درک دانش‌آموزان چهارم دبستان از علامت تساوی

امیر حسین اصغری[۱]، شراره تقی دستجردی*[۲] و مریم عادلی ساردو[۳]
[۱]دانشیار آموزش ریاضی، دانشگاه لیورپول جان موورس asghari.amir@gmail.com
[۲]کارشناس ارشد ریاضی، مدرس خانه ریاضیات اصفهان sh.dastjerdi@gmail.com
[۳]کارشناس ارشد آموزش ریاضی، دبیر آموزش و پرورش madelisardo79@gmail.com

چکیده - تحقیق حاضر با هدف بررسی عملکرد دانش‌آموزان چهارم دبستان در برخورد با علامت تساوی در خانه ریاضیات اصفهان انجام گردید. با توجه به تحقیقات انجام شده درباره درک و عملکرد دانش‌آموزان از علامت تساوی، پاسخ‌های۱۵۹ گروه سه نفره از دانش‌آموزان چهارم دبستان شرکت‌کننده در روز حل مسئله ریاضی[۱] دسته‌بندی شد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که عملکرد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این تحقیق با دسته‌بندی موجود در تحقیقات گذشته، هماهنگ است و اغلب دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این تحقیق تعبیر مناسبی از علامت تساوی نداشتند.

کلید واژه- جبر ابتدایی، علامت تساوی، تعبیر عملیاتی، تعبیر رابطه‌ایی- محاسباتی، تعبیر رابطه‌ایی- ساختاری

۱. مقدمه

جبر همواره جایگاه مهم خود را در آموزش ریاضی مدرسه‌ای به عنوان دروازه ورود دانش‌آموزان به سطح بالاتری از ریاضیات حفظ کرده است. این جایگاه از یک طرف و مشکلات دانش‌آموزان در مسیر یادگیری جبر از طرف دیگر، باعث شده است که آموزش جبر در ریاضیات مدرسه‌ای مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار بگیرد. برخی از این تحقیقات منجر به پیشنهاد تغییر در برنامه ریاضی مدرسه‌ای شده است. برای مثال، اکنون پیشنهاد می‌شود به جای آن‌که در ابتدایی بر حساب تکیه شود و سپس در راهنمایی و دبیرستان بر جبر، آن هم به عنوان دو حوزه‌ی مجزا، توسعه‌ی تفکر جبری در بستر حساب و از دوره‌ی ابتدایی آغاز شود (انجمن ملی معلمان ریاضی[۲]، ۲۰۰۰ و ۲۰۱۴؛ کاپوت[۳]، ۲۰۰۸؛ استیسی و اصغری، ۱۳۸۸؛ و CCSS[۴]،۲۰۱۰).

در راستای این تغییرات، مفاهیم مشترک حساب و جبر از اهمیت بسزایی برخوردارند. در این میان، مفهوم تساوی به عنوان یکی از مهمترین مفاهیم مشترک در حساب و جبر مورد توجه ویژه است. به گفته کارپنتر و همکارانش[۵] (۲۰۰۰) برای بیان تعمیم و توسعه استدلال جبری، داشتن درک صحیحی از تساوی لازم است؛ برای مثال در تساوی جملات عددی مانند $8 \times 5 = 5 \times 8$، تساوی به این معنی است که دو جمله‌ای که در دو طرف تساوی هستند اگر چه در ظاهر متفاوتند، هردو نمایشی از یک عدد یکسان هستند. درک و یا عدم درک درست این مفهوم می‌تواند در موفقیت یا ناکامی دانش‌آموزان در سال‌های بعدی به خصوص در درس جبر و آن‌چه که به تفکر جبری نیاز دارد، نقش بسزایی داشته باشد. آن‌چه که در آغاز لازم است مورد توجه قرار بگیرد این است که دانش‌آموزان چه درکی از علامت تساوی دارند. در این زمینه کارهای زیادی صورت گرفته است؛ از جمله بررسی چگونگی و چرایی درک دانش‌آموزان از علامت تساوی و همچنین ارتباط آن با موفقیت در حل معادلات جبری (فالکنر[۶] و همکارانش، ۱۹۹۹؛ مک نیل و الیبالی[۷]،

