رشد دانش‌آموز

سال ۱۳، شمارهٔ ۱

شمارهٔ پیاپی: ۲۴

δέλτα

بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

بهای این شماره ۵۵۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۱۱۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۳، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: فروردین ۱۳۸۱

شمارهٔ پیاپی: ۲۴

nashriaz@acnet.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

● **هیأت ویراستاران:**

احمد شفیعی‌ده‌آباد

سیاوش شهشهانی

پدرام صفری

سیامک کاظمی

کاوه لاجوردی

● **مشاوران این شماره:**

محمدهادی شفیعیها، مهرداد شهشهانی، علی عمیدی، همایون معین، منوچهر وصال

● **دستیارفنی:** زهرا دلاوری

● **طراح:** شکوه پیله‌فروشها

● **حروفچین و صفحه‌آرا:** سیده مریم طاهریان

● **ناظر چاپ:** علی صادقی

● **لیتوگرافی:** عابد

● **چاپ: معراج** (خیابان جمهوری، میدان استقلال، کوچهٔ نوشین)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

گزارش ۲

مقاله‌ها

مدل کره‌های سخت و سه حدس	فریدون رضاخانلو	۳
طلوع عصر روشهای تصادفی	دیوید مامفرد	۶
حال و آیندهٔ فیزیک ریاضی	هانری پوانکاره	۱۷
سه مصاحبه (ادرین دووادی، میخائیل گروموف، فریدریش هیرتسبروخ)	رمی لانژون	۲۷
بولتسانو، کوشی، اپسیلن، دلتا	والتر فلشر	۴۶

آموزش و مسأله

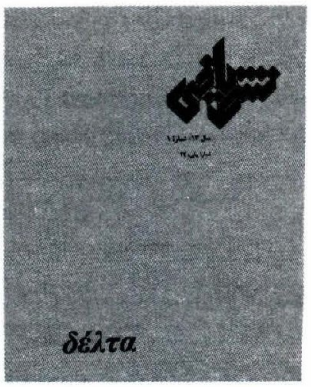
چند مسألهٔ دیگر...	کسری علیشاهی	۵۸

کتاب

نظریهٔ مجموعه‌ها	کاوه لاجوردی	۶۳
کتاب اثبات	کیوان ملاحی‌کارای	۶۶

* * * * * *

چاپ مقالهٔ «تدریس و یادگیری ریاضیات در سطح دانشگاه» که در فهرست انگلیسی داخل جلد ذکر شده است در این شماره به علت محدودیت صفحات میسر نشد و در شمارهٔ آینده خواهد آمد.



روی جلد

به مناسبت درج مقالهٔ «بولتسانو، کوشی، اپسیلن، دلتا»

گزارش

جایزهٔ آبل

نشان فیلدز که هر چهار سال یک بار در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان به ریاضیدانان زیر چهل سال اهدا می‌شود هر چند از اهمیت و اعتبار بسیاری در داخل جامعهٔ ریاضیدانان برخوردار است، در انظار عموم آن چنان که جایزهٔ نوبل معروف است شناخته شده نیست. شاید یکی از دلایل این امر همراه نبودن نشان فیلدز با وجه نقدی چشمگیری همچون جایزهٔ نوبل باشد. اکنون به‌نظر می‌آید که با اعلام تأسیس «جایزهٔ آبل» از سوی دولت نروژ که وجه نقدی قابل مقایسه با جوایز نوبل به همراه خواهد داشت، یک جایزهٔ ریاضی همسطح جوایز نوبل شکل گرفته باشد. قرار است اولین جایزهٔ آبل به‌مبلغ ۵ میلیون کرون نروژ (معادل حدوداً ۵۷۰۰۰۰ دلار) در سال ۲۰۰۳ میلادی اعطا شود. برخلاف نشان فیلدز، جایزهٔ آبل محدودیت سنی نخواهد داشت.

فکر اهدای جایزه‌ای در ریاضیات به نام نیلس هنریک آبل (۱۸۰۲ـ۱۸۲۹) ریاضیدان بزرگ نروژی را سوفوس لی ریاضیدان نروژی بزرگ دیگر در اواخر قرن نوزدهم مطرح کرده و مورد تأیید اسکار دوم پادشاه اتحادیهٔ سوئد و نروژ نیز قرار گرفته بود ولیکن با از هم گسیختن اتحاد دو کشور این موضوع به فراموشی سپرده شد. اکنون به‌ابتکار آکادمی علوم و ادبیات نروژ با حمایت اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، جامعهٔ ریاضی اروپا (EMS) و سایر نهادهای بین‌المللی علوم ریاضی، فکر اهدای این جایزه به تحقق می‌پیوندد و صندوقی با سرمایهٔ اولیهٔ دویست میلیون کرون نروژ به این منظور ایجاد شده است.

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان از تاریخ ۲۹ مرداد تا ۶ شهریور ۱۳۸۱ (۲۰ـ۲۸ اوت ۲۰۰۲) در بجینگ (پکن) پایتخت چین برگزار خواهد شد. کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که هر چهار سال یک بار تشکیل می‌شود مهمترین گردهمایی ریاضیدانان جهان است و طی آن نشانهای فیلدز و نوانلینا اعطا می‌شود. هم‌اکنون فهرست ۲۰ سخنرانی اصلی یک ساعتی و بیش از ۱۷۰ سخنرانی دعوتی چهل و پنج دقیقه‌ای از سوی کنگره اعلام شده است. دکتر فریدون شهیدی استاد ریاضیات در دانشگاه پردو ی آمریکا از جمله سخنرانان مدعو کنگره است. برای اطلاع بیشتر به‌جایگاه اینترنتی زیر مراجعه کنید:

http://www.icm2002.org.cn/

ابوالقاسم قربانی (۱۲۹۰ـ۱۳۸۰)

ابوالقاسم قربانی یکی از خادمان برجستهٔ ریاضیات و فرهنگ کشور در ۳۰ آبان ۱۳۸۰ درگذشت. مرحوم قربانی از نخستین مؤلفان کتابهای درسی جدید ریاضی در کشور بود. چند نسل از دانش‌آموختگان کشور، ریاضیات را از کتابهای «صفاری-قربانی» آموخته‌اند. علاوه بر این، قربانی از معدود محققان جدی و عمیق در زمینهٔ تاریخ ریاضیات دوران تمدن اسلامی در ایران بود.

عدد اول جدید

جستجو برای یافتن اعداد اول جدید با استفاده از وقت آزاد کامپیوتر منجر به کشف عدد اول جدیدی شده است که در حال‌حاضر بزرگترین عدد اولِ شناخته شده است. این عدد عبارت است از

$$۲^{۱۳۴۶۶۹۱۷} - ۱$$

این عدد را که از نوع اعداد اول مرسن[1] است یک جوان ۲۰ سالهٔ کانادایی به‌نام مایکل کمرون[2] پیدا کرده است. وی یکی از بیش از ۱۳۰۰۰۰ فردی است که با نصب برنامهٔ رایگانی به‌نام Prime95 که توسط جورج ولتمن[3] تهیه شده، وقت آزاد کامپیوتر خود را به جستجو برای یافتن عددهای اول مرسن اختصاص داده‌اند. تاکنون ۳۹ عدد مرسن اول شناخته شده‌اند. علاقه‌مندان می‌توانند نرم‌افزار ذکرشده را از جایگاه اینترنتی GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) به‌نشانی زیر دریافت کنند:

http://www.mersenne.org/

«ذهن زیبا»

خبر تعلق گرفتن چند جایزهٔ اسکار به فیلم «یک ذهن زیبا»[4] که مبتنی بر کتابی به‌همین نام از سیلویا نَسَر[5] دربارهٔ ریاضیدان معروف معاصر جان نش[6] است به‌گوش همه رسیده است. چندی پیش نیز نمایشنامه‌ای به‌نام «اثبات»[7] در نیویورک به‌روی صحنه آمد که مورد توجه منتقدان تئاتر قرار گرفت. هر دو اثر به کندوکاو در رابطهٔ بیماری روانی و نبوغ می‌پردازند. در شمارهٔ آیندهٔ نشر ریاضی، چند نقد و بررسی دربارهٔ این دو اثر و آثار هنری دیگری که اخیراً در مورد ریاضیدانان ارائه شده‌اند، خواهد آمد.

******

آقای محمد اردشیر که چند سال عضو هیأت ویراستاران نشر ریاضی بودند، از این شماره از این سمت کناره‌گیری کرده‌اند. با سپاس از خدمات ایشان به مجله، امیدواریم همکاری ایشان به صورتهای دیگری ادامه یابد. ضمناً از این شماره آقای پدرام صفری عضویت در هیأت ویراستاران را پذیرفته‌اند.

1. Mersenne 2. Cameron 3. Woltman 4. A Beautiful Mind
5 Sylvia Nassar 6. John. F. Nash 7. Proof

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، صص. ۳-۵

مدل کره‌های سخت و سه حدس

فریدون رضاخانلو*

۱. مدل کره‌های سخت

شاید ساده‌ترین مدل در مکانیک آماری، مدل گاز کامل باشد. در این مدل N ذره داریم که به تبع بردارهای سرعت خود در حرکت‌اند و هیچ برهم‌کنشی بر یکدیگر ندارند. به‌بیان دقیقتر، اگر $x_1(t)$، $x_2(t)$، $\cdots$، $x_N(t)$ مکانهای این ذرات باشند و $v_1(t)$، $\cdots$، $v_N(t)$ بردارهای سرعتشان، آنگاه در هر زمان t، $x_i(t) = x_i(0) + tv_i$، $v_i(t) = v_i$. این مدل توصیف ماکروسکپی ساده‌ای دارد. اگر در زمان $t = 0$، نقاط $(x_i(0), v_i(0))$ چنان انتخاب شوند که برای هر تابع پیوستهٔ $J(x,v)$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J(x_i(0), v_i(0)) \to \iint f^0(x,v)J(x,v)dxdv \qquad (1.1)$$

آنگاه در زمانهای بعدی t

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J(x_i(t), v_i(t)) \to \iint f(x,v,t)J(x,v)dxdv \qquad (2.1)$$

در اینجا تابع چگالی $f(x,v,t)$ جواب یگانهٔ معادلهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (3.1)$$

است با شرط

$$f(x,v,0) = f^0(x,v)$$

به‌عبارت دیگر $f(x,v,t) = f^0(x - vt, v)$.

در دنیای واقعی، گازها کامل نیستند و ملکولهای گاز بر یکدیگر اثر می‌کنند. شاید بتوان گفت که ساده‌ترین مدل غیر مبتذل برای گازها، مدل کره‌های سخت است. در این مدل هر x_i مرکز یک کرهٔ کوچک به قطر ϵ است. مثل ذرات یک گاز کامل، هر کره به تبع بردار سرعت خود v_i در حرکت است. اما وقتی دو کره به‌هم برخورد می‌کنند، سرعتشان تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم که برخورد الاستیک است، یعنی اینکه در اثر برخورد، تکانه و انرژی جنبشی دو کره تغییر نمی‌کند. وقتی چنین برخوردی روی می‌دهد، مؤلفه‌های بردارهای سرعت در راستای $n_{ij} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$ عوض می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگر v_i' و v_j' بردارهای سرعت بعد از برخورد باشند، آنگاه

$$v_i' = v_i - (v_i \cdot n_{ij})n_{ij} + (v_j \cdot n_{ij})n_{ij}$$
$$v_j' = v_j - (v_j \cdot n_{ij})n_{ij} + (v_i \cdot n_{ij})n_{ij}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$v_i' + v_j' = v_i + v_j, \quad |v_i'|^2 + |v_j'|^2 = |v_i|^2 + |v_j|^2,$$
$$(v_i - v_j) \cdot n_{ij} = (v_i' - v_j') \cdot n_{ij}$$

در یک شاره یا گاز، N عددی خیلی بزرگ (عدد آووگادرو) و ϵ عددی خیلی کوچک (قطر یک ملکول) است. چون برای پر کردن جعبه‌ای به‌ابعاد یک متر با کره‌های کوچک به‌قطر ϵ، به‌حدود $c_0\epsilon^{-d}$ کره احتیاج است (c_0 یک ثابت است)، یک فرض طبیعی این است که $N \to \infty$ و $\epsilon \to 0$ ولی $N\epsilon^d \to c_0$ که در آن c_0 عددی مثبت است. اما گراد[1] رژیم دیگری را برای یک گاز رقیق پیشنهاد می‌کند. در رژیم بولتسمان-گراد، $N \to \infty$ و $\epsilon \to 0$ ولی $N\epsilon^{d-1} \to c_0$. در نتیجه در یک گاز رقیق فضای بیشتری خالی می‌ماند و نسبت فضای اشغال‌شده به‌وسیلهٔ کره‌ها به‌کل فضا در حدود $c_0\epsilon$ است.

1. Grad

۲. حدس اول

به‌طور خلاصه این حدس مدعی است که چگالی مولکولی در معادلهٔ بولتسمان صدق می‌کند. به‌عبارت دیگر اگر (۱۰۱) درست باشد آنگاه (۱۰۲) درست است، هرگاه f جواب یگانهٔ معادلهٔ بولتسمان باشد:

$$\begin{cases} f_t + v \cdot f_x = Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f) \\ f(x,v,\circ) = f^\circ(x,v) \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

در اینجا Q^- میزان کاهش چگالی و Q^+ میزان افزایش چگالی است. برای کاهش f، یک ذره یا ملکول با بردار v به ذره‌ای با بردار v_* برخورد می‌کند و سرعتش عوض می‌شود. بنا به‌فرض اثبات نشدهٔ آشوب ملکولیِ بولتسمان، احتمال پیدا کردن یک جفت ذره با بردارهای سرعت v و v_* در نقطهٔ x و در زمان t قبل از برخورد تقریباً برابر است با حاصلضرب چگالیها، $f(x,v,t)f(x,v_*,t)$. البته در مقیاس ماکروسکپی باید فرض کرد که هر دو ذره در نقطهٔ xاند چراکه ϵ به صفر میل می‌کند. ولی بردار n_{ij} که طولش یک است به‌بردار n میل می‌کند و چون قبل از برخورد داریم

$$(v_i - v_j) \cdot n_{ji} \geq \circ$$

و احتمال وقوع چنین برخوردی متناسب است با $(v_i - v_j) \cdot n_{ji}$، انتظار می‌رود که

$$Q^-(f,f)(x,v,t) = \int_{\mathbb{R}^۳} \int_{S^۲} f(x,v,t) f(x,v_*,t)[(v-v_*)\cdot n]^+ dv_* dn \qquad (۲.۲)$$

که در آن $S^۲$ کرهٔ به شعاع یک است و d_n جزء سطح کره است. با استدلال مشابهی می‌توان حدس زد که

$$Q^+(f,f)(x,v,t) = \int_{\mathbb{R}^۳} \int_{S^۲} f(x,v',t) f(x,v'_*,t)[(v-v_*)\cdot n]^+ dv_* dn \qquad (۳.۲)$$

که در آن n و $v' = v - ((v-v_*)\cdot n)\ n$ و $v'_* = v_* + ((v-v_*)\cdot n)\ n$. شکل بالا برای Q^+ در (۳۰۲) به این علت اختیار شده است که اگر دو ذره با سرعتهای v' و v'_* به‌هم برخورد کنند دو بردار سرعت جدید نتیجه می‌شود و می‌توان نشان داد که این دو بردار برابرند با v و v_*. در نتیجه چنین برخوردی باعث افزایش چگالی ذراتی می‌شود که سرعتشان v است. ضریب فراوانی چنین برخوردی برابر است با

$$(v' - v'_*) \cdot n = (v - v_*) \cdot n$$

این حدس فقط در دو حالت اثبات شده است. در سالهای ۷۰، لنفورد[1] در مقالهٔ مهمی این حدس را برای زمانهای کوتاه اثبات کرد. در سالهای ۸۰ هم ایلنر[2] و پولویرنتی[3] این حدس را برای f° کوچک اثبات کردند.

1. Lanford 2. Illner 3. Pulvirenti

۳. حدس دوم

حال مسأله‌ای را مطرح می‌کنیم که حدس اول قادر به پاسخگویی آن نیست. فرض کنید که تابع پیوستهٔ $J(x,v,y,w)$ داده شده است و می‌خواهیم حد

$$\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} J(x_i(t), v_i(t), x_i(s), v_i(s))$$

را مثلاً وقتی که $\circ \leq t < s$، حساب کنیم. اگر $J(x,v,y,w)$ به (y,w) بستگی نداشته باشد، این همان مسألهٔ قبلی است و جواب برابر است با $\int Jf$. اگر J تابع (y,w) هم باشد آنگاه (۲۰۱) پاسخگو نیست. در حالت کلیتر، می‌توان یک تابع پیوستهٔ کراندار $J(x_۱,v_۱,\cdots,x_k,v_k)$، زمانهای $t_۱ < t_۲ < \cdots < t_k$ و حد

$$X_N(J) = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} J(x_i(t_۱), v_i(t_۱), \cdots, x_i(t_k), v_i(t_k))$$

را در نظر گرفت. برای پاسخگویی به این مسأله باید به مدل میکروسکپی برگردیم و آن را به‌طور شهودی بررسی کنیم. یک ذره را در این مدل دنبال می‌کنیم، مثلاً ذرهٔ اول $(x_۱,v_۱)$ را. وقتی $N \to \infty$، این ذرهٔ متحرک به یک ذرهٔ متحرک $(\overline{x},\overline{v})$ میل می‌کند که لزوماً $\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{v}$. اما $\overline{v}(t)$ با زمان تغییر می‌کند و انتظار داریم که $\overline{v}$ در هر لحظه با احتمال مثبتی به $\overline{v}'$ تبدیل شود و اگر n برای یک $\overline{v}' = \overline{v} - ((\overline{v}-\overline{v}_*)\cdot n)$ و یک $\overline{v}_* \in \mathbb{R}^۳$ و $n \in S^۲$، آنگاه احتمال وقوع چنین رویدادی باید متناسب باشد با

$$[(\overline{v}-\overline{v}_*)\cdot n]^+ f(\overline{x},\overline{v}_*,t)$$

فرایند $(\overline{x},\overline{v})$ یک فرایند مارکفی ناهمگن است و اگر امید ریاضی این فرایند را به E نمایش دهیم، آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} X_N(J) = EJ(\overline{x}(t_۱),\overline{v}(t_۱),\overline{x}(t_۲),\overline{v}(t_۲),\cdots,\overline{x}(t_k),\overline{v}(t_k)) \qquad (۱.۳)$$

این قسمت را با تعریف مولد فرایند $(\overline{x}(t),\overline{v}(t))$ به‌اتمام می‌رسانیم:

$$\mathscr{L}g(\overline{x},\overline{v}) = \overline{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial \overline{x}} + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{S^{d-۱}} [(\overline{v}-\overline{v}_*)\cdot n]^+ f(\overline{x},\overline{v}_*,t)[g(\overline{v})' - g(\overline{v})]dnd\overline{v}_*$$

۴. حدس سوم

اگر $f_N(x,v,t)$ نامزدی برای چگالی میکروسکپی مدل ما باشد، آنگاه بنا بر حدس اول، $f_N \to f$ وقتی‌که $N \to \infty$. حال می‌خواهیم بدانیم که اگر به‌جای f_N، f را قرار دهیم ماهیت خطای مرتکب شده چیست. علی‌رغم اینکه مدل ما غیرتصادفی است، به‌ازای ξ مناسبی که تصادفی است داریم

$$f_N = f + \frac{۱}{\sqrt{N}}\xi + o\left(\frac{۱}{\sqrt{N}}\right) \qquad (۱.۴)$$

زیرا در اینجا وقتی $N \to \infty$، قضیهٔ حدی مرکزی مطرح است. در اصل به‌طور شهودی داریم

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_N}{\partial x} = Q(f_N, f_N) + \frac{1}{\sqrt{N}}\eta + o(\frac{1}{\sqrt{N}}) \qquad (۲.۴)$$

وقتی‌که η یک نوفهٔ سفید از متغیرهای (x,t) است. اگر J یک تابع هموار باشد، داریم

$$E\left[\iint \eta J dx\, dv\, dt\right]^2 = \int_S^{d-1} \iiint [(v - v_*)\cdot n]^+ f(x,v,t) f(x,v_*,t) [J(x,v',t) + J(x,v'_*,t) - J(x,v,t) - J(x,v_*,t)]^2 dx\, dv\, dt\, dv_* dn$$

در اینجا E امید ریاضی است. برای اینکه معادله‌ای ساده‌تر به‌دست آوریم، (۱.۴) را در (۲.۴) قرار می‌دهیم و از این استفاده می‌کنیم که f در معادلهٔ بولتسمان صدق می‌کند. نتیجهٔ حاصل عبارت از

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2Q(f,\xi) + \eta \qquad (۳.۴)$$

اثبات (۱.۴) برای ξای که در معادلهٔ (۳.۴) صدق کند هنوز یک مسألهٔ حل نشده است، حتی وقتی‌که سیستم در حالت تعادل باشد. در زمانهای کوتاه، نتیجه‌ای از (۱.۴) را وان بایرن، لبوویتس، لنفورد، و اسپون اثبات کرده‌اند.

مراجع

1. H. van Beijeren, O. E. Lanford, J. L. Lebowitz and H. Spohn, "Equilibrium time correlation fuuctions in the low-density limit", *J. Stat. Phys.*, **22** (1980) 237-257.
2. R. Illner and M. Pulvirenti, "Global validity of the Boltzmann equation for two and three dimensional rare gas in vacuum" , *Comm. Math. Phys.*, **105** (1986) 189-203.
3. O. E. Lanford, "Time evolution of large classical systems" in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Phys. 38, Springer-Verlag, Berlin (1975) 1-111.
4. H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

* * * * * *

* فریدون رضاخانلو، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

rezakhan@math.berkeley.edu

معاملهٔ شیطان با فاوست•

... جبر برای هندسه‌دان در حکم چیزی است که شیطان به فاوست عرضه کرد. همان‌طور که می‌دانید، در نمایشنامهٔ «فاوست» گوته، شیطان به فاوست پیشنهاد می‌کند هرچه می‌خواهد از او بخواهد و در عوض روحش را به او بفروشد. جبر همان پیشکش شیطان به ریاضیدان است. شیطان می‌گوید: «من این ماشین نیرومند را به تو می‌دهم که پاسخگوی همهٔ سؤالهایت خواهد بود. در عوض باید روحت را به من بدهی.» [امروز به جای ماشین می‌توان کامپیوتر را گذاشت!] البته ما دوست داریم هر دو را داشته باشیم: سعی می‌کنیم شیطان را فریب دهیم، تظاهر کنیم روحمان را فروخته‌ایم، و عملاً این کار را نکنیم. با این حال در اینجا روحمان در خطر است زیرا وقتی به محاسبات جبری می‌پردازیم، از فکر کردن، فکرِ هندسی کردن، فکر کردن دربارهٔ معنا، دست می‌کشیم ... شاید موضع من در این مورد قدری افراطی باشد، ولی منظور اصلی از جبر همیشه این بوده است که فرمولی تولید کند که بتوان آن را در ماشینی قرار داد، دستگیره‌ای را چرخاند، و پاسخی بیرون آورد. چیزی را که معنایی دارد می‌گیرید، آن را به فرمول تبدیل می‌کنید، و جواب را به‌دست می‌آورید. در این فرایند دیگر لازم نیست فکر کنید که مراحل مختلف در جبر متناظر با چه چیزهایی در هندسه‌اند. در نتیجه ممکن است بصیرت و دیدگاه هندسی خود را از دست بدهید....

* * * * * *

• مایکل اتیا، «مودرن متمتیکال مانتلی»، شمارهٔ اوت و سپتامبر ۲۰۰۱، ص. ۶۵۹.

طلوع عصر روشهای تصادفی•

دیوید مامفرد*
ترجمهٔ شاپور اعتماد

۱. مقدمه

مطالب این مقاله حاصل سخنرانی من در کنفرانس «ریاضیات در آستانهٔ هزارهٔ سوم»، در فرهنگستان ملی لینچی است که در تاریخ ۲۷ـ۲۹ مه ۱۹۹۹ برگزار شد. باید به آن هفت استاد پرتحرک دانشگاه رُم، تور ورگاتا، که همه زن بودند و ابتکار برگزاری چنین کنفرانسی از آنها بود و مجری آن هم بودند تبریک بگویم. به‌خصوص باید به‌دستاورد آنان اشاره بکنم که توانستند ده دوازده ریاضیدان را وادارند تا نه فقط به‌آخرین پیشرفتهای رشتهٔ خود بلکه به امور دامنه‌دارتری هم بپردازند: یعنی هم از قضیه‌ها سخن بگویند و هم از اندیشه‌ها. دعوت آنان این وسوسه را در من برانگیخت که از این فرصت استفاده بکنم و یک سلسله ایده‌هایی را که طی ده‌سال گذشته جفت و جور کردنشان دل‌مشغولی دائمی‌ام بوده است به صورت روشنتری بیان کنم. و در نهایت نتوانستم خودم را از این لذت عظیم محروم کنم که چشم‌انداز بلندمدتی بر مبنای آنها ترسیم کنم ــ چشم‌اندازی که بی‌تردید هم ساده‌نگرانه است و هم اینکه حدودش از قلمرو تخصص من فراتر می‌رود. اگر بخواهم اصطلاحی را که خانم کارن اُولنبک در ضمن سخنرانی خود در این کنفرانس تعریف کردند وام بگیرم و درجهٔ بلندپروازی حرف خود را به‌زبان کمّی بیان بکنم باید بگویم که می‌خواهم یک سلسله ادعاهایی بکنم که دامنهٔ زمانی‌اش ۲۴۰۰ سال است؛ ولی ملاک قضاوت دربارهٔ این دامنهٔ زمانی، مدت زمان تجربهٔ تحقیقات خودم است، یعنی چیزی در حدود ۴۰ سال؛ در نتیجه ضریب بلندپروازی این سخنرانی ۶۰ است!

این مقاله از نوع جدلی است، جدل و نزاعی که محورش را نکته‌ای ساده تشکیل می‌دهد: اینکه در مقایسه با مدلهای دقیق و استدلالهای منطقی، مدلهای تصادفی و استدلالهای آماری در امور زیر ذی‌ربط‌ترند: (i) جهان؛ (ii) علم و بسیاری از بخشهای ریاضیات؛ (iii) به‌خصوص درکِ محاسباتی که در اذهان خود ما اجرا می‌شوند. برای رسیدن به‌این مقصود نکات خود را به‌ترتیب ذیل تنظیم و بیان خواهم کرد: در بخش ۲ حرف من این خواهد بود که تمام ریاضیات از طریق انتزاع از این یا آن جنبه از تجاربمان پدید می‌آید و پابه‌پای ریاضیاتی که از اشیا و حرکتشان در جهان مادی نشأت گرفته، منطق صوری ــ حداقل به‌نحوی که در آثار ارسطو منعکس است ــ با مشاهدهٔ خودِ تفکر پدید آمده است. درحالی‌که برای انتزاع ماهیت فرایند تفکرمان انواع و اقسام راههای دیگر هم وجود دارد که یکی از آنها به احتمال و آمار منتهی می‌شود. در بخش ۳ نگاه تند و گذرایی به این دامنهٔ زمانی ۲۴۰۰ سالهٔ بعد از ارسطو می‌افکنیم، و برخی از نقاط عطف در سیر تحول این دو دیدگاه را برجسته می‌کنیم. مدلهای دقیق منطق‌ـمحور و ریاضیاتِ دقیق منطق‌ـمحور همواره دست بالا را داشته‌اند و به‌گونه‌ای عمیق بر تفکر ما تأثیر گذاشته‌اند. نظریه‌های تصادفی [استوکاستیک] خیلی آهسته‌تر پدید آمده‌اند و تازه از قرن گذشته توانسته‌اند تا حدی عمق واقعی خود را نشان دهند. در بخش ۴، می‌خواهم به رهیافت متعارف تقلیل‌گرا به احتمال بپردازم. موضوع اصلی مورد مطالعه در نظریهٔ احتمال، متغیر تصادفی است و حرف من در ارتباط با آن این خواهد بود که باید آن را به‌عنوان یک ساخت بنیادی در نظر گرفت، درست مثل فضا، گروه، تابع، و اگر آن را براساس نظریهٔ اندازه تعریف بکنیم مرتکب کاری تصنعی و غیر طبیعی شده‌ایم. در بخش ۵، این نکته را بسط می‌دهیم، یعنی بر مبنای آثار الهام‌بخش جینز و فریلینگ، پیشنهاد می‌کنم که احتمالات و متغیرهای تصادفی را می‌توان در مبانی ریاضیات ادغام کرد، و در نتیجه به‌فرمالیسم [دستگاه صوری] قویتر و شهودیتری رسید. در بخش ۶، به‌تأثیر مدلهای تصادفی بر جریانهای اصلی ریاضیات و به‌خصوص تأثیر آنها بر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌پردازم. آنجا حرفم این خواهد بود که برای مدلسازی جهان، معادلات تصادفی ذی‌ربط‌تر و اساسیتر از معادلات تعینی یا قطعی‌اند. در انتها یعنی در بخش ۷، باز می‌گردیم به‌بررسی مسألهٔ مدلسازی تفکر و رهیافتهای تصادفی اخیر در ارتباط با مباحث هوش مصنوعی، بینایی و گفتار.

پرسش ما این خواهد بود: آیا این رهیافتها بیشتر از رهیافتهای منطق‌ـمحور، شانس توفیق دارند ــ مثلاً در مورد تقلید تواناییهای بشری به‌کمک کامپیوتر؟ من خودم چنین فکر می‌کنم، ولی پاسخ قطعی هنوز روشن نیست.

۲. رده‌بندی ریاضیات

قبل از هر چیز می‌خواهم جایگاه احتمال و آمار را به‌عنوان بخشی از ریاضیات تعیین کنم. در ابتدا می‌خواهم تعریفی را که دیویس و هرش در کتاب بسیار ژرف کاوشان تجربهٔ ریاضیات [۱] (ص ۳۹۹) از ریاضیات ارائه می‌دهند نقل بکنم: «ریاضیات یعنی مطالعهٔ اشیای ذهنی که دارای خواصِ باز تولید پذیرند». من عاشق این تعریفم، چون ریاضیات را به هیچ‌وجه به‌چیزی که در گذشته ریاضیات خوانده شده است محدود نمی‌کند، و در واقع سعی می‌کند بگوید که چرا برخی از حرفها را ریاضیات، برخی را علم، برخی را هنر، و برخی را هم حرفهای خاله زنکی می‌خوانیم. به‌این ترتیب خواصِ بازتولیدپذیرِ جهان فیزیکی علم است در حالی‌که اشیای ذهنیِ باز تولیدپذیرْ ریاضیات است. هنر هم در ساحت ذهن ادامهٔ حیات می‌یابد (نقاشی واقعی مجموعه‌ای رنگ‌دانهٔ خشک‌شده روی بوم نیست همان‌طور که سمفونی هم یک سلسله امواج صوتی که آن را به‌گوش ما می‌رسانند نیست) ولی همان‌گونه که پست‌مدرن‌ها اصرار دارند، هر هنردوستی آن را در هر متن و زمینهٔ جدیدی از نو تفسیر می‌کند. اما وقتی به‌حرفهای خاله‌زنکی می‌رسیم می‌بینیم که بخش اعظم افکار ما از آنها تشکیل شده است و ماهیتش این است که [فقط] با جزء موضعی و منحصر به فردی از فضا و زمان گره می‌خورد.

با توسعهٔ تعریف دیویس و هرش، می‌توان پرسید که عناصر اولیه [یا اجزای اصلی] تجربهٔ بشری چه نوع عناصری هستند که می‌توانند انواع متفاوت و متنوع اشیای ذهنیِ بازتولیدپذیر را پدیدآورند، اشیایی که به نوبهٔ خود مظهر و مجسم‌کنندهٔ بخشهای اصلی ریاضیات به شمار می‌آیند؟ بخشهای کلاسیک ریاضیات عبارت‌اند از هندسه، جبر، و آنالیز. بیایید به‌هرکدام نگاهی بیفکنیم و سعی کنیم تجارب مربوط و اشیای ذهنی حاصله را نامگذاری بکنیم.

هندسه روشنترین و آشکارترین مورد است: هر کودک ۳ تا ۶ ماهه‌ای با حرکات سادهٔ عضلانی خود دائماً به تلفیق دو حس باصره و لامسه می‌پردازد، و [به‌مرور] یاد می‌گیرد که با حرکت مناسب دست و بازوی خود می‌تواند اسباب‌بازی خود را در چنگ بگیرد و شاهد جابه‌جا شدن آن باشد. در این مورد، لُب مطلب این است که ادراک فضا (از طریق حواس و تعامل عضلانی) به مثابهٔ آن عنصر اولیهٔ تجربهٔ ماست، همان تجربه‌ای که هندسه بر آن استوار است. این امر اصل و اساسِ یکی از ساده‌ترین اشیای ذهنی را تشکیل می‌دهد ــ همان چیزی که دیویس و هرش آن را «ریسمان کشیده» می‌خوانند. و منشأ ترسیماتی است که به‌کمک خط‌کش و پرگار انجام می‌شوند. الگوی انتزاعی برای مطالعهٔ صوری آن عبارت است از فضای Mای که از نقاطی با ساختارهای بسیار متنوع تشکیل می‌یابد.

آنالیز، به‌نظر من، زاییدهٔ تجربهٔ بشری از نیرو و فرزندان آن یعنی شتاب و نوسان است. مثال برجسته همان سیبی است که بر سر نیوتن اصابت می‌کند. این تجربهٔ اولیه منجر به شیئی ذهنی می‌شود که الگوی انتزاعی آن است و عبارت است از تابع، و مشتقات آن. توابع در ابتدا تحول کمیت فیزیکی معینی را در طول زمان توصیف می‌کردند.

و اما جبر؛ به‌نظر می‌آید که جبر از نوعی «دستورِ اعمال» پدید آمده باشد. مقصود از دستور اعمال این است که ما [معمولاً] افعال خود را به‌ترتیب یا به ترتیبهای معینی، یکی پس از دیگری، انجام می‌دهیم، و انواع اعمالِ مرتبهٔ بالاتر را بر اساس اعمال ساده‌تر و اصلیتر اجرا می‌کنیم. ساده‌ترین مثال برای این امر شاید همان عمل شمارش باشد که توانایی این کار را کودکان خیلی زود اکتساب می‌کنند. این ممکن است بخشی از دستور اعمال ماهرانه باشد اگر مثلاً تیله چینی در نظر گرفته شود یا ممکن است بخشی از دستور زبان باشد اگر مثلاً کلمات مورد استفاده قرار گرفته باشند. در اینجا شیءِ ذهنیِ الگو عبارت است از مجموعه‌ای از چیزهایی که دارای قانون ترکیب‌اند.

خوب، این از بخشهای «کلاسیک» ریاضیات. افزون بر این شاخه‌ها من معتقدم که تجربهٔ انسانی شاخهٔ چهارمی هم دارد که در آن شاخه هم اشیای ذهنی بازتولیدپذیر، و در نتیجه ریاضیات، پدید می‌آید: یعنی تجربهٔ خود تفکر از طریق مشاهدهٔ آگاهانهٔ ذهن ضمن کار. به‌جای مشاهدهٔ جهان و یافتن عناصر هندسه و آنالیز در آنجا، یا مشاهد کردن افعال خود و کشف جبر، در این مورد نحوهٔ کار ذهن خود را مشاهده می‌کنیم. این امر به تأسیس منطق صوری به‌دست ارسطو منجر شد که در آن گزاره‌ها همان اشیای ذهنی بنیادی به‌شمار می‌آیند. منطق عبارت بود از نظام صوری بازتولیدپذیری که به‌منظور مدلسازی جریان خام افکاری که به‌ذهن آگاه ما خطور می‌کند ساخته شده بود.

اما آیا این ادعا درست است؟ ادعای رقیب آن که مضمون اصلی حرف من است این است که تفکر عبارت است از سبک سنگین کردن احتمالهای نسبیِ رویدادهای ممکن و عمل نمونه‌گیری از «امر پسین»، یعنی توزیع احتمال روی رویدادهای مجهول، با در نظر گرفتن جمع کل اطلاع ما از رویدادهای گذشته و زمینه و متن کنونی. اگر چنین باشد، آنگاه شیءِ ذهنیِ الگو دیگر گزاره‌ای ــ برخوردار از شکوه ابدی یا ارزش صدقِ حک‌شده بر سینه ــ نیست بلکه متغیر تصادفی xای است که مقدار آن، تابع احتمالهایی است که هنوز تعیین نشده‌اند. در بخش ۴ به متغیرهای تصادفی خواهیم پرداخت. ساده‌ترین مثالی که می‌تواند نشان دهد که تفکر انسانی از این نوع است موردی است که در آن می‌توان احتمالها را تصریح کرد: یعنی قمار. در اینجا بسیار آشکار است که ما به سبک سنگین کردن احتمالها می‌پردازیم (یا اگر تبحر ریاضی داشته باشیم گاهی حتی آنها را محاسبه هم می‌کنیم). اگر این را بپذیریم، آن بخش از ریاضیات که با این قلمرو از تجربه سروکار دارد منطق نیست بلکه احتمال و آمار است.

۳. تاریخ مختصر تقابل منطق و آمار

اگر محوری زمانی در نظر بگیریم و برخی از نقاط مهم سیر تحول این دو دیدگاه متضاد را در باب ماهیت تفکر روی آن محور مشخص بکنیم، کار ما خالی از تفنن نخواهد بود. اگر این کار را از دوران شکوفایی آتن باستان شروع کنیم می‌بینیم که چگونه برخی از اقوال افلاطون بر زبان سقراط جاری می‌شود:

> تئودوروس یا هر هندسه‌دان دیگری، اگر در هندسه اساس را برگمان بگذارد به پشیزی نمی‌ارزد (گفتگو با تئه‌تئوس، قطعهٔ e ۱۶۲، حدود ۳۶۰ پیش از میلاد.)

