داستان جبر

منافع و دام‌های شیءانگاری

بخش اول

نویسندگان: آنا اسفارد و لیُرا لینچِوسکی
مترجمان: زهرا کامیاب
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی
امیرحسین اصغری
دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به‌کار رفته‌اند. علاوه بر این، این مسئله به آن‌چه فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است، یعنی تمرکز اصلی بر تغییرپذیری[1] و انطباق‌پذیری[2] دانش جبری دانش‌آموزان است.

تجزیه و تحلیل، در درون چارچوب نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم انجام شده است. براساس این نظریه، یک دوگانگی فرایند-شیء ذاتی در بیش‌تر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا، مفهوم عملیاتی (فرایندمحور[3]) ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیءانگاری فرایندها، اشیای ریاضی (مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌شوند. شواهد بسیاری وجود دارد که نشان می‌دهند رسیدن به شیءانگاری مفاهیم، دشوار است.

در این مقاله، ابتدا ماهیت و رشد تفکر جبری از دیدگاه شناخت‌شناسی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. حامی این دیدگاه، مشاهدات تاریخی است. درنهایت، رشد تفکر جبری به‌عنوان دنباله‌ای از انتقال‌های همواره رو به پیشرفت، از نگاه عملیاتی به ساختاری معرفی شده است. سپس، این مدل برای یادگیری فردی به‌کار رفته است. تمرکز بر دو انتقال تعیین‌کننده است: انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری از «یک مقدار ثابت» (از یک مجهول) و سپس از این‌جا به جبر تابعی (از یک متغیر). بعد از این، دشواری‌هایی که یادگیرندگان در این نقاط اتصال تجربه می‌کنند، با استفاده از داده‌های تجربی بیش‌تری که از دامنه‌ی وسیعی از منابع به‌دست آمده، شرح داده شده است.

کلید واژه‌ها: جبر مدرسه‌ای، شیءانگاری مفاهیم، تفکر جبری.

زمانی که به یک عبارت جبری مانند $۳(x+۵)+۱$ نگاه می‌کنید، چه چیزی می‌بینید؟ بستگی دارد. احتمالاً در بعضی موقعیت‌ها خواهید گفت، این توصیفی کوتاه و رسا از یک فرایند محاسباتی است. در این حالت

$3(x+5)+1$ هم‌چون دنباله‌ای از دستورالعمل‌ها است: ۵ را به عددی که دارید اضافه کنید، نتیجه را در ۳ ضرب و سپس ۱ را اضافه کنید. در موقعیتی دیگر ممکن است این عبارت جبری را طور دیگری ببینید: $3(x+5)+1$ عدد معینی را نمایش می‌دهد. این عبارت، نتیجه‌ی محاسبات است نه خود محاسبات. اگرچه عدد x مجهول است و در هر لحظه نمی‌توان نتیجه را مشخص کرد، با این وجود، این عبارت جبری هنوز یک عدد است و انتظار می‌رود کل عبارت به‌عنوان یک عدد عمل کند. تعبیر دیگری هم وجود دارد: ممکن است $3(x+5)+1$ را به‌عنوان یک تابع در نظر بگیریم. تابع، نگاشتی است که هر عدد x را به عدد دیگری می‌برد. در این حالت، فرمول هیچ مقدار ثابتی (حتی مجهول) را نشان نمی‌دهد. در عوض، نشان‌دهنده‌ی یک تغییر است. اگر در این عبارت جبری به جای یکی از ضرایب عددی (مثلاً ۳) یک حرف قرار گیرد (مثلاً a)، عبارت جبری حاصل $a(x+5)+1$، پیچیده‌تر به نظر می‌رسد. در این حالت ممکن است عبارت به‌عنوان خانواده‌ای از توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شود. علاوه بر این، تعبیر دیگری نیز وجود دارد: ممکن است فردی ادعا کند آن‌چه در پس نمادها پنهان شده، تابعی از دو متغیر، از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ است.

البته شیوه‌ی ساده‌تری نیز برای مشاهده‌ی $3(x+5)+1$ وجود دارد: ممکن است این عبارت، براساس شکل ظاهری آن صرفاً به‌عنوان رشته‌ای از نمادها که چیزی را نمایش نمی‌دهند، در نظر گرفته شود. این عبارت جبری به خودی خود یک شیء جبری است. اگرچه این عبارت از نظر معنایی تهی است، اما هنوز ممکن است با آن دست‌ورزی شود و براساس قواعد مشخصی که به‌خوبی تعریف نشده‌اند، با سایر عباراتی از این نوع ترکیب شود.

در این‌جا می‌توان پرسید که آیا در عمل نیز، مشاهدات بالا از معانی جبر مهم هستند؟ پاسخ مثبت است. به‌عنوان مثال، زمانی که با معادلاتی از قبیل $(p+2q)x^2+x=5x^2(3p-q)x$ مواجه می‌شویم، بدون دانستن این‌که آیا تساوی مربوط، عددی یا تابعی است، نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم. در این‌جا این سؤال مطرح است که آیا هدف، به‌دست آوردن مقدار x است به‌طوری که تساوی برقرار باشد (این مقدار باید برحسب p و q بیان شود)؟ یا هدف، به دست آوردن مقادیر پارامترهای p و q است، به‌طوری که دو تابع $(p+2q)x^2+x$ و $5x^2(3p-q)x$ مساوی باشند؟ تفاسیر مختلف، شیوه‌های متفاوت درگیر شدن با مسئله و راه‌حل‌های متفاوت را نتیجه می‌دهد: در حالت اول، فرد ریشه‌های معادله را با به‌کار بردن فرمول $x_1, x_2=(-b\pm\sqrt{\Delta})/2a$ پیدا می‌کند و در حالت دوم، با مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان x در دو عبارت ($p+2q=5$ و $3p-q=1$)، مقادیر پارامترهای p و q به‌دست می‌آیند. حالت دیگری هم وجود دارد که ممکن است نمادها برای فرد معنایی نداشته باشند. این دیدگاه در ابتدا، کمکی به حل مسأله نمی‌کند. اما ممکن است فرد یک عکس‌العمل غیر ارادی نشان دهد. او احتمالاً به‌طور غیر ارادی کاری را انجام می‌دهد که برای آن شرطی شده است، یعنی در مواجهه با یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، بدون توجه به سؤالی که پرسیده شده، به فرمول ریشه‌ها متوسل می‌شود.

ریاضی‌دان فرانسوی فرنکوئیز ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰) اولین کسی بود که مقادیر معین عددی را با نمادها جایگزین کرد. این ابداع، منجر به تغییرات مفهومیِ دور از دسترس در جبر شد

تعدد دیدگاه‌ها نسبت به شیء ظاهراً ساده‌ای مانند $3(x+5)+1$، حقیقتاً گیج‌کننده است. در بخش‌های بعدی خواهیم گفت این مسئله، هم‌چنین منشأ قدرت جبر است.