---

[۱]برای دیدن اهداف برگزاری روز حل مسئله، سؤالات و نتایج آن، آدرس زیر را ببینید.
http://www.mathhouse.org/VisitorPages/show.aspx?IsDetailList=true&ItemID=4600,1
[2]National Council of Teachers of Mathematics
[3]Kaput
[4]Common Core State Standards
[5]Carpenter, Levi & Farnsworth
[6]Falkner
[7]McNeil, & Alibali

۲۰۰۵؛ نات[8] و همکارانش، ۲۰۰۶؛ استفان[9] و همکارانش، ۲۰۱۳؛ و میکی و مک کلند[10]، ۲۰۱۴). شناخت درک دانش‌آموزان از تساوی به این جهت مهم است که می‌تواند منجر به راه‌کارهای آموزشی برای بهتر شدن عملکرد ریاضی‌ورزی به ویژه جبرورزی دانش‌آموزان شود. در این مقاله، ابتدا بر اساس تحقیقات انجام‌شده دسته‌بندی موجود درباره درک دانش‌آموزان از علامت تساوی به تفصیل بیان می‌شود. سپس با توجه به این دسته‌بندی، پاسخ‌های دانش‌آموزان به دو سؤال جای خالی مربوط به درک از علامت تساوی، مورد بررسی قرار می‌گیرد تا به سؤالات تحقیق پاسخ داده شود.

۲. چارچوب نظری: تعابیر مختلف دانش‌آموزان از علامت تساوی

مولینا و امبروز[11] (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸) و استفان و همکارانش (۲۰۱۳) سه سطح مختلف از درک علامت تساوی را شناسایی کرده اند: عملیاتی[12]، رابطه‌ایی – محاسباتی[13]، رابطه‌ایی – ساختاری[14]. در ادامه هر یک از این سطوح بیان می‌شود.

تعبیر عملیاتی:

برای دانش‌آموزانی که درک عملیاتی از علامت تساوی دارند علامت تساوی نشان‌دهنده دستور "انجام محاسبه[15]" است. این دانش‌آموزان پس از مشاهده علامت تساوی انتظار جواب دارند و یا تمام تلاش خود را می‌کنند که حاصلی به دست آورند. برای مثال در عبارت ... = ۹ + ... = ۷ + ۱۱، جای خالی اول را ۱۸ و جای خالی دوم را با ۲۷ پر می‌کنند. تعدادی از دانش‌آموزان هم، همه اعداد را با هم جمع می‌کنند و حاصل، یعنی ۲۷، را در جای خالی اول می‌گذراند و در جای خالی دوم حاصل ۹+۲۷، یعنی ۳۶، را قرار می‌دهند. برای این دانش‌آموزان پاسخ دادن به عباراتی که جای خالی سمت چپ تساوی باشد، چالشی دیگر است و همین‌طور دیدن عبارتی که در آن جمع‌وندها سمت راست باشند و حاصل سمت چپ. همچنین آن‌ها عبارت ۸ = ۸ را نادرست می‌دانند چرا که هیچ عملی ندارد. حتی برخی از آن‌ها آنقدر بر دانسته‌های خود ایمان دارند که چنین عبارت‌هایی را اشتباه نوشتاری از سوی طراح سؤال می‌دانند (کایرن، ۱۹۸۱؛ فالکنر و همکارانش، ۱۹۹۹؛ مک نیل و الیبالی، ۲۰۰۵؛ نات و همکارانش ۲۰۰۶؛ مولینا و امبروز، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸؛ ریتل–جانسون[16] و همکارنش، ۲۰۱۱؛ و استفان و همکارانش، ۲۰۱۳).

تحقیقات نشان داده است که بیشتر دانش‌آموزان نگاه عملیاتی به علامت تساوی دارند. برای نمونه، فالکنر و همکارانش (۱۹۹۹) در یک تحقیق نشان دادند که همه ۱۴۵ دانش‌آموز پایه‌ی ششم برای جای خالی عبارت ۵+... = ۴+۸، پاسخ ۱۲یا ۱۷ و یا هر دو را داده‌اند. همچنین به نقل از مک نیل و الیبالی (۲۰۰۵)، تقریبا ۷۵ درصد از دانش‌آموزان پایه‌های سوم تا چهارم که آموزشی مبتنی بر تغییر نگاه نسبت به تساوی نداشته‌اند، با نگاه عملیاتی پاسخ چنین جای خالی‌هایی را داده‌اند. با این حال تعبیر دانش‌آموزان از تساوی تنها به این سطح محدود نمی‌شود. محققان این حوزه دو سطح دیگر از درک علامت تساوی توسط دانش‌آموزان را نیز معرفی کرده اند که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند.