افلاطون درکتاب هفتم جمهوری، قطعه‌های c ۵۲۹ و c ۵۳۰، حتی از حدود سلیقهٔ نابگراترین ریاضیدانان معاصر خود اندکی فراتر می‌رود و می‌گوید اصلاً بهتر است که منجمان به خود ستارگان نگاه نکنند:

> بی‌گمان ما حق داریم اشکال و تصاویری راکه زیب و زیور آسمان عالم محسوسات‌اند کاملترین و زیباترین تصاویر بشماریم. ولی همواره باید این حقیقت را در نظر داشته باشیم که این اشکال و تصاویر در زیبایی هرگز به‌پای چیزهای زیبای حقیقی نمی‌رسند. دلیل درستی این سخن حرکاتی است که با سرعت حقیقی و آهستگی حقیقی در عالم اعداد حقیقی و اشکال حقیقی صورت می‌گیرند، و حرکات اجسام عالم محسوسات تصویری از آنها هستند. ولی همهٔ آن حرکات را فقط از راه تعقل و تفکر می‌توان دریافت نه به‌واسطهٔ حس بینایی. ... پس ستاره‌شناسی را نیز چون هندسه یکی از رشته‌های آموزشی قرار خواهیم داد تا وسیله‌ای برای تمرین فکر باشد. ولی چون منظور اصلی ما از آموزش این دانش، این است که آن جزء روح که ماهیتش تعقل و تفکر است از حال خمود بدر آید و کامل و نیرومند گردد، چندان اهمیتی به‌اجرام آسمانی نخواهیم داد.[۱]

به‌همین ترتیب، می‌بینیم که برخی از اشتباهات فاحش ارسطو، علی‌رغم مطالب مفصلی که در زمینهٔ زیست‌شناسی نوشته، به‌این دلیل بوده است که هرگز با اطبایی مانند بقراط و شاگردانش دربارهٔ اطلاعات واقعی در مورد بدن انسان مشورت نمی‌کرده است. مثلاً او معتقد بود که جایگاه تفکر قلب است و نه مغز، عقیده‌ای که به‌صرف ملاحظهٔ آثار آسیب مغزی به‌آسانی قابل رد است. (نگاه کنید به مقالهٔ چارلز گروس [۶]).

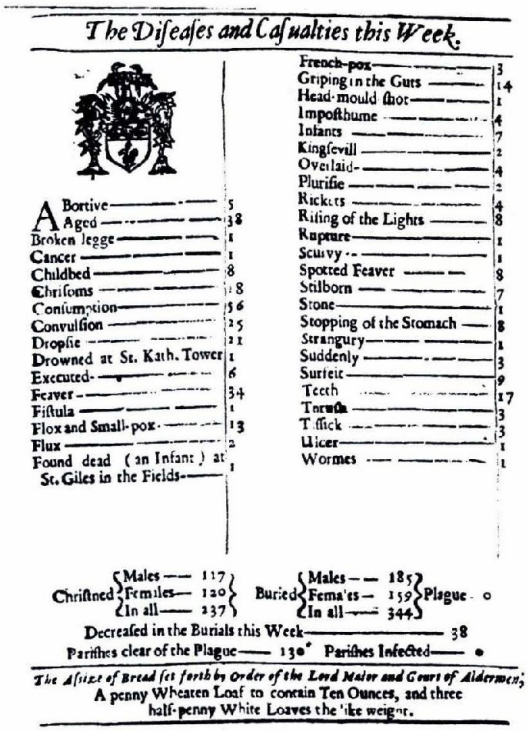
اگر جلوتر بیاییم، می‌بینیم که در عصر رنسانس، کاردانو (۱۵۰۰ـ۱۵۷۱) شخصیت بی‌نظیری است. از یک سو او به‌خاطر کتاب فن کبیر[۲]ش (۱۵۴۵) غالباً مبدع i خوانده می‌شود. ظاهراً وی یکی از خبره‌ترین افراد در زمینهٔ عملیات صوری جبر بود به‌طوری که تبعات قواعد منطقی جبر را یک گام فراتر از اسلاف خویش برد. ولی در عین حال، معتاد به قمار هم بود و در کتاب بازیهای شانسی[۳] خود نخستین تحلیل را از قوانین شانس ارائه کرد اما خجالت می‌کشید آن را انتشار دهد و این کتاب تا ۱۶۶۳ به‌چاپ نرسید، یعنی تقریباً مقارن با زمانی که یاکوب برنولی کار خود را آغاز کرد. در قرن ۱۷، نیوتن و لایب نیتس را در کانون اردوگاه منطق می‌یابیم، به‌طوری‌که نیوتن بر این قول است که هندسهٔ اقلیدسی تنها زبان قابل اطمینان برای اثباتهای قابل اعتماد است و لایب نیتس هم اصول هوش مصنوعی (AI) امروزی را در رسالهٔ دکتری خود به‌نام فن ترکیب[۴] پیش‌بینی می‌کند. در اردوگاه آمار، تجربه‌گرایان واقعی را می‌یابیم که شروع به گردآوری و تحلیل اطلاعات و آمار کرده‌اند. گراونت[۵] جدولهای مرگ و میر را در لندن تنظیم می‌کند (نگاه کنید به‌شکل ۱ که به سال ۱۶۶۵ تعلق دارد) و یاکوب برنولی با اثبات قانون اعداد بزرگ، کاربرد برآوردهای تجربی را توجیه می‌کند.

عالیجناب توماس بیز در قرن ۱۸ زندگی می‌کرد (۱۷۰۱ یا ۱۷۰۲ـ۱۷۶۱).

۱. ترجمهٔ فارسی این قول از دورهٔ آثار افلاطون، ترجمهٔ محمدحسن لطفی، انتشارات خوارزمی، صص. ۱۱۵۲ و ۱۱۵۳، نقل شده است.

2. Ars Magna 3. Liber de Ludo Aleae

4. De Arte Combinatoria 5. Graunt



The Diſeaſes and Caſualties this Week.

Abortive	5	French-pox	3
Aged	38	Griping in the Guts	14
Broken legge	1	Head-mould ſhot	1
Cancer	1	Impoſthume	4
Childbed	8	Infants	7
Chriſoms	8	Kingſevill	2
Conſumption	56	Overlaid	4
Convulſion	25	Plurifie	2
Dropſie	21	Rickets	4
Drowned at St. Kath. Tower	1	Riſing of the Lights	8
Executed	6	Rupture	1
Feaver	34	Scurvy	1
Fiſtula	1	Spotted Feaver	8
Flox and Small-pox	13	Stilborn	7
Flux	2	Stone	1
Found dead (an Infant) at St. Giles in the Fields	1	Stopping of the Stomach	8
		Strangury	1
		Suddenly	3
		Surfeit	9
		Teeth	17
		Tiſick	3
		Ulcer	1
		Wormes	11

Chriſtned	Males 117, Females 120, In all 237	Buried	Males 185, Females 159, In all 344
		Plague	0

Decreaſed in the Burials this Week 38

Pariſhes clear of the Plague 130 Pariſhes Infected •

The Aſſize of Bread ſet forth by Order of the Lord Maior and Court of Aldermen;
A penny Wheaten Loaf to contain Ten Ounces, and three half-penny White Loaves the like weight.

شکل ۱ گراونت یکی از نخستین کسانی بود که به فایدهٔ داده‌های تجربی پی برد: در اینجا ارقامِ یک هفته‌ایِ مرگ و میر در لندن دیده می‌شود (مربوط به قرن هفدهم).

او بر این قول بود که باید بتوان احتمالهای پیشینی یا ماقبل تجربی را تعریف کرد، یعنی احتمالهایی که به‌رویدادهای نامعلوم، براساس تجربهٔ حاصل از رویدادهایی مرتبط ولی نه‌یکسان با آنها نسبت می‌دهند ــ وگرنه باید به دیدگاه خنثایِ لاادری اکتفا کرد. چنین احتمالهایی باید براساس مشاهدات جدید تعدیل یابند تا بتوان با انباشته شدن اطلاعات به‌احتمالهای پسینی یا مابعد تجربی هر چه بهتری دست یافت. برای آنکه اهمیت اساسی کار بیز را نشان بدهیم اجازه بدهید به سراغ مقالهٔ اصلی بخش تجارت در روزنامهٔ لوس‌آنجلس تایمز تاریخ ۱۹۹۶/۱۰/۲۸ بروم. در این شمارهٔ روزنامه در قسمت موردنظر عکسی از بیز به‌چاپ رسیده است و عنوان مقاله عبارت است از «آیندهٔ نرم‌افزار ممکن است مطابق نظریه‌های تیره و تار روحانی قرن هجدهم توماس بیز باشد». سپس در متن مقاله چنین می‌آید «وقتی اخیراً از [بیل] گیتس سؤال شد که بالاخره کِی کامپیوترها می‌توانند زبان انسان را درک بکنند» گیتس در پاسخ به اهمیت نقش اساسی «نظامهای بیزی» اشاره می‌کند ... آیا این حرف گیتس حرف حساب است؟ آیا این تکنولوژی «بیگانه‌نما» جدیدترین سلاح سری مایکروسافت است؟ در بازشناسی گفتار، احتمالهای پیشینی می‌تواند مدل عام [همگانهٔ] زبان آدمی باشد و احتمالهای پسینی مدل بسیار دقیقتر زبان یک فرد پس از آموزش. اگرچه تایمز این حرفها را نظریه‌های تیره و تار خوانده است، ولی مکتب رو به رشدی از پژوهشگران (که خودم هم به‌آن تعلق دارم) بر این اعتقاد است که آمار بیزی کلید کاربرد مؤثر استنباط آماری در موقعیتهای پیچیده است.

گاوس از این لحاظ که هم در قیاسهای منطقی و هم در آمار کاربردی توانایی خارق‌العاده‌ای داشت، آدم جالبی است. در حقیقت، او روش کمترین

$*110{\cdot}643.\ \vdash .1 +_c 1 = 2$

Dem.

$$\vdash .*110{\cdot}632 .*101{\cdot}21{\cdot}28 .\supset$$
$$\vdash .1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota' y \in 1\}$$
$$[*54{\cdot}3] \quad = 2 .\supset \vdash . \text{Prop}$$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in *113·66 and *120·123·472.

شکل ۲ دستاورد افتخارآمیز رهیافت تقلیل‌گرا به مبانی ریاضیات. قضیهٔ بالا حدود هزار صفحه را در اثر ماندگار راسل و وایتهد به نام پرینکیپیا ماتماتیکا که صرفاً مبتنی بر منطق و نظریهٔ مجموعه‌هاست، اشغال کرده است.

مربعات را به‌منظور مهارکردن داده‌های غیردقیق ولی زائد ابداع کرد، و همین امر به کشف مجدد سیارک سرس منجر شد، و در عین حال قضیهٔ حدی مرکزی را اثبات کرد که خود توجیه‌کنندهٔ این روش بود. معروفترین آزمایش او برای آزمون یک فرضیه همان است که برای آزمودن ماهیت اقلیدسی جهان سه‌بعدی ما انجام داد. او این کار را با اندازه‌گیری سه‌زاویهٔ مثلثی که از سه قله تشکیل شده بود انجام داد: سه قلهٔ بروکن، هوهاگن و اینزلزبرگ: حاصل جمع زوایا ۱۴٫۸۵ ثانیه بیشتر از π شد، ولی به‌هر صورت در محدودهٔ خطای آزمایشی π بود. اردوگاه منطق در طول قرن نوزدهم به‌اوج شکوفایی رسید، از برشهای ددکیند برای حسابی کردن اعداد حقیقی گرفته تا منطق بول، صوری شدن حساب محمولات به دست فرگه، و صوری شدن نظریهٔ مجموعه‌ها به‌دست کانتور. بد نیست یکی از نقاط عطف این مکتب را یادآوری بکنیم: یعنی اثبات این قضیه که ۲ = ۱ + ۱، به‌دست راسل و وایتهد. (این قضیهٔ شمارهٔ ۶۴۳٫۱۱۰ از پرینکیپیا ماتماتیکا ی آنهاست). شکل ۲ را نگاه کنید و به اظهارنظر آنها در پاراگراف بعدی آن توجه کنید! اما گردآوری آمار تجربی هم در قرن نوزدهم به‌شکوفایی رسید، به‌خصوص به‌دست فرانسیس گالتون، که علاقه‌اش به‌اندازه‌گیری انواع و اقسام امور مربوط به اشخاص تا حدی بود که امروزه نمی‌توان او را چندان «از نظر سیاسی صالح»[1] به‌شمار آورد.

حال اگر به‌سراغ قرن خودمان بیاییم، می‌بینیم که مهمترین گرایش، عرضهٔ مدلهای احتمال پیچیده‌تر و حقیقتاً جالبتری بوده است که کاربردهای عمیقتری در علوم داشته‌اند. برای مثال کارگالتون محدود بود به برازش توزیعهای گاوسی به مجموعه‌های داده‌های کم‌بُعد یا غیربرداری. جهش بزرگ در این زمینه زمانی رخ داد که گیبس تعریفی از مدلهای احتمال با بعد زیاد در فیزیک ارائه کرد، مثلاً برای گازها که منجر به پیدایش مکانیک آماری شد. کینز هم در باب مبانی احتمال و هم دربارهٔ اقتصاد مطالبی نوشت و سعی کرد تا کاربرد صحیح استدلالهای احتمالاتی را در جهان واقع روشن کند. وینر روشهای تصادفی را در مورد پیش‌بینی سیگنال و نظریهٔ کنترل به کار بست. شانون روشهای تصادفی را برای فشرده ساختن داده‌ها به‌کار برد و از این طریق، نقش اساسی آنتروپی توزیع احتمال را کشف کرد. گرنادر[2] روشهای تصادفی را اول در مورد ساختارهای جبری و بعداً دربارهٔ الگوهایی که آنها در جهان، به‌خصوص در زمینهٔ بینایی، ایجاد می‌کنند به‌کار بست. همهٔ اینها ابزارهایی قوی و مثالهایی الهام‌بخش از کاربرد روشهای تصادفی در اختیار ما قرار داده‌اند.

در همان حال که این کاربردهای واقعاً هیجان‌انگیز از آمار به‌دست می‌آمد، بخش اعظم خودِ جامعهٔ آماردانان، به‌رهبری سِر آر. آ. فیشر سرگرم بستن دست خود از پشت بودند، و اصرار می‌کردند که آمار را نمی‌توان در موقعیتهایی جز موقعیتهای کاملاً تکرارپذیر به‌کار بست و تازه آن هم فقط به‌کمک داده‌های تجربی. این قول به‌مکتب «فراوانی‌گرا» شهرت دارد که همواره با مکتب بیزی سر جنگ داشته‌اند. مکتب اخیر معتقد بوده که امور پیشینی [ماقبل تجربی] قابل استناد هستند و استنباط آماری را می‌توان به‌نحو بارزی بسط و گسترش داد. رهیافت فیشر منکر بسط استنباط آماری به قلمرو تفکر واقعی است چون موقعیتهای زندگی واقعی همیشه در میان انبوه متغیرهای موقعیتی مندرج و مدفون، و غیرقابل تکرارند. خوشبختانه مکتب بیزی کاملاً از بین نرفت و دیگران از جمله دفینتی، جینز و دیگران به استمرار و شکوفایی آن یاری رساندند. کاربردهای جدید آمار بیزی در زمینه‌های بینایی، گفتار، دستگاههای خبره، و سیستمهای عصبی رشدی انفجاری داشته‌اند.

۴. متغیر تصادفی کدام است؟

در واقع این قول، قول دیوید کاژدان است: وقتی او سمینار گلفاند را به هاروارد انتقال داد، اسم آن را «سمینار بنیادی» گذاشت و از تک‌تک افراد سمینار خواست که یکی از مفاهیمی را که خیلی خوب می‌دانند و هرکس باید آن را بیاموزد، توصیف بکنند. و موضوع عنوان این بخش را به پرسی دیاکونیس محول کرد. من از این ابتکار کاژدان خوشم آمد: توصیف متغیر تصادفی کار ساده‌ای نیست. این مفهوم، مفهوم اصلی نظریهٔ احتمال و آمار است، و به‌همین دلیل در اشکال متفاوت ظاهر می‌شود. بگذارید فهرستی از توصیفهای مختلف آن تنظیم کنیم:

- متغیرهای تصادفی تجربی‌ای وجود دارند؛ برای مثال، چنین متغیرهایی زمانی پدید می‌آیند که وزن و قد نمونه‌ای از افراد را به‌صورت جدول تنظیم بکنیم؛ [یا] آنکه تصویری را بگیریم و شدت پیکسل‌های آن را اندازه بگیریم؛ یا آنکه دارت[1] را به‌سوی تختهٔ آن پرتاب کنیم و محل اصابتش را نسبت به خال اندازه بگیریم.
- متغیرهای تصادفی بنیادی‌ای وجود دارند؛ برای مثال، نمونه‌ای تصادفی از مجموعه‌ای متناهی و دارای توزیع یکنواخت؛ عددی حقیقی که توزیع تصادفی و نرمال داشته باشد؛ نمونه‌ای تصادفی از حرکت براونی.

۱. یک یادداشت شخصی: پدربزرگ من، آلفرد مامفرد، سالها پزشک دبستانی در منچستر بود و خیلی مجذوب همبستگیهایی بود که در اندازه‌گیری دقیق پارامترهای مربوط به‌سلامتی بچه‌ها می‌یافت.

1. dart

2. Grenader

- متغیرهای تصادفی حقیقتاً پیچیده‌ای هم وجود دارند. مثال بارز آن عبارت است از جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی تصادفی که دارای یک جملهٔ محرک نوفهٔ سفید باشد. مثال دیگر عبارت است از خمینه‌ای تصادفی که به‌کمک نوعی عناصر تصادفی بنیادی ساخته شده باشد. گروموف در سخنرانی خود برخی از آنها را توصیف و تبیین کرد.
- تشخیص یک پزشک را هم می‌توان یک نمونهٔ تصادفی در نظر گرفت، نمونه‌ای مرکب از توزیع احتمال پسینی [مابعد تجربی] او در ارتباط با وضعیت جسمی شما و با در نظرگرفتن ترکیب این عوامل: (الف) تجربهٔ شخصی خود پزشک؛ (ب) دانش اکتسابی او از منابعی چون کتاب، مقاله، و پزشکهای دیگر؛ (ج) سابقهٔ بیماری خودتان؛ (د) نتایج آزمایشهایتان. برای اطلاع بیشتر مراجعه کنید به‌مقالهٔ بسیار خوب لوریتسن و اشپیگل‌هالتر [۱۱].
- رُمان را هم می‌توان نوعی نمونهٔ تصادفی از توزیع احتمالِ پسینی نویسنده در ارتباط داستانها دانست که مشروط است به همه چیزهایی که نویسنده دربارهٔ ماهیت جهان واقعی مشاهده کرده یا آموخته است. این مطلب را در بخش آخر مقاله بسط خواهیم داد.
- [متغیر تصادفی را] می‌توان عملگر تعریف‌نشده‌ای در چارچوب اصل موضوعی کردن ریاضیات تصورکرد: مراجعه کنید به بخش بعد.
- چه‌بسا هر مشاهده‌ای در مکانیک کوانتومی نوعی «متغیر تصادفی ناجابه‌جایی» از آب درآید، البته اگر دیدگاه آلن کُن را که در سخنرانیش مطرح کرد اتخاذ بکنیم.

وقتی احتمال بر نظریهٔ اندازه مبتنی شود، تعریف صوری و متعارف متغیر تصادفی با مقادیری در مجموعهٔ X، این است که این مفهوم در حقیقت یک تابع اندازه‌پذیر چون: $x : \Omega \to X$ از فضای احتمال Ω به X است. اما، خود فضای احتمال معمولاً نقشی ایفا نمی‌کند و x به‌گونه‌ای عمل می‌کند که گویی عضوی شناور از مجموعهٔ X است (مانند نقطهٔ عام در هندسهٔ جبری). در نتیجه: (i) Ω برای متغیرهای تصادفی تجربی اساساً غیرقابل شناخت است؛ (ii) [ولی] برای متغیرهای تصادفی بنیادی، $\Omega = X$؛ (iii) برای متغیرهای تصادفی پیچیده، Ω حاصلضرب بزرگی از فضاهای احتمال است، فضاهایی که همهٔ عناصر تصادفی موجود در ساخت را تأمین می‌کنند؛ (iv) اما برای رمان‌نویس یا پزشک، Ω مدل احتمالی کاملی است که آنها در مورد نحوهٔ کارکرد جهان ساخته‌اند.

برای پروراندن نظریهٔ بنیادی احتمال دو رهیافت وجود دارد. بنابر یک رهیافت، هرجا که ممکن است باید سعی کرد که کل زبان احتمالاتی حذف شود و همه چیز به نظریهٔ اندازه تقلیل یابد. آنگاه Ω هم حذف می‌شود و X به اندازهٔ $p(x)$ یا $p(x)dx$، که از تصویر مستقیم تحت نگاشت x از اندازهٔ احتمال روی Ω حاصل می‌شود، مجهز می‌گردد. رهیافت دیگر آن است که مفهوم «متغیر تصادفی» در مرکز توجه قرار بگیرد و همهٔ کارها با انواع و اقسام دستکاری در متغیرهای تصادفی انجام شود. اکنون مثالی ارائه می‌کنیم که اختلاف این دو رهیافت را خوب نشان می‌دهد.

یک متغیر تصادفیِ دارای مقدار حقیقی چون x، و مفهوم «تقسیم‌پذیری نامتناهی» (ID) را در مورد آن در نظر بگیرید. می‌توان سنتی عمل کرد و چگالی احتمال x را با $p(x)$ نشان داد. آنگاه x، ID است به‌شرط آنکه به‌ازای هر n، چگالی احتمال $q_n(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $p = q_n * \cdots * q_n$ (n تا) (q_n را به‌عواملش تجزیه می‌کند). یا آنکه می‌توان گفت که به‌ازای هر nای، $x \sim y_1 + \cdots y_n$ چنان‌که y_iها عبارت‌اند از متغیرهایی تصادفی که مستقل از هم ولی یکسان توزیع شده باشند ($\sim$ به‌معنای آن است که تابع قانون واحدی‌اند).

این کار چیزی جز تغییر ساده‌ای در نمادگذاری نیست ولی اکنون ببینید وقتی قضیهٔ لوی–خینچین را به دو صورت متفاوت بیان می‌کنید چه اتفاقی می‌افتد. نحوهٔ اول بیان قضیه می‌گوید که x، ID است اگر و تنها اگر تبدیل فوریهٔ $p(x)$ یعنی $\hat{p}(\xi)$ قابل نوشتن به‌صورت زیر باشد

$$\hat{p}(\xi) = e^{ia\xi - b\xi^2 - c\int (e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1+y^2}) d\mu(y)}$$

در روش دوم، همان شرط مستقیماً برحسب متغیر تصادفی x به‌صورت ذیل بیان می‌شود:

$$x \sim a + bx_{\text{نرمال}} + c\sum(x_i - c_i\text{عامل همگرایی})$$

که در آن $x_{\text{نرمال}}$ متغیر نرمال استاندارد و $\{x_i\}$ یک فرایند نرمال پواسون است که از چگالی ν اخذ شده است. خب می‌بینید که آنها کاملاً متفاوت به‌نظر می‌رسند! از نظر من، روش دوم برای بیان قضیهٔ لوی–خینچین به‌مراتب روشنتر است: با تصریح کردن متغیرهای تصادفی بلافاصله معنای واقعاً تصادفی نتیجه آشکار می‌شود.

۵. درج متغیرهای تصادفی در مبانی

در رهیافت تقلیل‌گرا، متغیر تصادفی برحسب اندازه تعریف می‌شود که خود برحسب نظریهٔ [اعداد] حقیقی تعریف می‌شود، و این را هم نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف می‌کند که خودش بر اساس حساب محمولات تعریف می‌شود. در عوض من می‌خواهم بگویم که باید علی‌الاصول بتوان متغیرهای تصادفی را در مبانی منطق و ریاضیات ادغام کرد و به صورتبندی شفافتر و کاملتری از دیدگاه تصادفی رسید. من خودم هنوز صورتبندی کامل و قطعی از این قضیه ندارم، ولی طرح آن را که بر دو منبع مختلف و اندیشه برانگیز استوار است در دست دارم. منبع اول عبارت است از کارهایی که جینز در ارتباط با مبانی احتمال و آمار بیزی کرده است [۹]؛ منبع دوم استدلال تصادفی زیبایی است که کریستوفر فریلینگ برای رد فرضیهٔ پیوستار اقامه کرده است [۳].

اول می‌پردازیم به‌جینز: همان‌طور که دیدیم، فضای احتمال Ωای که برای متغیرهای تصادفی در کاربردهایی چون تشخیص پزشکی مورد نیاز است به‌طور دقیق غیرقابل تعیین است. عوامل تعیین‌کنندهٔ اجزای تجزیه به‌حدی زیادند که عملاً هیچگاه در جدول احتمالات پزشک قابل تصریح نیستند. هستهٔ انتقاد پیروان مکتب فراوانی‌گرا از روشهای بیزی دقیقاً همین مسأله بود. به‌اعتقاد من، جینز قانع‌کننده‌ترین جواب را برای این مسأله دارد. او نظریهٔ خود را با این فرض آغاز می‌کند که کلیهٔ عاملها، از جمله خود ما، همیشه به هر رویداد Aای «مقبولیت» [«معقولیت»]ی نسبت می‌دهند که در مجموعه‌ای به‌طور خطی مرتب و نامعلوم قرار دارد — آن را $\mathcal{P}l$ می‌نامیم. در حقیقت، مقبولیتها را فقط به رویدادها نسبت نمی‌دهیم بلکه به‌رویدادهای شرطی نیز

نسبت می‌دهیم ــ اگر وقوع B معلوم باشد، آنگاه مقبولیتِ راست بودن A چیست؟ این مقبولیت را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$p(A|B) \in \mathcal{P}l$$

نتیجه‌گیری جینز این است که به‌کمک چند اصل موضوع معقول، می‌توان استنتاج کرد که یک یکریختی ترتیبی چون $\mathcal{P}l \cong [۰,۱]$ وجود دارد که تحت آن، p تبدیل می‌شود به نوعی توزیع احتمال روی جبر Aها (به‌خصوص $p(A|B) = p(A \wedge B)/p(B)$). می‌توانیم این نتیجه را به‌این صورت خلاصه بکنیم که نظریهٔ احتمال، نظریهٔ تجویزی مقبولیت است، یعنی آنکه اگر قواعد طبیعی سازگاری درونی را بر هر مفهوم خودساخته از مقبولیت تحمیل بکنیم، به‌نوعی مدل احتمال صادق می‌رسیم. برای جزئیات این استدلال، مراجعه کنید به کتاب جالب او (فصلهای ۱ و ۲ از [۹]) که بعد از فوتش ظاهراً در دست چاپ است.

بر مبنای این مطالب می‌توانیم پیشنهاد زیر را دربارهٔ حساب محمولات تصادفی ارائه بکنیم. نحو این حساب باید مشابه نحو حساب محمولات متعارف باشد فقط با این فرق که در آن دو نوع متغیر داریم: محمولات و ثوابت متعارف به انضمام متغیرهای آزاد سورپذیر x و مجموعه‌ای از ثوابت تصادفی $\underline{x}$. افزون بر این، این حساب دارای تابع صدقی چون p است که همه فرمولهای F فاقد متغیر آزاد را به‌اعداد حقیقی میان ۰ و ۱ می‌نگارد. اگر فرمول F فقط شامل متغیرهای متعارف باشد، آنگاه $p(F) \in \{۰,۱\}$. معناشناسی صوریِ این نظریه، توابعی ثابت و تصادفی روی فضاهای احتمال می‌سازد چنانکه هر فرمولی زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب این فضاها تعریف می‌کند، در نتیجه احتمال دارد.

نظریهٔ صوریِ تصادفیِ اعداد به‌اندازهٔ کافی صاحب قدرت بیان خواهد بود که به‌آن بتوان اصل موضوع پیوستگی برای p را اضافه کرد:

$$p(\exists n \underline{F}(n)) = \text{l.u.b.}_m p((\exists n \leq m)\underline{F}(n))$$

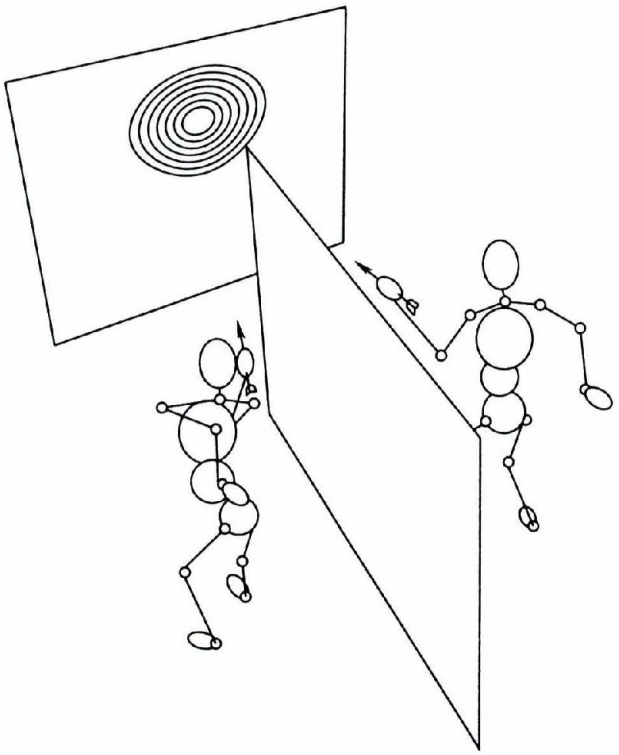
همچنین به‌اصول موضوعی نیاز داریم که متغیرهای تصادفی بنیادی را به‌ما عرضه کند. بنابراین اگر $\mathcal{N}$ محمولی باشد که به‌کمک آن اعداد طبیعی را بتوانیم تعریف بکنیم، متغیرهای تصادفی برنولی هم به‌کمک فرا-اصولی چون اصول موضوع ذیل حاصل می‌شود

$$(\forall a \in \mathcal{P}l)(\exists \underline{x}_a) \ni \mathcal{N}(\underline{x}_a) \wedge [p(\underline{x}_a = ۰) = ۱ - a] \wedge [p(\underline{x}_a = ۱) = a]$$

در حقیقت، آنچه مطلوب است عبارت است از خانواده‌هایی از متغیرهای مستقل و شمارش‌پذیرِ برنولی. به همین ترتیب، اصل موضوع بنیادی آنالیز تصادفی باید وجود پیوستاری باشد که برمبنای شروط ذیل تعریف می‌شوند: (i) محمول $\mathcal{C}$، (ii) ترتیب خطی $(c_۱$ و $c_۲)$ بین اعداد $c_۱$ و $c_۲$ که $\mathcal{C}(c)$ در موردشان صدق بکند، (iii) یک $x_۰$ تصادفی که در $p(\mathcal{C}(\underline{x}_۰)) = ۱$ صدق بکند؛ (iv) وجود اصل موضوع ذیل:

$$(\forall a \in \mathcal{P}l, a \neq ۰, ۱)[\exists! c) \ni \mathcal{C}(c) \wedge [p(< (\underline{x}_۰, c)) = a]$$

اگر بخواهیم مطلب را به‌زبان معمولی بیان کنیم باید بگوییم منظورمان این است که می‌توانیم پیوستار را به‌گونه‌ای مرتب کنیم که بازه‌های یکطرفه‌اش همهٔ



شکل۳ دو بازیکن دارت رودرروی هم. فریلینگ از این بازی برای ابطال فرضیهٔ پیوستار الهام گرفت.

احتمالهای ممکن میان صفر و یک را دقیقاً یک‌بار عرضه کند، یعنی به‌زبان متعارف، پیوستار دقیقاً همان چیزی است که شما می‌توانید دارت را به‌سویش پرتاب کنید. بازی دارت (به‌زبان صوری، اندازهٔ لبگ روی (۱ و ۰)) به‌وسیلهٔ متغیر تصادفی بنیادی $\underline{x}_۰$ تعیین می‌شود، متغیری که بر مبنای اصل موضوع مذکور متغیرهای نحوی اعداد حقیقی را به‌متغیرهای معناییِ مقدار مقبولیت مربوط می‌کند. این امر نظریهٔ اندازه را در بطن مبانی نظریه قرار می‌دهد.

از اینجا به‌سوی نتیجه‌گیری حیرت‌آور کریستوفر فریلنگ [۳] هدایت می‌شویم: او با الهام از بازی دارت نتیجه گرفت که ما می‌توانیم فرضیهٔ پیوستار را رد بکنیم. من نمی‌دانم چرا همه از قضیهٔ او اطلاع ندارند و چرا آن را همتای نتایج گودل و کوهن نمی‌دانند. ولی استدلال او را به‌زبان کلاسیک می‌توان چنین بیان کرد (نگاه کنید به شکل ۳). دو نفر دارت‌باز را تصور کنید که مستقل از یکدیگر دارتهای خود را به‌سوی تختهٔ آن پرتاب می‌کنند. اگر فرضیهٔ پیوستار صادق باشد، نقاط P روی سطح تختهٔ دارت را می‌توان خوش ترتیب تصور کرد به‌طوری‌که به‌ازای هر Pای مجموعهٔ Qهایی که $Q < P$ (این مجموعه را S_Q می‌خوانیم) شمارش‌پذیر است. فرض کنید که دارتِ بازیکنهای ۱ و ۲ در نقاط $P_۱$ و $P_۲$ به تخته اصابت کنند. در آن صورت، یا $P_۱ < P_۲$ یا $P_۲ < P_۱$. فرض کنید اولی صادق باشد. آنگاه $P_۱$ به‌زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری چون $S_{P_۲}$ از نقاط روی تختهٔ دارت تعلق خواهد داشت. از آنجا که این دو پرتاب مستقل از یکدیگر بودند، می‌توانیم تصور بکنیم که پرتاب ۲ اول رخ داده باشد و بعد پرتاب ۱ انجام شده باشد. بعد از پرتاب ۲، این مجموعهٔ شمارش‌پذیر $S_{P_۲}$ دیگر تثبیت شده است. اما هر مجموعهٔ شمارش‌پذیری اندازه‌پذیر است و اندازه‌اش صفر است. بنابراین

احتمال اینکه پرتاب ۱ به S_{P_2} اصابت کرده باشد صفر است. همین استدلال باز نشان می‌دهد که احتمال اینکه P_2 هم به S_{P_1} اصابت کند صفر است. بنابراین تقریباً به‌طور قطع هیچ‌کدام رخ نداده است و این امر فرض ما را که بنا بر آن تختهٔ دارت نخستین کاردینال شمارش‌ناپذیر است نقض می‌کند!

«نقص» این استدلال چیست؟ این است که متغیرهای تصادفی یعنی پرتابهای دارت را همچون اموری واقعی در نظر گرفته‌ایم! اگر سعی کنیم که این استدلال را در قالب نظریهٔ اندازهٔ کلاسیک بیان بکنیم اول از همه نیاز داریم که گرافِ خوش‌ترتیبی اندازه‌پذیر باشد، فرضی که طبعاً نباید زیر بارش برویم. بنابراین آیا از خیر این اثبات می‌گذریم؟ فریلینگ از این استدلال استفاده کرد تا انگیزه‌ای برای اضافه کردن اصل موضوع جدیدی به‌نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد کند که فرضیهٔ پیوستار را نقض بکند. من خودم معتقدم باید به مراتب فراتر از این برویم: «اثبات» او نشان می‌دهد که اگر ما متغیرهای تصادفی را به یکی از اجزای بنیادی ریاضیات تبدیل بکنیم، آنگاه نتیجه می‌شود که فرضیهٔ پیوستار کاذب است و ما خود را از دست یکی از مسائل لاینحل و بی‌معنای نظریهٔ مجموعه‌ها خلاص کرده‌ایم. فرضیهٔ پیوستار به‌یقین مشابه همان مسألهٔ [قرون وسطایی] مدرسیون است که چه تعداد فرشته بر نوک یک سوزن می‌توانند بایستند: مسأله‌ای که با تغییر دیدگاه ما محو می‌شود.

با این مطلب به دشوارترین بخش تجدید نظر پیشنهادی ما در مبانی می‌رسیم: باید تصمیم بگیریم که نظریهٔ مجموعه‌های تصادفی را چگونه تبیین کنیم. روشن است که یا باید اصل موضوع انتخاب را حذف بکنیم یا اصل موضوع مجموعهٔ توانی را. ولی وجود اشیای تصادفی، نوعی اصل موضوع انتخاب تصادفی است و در نتیجه به‌اعتقاد من فعلاً بهتر است که از اصل موضوع مجموعهٔ توانی صرف‌نظر بکنیم. آنچه ریاضیات به‌واقع برای هر مجموعهٔ X احتیاج دارد مجموعهٔ عظیم 2^X نیست بلکه مجموعهٔ دنباله‌های $X^{\mathbb{N}}$ در X است. مضافاً، از آنجا که $p(\underline{x}_\circ \in A) \in \mathcal{P}l$ باید برای هر زیر مجموعه‌ای چون A از C تعریف بشود، ضروری است که هر زیر مجموعهٔ تعریف‌پذیر C اندازه‌پذیر باشد. این مبحث با تخصص من فاصله دارد ولی به‌نظرم می‌رسد نتایج شلاه و وودین [۱۵] نشان می‌دهند که‌این طور نیست که این امر به‌وضوح ناسازگار یا غیرعملی باشد.

۶. تهاجم روشهای تصادفی به‌قلمرو ریاضیات کلاسیک

خالی از فایده نیست اگر نگاهی هم به‌مباحث متعددی از ریاضیات کلاسیک بیفکنیم که بر اثر استفاده از روشهای تصادفی متحول شده‌اند و تعمیق یافته‌اند.

در مبحث ترکیبیات، نظریهٔ گراف نمونهٔ بارز به‌شمار می‌آید. تهاجم با استفادهٔ اردوش از گرافهایی تصادفی که دارای تعداد ثابتی رأس و یال هستند شروع شد، و به کشف زیبای پدیدهٔ گذار فاز منجر شد: گراف تصادفی به‌طور قریب به‌یقین در محدودهٔ خیلی باریکی از تعداد یالها همبند می‌شود. یک نمونهٔ جالب، کاربرد روشهای تصادفی برای ساختن گرافهایی با کمر (یعنی با حداقل اندازهٔ دور) و درجهٔ معین است که تقریباً حداقل ترتیب ممکن را دارند. امروزه این رهیافت را «روش احتمالاتی» می‌خوانند و این مسأله در کتاب اسپنسر [۱۶] به‌خوبی توصیف شده است. در جهتی دیگر، نظریهٔ خوش ساخت فرایندهای شاخه‌زای تصادفی را داریم که از این سؤال آغاز می‌شود که با چه احتمالی شجره نامچهٔ یک خانواده اشرافی به انتها می‌رسد.