۱. مقدمات: جبر از نگاه نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به‌کار رفته‌اند. هم‌چنین این مسئله به هرچه که فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است. تمرکز اصلی بر تغییرپذیری و انطباق‌پذیری دانش جبری دانش‌آموزان است. سؤالی که در این‌جا مطرح است این است که یادگیرنده تا چه اندازه می‌تواند تفاسیر گوناگون محتملی از ساخت‌های جبری را درک کند و به کار برد. قبل از درگیر شدن با این مسئله، بر نوع تجزیه و تحلیلی که در این‌جا انجام خواهد شد، تأمل می‌کنیم.

تمایزهایی که در مثال‌های ابتدای مقاله مطرح کردیم، بسیار ظریف هستند و به آن‌چه که در ذهن افراد رخ می‌دهد اشاره دارد،

نه به آن‌چه که روی کاغذ می‌نویسند و به معلم تحویل می‌دهند. درواقع، تفاوت بین تفاسیر مختلف معادله‌ی $(p+۲q)x^۲ + x = ۵x^۲(۳p-q)x$ همیشه در یک آزمون استاندارد نشان داده نمی‌شود. علت این است که دانش‌آموز، چه عبارت را یک تساوی عددی تصور کند، چه آن‌را فقط به‌عنوان رشته‌ای از نمادها در نظر بگیرد، احتمالاً فرمول‌های یکسانی به‌کار می‌برد و دست‌ورزی‌های یکسانی انجام می‌دهد. یک بررسی بسیار دقیق و با جزئیات از رفتارها و اظهارات دانش‌آموز لازم است تا بتوانیم نسبت به تفکر او بصیرتی پیدا کنیم (به‌عنوان مثال شونفیلد[۴] و همکاران را ببینید، ۱۹۹۳؛ نویسندگان این نوع از تجزیه و تحلیل را میکروژنتیک[۵] می‌نامند).

ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساساً یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود

ما در این‌جا سعی می‌کنیم تجزیه و تحلیل دقیق و همراه با جزئیات را با اتکا به یک چارچوب نظری معین که آن را نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم می‌نامیم، انجام دهیم (یادآور می‌شویم که ممکن است سایر نویسندگان، اصطلاحات علمی متفاوتی برای ایده‌های مرتبط یکسان یا تقریباً یکسان به‌کار برده باشند؛ فهرست نام‌های احتمالی را در هرل[۶] و کاپوت[۷]، ۱۹۹۱ ببینید). با کمک این چارچوب، حقایق بی‌قاعده‌ی فراوانی تبدیل به یک کل معنادار و قابل کنترل می‌شوند. مانند هر مدل نظری دیگری، این مدل نیز بر جنبه‌های خاصی از حوزه‌ی مورد جست‌وجو تأکید دارد و سایر جنبه‌ها را کنار می‌گذارد. با این وجود، این مدل به‌عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل توسعه‌ی مفاهیم گوناگون ریاضی، به‌خصوص مفهوم تابع، مورد توجه است (اسفارد، ۱۹۹۲؛ بریدنباخ[۸] و همکاران، ۱۹۹۲). هم‌چنین، این مدل برای نظم بخشیدن به بخش عمده‌ای از یافته‌های روبه‌رشد در مورد تفکر جبری به‌کار رفته است (کیپرن[۹]، ۱۹۹۲). در قسمت‌های بعدی، جبر را از دریچه‌ی این مدل خواهیم دید.

در باقی‌مانده‌ی این بخش، ایده‌ی اصلی نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم را ارائه خواهیم کرد. ادعاهایی که داریم، نظامی را شکل می‌دهند. در سرتاسر این مقاله، عناصر مختلف این نظام، مورد بحث قرار خواهند گرفت. توصیه می‌شود، خواننده برای شناخت جامع‌تر ایده‌های اصلی این مدل، به اسفارد (۱۹۹۱) و کیپرن (۱۹۹۱) مراجعه کند. علاوه بر این، دوبینسکی[۱۰] (۱۹۹۱) و هرل و کاپوت (۱۹۹۱)، مدل تقریباً مشابهی را توصیف می‌کنند. ایده‌های دوبینسکی، تعمیمی از نظریه‌ی تجرید بازتابی[۱۱] پیاژه است (بت[۱۲] و پیاژه، ۱۹۶۶). مشاهدات کاپوت و هرل براساس مفهوم گرینو[۱۳] از هستی مفهومی[۱۴] است (گرینو، ۱۹۸۳). خاطرنشان می‌سازیم، ایده‌ی دوییت فرایند ـ شی اشیای ریاضی که در این مقاله نقش اساسی دارد، دوگانگی ابزار ـ شیء دوآدی[۱۵] (۱۹۸۵) را به‌یاد می‌آورد.

در مثال ابتدای مقاله، اشیای ریاضی گوناگونی به‌عنوان مصداق‌های عبارت جبری معرفی شده‌اند. مثلاً یک عدد، یک تابع، یک خانواده (مجموعه) از توابع مصداق‌هایی از عبارت‌های جبری هستند. اما یکی از تعابیر عبارت جبری ماهیت متفاوتی داشت؛ زمانی که $۳(x+۵)+۱$ به‌عنوان یک‌سری از عملیات خوانده شد، این فرایند محاسباتی بود که به نمادها معنا بخشید نه هر شیء مجرد دیگری (البته صرف‌نظر از اعدادی که در فرایند به‌کار رفته‌اند). چیزی که در این مثال مشاهده شد، ظاهراً در کل ریاضی شایع است: نمایش یکسان و مفاهیم ریاضی یکسان، ممکن است گاهی به‌عنوان فرایندها و گاهی به‌عنوان مفاهیم تفسیر شوند؛ یا، به بیان اسفارد (۱۹۹۱)، ممکن است هم عملیاتی و هم ساختاری درک شوند. بنابراین، شیوه‌های به‌ظاهر ناسازگار در درک ساخت‌های ریاضی، در هر نوع فعالیت ریاضی حضور دارند و مکمل یک‌دیگرند. این واقعیت، نقطه‌ی شروع مدل یادگیری و حل مسئله‌ی ریاضی ما را شکل می‌دهد. مفهوم مکمل به همان شیوه‌ای که در فیزیک به‌کار می‌رود (براساس ایده‌های نیل بوهر[۱۶])، در این‌جا نیز به‌کار رفته است. در فیزیک برای توجیه برخی مشاهدات، موجودات درون‌اتمی را هم به‌عنوان ذره‌های مادی و هم به‌عنوان موج در نظر می‌گیریم.