تعبیر رابطه‌ایی- محاسباتی:

تعبیر دیگر از تساوی، رابطه‌ای – محاسبه‌ای است. برای این دسته از دانش‌آموزان مفهوم تساوی، به عنوان برابری طرفین تساوی شکل گرفته است؛ اما برای پاسخ‌دادن به جای خالی در عبارت ۶۷+...=۶۸+۷۵ چنین عمل می‌کنند: ۱۴۳=۶۸+۷۵

---

[8]Knuth
[9]Stephens
[10]Mickey & McClelland
[11]Molina & Ambrose
[12]Operational
[13]Relational-computational
[14]Relational-structural
[15] Do somthing
[16]Rittle-Johnson

و ۷۶=۶۷-۱۴۳. به این ترتیب ۷۶ را به عنوان پاسخ در جای خالی قرار می‌دهند. در واقع دانش‌آموزان در این سطح، بدون هیچ گونه توجهی به رابطه‌ی اعداد در سمت راست و چپ عبارت داده شده، فقط بر مفهوم تساوی و توانایی خود در محاسبات اتکاء دارند. گرچه این تعبیری درست از تساوی است و لازمه‌ی آن، داشتن آگاهی از ارتباط بین جمع و تفریق می باشد، اما اگر دانش‌آموز در این سطح بماند، عملکردش در حل مسائل جبری نسبتاً ضعیف خواهد بود (مولینا و امبروز،۲۰۰۸). به نظر می‌رسد دلیل اصلی این عمل‌کرد ضعیف این است که این دانش‌آموزان علامت تساوی را به عنوان برابری پاسخ‌های دو عملیات در نظر می‌گیرند نه به عنوان برابری دو عبارت.

تعبیر رابطه‌ایی- ساختاری:

در تعبیر دیگر از تساوی، دانش‌آموزان هم آن را یک رابطه به مفهوم برابری دو طرف تساوی می‌دانند و هم به رابطه‌ی اعداد داده شده (ساختار کل عبارت و اعداد) در دو طرف تساوی توجه می‌کنند؛ از این رو این تعبیر، رابطه‌ای – ساختاری نام گرفته است. برای مثال در عبارت بالا، آن‌ها با نگاه به اعداد ۶۸ و ۶۷ در دو طرف تساوی درمی‌یابند که برای برقرارشدن تساوی، کافی است عدد ۱ را با ۷۵ جمع کنند. بنابراین بدون آن که خود را درگیر محاسبات سخت و پیچیده کنند، به راحتی به پاسخ درست می‌رسند. رسیدن دانش‌آموزان به این تعبیر از تساوی، نه تنها انجام محاسبات را برای آن‌ها تسهیل می‌کند بلکه کمک خواهد کرد که ترکیبات اعداد را متوجه شوند و درک بهتری از حقایق عددی بدست آورند. همچنین باعث می‌شود تا توانایی آن‌ها در به‌کارگیری استراتژی‌های مناسب ارتقا پیدا کند (فالکنر و همکارانش،۱۹۹۹).

اگر چه تاثیر برنامه‌های درسی بر تغییر دیدگاه دانش‌آموزان حتی در پایه اول دبستان نشان داده شده است (کایرن، ۱۹۸۱؛ فالکنر و همکارانش، ۱۹۹۹؛ مک نیل و الیبالی، ۲۰۰۵؛ نات و همکارانش ۲۰۰۶؛ مولینا و امبروز، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸؛ و استفان و همکارانش، ۲۰۱۳)، اما به نقل از مک نیل و الیبالی (۲۰۰۵) فهم اغلب دانش‌آموزان از تساوی هنوز کامل نشده است و آن‌ها در اتخاذ استراتژی‌های مناسب ضعیف عمل می‌کنند. بنابراین هر یک از دانش‌آموزان در یک زمان مشخص ممکن است هر کدام از تعابیر برشمرده شده در بالا را داشته باشند و حتی یک دانش‌آموز در یک زمان مشخص دو یا سه تا از این تعابیر را برای انجام محاسباتش به کار ببرد که مولینا و امبروز (۲۰۰۸) از این مرحله به عنوان "مرحله‌ی ناپایدار[۱۷]"یاد می‌کنند.

