلار را به طور مساوی بین جان و مارک تقسیم کرد و سپس قسمتی از نیمه‌ای را که به جان داده بود به مارک برگرداند. وایل ابتدا ۵ دلار مارک را داد سپس باقی مانده‌ی پول را به طور مساوی بین جان و مارک تقسیم کرد.

براندا و وایل ابتدا راه دشوار حل مسئله را با استدلالی منطقی در حساب پیمودند و سپس چون از آن‌ها خواسته شده بود که در حل مسئله از جبر استفاده کنند، با نوشتن x و y در آخر، راه‌حل خود را «جبری» کردند!

هیچ کدام از این دو دانش‌آموز باهوش، به درستی تشخیص ندادند که جبر می‌تواند در حل مسئله به آن‌ها کمک کند. هر دوی آن‌ها برای حل مسئله، روش حسابی را برگزیدند و با شروع از اعداد داده شده و محاسبه‌های متوالی روی این اعداد، جواب مسئله را پیدا کردند. اما روش جبری حل این مسئله، طبیعتی کاملاً متفاوت دارد. قدم اول در جبر، توصیف روابط موجود در مسئله است، نه «حل» آن. سپس با استفاده از قواعد تبدیل، این توصیف‌ها، به توصیف‌های دیگر تبدیل می‌شوند تا بالاخره جواب مسئله در انتهای زنجیری از توصیف‌های معادل، سر بر آورَد. مشکل بسیاری از دانش‌آموزان در درست برداشتن قدم اول است. برای مثال، به راه‌حل لِز و محاسبه‌ی انجام گرفته

توسط او، توجه کنید.

لـز

لز با نوشتن ۵+x=۴۷ آغاز می‌کند.

مصاحبه‌کننده: x ما در این مسئله چیه!

لز: فرض کن جان ۲۲ دلار و مارک ۷ دلار داره. آن‌ها دو تا x دارند.

مصاحبه‌کننده: این دو تا x چی هستند؟

لز: مجهولات،... آن‌ها دو عدد مختلف هستند، ۲۲ و ۲۷.

مصاحبه‌کننده (با اشاره به x در ۵+x=۴۷): پس این x که اینجاست چیه؟

لز: اون مقداری که پس از کم کردن ۵ دلار، از ۴۷ دلار باقی می‌مونه.

لز، به طور حسابی به مسئله فکر می‌کند و به طور «جبری» آن را تزیین می‌کند. او با داده‌ها شروع می‌کند و به سمت مجهولات پیش می‌رود و سر راه هرچه را که مجهول می‌یابد، با x نام‌گذاری می‌کند! به این ترتیب او حداقل ۳ تعبیر مختلف از x دارد (پول جان، پول مارک و پولی که پس از کم کردن ۵ دلار از ۴۷ دلار باقی می‌ماند) ولی از این غافل است که این مسئله تنها یک x دارد ـ و حتی برای یک خبره در جبر، تنها یک مجهول.

راه‌حل‌های درست و نادرست بالا، به خوبی طبیعت متفاوت تفکر حسابی و جبری را در حل مسایل نشان می‌دهد (جدول زیر):

حل مسئله به طور جبری	حل مسئله به طور حسابی
با مجهولات شروع می‌کند و ادامه می‌دهد؛	با داده‌ها شروع می‌کند به سمت مجهولات پیش می‌رود؛
مجهولات در حین حل مسئله ثابت باقی می‌مانند؛	مجهولات در حین حل مسئله تغییر می‌کنند؛
معادله، بیان‌کننده‌ی یک رابطه است؛	معادله، فرمولی است برای تولید یک عدد؛
تأکید بر برابری‌های متوالی است.	تأکید بر محاسبات متوالی است.

و این جدول تنها بخش کوچکی از تفاوت‌هایی را که می‌توان برشمرد، نمایش می‌دهد ولی همین بخش کوچک کافی است تا ما را متقاعد کند که گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری، نیازمند نوعی یادگیری عمیقاً جدید و متفاوت است. خوشبختانه، بخشی از این یادگیری می‌تواند در دل حساب انجام گیرد.

جبر در دل حساب

گذر از حساب به جبر نیازمند تغییرات اساسی بسیاری در نحوه‌ی تفکر دانش‌آموزان است. شناخت بزرگی و تنوع این تغییرات به ما نشان می‌دهد که چرا برای بسیاری از دانش‌آموزان در سرتاسر دنیا، جبر آغازی است برای جدا شدن از ریاضیات. از طرفی، آگاهی عمیق از این تغییرات، ما را برای کمک به دانش‌آموزانمان مهیا می‌کند، کمکی که بخشی از آن می‌تواند و باید در دل حساب ارائه شود. ما در این بخش، تنها به چند مثال کوچک از کارهایی که در این راستا می‌توان انجام داد، اشاره خواهیم کرد.