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل‌شدن بین آن‌ها ساده نیست. توانایی درک ریاضی به این شیوه‌ی دوگانه، جهان ایده‌های مجرد را به تصویری از جهان مادی تبدیل می‌کند: مشابه جهان واقعی، اعمالی که در این‌جا انجام می‌شوند، «مواد خام» و محصولاتی دارند. این

زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به‌طور کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی‌های یکسانی دارند. به‌عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست‌ورزی نیستند. قابل دست‌ورزی بودن است که این امکان را فراهم می‌کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شیء مانندی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده‌اند، تفکر ساختاری را ترغیب می‌کند

مواد خام و محصولات، موجوداتی هستند که با آن‌ها به‌عنوان اشیای اصیل و پایدار رفتار می‌شود. با این وجود، برخلاف زندگی واقعی، یک نگاه دقیق‌تر به این موجودات آشکار می‌کند که نمی‌توان آن‌ها را به‌عنوان موجودات قائم به ذات[17] که بتوانند از فرایندها جدا باشند، در نظر گرفت. اشیای مجردی مانند $\sqrt{-1}$ و -۲ یا تابع $۳(x+۵)+۱$ نتیجه‌ی نگاه‌های متفاوت به رویه‌های به‌دست آوردن ریشه‌ی دوم از -۱، منفی کردن ۲ و نگاشت اعداد حقیقی روی خودشان از طریق یک تبدیل خطی است. بنابراین، اشیای ریاضی نتیجه‌ای از شی‌انگاری مفاهیم هستند و شی‌انگاری مفاهیم حاصل توانایی ذهنی ما برای دیدن نتیجه‌ی فرایندها به‌عنوان موجودات پایدار قائم به‌خود است.

این مشاهده‌ی هستی‌شناسانه، نتایج نظری متعددی دربردارد، نظام کاملی از ادعاها در مورد حل مسئله‌ی ریاضی تدارک می‌بیند و مدلی از شکل‌گیری مفاهیم را به‌وجود می‌آورد. این مدل، هم‌چنان که برای درک تحول تاریخی مفاهیم به‌کار می‌رود، برای یادگیری فردی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دلایلی برای دشواری‌هایی که دانش‌آموز در فهمیدن یک ایده‌ی ریاضی جدید تجربه می‌کند، ارائه می‌دهد. در ادامه، همه‌ی این موضوعات را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲، بحث را با یک تجزیه و تحلیل معرفت‌شناختی که توسط مشاهدات تاریخی حمایت می‌شود، آغاز می‌کنیم. در بخش ۳، یک دیدگاه روان‌شناسی مطرح می‌کنیم و تلاش خواهیم کرد نشان دهیم که مدل شکل‌گیری جبر که از طریق تجزیه و تحلیل تاریخی و معرفت‌شناختی ساخته شده، تا حدود زیادی متناسب با فرایندهایی است که همراه با یادگیری فرد رخ می‌دهند.

۲. جبر چیست و چگونه توسعه یافته است؟

برای نشان دادن این‌که در ریاضی، مفهوم عملیاتی مقدم بر مفهوم ساختاری است، می‌توان بحث‌های نظری و تجربی بسیاری به‌کار برد. آن‌چه در یک سطح به‌عنوان یک فرایند درک می‌شود، در سطح بالاتر به‌عنوان یک شیء درک می‌شود (به‌عنوان مثال؛ اسفارد، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ را ببینید). به‌نظر می‌رسد زمانی که کاپوت (۱۹۸۹) بیان می‌کند که «موجودات ذهنی که از طریق شیءانگاری مفاهیم (دیدن اعمال، رویه‌ها و مفاهیم به‌عنوان اشیای پدیدارشناختی) ساخته شده‌اند، می‌توانند به‌عنوان پایه‌هایی برای اعمال، رویه‌ها و مفاهیم جدید در سطح بالاتری از سازمان‌دهی به‌کار روند» (ص. ۱۶۸)، مشاهدات مشابهی داشته است. هرچند ممکن است نقطه‌ی شروع برای ما و کاپوت کاملاً متفاوت باشد (به‌نظر می‌رسد ایده‌های کاپوت براساس نظریه‌ی تجرید بازتابی پیاژه بوده است)، اما اتفاق‌نظر اساسی در مورد نقش فرایندها و اشیای ریاضی و وابستگی متقابل آن‌ها وجود دارد. فرودنتال یکی از صریح‌ترین طرفداران تصور ریاضی به‌عنوان سلسله‌مراتبی از دیدگاه‌های متناوب است: «تجزیه و تحلیل من از فرایند یادگیری ریاضی سطوحی را در فرایند یادگیری آشکار ساخته است، جایی که ریاضیاتی که در یک سطح انجام می‌شود، ریاضی مشاهده شده در سطح بعدی می‌شود» (فرودنتال، ۱۹۷۸، ص ۳۳). هرچند این ادعا براساس تجزیه و تحلیل‌های متفاوتی بنا شده است، اما مانند نظریه‌ی ما، به‌ویژگی‌های اساسی یکسانی از ساخت‌های ریاضی اشاره دارد؛ یعنی بر این حقیقت تأکید دارد که ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساساً یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود.

همان‌طور که قبلاً گفتیم، ساخت‌های جبری باید دوییت فرایند ـ شیء را انتقال دهند. اما انعطاف‌پذیری در هستی‌شناسی موجب می‌شود تا رسیدن به توانایی درک جنبه‌ی ساختاری، ساده نباشد. بنابراین، نقاط اتصال مهم در رشد ریاضی جایی است که انتقال از یک سطح به سطح دیگر رخ می‌دهد. این نقاط،

دشوارترین و جالب‌ترین نقاط هستند. بار دیگر عبارات فرودنتال را به کار می‌بریم؛ «اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمند، ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند» (ص ۷۸). بدین سبب، در تجزیه و تحلیلی که در ادامه می‌آید، تمرکز بر نقاط منفرد در رشد مفاهیم جبری است. برای آن که پیشرفت بیش‌تری صورت گیرد، دیدگاه هستی‌شناسی باید انطباق (فرایند-شیء) را در این نقاط بپذیرد.

قبل از توضیح رشد جبر، ماهیت تحقیق‌مان را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. مانند هر حوزه‌ی دیگری از دانش بشری، امکان دارد ساخت جبر از دیدگاه‌های گوناگونی مورد بررسی قرار گیرد. فرد ممکن است بر ساختار منطقی موضوع تمرکز کند و بپرسد که چگونه بخش‌های مختلف دانش به یک نظام منسجم مرتبط می‌شوند؟ این نوع تجزیه و تحلیل را منطقی[18] می‌نامیم. دیدگاه دیگر، رویکرد تاریخی است. این رویکرد تلاش‌های جمعی را که در طول زمان برای ساخت نظام مفروض مفاهیم انجام شده، مورد توجه قرار می‌دهد. درنهایت، ممکن است، محقق فرایندهای شناختی را که باعث شکل‌گیری یادگیری فردی می‌شوند، مورد بررسی قرار دهد. فرد قطعاً انتظار ندارد که این سه نوع تجزیه و تحلیل نتایج یکسانی دربرداشته باشند. همان‌طوری که برخی از نویسندگان نوشته‌اند، این، یک افسانه است که «ساختار [منطقی] ریاضی به‌طور دقیق تاریخ آن را منعکس کند» (کرو[19]، ۱۹۸۸). علاوه بر این، فرد باید دقت کند که روان‌شناسی، نسخه‌ی دوباره نوشته شده‌ای از تاریخ نیست. به‌عبارت دیگر، فرایند هدایت عامدانه‌ی دوباره‌سازی مفاهیم جبری همان مسیر پرپیچ‌وخم اولین نویسندگانی که این راه نرفته را طی کرده‌اند، نیست. با این وجود، فرد ممکن است انتظار داشته باشد، شباهت‌های برجسته‌ای بین نتایج انواع مختلف تجزیه و تحلیل ببیند. گارسیا[20] و پیاژه (۱۹۸۹)، برای مقایسه‌ی تحولات تاریخی و روان‌شناسی، مورد ویژه‌ای را بررسی کردند. بهتر است احتیاط کنیم، اما نباید تجزیه و تحلیل منطقی را کنار بگذاریم، زیرا منطق می‌تواند یک منشأ بالقوه‌ی ایجاد بصیرت در مورد فرایند یادگیری ریاضی است. ریاضی یک ساختار سلسله‌مراتبی است که در آن، بعضی از لایه‌ها قبل از کامل شدن بقیه، ساخته نمی‌شوند. درنتیجه، بعد از این که براساس تجزیه و تحلیل‌های منطقی، هستی‌شناسی و تاریخی، ادعاهایی در رابطه با توسعه‌ی جبر ارائه کردیم، نشان خواهیم داد که این مراحل، در یادگیری فردی نیز وجود دارند.

گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (اِی. دمورگان، جی. پی‌کات و دی.اِف. گریگوری) پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شیئی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما خودش معنایی ندارد

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به کار رفته‌اند

۱.۲. جبر به‌عنوان حساب تعمیم‌یافته: جنبه‌ی عملیاتی

در تمام تجزیه و تحلیل، نوعی از جبر را «عملیاتی» و نوع دیگر را «ساختاری» می‌نامیم. این بدین معنا نیست که در گام‌های متفاوت، در توسعه‌ی جبر، فقط یکی از انواع جبر (عملیاتی یا ساختاری) حضور دارد. ماهیت مکمل فرایندها و اشیا نشان می‌دهد که حضور یکی بدون دیگری ممکن نیست. علاوه بر این، روشن است که اگر فرایندها (مؤلفه‌های عملیاتی) مورد توجه قرار گیرند، باید اشیای معینی (عوامل ساختاری) وجود داشته باشند که این فرایندها برای آن‌ها به‌کار روند. ادعاهای ما مبنی بر این که انواع معینی از جبر ویژگی عملیاتی دارند درحالی که انواع دیگر ساختاری هستند، نشان می‌دهد تمرکز اولیه بر کدام نوع جبر است. به‌عنوان مثال، این عبارت که «جبر در ابتدا ویژگی عملیاتی دارد» یعنی؛ پیشرفته‌ترین و اصلی‌ترین ایده‌هایی که در این مرحله مورد توجه قرار می‌گیرند، به‌طور عملیاتی درک می‌شوند نه ساختاری.

تاریخ جبر، بیش‌تر مؤید این فرضیه است که رویکرد عملیاتی مقدم بر رویکرد ساختاری است زیرا طی چند هزار سال، جبر چیزی بیش از علم رویه‌های محاسباتی نبود.

از نقطه‌نظر توسعه‌ای، جبر ادامه‌ی حساب است. مشابه حساب (حداقل در مراحل اولیه‌اش) با اعداد و با محاسبات عددی کار می‌کند، اما نوع سؤالاتی که می‌پرسد متفاوت است و الگوریتم‌ها را به شیوه‌ی عمومی‌تری مورد دست‌ورزی قرار می‌دهد. آن‌هایی که نمایش نمادین را به‌عنوان ویژگی لازم جبر

نمی‌دانند، اتفاق نظر دارند که هم در تاریخ و هم در فرایند یادگیری ریاضی، تفکر جبری خیلی زودتر از معرفی هر نماد خاصی ظاهر می‌شود. به‌عنوان مثال، تفکر جبری با اولین تلاش برای پیدا کردن عدد مجهول شروع می‌شود. عدد مجهول عددی است که یک عملیات مشخص روی آن انجام شده و یک نتیجه‌ی معین به‌دست آمده است. در این نوع فعالیت، شیوه‌ی متداول حساب که به‌کار بردن یک الگوریتم محاسباتی برای یک عدد محسوس است، باید به‌طور معکوس انجام شود: به‌عنوان مثال، در یک معادلات درجه‌ی دوم هستند (یا حداقل مسئله‌حل‌کن امروزی از چنین روشی استفاده می‌کند). در هر دو نمونه، به‌جای ضرایب عمومی، از اعداد محسوس استفاده می‌شود و راه‌حل به شکل توصیف کلامی برای پیدا کردن مجهول ارائه می‌گردد. بنابراین، رویکردی کاملاً عملیاتی است؛ تمرکز بر فرایندهای عددی است و هیچ اشاره‌ای به اشیا مجرد غیر از اعداد نیست.

از اولین دوران‌ها تا قرن شانزدهم، جبر لفظی[24] (آن‌چه مورخین برای اشاره به جبر کلامی به‌کار می‌برند) مورد استفاده

جدول ۱

جبر لفظی ـ مثال‌ها

۱. بابلی‌ها، دو (؟) هزار سال قبل از میلاد (برگرفته از بویر[22]، ۱۹۸۵، ص ۳۴)	
مسئله:	اگر مساحت منهای ضلع برابر ۱۴:۳۰ باشد، ضلع مربع را به‌دست آورید (اعداد در مبنای ۶۰ نمایش داده شده‌اند).
راه‌حل:	نصف یک را بگیرید که ۰:۳۰ است، سپس ۰:۳۰ را در ۰:۳۰ ضرب کنید که می‌شود ۰:۱۵ این را به ۱۴:۳۰ اضافه کنید تا ۱۴:۳۰:۱۵ را به‌دست آورید. این عدد مربع ۲۹:۳۰ است. حال ۰:۳۰ را به ۲۹:۳۰ اضافه کنید. نتیجه ۳۰ است که همان ضلع مربع است.
۲. خوارزمی، ۸۲۵ بعد از میلاد، (برگرفته از استروئیک[23]، ۱۹۸۶، ص ۵۸)	
مسئله:	مجذوری که اگر با ده برابر ریشه‌اش جمع شود عدد ۳۹ به‌دست آید، چند است؟
راه‌حل:	... نصف ۱۰ را بگیرید، ۵ به دست می‌آید که اگر در خودش ضرب شود ۲۵ می‌شود، مقداری که اگر به ۳۹ اضافه کنید، ۶۴ به‌دست می‌آید. ۸ ریشه‌ی دوم ۶۴ است. عدد ۵ را از ۸ کم کنید، ۳ باقی می‌ماند. بنابراین، عدد سه یک ریشه از این مجذور است. بنابراین، مجذور ۹ است.

مسئله، فرد باید قیمت تعداد معینی مداد و یک دفتر یادداشت را به‌دست آورد، در مسئله‌ای دیگر، فرد باید تعداد مدادها را با «معکوس انجام دادن»[21] آن‌چه برای محاسبه‌ی قیمت مدادها و دفتر انجام شده، به‌دست آورد. اگرچه این معکوس‌سازی در ابتدا کاملاً ساده و شهودی است، اما زمانی که مسائل کلامی نسبتاً دشوار ظاهر می‌شوند، این امر بدیهی نخواهد بود.