۳. سؤالات تحقیق

در اسفندماه ۹۳ مسابقه‌ای با عنوان *روز حل مسئله ریاضی*، به همت شورای خانه‌های ریاضیات ایران، برای دانش‌آموزان پایه‌ی چهارم و پنجم دبستان طراحی و در تعدادی از شهرهای ایران برگزار شد. شرکت کنندگان پایه‌ی چهارم شهر اصفهان در مجموع ۱۵۹ تیم متشکل از ۷۴ تیم سه نفره دختر و ۸۵ تیم سه نفره پسر بودند که به دو سوال زیر که مربوط به درک از (علامت) تساوی بود، پاسخ دادند:

❖ ***درجای خالی عدد مناسب بگذارید.***

الف) ... = ... + ۴۵ = ۶۸ + ۳۹   ***ب) ... = ... + ۳۰ = ۵۶ + ۲۵***

به این ترتیب پاسخ‌های گروه‌های سه نفره دانش‌آموزان به این دو سوال جای خالی بررسی شد تا به سوالات پژوهشی زیر پاسخ داده شود:

۱- دانش‌آموزان چهارم دبستان در مواجهه با علامت تساوی چگونه عمل می‌کنند؟

[17]Unstable stage

۲- آیا عملکرد آنها در دسته‌بندی‌های ادبیات پژوهشی این حوزه قرار می‌گیرد؟

۴. نتایج

برای پاسخ به سوال‌های تحقیق حاضر، با توجه به دسته‌بندی درک دانش‌آموزان از علامت تساوی در تحقیقات پیشین، پاسخ‌های دانش‌آموزان به صورت زیر دسته‌بندی شده‌اند:

۱) **پاسخ‌های درست با تعبیر رابطه‌ایی:** ۱۰۲ تیم به سؤال **الف** پاسخ‌های درست (۱۰۷و۶۲)[۱۸] و ۶۸ تیم به سؤال **ب** پاسخ‌های درست (۸۱ و ۵۱) داده‌اند. این پاسخ‌های درست بی‌شک از تعبیر رابطه‌ایی حاصل شده است، هر چند که برای برخی از دانش‌آموزان این تعبیر تثبیت نشده باشد و آن‌ها در مرحله‌ی ناپایدار باشند. درواقع، بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده، فقط ۴۳ تیم به هر دو سؤال **الف** و **ب** پاسخ درست داده‌اند، یعنی تنها ۲۷ درصد.

۲) **جمع‌وندهای سمت چپ را با هم جمع کردن**[۱۹]: این روش در برخورد با عبارات عددی شامل تساوی، یکی از شایع‌ترین اشتباهات است که از تعبیر عملیاتی منجر می‌شود. در واقع دانش‌آموزان بعد از تساوی باید حاصل عملیات داده شده در سمت چپ را بنویسند، خواه جای خالی بالافاصله بعد از تساوی باشد مانند سؤال ب و خواه بعد از تساوی، عدد (یا اعدادی) وجود داشته باشد و بعد جای خالی آمده باشد، مانند سؤال الف (در این حالت دانش‌آموزان توجهی به عدد یا اعدادی که بعد از تساوی آمده است، ندارند). در بررسی نتایج این آزمون مشخص شد که ۲۴ تیم جاهای خالی سؤال الف را با (۵۲ و ۱۰۷) و ۸۳ تیم جاهای خالی سؤال ب را با (۱۱۱ و ۸۱) پر کرده اند. اما با این حال تنها ۱۲ تیم بوده‌اند که هر دو سؤال الف و ب را به این روش پاسخ داده‌اند.