چه‌بسا قانع‌کننده‌ترین مورد برای درک اهمیت روشهای تصادفی عبارت باشد ازکاربرد آنها در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی [ODE] و معادلات دیفرانسیل جزئی [PDE]. وقتی معادلات دیفرانسیل برای مدلسازی طبیعت ابداع شدند همه کاملاً می‌دانستند که هر معادلهٔ خاصی، نمایشی جزئی از واقعیت است، نمایشی که برخی اثرها را ملحوظ می‌کند و برخی را اصلاً در نظر نمی‌گیرد. البته، موارد اصلی و اولیه عبارت بودند از مسألهٔ دو جسم و قانون حرکت نیوتن. این معادلات حرکت سیارات را به‌نحو زیبایی پیش‌بینی کردند، و همراه با اضافه کردن اختلالها تصویر کامل و دقیقی برای دورهٔ زمانی نسبتاً بلندی (مثلاً شاید 10^8 سال) ارائه دادند. ولی وقتی مدت‌زمان شما از این حدود تجاوز می‌کند (مثلاً وقتی به 10^9 سال می‌رسد)، اثرهای در نظر گرفته‌نشده و مدلسازی نشده جمع می‌شوند و تقریبْ سودمندی خود را از دست می‌دهد. با توجه به این امر وقتی به مسألهٔ سه جسم می‌رسیم تکلیف چیست؟ این امر باعث می‌شود که تحلیل تعیّنی کلاسیک معادلات گرانشی سه جسم همان قدر به جهان ربط داشته باشد که فرضیهٔ پیوستار! یک گام مهم برای آنکه این معادله ربط بیشتری به‌جهان پیدا بکند این است که یک عبارت تصادفی کوچک اضافه بکنیم. در این حالت حتی اگر عبارت تصادفی به‌سمت صفر میل بکند، آثار مجانبی آن لزومی ندارد که چنین رفتار کنند. به‌نظر می‌آید ادعای منصفانه‌ای باشد که بگوییم وقتی به هر معادلهٔ دیفرانسیل یک عبارت تصادفی اضافه کنیم مدلی بهتر برای جهان از آب درخواهد آمد و اینکه تحلیل کلاسیک آنها فقط وقتی سودمند است که چنین تحلیلی نسبت به‌چنان اختلالهایی به‌نحو مناسبی پایدار باشد.

اما امری که برای ریاضیدان حائز اهمیت بیشتری است این است که وقتی به‌معادلات دیفرانسیل از دیدگاه تصادفی نگریسته شود ماهیت تحلیلشان عوض می‌شود. در مورد معادلات دیفرانسیل کلاسیکی که جوابهای خوش‌رفتار دارند، به‌طورکلی چندان فرقی نمی‌کند که به آنها عبارت تصادفی اضافه کنیم یا نکنیم: نقطهٔ ثابت رباینده باز هم نقطهٔ ثابت رباینده می‌ماند (اگرچه اندکی «تار» می‌شود ــ جواب حول نقطهٔ ثابت کمی بالا و پایین می‌پرد). ولی وقتی معادله به رفتاری «آشوب مانند» یا متلاطم می‌انجامد، تصویرِ خیلی متفاوت و به‌مراتب خشنودکننده‌تری با تحلیل تصادفی آن حاصل می‌شود. در نتیجه به‌جای تمرکز کردن بر توصیف آسیب‌شناسی رباینده‌های غریب که جواب کلاسیک به‌طور مجانبی به‌آنها میل می‌کند، اکنون مرکز توجه ما وجود اندازهٔ احتمال ناوردایی است که تقریباً تمام جوابها در طول زمان در آن باقی می‌مانند. این ایده در مکانیک آماری از دلِ مطالعات مربوط به حرکت براونی و مدل آیزینگ نشأت گرفت. اما متأسفانه بسیاری از «نتایج» حاصل از این نظریه‌ها یا به صورت مکاشفه‌ای، یعنی به‌سبک استدلالهای فیزیکدانان، توجیه می‌شوند یا آنکه هنوز در مرحلهٔ رویا هستند (همان‌طور که تالاگراند[1] در سخنرانی خود اشاره کرد). اما چیزی که به‌آن امید داریم، و این امید حداقل در مواردی تحقق یافته، این است که تقریباً همهٔ مدارهای تصادفی ساختار مشابهی داشته باشند، ساختاری که بتوان به‌تفصیل آن را توصیف کرد و درک و بصیرتی واقعی از معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست دهد.

یکی از مثالهای موفق و به‌نحو حیرت‌آوری زیبا، تحلیل معادلهٔ برگرِ تصادفی توسط وینان، سینایی و دیگران [۲] است. درحالی‌که معادلهٔ

1. Talagrand

متعارف برگر می‌تواند انواع و اقسام ضربه‌ها را ایجاد بکند، در مورد حالت تصادفیِ دوره‌ای، معلوم می‌شود که تقریباً همیشه یک و فقط یک ضربه-موج برای همیشه (گذشته و آینده) دوام می‌آورد، به‌طوری‌که همه ضربه‌های دیگر را در خود جذب می‌کند. (به‌قول حامیان مالی ما) چالش عظیم این است که با تحلیل معادلهٔ ناویر-استوکس بتوانیم به درک آشوب ــ به‌نحوی که در سخنرانی فقرمن مطرح شده ــ برسیم.

در زمینهٔ کاربرد روشهای تصادفی، فیزیک ریاضی نسبت به ریاضیات محض گامهای بلندتری برداشته است: یکی از عناصر اصلی نظریهٔ ریسمان، وارد کارکردن رویه‌های ریمانی تصادفی از طریق تعریف یک اندازهٔ احتمال روی فضای پیمانه بوده است و هاکینگ هم سعی کرده است تا از توپولوژیهای تصادفی روی فضازمان استفاده بکند.

۷. تفکر به‌عنوان استنباط بیزی

اکنون می‌خواهم در پایان مطالب خود به‌مبحثی بپردازم که بیشتر از هر مبحث دیگری در آن تبحر دارم: مبحث مدلسازی تفکر به عنوان فرایندی محاسباتی. می‌خواهم در وهلهٔ اول دو مثالِ ارائه بدهم که یکی دربارهٔ استدلال به‌کمک منطق و دیگری دربارهٔ استدلال به‌کمک احتمالات است. مثالِ استفاده از منطق، قیاس سرگرم‌کننده‌ای است که از «کتاب راهنمای رانندگان بوستون» اقتباس شده است. خواننده می‌تواند با امتحان منطق به‌کاربسته شده در آن خود را سرگرم کند.

مقدمات

الف) تولستوی نابغه بود؛

ب) فقط افراد نابغه می‌توانند قدر تولستوی را بدانند؛

ج) نابغه‌ای نیست که صاحب نوعی غرابت نباشد؛

د) تولستوی به‌سبک بلوز آواز می‌خواند؛

ه) هر آدم عجیب و غریبی را که آواز بلوز می‌خواند، آدم کودن می‌داند؛

و) آدمهای عجیب و غریب فکر می‌کنند که صاحب جاده هستند

$\Longleftarrow$

نتیجه: همیشه آدم کودنی وجود دارد که فکر بکند صاحب جاده است.

درست است که این قیاس نامعقول است، با این همه چیزی را به‌خوبی نشان می‌دهد و آن این است که در زندگی روزمره، استدلال دقیق و معتبر به‌ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد ــ تعمیمها معمولاً در زمینه‌ها و موقعیتهای متفاوت و با درجهٔ مقبولیت مختلف کاربرد دارند و طبعاً گره‌زدن آنها به‌همدیگر به‌تولید انواع و اقسام حرفهای بی‌ربط هم منجر می‌شود. مثلاً (د) ممکن است نوعی استعاره تعبیر شود و (و) حرف متعارف قابل قبولی است که فقط در مورد طیف معینی از آدمهای عجیب و غریب صدق می‌کند (چه‌بسا مجموعه‌ای کاملاً مجزا از مجموعهٔ (ج) باشد). به‌همین‌دلیل و با این حرفها به صورت منطقی استدلال کردن کار بی‌معنایی است. حال این حرفها را مقایسه کنید با مثال جودا پرل در ارتباط با استدلالِ مبتنی بر فهم متعارف در [۱۳]:

(الف) واتسن به هلمز در دفترش تلفن می‌کند و می‌گوید دزدگیر منزل هلمز آژیر می‌کشد. هلمز آماده می‌شود که خود را هرچه زودتر به‌منزل برساند.

(ب) ناگهان هلمز به‌یاد می‌آورد که واتسن آدم شوخ‌طبعی است و در نتیجه به حرف او شک می‌کند.

$\Longleftarrow$

(ج) هلمز به‌خانم گیبون که همسایهٔ دیگری است تلفن می‌کند. ولی خانم گیبون به اصطلاح سرش اندکی گرم است و شروع می‌کند به‌دادِ سخن دادن دربارهٔ سرقت و جنایت، به‌طوری‌که هلمز فکر می‌کند که او صدای آژیر را شنیده است.

(د) هلمز به‌یاد می‌آورد که در کتابچهٔ راهنمای دزدگیر نوشته شده است که زلزله سبب روشن‌شدن آژیر می‌شود.

(ه) هلمز با خود می‌گوید که اگر زلزله‌ای درکار باشد باید از طریق رادیو اعلام شود.

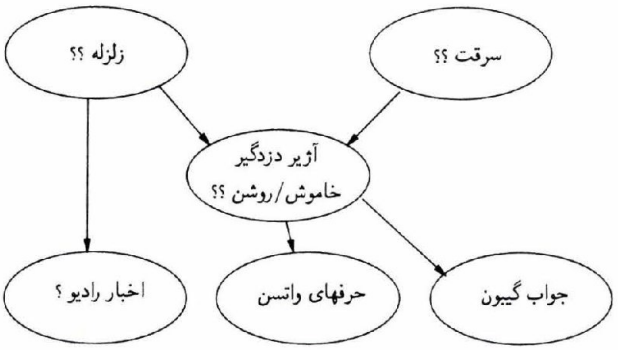
$\Longleftarrow$

(و) هلمز رادیوی خود را روشن می‌کند.

بنابر تحلیل پرل، برای فرایندهای ذهنی هلمز می‌توان مدلی بیزی ارائه کرد که او آن را نوعی «شبکهٔ بیزی» می‌خواند و در شکل ۴ نشان داده شده است. چنین شبکه‌ای گراف جهت‌داری است که گرههای آن یک سلسله رویداد را نشان می‌دهند که می‌توانند صادق باشند یا نباشند. یالها علیت [حاکم بر وقوع رویدادها] را نشان می‌دهند و احتمالهایی شرطی به‌آنها منسوب می‌شود. مجموعهٔ این احتمالهای شرطی، [اطلاعات] «پیشینی» خوانده می‌شود، که عبارت است از اطلاعات احتمالاتی که هلمز قبل از به‌صدا درآمدن زنگ تلفن روی میزش در اختیار دارد. در شکل، ۶ رأس وجود دارد که ۲ رأسش دو رویداد معلوم را نمایش می‌دهند ــ شهادت واتسن و گیبون ــ و ۴ رویداد دیگری که هلمز سرگرم سبک و سنگین کردن وقوع آنهاست. هلمز در هر مرحله از تفکرش صاحب شواهدی است ــ یعنی رئوسی که صدق و کذب‌شان معلوم است ــ و صاحب [اطلاعات] پیشینی است و باید امر «پسینی» را محاسبه کند ــ یعنی همه احتمالهای روزآمد شدهٔ کلیهٔ رویدادها بر مبنای شواهد موجود. دقت کنید که چگونه استدلال او در امتداد این گراف بالا و پایین می‌رود، یعنی وقتی او سعی می‌کند احتمالهای بهتری به رویدادهای مجهول نسبت بدهد، مثلاً از طریق تلفن کردن به منزل گیبون‌ها و یا روشن کردن رادیو. برای تفصیل بیشتر دربارهٔ این مثال مراجعه کنید به‌کتاب پرل [۱۳] صص ۴۲-۵۲، و الگوریتم او برای «روزآمد کردن باور» در آنجا.

یکی از مسائل اصلی درک تفکر همواره این بوده است که چگونه می‌توان یادگیری استقرایی را صوری کرد. با آنکه منطق نظامی به‌دست می‌دهد تا [قیاس استنتاجی یا] استنتاج را صوری بکنیم، درک استقرا از دیدگاه منطقی همواره امری به‌مراتب دشوارتر بوده است. به‌اعتقاد من قانع‌کننده‌ترین تعریف صوری استقرا تعریفی است که لزلی والیان[1] کشف کرده است، تعریفی که به‌مدل PAC (احتمالاً تقریباً درست)[2] شهرت یافته است. در اینجا می‌خواهم

1. Leslie Valiant 2. probably approximately correct



شکل۴ شبکهٔ بیزی باور برای داستان پرل دربارهٔ آژیر دزدگیر هلمز.

این تعریف را به‌طورکامل ارائه کنم چون این تعریف در آن واحد نشان می‌دهد که چگونه روشهای احتمالاتی به‌طور طبیعی هم در مورد یادگیری و هم در مورد استنباط بکاربردنی‌اند.

طرح تعریف به این صورت است: Ω مجموعه‌ای از امکانهاست و $\mathcal{C}$ هم مجموعه‌ای از محمولات است: $P : \Omega \to \{۱ \text{ و } ۰\}$. یکی از $P \in \mathcal{C}$ صادق است و مسأله این است که Pیِ صادق را بر مبنای نمونه‌ها یا مثالهای $(y, P(y))$ حدس بزنیم. ردهٔ $\mathcal{C}$ وقتی «PAC ـیادگرفتنی» است که الگوریتمی وجود داشته باشد که حدسی چون $\hat{P}_D : \Omega \to \{۱ \text{ و } ۰\}$ را برمبنای n مثال $\mathcal{D} = (y_۱, \dots, y_n; P(y_۱), \dots P(y_n))$ محاسبه کند و در عین حال در عبارت زیر هم صدق بکند:

$$(\forall \epsilon_۱, \epsilon_۲)(\exists n)(\forall [\Omega \text{ بر} \pi \text{ توزیع احتمال}])$$
$$\Leftarrow \pi \text{، مستقل هم‌توزیع نسبت به } y_۱, \cdots, y_n \in \Omega$$
$$\text{Prob}_{\mathcal{D}}(\text{Prob}_y(\hat{P}_{\mathcal{D}}(y) \neq P(y)) < \epsilon_۲) > ۱ - \epsilon_۱$$

دقت کنید که معنای این چیست: شما در زندگی روزمره نمی‌دانید کدام مثال، متعارف است و کدام نادر، ولی در عین حال مجبورید که مثالهای یادگیری خود را از همان توزیع مثالهای آزمونی انتخاب کنید. و آنگاه همیشه احتمال کوچکی چون $\epsilon_۱$ وجود دارد که شما در واقع امر مثال گمراه‌کننده‌ای را انتخاب کرده باشید؛ ولی اگر مثالهای نوعی در اختیار شما قرار گرفته باشد آنگاه بعد از رؤیت تعدادی کافی مثال، فقط به‌اندازهٔ $\epsilon_۲$ خطا اشتباه می‌کنید. به‌نظر من برای صوری کردن یادگیری استقرایی این حرف بسیار قانع‌کننده است و این روش شاید درست‌ترین راه باشد.

حال اگر باز به‌مسألهٔ تفکر در کل بازگردیم، که شامل مدلهای یادگیری، مدلهای ذخیره‌سازی، و استدلال بر مبنای مدلهاست، می‌توانیم این فرضیه را در نظر بگیریم که تفکر تشکیل شده است از ساختن مدلهای احتمال و استفاده از استنباط بیزی. به‌نظر من برای اینکه ثابت کنیم که این حرفها نه فقط در موارد ساختگی مانند مثالهای پرل بلکه در موقعیتهای واقعی هم حرفهایی عملی هستند، سه مانع اصلی وجود دارد. مانع اول این است که در جهان واقع میلیونها متغیر تصادفی وجود دارد و جدول کامل احتمالها برای همهٔ مقادیر ممکن این متغیرها بسیار بزرگتر از آن است که قابل ذخیره‌سازی باشند. ما به یک رده یا مجموعهٔ محدودی از مدلهای احتمال احتیاج داریم، مدلهایی که به اندازه‌ای گویا باشند که بتوانند مدلی از واقعیت ارائه بدهند ولی در عین‌حال به‌اندازهٔ کافی هم مختصر و خلاصه باشند که قابل ذخیره‌سازی باشند. دوم اینکه باید نشان بدهیم که انجام استنباط براساس این مدلها، با سرعت معقولی میسر است. سوم آنکه باید نشان بدهیم که پارامترهای موجود در این رده‌های توزیعهای احتمال [همه] PAC ـیادگرفتنی هستند. این فهرست سفارش خیلی بلند است ولی در برخی از زمینه‌های آن کارهای اساسی انجام گرفته است و به‌نظر می‌آید که در مجموع پیشرفت چشمگیر و جالبی تحقق پذیرفته باشد.

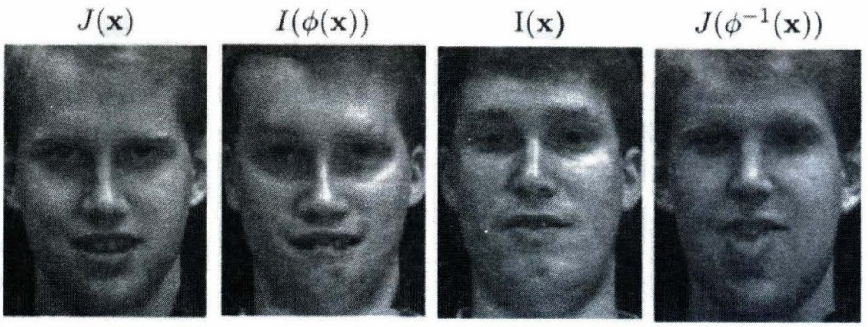
گیبس در ایجاد مدلهای عظیم ولی عملی احتمال نخستین گام عمده را برداشت. ایدهٔ او عبارت بود از در نظر گرفتن مدلهایی که در آنها لگاریتم احتمال، مجموع عبارتهایی باشد که هرکدام در هر لحظه فقط شامل تعداد کمی متغیر تصادفی باشد:

$$\text{Prob}(\{x_k\}) = \frac{۱}{Z} e^{-\sum_C E_C(x_C)}$$

که در آن Z ثابت است، $x_C = \{x_k | k \in C\}$، و فرض بر این است که مجموعه‌های C مجموعه‌های «کوچکی» از متغیرها هستند. انواع این مدلهای «گیبسی» به‌طور گسترده‌ای در هوش مصنوعی، بینایی، گفتار و شبکه‌های عصبی مورد استفاده قرارگرفته‌اند. در قلمرو پیوسته، می‌توان به‌این مدلها به‌چشم تعمیمهای طبیعی مدلهای گاوسی نگریست: مدلهای گاوسی دقیقاً مدلهایی هستند که لگاریتم‌ـاحتمال آنها مجموع عبارتهایی است که در هر لحظه فقط شامل دو متغیر و به شکل ax_i، $bx_i^۲$ یا cx_ix_j باشند. ولی مدلهای گیبسی عام می‌توانند کاملاً غیرگاوسی، غیر پارامتری، و دارای متغیرهای مختلط پیوسته و گسسته باشند.

بسطهای موجکی تصاویر جهان واقع از جمله مثالهایی‌اند که مستقیماً به توزیعهای احتمال گیبسِ غیرگاوسی منجر می‌شوند. مهمترین دلیلی که برای ترجیح بسطهای موجکی تصاویر، مثلاً بر بسطهای فوریه، وجود دارد این است که ضرایب موجکی تصاویر طبیعی، پراکنده‌اند. این امر به‌معنای آن است که نوعاً تعداد نسبتاً کمی از ضرایب موجکی بزرگ هستند و بیشترشان تقریباً صفرند. به‌سخن صریحتر، رفتار آنها چنان است که گویی از توزیعی غیرگاوسی چون $p(I) = \frac{۱}{Z} e^{-a \sum_\alpha \sqrt{|c_\alpha|}}$ نمونه برداری شده‌اند که در آن c_αها ضرایب موجکی تصویر I هستند.

اما به‌نظر می‌رسد که مدلهای گیبسی هم به‌تنهایی برای توصیف کل جهان واقعی به اندازه کافی گویا نباشند: به‌نظر می‌آید که باید در مدلهای احتمال لازم نوعی «ارتباطها [پیوندها]ی دینامیک» گنجانده شود، یعنی متغیرهایی که به نحوی دستوری اجزا رابه کُلهایی تبدیل بکنند. برخی از این متغیرها در حکم یک سلسله «شکاف‌پرکن» هستند، مثلاً شاخصهای اشاره‌ای که مشخص می‌کنند که فلان کلمه فاعل فلان جمله است یا فلان نقطهٔ روی شبکیه، بینی فلان چهره‌ای است که دارد ادراک می‌شود. طبعاً ارتباطها یا پیوندهای دیگری هم برای موجوداتی که خواص گروهی دارند مورد نیاز است، مثلاً چیزهایی که حرکت مشترک دارند، یا پیکسل‌های تصویرکنندهٔ شیء واحدی در چشم چپ و در چشم راست. یکی از زمینه‌های تحقیقاتی مهم روز، ساخت صحیح مدلهای احتمال با چنین پیوندهای دینامیک است.



شکل۵ این مثال از اثر هالینان در بارهٔ انطباق چهره‌ها به‌وسیلهٔ دیفئومورفیسم گرفته شده است. تصاویر I و J دو چهره را نمایش می‌دهند و کج و معوج‌سازی آنها از طریق نگاشت ϕ انجام می‌شود.

بازشناسی چهره [تشخیص سیما] یکی از موارد ساده‌ای است که در آن متغیرهای پیوند دینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تشخیص هر چهره می‌توان چهرهٔ «نمونهٔ» عامی ساخت و از طریق دیفئومورفیسم[1] [وابریختی] مناسبی موسوم به «تکنیک ماسک لاستیکی» [۱۷]، این نمونه را روی هر چهرهٔ متصوری با کج و معوج کردن جفت و جورکرد. تغییر روشنایی هم تغییرات زیادی در تصویر هر چهره‌ای ایجاد می‌کند. در نتیجه، متغیرهای تصادفی این مدل هم مختصات نقاط حاصل از اعمال تابع «کج و معوج‌سازی» بر نقاط مرجع در نمونه هستند و هم ضرایب سایه‌روشن ناشی از نورپردازی چهره. بنابراین، احتمال لگاریتمی، مجموع عبارتهایی است که نیکویی برازش کج و معوج‌سازیِ تصویر مشاهده شده را با مجموع نمونه‌های نشان‌دهندهٔ چهره‌ها تحت شرایط متفاوت نورپردازی، بیان می‌کنند [۷]. چند مثال در شکل ۵ آمده است.

آیا استنباط بر مبنای این مدلها کاری درست و عملی است؟ بیشتر اوقات، استنباط مورد نظر عبارت است از پیدا کردن براورد MAP برای متغیرهای تصادفی مربوطه ولی مشاهده نشدهٔ x_S، با توزیع احتمالِ مشروط به همهٔ مشاهدات $\widehat{x_T}$. در اینجا MAP به‌معنای «احتمال پسینی ماکسیمم»[2] است، یعنی محتملترین مجموعهٔ مقادیر این متغیرها و ما به‌دنبال پیدا کردن مقدار

$$\mathrm{argmax}_{x_S} P(x_S|\widehat{x_T})$$

هستیم. این یک مسألهٔ بهینه‌سازی است و معمولاً سه‌روش بنیادی برای حل یا حل تقریبی چنین مسائلی وجود دارد: نزول گرادیانی[3]، برنامه‌ریزی دینامیک، و زنجیرهای مارکوفی مونت کارلو. متأسفانه وقتی مدل پیچیده می‌شود هر سه روش با مشکل مواجه می‌شوند: روش نزول گرادیانی در نقاط بهینهٔ موضعی دچار مشکل می‌شود؛ برنامه‌ریزی دینامیک فقط زمانی کارایی دارد که متغیرها ترتیبی خطی و طبیعی داشته باشند که متغیرهای غیرمجاور را از یکدیگر جدا سازد؛ و زنجیره‌های مارکوفی مونت کارلو هم معمولاً خیلی کُند عمل می‌کنند. با وجود این، بارِ این رشته تا همین اواخر تنها بر دوش این سه روش بوده است. برای مثال، رشتهٔ بازشناسی گفتار کاملاً مدیون روشهای برنامه‌ریزی دینامیک بوده است و هرجا که این روشها عملی نیستند دچار ضعف است.

برای رام کردن روشهای تصادفی اخیراً چندین گروه تحقیقاتی به‌بررسی شیوهٔ جدیدی پرداخته‌اند. این شیوه به «فیلترکردن ذره‌ای» [صافی ذره‌ای] یا «نمونه‌برداری استوار بر عوامل» ([۵]، [۴]، [۱۰] و [۸]) شهرت یافته است، و در حقیقت نوعی روش مونت کارلو است که سر و کارش با نمونه‌ای نسبتاً کوچک چون $\{x_S^{(\alpha)}\}$ (مثلاً ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ تا α) از توزیع است، نه مثل روش زنجیرهای مارکوفی مونت کارلو که هر بار با یک نمونه سر و کار دارد. مقصود این است که به‌تقریبی ضعیف دست بیابیم:

$$p(\cdot|\widehat{x_T}) \sim \sum_\alpha w_\alpha \delta_{x_S^{(\alpha)}}$$

یعنی به‌ازای رده‌ای از متغیرهای تصادفی «شسته رفته» f در فضای احتمال ما:

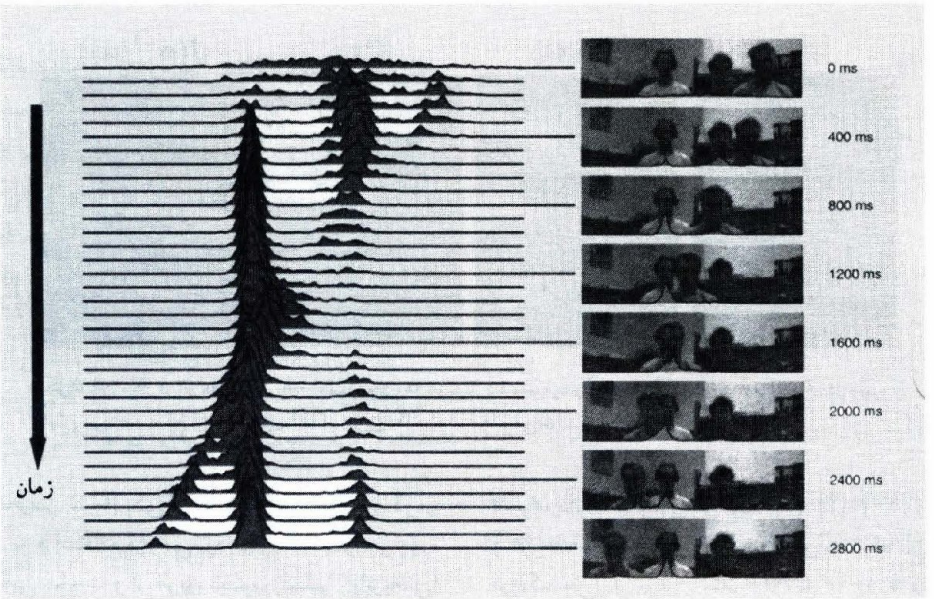
$$\mathrm{Exp}(f|\widehat{x_T}) \approx \sum_\alpha w_\alpha f(x_S^{(\alpha)})$$

امید آن است که حداقل برای متغیرهای تصادفی مهم، بسیاری از توزیعهای احتمالِ چند مدی را بتوان از طریق نمونه‌های وزن‌دار به‌این صورت تقریب زد. اضافه بر این، امید آن است که حفظ چنین نمونه‌ای اجازهٔ ادغام داده‌های جدید را در موقعیتی دیگر بدهد، موقعیتی که در آن امکانی که قبلاً کم‌احتمال‌تر بوده به محتملترین امکان تبدیل شود. در شکل ۶، مثالی از کارِ بلیک و ایزارد ارائه شده است که در آن ردیابیِ حرکت یک گروه چند نفره به‌طور موفقیت‌آمیزی انجام گرفته است. تکنیکهای کلاسیک متعارف مانند فیلترکالمان که مبتنی بر مدلهای گاوسی هستند در این مورد معمولاً از عهده کار بر نمی‌آیند.

مطالبی که ارائه شد همه معطوف بود به‌نشان دادن حال و هوای تحقیقات در مورد کاربرد روشهای تصادفی در ایجاد مدل برای رفتار هوشمند. این تحقیقات دائماً در حال تحول هستند و اغلب شاهد بوده‌ایم که هواداران این یا آن مکتب مدلسازی تفکر اعلام کرده‌اند که کلید و راه‌حل کامل باز تولید رفتار هوشمند را یافته‌اند یا آنکه فقط به چند سال تحقیق بیشتر نیاز دارند! از آنجا که در گذشته هیچ‌کدام از این ادعاها نگرفته است، من هم نمی‌خواهم ادعای جدیدی بکنم جز آنکه فکر می‌کنم ایده‌هایی که در بالا مطرح کردم به‌نظر می‌رسد که در امتداد مسیر درست باشند.

نتیجه‌گیری کلی من این است که به‌اعتقاد من روشهای تصادفی در ابتدای هزارهٔ سوم کل ریاضیات محض و کاربردی را متحول خواهند ساخت. هم در زمینهٔ مدلسازی ریاضی و هم در زمینهٔ مدلسازی علمی، احتمال و آمار ابزارهای طبیعیِ کار از آب درخواهند آمد. جهان فکری در مجموع به‌منطق بیشتر به‌عنوان یک انتزاع زیبا و ظریف خواهد نگریست، درحالی‌که نگاهش به‌آمار به‌عنوان روش متعارفِ استدلال کردن و فکر کردن خواهد بود.

1. diffeomorphism
2. Maximum A Posteriori Probability
3. gradient descent



شکل ۶ این مثال برگرفته از اثر ایزارد و بلیک در بارهٔ ردیابی چهره‌های در حال حرکت در محیط شلوغ با استفاده از صافی ذره‌ای است. در سمت راست تصاویر قرار دارند؛ در سمت چپ، توزیعهای احتمال چندمُدی هموارشده قرار دارند که احتمال شرطی هر چهره را در هر موضع (با در نظر گرفتن سلسله تصاویر قبلی و کنونی) براورد می‌کنند.

مراجع

1. Davis, P. and Hersh, R., 1980, *The Mathematical Experience*, Birkhauser-Boston.

2. E., Weinan, Khanin, K., Mazel, A., and Sinai, Ya, 1997, Probability distribution functions for the random forced Burger's equation, Phys. Rev. Letters, **78**, 1904-1907.

3. Freiling, C., 1986, Axioms of symmetry: throwing darts at the real line, *J. Symb. Logic*, **51**, 190-200.

4. Gordon, N., Salmond, D., and Smith, A., 1993, Novel Approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian State Estimation, *IEEE Proc. F*, **140**, pp. 107-113.

5. Grenander, U., Chow, Y. and Keenan, D., 1991, *HANDS, A Pattern Theoretic Study of Biological Shapes*, Springer.

6. Gross, C., 1995, Aristotle on the Brain, *The Neuroscientist*, **1**, 245-250.

7. Hallinan, P., Gordon, G., Yuille, A., Giblin, P., and Mumford, D., 1999, *Two and Three-dimensional Patterns of the Face*, AKPeters.

8. Isard, M. and Blake, A., 1996, Contour tracking by stochastic propagation of conditional density, *Proc. Eur. Conf. Comp. Vision*, pp. 343-356.

9. Jaynes, E. T., 1996-2000, *Probability Theory: The Logic of Science*, available at `http://bayes.wustl.edu/etj/prob.html`. To be published by Camb. Univ. Press.

10. Kanizawa, K., Koller, D., and Russell, S., 1995, Stochastic simulation algorithms for dynamic probabilistic networks, *Proc. Conf. Uncertainty in A. I.*, pp.346-351.

11. Laurtzen, S. and Spiegelhalter, D., 1988, Local computations with probabilities on graphical structures, *J. Royal Stat. Soc.*, **B50**, 157-224.

12. Mumford, A. A. and Young, M., 1923, *Biometrika*, **15**, p. 109-115.

13. Pearl, J., 1988, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*, Morgan Kaufman.

14. Russell, B. and Whitehead, A. N., 1912, *Principia Mathematica. vol. 2*, Cambridge Univ. Press.

15. Shelah, S. and Woodin, W. H., 1990, Large cardinals imply that every reasonable definable set is Lebesgue measurable, *Israel J. Math.*, **70**, 381-394.

16. Spencer, J., 1994 (2nd edition), *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, SIAM.

17. Widrow, B., 1973, The rubber mask technique, *Pattern Recognition*, **5**, 175-211.

* * * * * *

- David Mumford, "The dawning of the age of stochasticity", in V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur (eds.), *Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000*, Amer. math. Soc. (2000) 197-218.

* دیوید مامفرد، دانشگاه براون، آمریکا

مقالهٔ کلاسیک

پس از ارسال مجله به چاپخانه، با نهایت تأسف اطلاع یافتیم که آقای دکتر علی‌آبادی مترجم این مقاله که از چهره‌های فعال فلسفهٔ علم در ایران بودند بدرود زندگی گفته‌اند.

حال و آیندهٔ فیزیک ریاضی

هانری پوانکاره

ترجمهٔ یوسف صمدی‌علی‌آبادی

در حال حاضر فیزیک ریاضی در چه وضعیتی قرار دارد؟ مسائلش چیستند؟ آینده‌اش چه خواهد بود؟ آیا جهت‌گیری این علم در معرض تغییر قرار گرفته است؟ آیا ده سال بعد نیز این موضوع و روش آن در نظر جانشینان ما به همان صورتی جلوه خواهند کرد که امروز در نظر ما جلوه‌گرند؟ یا اینکه شاهد تغییراتی گسترده و فراگیر در آن خواهیم بود؟ اینها سؤالاتی هستند که ذهن ما را هنگام شروع بحث در بارهٔ موضوع به خود مشغول می‌دارند.

پرسش آسان است، جوابگویی مشکل. حتی اگر وسوسه می‌شدیم تا در این خصوص دست به پیش‌بینی زنیم، لحظه‌ای تأمل ما را به‌راحتی از این کار وامی‌داشت. تصور کنید که اگر از برجسته‌ترین محققان صد سال پیش سؤال می‌شد که در قرن نوزدهم فیزیک ریاضی چه وضعیتی پیدا خواهد کرد، در جواب چه مهملاتی تحویل می‌دادند. جسارتی که به آنان جرأت می‌داد در پیش‌بینی آینده این علم ذره‌ای تردید روا ندارند، چه زود تبدیل به خجالت می‌شد. بنابراین از من انتظار نداشته باشید که دست به پیش‌گویی زنم.

اما اینکه مانند هر پزشک محتاطی از دادن «پیش‌آگهی» در این‌باره پرهیز می‌کنم، مانع از این نمی‌شود که به خود اجازهٔ یک «تشخیص» مختصر بدهم. خوب پس، آری؛ نشانه‌هایی در دست‌اند که حکایت از یک بحران عمیق دارند و در حال حاضر به نظر می‌رسد باید منتظر یک دگرگونی بنیادی باشیم. لیکن دلیلی برای نگرانی عظیم وجود ندارد. می‌توان مطمئن بود که بیمار را خطر فوت تهدید نمی‌کند: برعکس حتی می‌توان امید داشت که این بحران شفابخش هم باشد زیرا تاریخ گذشته ظاهراً این امید را تضمین می‌کند. درواقع، اول بار نیست که چنین بحرانی پدید آمده است، و برای اینکه بتوانیم آن را بهتر درک نماییم، بد نیست به بحرانهایی که قبل از این روی داده‌اند نظری بیفکنیم. اجازه دهید چند مورد تاریخی را به اختصار مرور کنم.

همان‌طور که همه به‌خوبی اطلاع داریم فیزیک ریاضی زاییدهٔ مکانیک سماوی است، و در پایان قرن هیجدهم، هنگامی که این شاخه از علم به اوج تکامل خود رسیده بود، از آن متولد گردید. نوزاد، خصوصاً در سالهای اولیهٔ عمر، شباهت چشمگیری به مادر داشت.

جهان اخترشناسان از اجرامی تشکیل می‌شود که بدون شک از مقادیر عظیمی برخوردارند؛ لیکن فواصل میان این اجرام آنقدر زیاد است که موجب می‌شود اینان در ظاهر چون نقطه‌هایی مادی جلوه نمایند. این نقاط یکدیگر را به نسبت عکس مجذور فاصله جذب می‌کنند و این جاذبه تنها نیرویی است که بر حرکت آنها اثر می‌گذارد. اما چنانچه حواس ما از چنان حساسیتی برخوردار می‌بودند که بتوانند تمامی جزئیاتی را که فیزیکدانان از اجسام مدنظر دارند به ما نشان دهند، آنگاه چشم‌اندازی که در برابر دیدگانمان به نمایش درمی‌آمد به دشواری از آنچه مورد تعمق اخترشناسان قرار می‌گیرد قابل تمیز

این مقالهٔ متن سخنرانی هانری پوانکاره در تاریخ ۲۴ سپتامبر ۱۹۰۴ در گردهمایی بخش ریاضیات کاربردی کنگرهٔ بین‌المللی هنر و علم در شهر سینت لوئیس آمریکاست که نخست در بولتن انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۰۶ به چاپ رسیده و در شمارهٔ ژانویهٔ ۲۰۰۰ آن مجله تجدید چاپ شده است. متن اصلی به فرانسه بوده و یانگ (J. W. Young) آن‌را به انگلیسی برگردانده است. ترجمهٔ فارسی از متن انگلیسی صورت گرفته است. شایان ذکر است که مقالهٔ معروف اینشتین در بارهٔ نسبیت خاص در سال ۱۹۰۵ به چاپ رسید.

می‌بود. در آنجا هم با نقاطی مادی روبه‌رو می‌شدیم که فواصلشان بس عظیمتر از ابعاد آنهاست و مدارهایی را تعریف می‌کنند که از قوانین منظم تبعیت می‌نمایند. این ستاره‌های بینهایت ریز، اتمها هستند. اینها هم همانند ستاره‌های واقعی یکدیگر را جذب یا دفع می‌کنند و این جذب و دفع، که در راستای خطی که آنان را به یکدیگر متصل می‌سازد صورت می‌گیرد، تنها به فواصلِ میانشان بستگی دارد. شاید قانونی که بر تغییرات این نیرو به نسبت فواصل حاکم است، همان قانون نیوتن نباشد، اما حتماً چیزی شبیه آن خواهد بود. به‌جای توان ۲− احتمالاً توانهای دیگری خواهیم داشت و از تنوع این توانها، تکثر تمامی انواع پدیده‌های فیزیکی نشأت خواهند گرفت: یعنی تنوع کیفیات و تأثرات حسی، تمامی جهان رنگ و صوتی که ما را در میان گرفته است؛ در یک کلام، تمامی طبیعت.