مراحل اولیه در توسعه‌ی جبر را مورد توجه قرار می‌دهیم. دو نمونه از جبر کهن و جبر قرون وسطایی را در نظر می‌گیریم (جدول۱ را ببینید).

هرچند این نمونه‌ها از لحاظ زمانی سه هزار سال با هم فاصله دارند، اما ویژگی‌های اصلی آن‌ها یکسان است زیرا هر دو، قرار می‌گرفت. این جبر، همان جبری است که دانش‌آموزان مدرسه‌ای امروز، قبل از این‌که هر نماد صوری به آن‌ها معرفی گردد، با آن مواجه می‌شوند. طبیعتاً آن‌چه دانش‌آموزان به‌طور لفظی حل می‌کنند، ساده‌تر است و عباراتی که آن‌ها برای راه‌حل‌هایشان به‌کار می‌برند، کاملاً متفاوت است، اما هنوز به‌طور اساسی نوع یکسانی از ریاضیات را نشان می‌دهند: کلامی یا عملیاتی.

در این‌جا باید تأکید شود که ویژگی عملیاتی جبر، جدا از کلامی بودن آن نیست. زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به‌طور

کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی‌های یکسانی دارند. به‌عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست‌ورزی نیستند. قابل دست‌ورزی بودن است که این امکان را فراهم می‌کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شی‌ءمانندی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده‌اند، تفکر ساختاری را ترغیب می‌کند. بنابراین، به‌نظر می‌رسد، معرفی یک نمادگذاری برای شیء‌انگاری مفاهیم لازم باشد. اما این نمادگذاری برای انتقال به حالت ساختاری کافی نیست. همان‌طور که قبلاً در مثال اول ذکر شد، مفاهیم عملیاتی از طریق بازنمایی‌های نمادین هم انتقال می‌یابند. اما، ابزارهای کلامی، تفکر عملیاتی را دائمی می‌سازند. شاید این مسئله، یکی از دلایلی باشد که حوزه‌ی جبری عملیاتی چند هزار سال طول کشید.

گریگوری می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن‌چه هستند یا آن‌چه را که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن‌ها اعمال می‌شود تعریف شده‌اند»

۲.۲. جبر به عنوان حساب تعمیم‌یافته: جنبه‌ی ساختاری

قبل از این‌که گام‌های بیش‌تری را در تاریخ جبر برداریم، لازم است بعضی مقدمات نظری را روشن سازیم.

اولاً، لازم است بر آخرین تذکر بخش قبل تأکید کنیم که تاریخ جبر، تاریخ نمادها نیست، هر چند از مرحله‌ای به بعد، مفاهیم جبری از نمادها جداناپذیر شدند. این درست مانند مفهوم ذهنی هنرمند از یک تصویر یا یک مجسمه است که از آن مجسمه یا تصویر، جداناپذیر است. در واقع، مفاهیم جبر جدید را به سختی می‌توان با هر وسیله‌ای غیر از نمادهای جبری انتقال داد. علاوه بر این، دانش جبری جدید از طریق دست‌ورزی و بررسی عبارات صوری ساخته شده است و بدین جهت، تغییرات در نمادگذاری به موازات تغییر شکل‌های مفهومی می‌باشد. اگرچه تاریخ جبر و تاریخ نمادها مجزا بودند، اما از لحظه‌ای که نمادگذاری جبری جدید معرفی شد، به‌طور ماهرانه‌ای درهم آمیختند، به‌طوری که از لحاظ عملی، بیان تاریخِ یکی از آن‌ها بدون دیگری، غیرممکن است.

موضوع مهم دیگری که در این‌جا مطرح است، ارتباط بین پیشرفت از جبر عملیاتی به ساختاری و دشواری‌هایی است که ایده‌های جبری برای فرد ایجاد می‌کنند. نکته‌ای که می‌خواهیم بگوییم این است که بالا رفتن از سلسله مراتب ایده‌های جبری، لزوماً معادل با پیچیدگی تفکر فرد نیست. حتی ممکن است فردی بگوید که انتقال از جبر عملیاتی به جبر ساختاری، اگرچه یک گام رو به جلو در افزایش درجه‌ی تجرید و تعمیم است، نه تنها بر دشواری نمی‌افزاید، بلکه تسهیل در عملکرد را نتیجه می‌دهد. هر چند رسیدن به شی‌انگاری مفاهیم دشوار است، اما زمانی که رخ دهد، منافع آن فوراً آشکار می‌شود. تا حدود زیادی دشواری کاهش می‌یابد و قابلیت دست‌ورزی افزایش می‌یابد. ممکن است آن‌چه در چنین انتقالی رخ می‌دهد، با رویدادی مقایسه شود که در آن، فردی اشیای متفاوت زیادی را با دست حمل می‌کند. او تصمیم می‌گیرد همه‌ی آن‌ها را در یک کیف بگذارد و کیف را حمل کند. برای آن‌که کاملاً قدردان اثر تسهیل‌کننده‌ی شی‌انگاری مفاهیم باشیم (که از طریق یک نمادگذاری مناسب به دست آمده است) کافی است نگاهی اجمالی به نمونه‌ی جبر لفظی ارائه شده در جدول(۱) داشته باشیم. الگوریتم‌ها، زمانی که از طریق دست‌ورزی‌های صوری روی فرمول‌های کوتاه انجام می‌شوند، بسیار ساده و آشکار به نظر می‌رسند، اما زمانی که با بازنمایی کلامی و صرفاً عملیاتی به‌کار می‌روند، واقعاً دشوارند. بنابراین، ریاضی‌دانان قرون وسطی سزاوار بیش‌ترین قدر و اعتبار هستند زیرا اقدام به حل مسائل پیشرفته و پیچیده‌ای مانند معادلات درجه دو و سه می‌کردند، بدون آن‌که ابزارهای مبتکرانه‌ی جبر نمادین ساختاری را در اختیار داشته باشند (الگوریتم‌های پیچیده‌ای که در حالت لفظی به وسیله کاردان[۲۶] در اثر معروفش[۲۷] در سال ۱۵۴۵ ارائه شده است). تا آن‌جایی که توانایی و تکامل تفکر آن‌ها مورد توجه است، می‌توان آن‌ها را به بهترین ریاضی‌دانان امروزی که با پیشرفته‌ترین مسائل ریاضی مدرن سروکار دارند، مقایسه کرد. زمانی که بر جریان‌های یادگیری فردی و حل مسئله تمرکز داریم، باید همه‌ی این حقایق را در ذهن داشته باشیم.