۳) **همه را جمع کردن**[۲۰]: از دیگر پاسخ‌هایی که از تعبیر عملیاتی حاصل می‌شود، پاسخ‌هایی است که دانش‌آموز همه اعداد داده شده چه قبل از تساوی و چه بعد از تساوی را با هم جمع می‌کند و جواب را در جای خالی می‌نویسد. برای جای خالی دوم نیز اعداد داده شده در سمت راست علامت تساوی اول را با هم جمع می‌کند و به این ترتیب یکی از اعداد دوبار حساب می‌شود. دانش‌آموزی که به این شیوه پاسخ می‌دهد، برای مثال جاهای خالی سؤال **الف** را با (۱۹۷ و ۱۵۲) پر می کند. اما از میان ۱۵۹ تیم شرکت کننده تنها یک تیم، آن هم فقط به سؤال **الف**، بدین صورت پاسخ داده است (اگر چه به‌کارگیری این روش به نسبت کلیه‌ی شرکت‌کنندگان، کم است اما نویسندگان مقاله، مشاهدات دیگری نیز داشته‌اند که نشان می‌دهد تعدادی از دانش‌آموزان، به چنین سوالاتی به این شیوه پاسخ می‌دهند. برای مثال در یک آزمون که از ۱۶ دختر و ۳۰ پسر گرفته شد، سه نفر جای خالی ... + ۷ = ۷ + ۱۲ را با ۲۶ ، چهار نفر جاهای خالی ... = ... + ۶۰ = ۶ + ۶۱ را با (۱۲۷ و ۶۷) و سه نفر جاهای خالی سوال **الف** مورد بحث در این مقاله را با (۱۵۲ و ۱۰۷) پر کرده‌اند).

۴) **همه را جمع کردن و سپس تفریق کردن:** یکی دیگر از پاسخ‌ها که آن هم از تعبیر عملیاتی نشئت گرفته شده است به صورت (۶۲ و ۱۰۷) است. در این مورد به نظر می‌رسد که دانش‌آموزان هر سه عدد در سمت چپ و راست سؤال **الف** را با هم جمع کرده و سپس از عدد بدست آمده، جمع‌وند سمت راست تساوی را کم کرده‌اند (این مورد اگر چه به نظر نادر است و این فرض را به ذهن برساند که شاید در نوشتن جاهای خالی ترتیب اعداد را به اشتباه وارد کرده باشند، اما در بررسی‌هایی که در برخورد با دانش‌آموزان دیگر شده است، دو دانش‌آموز کلاس سوم هر کدام به یکی از سؤالات ... = ... ۶۰ = ۶ + ۶۱ و سؤال **الف** مورد بحث در این مقاله به ترتیب جواب‌های (۷، ۶۷) و (۵۳ و ۱۰۸) را داده‌اند. پاسخ (۵۳ و ۱۰۸) اگر چه همراه با دو اشتباه محاسباتی در هر دوی اعداد ۵۳ و ۱۰۸ بوده

---

[۱۸] در نوشتار این مقاله زوج مرتب (۱۰۷و۶۲) به این معنی است که دانش آموزان جای خالی ها را به ترتیب از سمت چپ به راست با اعداد ۶۲ و ۱۰۷ پر کرده اند.

[۱۹] در ادبیات موجود این استراتژی add to the left نامیده می‌شود.

[۲۰] در ادبیات موجود این استراتژی add all نامیده می‌شود.

است، اما این که ابتدا دانش‌آموز هر سه عدد را جمع کرد و حاصل ۱۰۸ را بدست آورده و سپس از ۱۰۸، عدد ۴۵ را کم کرده، تائیدی بر وجود این دسته است).

۵) **تقریب زدن:** بر اساس پاسخ‌های داده شده می‌توان حدس زد که تعدادی از دانش‌آموزان، با توجه به جمع‌وندهای داده شده، جای خالی اول را با اعداد رُند نزدیک به جمع‌وند دیگر سمت چپ تساوی پر کرده‌اند. در کل ۸ تیم در این دسته قرار می‌گیرند که ۳ تیم به سؤال الف پاسخ‌های (۱۱۵ و ۷۰) و ۵ تیم پاسخ‌های (۹۰ و ۶۰) را داده‌اند. اگر چه این دانش‌آموزان در جای خالی جواب محاسباتشان را ننوشته‌اند اما می‌توان آن‌ها را نیز در دسته‌ی عملیاتی قرار داد چرا که باز هم تساوی را به عنوان نمادی برای انجام محاسبه درنظر گرفته‌اند که البته در این مورد یک مرحله به تعویق افتاده است.