آنچه گذشت شرح اندیشه‌ای است ابتدایی آن‌هم در ساده‌ترین شکل آن. آنچه باقی می‌ماند تنها یافتن مقادیری است که در هر مورد مشخص باید برای این توان منظور نمود تا از مجموعهٔ آنها تمام واقعیات توضیح خود را پیدا کنند. برای مثال، لاپلاس براساس چنین طرحی نظریهٔ زیبای خود در باب نیروی موئینگی را طرح‌ریزی کرد. در نظر وی این نیرو را می‌توان به‌سهولت موردی خاص از جاذبه، یا به قول خودش «جاذبهٔ عمومی»، به‌حساب آورد و احدی هم از اینکه این نظریه در اواسط یکی از مجلدات پنج‌گانهٔ مکانیک سماوی‌اش گنجانده شده است، تعجبی به خود راه نمی‌دهد. در دورانی نزدیکتر به ما، هنگامی که بریو[1] ثابت کرد اتمهای اتر یکدیگر را با عکس توان ششمِ فواصلشان جذب می‌کنند، بر آن بود که سِرِ آخرین رمز اپتیک [نورشناسی] را گشوده است؛ مگر ماکسول، بله خود ماکسول، در جایی ادعا نکرده بود که اتمهای یک گاز یکدیگر را متناسب با عکس توان پنجم فواصلشان دفع می‌کنند؟ در هر یک از این موارد، سخن از توان ۶− یا ۵− به‌جای ۲− است. لیکن صحبت کماکان بر سر یک توان است.

در میان نظریه‌های این دوران البته یک استثناء هم وجود دارد و آن نظریهٔ فوریه است. در اینجا با اتمهایی روبه‌رو می‌شویم که حقیقتاً از دور بر یکدیگر اثر می‌گذارند، اما اثر آنها به‌صورت ارسال حرارت تحقق می‌پذیرد و نه جذب یکدیگر؛ یعنی موجبات برهم‌زدن ترتیب اتمها را فراهم نمی‌آورد. به همین دلیل نظریهٔ فوریه می‌بایست در انظار معاصرین وی، و حتی خودش، ناقص و موقتی جلوه کرده باشد.

در اندیشه‌ای که صحبت از آن بود بارقه‌ای از عظمت نهفته است؛ فریبنده است و بسیاری از ما آن‌را رها نکرده‌ایم. ما می‌دانیم عناصری که شالودهٔ اشیا را تشکیل می‌دهند، دُم به تله نمی‌دهند مگر اینکه با صبر و حوصله از بندبند کلاف درهم‌تنیده‌ای که دستگاههای حسی در اختیارمان قرار داده‌اند، گره‌گشایی شود. پیشرفت را باید قدم به قدم حاصل نمود بدون اینکه در میانهٔ راه چیزی به غفلت از نظر دور بماند. اینکه پدران ما در این حرکت تعجیل به خرج دادند و نخواستند در کلیهٔ منازل توقفی نمایند، از روی نابخردی بوده است؛ لیکن آنها واقعاً معتقد بودند که با دستیابی به عناصر بنیادی بار دیگر شاهد همان سادگی با شکوهی خواهند بود که زمانی در مکانیک سماوی تحقق پیدا کرده بود.

علاوه بر این، اندیشهٔ موردنظر خالی از فایده نیز نبوده است؛ تا آنجا که این اندیشه به امر تدقیق مفهوم بنیادی قانون فیزیکی دامن زده، خدمتی بس گرانبها به ما کرده است. اجازه دهید توضیح دهم: در دوران باستان چه برداشتی از مفهوم قانون وجود داشت؟ اینکه قانون حاکی از توازنی است درونی، ایستا و تغییرناپذیر؛ یا اینکه الگویی است که طبیعت باید همواره از آن تقلید کند. این تلقی دیگر به هیچ‌وجه در میان ما رواجی ندارد؛ نزد ما قانون رابطه‌ای است ثابت میان پدیده‌های امروز و پدیده‌های فردا؛ در یک کلام، قانونْ معادله‌ای دیفرانسیل است.

در اینجا ما با شکل مطلوب قانون فیزیکی روبه‌رو می‌شویم؛ و به راستی این قانون نیوتن بود که برای بار اول چنین هیأتی را برای قانون معین کرد. اگر بعداً فیزیک به این برداشت از قانون خو گرفت دلیلش دقیقاً این است که با الگو قرار دادن مکانیک سماوی، سعی بر آن شد تا هر کجا که امکانش وجود داشته است، این قانون نیوتنی مورد تقلید قرار گیرد.

علی‌رغم تمام اینها، روزی فرا رسید که مفهوم نیروهای مرکزی کفایت خود را در ظاهر امر از دست داد، و این اولین بحران، از بحرانهایی بود که لحظاتی پیش به آنها اشاره نمودم.

در مقابله با این وضع چه تدبیری اندیشیده شد؟ این فکر که جزئیات عالم را باید فقط از طریق مجزاکردن اجزاء این دستگاه عظیم و تحلیل یکایک نیروهایی که در به‌کار انداختن آن دخالت دارند، مورد کنکاش قرار داد، دیگر منسوخ شده بود. در عوض همگان به این رضا دادند که تعدادی اصول کلی را به‌عنوان راهنما برگزینند، اصولی که نقش آنها دقیقاً فارغ نمودن ما از رنج انجام چنین پژوهش پردردسری باشد. اما این امر چگونه امکان‌پذیر است؟ فرض کنید ماشینی، فرق نمی‌کند از چه نوعی، در مقابل ما قرار گرفته است؛ تنها آن بخشهایی از این ماشین قابل رؤیت‌اند که اختصاص به ورود نیرو به آن و حرکت نهایی حاصل از آن دارد. سایر بخشها که شامل ارتباطات درونی دستگاه می‌شوند و از طریق آنها حرکت از یک قسمت به قسمتی دیگر انتقال پیدا می‌کند، کاملاً از نظر پنهان می‌باشند. ما نمی‌دانیم انتقال نیرو در داخل این ماشین توسط چرخ‌دنده صورت می‌پذیرد یا با کمک تسمه، میل‌لنگ یا ابزاری دیگر. آیا باید گفت که ممکن نیست بتوانیم پی به طرز کار این ماشین ببریم مگر آنکه به ما اجازه دهند اوراقش کنیم؟ خوب می‌دانید که چنین نیست و تنها با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توانیم به آنچه می‌خواهیم، در بارهٔ این ماشین دسترسی پیدا کنیم. فرض کنید با مشاهدهٔ طرز کار قسمتهای مرئی این ماشین متوجه شویم که مثلاً چرخ واقع در ورودی آن ده بار از چرخ واقع در خروجی‌اش تندتر می‌چرخد؛ آنگاه می‌توان از این امر نتیجه گرفت که جفت‌نیرویی که به چرخ اول وارد می‌شود با ده برابر جفت‌نیرویی که به چرخ آخر وارد می‌آید معادل است. برای تحصیل این نتیجه به‌هیچ وجه لزومی نداشته است که طرق عملی برقراری این تعادل را بررسی کنیم؛ یا اینکه دریابیم نیروهایی که در بخشهای درونی این ماشین عمل می‌کنند چگونه با یکدیگر در تعامل قرار می‌گیرند. تنها کافی است خود را مجاب سازیم که غیرممکن است چنین تعادلی برقرار نشود.

بسیار خوب! در مورد جهان هم اصل بقای انرژی می‌تواند همین خدمت را به ما بکند. این جهان هم خود یک ماشین است، بسیار پیچیده‌تر از دستگاههایی که در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند، و تقریباً کلیه اجزایش نیز از انظار عمیقاً پنهان‌اند. لیکن با مشاهدهٔ حرکات آن بخشهایی که به

1. Briot

رؤیت درمی‌آیند، قادریم با استفاده از این اصل نتایجی به‌دست آوریم که اعتبار خود را، علی‌رغم جزئیاتی که در عملکرد قسمتهای نامرئی وجود دارند، همواره حفظ می‌کنند.

اصل بقای انرژی، یا اصل مایر[1] مطمئناً مهمترین اصل است، اما تنها اصل نیست: اصول دیگری هم هستند که می‌توانیم با به‌کارگرفتن آنها همین ثمرات را به‌دست آوریم. اینها عبارت‌اند از:

اصل کارنو، یا اصل اتلاف انرژی.

اصل نیوتن، یا اصل برابری عمل و عکس‌العمل.

اصل نسبیت، که بر طبق آن قوانین حاکم بر پدیده‌های فیزیکی در نظر مشاهده‌گری ساکن و در نظر مشاهده‌گری که در حال حرکت انتقالی با سرعتی ثابت است باید یکی باشند، یعنی هیچ وسیله‌ای در دست نیست و نمی‌تواند باشد، تا با تمسک به آن بتوانیم معین کنیم آیا ما در حال چنین حرکتی قرار داریم یا نه.

اصل بقای جرم، یا اصل لاوازیه. به اینها من اصل کمترین کنش را نیز اضافه می‌کنم.

به کارگرفتن این پنج یا شش اصل در بارهٔ پدیده‌های متنوع فیزیکی کفایت می‌کند تا آنچه را که می‌توان به نحوی معقول انتظار داشت، یاد بگیریم. برجسته‌ترین نمونهٔ این فیزیک ریاضی جدید، بدون شک، نظریهٔ ماکسول در بارهٔ طبیعت الکترومغناطیسی نور است. اتر چیست؟ مولکولهای آن چگونه توزیع شده‌اند؟ آیا آنها یکدیگر را جذب می‌کنند یا دفع؟ در بارهٔ این موارد هیچ نمی‌دانیم. اما همین‌قدر می‌دانیم که محیط اتری اغتشاشات الکتریکی و نوری را منتشر می‌سازد؛ ما می‌دانیم که انتشار این اغتشاشات باید با تبعیت از اصول کلی مکانیک صورت پذیرد و همین برای وضع معادلات میدان الکترومغناطیسی کفایت می‌کند.

این اصولْ تعمیماتی جسورانه از نتایج آزمایش‌اند؛ اما به نظر می‌رسد که صرفِ عمومیت این اصول درجه‌ای اعلا از قطعیت به آنها بخشیده باشد. درواقع هر چه عمومیت بیشتر باشد، فرصتهایی که برای ارزیابی حقانیت آنها در دسترس قرار می‌گیرند، مکررتر خواهند بود و انباشت این‌گونه آزمونها، به‌خصوص اگر در اشکالی هر چه متنوعتر و غیرمنتظره‌تر تحقق پذیرد، در نهایت جایی برای شک و تردید باقی نخواهد گذارد.

این بود مقطع دوم از تاریخ فیزیک ریاضی که ما هنوز آن‌را پشت سر نگذاشته‌ایم. آیا شایسته است بگوییم مقطع اول بی‌ثمر بوده است و علم طی پنجاه سال در مسیر غلطی راه می‌پیموده و حال نیز هیچ نتوان کرد جز به فراموشی سپردن آن همه زحمت که به دلیل تبعیت از نگرشی مخدوش از همان آغاز محکوم به شکست بوده است؟ ابداً! آیا تصور می‌کنید دوران دوم می‌توانست بدون پشت‌سر داشتن دوران اول پا به عرصهٔ وجود گذارد؟ فرضیهٔ نیروهای مرکزی تمام اصولی را که گذشت در دل نهفته دارد؛ آن اصول هر یک از نتایج ضروری این فرضیه هستند. فرضیهٔ نیروهای مرکزی نه تنها اصل بقای انرژی را شامل می‌شود، بلکه اصول بقای جرم، برابری عمل و عکس‌العمل، و قانون کمترین کنش را نیز دربرمی‌گیرد، اصولی که به نظر می‌رسد نسبت به حقانیت آنها، نه به‌عنوان واقعیاتی که از تجربه کسب شده باشند، بلکه همچون قضایای ریاضی، شک و تردیدی وجود نداشته باشد. حتی نحوهٔ بیان این اصول در آن دوران، تا آنجا که من می‌دانم، چه از حیث دقت و چه از حیث عمومیت، چیزی از طرزی که امروزه بیان می‌شوند، کم ندارد.

این فیزیک ریاضیِ پدرانمان بود که ما را تدریجاً با این اصول مختلف آشنا نمود و به ما آموخت چگونه هر یک را از ورای حجاب متفاوتی که آن‌را در خود پوشانده است، تشخیص دهیم. اکنون این اصول با دستاوردهای تجربی مقایسه شده‌اند و متوجه شده‌ایم که برای تطبیق هر چه بیشتر آنها با واقعیات، لازم است طرز بیان‌کردنشان را تغییر دهیم. بدین ترتیب، آنها گسترش یافته و تقویت شده‌اند و از این طریق مقامی همچون حقایق تجربی کسب نموده‌اند. حال دیگر فرضیهٔ نیروهای مرکزی برای آنها به حامی بیفایده‌ای مبدل شده است؛ یا بهتر بگوییم، تا بدانجا که این فرضیه خصلت فرضی بودن خود را بر این اصول تحمیل می‌نماید، به قیدوبند دست و پاگیری مبدل شده است.

پس حریمها شکسته نشده‌اند، زیرا که انعطاف‌پذیر بوده‌اند، بلکه گسترش پیدا کرده‌اند. زحمات پدران ما که آنها را تثبیت کردند به هدر نرفته است و ما در علم امروز می‌توانیم ویژگیهای عامی را که آنها ترسیم کرده بودند، به‌روشنی تشخیص دهیم.

آیا اکنون در آستانهٔ ورود به دوران سومی قرار داریم؟ آیا بحران دومی در شرف وقوع است؟ آیا این اصولی که ما همه چیز را برگُرده آنها برافراشته بودیم، خود در معرض فروپاشی قرار گرفته‌اند؟ این سؤالی است که اخیراً جنبه‌ای حیاتی پیدا کرده است.

شنیدن سخنان من حتماً شما را به فکر رادیوم، این انقلابی بزرگ زمان ما، می‌اندازد. من به این موضوع باز خواهم گشت، لیکن اول می‌خواهم چیز دیگری بگویم. اینجا تنها پای اصل بقای انرژی در میان نیست؛ تمامی اصول دیگر، همان‌طور که از مرور یکایک آنها برخواهد آمد، در معرض خطر یکسانی قرار دارند.

بگذارید اول از اصل کارنو شروع کنم. این تنها اصل از اصول ذکرشده است که به نظر نمی‌رسد نتیجهٔ بی‌واسطهٔ فرضیهٔ نیروهای مرکزی بوده باشد؛ درست برعکس، به نظر می‌رسد اگر نگوییم در تناقض با این فرضیه قرار دارد، لااقل هماهنگ ساختنش با آن کوشش قابل توجهی را می‌طلبد. اگر تمامیِ پدیده‌های فیزیکی منحصراً معلول حرکات اتمها می‌بودند، که برهم‌کنش‌های آنها تنها به فواصلشان بستگی دارد، آنگاه در ظاهر امر همه این پدیده‌ها می‌بایست برگشت‌پذیر باشند. اگر تمامی سرعتهای اولیه تغییر جهت می‌دادند، این اتمها، تا آنجا که تحت تأثیر فقط همین نیروها قرار می‌داشتند، می‌باید مسیر حرکت خود را در جهتی خلاف آنچه که فی‌الواقع طی می‌کنند، تغییر دهند؛ همان‌طور که فی‌المثل چنانچه شرایط اولیهٔ حرکت زمین عکس آن می‌شد که درواقع بوده است، زمین می‌باید همان مدار بیضی‌شکل را که در حال حاضر طی می‌کند، در جهت عکس طی کند. بنابراین، برای هر پدیدهٔ فیزیکی ممکنی پدیدهٔ عکس آن نیز می‌باید به همان شکل ممکن باشد و ما باید بتوانیم سیر گذر زمان را در جهت عکس آن هم طی کنیم. اما در طبیعت چنین نیست و این دقیقاً همان نکته‌ای است که اصل کارنو به ما می‌آموزد؛ گرما از گرم به‌سوی سرد جریان می‌یابد و غیرممکن است بتوان آن‌را وادار به طی طریق در عکس این جهت نمود و تغییرات حرارتی را که وقوع پیدا کرده و از میان رفته‌اند دوباره برقرار ساخت. حرکت می‌تواند تماماً

1. Mayer

از میان برود و در اثر اصطکاک تبدیل به گرما شود: عکس این تبدیل فقط می‌تواند به‌صورتی ناقص تحقق پیدا کند.

برای از میان برداشتن این تناقض ظاهری کوششهایی چند صورت گرفته‌اند. اگر جهان همواره به سوی یکنواختی میل می‌کند به این علت نیست که اجزاء بنیادی آن، در عین متنوع بودن در آغاز، رفته‌رفته تنوع خود را از دست می‌دهند؛ علتش این است که در اثر حرکاتی کاملاً تصادفی، با یکدیگر مخلوط می‌شوند. در منظر دیدگانی که توانایی تشخیص تمامی این عناصر را داراست، تنوع پیوسته حفظ می‌شود: هر ذره از این گَرد، اصالت خویش را کماکان نگه می‌دارد و خود را به هیأت همسایه‌اش نمی‌آراید؛ لیکن هر چه این اختلاط بیشتر و بیشتر به حد کمال خود نزدیک شود، دستگاههای نادقیق حسی ما تنها یکنواختی را درک می‌کنند. به همین دلیل است که برای مثال، حرارتها به‌سوی برابری میل می‌کند بدون آنکه امکانی برای بازگشت وجود داشته باشد.

فرض کنیم یک قطره شراب به داخل لیوانی پر از آب می‌افتد؛ صرف‌نظر از اینکه چه حرکاتی درون این مایع صورت می‌پذیرند، به‌زودی متوجه می‌شویم که مایع به‌گونه‌ای یکدست رنگی متمایل به صورتیِ کمرنگ به‌خود می‌گیرد و از آن پس ممکن نیست بتوان با تکان‌دادن لیوان، شراب را از آب جدا کرد. پس در اینجا با شکلی از بازگشت‌ناپذیری مواجه می‌شویم که مختص پدیده‌های فیزیکی است: پنهان ساختن یک حبه جو در میان تلی از گندم بسیار کار آسانی است، اما اینکه پیدایش کنیم و آن‌را باز برداریم عملاً امکان‌ناپذیر است. تمام اینها را ماکسول و بولتسمان توضیح داده‌اند، اما کسی که آن‌را به روشنترین وجهی به بیان آورده است گیبس[1] در کتابش به نام *اصول مقدماتی مکانیک آماری* است، کتابی که کمتر خوانده می‌شود زیرا مطالعهٔ آن کمی دشوار است.

کسانی که به این ملاحظات با نظر مساعد می‌نگرند، اصل کارنو را اصلی ناکامل به‌حساب می‌آورند که تنها ناظر بر ضعف قوای حسی ماست. دلیل اینکه نمی‌توانیم عناصر متشکله را در یک مخلوط از یکدیگر تمیز دهیم این است که چشمان ما حساسیت کافی ندارند؛ زمختی دستان ما نیز سبب می‌شود نتوانیم آنها را برای جداکردن این عناصر به‌کار گیریم. دیوخیالی ماکسول که قادر است مولکولها را از یکدیگر، یک‌به‌یک، سوا کند به سهولت می‌تواند دنیا را به بازگشت وا دارد. اینکه دنیا به میل خود روی به بازگشت کند امر محالی نیست؛ تنها بینهایت کم‌احتمال است: احتمالاً زمانی بس طولانی لازم خواهد بود تا مجموعه‌ای از شرایط که مجوز چنین بازگشتی را فراهم می‌آورند، تحقق پیدا نمایند؛ لیکن دیر یا زود، با گذشت سالهایی که رقم آنها ممکن است از میلیونها فراتر رود، چنین شرایطی متحقق خواهند شد. این‌گونه شک و تردیدها در مورد اصل کارنو هیچگاه از حد ملاحظات صرفاً نظری فراتر نرفت و طبعاً نگرانیهای زیادی را نیز موجب نگردید. به همین علت نیز این اصل توانست تمامی ارزشهای عملی خود را کماکان حفظ کند.

اما اکنون صحنه عوض شده است. مدتهاست که زیست‌شناسان با استفاده از میکروسکوپ متوجه شده‌اند که در بعضی از محلولهای آزمایشگاهی حرکات نامنظمی توسط ذرات ریز معلق صورت می‌پذیرند که آن را «حرکت براونی» می‌نامند. در آغاز براون تصور می‌کرد آنچه مشاهده کرده است پدیده‌ای حیاتی است اما به زودی متوجه شد که ذرات بیجان نیز با همان شدت و حدت به این سو و آن سو می‌جهند، پس مسأله را به فیزیکدانان واگذار کرد. متأسفانه فیزیکدانان تا مدتها این مسأله را در خور مداقهٔ جدی نیافتند. استدلال ایشان هم این بود که چنین رویدادی معلول استفاده از نور متمرکزی است که برای به‌کار گرفتن میکروسکوپ لازم است: از آنجا که نور گرما دارد، و این امر موجب تغییر در حرارت محلول می‌گردد، این تغییرات باعث تولید جریانهایی در درون مایع می‌شوند که حرکات فوق‌الذکر را پدید می‌آورند.

گوئی[1] به صرافت افتاد در این مطلب تعمق بیشتری کند و به این نتیجه رسید که توضیح بالا قابل دفاع نیست. وی متوجه شد که هر چه ذرات ریزتر باشند حرکاتشان نیز شدیدتر است به‌طوری که نحوهٔ تابش نور هیچ تأثیری بر آنها ندارد. برای مقابله با مسأله‌ای که این‌گونه حرکات مطرح می‌کنند، یعنی اینکه هرگز متوقف نمی‌شوند، یا بهتر بگوییم بدون وام‌گیری از هیچ‌گونه منبع بیرونیِ انرژی بلاانقطاع تجدید می‌گردند، چه باید اندیشید؟ مطمئناً روا نیست که تنها به خاطر این پدیده دست از اصل بقای انرژی برداریم. اما با چشمان خود می‌بینیم که حرکت تبدیل به گرما می‌شود و گرما نیز بالعکس موجب حرکت می‌گردد، بدون اینکه در این تبدیلات چیزی ضایع شود زیرا که حرکت مستمراً تداوم دارد. این پدیده ناقض اصل کارنو است. اگر این‌طور باشد دیگر لازم نخواهد بود چشمانی بینهایت نافذ همچون چشمان دیو ماکسول در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم حرکت بازگشتی جهان را مشاهده نماییم؛ همین میکروسکوپهایی که در دست داریم برای این امر کفایت می‌کنند. اجسام کلان‌تر، مثلاً آنها که ابعادشان حدود یک‌دهم میلیمتر است، از هر طرف مورد اصابت اتمهای متحرک قرار می‌گیرند. اما این امر موجب جنبش آنها نمی‌شود زیرا تعداد این ضربات به‌قدری کثیر است که قانون احتمالات ایجاب می‌کند اثرات یکدیگر را خنثی سازند. اما ذرات ریزتر به دفعاتی چنان نادر مورد اصابت قرار می‌گیرند که این خنثی‌سازی را در مورد آنها نمی‌توان با هیچ درجه‌ای از قطعیت صادق دانست، پس می‌باید لاینقطع به این سو و آن سو پرتاب شوند. بدین ترتیب یکی از اصول ما در معرض خطر قرار می‌گیرد.

حال بیایید اصل نسبیت را در نظر بگیریم. این اصل نه تنها از طریق تجربیات روزانهٔ ما تأیید شده است، و نه تنها خود از نتایج ضروری فرضیهٔ نیروهای مرکزی است، بلکه در نظر عقل سلیم نیز حقانیت آن انکارناپذیر می‌نماید. با این حال، این اصل هم مورد حملاتی شدید قرار گرفته است. دو جسم حامل بار الکتریکی را در نظر بگیرید. گرچه به نظر می‌رسد آنها در حال سکون قرار داشته باشند اما درواقع هر دوی آنها با حرکت زمین در حرکت هستند. رولند[2] نشان داده است که حرکت بار الکتریکی معادل جریان برق است. پس این دو جسم باردار نیز دو جریان برق تشکیل می‌دهند که به موازات یکدیگر و در یک جهت سیران دارند و بدین ترتیب باید یکدیگر را جذب کنند. از طریق اندازه‌گیری شدت این جاذبه باید بتوانیم سرعت حرکت زمین را اندازه بگیریم، سرعتی نه نسبت به خورشید یا ستارگان، بلکه سرعت مطلق زمین را.

می‌دانم در اینجا چه خواهید گفت: سرعتی که از این طریق اندازه گرفته شود نه سرعت مطلق، بلکه سرعت نسبی زمین در برابر اتر است. اما چقدر این سخن نسنجیده است! آیا واضح نیست که اگر چنین سخنی را قبول کنیم آنگاه هیچ نتیجه‌ای را نخواهیم توانست از اصل نسبیت استنتاج نماییم؟ با این تعبیر، اصل نسبیت دیگر نمی‌تواند چیزی به ما بیاموزد زیرا هرگز واهمهٔ

1. Gibbs

1. M. Gouy 2. Rowland

نقض شدنِ آن وجود نخواهد داشت. هرگاه در آزمایشی موفق شویم کمیتی را بدین ترتیب اندازه‌گیری کنیم، همیشه مختاریم بگوییم سرعت به‌دست آمده مطلق نبوده است، و چنانچه نشود آن‌را سرعت زمین نسبت به اتر قلمداد نمود، همواره می‌توانیم عنصر جدید ناشناخته‌ای را فرض کنیم که تمامی فضا را از خود انباشته است و سرعت زمین نسبت به آن تعیین می‌گردد.

علاوه بر این، آزمایش تجربی هم وظیفهٔ ابطال این تعبیر از اصل نسبیت را به‌عهده گرفته است. تمامی کوششهایی که مصروف اندازه‌گیری سرعت حرکت زمین نسبت به اتر شده‌اند، نتایجی منفی به‌بار آورده‌اند. در این خصوص، فیزیک تجربی بیش از فیزیک ریاضی نسبت به اصل نسبیت از خود وفاداری نشان داده است؛ نظریه‌پردازان، برای تأمین هماهنگی میان اصول عام دیگر، ابائی ندارند که به راحتی دست از این اصل بردارند، لیکن آزمایش تجربی پیوسته آن را تأیید کرده است. انواع روشها طرح‌ریزی و به‌کار گرفته شدند تا اینکه مایکلسن توانست دقت مشاهده را به حد نهایی خود رساند؛ ولی باز چیزی عاید نشد. این لجاجت تا بدانجا رسیده است که امروزه ریاضیدانان را وادار ساخته برای چیرگی بر آن تمامی نبوغ و فراست خویش را به‌یاری طلبند.

کاری که ریاضیدانان پیش روی داشتند، کار آسانی نبوده است؛ و اگر لورنتس توانست از عهدهٔ این‌کار برآید، توفیق خویش را تنها مدیون فرضیه‌هایِ روی هم انباشته بود.

نبوغ‌آمیزترین فکر در این خصوص، اندیشهٔ زمان موضعی است. دو مشاهده‌گر را تصور نمایید که می‌خواهند زمان‌سنج‌های خود را توسط علائم نوری تنظیم کنند. هر یک علامت خود را به‌سوی دیگری ارسال می‌دارد؛ اما از آنجا که هر دو می‌دانند انتشار نور در سرتاسر فضا به‌صورت آنی انجام نمی‌پذیرد، به این نکته توجه خواهند داشت که باید ارسال علائم خویش را تکرار کنند. هنگامی‌که مشاهده‌گر B علامت ارسالی از طرف مشاهده‌گر A را دریافت می‌کند، زمان‌سنج وی همان لحظه‌ای را که A آغاز به ارسال علامت خود کرده بود نشان نمی‌دهد، بلکه باید آن لحظه را به مقدار ثابتی که نشانگر مدت انتقال نور از A به B است، اضافه نمود. فرض کنیم، برای مثال، A علامت خود را در لحظه‌ای ارسال می‌کند که زمان‌سنج او ساعت صفر را نشان می‌دهد، و B این علامت را در لحظه‌ای دریافت می‌کند که زمان‌سنج او بر ساعت t قرار گرفته است. اگر t مدت زمان انتقال نور از A به B باشد، به‌نظر می‌رسد زمان‌سنج‌های این دو به این ترتیب تنظیم شده باشند. برای اینکه چنین نتیجه‌ای مورد بازرسی قرار گیرد، مشاهده‌گر B باید در لحظه‌ای که زمان‌سنج‌اش ساعت صفر را نشان می‌دهد علامتی به‌سوی A ارسال دارد. حال مشاهده‌گر A باید این علامت را هنگامی رؤیت کند که زمان‌سنج خودش ساعت t را نشان می‌دهد. بعد از این ردوبدل‌ها می‌توان گفت که زمان‌سنج‌های این دو واقعاً با یکدیگر تنظیم شده‌اند.

و به‌راستی تنها در یک صورت دو زمان‌سنج می‌توانند در یک لحظهٔ فیزیکی واحد، ساعتی واحد را نشان دهند و آن درحالی است که هر دو در وضعیت سکون قرار داشته باشند. در غیر این‌صورت، زمان انتقال نور در دو جهت مخالف یکی نخواهد بود زیرا، فی‌المثل، مشاهده‌گر A به‌بدرقهٔ ارتعاشاتی می‌رود که از طرف B ارسال شده‌اند، در حالی‌که B، قبل از صدور ارتعاشی از طرف A، از وی در حال گریز بوده است. بنابراین زمان‌سنج‌هایی که بدین ترتیب تنظیم شده باشند زمان حقیقی را نشان نخواهند داد. این زمان‌سنج‌ها زمانی را که شاید بتوان به آن «زمان موضعی» گفت اندازه می‌گیرند به طوری که یکی از دیگری همواره جلوتر خواهد بود. البته این واقعیت چندان اهمیت ندارد، زیرا ما وسیله‌ای برای درک این اختلاف در دست نداریم. برای مثال، تمام وقایعی که برای A روی می‌دهند، همگی با تأخیر به وقوع می‌پیوندند، آن‌هم همیشه به یک اندازه. اما این مشاهده‌گر هیچگاه متوجه این تأخیر نخواهد شد زیرا هر زمان‌سنجی که در اختیار داشته باشد نیز به‌همان میزان تأخیر خواهد داشت. بنابراین، طبق اصل نسبیت وی به هیچ طریقی نخواهد توانست تشخیص دهد که آیا در وضعیت سکون قرار دارد یا حرکت مطلق. متأسفانه لیکن، قضیه به این سادگیها نیست و لازم است پای فرضیات دیگری را نیز به میان کشید. مجبوریم بپذیریم که اجسام متحرک در جهت حرکتشان دچار انقباضی همسان می‌گردند. برای مثال، طول یکی از قطرهای کره زمین، در اثر حرکت این سیاره، به مقیاس $\frac{۱}{۲\times ۱۰^{۸}}$ کاهش می‌یابد در حالی‌که قطرهای دیگر آن اندازهٔ طبیعی خود را حفظ می‌نمایند. بدین ترتیب ناچیزترین اختلافات، از نوعی که گذشت، توضیح داده می‌شوند. اما داستان به اینجا ختم نمی‌شود؛ فرضیهٔ راجع به نیروها را هم باید در نظر گرفت. در جهانی که در حال حرکت انتقالی می‌باشد، هر نیرویی صرف‌نظر از منشائی که دارد، خواه وزن باشد خواه کشسانی، به نسبت خاصی کاهش پیدا می‌کند؛ یا بهتر بگوییم، چنین وضعی برای آن مؤلفه‌هایی از نیرو حادث می‌شود که با جهت حرکت انتقالی زاویه‌ای قائمه می‌سازند؛ مؤلفه‌های موازی این جهت هیچ تغییری پیدا نمی‌کنند. حال بیایید به مثالی که در بارهٔ دو جسمِ حاملِ بار الکتریکی زدم برگردیم: اینها یکدیگر را دفع می‌کنند؛ اما در عین حال اگر همه چیز در حال انتقال با سرعتی یکنواخت باشد، این دو بار معادل دو جریان موازی خواهند بود که در یک جهت سیران دارند و بنابراین یکدیگر را جذب می‌کنند.

حال این جاذبهٔ الکترودینامیکی باید از دافعهٔ الکتروستاتیک کم شود و نیروی دافعه‌ای که از تفاضل این دو باقی می‌ماند از دافعه‌ای که میان این دو جسم در حالت سکون عمل می‌نماید، ضعیفتر خواهد بود. اما از آنجا که برای اندازه‌گیری نیروی دافعهٔ باقیمانده باید آن‌را در تراز با نیروی دیگری قرار دهیم و از آنجا که کلیهٔ این‌گونه نیروها خود نیز به همان نسبت کاهش پیدا کرده‌اند، هیچ چیزی را مشاهده نمی‌کنیم و کلیهٔ ظواهر امر، بدین ترتیب، کاملاً حفظ می‌شوند. اما آیا همه شک و تردیدها را از این طریق برطرف کرده‌ایم؟ اگر می‌شد توسط علائمی غیر از علائم نوری، که سرعت سیرشان متفاوت با سرعت انتشار نور است، تبادل اطلاعات کنیم، آنگاه چه وضعی پیش می‌آمد؟ اگر پس از تنظیم زمان‌سنج‌های خود توسط کارآمدترین روشی که در اختیارمان قرار دارد، می‌خواستیم نتیجه را با استفاده از این علائم جدید امتحان کنیم، باید می‌توانستیم تفاوتهایی را که معلولِ حرکت انتقالی مشترک دو مشاهده‌گر است، مشاهده نماییم. و اگر با لاپلاس هم‌عقیده شویم که نیروی جاذبهٔ عمومی با سرعتی میلیونها برابر سرعت سیر نور در فضا منتشر می‌شود، آیا باز می‌توانیم اصرار ورزیم که چنین علائمی در تصور نمی‌گنجند؟

در دورانهای اخیر از اصل نسبیت بس دلیرانه دفاع شده است؛ اما نفس سرسختی این دفاع خود نشان می‌دهد که تا چه حد حملات بر علیه آن جدی بوده‌اند.

اما اکنون اجازه دهید به صحبت از اصل نیوتن بپردازم، اصلی که ناظر

به برابری عمل و عکس‌العمل است. این اصل با اصل قبلی در ارتباطی تنگاتنگ قرار دارد و به نظر می‌رسد فروپاشی یکی موجبات درهم ریختن دیگری را فراهم آورد. از این هم نباید تعجب کنیم که در مورد این اصل نیز با همان مشکلات روبه‌رو شویم.

تصور رایج این است که پدیده‌های الکتریکی معلول جابه‌جایی ذرات ریزی هستند که بار الکتریکی حمل می‌کنند و به آنها «الکترون» می‌گویند. الکترونها غرق در محیطی هستند که آن‌را «اتر» می‌نامیم. حرکات الکترونها اغتشاشاتی را در اتری که آنها را احاطه نموده است پدید می‌آورد. این اغتشاشات در تمامی جهات با سرعت سیر نور انتشار می‌یابند و سایر الکترونها، که در بدو امر در حالت سکون قرار داشته بودند، با فرا رسیدن اغتشاشات به قسمتی از اتر که آنها را در برگرفته است، شروع به جابه‌جایی می‌کنند. بدین ترتیب هر یک از الکترونها بر دیگری عمل می‌نماید، منتها این عملکرد به صورت مستقیم انجام نمی‌پذیرد بلکه توسط واسطه‌ای چون اتر به منصهٔ ظهور می‌رسد. تحت چنین شرایطی، آیا هنوز امکان دارد از برابری عمل و عکس‌العمل سخن بگوییم، آن هم برای مشاهده‌گر که تنها شاهد حرکات ماده، یعنی الکترونها، می‌باشد و حرکات اتری که نمی‌تواند آن‌را ببیند از نظرش کاملاً پنهان می‌مانند؟ واضح است که جواب باید منفی باشد. حتی اگر این موازنه به‌گونه‌ای دقیق برقرار باشد، مسلماً نمی‌تواند به‌صورت آنی انجام پذیرد. اغتشاشات با سرعتی متناهی انتشار می‌یابند، بنابراین تنها هنگامی به الکترون دوم خواهند رسید که اولی مدتهاست به وضع سکون بازگشته است. بدین ترتیب، الکترون دوم پس از مدتی تحت تأثیر عمل الکترون اول قرار می‌گیرد؛ لیکن مطمئناً در همان لحظه‌ای که اتر را می‌پذیرد، نمی‌تواند نسبت به اولی عکس‌العملی نشان دهد زیرا در آن لحظه در اطراف الکترون اول چیزی در حال جنبش قرار ندارد.

تحلیل واقعیات به ما اجازه خواهد داد که دقیقتر صحبت کنیم. برای مثال، یک نوسانگر هرتزی را در نظر بگیرید، مانند آنها که در تلگراف بی‌سیم به‌کار می‌روند. این نوسانگر در تمامی جهات در فضا انرژی پخش می‌کند، اما می‌توان بر آن آیینه‌ای سهمی‌شکل نصب نمود (همچنان‌که هرتز با کوچکترین نوسانگرهای خود چنین کرد)، به‌طوری که ارسال تمامی انرژی تولیدشده تنها در یک جهت متمرکز شود. با تحقق همچون وضعی، وقوع چه رویدادی را نظریه پیش‌بینی می‌کند؟ معلوم است، چنین دستگاهی به توپی می‌ماند و انرژی ساطع‌شده از آن به گلولهٔ توپ. در اثر شلیک این «گلوله»، دستگاه پس می‌زند و با این عمل خود اصل نیوتن را نقض می‌کند، زیرا «گلولهٔ» پرتاب‌شدهٔ ما جرمی ندارد؛ از ماده ساخته نشده، بلکه انرژی خالص است. مضافاً، همین حالت برای فانوسی دریایی صادق است که مجهز به یک انعکاس‌دهنده است، زیرا نور چیزی نیست جز نوساناتی در میدان الکترومغناطیسی. این فانوس دریایی نیز در تعاقب صدور نوری که به شلیک گلوله توپ می‌ماند باید خودْ پس زند. اما نیرویی که این پس‌زنی را حاصل می‌آورد، چیست؟ این نیرو همان است که «فشار ماکسول-بارتولدی» نامیده می‌شود، نیرویی است بس ناچیز که نمایان ساختن آن، حتی با حساسترین تابش‌سنج‌ها، زحمت فراوانی را طلب کرده است. برای مقاصد بحث ما همین بس که چنین نیرویی درواقع وجود دارد.