به راه‌حل دانش‌آموزانی که از روش «حدس ـ امتحان ـ اصلاح» در مسئله‌ی «راهب‌ها و کلوچه‌ها» استفاده کرده‌اند نگاه کنید (ص۵). این راه حل به هیچ‌وجه یک راه‌حل معمولی و دم دست نیست. در واقع بسیاری از دانش‌آموزان تنها فهرست کاملی (یا تقریباً کاملی) از تعداد راهب‌های ارشد و تازه‌کار و تعداد کلوچه‌هایی که آن‌ها می‌خورند تهیه کردند و سپس با جست‌جو در این توده‌ی درهم و برهم اطلاعات، به دنبال جواب گشتند و آن را یافتند. اگرچه در این مسئله‌ی خاص، می‌توان جواب را با فهرست کردن همه‌ی حالت‌ها (یا بخشی از آن) به‌دست آورد، ولی ما مایلیم که بیش‌تر دانش‌آموزان قادر به استفاده از روش «حدس، امتحان، اصلاح» باشند؛ چرا که در این روش از این محدودیت که تعداد راهب‌های ارشد و تازه‌کار روی هم ۱۰۰ تا است به طور صریحی استفاده می‌شود. تشخیص چنین محدودیت‌هایی (که بعداً به شکل معادلات جبری ظاهر می‌شوند) اولین قدم اساسی در حل مسایل با جبر (و در جبر) است. خوشبختانه، به راحتی می‌توان چنین روشی را در دل مسایل حسابی آموزش داد. برای مثال در مطالعه‌ای که توسط ونگ (۲۰۰۸) انجام شد، تعداد دانش‌آموزانی که این روش را انتخاب و با موفقیت از آن استفاده کردند، پس از مدت کوتاهی آموزش، افزایش یافت. مثال بعدی (برگرفته از فوجی و

استفنس، ۲۰۰۸)، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان اتفاقات واقعی کلاس درس حساب را، به فرصتی برای آموزش جبر تبدیل کرد.

یکی از دانش‌آموزان سوم دبستان (پیتر) برای انجام دادن بعضی از تفریق‌هایش، از روش زیر استفاده می‌کند.

روش پیتر

این تفریق‌ها آسونند:

۳۱=۶-۳۷

۵۳=۶-۵۹

۸۰=۶-۸۶

اما این یکی‌ها سخت‌ترند:

۶-۸۴ و ۶-۵۳ و ۶-۳۲

من آن‌ها را این طوری حل می‌کنم: اول ۴ تا اضافه می‌کنم بعد ۱۰ تا کم می‌کنم.

۳۶=۴+۳۲، حالا ۱۰ تا کم می‌کنم، جواب میشه ۲۶.

۵۷=۴+۵۳؛ ۱۰ تا کم می‌کنم میشه ۴۷.

معلم کلاس پیتر، می‌توانست به راه‌حل او فقط به چشم یک راه‌حل زیرکانه برای حل بعضی از تفریق‌ها نگاه کند. اما او از این فراتر رفت و راه‌حل پیتر را به فرصتی برای یادگیری شهودی جبر تبدیل کرد. با این هدف، او از دانش‌آموزان دیگر خواست که نظر خود را در مورد راه‌حل پیتر اعلام کنند. پاسخ‌های توماس و آلن در شکل زیر، نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان کلاس است.

توماس

روش پیتر کار می‌کند چون جوابی که به دست آورده درست است.

آلن

اگر ۴ تا اضافه کنم باید ۱۰ تا هم کم کنم، تا مثل این شود که ۶ تا کم می‌کنی.

۳۶=۴+۳۲

۲۶=۱۰-۳۶

۶-۳۲=۱۰-۴+۳۲

تازه، مهم نیست که با چه عددی شروع کنی، برای هر عددی که می‌خواهی کم کنی، اول باید عدد دیگری که بین ۱ و ۱۰ است به آن اضافه کنی تا حاصل آن ۱۰ شود؛ مثلاً، ۷ و ۳ یا ۶ و ۴. آخرش هم برای به‌دست آوردن جواب، ۱۰ تا کم می‌کنی.

توضیحات آلن شاید هنوز خیلی واضح نباشند، اما به خوبی نشان‌دهنده‌ی چگونگی توجه او به ساختار عبارت‌ها به جای محاسبه‌ی آن‌هاست. علاوه بر این، آلن فرصتی برای تعمیم، ارائه‌ی دلیل و درکی جبری از علامت تساوی به‌دست آورده که بدون استفاده‌ی درست معلم از موقعیت پیش آمده، به راحتی از دست می‌رفت. معلم او می‌توانست صبر کند تا سال‌ها بعد، دانش‌آموزانی هم‌چون پیتر یا آلن، در درسی با عنوان «جبر»، برابری $a-(b-c)=a-b+c$ را به عنوان یکی از قواعد تغییر علامت «یاد بگیرند» بدون این که حتی خود پیتر به یاد بیاورد که سال‌ها پیش، همین رابطه را تجربه کرده بود. اما خوشبختانه معلم پیتر چنین نکرد. او به برنامه‌ی «حسابی» خود پای‌بند ماند و از فرصت‌های پیش آمده در دل آن، برای پرورش تفکر جبری دانش‌آموزانی هم‌چون پیتر و آلن، و آماده کردن دانش‌آموزانی هم‌چون توماس استفاده کرد. مسئله‌ی زیر که برگرفته از کتاب ریاضی سال چهارم دبستان است، به خوبی نشان می‌دهد که چه مرز ظریفی بین استفاده یا عدم‌استفاده از این نگاه دوگانه به حساب است.

طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را مانند نمونه بنویسید:

۱۳۵-۱۶۲۱=(۵۸۹-۷۲۴)-۱۶۲۱

...

...=(۱۲۵-۵۷۲)-۵۷۸۱

مثال‌های بالا، تنها نمونه‌های کوچکی از فرصت‌های موجود در دل هر *برنامه‌ی درسی* است. این بدین معنی است

که منتظر تغییرات مطلوب خود در برنامه‌ی درسی یا کتاب‌های درسی نمانید، در عوض به آگاهی خود از نیازهای جبری دانش‌آموزان و چالش‌های پیش روی آن‌ها بیفزایید و از آن در جریان واقعی تدریس حساب استفاده کنید. برای راهنمایی بیش‌تر می‌توانید به کتاب کپوت، کاراهر و بلانتون (۲۰۰۸) هم نگاهی بیندازید.

جمع‌بندی

جبر دروازه‌ی ورود به گستره‌ی ریاضیات است. اما تحقیقات متعددی که در طول سالیان گذشته در سرتاسر دنیا انجام گرفته است، به ما نشان دادند که برای بیش‌تر دانش‌آموزان، جبر نه یک دروازه، بلکه دیواری است که مسیر پیشرفت آن‌ها را مسدود کرده است. این چنین بود که بسیاری، به این شکست‌ها (شکست دانش‌آموزان و شکست برنامه‌های درسی) واکنش نشان دادند؛ آن‌ها تلاش کردند که با به‌دست آوردن شناختی عمیق از دلایل این شکست‌ها، راهی برای تسهیل یادگیری جبر ارائه کنند. درنتیجه‌ی این تلاش‌ها، ما هم اکنون می‌دانیم که «راه شاهانه‌ای» برای یادگیری جبر وجود ندارد، اما هم‌چنین می‌دانیم که راه یادگیری جبر از حساب می‌گذرد؛ و این به این معنی نیست که «اول حساب را درس بدهید بعد جبر»! اما به این معنی است که تلاش کنید که تفکر جبری دانش‌آموزان خود را در دل برنامه‌ی حساب آن‌ها پرورانند. این به این معنی نیست که جبر نمادین را وارد برنامه‌ی حساب آن‌ها کنید! اما به این معنی است که از حساب برای ایجاد درکی شهودی از تعمیم و ساختارهای ریاضی استفاده کنید. اکنون آن‌چه که شما به آن نیاز دارید عادت است، عادت به شنیدن ایده‌های غیرنمادین اما جبری دانش‌آموزان، عادت به دیدن جبر در دل حساب و این یعنی تلاش در جهت پرورش «گوش و چشم جبری» خود (بلانتون کپوت، ۲۰۰۳). و تنها در این صورت است که شما می‌توانید در گذر دشوار دانش‌آموزان از حساب به جبر به آن‌ها کمک کنید.

زیرنویس‌ها

* این مقاله براساس سخنرانی استیسی در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در شهر یزد، بحث‌هایی که در کنفرانس بین استیسی و اصغری انجام گرفته و مکاتبات پس از آن نوشته شده است.

1. Early Algebra

منابع

1. Bell, A., MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Algebraic manipulation: actions, rules and rationales. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss, & G. Booker (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 101-109). Brisbane: MERGA.

2. Blanton, M., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.

3. Fujii, T. & Stephens, M. (2008) Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 127-140). Reston, Va: NCTM.

4. Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum.

5. MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.

6. MacGregor, M. & Stacey, K. (1999). Aflying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(2), 78-85.

7. Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21 st Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Helsinki, Finland. Vol 4. (pp. 190-197).

8. Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 149-167.

9. Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

10. Wong, K. Y. (2008). Success and consistency in the use of heuristics to solve mathematics problems. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Vol 2. (pp. 589-595). Brisbane: MERGA.

۱۱. اصغری، امیرحسین و عبدالله‌پور، مریم (۱۳۸۷): a چه خوشمزه است! مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره ۹۲، صص ۴۹-۴۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۲. برهمند، علی. (۱۳۸۶)، فهم دانش‌آموزان از معادله‌ی درجه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد.

۱۳. کتاب ریاضی سال چهارم دبستان (۱۳۸۶)، دکتر عبدالله شیدفر، دکتر مسعود فرزان، پرویز فرهودی‌مقدم و دکتر رحیم کریمپور.

۱۴. کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی (۱۳۸۵)، دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه ده، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.