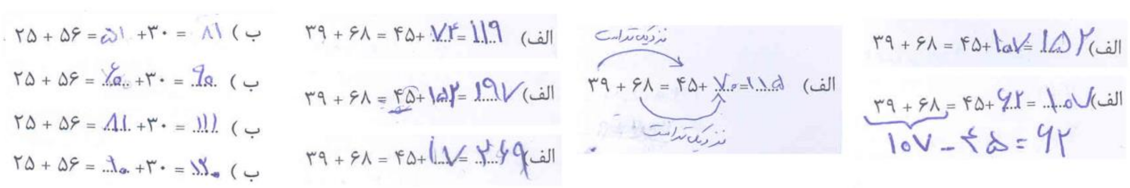
۶) **با یک مقدار ثابت جمع کردن:** از میان شرکت‌کنندگان،۲ تیم پاسخ (۱۱۹ و ۷۴) را به سؤال الف داده‌اند. به نظر می‌رسد این پاسخ بر این اساس بوده است که جمعوند اول از عبارت سمت چپ تساوی، یعنی ۳۹ با ۶ جمع شده و عدد ۴۵ را در عبارت عددی سمت راست تساوی بدست داده است و لذا باید به همین ترتیب ۶۸ را نیز با ۶ جمع کرد. این دانش‌آموزان اگر چه که به پاسخ درست برای هر یک از جاهای خالی نرسیده‌اند، اما باید اذعان داشت که نوع نگاه‌شان خیلی پیشرفته‌تر از دانش‌آموزانی است که به صورت عملیاتی علامت تساوی را تعبیر می‌کنند. در واقع می‌توان این دسته از پاسخ‌ها را با تسامح در رده‌ی رابطه‌ایی قرار داد چرا که در مرحله‌ی اول به اولین جمعوند هر دو طرف تساوی توجه و رابطه‌ی بین آن‌ها را پیدا کرده‌اند و در مرحله‌ی بعد آن رابطه را برای دومین جمع‌وند هر دو طرف تعمیم داده‌اند. با این حساب به یک معنی خیلی مهم تساوی توجه داشته‌اند: "تساوی به منزله‌ی یک نوع تبدیل یا تغییر". در واقع تساوی زوج اعداد (۶۸ و ۳۹) را به زوج اعداد (۷۴ و ۴۵) تبدیل می‌کند! اما در عین حال به یک جنبه‌ی مهم از آن توجه نکرده‌اند: "این تبدیل (تساوی) باید حافظ مقدار باشد". لذا باید به عمل‌های داده شده هم توجه می‌کردند – که در این مورد، عمل جمع در هر دو طرف تساوی است.

۷) **اشتباهات محاسباتی:** برخی از گروه‌ها در انجام محاسبات خود اشتباهاتی داشته‌اند که می‌توان بر اساس نوع پاسخ‌ها، حدس زد که با کدام تعبیر به این نتایج رسیده‌اند. برای مثال در سؤال الف به جای پاسخ‌های درست (۱۰۷و۶۲)، پاسخ‌های دیگری مانند (۱۰۷و۶۱) یا (۱۰۶ و ۶۱) و یا (۱۰۸ و ۶۳) به چشم می‌خورد و همان‌طور که مشاهده می‌شود همه این پاسخ‌ها بیانگر تعبیر رابطه‌ایی هستند. در کل ۶ تیم با تعبیر رابطه‌ایی، اما با اشتباهات محاسباتی به سؤالات الف (۴ تیم) و **ب** (۲ تیم) پاسخ داده‌اند.

۸) **پاسخ‌های پرت:** به نظر می‌رسد دانش‌آموزانی که پاسخ‌های پرت به سؤالات داده‌اند، تفاوت چندانی با دانش‌آموزانی که برگه‌ی امتحان را بدون پاسخ گذاشته‌اند، ندارند چرا که هیچ گونه منطقی در چگونگی رسیدن به چنین پاسخ-هایی دیده نمی‌شود. برای مثال پاسخ‌های (۵۰ و ۵) و یا (۱۶۹ و ۱۷) به سؤال **الف** در این دسته قرار گرفته اند. ۲۰ تیم پاسخ‌های از این دست داده‌اند که ۱۹ تیم برای سؤال **الف** و یک تیم برای سؤال **ب** است.

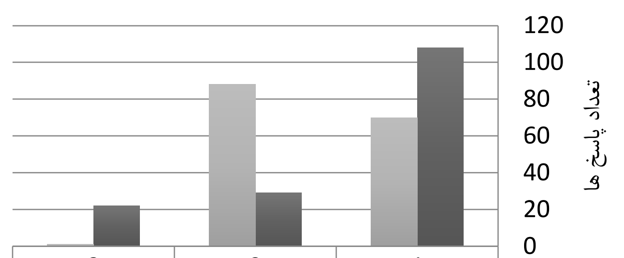
۹) **بدون پاسخ:** از میان ۱۵۹ تیم، تنها سه تیم به سؤال **الف** پاسخ نداده اند و هیچ تیمی نبوده است که به سؤال **ب** پاسخ نداده باشد.