۲.۲.۱. جبر مقدار ثابت[۲۸] (از یک مجهول). همان‌طور که قبلاً گفته شد، نمادگذاری جبری در قدرتش برای مختصر کردن ایده‌های عملیاتی و تبدیل کردن آن‌ها به قطعه‌های فشرده[۲۹] و در

توانایی بالقوه‌اش برای تسهیل درک و ایده‌ها و دست‌ورزی با آن‌ها بی‌نظیر است. اگر صرفه‌جویی نمادین زودتر معرفی شده بود، می‌توانست میزان توسعه‌ی جبر را تغییر دهد و به دانشمندان در محاسبات کمک کند. در مقایسه با هندسه، جایی که ابزارهای تفکر ساختاری به شکل بازنمایی‌های تصویری به سادگی در دسترس هستند، پیشرفت جبر بسیار کند و با شک و تردید بود. تا آخر قرن شانزدهم، جبر به درجه‌ای از دشواری رسید که بدون انتقال به حالت ساختاری، پیشرفت بیش‌تر آن ممکن نبود. مورخان ریاضی غالباً تعجب کرده‌اند که چرا متفکران گذشته که انگیزه‌ی قوی برای یک تغییر بنیادین در روش داشته‌اند، زودتر از این‌ها به ایده‌ی بازنمایی‌های غیرکلامی دست نیافتند.

اگرچه مفهوم علامت‌گذاری نمادین برای ما خیلی طبیعی است، اما از قرار معلوم، برای آن‌ها اصلاً آشکار نبوده است. در حقیقت، دشواری صرفاً مرتبط با ایده‌ی به‌کار بردن حروف به جای اعداد و علامت‌ها نیست (این مطلب، از زمانی به زمان دیگر در نوشته‌های قدیمی دیده شده است)، بلکه مرتبط با نیاز به فرمول‌های نمادین با دو معنی رویه‌های محاسباتی و اشیائی که تولید شده‌اند نیز می‌باشد. در حساب، به سادگی می‌توانیم این دو معنی را با استفاده از دو عبارت، مجزا سازیم: ۳+۲ عملیات را نشان می‌دهد و ۵ نتیجه است. در جبر، چنین مجزاسازی در عبارتی مانند a+b یا ۱+(۵+x)۳ امکان‌پذیر نیست. در این‌جا، فرایند نمی‌تواند به‌طور واقعی شکل بگیرد؛ از عملیات هیچ مقدار دیگری به دست نمی‌آید. فرمول با جنبه‌ی عملیاتی برجسته (شامل علائم و نشانه‌هایی[30] برای عمل به شکل عملگر است)، باید به عنوان نتیجه‌ی فرایندی که نمایش می‌دهد نیز تفسیر شود. حتی مجردترین تفکر ما با استفاده از استعاره‌هایی شکل گرفته‌اند که توسط تجربه‌ی حسی ایجاد شده‌اند (لاکف[31] و جانسن[32]، ۱۹۸۰). این تجارب حسی، برخلاف ایده‌ی فرایند است که هیچ مقدار دیگری اضافه نمی‌کند و طوری عمل می‌کند مثل این‌که خودش نتیجه است. در واقع، هیچ چیزی مانند این در زندگی واقعی امکان‌پذیر نیست: ما نمی‌توانیم دستور پخت یک کیک را بخوریم و تظاهر کنیم که خود کیک است (اگرچه می‌توانیم کیک یا این‌که کیک را می‌خوریم را تصور کنیم)! بنابراین، حداقل در ابتدا شهود ما در مقابل دوگانگی عملیاتی ـ ساختاری نمادهای جبری مقاومت می‌کند. (انواع جدید اعداد همواره در طول تاریخ با عدم باورپذیری مواجه شده‌اند. در این‌جا مثال دیگری از پدیده‌ای که احتمالاً به ناهماهنگی هستی‌شناسانه‌ی یکسانی نسبت داده می‌شود، می‌آوریم: اشیایی مانند ۳/۴، ۲- یا $\sqrt{-1}$ از عملیات تقسیم، تفریق و به دست آوردن ریشه‌ی دوم به‌وجود آمدند، در حالی‌که به نظر نمی‌رسید این اعمال، هرگز چیزی تولید کنند.)

درست است یک بار موفق شدیم بر این مشکل (دوگانگی فرایند ـ شیء) غلبه کنیم، اما به سرعت آن‌را فراموش کردیم. برای آن‌هایی که در دست‌ورزی‌های جبری بسیار متبحرند (مثلاً معلمان)، این مسئله خیلی زود عادی می‌شود. در واقع، عادت و باورهای هستی‌شناسانه‌ی ما به سادگی چشممان را کور می‌کند. با این حال، ممکن است در کلاس‌های امروزی، شواهد بیش‌تری برای دشواری شی‌انگاری مفاهیم یافت شود، مشروط بر این‌که کسانی که به دانش‌آموزان گوش می‌دهند، به اندازه‌ی کافی بی‌تعصب باشند تا شکاف بین خودشان و یادگیرندگان کم تجربه را درک کنند. در بخش ۲.۳ و ۳.۳ (در شماره‌ی آینده‌ی مجله)، با استفاده از مثال‌هایی، این ادعا را مستند می‌سازیم.

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل‌شدن بین آن‌ها ساده نیست

حقایق تاریخی نشان می‌دهد که ایده‌ی دوگانگی عملیاتی ـ ساختاری برای نسل ریاضی‌دانان نیز دشوار بود. احتمالاً دیوفانتوس[33] (سال ۲۵۰ بعد از میلاد) اولین گام معنادار را در جهت یک رویکرد ساختاری برای رویه‌های محاسباتی برداشت. او با ادغام نظام‌مند حروف با کلمات، برای خودش نوع خاصی از جبر ابداع کرد که به عنوان «مختصرکننده‌ی واژه‌ها»[34] شناخته می‌شود. در هنگام حل مسئله‌های کلامی، دیوفانتوس عباراتی مانند $x-10$ و $x+10$ ساخت (البته با استفاده از حروف یونانی نوشت) و مانند اعداد واقعی، آن‌ها را مورد دست‌ورزی قرار داد (به عنوان مثال، او عبارت‌ها را ضرب کرد و x^2-100 را به دست آورد (فاول[35] و گری[36]، ۱۹۸۷، ص ۲۱۸) را ببینید). این حقیقت که سیزده قرن پس از دیوفانتوس، ریاضی‌دانان هنوز طولانی‌نویسی جبر لفظی را ترجیح می‌دادند، حاکی از دشواری ذاتی شیوه‌ی تفکر دیوفانتوس است.

در عبارات جبری که دیوفانتوس به کاربرد، یک حرف به عنوان

یک مجهول با مقدار ثابت است. برای او عبارات حاصل، اعدادی هستند که از ترکیب مجهول با سایر اعداد به دست آمده‌اند. خواهیم گفت آن‌چه به‌وجود آورد، جبر مقدار ثابت بود که در مقابل جبر تابعی[37] قرار دارد. در جبر تابعی، حروف تغییرات را نشان می‌دهند نه مقادیر ثابت را. ایده‌ی حرف به عنوان متغیر (به عنوان نمادی که به جای آن هر عددی ممکن است قرار گیرد) امروزه برای ما بسیار روشن است، اما برای دیوفانتوس آشکار نبود. در ادامه، راه‌حل او را برای مسئله‌ای مانند «پیدا کردن دو عدد با داشتن جمع و ضرب آن‌ها» می‌آوریم. او اعداد محسوس را به عنوان مقادیر معین به کار می‌بُرد. ایده‌ی یک عبارت جبری به عنوان یک بازنمایی که نتیجه‌ی نهایی ایده‌ی به‌کاربردن فرمول‌ها به عنوان بازنمایی‌های موقت و دست‌ورزی‌ها روی مجهول است، کاملاً متفاوت و پذیرفتن آن دشوارتر است. این ایده ـ این توانایی که فرمول پارامتری بالا به صورت یک عدد در نظر گرفته شود و نه عبارتی که امکان انجام عملی با آن نیست ـ قطعاً نیاز به یک دیدگاه ساختاری تمام و کمال نسبت به عبارات جبری دارد.