اگر تمامی انرژی ساطع‌شده از نوسانگر به گیرنده‌ای اصابت کند، این گیرنده طوری عمل خواهد کرد که گویی ضربه‌ای فیزیکی دریافت کرده است. به تعبیری، این ضربه نمایانگر تلافی پس‌زنی نوسانگر خواهد بود: عکس‌العمل برابر عمل است، لیکن این دو همزمان روی نخواهند داد: گیرنده قدری پیشروی خواهد کرد اما نه در همان آنی که نوسانگر پس‌زده است. حال اگر انتشار انرژی در این حالت به‌گونه‌ای نامتناهی ادامه پیدا کند بدون آنکه گیرنده‌ای آن را دریافت نماید، تلافی این عمل هیچگاه تحقق نخواهد پذیرفت.

آیا نمی‌توان گفت فضایی که نوسانگر را از گیرنده جدا می‌سازد، یعنی فاصله‌ای که اغتشاشات پخش‌شده از یکی باید طی کنند تا به دیگری برسند، تهی نیست و نه تنها از اتر بلکه از هوا، یا شاید در مورد فضای بین سیارات، از سیالی بس رقیق اما قابل توزین، پوشیده شده است، به‌طوری که ضربه را این ماده، همانند آن گیرنده در لحظه‌ای که انرژی بدان می‌رسد، دریافت می‌کند و پس از گذر اغتشاش از آن، پس می‌زند؟ این سخن البته ناجی اصل نیوتن هست، اما درست نیست. اگر انرژی، در طول مدت انتشارش، همواره متصل به محملی مادی می‌بود، این ماده با حرکتش نور را به‌دنبال خود می‌کشید؛ لیکن فیزو[1] نشان داده است که لااقل در مورد هوا ابداً چنین نیست. پس از او، مایکلسن و مورلی نیز این نظر را تأیید نموده‌اند. شاید بتوان فرض کرد که حرکات مادهٔ معمولی دقیقاً توسط حرکات اتر تلافی می‌شوند، اما چنین فرضی ما را به همان ملاحظاتی می‌کشاند که لحظاتی پیش مطرح کردیم. با چنین تعبیری، اصل نیوتن قادر به توضیح همه چیز خواهد شد، زیرا در برابر هر حرکتی که به رؤیت درآید، حرکاتی فرضی را می‌توان تصور کرد که آن را تلافی کنند. اما اگر این اصل توانایی توضیح هر چیزی را داشته باشد، آنگاه قادر به هیچ نوع پیش‌بینی نخواهد بود؛ با تکیه بر آن ما نخواهیم توانست از میان فرضیاتی ممکن و متنوع یکی را برگزینیم، زیرا خود از قبل همه چیز را توضیح داده است. بدین شکل، این اصل مفید هیچ فایده‌ای نخواهد بود.

علاوه بر اینها، فرضیاتی که می‌باید برای توضیح حرکات اتر بپذیریم، خود زیاد مطلوب نیستند. اگر مقدار بار الکتریکی را به دو برابر افزایش دهیم طبیعی است که نتیجه بگیریم سرعت اتمهای تشکیل‌دهندهٔ اتر نیز به دو برابر افزایش پیدا خواهند کرد. آنگاه برای اینکه عکس‌العمل لازم برای تلافی این حرکتها صورت پذیرد لازم خواهد بود سرعت متوسط اتر چهار برابر بیشتر شود.

به دلیل این‌گونه ملاحظات، مدتها فکر می‌کردم که بالاخره روزی فرا خواهد رسید که آن دسته از نتایج نظریه که با اصل نیوتن ناسازگاری دارند، کنار گذاشته شوند؛ لیکن به‌نظر می‌رسد آزمایشهای انجام‌شدهٔ اخیر بر روی حرکات الکترونهایی که توسط رادیوم پراکنده می‌شوند، این نتایج را تأیید می‌کنند.

اکنون می‌پردازم به اصل لاوازیه در بارهٔ بقاء جرم. یقیناً نمی‌توان بدون آسیب رساندن به بنیان علم مکانیک، دستی در این اصل برد. در عین حال هستند کسانی که فکر می‌کنند این اصل تنها در ظاهر امر درست به‌نظر می‌رسد زیرا در مکانیک سروکار ما فقط با سرعتهای ملایم است. اینها معتقدند برای اجسامی که با سرعتهایی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند، اعتبار این اصل از دست خواهد رفت. در حال حاضر اعتقاد همگان بر این است که چنین سرعتهایی حاصل آمده‌اند؛ به نظر می‌رسد اشعهٔ کاند و رادیوم از ذرات بسیار ریزی تشکیل یافته باشند که با سرعتهایی بی‌شک کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند، اما ظاهراً نسبت آنها به سرعت سیر نور به

1. Fizeau

یک‌دهم یا حتی یک‌سوم نیز کاهش پیدا کرده است.

این اشعه را می‌توان توسط میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی منحرف کرد و با مقایسهٔ میزان این انحرافات نیز می‌توان هم سرعت الکترونها و هم جرم آنها (یا شاید بهتر باشد بگوییم نسبت جرم به بار الکتریکی آنها) را اندازه گرفت. اما خیلی زود دریافتیم که به محض نزدیک شدن این سرعتها به سرعت نور لازم می‌آید اصلاحیه‌ای را در محاسبات خود وارد کنیم. از آنجا که این‌گونه ذرات حامل الکتریسیته‌اند، جابه‌جایی آنها بدون برهم‌زدن وضع اتر ممکن نیست. بنابراین برای به‌حرکت درآوردن آنها، غلبه بر دو لختی لازم می‌شود: یکی لختی هر ذره و دیگری لختی اتر. بدین ترتیب کل جرم یا جرمی ظاهری که اندازه‌گیری می‌شود، مشتمل بر دو بخش خواهد بود، یکی جرم حقیقی یا مکانیکی هر ذره و دیگری جرم الکترودینامیکی آن که نمایانگر لختی اتر است.

حال محاسبات اِبِرَهَم[1] و آزمایشات کاوفمن[2] نشان داده‌اند که جرم مکانیکی، به‌معنای دقیق کلمه، هیچ است و جرم الکترون، لااقل الکترونهای با بار منفی، تماماً منشائی الکترودینامیکی دارد. این دستاوردها ما را وامی‌دارد تا تعریف خود از جرم را تغییر دهیم؛ دیگر نمی‌توان بین جرم مکانیکی و جرم الکترودینامیکی تمایزی قائل شد زیرا یکی از طرفین از میان رفته است. هیچ جرمی جز لختی الکترودینامیکی وجود ندارد. اما در این صورت دیگر جرم نمی‌تواند ثابت باقی بماند و باید با افزایش سرعت افزایش پیدا کند؛ به‌جهت حرکت هم بستگی دارد و جسمی که با سرعتی قابل توجه در حرکت است با همان لختی که در برابر نیروهای بازدارنده از مسیر حرکتش مقاومت می‌کند، در برابر نیروهایی که شتاب حرکت آن را کم یا زیاد می‌کنند، مقاومت نمی‌نماید.

البته در برابر این استدلالها، راه فراری نیز وجود دارد: عناصر بنیادی اجسام را الکترونها تشکیل می‌دهند که بعضی از آنها حامل بار منفی و برخی دیگر دارای بار مثبت‌اند. برداشت ما این است که الکترونهای منفی جرمی ندارند؛ اما الکترونهای مثبت، براساس اطلاعات اندکی که از آنها داریم، ظاهراً بسیار بزرگتر از منفی‌ها هستند. شاید آنها علاوه بر جرم الکترودینامیکی از جرم واقعی و مکانیکی نیز برخوردار باشند. بدین ترتیب جرم واقعی اجسام از حاصل‌جمع جرم مکانیکی الکترونهای مثبت تشکیل خواهد شد زیرا الکترونهای منفی در این جرم سهمی ندارند. جرمی که به این صورت تعریف می‌شود، شاید بتواند ثابت باقی بماند.

افسوس که این مفر بر ما بسته شده است. به خاطر آوریم آنچه را که در بارهٔ اصل نسبیت و کوششهای انجام شده برای نجاتش گفتیم. مسأله تنها نجات یک اصل نیست، پای نتایج تردیدناپذیر آزمایشهای مایکلسن و مورلی نیز در میان است. همان‌طور که ملاحظه کردیم، لورنتس تنها چاره را برای توضیح این نتایج در این دید که فرض کند تمامی نیروهای عمل‌کننده در محیطی که خود با سرعتی یکنواخت در حال حرکت انتقالی‌اند، صرف‌نظر از منشأ آنها، به یک نسبت کاهش پیدا می‌کنند. اما این تنها کافی نیست؛ کافی نیست که این امر فقط در باره نیروهای واقعی صدق کند؛ همین باید در مورد نیروهای لختی نیز صادق باشد. بنابراین، همان‌طور که خود او گفته است، بالضروره می‌باید تأثیری که حرکت انتقالی بر جرم الکترومغناطیسی الکترونها به‌جای می‌گذارد، به همان درجه بر جرم تمامی ذرات دیگر نیز اعمال شود.

بنابراین لازم می‌شود اجرام مکانیکی طبق همان قوانینی تغییر کنند که جرم الکترودینامیک می‌کند؛ پس اینها دیگر نمی‌تواند ثابت باقی بمانند.

آیا ذکر این نکته لازم است که سقوط اصل لاوازیه سرنگونی اصل نیوتن را به‌همراه دارد؟ از ملزومات اصل دوم یکی این است که مرکز ثقل دستگاهی که از هر نوع تأثیر خارجی کاملاً مصون شده است، باید برروی خطی مستقیم حرکت کند. اما اگر جرم ثابتی در کار نباشد مرکز ثقلی هم وجود نخواهد داشت، و اساساً این عبارت فاقد معنا خواهد شد. این است دلیل آنکه قبلاً گفتم به‌نظر می‌رسد آزمایشها برروی اشعهٔ کاتد تردیدهای لورنتس را دربارهٔ اصل نیوتن توجیه می‌کنند.

اما اگر قرار باشد همهٔ این نتایج تأیید شوند آنگاه مکانیک تماماً نوینی پا به عرصهٔ وجود خواهد نهاد که خصلت مشخصهٔ آن، مخصوصاً با این واقعیت معین می‌شود که هیچ سرعتی را امکان فراتر رفتن از سرعت سیر نور نیست[1]، همان‌گونه که هیچ حرارتی را توان نزول به پایینتر از صفر مطلق نیست. برای مشاهده‌گری که خود به صورت انتقالی در حرکت است، بدون اینکه خبر از آن داشته باشد، هیچ سرعت ظاهری نمی‌تواند به حد سرعت نور برسد؛ و این موجب تناقض خواهد شد مگر اینکه به‌خاطر آوریم چنین مشاهده‌گری همان زمان‌سنجی را که یک مشاهده‌گر ساکن مورد استفاده قرار می‌دهد، به کار نمی‌گیرد، بلکه زمان‌سنج او «زمان موضعی» را برایش نشان می‌دهد.

در اینجاست که رو در روی سؤالی قرار می‌گیریم که من تنها به بیان آن اکتفا می‌کنم. اگر دیگر جرمی در کار نباشد، چه بر سر قانون نیوتن خواهد آمد؟

جرم دو جنبه دارد: در عین اینکه ضریبی از لختی است، به‌عنوان جرم جذب‌کننده، عاملی را در قانون جاذبهٔ نیوتن تشکیل می‌دهد. اما اگر ضریب لختی هیچ‌گاه ثابت باقی نماند، آیا جرم جذب‌کننده می‌تواند ثابت باشد؟ این است سؤالی که بدان اشاره کردم.

ظاهر امر این است که اصل بقای انرژی لااقل تابه‌حال از تعرض در امان مانده و بیشتر از اصول دیگر تثبیت شده است. اما می‌خواهید چگونگی سقوط این اصل را هم به ورطهٔ بی‌اعتباری به یادتان آورم؟ رویدادی که موجبات نگونساری این اصل را فراهم آورد از سایر موارد بیشتر سر و صدا به‌پا کرد؛ تمام نشریات علمی پر از بحث دربارهٔ آن شده‌اند. بعد از چاپ اولین اثر بِکرل[2]، و مهمتر از آن بعد از اینکه زوج کوری[3] موفق به کشف رادیوم شدند، متوجه شدیم که هر عنصر رادیواکتیو منبعی تمامی‌ناپذیر از تشعشع را تشکیل می‌دهد، منبعی که به نظر می‌رسد فعالیت آن بی‌وقفه طی ماهها و سالها تداوم داشته باشد. این خود اصول ذکر شده را در مخمصه قرار می‌دهد؛ این تشعشعات در واقع چیزی نبودند جز انرژی؛ پس از یک تکه رادیوم، انرژی طوری زاده می‌شود که گویی این زایش را پایانی نیست. در عین حال مقادیر

۱. زیرا اجسام در برابر نیروهای شتاب‌دهندهٔ حرکتشان لختی فزاینده‌ای نشان می‌دهند و هنگامی که سرعت آنها به حد سرعت نور نزدیک شود، این لختی به طرف بینهایت میل خواهد کرد.

1. Abraham 2. Kaufmann

2. Becquerel 3. Curie

این انرژی آنقدر ناچیز بودند که تن به اندازه‌گیری نمی‌دادند؛ لااقل اعتقاد رایج این بود و موجبات چندی برای نگرانی جدی فراهم نبود.

صحنه وقتی تغییر کرد که کوری بر آن شد تا رادیوم را در گرماسنج قرار دهد. آنگاه آشکار شد که مقدار گرمایی که از آن به‌طور مداوم تولید می‌شود، بسیار قابل توجه است.

تعداد نظریه‌هایی که برای توضیح این پدیده وارد صحنه شدند، کم نبودند؛ لیکن در مواردی از این قبیل همیشه نمی‌توان گفت که فراوانی نعمت موجب ضرر و زیان نمی‌شود: تا هنگامی که یک نظر رقبای خود را از میدان به در نکرده باشد، نمی‌توان اطمینان حاصل کرد که یکی از آنها حتماً نظر خوبی است. اما اکنون مدتی است که به‌نظر می‌رسد یک نظریه رفته‌رفته خود را شاخصتر از دیگران نشان می‌دهد و می‌توان عاقلانه امید داشت که بالاخره کلید این رمز در دستان ما قرار گرفته باشد.

سِر ویلیام رمزی[1] سعی کرده است نشان دهد که رادیوم عنصری ناپایدار است[2]، و در عین اینکه انبار عظیمی از انرژی را در خود نهفته دارد، ذخیره‌اش پایان‌ناپذیر نیست. فرایند تبدیل رادیوم، گرمایی حدود یک میلیون برابر آنچه در تبدیلات شناخته شده تولید می‌شود، آزاد می‌سازد و قریب ۱۲۵۰ سال طول می‌کشد تا رادیوم تمام انرژی خود را از دست بدهد. این مدت زمان درازی نیست، اما ملاحظه می‌کنید که می‌توان اطمینان داشت لااقل برای چندصد سال محکوم به باقی ماندن در همین وضعی هستیم که الان در آن قرار داریم. در این مدتِ انتظار، شک و تردید ادامه خواهد یافت.

در میان این ویرانه‌ها چه چیز مانده است که پابرجا ایستاده باشد؟ تابه‌حال اصل کمترین کنش دست نخورده باقی مانده است، و ظاهراً لارمر[3] بر این عقیده است که این اصل برای مدتهایی مدید کماکان به حیات خود ادامه خواهد داد. در واقع این اصل، در مقایسه با اصول دیگر، هم مهمتر است و هم عامتر.

در برابر این همه اصول فروریخته، فیزیک ریاضی چه نگرشی را باید اتخاذ کند؟ اول از همه و قبل از اینکه زیاد هیجان‌زده شویم، باید سؤال کنیم آیا آنچه تابه‌حال گفته شده واقعاً درست بوده است یا نه. اصولی که برشمردیم اعتبار خود را تنها برای موارد فوق‌العاده ریز از دست داده‌اند: برای مشاهدهٔ حرکت براونی احتیاج به میکروسکوپ داریم، الکترونها به چشم نمی‌آیند؛ رادیوم عنصری است بس نایاب و هیچ‌گاه هم در مقادیری بیش از چند میلی‌گرم یافت نمی‌شود. همیشه نیز این سؤال را می‌توان مطرح کرد که آیا در کنار اجسام بسیار ریزی که به مشاهده درآمده‌اند، اجسام بسیار ریز دیگری درکار نیستند که مشاهده نشده‌اند لیکن اثرات آن را خنثی می‌سازند؟

این سؤال مطمئناً جای بحث دارد و در ظاهر امر نیز تنها با آزمایش و مشاهده است که می‌توان برای آن پاسخ مکفی فراهم آورد. شاید صلاح در این باشد که کار را به‌دست آزمایشگران بسپاریم و درضمن اینکه در انتظار می‌مانیم تا یک‌بار برای همیشه به این مناقشه پایان بخشند، سر خود را با این مسائل درد نیاوریم و بی‌سر و صدا به کار خود مشغول باشیم، گویی هیچ‌یک از اصول ذکر شده در معرض تردید قرار نگرفته‌اند. مسلماً در همان حوزه‌ای که این اصول با قطعیت تمام حکمروایی می‌کنند، هنوز کار فراوانی مانده است که باید انجام شود؛ در دوران آمیخته به تردید و انتظار آنقدر کار هست که دست ما را بند کند.

در عین حال باید پرسید آیا فی‌الواقع درست است که برای نجات علم از شر این تردیدها هیچ کاری از دست ما بر نمی‌آید؟ به راستی باید اذعان داشت که فیزیک تجربی در پدید آوردن این مشکلات تنها نبوده است؛ فیزیک ریاضی هم در این مهم سهم بسزایی داشته است. البته، اول‌بار آزمایشگران بودند که متوجه شدند رادیوم ساطع‌کنندهٔ انرژی است، اما آنان‌که مسائل مربوط به انتشار نور در محیطی متحرک را برملا کردند، نظریه‌پرداز بودند؛ اگر اینها نمی‌بودند، شاید این مسائل هرگز مورد توجه واقع نمی‌شدند. بنابراین، نظریه‌پردازان نیز نهایت سعی را در سردرگم کردن ما مبذول نموده‌اند؛ انتظاری بیش از این هم از آنان نداریم که ما را در خلاصی از این مخمصه یاری کنند.

بر نظریه‌پردازان واجب است تمامی اندیشه‌هایی را که امروز بدانها اشاره کردم، مورد نقد و بررسی همه‌جانبه قرار دهند؛ اصول مورد بحث را هم تنها زمانی باید کنار گذارند که هر کوشش صادقانه‌ای که برای نجات آنها در توان داشته‌اند، انجام داده باشند. اما در این جهت چه کار می‌توان کرد؟ این سؤالی است که هم‌اکنون قصد پرداختن بدان را دارم.

در میان جذابترین مسائل فیزیک ریاضی، مسائل مربوط به نظریهٔ جنبشی گازها را باید در جایگاهی خاص قرار داد.

کار زیادی برای حل این مسائل انجام پذیرفته است، اما کارهای بسیاری هم مانده‌اند که باید انجام پذیرند. این نظریه متضمن تعارضی جاودانی است: در مقدمات، همه چیز بازگشت‌پذیر است، در نتیجه‌ها، بازگشت‌ناپذیر، و مابین این دو شکافی عمیق. آیا ملاحظات آماری و قانون اعداد بزرگ قادرند این شکاف را پر کنند؟ بسیاری موارد در این نظریه هنوز در ابهام قرار دارند و بی‌شک لازم خواهد بود بارها و بارها آنها را بررسی کنیم. با روشن شدن این موارد، معنای اصل کارنو، و مقام کلی آن در مبحث دینامیک بهتر فهمیده خواهد شد و ما بهتر می‌توانیم نتایج غریب آزمایشهای گوئی را که قبلاً بدانها اشاره کرده بودیم، تعبیر نماییم.

اما علاوه بر این آیا نباید کاری کنیم تا در زمینهٔ الکترودینامیک اجسام به‌نظریهٔ بهتری دست یابیم؟ همان‌طور که به کفایت گوشزد کردم، در اینجا بیش از همه جا مشکلات انبار شده‌اند. حتی با انباشت فرضیه بر روی فرضیه هم نخواهیم توانست برای تمامی اصول مورد نظر توأماً کسب اعتبار کنیم: تابه‌حال هیچ‌کس موفق نشده که بعضی از این اصول را بدون قربانی ساختن برخی دیگر حفظ کند. اما تمام امیدها برای دستیابی به نتایج بهتر از دست نرفته‌اند. بیایید نظریهٔ لورنتس را برداریم و آن را زیر و رو نماییم؛ بیایید اندک‌اندک در آن دستکاری کنیم؛ شاید از این طریق گشایشی در کار حاصل گردد.

آیا واقعاً نمی‌توانیم به‌جای این تصور که اجسام متحرک دچار انقباض در جهت حرکت خود می‌شوند و اینکه چنین انقباضی برای تمامی آنها، صرف‌نظر از طبیعتشان و نیرویی که بر آنها عمل می‌کند، یکسان صورت می‌پذیرد، فرضی ساده‌تر و طبیعیتر را انتخاب کنیم؟ برای مثال، چرا نتوان تصور کرد که هرگاه اتر نسبت به جسمی که در درون آن در گذر است به حرکت درآید، آنگاه تغییرات فوق در اتر، و نه در جسم، تحقق می‌پذیرند؟ با این تعبیر، اغتشاشاتی که در اتر پدید می‌آیند دیگر با سرعتی یکسان در تمامی

1. W. Ramsay

۲. و با گسیل هلیوم به عنصر دیگری تبدیل می‌شود.ـم.

3. Larmor

جهات فضا منتشر نخواهند شد. آن اغتشاشاتی که به موازات حرکت جسم، چه هم‌جهت با آن و چه در خلاف این جهت، پخش می‌شوند، با سرعت بیشتری انتشار می‌یابند و آن دسته که با مسیر حرکتْ زاویه‌ای قائمه می‌سازند، با سرعتی کمتر. در نتیجه، سطوح خارجی امواج تولید شده دیگر کروی نبوده بلکه بیضوی خواهند بود، و این انقباض حیرت‌انگیز اجسام هم شرش را از سرما کم خواهد کرد.

البته این مورد را به‌عنوان مثال ذکر می‌کنم، زیرا واضح است انواع دستکاریهایی که می‌توان در نظریه اعمال کرد، سر به بینهایت می‌زنند.

ممکن است روزی علم نجوم بتواند نتایجی تجربی را در این خصوص در اختیار ما قرار دهد: در واقع خود این علم بود که اول‌بار اسباب طرح مسأله را از طریق کشف پدیدهٔ کجراهی[1] نور فراهم نمود. اگر برای توضیح این پدیده نظریه‌ای نه‌چندان دقیق تدوین کنیم، نتیجهٔ شگفت‌انگیزی از آن حاصل می‌آید. موضع ظاهری ستارگان، به‌علت حرکت زمین، با موضع حقیقی آنها تفاوت دارد و از آنجا که حرکت زمین خود متغیر است، مواضع ظاهری ستاره‌ها هم تغییر خواهند کرد. ما نمی‌توانیم موضع حقیقی ستاره‌ای را تعیین کنیم، اما تغییرات مواضع ظاهری آنان قابل مشاهده است. بنابراین، مشاهدات ما از پدیدهٔ کجراهی نور می‌تواند نه حرکت زمین، بلکه تغییرات این حرکت را برای ما نمایان سازد. پس این مشاهدات نمی‌توانند چیزی دربارهٔ حرکت مطلق زمین به ما بیاموزند.

به هر تقدیر، اینها واقعیات امر را در حد تقریب اول تشکیل می‌دهند؛ اگر می‌توانستیم گذر زمان را با دقت یک‌هزارم ثانیه اندازه‌گیری نماییم، دیگر واقعیت به این صورتی که گفتم جلوه‌گر نمی‌شد. در آن‌صورت می‌توانستیم مشاهده کنیم که تغییرات در مواضع ظاهری ستارگان نه تنها بستگی به تغییرات در حرکت زمین دارند (تغییراتی که کاملاً هم شناخته شده هستند زیرا ناظر بر حرکت کرهٔ ما در مدار بیضی‌شکل خود می‌باشند)، بلکه علاوه بر آن به مقدار متوسط این حرکت[2] نیز وابسته‌اند. این امر ایجاب می‌کند که ضریب ثابت کجراهی نور برای همهٔ ستاره‌ها دقیقاً یکسان نباشد؛ بنابراین، اختلافات میان آنها باید بتواند حرکت مطلق زمین را به ما نشان دهد.

این استدلال، به شکلی دیگر، حکایت از زوال اصل نسبیت دارد. این درست که ما تا زمانی که بتوانیم گذر زمان را در حد یکهزارم ثانیه اندازه‌گیری کنیم، فاصلهٔ زیادی داریم، اما مع‌الوصف بعضی معتقدند که شاید کل سرعت مطلق زمین بسیار بیشتر از سرعت نسبی آن در برابر خورشید باشد؛ فی‌المثل، چنانچه این سرعت به جای ۳۰ کیلومتر در ثانیه، ۳۰۰ کیلومتر در ثانیه باشد، آنگاه قادر خواهیم بود آن‌را مشاهده کنیم.

من معتقدم این نحوهٔ استدلال کردن مستلزم زیاد ساده انگاشتن نظریهٔ کجراهی نور است. همان‌طور که قبلاً نیز متذکر شدم، مایکلسن نشان داده است که هیچ روشی در فیزیک توانایی عیان ساختن حرکت مطلق زمین را ندارد؛ من هم قانع شده‌ام که این امر در مورد روشهای نجومی نیز کاملاً صدق می‌کند و هر قدر میزان دقت خود را افزایش دهیم، در این نتیجه کوچکترین خللی پیدا نخواهد شد.

صرف‌نظر از اینکه حقیقت امر در این موردِ به‌خصوص چیست، نتایجی که اخترشناسان در این جهت در اختیار ما قرار خواهند داد، روزی به‌کار فیزیکدانان خواهد آمد. در عین حال، معتقدم که نظریه‌پردازان، با توجه به آزمایشهای مایکلسن، می‌توانند اطمینان داشته باشند که نتیجه در این مورد همواره منفی خواهد بود و اگر ایشان می‌خواهند کاری مثمرثمر در زمینه کجراهی نور انجام دهند، باید این نتیجهٔ منفی را پیشاپیش درکار خود ملحوظ دارند.

اما اجازه دهید باز به زمین برگردیم. در زمین هم ما می‌توانیم آزمایشگران را یاری دهیم. یکی از کارهایی که برای مثال می‌توانیم انجام دهیم این است که زمینه را با تحقیق همه‌جانبه در رفتار دینامیکی الکترون مهیا سازیم. سوءتفاهم نشود، من نمی‌گویم که این کار فقط باید با اتکا بر یک فرضیه صورت پذیرد، بلکه معتقدم چاره در این است که در حد امکان تعداد بیشتری فرضیه پیدا کنیم و به میدان بفرستیم. آنگاه نقش فیزیکدانان تجربی به این ترتیب مشخص می‌شود که از حاصل کار ما برای یافتن آزمایشی سرنوشت‌ساز استفاده کنند تا بهترین فرضیه از میان آن فرضیه‌ها گزینش شود.

بررسی رفتار دینامیکی الکترون را از منظرهای متفاوتی می‌توان انجام داد. اما از میان راههایی چند که برای این کار وجود دارند، یکی هست که در عین مغفول ماندن، نوید بیشترین اعجاب را می‌دهد. این راه ناظر بر خصایصی در حرکت الکترونهاست که خطوط گسسته در طیف نوری را تولید می‌نمایند، خصایصی که توسط پدیدهٔ زیمان به اثبات رسیده‌اند. جسمی را در نظر بگیرید که در اثر التهاب به حالت تابندگی رسیده باشد؛ آنچه در چنین جسمی اعمال ارتعاشی انجام می‌دهد از یک آهن‌ربا تأثیر پذیرفته، بار الکتریکی پیدا می‌کند. این اولین نکتهٔ بسیار مهم است، اما از این فراتر تابه‌حال کسی به عمق این مسأله نفوذ نکرده است. علت اینکه توزیع خطوط در یک طیف نوری از قانونی منظم تبعیت می‌کند، چیست؟ این‌گونه قوانین را که بسیار دقیق و نسبتاً ساده هم هستند، آزمایشگران به تفصیل بررسی کرده‌اند. در نظر اول، ترتیب خطوط در این طیف، هارمونی‌هایی را که در آکوستیک یافت می‌شوند به ذهن تداعی می‌کند؛ لیکن تفاوت میان این دو عظیم است. نه تنها تعداد ارتعاشات مضربهایی متوالی از عددی واحد را تشکیل نمی‌دهند، بلکه در اینجا حتی چیزی شبیه ریشه‌های معادلات غیرجبری [متعالی]، از آن‌گونه که در انواع مسأله در فیزیک ریاضی با آنها آشنا شده‌ایم، یافت نمی‌کنیم: مسائلی از قبیل ارتعاشات اجسام کشسان با هر شکلی، یا نوسانات هرتزی در هر نوع از تولیدکننده‌های برق، یا مسألهٔ فوریه در باب خنک شدن جامدات.

قوانین مربوط به طیف نوری از قوانین مربوط به هارمونی‌ها ساده‌ترند، اما نوع آنها با یکدیگر کاملاً فرق می‌کند. اگر بخواهیم تنها یکی از این تفاوتها را برشمریم، می‌توانیم به این واقعیت اشاره کنیم که برای هارمونی‌های مرتبهٔ بالا تعداد ارتعاشات به طرف حدی متناهی میل می‌کنند نه اینکه افزایشی نامتناهی داشته باشند.

در این مورد تابه‌حال توضیحی داده نشده است و من فکر می‌کنم که در پس آن یکی ازمهمترین رموز طبیعت نهفته باشد. در این جهت لیندِمن علی‌رغم کوشش قابل ستایشی که از خود نشان داده، نتوانسته است شاهد توفیق را در آغوش گیرد. این کوششها باز باید از سر گرفته شوند. تنها از این طریق است که خواهیم توانست، به قول معروف، به اعماق نهان ماده نفوذ نماییم، و هنگامی که از منظر دیدگاه امروزی خود به جهان توانستیم دریابیم چرا ارتعاشات اجسام تابنده به این صورت با ارتعاشات اجسام کشسان تفاوت

1. aberration

۲. منظور، متوسط سرعت زاویه‌ای زمین در مدار بیضی شکل آن است.ـم.

دارند، چرا رفتار الکترونها همانند ماده‌ای که تابه‌حال با آن مأنوس بوده‌ایم نیست، قوانین دینامیکی حاکم بر الکترونها را بهتر خواهیم فهمید و آنگاه شاید وفق دادن این قوانین با اصولی که تابه‌حال از آنها صحبت می‌کرده‌ایم، آسانتر باشد.

حال فرض کنید تمامی این کوششها با شکست مواجه شوند (و بعد از همهٔ این حرفها، من فکر نمی‌کنم این‌طور شود). آنگاه چه باید بکنیم؟ آیا باید برویم به‌دنبال اینکه به اصطلاح با یک ترفند همهٔ اصول فروریخته را از نو بازسازی کنیم؟ واضح است که این کار را همیشه می‌توان انجام داد، و در این مورد من هیچ چیزی از آنچه را که قبلاً گفته‌ام پس نمی‌گیرم. اما آنها که در ادامهٔ مناقشه با من پافشاری می‌کنند، ممکن است بگویند: «مگر شما خودتان قبلاً ننوشته بودید که این اصول علی‌رغم دارا بودن منشأ تجربی، اکنون دیگر در معرض ابطال به وسیلهٔ تجربه نیستند، زیرا همگی مبدل به مشتی قرارداد گردیده‌اند؟ اما الان دارید می‌گویید فتوحاتی که اخیراً نصب آزمایشگران شده است این اصول را با خطر مواجه کرده است.»

بسیار خوب، قبلاً حق با من بود و امروز هم به خطا نرفته‌ام. قبلاً حق با من بود و آنچه امروزه دارد روی می‌دهد تأییدی دیگر بر آن است. بگذارید برای مثال، آزمایش گرماسنجی کوری را با رادیوم در نظر بگیریم. آیا امکان دارد بتوان آن را با اصل بقای انرژی آشتی داد؟ اقدامات بسیاری صورت گرفته‌اند تا این آشتی انجام پذیرد؛ اما از میان این آنها یکی هست که می‌خواهم نظرتان را به آن جلب کنم. توضیحی که در نظر دارم، همان نیست که امروزه در حال تفوق پیدا کردن است، اما یکی از توضیحاتی است که مطرح شده است. در این توضیح، رادیوم واسطه‌ای تصور می‌شود که کارش فقط ذخیرهٔ تشعشعات ناشناخته‌ای است که در تمام جهات فضا پخش‌اند و از داخل همهٔ اجسام، به استثناء رادیوم، بدون اینکه خود تغییری پذیرند یا هیچ‌گونه اثری بر این اجسام بر جا گذارند، عبور می‌کنند. تنها رادیوم است که می‌تواند کمی از انرژی این تشعشعات را تصاحب کرده و بعد آن را به اشکالی گوناگون پس دهد.

چقدر این فرضیه مناسب و مفید است! اولاً حقانیت آن را نمی‌توان ارزیابی کرد و در نتیجه فرضی است که ابطال نمی‌پذیرد. ثانیاً، این فرضیه قادر است خطر هر گونه تناقضی را با اصل مایر دفع کند؛ نه‌تنها می‌تواند از پیش ایرادات کوری را جواب دهد، بلکه توانایی دارد تا اشکالات دیگری را نیز که آزمایشگران در آینده جمع‌آوری می‌نمایند رفع کند. این انرژی جدید و ناشناخته را می‌توان در هر موردی به‌کار بست.

این دقیقاً عین چیزی است که قبلاً گفته‌ام و از این طریق به‌سهولت می‌توان نشان داد که اصل ما از هرگونه تهدیدِ آزمایش و مشاهده در امان خواهد ماند.

اما با این ترفند چه عاید ما شده است؟ اصل مورد نظر ما سالم و پابرجا باقی مانده است، اما به چه دردی می‌خورد؟ قبل از این به ما قدرت می‌داد تا تحت فلان و بهمان شرایط بتوانیم روی فلان مقدار از انرژی حساب کنیم؛ یعنی حدی را برقرار ساخته بود. اما اکنون که منبع بی‌پایانی از انرژی جدید در اختیار ما نهاده شده است، دیگر محدودیتی در مقابل ما وجود ندارد؛ و من در جای دیگری هم نوشته‌ام که چنانچه اصلی بارآوری خود را از کف داد، مشاهده و آزمایش، بدون اینکه آن را مستقیماً نقض نمایند، محکومش می‌کنند.

پس این راهی نیست که باید برگزیده شود. باید کار سازندگی را دوباره از نو شروع کنیم. اگر ضرورت این بازسازی به ما تحمیل هم شده باشد، نباید دلتنگ شویم. نباید مجبور به این نتیجه‌گیری شویم که در علم هیچ کاری غیر از نوع کار پنه‌لوپه[1] نمی‌توان انجام داد؛ که تنها کاری که از علم بر می‌آید بنا کردن کاخهایی آنچنان سست است که خود به‌زودی وادار به تخریب کامل آنها با دستهای خود می‌گردد.

همان‌طور که گفته‌ام، قبلاً بحرانی شبیه بحران فعلی را پشت سر گذارده‌ایم، من به شما نشان داده‌ام که در دورهٔ دوم فیزیک ریاضی، یعنی فیزیک مبتنی بر اصول عام، به‌خوبی می‌توان آثار باقی‌مانده از دورهٔ اول، یعنی فیزیک مبتنی بر نیروهای مرکزی، را مشاهده کرد. هنگامی‌هم که دورهٔ سومی را درک نماییم، خواهیم دید همین امر در مورد آن نیز صادق است. عیناً مانند جانوری که پوست می‌اندازد، پوشش خارجی خود را که زیادی تنگ شده است از هم می‌درد، و پوشش نو شروع به روییدن می‌نماید. اما زیر این پوشش جدید، همواره می‌توان خصایص اصلی جانوری را که بقا یافته است، تشخیص داد.

جهت گسترش فیزیک ریاضی را در آینده نمی‌توان پیش‌بینی کرد. شاید نظریهٔ جنبشی گازها در این امر پیشتاز شود و الگویی برای سایر زمینه‌ها گردد. در آن صورت، واقعیاتی که در نظر اول ساده جلوه می‌کردند، به شکل برایندی از تعداد بسیار کثیری واقعیت ابتداییتر درخواهند آمد که تنها قوانین احتمالات آنان را به‌سوی غایتی واحد می‌کشاند. در آن صورت، قانون در فیزیک خصلتی کاملاً نو پیدا خواهد کرد، دیگر نه در شکل یک معادلهٔ دیفرانسیل، که در هیأت قانونی آماری تجلی خواهد نمود.

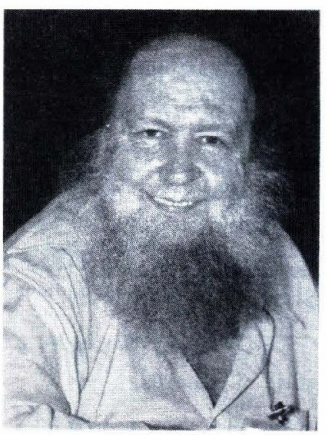
همچنین شاید مجبور شویم مکانیکی کاملاً نوین بنا کنیم، مکانیکی که در حال حاضر تنها می‌توانیم جلوه‌ای مبهم از آن را در تصور آوریم، مکانیکی که در آن لختی متناسب با سرعت افزایش پیدا می‌کند و سرعت سیر نور هم مرزی را تعیین می‌نماید که عبور از آن امکان‌پذیر نخواهد بود. مکانیک ساده‌تری که با آن خوگرفته‌ایم، به‌صورت تقریبی اولیه کماکان حفظ خواهد شد زیرا اعتبار آن برای سرعتهایی‌که زیاد کلان نیستند همواره باقی خواهد ماند، و اصول دینامیکی قدیمی را می‌توان در اصول جدید بازیافت. دلیلی نخواهیم داشت که از اعتقاد قبلی خود به اصول قدیم تأسف بخوریم. به‌راستی هم از آنجا که سرعتهای کلانی که معادلات قدیمی را تاب کنار آمدن با آنها نبود همواره حالت استثنا بودن خویش را حفظ خواهند کرد، عاقلانه‌تر این است که در عمل طوری رفتار کنیم که گویی هنوز به این معادلات پایبندیم. اینان به‌قدری ثمربخش هستند که منزلتشان باید کماکان حفظ شود. چنانچه کمر به طرد کامل آنها بر بندیم، تنها حاصلی که عایدمان می‌شود محرومیت از نعمتِ در درست داشتن اسلحه‌ای گرانبها خواهد بود. در خاتمه باید خاطرنشان سازم که هنوز ما در تنگنایی قرار نگرفته‌ایم که چشم‌پوشی از این معادلات را به ما تحمیل کند و تابه‌حال هم هیچ چیز ثابت نکرده است که اینان نخواهند توانست از این ورطه، پیروزمندانه جان سالم بدر برند.