در شکل ۱، برخی از پاسخ‌های داده شده به دو سؤال **الف** و **ب** دیده می‌شوند.



شکل ۱: نمونه‌ایی از پاسخ‌ها به دو سوال **الف** و **ب**

جدول و نمودار ۲ نشان می‌دهد که فراوانی هر کدام از این دسته‌ها، برای هر یک از سؤالات **الف** و **ب** چگونه است.



	3	2	1
سوال الف	22	29	108
سوال ب	1	88	70

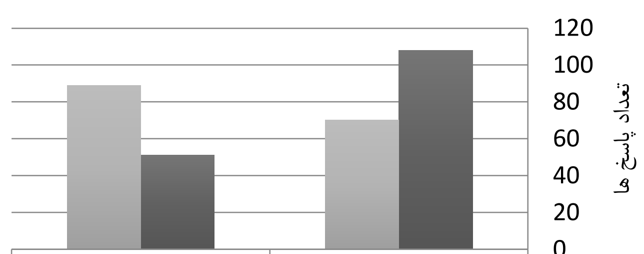
جدول و نمودار ۲. فراوانی پاسخ‌ها برای دسته‌های ۱) رابطه‌ایی، ۲) عملیاتی و ۳) پاسخ پرت/ بی‌پاسخ به سؤالات **الف** و **ب**

۵. بحث و نتیجه گیری

توضیحات هر یک از دسته‌بندی‌های بالا نشان می‌دهد علی رغم انواع مختلف پاسخ‌ها، همه‌ی آن‌ها را می‌توان در سطح‌بندی‌ایی که در چارچوب نظری آورده شده است، گنجاند. با این حال به کمک جدول و نمودار ۲، می‌توان نکات زیر را نیز استخراج کرد:

اول آن‌که، تاثیر ویژگی‌های سؤال از جمله اعداد به کار رفته و این که جای خالی در کجا باشد، می‌تواند ما را به این فرضیه برساند که برای دانش‌آموزانی که در مرحله ناپایدار هستند، وجود جای خالی بلافاصله بعد از تساوی، تعبیر عملیاتی را نسبت به تعبیر رابطه‌ایی بیشتر برمی‌انگیزاند. از همین رو درصد موفقیت دانش‌آموزان در سؤال **الف** بسیار بیشتر از موفقیت در سؤال **ب** است. با این حال باید توجه داشت که برخی از دانش‌آموزان نیز وجود دارند که سؤال **ب** را به درستی پاسخ داده‌اند اما در پاسخ به سؤال **الف** ناتوان بوده‌اند که چرایی آن می‌تواند در پژوهش‌های دیگری مورد بررسی قرار گیرد.

دیگر آن که، بیش از ۱۰ درصد دانش‌آموزان، دربرخورد با سؤال **الف** که جای خالی بلافاصله بعد از تساوی نبوده است، دچار سردرگمی شده‌اند به گونه‌ایی که یا این سؤال را بی‌پاسخ گذاشته‌اند و یا پاسخ‌های پرت داده‌اند. به عبارت دیگر به نظر می‌رسد این سؤال آن چنان با تصورات قبلی و البته نادرست آن‌ها در تعارض بوده که آن‌ها را از حل سؤال بازداشته است. اما در سؤال **ب** که جای خالی بلافاصله بعد از تساوی است، این دانش‌آموزان تشویق شده‌اند که به صورت عملیاتی علامت تساوی را تعبیر کنند و لذا هیچ تیمی سؤال **ب** را بی پاسخ نگذاشته و تنها یک پاسخ پرت وجود داشته است. بنابراین اگر بپذیریم که دسته‌ی سوم، یعنی پاسخ پرت یا بی پاسخ، نیز در همان دسته عملیاتی قرار می‌گیرند، آن‌گاه جدول و نمودار ۳ را خواهیم داشت:



	2	1
سوال الف	51	108
سوال ب	89	70

جدول و نمودار۳. فراوانی پاسخ‌ها برای دسته‌های ۱) رابطه‌ایی و ۲) عملیاتی به سؤالات الف و ب