جبر یک ساختار سلسله مراتبی است؛ آن‌چه در یک سطح به‌طور عملیاتی درک می‌شود، در سطح بالاتر باید به‌طور ساختاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبری و ارتباط‌های متقابل آن‌ها بسیار مهم است

۲.۲.۲. جبر تابعی (از یک متغیر). از قرن شانزدهم به بعد، عبارات جبری برای نشان دادن توابع به کار رفت نه مقادیر ثابت. کشفیات مهمی در گام‌های متعددی رخ داد که اولین آن‌ها، معرفی نمادهای خاص برای عملیات و روابط بود که با ایده‌ی یک حرف به عنوان یک پارامتر (یک مقدار معین) دنبال شد.

ریاضی‌دان فرانسوی فرنکوئیز ویت[38] (۱۶۰۳-۱۵۴۰) اولین کسی بود که مقادیر معین عددی را با نمادها جایگزین کرد. این ابداع، منجر به تغییرات مفهومیِ دور از دسترس در جبر شد: اولاً، دوگانگی فرایند ـ نتیجه‌ی عبارت جبری، هم‌زمان با ایده‌ی به‌کار بردن حروف به عنوان اعداد نامعین، به ریاضی‌دانان تحمیل شد (عملیات روی حروف، مثلاً $۳(x+۵)+۱$، نمی‌توانند در عمل انجام شوند، پس برای این‌که فرد پیش رود و روی عدد نهایی کاری انجام دهد، انتخابی ندارد مگر این‌که فرمول را به عنوان نتیجه‌ی محاسبه در نظر بگیرد). ثانیاً، زمانی که فرمول‌های حرفی برای نمایش اشیای معین پذیرفته شدند، یک حساب نمادین جبری ابداع شد که شیوه‌های دست‌ورزی معادلات را مشخص می‌کرد و یک تغییر مؤثر در مقایسه با جبر عملیاتی بود، جایی که مسائل عمدتاً با معکوس کردن فرایندهای محاسباتی حل می‌شوند. ثالثاً، بعد از این‌که اختراع جدید (عمدتاً توسط دکارت و فرما) به هندسه انتقال یافت تا به عنوان نوع دیگری از بازنمایی‌های تصویری استاندارد به کار رود و سپس در علوم، برای نمایش پدیده‌های طبیعی، مورد استفاده قرار گیرند (توسط گالیله، نیوتن و لایب نیتز)، جبر نهایتاً از یک علم مقادیر ثابت به علم اندازه‌های متغیر تبدیل شد. از این زمان به بعد، تلاش برای اصول منطقی جبر آغاز شد. معنای عبارات جبری و اجزای نمادین آن‌ها به گونه‌ای بود که به دست آوردن تعریف ریاضی برایشان دشوار بود. نام‌هایی مانند «عدد تعمیم‌یافته» یا «عدد متغیر» به‌زودی به خاطر عدم دقت مردود شدند (فرگه، ۱۹۷۰ را ببینید). سرانجام، مسئله با رهاکردن تعریف ایده‌ی متغیر و ارائه‌ی تفسیری کلی برای یک فرمول جبری، حل شد. تابع به عنوان نوع جدیدی از شیء ریاضی مجرد، ابداع شد تا به صورت مصداقی برای عباراتی مانند $۳(x+۵)+۱$ یا $x^۲+۲y+۵$ به‌کار رود.

ماهیت دشوار مفهوم جدید که با جزئیات، مورد ملاحظه و تجزیه و تحلیل مورخان و روان‌شناسان قرار گرفت (به عنوان مثال، کلینر[39]، ۱۹۸۹؛ دوبینسکی و هرل، ۱۹۹۲ را ببینید)، موضوع جداگانه‌ای است و در این مقاله، به آن نمی‌پردازیم (مقاله‌ی دیگری منحصراً به این موضوع اختصاص داده شده است). با این وجود، درک دشواری‌های ذاتی مفهوم تابع برای آن‌هایی که می‌خواهند بینش عمیقی سبب به فرایند یادگیری داشته باشند، لازم است.

۳.۲. جبر مجرد: جبر عملیات صوری و جبر ساختارهای مجرد

در نقاط اتصال رشد دانش ریاضی، جایی که برخی فرایندهای جدید معرفی می‌شوند، اشیای مجرد مانند انواع مختلف اعداد و توابع پدید می‌آیند. این فرایندهای جدید باید برای فرایندهای معین دیگری به‌کار روند که از قبل شناخته شده هستند. یک شیء مجرد بین دو تای دیگر واسطه می‌شود، ممکن است به

عنوان نتیجه‌ای از فرایند سطح پایین‌تر در نظر گرفته شود که برای دست‌ورزی‌های سطح بالاتر به‌کار می‌رود. بنابراین، در ارتباط با یک شیء مفروض، فرایندهای سطح پایین‌تر و بالاتر را به ترتیب اولیه[40] و ثانویه[41] می‌نامیم. به عنوان مثال، ایده‌ی اعداد گویا، ریشه در تقسیم اعداد صحیح بر اعداد صحیح دارد (فرایند اولیه)، اما موجودی مانند ۳/۴ به خودی خود یک عدد را شکل می‌دهد که مورد دست‌ورزی قرار می‌گیرد و با سایر اعداد ترکیب می‌شود (فرایندهای ثانویه). در جبر، فرایندهای اولیه عملیات حسابی روی اعدادند و فرایندهای ثانویه آن‌هایی هستند که ورودی آن‌ها، عملیات حسابی است. فرایندهای ثانویه در دست‌ورزی روی فرمول‌های جبری به کار می‌روند. پس ایده‌ی تابع، یک پیوند مفهومی را بین محاسبات عددی و دست‌ورزی‌های جبری نمادین شکل می‌دهد. این ایده، به عنوان اتصالی است که از طریق آن، دانش جبری جدید به نظام مفاهیم حسابی مرتبط می‌شود.

بعد از این‌که جبر ویت تبدیل به ابزار مهمی برای انجام دادن ریاضی شد، مرحله‌ی بعدی، بالا رفتن به نقطه‌ی بالاتری است که از آن‌جا بتوان عملیات ثانویه‌ای را که روی توابع اجرا می‌شوند و بر دست‌ورزی‌ها روی فرمول‌ها دلالت می‌کنند، مورد مطالعه قرار داد (یک فرایند که در یک سطح فرایند ثانویه است، در سطح بالاتر، فرایند اولیه می‌شود).