---

۱. پنه‌لوپه (Penelope) در اساطیر قدیم یونان همسر عفیف و باوفای زئوس بود که زمانی در غیبت وی با خواسته‌های نامشروع عده‌ای از شیفتگانش روبه‌رو گردید. برای دفع شر از خود به آنها قول داد زمانی خواستهٔ آنان را اجابت خواهد کرد که لباسی را که در دست دوخت دارد به اتمام برساند. بدین‌ترتیب تا زمان بازگشت شوهرش کار وی این بود که هر شب هر آنچه را که طی روز به دقت دوخته بود مخفیانه از هم بشکافد.ـم.

سه مصاحبه

به مناسبت آغاز قرن جدید دو مجموعهٔ مقالات مروری ریاضی با عناوین *Developments in Mathematics (1900-1950)* و *Developments in Mathematics (1950-2000)* توسط انتشارات برکهویزر زیر نظر ژان‌پل پیر از دانشگاه لوکزامبورگ منتشر شده است که ترجمهٔ یک مقاله از جلد اول (1900-1950) با عنوان «سیر پیدایش دقت در احتمال ...» در شمارهٔ پیشین مجله (شمارهٔ ۱ و ۲ سال ۱۲) چاپ شد. در زیر ترجمهٔ سه مصاحبه که در جلد دوم (1950-2000) آمده است از نظرتان می‌گذرد. گفتگوی اول با ادرین دووادی (Adrien Douady) استاد دانشگاه پاریس در اورسی است که آثار مهمی در هندسهٔ واریته‌های مختلط تحلیلی و نیز دینامیک توابع مختلط دارد. گفتگوی دوم با میخائیل گروموف (Mikhael Gromov) ریاضیدان روس‌تبار است که چند ده سال است در فرانسه و آمریکا زندگی می‌کند و تحقیقات عمیقی در رشته‌های مختلف ریاضی مانند هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی دیفرانسیل، و نظریهٔ هندسی گروهها دارد. و بالاخره، سومین مصاحبه‌شونده، فریدریش هیرتسبروخ (Friedrich Hirzebruch) است که در حال حاضر «ریش‌سفید» ریاضیات آلمان محسوب می‌شود و مؤسسهٔ ریاضیات بُن را (که بعداً به زنجیرهٔ مؤسسات ماکس پلانک پیوست) بنیان نهاد و در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ سهم بزرگی در تعمیم قضیهٔ ریمان-رُخ و پدیدآوردن ابزارهای جدید توپولوژی و هندسهٔ جبری داشت. مصاحبه‌کننده در هر سه مصاحبه، رمی لانژون (Rémi Langevin) استاد ریاضیات در دانشگاه دیژون فرانسه است.



ادرین دووادی

ترجمهٔ یوسف امیرارجمند

رِمی لانژُوَن. آیا از نظر تو ریاضیات علمی است مستقل از سایر علوم؟

اَدرِیَن دووادی. خیر، رابطهٔ مستقیمی [بین آنها] می‌بینیم: هدف علم این است که بفهمد دنیا چیست؛ در دنیا ضروریاتی وجود دارد و ممکناتی، ریاضیات ضروریات را توصیف می‌کند. مدلسازی چیزی است که [ریاضیات را] با سایر علوم پیوند می‌دهد. این بدین‌معنا نیست که مدلسازی یک علم دقیق است. روشی که به‌کار گرفته می‌شود این است که برای دنیای واقعی مدلهایی ساخته می‌شود و سپس روی این مُدلها کار صورت می‌گیرد. در اینجاست که ریاضیات وارد می‌شود، و بی‌اندازه کار باید صرفاً روی مدل انجام گیرد. سرانجام باید نتایج را با واقعیات تطبیق داد و این کاری است که انجامش هرگز به‌طور کامل امکان‌پذیر نیست. [در جایی] خوانده‌ام: ریاضیات تنها در آن جاهایی مطلقاً درست است که هیچ چیزی را توصیف نمی‌کند.

به ریاضیاتی که مطلقاً نمایانگر چیزی نباشد علاقهٔ چندانی ندارم. از نظر من باید کاربُردی در دیدرس، هرچند دور، باشد؛ چیزی باشد که ریاضیات را به دنیای واقعی مربوط کند، حتی اگر این ارتباط [با واقعیت] به‌صورت پارادایم باشد. از طرف دیگر، چند منظوره بودن ریاضیات برای من بسیار جالب توجه است: یک استدلال واحد را می‌توان در موارد مختلف به‌کار گرفت؛ یک حکایت بامزه: در دانمارک مطالعاتی بر روی پوشک نوزادان انجام شده و [نتایج آن] به کناری گذاشته شده بود. شش ماه بعد، در حین بررسی نحوهٔ سرد کردن نیروگاههای اتمی، معلوم شد که ریاضیات این دو یکی بوده است.

ر. ل. آیا به‌نظر تو این امکان وجود دارد که مسائل واقعی باعث پیدایش ریاضیاتی جدید شود؟

ا. د. بله. درست است که به ریاضیاتی که خیلی از واقعیت دور باشد علاقه‌ای ندارم، اما به ریاضیاتی هم که بیش از حد [به واقعیت] نزدیک باشد. چندان

میلی ندارم. سطحی از جدایی وجود دارد که از آنجا می‌توان با فاصلهٔ کافی به مشاهدهٔ چیزها پرداخت.

ر. ل. آیا باید برای اشیای ریاضی نوعی واقعیت قائل شد؟

ا. د. مسلماً یک جنبهٔ افلاطونی در [دیدگاه] من هست. اما باید اذعان کرد که مکانیک کوانتومی مفهوم واقعیتِ دنیای واقعی را دستخوش تزلزل کرده است. نیمه شبی، قبل از اینکه قضیهٔ فرما (F) اثبات شود، این فکر به نظرم رسید: آیا ما در حالتی از کائنات قرار نداریم که، به‌معنای کوانتومی آن، ترکیبی است خطی از حالتی که در آن (F) درست است و حالتی که در آن (F) غلط است؟ این می‌شود «فرمای شرودینگر». اگر فرمای شرودینگر از مَثَل گربهٔ شرودینگر[1] هم نامعقول‌تر به‌نظر می‌آید، به این علت است که ما یک تساوی حسابی را از یک گربهٔ واقعیتر می‌دانیم. برت[2] مثال ساده‌تری آورده است: یک عدد ۶۰ رقمی را در نظر بگیر، می‌توانی حالتی از جهان را تصور کنی که در آن این عدد یا اول باشد یا نباشد؟

ر. ل. احتمالاً خیر، زیرا نمی‌توان این عدد را از اعداد دیگر جدا کرد ....

ا. د. آیا اول بودن این عدد قبل از اینکه تو آن را ثابت کنی حقیقت داشته؟ مسلماً این حرف از بعضی حقایق فیزیکی‌هم برایت غیرقابل هضم‌تر است، این واقعیت که ضرورت انجام محاسبه بیشتر از ضرورت اندازه‌گیری است.

ر. ل. در اینجا، برخلاف اندازه‌گیری، برهمکنش با داده‌ها وجود ندارد.

ا. د. نپذیرفتن ریاضیاتی که «درستی کوانتومی» بر آن حاکم باشد آیا نشانهٔ آن نیست که [ریاضیات] از واقعیتی قویتر برخوردار است؟

ر. ل. آیا رشد ریاضیات به جوامع بستگی دارد؟

ا. د. واضح است که روند تحول سؤالاتی که مطرح می‌شود به جوامع بستگی دارد. [در اینجا] یک مفهوم فاریاضی پیش می‌آید: آنچه مهم است و آنچه مهم نیست. مثلاً ماندلبرو هیچ‌وقت برای اثبات، حتی دو سه نابرابری را هم به‌دنبال هم نیاورد، اما [توانست] دیدگاه اکثر ریاضیدانها را در مورد اشیایی که قبل از او غیرعادی و نامتعارف تلقی می‌شدند (فرکتالها) تغییر دهد. در واقع فرکتالها [بر خالها] اشیایی هستند که در کار مدلسازی دنیای واقعی همه‌جا به‌کار می‌آیند. در عوض، اگر قرار باشد در مورد درستی یا نادرستی یک گزاره حکمی بکنیم، این دیگر به زمینه، یا جنسیّت یا ... آن گزاره بستگی ندارد.

ر. ل. آیا معیار زیبایی‌شناسی در ریاضیات معنایی دارد؟ آیا این یک معیار ابدی است؟

ا. د. آنچه [در ریاضیات] زیباست، نتایجی هستند که به‌نحوی «مقرون‌به‌صرفه»اند، و میدان وسیعی را می‌گشایند. مثل این است که پس از عبور از گردنه‌ای در کوهستان دشت وسیعی را [در پیش‌رو] کشف کنیم. با شاعری هم تشابهی می‌بینم. با اینکه حافظه‌ام زیاد خوب نیست اما اشعار زیادی از حفظ دارم. اشعار را از طریق بازسازی یاد می‌گیرم. با استفاده از اطلاعات بسیار مختصری می‌شود آنها را بازسازی کرد. بقیه خودبه‌خود می‌آید، چه اشعار بُودلِر باشد چه اشعار بابی لپوانت[1]: مثلاً این شعر بُودلر:

L'homme et la mer — انسان و دریا[2]

Homme libre, toujours tu chériras la mer
ای مرد آزاد، تو دریا را همواره دوست خواهی داشت
La mer est ton miroir; tu contemples ton âme
دریا آئینهٔ توست و تو روح خویش را
Dans le déroulement infini de sa lame
در جنب‌وجوش بی‌پایان امواج آن خواهی دید
Et ton esprit n'est pas un gouffre moins amer.
اندیشهٔ تو (نیز) ژرفایی است که تلخی آن کمتر (از دریا) نیست.
Tu te plais à plonger au sein de ton image;
خوش می‌داری تا درین تصویر خویش غوطه‌زنی
Tu l'embrasses des yeux et des bras,et toncœur
و با دیده و بازوانت آن را دربرکشی و قلب تو (نیز)
Se distrait quelques fois de sa propre rumeur
گاهگاه با (شنیدن) شِکوهٔ بی‌تاب و وحشی آن
Au bruit de cette plainte indomptable et sauvage.
از غوغای درون خود انصرافی یابد.
Vous êtes tous les deux ténébreux et discrets:
شما هردو مرموز و رازدارید:
Homme, nul n'a sondé le fond de tes abîmes,
این انسان، تاکنون ژرفای گرداب تو را کسی نسنجیده،
O mer, nul ne connaît tes richesses intimes,
ای دریا، هیچکس از گنجینه‌های پنهان تو خبردار نیست.
Tant vous êtes jaloux de garder vos secrets!
چرا که شما هردو در نگهداری اسرار خویش حسودانه می‌کوشید!
Et cependant voilà des siècles innombrables
با اینهمه قرنهای بسیار می‌گذرد
Que vous combattez sans pitié ni remords,
که شما بی‌رحمانه و بی‌ندامت می‌جنگید،
Tellement vous aimez le carnage et la mort,
(آه) چقدر عاشق مرگ و کشتارید،

O lutteurs éternels, ô frères implacables!

ای کشتی‌گیران ابدی، ای برادران ناآرام!

---

۱. آزمایش ذهنی شرودینگر که به «گربهٔ شرودینگر» مشهور شده، نشان‌دهندهٔ یکی از پارادکسهای ناشی از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است. گربه‌ای را تصور کنید که در جعبه‌ای همراه با یک منبع پرتوزا و یک آشکارسازِ ذرات رادیواکتیو قرار دارد و جعبه مهر و موم شده است. آشکارساز را فقط یک بار و آن هم برای مدت یک دقیقه روشن می‌کنیم. فرض می‌کنیم احتمال اینکه منبع پرتوزا در طول این مدت ذره‌ای قابل آشکار شدن گسیل کند $\frac{1}{2}$ باشد (با قطعیت نمی‌توان گسیل چنین ذره‌ای را پیشگویی کرد. تنها احتمال آن قابل محاسبه است). اگر آشکارساز ذره‌ای را دریافت کند بلافاصله یک گاز سمی در جعبه پخش می‌شود و گربه را می‌کشد. پس ما نمی‌توانیم بدانیم که پس از گذشت یک دقیقه، گربه زنده است یا مرده. حالت او ترکیبی است خطی از حالت زنده و حالت مرده. حال اگر درب جعبه را باز کنیم و گربه را زنده مشاهده کنیم همین عمل مشاهده (اندازه‌گیری) باعث شده است که گربه قطعاً در حالت زنده قرار گیرد. قبل از این عمل به هیچ‌وجه نمی‌توانستیم حکمی در مورد زنده یا مرده بودن گربه صادر کنیم، یعنی زنده یا مرده بودن گربه حقیقتی عینی مستقل از عمل مشاهده (اندازه‌گیری) نیست. ـ م.

2. J. Brette

1. Bobby Lapointe

۲. این ترجمه از رباعیات بُودلر برگرفته شده است از: ژیلبرتوین اشعار فرانسه. ترجمه و نگارش محمدمهدی فولادوند عضو انجمن شعرای فرانسه. انتشارات کندی. ۱۹۷۱.

به صنعتی که در رباعی ماقبل آخر به‌کار رفته توجه کنید: عبارت وصفی «ژرفای گرداب» به دریا مربوط می‌شود، درحالی‌که «گنجینه‌های پنهان تو» به انسان اشاره دارد. من یک ساختار و چند کلمه را به خاطر می‌سپارم و بعد شعر را بازسازی می‌کنم. مکانیزم [کار من] این نیست که کلمات را یکی پس از دیگری ردیف کنم، بلکه یک بازسازی است با عنایت به یک موضوع، چند کلمه و یک ساختار که به‌خاطر سپرده‌ام.

بازسازی اثبات یک قضیه هم همین‌طور است. برای یادگرفتن یک موضوع ریاضی، یادداشت برمی‌داشتم و سپس این یادداشتها را خلاصه می‌کردم؛ وقتی یادداشتها روی یک بلیط مترو جا می‌شدند دیگر آنها را یاد گرفته بودم. دیگر می‌توانستم بلیط را دور بیندازم. همهٔ اینها انعکاس نوعی زیبایی است. دیوید مامفرد (که اکنون به‌کار تصویرپردازی مشغول است) در مصاحبه‌ای که روی همین کاناپه با او به عمل آمد می‌گفت: اگر کسی زمانی ریاضیدان بوده باشد، دیگر برای همیشه ریاضیدان باقی خواهد ماند، زیرا نوعی زیبایی‌شناسی او را در انتخاب پرسشهایش هدایت می‌کند (فیلم «ریاضیات، دهکدهٔ من، ۲» را ملاحظه کنید).

ر. ل. این مرا به‌یاد جمله‌ای از آداماز می‌اندازد: ایده‌های ساده همیشه آخر سر پیدایشان می‌شود.

ا. د. مسلماً این‌طور است، ایده‌های ساده پس از یک [روند] طولانی رفع ابهام پیدا می‌شوند. هرگاه به چیزهای پیچیده‌ای برخورد کنیم که مهم به‌نظر می‌آیند، علت آن این است که این چیزها هنوز از وضوح کافی برخوردار نشده‌اند.

ر. ل. ژان پی یرسر یک مثال نقیض یافته است: یک «هیولا»، گروه ساده‌ای که تعداد اعضای آن از مرتبهٔ 10^{50} است.

ا. د. که می‌داند؟ شاید روزی این هیولا بهتر فهمیده شود. به‌علاوه، نکتهٔ مهم این است که رده‌بندی [گروههای ساده] بدون این هیولا کامل نمی‌شد، و اگرنه میل چندانی به [دانستن] چیزهایی که در داخل این هیولا یافت می‌شود ندارم. اما بالاخره حتی ریاضیات هم ممکن است چیزهایی داشته باشد که قشنگ نباشند.

ر. ل. ریاضیات را چگونه تصور می‌کنی (اگر این سؤال معنایی داشته باشد)؟

ا. د. البته که سؤال بامعنایی است. تصور من از ریاضیات احتمالاً جزئی است. به‌عقیدهٔ من، از سالهای سی تا سالهای شصت دستاوردهای روشهای هومولوژی [مانستگی] و کوهومولوژی [همانستگی]، که برای رفع احتیاجات توپولوژی جبری به‌وجود آمده بود، بر ریاضیات غلبه داشت؛ این روشها زبانی فراهم آوردند که می‌شد با آن از خیلی چیزها سخن گفت. نظریهٔ بافه‌ها که در آن به این روشها توسّل جسته می‌شد، باعث شد که بتوان این روشها را در هندسهٔ جبری و حساب به‌کار گرفت.

ر. ل. احتمالات چطور؟

ا. د. بله، خیلی چیزها اتفاق افتاد، اما احتمالات را تا مدتهای مدید شاخه‌ای کم‌اهمیت [از ریاضیات] می‌دانستند. ریاضیدانهای دنیای غرب، برعکس ریاضیدانهای روسی (کولموگوروف، سینایی) فرصت برقراری رابطه با فیزیک نظری و مکانیک کوانتومی را از دست دادند، این رابطه بعدها دوباره برقرار شد.

از سالهای شصت تابه‌حال شاهد حرکت جدید هستیم؛ رشتهٔ رابط قبلی شروع به خشکیدن کرده بود. پیشرفتهای فیزیک نظری که بر اثر آن به کمی هندسهٔ جبری و روشهای هومولوژیک احتیاج پیدا شده بود، باعث شد که این ارتباط دوباره برقرار شود. شاخهٔ جدیدی ظاهر شد: هندسهٔ غیرجابه‌جایی (آلن کُن). نظریهٔ میدانهای کوانتومی دستاوردهایی برای توپولوژی داشت، و سیستمهای دینامیکی نیز دستاوردهای عظیمی داشته است. وقتی که اسمیل در اواخر دههٔ پنجاه (یا اوایل دههٔ شصت) در کولژ دوفرانس سخنرانی کرد و «نعل اسب»هایش را توضیح داد هیچ‌کس نفهمید منظورش از این کار چیست.

من سیستمهای دینامیکی را زمینهٔ جدیدی می‌بینم: تا همین اواخر این موضوع در طبقه‌بندی AMS جایی نداشت و این درحالی است که پوانکاره از آن موقع، از اوایل قرن (قرن بیستم)، به آن توجه کرده بود.

ر. ل. رفتن تو از آنالیز مختلط به سیستمهای دینامیکی به‌طور طبیعی صورت گرفت. این‌طور نیست؟

ا. د. ماجرا با سؤال یکی از دانشجویان سیکل اول دانشگاه[1] از هوبار[2] شروع شد: اگر بخواهیم روش نیوتن را در مورد یک چندجمله‌ای به‌کار ببریم اما از یک نقطهٔ دلخواه شروع کنیم چه خواهد شد؟ اگر چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ باشد جواب واضح است. هوبار قول داد که جلسهٔ بعد جواب را برای یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ پیدا کند. این شد سرآغاز یک نظریه. ما متوجه شدیم که کیلی ۱۰۰ سال قبل همین سؤال را در مورد چندجمله‌ای درجهٔ ۳ مطرح کرده بود. داشتن کامپیوترهایی که می‌توانستند نمودار رسم کنند باعث شد بتوانیم ببینیم که این اشیا ساختارمند و غنی هستند و اینکه می‌توان این ساختارها را فهمید. الان ۱۵ سال است که به این کار مشغولم. نمی‌دانم توان این را دارم که به اکتشاف زمینهٔ جدیدتری بپردازم یا نه.

ر. ل. چه چیز دیگری؟

ا. د. سهم مکانیک کوانتومی در توپولوژی (ویتن، کُن، بیسموت). هیچ چیز در این باره نمی‌دانم اما احساس می‌کنم که موضوع مهمی است.

ر. ل. نظریهٔ اعداد چطور؟ آیا اثبات قضیهٔ فرما فقط یک واقعهٔ مهیج است یا یک چیز تازهٔ قابل ملاحظه؟

ا. د. سه حدس بزرگ وجود داشت: فرض ریمان، «قضیهٔ» فرما و حدس پوانکاره. فرض ریمان با دوتای دیگر خیلی تفاوت دارد، زیرا این فرض پیامدهای بسیاری دارد. اگر این فرض درست باشد، خیلی از قضایا صورت بهتری پیدا می‌کنند. اهمیت حدسهای پوانکاره و فرما در این است که [انسان را] به مباره می‌طلبند. یک مثال دیگر: مسألهٔ ۴ رنگ که آن هم مبارزطلب بود اما حل آن دلسردکننده بود زیرا پیامدی در بر نداشت.

حکم موردل فی‌نفسه مهم است، حدس فرما «چموش»تر است، اما چیزی نیست که پیامدهای آن را قبل از اثبات بررسی کرده باشند. به این علت است که حکم موردل را با اهمیت‌تر می‌دانم. حدس پوانکاره را هم یک مبارزه‌طلبی می‌بینم، هرچند که این حدس در طبقه‌بندی خمینه‌ها نقش پایه‌ای دارد و نشان می‌دهد که ابعاد ۳ و ۴ چموش‌ترند، این حدس پیامدهای دیگری هم دارد که از الان تحت بررسی هستند.

نمونه‌ای که خیلی مورد علاقهٔ من است حدسی است دربارهٔ همبندی موضعی مجموعهٔ ماندلبرو (MLC). اگر بتوانیم آن را اثبات کنیم، اثبات سادهٔ برخی حکمهای دیگر هم امکان‌پذیر خواهد شد.

ر. ل. آیا رشد ریاضیات فرکتالی است؟

ا. د. بیشترْ موجهای بزرگی را می‌بینم که تشکیل می‌شوند و در هم می‌شکنند. با ذره‌بین می‌توان جوانه‌های ایده‌هایی را دید که کمی بعد شکوفا خواهند

۱. منظور، دورهٔ عمومی دانشگاه در فرانسه است که معمولاً دو سال است. ـ م.

2. J. H. Hubbard

شد. کوششهایی را هم می‌بینم که به نتیجه نمی‌رسند. مثلاً، از قرن شانزدهم تا قرن نوزدهم، اعداد مختلط را یک توهم، یک وسیلهٔ محاسبهٔ بی‌اهمیت، می‌پنداشتند. در حدود سال ۱۸۰۰ نگرشی هندسی (اعداد مختلط به‌عنوان نقاط $\mathbb{R}^2$) پدید آمد. اولین کوشش، که به نتیجه نرسید، از طرف وِسِل صورت گرفت که یادداشتی در گزارشهای آکادمی کپنهاگ به‌زبان دانمارکی چاپ کرد. وقتی می‌گویم، «به نتیجه نرسید»، منظورم این است که با وجود اینکه مقالهٔ بسیار واضحی بود به‌مدت تقریباً ۵۰ سال هیچ خواننده‌ای نداشت. چند سال بعد آرگانِ سویسی همان ساختار را درست کرد؛ این مفهوم راه خود را باز کرد و آنچه گاوس انجام داد کارهای آرگان، وِسِل و بسیار بیشتر از آن را در بر می‌گرفت. اول چند ضربهٔ سنگین وارد آورده می‌شود، سپس زمانی فرا می‌رسد که [ایده] «جا می‌افتد» زیرا اذهان آمادگی پذیرش آن را پیدا کرده‌اند. نمی‌گویم رشد ریاضیات مسیر اجتناب ناپذیری دارد، اما در آن جریانهای بزرگ وجود دارند. برخلاف سایرین، از جمله (میشل) سِرْ، تصور من [از این جریان] آنقدرها فردگرا نیست. خودِ وایلز، وقتی با صورت حدس فرما مواجه شد، تازه کار نبود.

ر. ل. آیا [در جامعهٔ ریاضی نیز] «ریش‌سفیدان»ی داریم؟

ا. د. آیا ما ریش‌سفیدانی داریم؟ در جامعهٔ ریاضی سلسلهٔ مراتب وجود دارد، ما چیزی مانند «طبقه‌بندی ATP» که تقریباً هر هفته یک طبقه‌بندی [جدید] به‌دست می‌دهد نداریم، اما سلسله مراتبی وجود دارد که [برحسب] ترکیبی از موقعیت اجتماعی و شهرت [شخص] به‌عنوان «تکنیسین» است. سازماندهی جامعهٔ ریاضی از دیدگاه جامعه‌شناسی صورت گرفته است، و زمینه‌های تحقیقات نیز ساختارمند هستند. مثلاً تِرستن یک سازمان‌دهنده است. بین سازمان‌دهندگان و تکنیسینها یک [نوع] دوگانگی وجود دارد. از میشل سر نقل می‌کنم: [در جامعهٔ ریاضی] عده‌ای روباه هستند و عده‌ای گراز، روباهها رد پاها را پیدا می‌کنند و گرازها هستند که کار کَندَن را انجام می‌دهند. بعضی ریاضیکارها تکنیسینهای بسیار خوبی هستند اما ایده‌های کلی چندانی در چنته ندارند، برخی دیگر شامهٔ فوق‌العاده‌ای دارند، اما وقتی مسأله را مطرح می‌کنند در به سرانجام رساندن آن مهارت کمتری از خود نشان می‌دهند.

ر. ل. آیا نگرش تو نسبت به ریاضیات از دههٔ ۱۹۵۰ تابه‌حال تغییر کرده است؟

ا. د. «نگرش عمیق» من به ریاضیات تقریباً ثابت باقی مانده، اما در عوض زمینه‌های تحقیقاتی‌ام دستخوش تغییر شده است؛ در ابتدا بیشتر نگرش جبری داشتم. من با سه پا راه می‌روم: هندسه (که آن‌را حسّ می‌کنم، تو هم آن را حس می‌کنی) و این بدین‌معناست که اشیا را دستکاری می‌کنی و از آنها برای خودت تصویرهایی می‌سازی. جبر (علم روابط دقیق) راحت‌تر قابل تفهیم است. به‌کمک جبر می‌توانی کورکورانه محاسبه کنی. آنالیز هم عبارت از این است که مرتکب خطا شوی و آن را کنترل کنی.

با وجود اینکه برخی اشخاص ظاهراً از [نوعی] شمّ محاسبه برخوردارند، اما خود محاسبه، در زمانی که انجام می‌پذیرد، کورکورانه است، و همین جزو نقاط قوّت آن است، در عوض (حداقل برای ما) لذّت استدلالهای هندسی از همه بیشتر است.

ر. ل. احساس می‌کنی وارث چه کسی هستی؟

ا. د. شخصی تأثیر زیادی بر من داشت و او سیروس[1] معلم دو سال آخر دبیرستان من بود. او می‌گفت «ریاضیات ساده است، ریاضیات زیباست، سادگی یکی از عوامل زیبایی آن است». می‌توانم از هانری کارتان، لوران، شوارتس و گوستاو شوکه نیز نام ببرم.

ر. ل. چگونه کار می‌کنی؟

ا. د. من با هوبار یک دوجمله‌ای بسیار خوب تشکیل دادیم؛ او روباه بود و من گراز. او فرهنگ بسیار وسیعی دارد و شمّی قوی برای پیدا کردن مسائل خوب. علاوه بر واقع‌بینی، استفاده از محاسبه و تجسّم را نیز به همراه آورد. ماشین [حساب] تصاویری فراهم آورد که توانستیم به کمک آن سؤالهای درست را مطرح کنیم، طرحهایی به‌دست داد که می‌شد در آنها مستقیماً ساختارهایی را کشف کرد، و ما توانستیم در مجموعهٔ ژولیا درختی را پیدا کنیم. این هم نمونه‌ای است از تعامل بین ریاضیات و دنیای واقعی.

ر. ل. آیا تحقیق در ریاضیات امری است دسته‌جمعی و سازمان یافته؟

ا. د. با وجود اینکه تحقیق انفرادی [نیز] وجود دارد، و قضیه‌ها هر یک اسم خاصی دارد، اما نباید این امر را زیاده از حد جدّی تلقی کرد. «اگر گُل سُرخی زیباست برای این است که کودش قوی بوده است». من همیشه مشاهده کرده‌ام که پیشرفتهای مهم کاملاً دسته‌جمعی بوده است و از ایده‌هایی ناشی شده که پس از پخته شدن به ثمر رسیده‌اند. اسمهایی که روی قضیه‌ها گذاشته می‌شود، مانند نام خیابانها، بیشتر برای این است که بدانیم کدام قضیه مورد نظر است.

ر. ل. آیا در ریاضیات هم مانند ادبیات، مکاتبی وجود دارد؟

ا. د. در ریاضیات هَر از گاهی منازعات قومی دیده می‌شود. با وجود این، عمدهٔ دستاوردهای بزرگ دسته‌جمعی و حتی جهانی هستند. من زیاد به رقابت، که البته بین افراد وجود دارد، معتقد نیستم. در رشته‌های دیگر ممکن است رقابتها حالت خشونت‌آمیزتری به خود بگیرد زیرا مسائل مالی بیشتر مطرح است (مثلاً در پزشکی)؛ تابه‌حال کسی ندیده است که در یک قضیهٔ ریاضی میلیاردها فرانک پول [نهفته] باشد. در واقع، مکاتب ریاضی وجود دارند، هرچند امروزه برقراری ارتباط بین ریاضیدانها بسیار ساده شده است به‌خصوص با استفاده از پُست‌الکترونیک.

ر. ل. در ریاضیات هم غد وجود دارد؟

ا. د. چیزی که من می‌بینم بیشتر حالت رخوتی است که چارچوب فکری وابسته به یک موضوع یا یک دیدگاه ایجاد می‌کند. دچار عاداتی می‌شوی که حالتِ رخوتِ خودت ایجاد کرده. مانعی جز تنبلی طبیعی در بین نیست. تو ریاضیدان هستی و حق داری هر چه را که درست است اثبات کنی، البته اگر بتوانی. این باعث نمی‌شود که نتوانی [چیزی را] به عاریت بگیری، یا به زبان دیگری بیان کنی.

ر. ل. آیا به نظر تو ریاضیات یک حرفه است؟

ا. د. بله، البته، شغلی است که درآمد خوبی هم دارد. این آپارتمان را ببین: من سِمَت خوبی دارم، همسرم هم همین‌طور، با زندگی فقیرانه خیلی فاصله داریم، خودم سی هزار فرانک در ماه در می‌آورم و همسرم بیست هزار فرانک، فقیر نیستیم.

درضمن این کاری است که باید به‌طور حرفه‌ای انجام داد، «خبرگی» می‌خواهد، روشهایی دارد، اصولی بر آن حاکم است، سلوکی دارد. آیا ریاضیات یک حرفه است یا هنر؟ نمی‌دانم نقاشها چگونه زندگی می‌کنند.

1. Siros

در ریاضیات همیشه تدریس سهمی دارد. من به [روال معمول در] CNRS (مرکز ملی تحقیقات علمی) در مورد رشتهٔ ریاضی بدگمانم.

ر. ل. شاگرد باید داشت؟

ا. د. از آنجاکه ریاضیات یک حرفه است و در آن «حرفه‌ای بودن» شرط است، لازم است که اشخاصی تربیت شوند. باید ریاضیدانان جوان استاد داشته باشند، این را می‌گوییم اما خودم هرگز نتوانسته‌ام بجز تعدادی خودآموخته چیزی تربیت کنم. تازه، بهترین آنها این‌طور شدند. دانشجویانم را وارد موضوعی می‌کنم و به آنها می‌گویم: «خوب دیگر خودتان می‌دانید، مسأله پیدا کنید، اینجا پر است از مسأله». من یک عیب دارم، نمی‌توانم بخوانم.

ر. ل. اینکه بتوانی خوب گوش کنی هم مسلّم نیست.

ا. د. بله، ولی من خوابم می‌برد.

ر. ل. فکر نمی‌کنم دیده‌ام که می‌خوابی، اما سؤالهای که پس از بیدار شدن می‌کنی آدم را در مورد عمق خوابت به شک می‌اندازد.

ا. د. حرفهٔ ما این‌طور اقتضا می‌کند.

ر. ل. نقش ریاضیدانان به‌عنوان معلم در مقابل کسانی که ریاضی پیشه نیستند اما به ریاضیات احتیاج دارند چیست؟

ا. د. این سؤال را هم می‌توان مطرح کرد که به اشخاصی که ریاضیات را پیشه نخواهند کرد چه نوع ریاضیاتی باید درس داد. اولاً، برای اینکه این [آموزش] مفید باشد باید بتواند نوعی استقلال فکری [در شخص] ایجاد کند. مهم این است که افرادی که ریاضیات را فرا می‌گیرند آن را ملکهٔ ذهن خود سازند و آن را یک نوع [ابزار برای] آزادی فکری تلقی کنند نه اینکه فکری باشد که با آن احساس بیگانگی کنند. اگر این‌طور نباشد به زحمتش نمی‌ارزد.

ر. ل. ریاضیاتی که دستورالعمل محاسبه باشد از نظر تو زیاد جالب نیست؟

ا. د. کاملاً درست است. اولاً علت گیرایی ریاضیات این است که می‌تواند دنیای واقعی را مدلسازی کند. همزمان با فراگرفتن ریاضیات باید ساختن مدل را نیز یاد گرفت. بدون‌شک مهمترین چیز همین است ... هر بار که تکنیکی فرا می‌گیریم باید چندمنظوره بودن آن را نیز نشان دهیم. زن من تمام وقتش را صرف پیشبرد یک ایده کرده است: تمام ریاضیدانها وقتی کار می‌کنند، همزمان در چندین زمینه کار می‌کنند، و ایده‌ها، مسائل و روشها را از زمینه‌ای به زمینهٔ دیگر انتقال می‌دهند. مثلاً روشهای هومولوژی در توپولوژی جبری به‌وجود آمد و میدان عمل وسیعی در هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد پیدا کرد.

ر. ل. این همان تزی است که کوین در کتابش با عنوان «ابتکار چیست»[1] ارائه می‌کند.

ا. د. درست است، خانم من وقت زیادی صرف تحقیق درباره اینکه چگونه باید انجام این کار را تعلیم داد، کرده است. اگر قرار باشد مردم از شرکتشان در کلاسهایی که در آن ریاضیات تدریس می‌شود (۶ سال دورهٔ راهنمایی و دبیرستان و حتی دورهٔ ابتدایی) چیزی یاد بگیرند، همین انعطاف‌پذیری است. ریاضیات باید وسیله‌ای برای آزادی باشد، قلمروی باشد که بتوان در آن در مقابل استاد به شاگرد حق داد. در طی دوران تدریسم چندین بار اتفاق افتاده که به دانشجویی برخورده‌ام که حق با او بوده نه با من. در یک چنین فرصتی ممکن است استعدادی بروز کند. انفورماتیک می‌تواند این نقش را ایفا کند. وقتی برنامه در کامپیوتر اجرا می‌شود، شاگرد احساس نوعی اقتدار می‌کند.

1. Kuhn: *Analyse de l'innovation*

ر. ل. پس به‌نظر تو اینکه بتوان ریاضیات را تجربه کرد آزادی شاگرد را بیشتر افزایش می‌دهد و بدین‌ترتیب او سریعتر فرصت نشان دادن استقلال خود را خواهد یافت، فکر نمی‌کنی که [استفاده از] ابزار انفورماتیک باعث شود که همهٔ عکس‌العملها قالبی شوند؟

ا. د. چرا مسلماً، اینها بهترین و بدترین حالات هستند؛ خطر اینکه این هم عادت شود وجود دارد، همه جا در ریاضیات همین‌طور است اما درعین‌حال انفورماتیک ابزار آزادی هم هست که بچه‌ها خیلی خوب می‌دانند چگونه از آن استفاده کنند. الان من از دست همکارانم در اورسی[1] که استفاده از ماشین‌حساب را در امتحانات سیکل اول دانشگاه قدغن کرده‌اند بسیار عصبانی هستم. این کاری است مسخره و ناسازگار با زمان.

ر. ل. ماشین‌حساب، تقلب‌رسان‌هم هست،

ا. د. اگر ماشین‌حساب بتواند به سؤالی جواب بدهد، آن سؤال، سؤال خوبی نیست.

ر. ل. بله و نه، در دل [با تو] موافقم اما در عمل اگر سؤالهای هوشمندانه مطرح کنیم این خطر وجود دارد که درصد مردودین بسیار زیاد باشد،

ا. د. مواردی وجود دارد که همان انتخاب جواب در حافظهٔ ماشین حساب هم احتیاج به مقداری هوش دارد. به‌هرحال افرادی که می‌گویند: «اگر ریاضیاتی را که شما تدریس می‌کنید بتوان توسط یک ماشین حساب انجام داد، بهتر است ماشین‌حساب داشته باشیم» راست می‌گویند.

ر. ل. با وجود این، بعضی شاگردها تمرینات تکراری را دوست دارند،

ا. د. لزومی ندارد به آدمهای مست باز هم شراب بدهی. باید [از آنها] خواست [فقط] کمی ابتکار به‌خرج دهند، نه زیاد؛ اما حتماً باید انتظار ابتکار داشت و آن را در داوری به‌حساب آورد. باید [شاگردان را] برای این کار تربیت کرد، انتظارات ما از آنها زیاد نباید باشد و به‌خصوص اینکه نباید ناامید شویم.

ر. ل. به‌نظر تو آیا در حال حاضر مدرسین قادر به انجام این کار هستند؟

ا. د. اشکال کار در اینجا نیست (با توجه به سیکل اول دانشگاه). خیلی اتفاق می‌افتد که بحثی که در سالن یک کافه در مورد آموزش سیکل اول شروع می‌شود خیلی زود تمام می‌شود. پس از پنج دقیقه ریاضیدانهای بزرگ به تو می‌گویند: بیخود خودت را زحمت نده، دانشجوها هیچ چیز سرشان نمی‌شود، [به‌علاوه] از این کار چیزی عایدت نمی‌شود. من بر ضد این چیزهاست که می‌خواهم مبارزه کنم. درست است که از نظر شغلی از زحمتی که در آموزش می‌کشی چیزی عایدت نمی‌شود. اما این طرز تفکر از نظر من قابل تأسف است؛ من می‌خواهم که آموزش به دانشجو کمک کند که بتواند خودش باشد نه اینکه او را به زور وارد یک قالب فکری کنند که با آن بیگانه است.