با یک نگاه کلی به نمودار بالا ممکن است این نتیجه به ذهن متواتر شود که وضعیت درک دانش‌آموزان از تساوی و عملکرد آن‌ها خیلی ضعیف نبوده است؛ اما طبق بررسی داده‌های جمع‌آوری شده، از ۱۵۹ تیم، تنها ۴۳ تیم به هر دو سؤال **الف** و **ب** پاسخ درست داده‌اند. بنابراین بیش از ۷۰ درصد دانش‌آموزان هنوز در مرحله‌ی ناپایدار هستند و تعبیر درست رابطه‌ایی از تساوی برای آن‌ها تثبیت نشده است.

در آخر، به نظر می‌رسد، به واسطه اهمیت مفهوم تساوی، وجود علامت تساوی در جای جای ریاضی و ارتباط ویژه آن با تفکر جبری، می‌بایست این موضوع مورد توجه بیشتری از سوی معلمان و آموزشگران ریاضی قرار گیرد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند مراتب سپاس و قدردانی خود را از مسئولان خانه ریاضیات اصفهان برای اعتماد و همکاری برای در اختیار قرار دادن پاسخ‌های دانش‌آموزان شرکت کننده در روز حل مسئله ریاضی، اعلام نمایند.

مراجع

1. P. Barmby, L. Bilsborough, T. Harries, *Primary mathematics, teaching for understanding*, Open University Press, 2009.
2. K. P. Falkner, L. Levi, T. P. Carpenter, “Children’s Understanding of Equality: A Foundation for Algebra,” *Teaching Children Mathematics*, Vol. 6, pp. 232-36, 1999.
3. J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton, *Algebra in the early grades*, New York: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 5-17, 2008.
4. C. Kieran, “Concepts associated with the equality symbol,” *Educational Studies in Mathematics (ESM)*, Vol. 12, pp. 317-26, 1981.
5. E. J. Knuth, A. C. Stephens, N. M. McNeil, M. W. Alibali, “Does understanding the equal sign matter?,” *Journal for Research in Mathematics Education (JRME)*, Vol. 37, No. 4, pp. 297-312, 2006.
6. N. M. McNeil, M. W. Alibali, “Why won’t you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations,” *Child Development*, Vol. 76, pp. 883–899, 2005.
7. K. W. Mickey, J. L. McClelland, “A neural network model of learning mathematical equivalence,” *Proceedings of the 36th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 1012-1017, 2014.
8. M. Molina, R. Ambrose, “Fostering Relational Thinking While Negotiation the Meaning of the Equal Sign,” *Teaching Children Mathematics*, Vol. 13, No.2, pp. 111-117, 2006.
9. M. Molina, R. Ambrose, “From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders,’ developing algebraic thinking,” *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol. 30, No. 1, pp. 61-80, 2008.
10. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.
11. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles to actions NCTM, Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM, 2014.
12. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, *Common Core State Standards*. Washington, DC, 2010.
13. B. Rittle-Johnson, P. G. Matthews, R. S. Taylor, K. L. McEldoon, “Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach,” *Journal of Educational Psychology*, Vol.103**,** No. 1, pp. 85, 2011.
14. A. C. Stephens, E. J. Knuth, M. L. Blanton, I. Isler, A. M. Gardiner, T. Marum, “Equation structure and the meaning of the equal sign: the impact of task selection ineliciting elementary students' understandings,” *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 32 , pp. 173-182, 2013.

۱۵. استیسی، ک.، اصغری، ا. (۱۳۸۸)، *گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری*، مجله رشد آموزش ریاضی، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، شماره ۹۵، ۴-۱۱.
۱۶. داودی، خ.، رستگار، آ. و عالمیان، و. (۱۳۹۲)، *ریاضی اول دبستان*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۷. داودی، خ.، رستگار، آ. و عالمیان، و. (۱۳۹۲)، *ریاضی دوم دبستان*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۸. حاجیان، ف.، داودی، خ.، رستگار، آ. و عالمیان، و. (۱۳۹۲). *ریاضی سوم دبستان*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۹. داودی، خ.، رستگار، آ.، ریحانی، ا.، صفاری آذر، ش. و عالمیان، و. (۱۳۹۳). *ریاضی چهارم دبستان*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.