این مرحله از رشد جبر در دهه‌ی سوم قرن نوزدهم در انگلیس شروع شد. در ادامه، داستانی را مطرح می‌کنیم که به دلایلی ارزش گفتن دارد. این دلایل زمانی روشن خواهد شد که دیدگاه‌های امروزه‌ی دانش‌آموزان در مورد فرمول‌ها و معادلات نمادین، مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد (بخش ۳ . ۳).

تا قرن نوزدهم، جبر به عنوان «حساب کلی[42]» در نظر گرفته می‌شد، موضوعی که مختص بیان قواعد حاکم بر رویه‌های حساب به یک شیوه‌ی عمومی بود. این تفسیر تا حد زیادی هدف و کارایی عملیات در فرمول‌های جبری را محدود می‌کند (به عنوان مثال، محدودیت $a > b$ یک مکمل لازم برای عبارت $\sqrt{a-b}$ است.) حالا زمانی که تمرکز بر دست‌ورزی‌های صوری تغییر کرده است، ریاضی‌دانان اصرار بر تنظیم جبر، جدا از هر محدودیتی دارند. گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (ای. دمورگان، جی. پی‌کات[43] و دی. اف. گریگوری) پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شیئی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما برای خودش معنایی ندارد. در واقع، عبارت جبری تبدیل به یک وسیله‌ی نقلیه‌ی تهی شد که منتظر است یک بار معنایی را حمل کند. مکتب صورت‌گرایی به اندازه‌ای که به قواعد حاکم بر حرکت وسیله‌ی نقلیه علاقه داشت به «بار[44]» بالقوه‌اند وسیله علاقه نداشت.

اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمند، ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند

همان‌طور که گریگوری می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن‌چه هستند یا آن‌چه را که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن‌ها اعمال می‌شود تعریف شده‌اند» (گریگوری، ۱۸۴۰؛ نقل قول شده توسط نوی، ۱۹۷۳، ص ۱۹۴). در این‌جا، کلمه‌ی عملیات برای نشان دادن فرایندهای اولیه به کار رفته است در حالی که ترکیب‌ها به وضوح، فرایندهای ثانویه هستند. بدین دلیل، صورت‌گرایان انگلیسی، مرحله‌ی عملیاتی سطح بالاتری را در جبر آغاز کردند. این اولین گام در رشد جبر مجرد بود.

اگرچه داستان جبر در این‌جا پایان نمی‌یابد، اما جایی است که توضیحات تاریخی ما متوقف می‌شود. علم اشیای مجرد مانند گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها یا ایده‌آل‌ها که در ابتدا در قرن نوزدهم توسعه یافت، به موضوع ما ارتباطی ندارد، همان‌طور که در سطح دبیرستان نیز تدریس نمی‌شوند. فقط برای کامل کردن این تصویر یادآور می‌شویم که با ظهور نظریه‌ی گروه‌ها، یک جنبه‌ی ساختاری آغاز می‌شود که جانشینی طبیعی برای جبر عملیاتی سطح بالاتر صورت‌گرایان انگلیسی است.

مراحل گوناگون در توسعه‌ی جبر در جدول(۲) خلاصه شده است و ادعای اولیه‌ی ما را تقویت می‌کند: جبر یک ساختار سلسله مراتبی است؛ آن‌چه در یک سطح به‌طور عملیاتی درک می‌شود، در سطح بالاتر باید به‌طور ساختاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبری و ارتباط‌های متقابل آن‌ها بسیار مهم است. در بحث‌های بعدی، یادگیری جبر توسط دانش‌آموزان مدرسه‌ای

مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

(ادامه‌ی مطلب در شماره‌های آینده...)

جدول ۲

مراحل توسعه‌ی جبر

نوع	مرحله	تمرکز جدید	بازنمایی	نکات برجسته‌ی تاریخی
۱. حساب تعمیم‌یافته	۱.۱. عملیاتی	۱.۱.۱. **محاسبات** عددی	کلامی (لفظی)	پاپیروس رایند سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد
			ادغام کلامی ـ نمادین (مختصرکننده‌ی واژه‌ها)	دیوفانتوس سال ۲۵۰ بعد از میلاد
	۱.۲. ساختاری	۱.۲.۱. (عددی) **نتیجه‌ی** محاسبات (جبر مقدار ثابت)	نمادین (حرف به عنوان یک **مجهول**)	قرن شانزدهم از همه مهم‌تر ویت (۱۶۰۳–۱۵۴۰)
		۱.۲.۲. (عددی) **تابع** (جبر تابعی)	نمادین (حرف به عنوان **متغیر**)	ویت، لایب نیتز (۱۷۱۶–۱۶۴۶) نیوتن (۱۷۲۷–۱۶۴۲)
۲. جبر مجرد	۲.۱. عملیاتی	**فرایندها روی نمادها** (ترکیب عملیات)	نمادین (حرف بدون هیچ معنایی)	مکتب صورت‌گرایی انگلیسی (دمورگان، پی‌کاک، گریگوری) از سال ۱۸۳۰
	۲.۲. ساختاری	**ساختارهای مجرد**	نمادین	قرن ۱۹ و ۲۰: نظریه‌ی گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها و غیره و جبر خطی

توضیحات تکمیلی برای خواننده‌ی این مقاله:

۱. متن حاضر ترجمه‌ی دو بخش اول مقاله است، دو بخش انتهایی در شماره‌های بعدی خواهد آمد.

۲. مترجمان به متن اصلی پای‌بند بوده‌اند ولی مقاله، مقاله‌ی «سختی» است بنابراین احتمالاً باید بیشتر از یک بار خوانده شود.

۳. این مقاله به دلیل ارتباط با مقالات دیگری که در مورد جبر نوشته شده، ترجمه شده است. به‌خصوص توصیه می‌شود این مقاله در کنار «a چه ساکت است» خوانده شود چرا که این دو مقاله به دو جنبه‌ی کاملاً متفاوت «سکوت نمادها» اشاره دارند.

پی‌نوشت

1. Versatility
2. Adaptability
3. Process-Oriented
4. Schoenfeld
5. Microgenetic
6. Harel
7. Kaput
8. Breidenbach
9. Kieran
10. Dubinsky
11. Reflective Abstraction
12. Beth
13. Greeno
14. Conceptual Entity
15. Douady
16. Niels Bohr
17. Self-sustained
18. Logical
19. Crowe
20. Garcia
21. Undo
22. Boyer
23. Struik
24. Rhetoric Algebra
25. Cardrn
26. Ars Magna
27. Algebra of a Fixed Value
28. Compact Chunks
29. Prompts
30. Lakeoff
31. Johnson
32. Diophantus
33. Syncopaed
34. Fauvel
35. Grey
36. Functional Algebra
37. Francois Viete
38. Kleiner
39. Primary
40. Secondary
41. Universal Arithmetic
42. Peacock
43. Cargo
44. Novy

* منابع و مراجع این مقاله را در شماره‌ی آینده خواهید دید.