ر. ل. آیا تصویری که در اذهان عمومی از ریاضیدانها وجود دارد رضایت‌بخش است؟

ا. د. با اشخاصی که مواجه می‌شوم، اگر بگویم: من ریاضیدان هستم، معمولاً عکس‌العمل این است که [می‌گویند] آه، من که زیاد استعداد ریاضی ندارم. یک حکایت بامزه: روزی یکی از خانمهای همکار در مکزیک چندساعتی بیکار بود؛ پنج دقیقه نگذشته بود که یک نفر مکزیکی شروع کرد در اطراف او پرسه زدن و آن خانم هم ممانعتی نکرد. وقتی دید که مزاحمت دارد زیاد می‌شود شغل خود را به او اعلان کرد: من ریاضیدان هستم و آمده‌ام که در

1. Orsay

یک گردهمایی کنفرانس بدهم. آن مکزیکی فرار را بر قرار ترجیح داد! مردم دربارهٔ ریاضیات یک دیدگاه مدرسه‌ای دارند. من اغلب فاصلهٔ بین ایستگاه متروی لوگیشه[1] و اورسی را با اتواستاپ طی می‌کنم. چند روز پیش یک متخصص بیوشیمی [که سوار اتوموبیلش شده بودم] به من گفت: «تصور اینکه تحقیق در ریاضیات چگونه می‌تواند باشد برای من مشکل است».

اغلب مردم اصلاً نمی‌دانند که صرفاً در مدلسازیْ کار بسیار است، و این کار تمام ناشدنی است. برای تغییر تصویری که در اذهان عمومی از ریاضیدانها وجود دارد، فیلمهایی مانند فیلمهای ساختهٔ تیسر[2] به‌نام «آیا در این سالن ریاضیدانی وجود دارد؟» و «ریاضیات، دهکدهٔ من» مفید هستند. باید کارهایی انجام داد که هدف از آنها این باشد که اینجا و آنجا بگوییم ریاضیات چیست. با به‌کارگیری دینامیک هولومورف می‌توان تصاویر بسیار زیبایی تولید کرد و در ضمن می‌توان توضیح داد کار ریاضی یعنی چه. حرفهٔ ما ایجاب می‌کند که این توضیحات را بدهیم و این کار مشکلی است. در رشته‌های دیگر این کار ساده‌تر است. اختر فیزیک رؤیابرانگیز است، شیمی ظاهراً ملموس است. قبولاندن ریاضیات مشکل است زیرا ریاضی بسیار ساختارمند است، هر قطعهٔ کوچک آن بر تمامی آنچه قبلاً انجام گرفته است تکیه دارد. به‌علاوه، در علوم دیگر اهمیت موضوع بهتر قابل درک است. فهمیدن مارپیچ مضاعف ساده‌تر از درک کوهومولوژی چخ[3] است.

ر. ل. مسلماً این‌طور است، درعین‌حال سرشت نمای اویلرهم به‌همان اندازهٔ مارپیچ مضاعف قابل تجسم است.

ا. د. در عوض، توضیح اینکه چرا سرشت نمای اویلر دارای اهمیت است، یا چرا در یک مدل در نظر گرفتن چنبره گاهی مفید است، در واقع کاری است مشکل. انرژی عظیمی می‌بَرَد. بازدهی آن کم است. نسبت کوشش به نتیجه حداقل است.

ر. ل. چند تا ریاضیدان می‌شناسی (یعنی می‌توانی آنها را نام ببری و جزئیاتی از کارشان را بازگو کنی)؟

ا. د. اگر کسانی را در نظر بگیریم که من می‌شناسم، اقلاً به قیافه، و می‌توانم پس از ذکر نام ایشان نظری تقریبی بدهم، حدود پنجاه نفر. اگر لازم نباشد که آنها را شخصاً بشناسم، بیش از صد نفر، اگر ریاضیدانان کلاسیک قدیم را نیز به آنها اضافه کنیم حدود پنجاه نفر دیگر هم هستند.

ر. ل. چند نفر از اینها با تو، در رابطهٔ اردوش، با زنجیره‌ای با طول کمتر و یا مساوی ۳ مربوط‌اند؟

ا. د. حقیقت این است که من خیلی کم چیز می‌نویسم.

ر. ل. از کسانی شروع کنم که تو با آنها چیزی نوشته‌ای یا اثبات کرده‌ای.

ا. د. این ممکن است حاصل یک بحث در کافه بوده باشد که در حین آن ایده‌ای ارائه کرده‌ام، شاید ده دوازده نفری باشند که با آنها چیزی نوشته‌ام، این شامل دانشجویانم هم می‌شود که آنها را از بن‌بست در آورده‌ام. رابطهٔ استاد-شاگرد قبلاً طولانیتر بود، اما حالا، به‌دلیل اینکه در فرانسه مهلت نوشتن رساله محدود شده است، دانشجویان رساله‌های خود را زودتر تمام می‌کنند و این باعث می‌شود که وابستگی آنها با راهنمای رساله بیشتر باشد. این ما را به سیستم آمریکا نزدیکتر می‌کند، و به عقیدهٔ من به‌خوبی سیستم آمریکا نیست. آن‌وقتها می‌توانستی صبر کُنی تا دانشجو برای تهیهٔ رساله کاری با کیفیت بالا انجام دهد. در حال حاضر تعداد رساله‌ها زیادتر می‌شود، اما کیفیت آنها پایینتر می‌آید.

ر. ل. [در آن زمان] معیار ورود به یک حرفه ممکن بود رساله نباشد، بلکه، مثلاً رتبه‌ای باشد که در کنکور به‌دست می‌آوری؛ آیا این بدتر نبود؟

ا. د. شاید، اما من دلتنگ رساله‌های قدیم هستم. ما هنر نگارش تمام و کمال را [داریم] از دست می‌دهیم.

ر. ل. در استخدام ریاضیدانهای آینده، آیا باید صبر کنیم تا آنها توانایی‌های خود را ثابت کنند؟

ا. د. این وظیفهٔ آموزش است که به اشخاص کارهایی را که می‌توانند انجام بدهند محول کند. من همیشه بر این عقیده بوده‌ام که استخدام مادام‌العمر ریاضیدانها در CNRS شیوه‌ای است ناسالم. اینکه کسی را در سن سی یا بیست و پنج‌سالگی موظف کنیم که تا آخر عمر ایده داشته باشد واقعگرایانه نیست. برعکس، تدریس کردن همیشه امکان‌پذیر است. راهی که به‌نظر من راه خوبی می‌آید عبارت است از یک شغل دائم و مأموریتهای ۴ تا ۵ سالهٔ قابل تجدید.

ر. ل. چه کسی می‌تواند تعیین کند که یک مسیر تحقیقات به بن‌بست رسیده است یا نه؟

ا. د. هیچ‌کس. CNRS (مرکز ملی تحقیقات علمی) جنبه‌های مثبت هم دارد. اِکال[1] را مثال بزنیم، طی ده سال هیچ‌کس اصلاً نمی‌دانست که او تَه آن راهرو چه می‌کند، یک روز مالگرانژ[2] به‌اهمیت کار او پی‌برد.

ر. ل. [دربارهٔ] اصطلاحات ریاضی [چه نظری داری]؟

ا. د. یک اصطلاح بد ممکن است چیزهایی را پنهان کند.

ر. ل. مثلاً؟

ا. د. برای یک توپولوژی ضعیف می‌گوییم «پیوستگی ضعیف»، و این شرط از [شرط] پیوستگی برای یک توپولوژی قوی، قویتر است.

ر. ل. آیا تو [تابه‌حال] برای اشیای ریاضی اسم گذاشته‌ای؟

ا. د. من اسم ماندلبرو را روی مجموعهٔ ماندلبرو گذاشته‌ام. ده دوازده اسم دیگر را هم به سرقت برده یا چیزی به آنها اضافه کرده‌ام. مثلاً «versel». گروتندیک به خاصیتی که از یک حاصلجمع پیدا می‌شد universelle می‌گفت. من هم گفتم شاید verselle باشد اما مسلماً uni (یعنی متحد) نیست و این باب شد.

ر. ل. چه وقت باید یک نتیجه را چاپ کرد؟

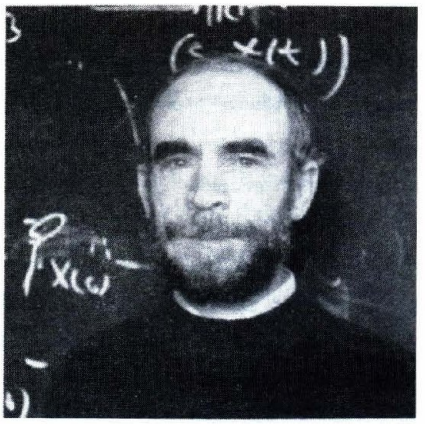
ا. د. هر وقت فکر کردی که چیزی که می‌خواهی بنویسی ۱۰ تا خواننده خواهد داشت.

ر. ل. در حال حاضر، به‌نظر تو، میانگین احتمال خوانده شدن یک مقاله چقدر است؟

ا. د. مسلماً تعداد مقالاتی که به‌یقین به‌اندازهٔ کافی پخته نیستند زیاده از حد است. در زمینهٔ باریکی که من کار می‌کنم، سالانه ۲۵ سانتیمتر (از ضخامت یک ردیف کتاب در کتابخانه) مطلب ریاضی نوشته می‌شود، از این مقدار من می‌توانم ۲٫۵ سانتیمتر را (در بهترین حالت) بخوانم. در کتابخانهٔ انستیتو هانری پوانکاره ۳ کیلومتر طبقه وجود دارد. اگر ریاضیدانی در سال ۳ سانتیمتر بخواند، در تمام طول عمرش ۲ متر خواهد خواند. اویلر ۱٫۵ یا ۲ متر [ریاضی] نوشته است . . .

1. Le Guichet 2. Tisseyre 3. Čech

1. Écalle 2. Malgrange



میخائیل گروموف
ترجمهٔ پدرام صفری

رِمی لانژوَن. حقیقت ریاضیات چیست؟ آیا مستقل از تمام علوم دیگر است؟ مستقل از جامعه؟ آیا نوعی زبان است؟

میخائیل گروموف. ما ریاضیدانان به‌خود می‌بالیم که چنان پرورش یافته‌ایم که صورتبندی دقیق یک مسأله را بر پاسخ دادن [به آن] مقدم بداریم. پس بر تمایلِ خود به حرف زدنِ عجولانه از نظرات محبوبِ دیرینه‌مان دربارهٔ «ماهیت ریاضیات» مهار می‌زنیم و هوشیارانه (یا با تظاهر به هوشیاری) به‌دنبال مدلهایی موجود از ریاضیات می‌گردیم که به ما امکان صورتبندی سؤالهای معنی‌دار را بدهند. رهیافت اصل موضوعی، که در اواخر قرن نوزدهم کشف شد، چنین امکانی را پیش می‌نهد. این را هیلبرت آیین (صورتگرایی) خود قرار داد، که در آن بدنهٔ ریاضیات به‌صورت «درخت»ی عظیم با رشد نمایی متصوّر می‌شود، «درختِ تمام فرمولهای ریاضی ممکن» که از اصول موضوع می‌روید.

حال سؤالها به‌آسانی در پی می‌آیند. هندسه و توپولوژی کلی این «درخت» چیست؟ «مقیاس بشری»، یعنی اندازهٔ شاخه‌هایِ در دسترسِ انسانهای ریاضیدان، کدام است؟ چه الگوهایی در این «درخت» نمایندهٔ چیزهایی هستند که آنها را «قضیه» می‌خوانیم؟

گودل خاطرنشان کرد که این «درخت» ناهمبند است و در نتیجه ممکن است شاخه‌هایی با پیچیدگی نامتناهی داشته باشد که هیچ مخلوق ریاضی بختی برای بقا در آن نداشته باشد. از آن پس بیشتر ریاضیدانان برنامهٔ (مدل) هیلبرت را نادیده گرفتند و مطالعهٔ «ساختار ریاضیات» اساساً تعطیل شد. و علاوه برکابوس «شاخه‌های گودلی»، صِرفِ رشدِ نماییِ «درخت» هیلبرت آن را حتی برای نمایش «ریاضیات زمینی» ناکافی می‌سازد. پس به مدل بهتری نیاز داریم.

ر. ل. انتخاب اینکه در میان تمام امکانها چه چیزی معنی‌دار است چگونه صورت می‌گیرد؟

م. گ. من از کلماتی چون «مناسب»، «جالب»، «مهم» و غیره، که به‌منظور کنترل اذهان مردم به کار برده می‌شوند، احساس ناراحتی می‌کنم. این کلمات برای توصیه نامه خوب‌اند (وکلاً برای گذران موفقیت‌آمیز زندگی یک ریاضیدان در جامعهٔ بشری)، اما اینجا (امیدوارم که) مسأله‌ای برای حل داشته باشیم، نه کمیته‌ای که متقاعدش کنیم.

بگذارید به صعود از درخت هیلبرت ادامه دهیم، جایی که خود را در محدودهٔ بسیار کوچکی، که همان «ریاضیات بشری» خودمان باشد، خواهیم یافت، [محدوده‌ای که] چون ابرکوچکی در انبوه شاخه‌های با رشد نمایی ناچیز می‌نماید. می‌پرسیم: اندازه، شکل و موقعیت این ابر چیست؟ چگونه برحسب زمان تغییر می‌کند؟ چرا با گرههای ویژه و معینی از این «درخت» قرابت دارد؟ چه قسمتهایی از این ابر را «بد» می‌خوانیم و ریاضیات «خوب» چیست؟

پاسخها شاید نهایتاً متکی به هندسهٔ ذاتی درخت باشند. مثلاً مفاهیم محبوبمان: عدد، فضا، تقارن، بینهایت، پیوستگی، خطی‌بودن و غیره، شاید با گرههایی از درخت متناظر باشند که شاخه‌های فوق‌العاده زیادی از آنها بیرون می‌زند. (این به گفتهٔ یودی خروشفسکی[1] با کشفیات اخیر در نظریهٔ مدلها مطابقت دارد.) اما از این گذشته، موقعیت ابر ممکن است به منطق جهان فیزیکی اطراف ما وابسته باشد و شکل ابرْ حاصل پیچیدگیِ ترکیبیاتی و دینامیکی مغز بشری باشد. (و با اکراه باید تأثیر عاملهای تاریخی و اجتماعی را بپذیریم، همچون روندهای پشتیبانی مالی از ریاضیات.)

پیش از اقدام به پاسخگویی، نیاز داریم راهی بیابیم برای بررسی موضعی این «ابر در درخت» و توصیف حتی‌المقدور موشکافانهٔ آن با زبانی مناسب. سپس قواعدی برای گسترش این ابر در زمان بجوییم. چه چیزی راهنمای ما در درخت هیلبرت است و ما را از فلاکتِ پیچیدگی[2] بی‌معنی و تصمیم‌ناپذیری[3] به دور نگه می‌دارد؟ آیا نظام خودِ درخت است یا تصویری از غریزهٔ بقا، نوعی حس هفتم، یا برنامه‌ای که به‌صورت محصول جانبی و تصادفی تکامل زیستی (فرهنگی) ظهور می‌کند؟ که می‌داند؟ این یک بررسی موشکافانه می‌طلبد و وسوسه می‌شویم که احساسات غریزیمان را دنبال کنیم، چشممان را ببندیم و دیدگاه افلاطونی را در آغوش بکشیم. اینجا، «جهانِ حقیقیِ ریاضیات واقعی» وجود دارد، که در آن مغز ما به‌عنوان یک ایستگاه رله بین ما و این جهان عمل می‌کند، از طریق نیرویی مرموز در «میدانِ معناشناختی»[4]. رؤیایی می‌نماید (و می‌توان آن را به یک داستان علمی-تخیلی درخشان تبدیل کرد)، اما قابل قبول نیست مگر آنکه آماده باشیم از تعقل دست بکشیم. (اما تعصب دینی در مورد اعتقاد افلاطونی به حقیقتِ مطلق و هماهنگی درونیِ ریاضیات، پیش‌نیاز موفقیت در کشف و اثبات قضایای درخشان است. خلاقیت از بی‌منطقی همان‌قدر نیرو می‌گیرد که از زاد و ولد.

ر. ل. نظرتان دربارهٔ محکهای زیبایی‌شناسی در ریاضیات چیست؟

م. گ. اگر به‌خاطر احساس مثبتی نسبت به ریاضیات نبود از همان ابتدا ریاضیدان نمی‌شدیم. این را «زیبایی‌شناسی» بنامید یا «عشق اخلاقی به حقیقت» یا هر نام (البته اصیل!) دیگری. این توضیح واضحات است، بازی صِرف با لغات، که آنقدر ارزش ندارد که به زبان آورده شود. و کجا [می‌توان] شاهدی بنیادی برای تأثیر زیبایی‌شناسی بر ریاضیات یافت؟ شاید در آینده؛ تصور کنید که ۲۰ میلیون سال دیگر اَخلاف هوشمندی از گونه‌های امروزی را ملاقات کنید که از موهبت درک فطری زیبایی‌شناسی برخوردار شده باشند. ظاهراً برخی پرندگان از این لحاظ از انسانها سبقت می‌گیرند، مثلاً طاووس (ماده) و مطمئناً پرنده‌های آلاچیق[5] که نوع نرِ آنها «آشیانه‌ها»ی مفصلی ساخته و تزئین می‌کنند که اختصاصاً برای جلب ماده‌ها در فصل جفت‌گیری است. اگر اَخلاف طاووسها (دست کم آنان که به ریاضیات قدری می‌نهند) میل خاصی به الگوهای هندسی پیچیده از خود نشان دهند (مثلاً به کاشی‌کاریهای نامتناوب فکر کنید) مشابه (؟) احساسی که به طاووس‌دوستان

1. Udi Hrushovski 2. complexity 3. undecidability
4. semantic field 5. bowerbirds

با مشاهدهٔ دمهای رنگارنگ اجدادشان دست می‌داد، «ایدهٔ زیبایی‌شناسی» پشتوانهٔ قابل ملاحظه‌ای خواهد یافت. و اگر انتظار برای ظهور طاووسها و پرنده‌های عاقل غیرعملی به‌نظر می‌رسد، دربارهٔ نظام مغز خودمان بیشتر فراگیریم و ببینیم که آیا «مرکز زیبایی‌شناسی» (اگر اصلاً چنین چیزی موجود باشد) به «مرکز ریاضیات» متصل است [یا نه].

ر. ل. انگیزشهای بیرونی چه‌طور؟

م. گ. «چشم ذهن» ما با نقاط کوری پوشیده شده است. نگاه از بیرون به شفافیت بینش ما کمک می‌کند.

ر. ل. آیا مثالهایی از مسیرهایی که فراموش شده‌اند دارید؟

م. گ. در هر نقطهٔ درخت هیلبرت تعدادی نمایی (به‌عنوان تابعی از طول) راه برای انتخاب داریم، ولی غالباً احساس می‌کنیم «جایی برای رفتن نیست». شاید به خاطر این باشد که اتفاقاً در قعر «چاه»ی موضعی ایستاده‌ایم (با تجسم هندسی مناسبی از درخت) یا به‌خاطر تطابق مسیرهای بالقوه با نقاط کور ذهنمان. احتمالاً بینهایت موقعیت را از دست می‌دهیم و فقط وقتی از آن آگاه می‌شویم که شخص دیگری آن را به ما گوشزد کند. یک مثال، نظریهٔ اطلاعات شانون[1] است. ما نسبتاً با تأخیر به روند تکوین نظریهٔ یانگ‌ـمیلز[2] پیوستیم، نظریهٔ زایبرگ‌ـویتن[3] از نظرمان دور ماند و از فیزیکدانان در زمینهٔ میدانهای همدیس و ریسمان عقب هستیم. در مبحث پرهیجان کامپیوترهای کوانتومی و DNA مشارکت نداریم.

ر. ل. چرا بعضی از ریاضیکاران کم‌کم از آن‌چه ریاضیات «محض» نیست منزجر می‌شوند؟

م. گ. پیروی از قول سقراط دردآور است: از هرچه نمی‌دانی به تمام و کمال آگاه باش.

ر. ل. بسیاری از مردم بر این گمان‌اند که دانش در ریاضیات به کمال رسیده است ...

م. گ. دقیقاً. دربارهٔ آنچه نمی‌دانید کمتر می‌یابید ... مرزها به نوعی کندتر از درون رشد می‌کنند.

ر. ل. دستگی دارد، اگر در یک فضای هذلولوی باشید ...

م. گ. مغز هر ریاضیدان تکه‌ای از «ابر در درخت»مان را به‌همراه دارد، ابرِ شخصیِ کوچکی دقیقاً همانجاکه سیناپس‌هایمان با درخت هیلبرت تماس می‌یابند. این ابرهای کوچک ممکن است هندسهٔ فرکتالی و در نتیجه مرزهای نسبتاً بزرگ داشته باشند. در این مرحله گفتنش سخت است ولی شاید بتوان آن را با حرکات بشر قیاس کرد که در آن سیستم نورونی ما، آن‌گونه که آزمایشها نشان می‌دهند، با داشتن درجهٔ آزادی بسیار از خیلی از مسیرها اجتناب می‌کند. این شاید راهبرد ریاضی مغز ماهم باشد، که مثلاً باعث تساوی $P = NP$ در ریاضیاتِ روزمره می‌شود. ما اساساً مسائلمان را با همان سرعتی حل می‌کنیم که بیانشان می‌کنیم. احیاناً دو هزار مغز-ساعت برای بیان قضیهٔ فرما صرف شده است و فقط لحظه‌ای (در مقایسه با $\exp$ ۲۰۰۰) برای حل آن، حداکثر 10^5 مغز-ساعت. (درواقع باید طول اثبات را مقایسه کرد با زمانی که برای یافتن آن لازم است). شاید کوتاهترین اثباتِ [قضیه] فرما با واحدهای معقول، از مرتبهٔ لگاریتم زمان صرف‌شده برای جستجوی اثبات باشد. این «تساوی عملی $P = NP$» در تناقض آشکار با شهود ریاضی ماست که انتظار داریم NP خیلی با P فاصله داشته باشد. این شکافی بنیادین در درک ماست ــ اگر درکی باشد ــ از اینکه ریاضیات چگونه کار می‌کند. ما علاوه بر فکر محض، به آزمایشهای زیست‌شناختی، روان‌شناختی و/یا رایانه‌ای نیاز داریم. اما ما به‌عنوان یک جامعه، از چنین مسائلی از ترس آلودگی به فلسفه، سرباز می‌زنیم. ما بسیار مفتخریم از اینکه دربارهٔ چیزی صحبت کنیم که ۱۰۰٪ [آن را] نمی‌فهمیم ولی شاید باید در برخی مواقع از دانشمندان [علوم تجربی] تقلید کرده سعی کنیم با دید ۵٪ برانیم. نمی‌توانیم همه‌چیز را به تمامی بدانیم، ولی این دلیلی برای در خانه ماندن نیست.

ر. ل. برخی افراد تمام عمرشان در یک مبحث کار می‌کنند ...

م. گ. حتی بهترین اذهان ممکن است با دنبال کردن مسیرهای ریاضی تا عمق، به‌محدودیت دید دچار شوند، چه یک مبحث باشد چه یک دوجین. کلاین به برنساید و فروبنیوس حمله می‌کرد و زیگل، لنگ[1] را به سطحی‌نگری متهم. اما بعضی مواقع وسیع بودن بیشتر صَرف می‌کند تا عمیق بودن و به سبب گسترش‌نمایی درخت هیلبرت هیچ‌کس نمی‌تواند هر دو خصیصه را داشته باشد.

ر. ل. نقش وقایع غیرمنتظره در ریاضیات در قیاس با نقش برنامه [درزی].

م. گ. واقعهٔ غیرمنتظره بیش از چیزی که انتظارش می‌رود مورد انتظار ماست. من این مطلب را که بعضی اوقات امور دقیقاً آن‌چنان اتفاق افتاده‌اند که انتظارشان می‌رفته است جذابتر می‌یابم (قضیهٔ فرما را ببینید). «معجزه» است؛ چگونه ممکن است؟ برنامه‌هایی مثل آنچه در هندسهٔ جبری یا توپولوژی جبری وجود دارد و عمدتاً از کار سر[2] نشأت می‌گیرد به‌طرز جالب توجهی موفق بوده‌اند، و این یک «معجزه» است.

ما برای فهم چشم‌انداز ریاضیات هنوز خوب مهیا نشده‌ایم، شاید فاقد زبان مناسب هستیم. زبانی داریم که با آن می‌توانیم هر چیزی را بیان کنیم، اما شاید کارا نباشد. مثل نظریهٔ خورشیدمرکزی که برای توصیف منظومهٔ شمسی کاراست، نه به دلایل ریاضیاتی بلکه به دلایل روان‌شناختی. از نظر محاسباتی، این فقط کمی بهتر از نظریهٔ بطلمیوسی است. با این وصف، تغییر منطق به دانشمندان این امکان را داده است که دیدگاه متفاوتی نسبت به واقعیت پیدا کنند.

ر. ل. سؤال جنبی: آیا رابطه‌ای میان زبان، گروهی که به آن تعلق دارید، و روش ریاضی‌ورزی شما هست؟

م. گ. البته که هست، ولی در اینجا ما نه دربارهٔ زبان(های) ریاضی، که دربارهٔ زبانی برای توصیف ریاضیات صحبت می‌کنیم، چیزی که باید مکمل منطق ریاضی و صورتگرایی هیلبرت باشد. مثلاً، معنیِ دقیق «شباهت» میان دو قضیه (اثبات) یا احساس سربالایی رفتنِ یک برهان چیست؟ ما هنوز حتی یک سیستم بطلمیوسی هم نداریم. شاید بازی با رایانه و تولید «ریاضیات مصنوعی» به ما بیاموزد که چیز واقعی چیست (همان‌طور که برخی این کار را با حیات مصنوعی می‌کنند).

ر. ل. بازیهای کانوی[3] را به یاد بیاورید.

م. گ. سعی کنید کاری بسیار متفاوت با آنچه اذهان ما انجام می‌دهد انجام دهید، برخی قواعد را استخراج کنید و ببینید وقتی آنها را به‌طور ماشینی بپرورانید چه می‌شود، متوجه‌اید که. منظور، فاصله گرفتن از شهود است.

ر. ل. نکتهٔ دوم: ریاضیات در طول نیم قرن اخیر

1. Shannon 2. Yang-Mills 3. Seiberg-Witten

1. Lang 2. Serre 3. Conway

م. گ. همان‌طور که همه می‌دانند مقدار زیادی مطلب ریاضی پرورانده شد، و بیش از پیش بر ساختار تأکید شد. از سوی دیگر در یک مجلهٔ دههٔ چهل تقریباً دربارهٔ همه چیز می‌توانید بخوانید، در مجلات امروزی دیگر چنین نیست. در دههٔ چهل می‌توانستید ۵۰٪ مطالبِ منتشره را بخوانید. ریاضیات بسیار تخصصی‌تر شد و این پیامدهای خوب و بد دارد. اکنون غیرحرفه‌ای‌ها بسیار اندک‌اند، همچنان که در ورزش، و نمی‌دانم که مردم عموماً در ورزش پیشرفت کرده‌اند یا نه. به همین ترتیب اینکه آیا بشر در کل برای فهم جهان مهیاتر شده است روشن نیست. یکی از ریاضیدانانِ بسیار حرفه‌ای هم‌عصر ما را بردارید و او را در محیط فکری جدیدی بگذارید. آیا او به خوبیِ افراد دوره‌های قبل عمل خواهد کرد؟

در واقع تمامی تمدنِ بسیار تخصصی‌شدهٔ ما مصداق این مطلب است. تصور کنید ما را به محیط اجدادمان برگردانند.

ر. ل. کافی است پژوهشگر جوانی را به کشور دیگری منتقل کنید، برخی [با محیط جدید] سازگار می‌شوند و برخی نه، و آنان که چنین تجربه‌ای را با موفقیت می‌گذرانند غالباً همانهایی هستند که بعداً موفق می‌شوند.

م. گ. کاملاً، و اگر به ریاضیات برگردیم، گمان می‌کنم این حرف با این گفته آدامار توافق دارد: «ایده‌های ساده در پایان کار ظهور می‌کنند». طول اثباتهای ما غالباً به‌خاطر تاریخچهٔ آنهاست و نظام تخصصی کنونی ریاضیات ما را از «نگرش افقی»، و لذا میان بر زدن، باز می‌دارد.

ر. ل. گرچه وقتی نتیجه‌ای را توضیح می‌دهید راه میان‌بر گاهی زیادی کوتاه است.

م. گ. نکتهٔ اصلی این نیست که آنها کوتاهترند، بلکه این است که جهت را تغییر می‌دهند. این محتاج انواع متفاوتی از تواناییهاست.

ر. ل. پس شما بین تواناییِ تشخیص جهتِ درست و تواناییِ یافتن میان‌برها و بازآرایی دانسته‌ها در وهلهٔ بعد تمیز قائل هستید.

م. گ. و این تواناییها نیاز به انواع متفاوتی از آمادگی دارد. همچنین، وقتی ریاضی می‌ورزید مهارتهایتان را در نوع خاصی از فعالیتها بیشتر می‌کنید، حال آنکه در آغاز استعدادهایتان تقریباً هم‌سطح بوده است. مثلاً اگر تمام عمرتان به هندسهٔ ترکیبی[1] بپردازید توانایی شما در کار با اعداد محو می‌شود. برای جبران این امر به تنوع بیشتر در آموزش احتیاج داریم.

ر. ل. یعنی تنوع فکری را حفظ کنیم؟

م. گ. بله، این امری حیاتی برای بشریت است: تنوع روشهای تفکر، در علوم انسانی و نیز در ریاضیات (رجوع کنید به کتاب دایسن[2] با عنوان تفاوت و تنوع).

ر. ل. نکات دیگری دربارهٔ ۵۰ سال گذشته [دارید]؟

م. گ. این به نوعی یک سؤال تخصصی است؛ چیزهای زیادی اتفاق می‌افتند، نمی‌دانم کدام را انتخاب کنم.

ر. ل. فکر نمی‌کنید بخواهید موضوعی را انتخاب کنید؟

م. گ. خیلی زیادند ...

ر. ل. نکتهٔ سوم: جامعه از ریاضیدانان چه توقعی می‌تواند داشته باشد؟

م. گ. سؤال دوپهلویی‌ست ــ منظورتان از لغت فرانسوی «droit» چیست؛ معنای اخلاقی آن مورد نظر است [یا] معنای حقوقی؟

ر. ل. معنای اخلاقی را در نظر بگیرید.

م. گ. احتمالاً کارکردِ عمدهٔ ما Kulturträgership [انتقال فرهنگ] است. یعنی ما جزئی از فرهنگ هستیم، آن را حمل می‌کنیم، جذب می‌کنیم و تحویل می‌دهیم. این نقش عمدهٔ ماست. البته جنبه‌های کاربردی ریاضیات هم هست ــ که من خیلی زیاد طرفدار آنم ــ اما مهمتر از آن، نوع خاصِ فرهنگ ماست که در شاخه‌های دیگرِ علوم نیست: منطق، دقت، نحوه نظام بخشیدن به اشیاء ... این چیزی است که جامعه از ما انتظار دارد، خصوصاً آموزش ریاضی را از ما می‌خواهد. و اکنون ریاضیدانان کاملاً این [انتظار] را بر نمی‌آورند، آموزش جامعه در کل.

ر. ل. ما می‌خواهیم در این جهت کاری بکنیم، و در عوض کار دیگری که ساده‌تر است انجام می‌دهیم: آموزش کارهای مکانیکی با ماشین به افراد.

م. گ. رایانه جداً چشم‌انداز آموزشی را تغییر می‌دهد و نیازمند مطالعه‌ای ویژه از زاویهٔ روان‌شناسی کودک، ساختار اجتماعی و غیره است. اما وظایف اخلاقی ما پابرجا می‌مانند؛ و در تلاش برای آموزش ریاضی به یک غیرخودی، مثلاً به رفیق دانشمندمان، باید آمادهٔ ارزیابی انتقادی از آنچه می‌کنیم و اینکه چرا می‌کنیم باشیم. حقیقتِ تلخ آن است که برنامه‌ریزی اجتماعی بسیار تعیین‌کننده است، «استاد راهنمایم به من گفت ــ این کار را بکن!». متأسفانه ما خودمان به‌ندرت به این [نکته] توجه داریم.

ر. ل. در بحث مرجعیت [علمی]، به موضوعِ «ریش‌سفیدان» که ذکرشان رفت برمی‌گردیم.

م. گ. ما، که میمونهایی اجتماعی هستیم، تمایلات و گرایشهایمان خواهی نخواهی تحت تأثیر مُد روز و سلسله مراتب شکل می‌گیرند. نمی‌توانیم اذهانمان را به اختیار از سلطهٔ افرادِ بانفوذ آزاد کنیم ولی می‌توانیم بتهای قدیمی را با رو در رو کردن آنها با بتهایِ خارج از ریاضیات به زیر بکشیم. در عمل نیازمند روابط متقابل با مخاطبان غیرریاضی هستیم.

ر. ل. ابتدا به افرادی نیاز داریم که این کار را بکنند.

م. گ. می‌شود موضوع مشخصی را در نظر بگیریم و دو گروه افراد را بیاوریم که یک گروه معتقد باشند ریاضیات برای آن موضوع خاص مفید است و گروه دیگر معتقد باشند که بیفایده است. مثلاً ریاضیات و ژنتیک را در نظر بگیرید، افراد را به دو طرف «بیفایده» و «مفید» تقسیم کنید و مناظره‌ای (با آمادگی کافی) ترتیب دهید. من به نحوهٔ سازمان‌دهی آن فکر کردم و دریافتم که این کارِ من نیست. به آدمهایی که علاقه‌مند به این گونه فعالیتها باشند احتیاج است.

ر. ل. و مشکل انتشار این مناظره هم هست، اگر این کار بشود به این خاطر است که می‌خواهید اندیشه‌هایی از آن تراوش کند، و منشأ اثری باشد.

م. گ. فکر می‌کنم خیلی مفید خواهد بود چون عموم مردم درمی‌یابند که مسائلی هست.

ر. ل. باید برای عموم مردم قابل فهم باشد.

م. گ. دقیقاً؛ شاید در قالب مناظره جذابتر شود. مثلاً به یاد بیاورید آرنولد چگونه در گردهمایی اخیر انجمن ریاضی فرانسه سخنرانی کرد. هرچه گفت به نوعی مناظره بود و به همین خاطر خیلی راحت می‌شد آن را دنبال کرد. حواستان همواره متوجه سخنرانی بود (مانند مسابقهٔ بین تارتاگلیا[1] و فراری[2] در ایتالیای دورهٔ رنسانس).

ر. ل. پس فکر می‌کنید چنین مباحثهٔ جدلی علاقهٔ عموم را برانگیزد؟

---

۱. هندسهٔ اقلیدسی (در برابر هندسهٔ تحلیلی).م.

2. Dyson

1. Tartaglia 2. Ferrari

م. گ. جامعه باید بداند که ما ریاضیدانانْ زنده هستیم. متأسفانه بسیاری از روشنفکران فرانسه که به علوم انسانی مشغول‌اند می‌پندارند که ما کودن و ملال آوریم.

ر. ل. به این وضوح هم نیست. من فرصتی برای کار با افرادی که در علوم انسانی فعالیت می‌کنند داشتم و آمیزه‌ای احساس کردم از آن چه می‌گویید و احترامی مبالغه‌آمیز، وقتی کسی استدلالی را در [لفافی از] ریاضیات می‌پیچد [آن استدلال] جدی به‌نظر می‌رسد و آنها جرأت حمله به آن را ندارند.

م. گ. چه ریاضیاتِ تقلبی و مزاحمی!

ر. ل. البته، و ما حداقل باید مداوماً سعی کنیم آن را اصلاح و به مسیر دیگری هدایت کنیم ... این به آن معنی نیست که هدفی نهایی وجود دارد که روشن است، اما دست‌کم می‌توانیم در جهت بهبود بکوشیم.

م. گ. ما ریاضیدانان نباید فقط بر ریاضیات به‌طور اخص تأکید کنیم، بلکه می‌توانیم مروج مناظره‌ای جدی با جامعه باشیم، تفکری در سطح عالی روشنفکری. تفکر جدی، که ریاضیات جزئی از آن است.

ر. ل. اخیراً پرس و جویی خیلی خودمانی کردم؛ از بعضی کسانی که درسشان را هفت–هشت–ده سال قبل تمام کرده بودند پرسیدم از آنچه در ریاضیاتِ دانشگاه یا مدرسه آموخته‌اند چه به یاد می‌آورند، جوابِ نُه از دَهشان این بود: هیچ! این [جواب] کارِ اشخاص مرتبط با آموزش را در معرض تردید قرار می‌دهد، دوم اینکه آیا این جوابْ درست است؟ من شخصاً فکر می‌کنم که نه؛ با جستجویی دقیقتر باید آنچه را باقی مانده بیرون کشید، ولی چرا چنین واکنش اولیهٔ منفی‌ای؟ بخشی از مشکل چیزی است که تدریس می‌کنیم.

م. گ. من معتقدم مشکل دیگری هم در مدارس هست.

ر. ل. [حال بپردازیم به] فعالیتتان: کجا، کی و چطور کار می‌کنید؟

م. گ. وقتی جوان بودم می‌توانستم تمام روزکارکنم. افسوس، دیگر نمی‌توانم!

ر. ل. من عکسش را گمان می‌کردم؛ وقتی شروع کردم خیلی سخت بود که واقعاً آغاز به کار کنم، بعداً بازده با [افزایش] تجربه افزایش یافت.

م. گ. آیا جسمت هنوز در برابر تفکر جدی مقاومت نمی‌کند؟

ر. ل. گاهی اوقات، ولی این افزایش بازده در سنین بین ۲۰ و ۳۰ را بیشتر به یاد می‌آورم.

م. گ. گمان من دقیقاً برعکس نیست. اول اینکه وضعیت دانشجو با وضعیت پژوهشگر متفاوت است. بگذارید به‌خاطر بیاروم ... از لحظه‌ای که شروع کردم، از سن ۲۰ سالگی، به نوع احساس تنزل می‌کردم.

ر. ل. شاید چون با سرعت خیلی زیادی شروع کردید؟

م. گ. البته در ابتدا کار خیلی فشرده بود.

ر. ل. روزی ۱۰ ساعت؟

م. گ. گاهی بیشتر.

ر. ل. چطور [کار می‌کنید]؟ آیا به کمی تمرکز، محیط ساکت، مکان مشخصی احتیاج دارید؟

م. گ. مسلماً سکوت.

ر. ل. یا می‌توانید در مترو، در حال راه رفتن ...، کار کنید؟

م. گ. آن هم بله، ولی برای مقاصد مختلف به چیزهای مختلفی نیاز دارید. گاهی لازم دارید که بنشینید و بنویسید. به هر حال من سر و صدا را دوست ندارم.

ر. ل. آیا نوشتن برای شما لذت‌بخش است؟

م. گ. این با [گذشت] زمان تغییر کرده است، وقتی جوان بودم از آن نفرت داشتم، حال دارم به آن علاقه پیدا می‌کنم. حس می‌کنم چیزهای کمتر و کمتری برای گفتن دارم ولی می‌توانم آن را بهتر بیان کنم زیرا می‌دانم چطور بیانش کنم.

ر. ل. آیا اصطلاح جدیدی ابداع کرده‌اید؟

م. گ. بله، فکر می‌کنم. مطمئناً چندتایی ابداع کرده‌ام. سؤال این است که چه تعداد از آنها مقبولیت یافته است. من از پاسخ دادن به این سؤال اکراه دارم، چون ممکن است برآوردم مبالغه‌آمیز باشد.

ر. ل. من به «زبان‌شناسی» هم علاقه دارم، وقتی اصطلاحی وضع می‌کنید، [آن اصطلاح] از کجا می‌آید؟

م. گ. نه، شما لازم نیست کلمات را اختراع کنید، فقط سعی می‌کنید واژگان مناسب را بیابید، همان کاری که هر کس دیگری می‌کند.

ر. ل. برخی افراد اصلاً اهمیتی [به اصطلاح] نمی‌دهند و برخی سعی می‌کنند ایدهٔ آنچه را که می‌خواهند بگویند در یک لغت خلاصه کنند.

م. گ. انتخاب لغت مناسبی که تداعیهای جالبی به همراه بیاورد و ذهنتان را با آن‌چه به شما گفته می‌شود هماهنگ کند فرهنگ ریاضی می‌خواهد. به همین دلیل بورباکی از این لحاظ خیلی خوب است و اصطلاحات ریاضیدانهای جوان غالباً خام و گمراه‌کننده است. (مثالهایی دارم ولی احتیاج به دشمن ندارم.) همچنین وقتی زمینه‌های کاری را به هم می‌پیوندید دقت در واژگان سرنوشت‌ساز است. کافی است ۱۰ دقیقه با اُفِر گابر[1] صحبت کنید تا بفهمید چقدر لهجهٔ شما دهاتی است!

ر. ل. چه وقت فکر می‌کنید که نتیجه‌ای باید چاپ شود؟

م. گ. وقتی جوان بودم می‌توانستم سالهای زیادی برای رسیدن به نتیجهٔ نهایی تلاش کنم، این گاهی اوقات اتفاق می‌افتاد. حالا چنین انتظاری ندارم و خیلی سریعتر چاپ می‌کنم.

ر. ل. معمولاً مردم دقیقاً به خلاف این عمل می‌کنند، جوانان نیاز دارند سطری به کارنامه‌شان بیفزایند، و وقتی پیرتر می‌شوند سطح توقعشان بالاتر می‌رود.

م. گ. عامل دیگری هم هست. وقتی جوان بودم کاری می‌کردم و ۱۰ سال بعد هرچه بود به خاطر می‌آوردم، بنابراین زحمت نوشتن را به خود نمی‌دادم. اکنون اگر نوشتن را به تأخیر بیندازم ممکن است محتوا را فراموش کنم. می‌توانم به راحتی آنچه را در بیست سالگی انجام می‌دادم به یاد بیاورم، ولی برای به‌یاد آوردن آنچه ۳ سال قبل می‌کردم نیاز به تلاش دارم.

ر. ل. پس بسیار بیش از پیش نوعی فوریت احساس می‌کنید؟

م. گ. کاملاً، چون وقتی جوان هستید زمان نامحدودی در پیش دارید.

ر. ل. به هر حال محدود است.

م. گ. شما به این نحو فکر نمی‌کنید. البته زمانْ زمانِ مطلق نیست، زمانِ درونی است که سریعتر از زمان واقعی تحلیل می‌رود، چون مقدار اطلاعاتی که در مغزتان پردازش می‌کنید با سن کاهش می‌یابد.

ر. ل. آیا شما دانشجو دارید؟

م. گ. نه خیلی. ۵ یا ۶، مطمئناً کمتر از ۱۰ نفر در مجموع.

1. Ofer Gabber

ر. ل. خیلی بد نیست! بعضیها مانند ماشین فارغ‌التحصیل تولید می‌کنند، ولی اگر شما دانشجویانی تربیت کنید که بعدها راه خاص خودشان را در پیش بگیرند [موضوع] تفاوت می‌کند (افرادی چون پانسو[1] در نظرم هستند) ...

م. گ. پانسو و لابوری[2] از همه بهترند.

ر. ل. یادم می‌آید که یک دانشجوی مشترک هم داشتیم: زغیب[3] ...

م. گ. تجربهٔ خوبی بود.

ر. ل. احساس می‌کنید که دنباله‌رو چه کسی هستید؟ اگر اجازه داشته باشید نام دو یا سه ریاضیدان را ذکر کنید چه کسانی را برمی‌گزینید؟

م. گ. افراد دو دسته‌اند، آنها که در اطراف من بوده‌اند و نویسندگان مقالاتی که شخصاً با آنها آشنایی نداشته‌ام.

ر. ل. بگذارید با اطرافیان آغاز کنیم.

م. گ. در لنینگراد، استاد من رُخلین[4] بود. از بوریس وِنکُف[5] (جبردان) هم می‌آموختم ، اطلاعات بی‌حد و حصری داشت. وقتی برایم توضیح داد که چگونه قضیهٔ هلی[6] از دنبالهٔ طیفی لوری[7] نتیجه می‌شود تحت تأثیر قرارگرفتم [و] به این ترتیب در جرگهٔ طرفداران پر و پا قرص توپولوژی جبری درآمدم. و بعدها از یورا بوراگو[8] و تولیا وِرشیک[9] چیزهایی آموختم. سپس تحت تأثیر کاژدان[10] و مارگولیس[11] بودم، که خیلی ملاقاتشان نمی‌کردم، و همین‌طور غیرمستقیم [تحت تأثیر] آرنولد. ایده‌های او [که] از طریق افراد دیگر [به من می‌رسید] برایم مهم بود، به‌خصوص پنداره‌هایش در هندسهٔ همتافته[12].

ر. ل. آرنولد خیلی از شما مسنتر است؟

م. گ. نه، شاید پنج سال، ولی او در مسکو بود. مقالاتی هم بودند، و آغاز زندگی حرفه‌ای من با [مطالعهٔ] کارهای اسمیل[13]، نَش[14]، هِرش[15] و هِفلیگر[16] شکل گرفت. نَش قهرمان من بود. معتقدم که هنوز تنها کسی هستم که مقاله‌هایش را با دقت می‌خوانم.

ر. ل. از نظر شما ریاضیدانان مهم، به‌ویژه در دورهٔ ما، چه کسانی بوده‌اند؟

م. گ. فکر نمی‌کنم کار خوبی باشد که اسم آنها را ذکر کنیم، چون ممکن است کسی را فراموش کنم.

ر. ل. خوب، بیایید ۲۰ نفر، ۱۰۰ نفر را نام ببریم.

م. گ. همهٔ ما در مورد بیشتر اسامی توافق داریم.

ر. ل. این راهی برای فرار از سؤال است ...

م. گ. بله.

ر. ل. آیا با شکست مواجه شده‌اید؟

م. گ. مکرراً. مسائل بسیاری هستند که به آنها دست می‌یازید و نمی‌توانید حلشان کنید. گاهی کس دیگری آن را حل می‌کند.

ر. ل. و پیامد چنین شکستی چه بود؟ آن حوزه را ترک می‌کردید یا برخی اطلاعات را برای استفادهٔ بعدی حفظ می‌کردید؟

م. گ. نه، برخی مسائل هستند که مدت زیادی به آنها فکر کردم و نتوانستم حلشان کنم و دیگر به آنها فکر نمی‌کنم.

ر. ل. می‌خواهید نمونه‌ای ذکر کنید؟

م. گ. سالهای زیادی به قضایایِ از نوع رمزی[17] فکر کردم. اولین صورت قضیهٔ رمزی (که در سال اول دانشگاه آن را یاد گرفتم) حاکی است که از میان شش نفر، دست‌کم سه نفر دو به دو با هم آشنا هستند یا دو به دو با هم بیگانه‌اند. در آن هنگام خیلی افتخار می‌کردم که آن را تعمیم داده‌ام تا قضیهٔ رمزی کلی را به‌دست آورم، نتیجه‌ای که البته معلوم شده بود، و در همان زمان دستاورد دُورِتسکی[1] دربارهٔ مجموعه‌های محدب منتشر شده بود، و همین‌طور قضیهٔ وَن دِروارِدن[2] را می‌دانستم (پیدا کردن تصاعدهای حسابی در مجموعه‌هایی از یک افراز اعداد). وقتی با این سه گزاره مواجه می‌شوید، در این قالب مشترک در می‌آیند که می‌خواهید اشتراکی ناتهی باشد. سعی کردم از توپولوژی جبری استفاده کنم و این به‌طور جزئی (و فقط به‌طور جزئی!) برای [قضیهٔ] دُورِتسکی کارایی داشت ولی نه برای حالات دیگر، که در آنها ظاهراً مجموعه‌ها به این دلیل یکدیگر را قطع می‌کنند که اندازه‌شان بزرگ است (و نه «محتوای هومولوژیک»شان). سرانجام حدود ۲۰ سال پیش، این توسط فورستنبرگ[3] در اثبات «ارگودیک»اش از قضیهٔ سمردی[4] به‌صورت یک مفهوم درآمد و ایده‌هایش از آن زمان تاکنون بسیار توسعه یافته است. من هنوز هم می‌پندارم که ساختار هندسی نهفته‌ای آنجا هست، نه فقط شمارش صِرف، ولی ۱۰ سال قبل، پس از ۲۵ سال شکست، دست از فکرکردن در این باره برداشتم.

ر. ل. چطور تعیین می‌کنید که چه چیز برایتان مهم است؟

م. گ. بیشتر عمرم فقط از احساسم پیروی کرده‌ام. اکنون سعی می‌کنم به‌سوی یادگیریِ (متأسفانه سطحیِ) ایده‌هایی از علوم [طبیعی] بروم که بینشی متفاوت با آنچه از اثبات قضایا به‌دست می‌آید، به آدم می‌دهند.

ر. ل. همین‌طور ایده‌های شهودبرانگیز ...

م. گ. بلکه یادگیری.

ر. ل. فکر می‌کنم حتی در کاری که شما می‌کنید، تغییر رشته پس از چهار پنج سال تحقیق در یک موضوع، هنگامی که ممکن است شروع به تکرار کارهای قبلی کنید، نوعی ریسک است، ولی پس از دو سه سال شاید چیزی تولید کنید که از کار فرضیتان در حوزهٔ [تحقیقی] اولتان نوتر باشد.

م. گ. مثل این نیست که برای رفتن به میهمانی‌ای دوش بگیرید که ممکن است لغو شود، و ریسکِ پاکیزه شدن به‌خاطر هیچ را بپذیرید؟ من یادگیری و خلق ایده‌های نو را از هم جدا نمی‌کنم. «نو» موضوع را هیجان‌انگیز می‌کند.

ر. ل. من در کتابی از کوین[5] دربارهٔ نوآوری خواندم که صِرف وارد کردن ایده‌ای از یک حوزه به حوزهٔ دیگر را باید گامی معنادار به حساب آورد.

م. گ. نکتهٔ درستی است. درضمن، بخشی اساسی از ریاضی‌ورزی، بازآرایی اذهان خودمان است. آن‌چه از شما ریاضیدان می‌سازد ذهن شماست، نه فقط قضایای اثبات‌شده. پس ما هم یاد می‌گیریم و هم سعی می‌کنیم قضایایی ثابت کنیم؛ هردوی این کارها را می‌کنیم تا ذهنمان را تعالی بخشیم. مطمئناً قضیه‌ای خوب نمایانگر ذهنی درخشان است، ولی از نظر اجتماعی، ذهن عالی را بسیاری، نه فقط ریاضیدانان، تشخیص می‌دهند، حتی اگر میوهٔ رسیدهٔ این ذهن از دسترسشان دور بماند. بنابراین ارزیابیِ «ریاضی‌ورزی» (نه فقط دانش ریاضی) بسته به منظرمان شدیداً تفاوت می‌کند.

ر. ل. البته درس و تمرین به تنهایی کافی نیست.

م. گ. مطمئناً، اما اگر [چیزی] را بخوانید و بیاموزید آن چیز از آن شما می‌شود، فقط آن را از بر نکرده‌اید؛ البته بهتر آن است که بتوانید کار قابل‌توجهی

1. Pansu 2. Laborie 3. Zeghib 4. Rochlin 5. Venkov 6. Helly 7. Leray spectral sequence 8. Yura Burago 9. Tolia Vershik 10. Kazhdan 11. Margulis 12. symplectic 13. Smale 14. Nash 15. Hirsh 16. Haefliger 17. Ramsay

1. Dvoretzky 2. Van der Waerden 3. Furstenberg 4. Semeredi 5. Kuhn

انجام دهید؛ و اگر ریاضیات را ترک کنید برحسب قضایا[یی که ثابت کرده‌اید] ارزیابی نمی‌شوید بلکه با معیارهای دیگری سنجیده می‌شوید که دستیابی به آنها حتی مشکلتر است.

ر. ل. من نظرم این است که این دشواری از نوع دیگری است و بستگی به اهمیت کاری که انجام می‌دهید دارد؛ به هر حال موافقم که ارتباط برقرارکردن با شخصی در زمینهٔ دیگر و پاسخ‌دادن به سؤالاتش، چالشی است؛ مهم نیست که پاسخ آن سالها قبل بر ریاضیدانان مکشوف شده باشد.

م. گ. سخت است عوامل درونی و بیرونی را از هم مجزا کنیم. در آغاز، به‌خصوص وقتی جوان هستید، یادگیری را آغاز می‌کنید چون یادگیری را دوست دارید، چون فکر می‌کنید قضیه‌هایی ثابت خواهید کرد، و این انگیزهٔ درست است.

ر. ل. نه فقط یادگیری، بلکه این چالش که با ایده‌هایتان گامی کوچك بردارید.

م. گ. وقتی خیلی جوان هستید شاید بلندپروازی‌هایی داشته باشید ولی کمابیش ساده‌لوحانه‌اند.

ر. ل. بله، ولی سعی خود را می‌کنید.

م. گ. اما اصولاً می‌خواهید که یاد بگیرید، دنیای نامتناهی علم در برابر شماست، البته فکر می‌کنید که شما هم می‌توانید [چیزی] عرضه کنید ...

ر. ل. منظورتان از جوان چیست، ۱۰ ساله؟ ۱۵ ساله؟

م. گ. بین ۱۰ تا ۲۰. اما آنچه رشد می‌یابد، که هم مثبت و هم منفی است، مشارکت شخصی شماست؛ و این امر خلوص بینش شما را تا حدی آلوده می‌کند. با این دیدگاه، یادگیریِ چیز نو خیلی خوب است چون کاری ندارید که با آن بکنید، برای شما دانش محض است. از نظر عاطفی درگیر نیستید و خیلی بیشتر یاد می‌گیرید. می‌توانید به گشاده ذهنیِ طبیعی خود بازگردید. اگر اصلاً چنین کاری نکنید درجا می‌زنید. ما از چیزهای نو لذت می‌بریم.

ر. ل. می‌بینید! از معیارهای زیباشناسانه استفاده می‌کنید!

م. گ. من [به اینها] می‌گویم عاطفی.

ر. ل. زمینه‌های خانوادگی شما چیست؟ چه چیزی برای شما تعیین‌کننده بوده است؟

م. گ. وقتی ۹ ساله بودم مادرم کتاب راده‌ماخر[1] و توپلیتس[2] (اعداد و اَشکال) را به من داد. نوشته کاملاً قابل توجهی است شامل نظریهٔ کانتور، هندسهٔ مقدماتی مثلثها و چیزهایی دربارهٔ اعداد اول. هرچند مطالب آن را زیاد نمی‌فهمیدم ولی برایم هیجان‌انگیز بود، خیلی خوب نوشته شده بود.

ر. ل. چه اهمیتی برای انتخابِ تعریف خوب، اصطلاحات خوب و نمادگذاری خوب قائل هستید؟

م. گ. اهمیت دارد، ولی اهمیتش در مقایسه با جوهر موضوع، ثانویه است.

ر. ل. ریاضیات و هنر، موسیقی، نقاشی، ...

م. گ. منظورتان چیست: مقایسه، روابط متقابل؟

ر. ل. هرچه [بفرمایید].

م. گ. البته ریاضیدانان در تعامل با هنر هستند.

ر. ل. من متوجه نوعی همبستگی بین بعضی رشته‌ها شده‌ام. [مثلاً از احساس] خودم [بگویم]، وقتی نقاشی از پیشرفت باز می‌ایستد، ریاضیات هم دچار ایستایی می‌شود.

1. Rademacher 2. Toeplitz

م. گ. این نظر شخصی است و من اطلاع کافی از هنر ندارم تا پاسخ بدهم، شاید ارزش مطالعه داشته باشد، شاید هم نه.

ر. ل. ریاضیات و رایانه، رابطه با آموزش.

م. گ. چقدر ریاضیات ممکن است تحت تأثیر ماشین دگرگون شود؟ قطعاً بی‌اندازه دگرگون خواهد شد. همین الان هم این اتفاق افتاده است. اکنون ریاضیاتِ مخلوطی وجود دارد که افراد شهودشان را بر پایهٔ مقدار زیادی آزمایش عددی بنا می‌کنند، مثل مکانیک آماری و آشوب.

ر. ل. نظرتان در این باره چیست؟

م. گ. عالی است! چیز نوی است و ممکن است ریاضیات فعلی را نابود کند، ولی این سرنوشت هر موجود زنده است که می‌میرد، و ریاضیات هم ممکن است بمیرد. نوع جدیدی از تفکر وجود خواهد داشت، احتمالاً کارامدتر، زیرا ابزاری اضافی را به خدمت خواهد گرفت. فکر می‌کنم که ما نهایتاً در گروههایی با رایانه‌ها کار خواهیم کرد و قضیه ثابت نخواهیم کرد؛ ما [در حال حاضر] بیش از حد به اثبات اتکا داریم. قضایای نیمه‌اثبات‌شده وجود خواهند داشت، و این نوع دیگری از بازی است. ولی شاید کاملاً عطش ریاضیمان را برای دانش فرو ننشاند، به هر حال بغرنج است.

ر. ل. درست است، چون به ماشین وابسته است، و ماشین ممکن است خطا کند.

م. گ. نه، این‌طور نیست، آن رایانه‌های شطرنج‌باز را در نظر بیاور. مطمئناً بهتر از هر کسی، شاید به استثنای یکی دو نفر در جهان، بازی می‌کنند، ولی هنوز می‌توانیم شطرنج بازی کنیم چون دوستش داریم.

ر. ل. درست.

م. گ. این [استفاده از رایانه] طرز تلقی از شطرنج را کاملاً دگرگون می‌کند. فکر نمی‌کنم شطرنج تا سی سال دیگر حضوری جدی داشته باشد. رایانه‌ها آن را بهتر انجام می‌دهند، پس جالب نیست. تصور کنید چه می‌شود اگر چنین اتفاقی برای ریاضیات بیفتد. اگر رایانه‌ها واقعاً آن را بهتر انجام دهند شاید نوع متفاوتی از ریاضیات داشته باشیم.

ر. ل. لِروی گورهان[1] [در کتابی] نوشت که بشر در طول قرون موفق شد فعالیتهایش را صورت خارجی بخشد، ابتدا ابزارهایی تولید کرد، سپس ماشینها را، تا انرژی به‌دست بیاورد، اکنون با استفاده از رایانه‌ها قسمتی از فعالیتهای مغز صورت عینی می‌یابد.

م. گ. در صورت بقای تمدن ما، رایانه‌ها در هرکار فکری محضی گوی سبقت را از ما خواهند ربود. چند سال طول خواهد کشید؟ ۱۰، ۲۰، ۵۰ یا ۱۰۰ سال؟ فکر می‌کنم کمتر از ۱۰۰ سال. ساختار جدیدی از زندگی ظهور خواهد کرد. مغز، همان‌طور که نیروی عضلانی امروزه خوار است، خوار خواهد شد. البته به کمک نیروی عضلانی می‌شود پول زیادی در بازی بسکتبال درآورد، ولی نه درکاریدی. در مورد مغز هم همین‌طور است. هیچ امر مقدسی در این باره وجود ندارد. نئوکورتکس[2] [قشر نوین مخ] که (فرض می‌شود) [مسؤول] اعمال ریاضی است از نظر تکاملی، تازه و بسیار ابتدایی است و نهایتاً در خواهیم یافت چگونه کار می‌کند یا به هر حال آن را مدل‌سازی می‌کنیم؛ چرا نکنیم؟

ر. ل. چرا نکنیم؟

م. گ. هیچ دلیلی، مطلقاً هیچ دلیلی، وجود ندارد که بگوییم این غیرممکن است. افرادی مانند پنروز[3] هستند که نظراتی برخلاف این دارند، ولی ...

1. Leroy Gourhan 2. neocortex 3. Penrose

ر. ل. با این موافقم، از آنجا که ما از ماده ساخته شده‌ایم، اجتماعی از سلولها و رابطها هستیم، پس چرا تصور نکنیم که روزی ماشین به همان سطح از پیچیدگی برسد.

م. گ. محتمل است که سخت‌افزار الکترونیکی (با پردازش موازی) در عرض ۳۰ تا ۵۰ سال دیگر به پای ظرفیت سیناپسی مغز ما (حدود 10^{14} سیناپس در قشر مخ) برسد. آن‌طور که از تغییرات ژنتیکی (حدود 10^3 ژن) قشر مخ در یک میلیون سال اخیر تکامل بشری بر می‌آید، نرم‌افزار موردنیاز در حدود 10^5k تخمین زده می‌شود. حتی قابل تصور است که ۲۰ـ۱۰ صفحه برنامه‌نویسی هوشمندانه (خیلی هوشمندانه)، یک رایانهٔ سان[1] را قادر به یادگیری ریاضیات ظرف چند ماه کند. طبیعتاً نوشتن چنین برنامه‌ای به مسأله متداول NP بر می‌خورد ولی موفقیت تکاملِ زیستی (و نیز پیروزی شگفت‌آور ریاضیات بشری بر NP) ما را خوش‌بین می‌سازد، و حتی رایانه‌های امروزی نگرش ما را تغییر می‌دهند.

ر. ل. ... و نحوهٔ تفکرمان را؟

م. گ. و نحوهٔ تفکرمان را، و نگرش عاطفی‌مان را. هرچه باشد، اثبات قضیه‌ای با چندین صفحه محاسبه تفاوت چندانی با محول کردن آن به کامپیوتر نمی‌کند. ولی وقتی این دومی فراهم باشد، اعتباری که برای چنین اثباتی قائلیم، و لذا التذاذی که از آن می‌بریم فروکش می‌کند. ولی احتمالاً راههای دیگری برای هدایت تمایلاتمان به ریاضیات خلاقه خواهیم یافت.

ر. ل. سؤالات دیگری در نظر دارید که بخواهید از شما پرسیده شود؟

م. گ. از دیدن اینکه چگونه بشریت گرانبهاترین سرمایه‌ای را که دارد، یعنی اذهان دست نخوردهٔ کودکان بااستعداد را، ضایع می‌کند اندوهگین می‌شوم. اینها یا بی‌خردانه نابود می‌شوند یا برای رضایت معلمانشان تغییر شکل می‌دهند و ما حتی متوجه نمی‌شویم. اما چگونه باید آموزش و پرورش را سبکتر کرد و در عین‌حال سطح کلی را بالا نگه داشت؟ تنها امید من جایگزین کردن معلمان با کامپیوتر است. این کار اذهانِ حساس را از فشارهای سلطه‌جویانه رها می‌سازد. همچنین آرزو می‌کنم آموزش و پرورش برای همگان متنوعتر باشد.

ر. ل. حتماً ممکن است، حتی اگر آموزش و پرورش دولتی باشد، در فرانسه کلاسهای مخصوصی برای موسیقیدانان یا ورزشکاران آینده هست.

م. گ. از یک طرف باید مبنای مشترکی موجود باشد وگرنه جامعه از هم می‌پاشد. بعد باید راهی برای ارائه کردن مسائل مختلف در مدارس یافت. این تنها یک تمایل است، ولی چنین تنوعی جو فکری در جهان را بی‌اندازه بهبود خواهد بخشید.

ر. ل. یک راه برای ایجاد کمی تنوع این است که از دانش‌آموز بخواهیم پروژه‌ای تهیه کند، این می‌تواند فقط یک مبحث باشد که باید شخصاً تهیه کنند.

م. گ. نه، مسأله فقط عرضه کردن چیزهای متفاوت به آنهاست. مثلاً علوم طبیعی، علوم انسانی و ریاضیات هست. این همه چیز، درحالی‌که دانش‌آموزان هیچ نمی‌دانند. به نحوی باید در معرض این مباحث گوناگون قرار گیرند و سپس به آنان اجازهٔ انتخاب داده شود. دادن آزادی انتخاب به آنها آن‌قدر بدیهی نیست. گاهی اوقات اگر به مدرسهٔ خاصی بروید، مسیر آیندهٔ شما تعیین شده است.

ر. ل. مقایسه کنید با آنچه در انگلیس یا ایالات‌متحده رخ می‌دهد که گزینه‌های بیشتری به دانش‌آموزان ارائه می‌شود تا حق انتخاب از میان شقوق گوناگون داشته باشند، مخاطرهٔ این روش در این است که فقط برای بهترین دانش‌آموزان خیلی موفقیت‌آمیز است، آنهایی که از پشتیبانی خانواده، یا محیط اجتماعی، یا ظرفیتهای فکری ویژه برخوردار نباشند سردرگم می‌شوند.

م. گ. من هیچ راه حلی ارائه نمی‌دهم.

ر. ل. آموزش و پرورش برای چه کسی؟

م. گ. شاید بشود سعی کرد که دانش‌آموزان را پس از بررسی احوال روحی‌شان مختصری جهت داد.

ر. ل. بله، خیلی زودهنگام یا به روشی خیلی مستقیم ممکن است خطرناک باشد.

م. گ. و چه کسی دربارهٔ جهت دادن تصمیم می‌گیرد؟

ر. ل. و چه‌قدر زمان برای تصمیم‌گیری‌ها صرف خواهد شد؟ نمی‌توانید بهترین افراد را بخواهید و صرفاً به‌کار تصمیم‌گیری دربارهٔ دیگران وادارید، آنها [هم] مشغولیتهای خودشان را دارند که باید به آن برسند.

م. گ. بله، ولی فکر می‌کنم ممکن است، البته مسأله باید بررسی شود. پس از تعریف اهداف ([که البته] کار ما نیست، بلکه امری عمومی است)، آنگاه در این چهارچوب باید ممکن باشد، می‌توانید آموزش و پرورش را نظام دهید. بازهم [بگویم که] خیلی طرفدار تکثر و تنوع فکری هستم. هرچه توسط اذهان خلق‌شده است باید توسط اذهان دیگر جذب شود. چون یک شخص نمی‌تواند همه‌چیز را فرا بگیرد، کار باید بسته به سلایق تقسیم شود. جامعه مرفه‌تر و مرفه‌تر می‌شود بنابراین بیشتر و بیشتر می‌توانیم از پس آموزش خودمان برآییم. مسأله، نحوهٔ انجام این کار است. ما به‌عنوان مربی معتقدیم که مردم این‌گونه سعادتمندتر خواهند بود. البته ما از این لحاظ بی‌طرف نیستیم. برخی نمی‌خواهند آموزش ببینند. شاید بسیاری امتناع کنند. ولی در جامعه‌ای با فن‌آوری پیشرفته وجود افراد تعلیم‌ندیده بسیار خطرناک است. پیامدهای آن ممکن است ویرانگر باشند، مثل صدور حکم $\pi = 3$ با اکثریت آرا.

ر. ل. از حکم دادن بر علیه نظریهٔ تکامل بر پایهٔ مذهب خبر دارم، ولی از رأی‌گیری دربارهٔ مقدار π نه.

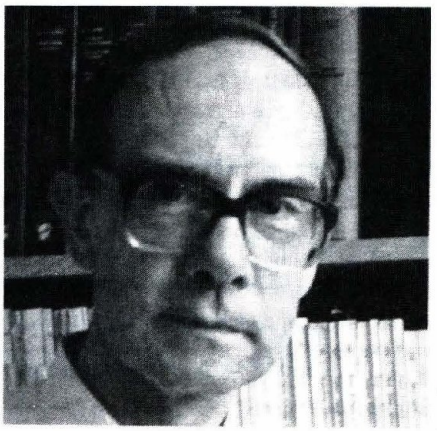
م. گ. نگاهی به کتاب پائولوس[1] به‌نام بی‌سوادیِ عددی بیندازید. مردمی هستند که معنی عددها را درک نمی‌کنند. از آنها بپرسید «چند نفر در نیویورک زندگی می‌کنند، ۱۰,۰۰۰، ۱۰,۰۰۰,۰۰۰، ۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰، ۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰؟» هیچ احساسی ندارند. اینها کسانی هستند که به طالع‌بینی معتقدند. چیزهایی از قبیل مفهوم مرتبهٔ بزرگی، باید جزئی از فرهنگ عمومی باشد. متأسفانه این هیچ‌وقت آموزش داده نمی‌شود. حتی برخی ریاضیدانان فاقد این [سواد عددی] هستند.

ر. ل. مثلاً این سؤال که چند قطره آب در دریاها و اقیانوسها موجود است سؤالی است هوشمندانه.

م. گ. یا، فوراً بگو، به چند کیلومتر مکعب برای جا دادن مثلاً جمعیت اروپا نیاز است؟

1. Sun

1. Paulos



فریدریش هیرتسبروخ

ترجمهٔ سارا روحانی

رمی لانژوَن. تحقیق در ریاضیات و اینکه چگونه سازماندهی می‌شود: آیا یک نوع فعالیت جمعی است یا فردی؟ منظور از «مکتب» در ریاضیات چیست؟ در مورد خاصِ آلمان، آیا چنین چیزی در این کشور وجود دارد؟

فریدریش هیرتسبروخ: من عقیده دارم که به‌طور کلی، هر ریاضیدان برای خودش کار می‌کند، وایده‌ها ایده‌های خودش هستند. ولی ریاضیدان واقعاً به مباحثات دائمی با دیگران نیاز دارد، او نمی‌تواند در انزوا کار کند و بنابراین به تجربهٔ من، «مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته» در پرینستن، که من از سال ۱۹۵۲ تا ۱۹۵۴ در آنجا بودم، یک مکان ایده‌آل است، و مهمترین کارهای من در آنجا انجام شد. بعضی از آن کارها را به تنهایی و بعضی را با همکاری دیگران انجام دادم. در آنجا از دیگران بسیار آموختم و کتابِ خود «روشهای جدید توپولوژی در هندسهٔ جبری» را نوشتم. دربارهٔ آن دوره، قبلاً بسیار سخن گفته‌ام. به‌هرحال این به‌وضوح نشان می‌دهد که ریاضیدانان به ارتباط با یکدیگر نیازدارند، حداقل در بیشتر اوقات؛ و بنابراین ما بسیار خوشحالیم که در آلمان، «مؤسسهٔ تحقیقات ریاضی اُبر وُلفاخ»[1] را داریم که افراد به مدت یک هفته در آنجا دور هم جمع می‌شوند و نیز «مؤسسهٔ ماکس پلانک برای ریاضیات» را در بن داریم، و اخیراً هم «موسسهٔ ماکس پلانک برای ریاضیات در علوم» در لایپزیک دایر شده که در آنجا می‌توان افراد را برای مدتهای طولانیتری دعوت کرد.

فعالیتهای مشابهی هم در دانشگاهها در قالب رشته‌های تحقیقی خاص[2] با حمایت بنیاد ملی علوم آلمان[3] صورت می‌گیرد.

ر. ل. ممکن است تاریخهای دقیقتری ذکر کنید؟

ف. ه. بله. داستان اُبر وُلفاخ کمی عجیب است. این مؤسسه در سال ۱۹۴۴ تأسیس شد، زمانی که جنگ هنوز ادامه داشت. در آن زمان پروفسور سوس[4] که رئیس دانشگاه فرایبورگ در آن حوالی بود، می‌خواست مؤسسه‌ای داشته باشد که در آنجا کتابخانه‌ها حفاظت شوند، ریاضیدانان بتوانند کنار هم جمع شوند، و شاید از [مصائب] جنگ نجات داده شوند. خیلی واضح نیست که هدف [مقامات] رسمی از [تأسیس آن] چه بود. در این مورد باید پژوهشهای تاریخی صورت بگیرد. معلم من هاینریش بنکه[1] یکی از ریاضیدانانِ آنجا بود. آنها در آنجا کارهایی در ریاضیات می‌کردند که در هر صورتی ممکن بود بکنند، اصلاً وابسته به جنگ نبود. بعدها، پس از جنگ، این مؤسسه که در یک استراحتگاه قدیمی شکارچیان دایر شده بود، همچنان محفوظ ماند. در حقیقت دو نفر از افسران اشغالگر ریاضیدان بودند، و آنها پافشاری کردند که این مؤسسه باید برقرار بماند. آن موقع، حدود سال ۱۹۵۹، تأمین بودجهٔ ثابت برای این مؤسسه میسر بود و بنیاد فولکس واگن (VW) برای ساختمانهای جدید پول می‌داد.

وقتی در سال ۱۹۵۶، بعد از دومین اقامتم در پرینستن، به آلمان بازگشتم، می‌خواستم در آلمان نیز مؤسسه‌ای وابسته داشته باشیم که دیدارکنندگان را برای مدتهای طولانیتری بپذیرد. این خواسته، در ابتدا، عملی نشد. مؤسسهٔ عالی مطالعات علمی (IHES) در فرانسه ۴۰ سال پیش تأسیس شده است. با وجود این من به آرامی کار را در بُن شروع کردم، و در سال ۱۹۶۸ مجوزی برای فعالیت در «رشتهٔ تحقیقاتی خاص» به مدت محدود ۱۵ سال به‌دست آوردیم، و سپس موفق به تبدیل این برنامه به یک ساختار دائمی شدیم، یعنی مؤسسهٔ ماکس پلانک که در سال ۱۹۸۲ گشایش یافت. در زمان متحد شدن آلمان «انجمن ماکس پلانک» می‌خواست در ایالتهای جدید کاری بکند و «مؤسسهٔ ماکس پلانک برای ریاضیات در علوم» تأسیس شد. این مؤسسه، جهت‌گیریی متفاوت با مؤسسهٔ ماکس پلانک در بُن دارد و یکی دو سال کار کرده است.

دربارهٔ این توسعهٔ ریاضیات بعد از وحدت آلمان می‌توان به مصاحبهٔ انجام شده با بُدیل برنر[2] در شمارهٔ سپتامبر ۱۹۹۸ خبرنامهٔ[3] E.M.S [انجمن ریاضی اروپایی] مراجعه کرد.

ر. ل. یک سؤالِ نظری‌تر: «مکتب» در ریاضیات داشتن، یعنی چه و نقش «رئیس‌سفیدان»، یعنی افراد مهم و پیشرو، چیست؟

ف. ه. تجربهٔ خودِ من بر اساس این واقعیت است که من هنگامی که تحصیلاتم را در مونستر[4] در سال ۱۹۴۵ آغاز کردم، شاگرد هاینریش بنکه شدم. هاینریش بنکه در سال ۱۸۹۸ متولد شده بود. او سمت استادی ریاضیات را در مونستر در سال ۱۹۲۷ به‌دست آورد، و به تدریج مکتبی در نظریهٔ توابع چندمتغیرهٔ مختلط به‌وجود آورد. وی شاگردی به‌نام پیتر تولن[5] داشت که با همکاری او کتاب معروفی نوشت؛ سپس آغاز به برقراری ارتباط با هانری کارتان در پاریس کرد، و به‌زودی رابطهٔ نزدیکی بین آنها برقرار شد. (متن سخنرانی من در پاریس را در گازت د ماتماتیسن (۱۹۹۷) ببینید). در زمان جنگ، هاینریش بنکه، از آنجایی که همسر اولش یهودی بود، بایستی مراقب می‌بود. زن او مرده بود، و او باید از پسرشان محافظت می‌کرد. بنکه مدتی را قبل از خاتمهٔ جنگ، برای اینکه از بمبارانهای مونستر بگریزد، در اُبروُلفاخ گذراند. آن دوران از لحاظ ریاضیات، دوران بی‌برکتی بود، ولیکن حتی در همان زمانِ نازیها و جنگ، او شاگردی داشت که مدرک دکتریش را در سال ۱۹۴۰ دریافت کرد: کارل اشتاین. بعد از جنگ هاینریش بنکه در سال ۱۹۴۵ به مونستر بازگشت. و اشتاین هم همین‌طور. همچنین فریدریش زُمر[6] هم به آنها پیوست. شهر تقریباً به‌طور کامل ویران شده بود، و بنکه دوباره شروع کرد و خیلی زود، مکتبی ایجاد شد. بنکه جمعاً بیشتر از ۵۰ دانشجوی

1. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

2. Sonderforschungsbereiche

3. Deutsche Forschungsgemeinschaft 4. Süss

1. Behnke 2. Bodil Branner 3. Newsletter 4. Münster

5. Thullen 6. Sommer

دکتری مثل دوستان من گراورت[1] و رِمرت[2] و خود من داشت.

دربارهٔ خرابیهای به‌بار آمده در دوران نازیها هر چه بگوییم، کم گفته‌ایم. موقعیت پیشرو آلمان در ریاضیات در ۱۹۳۳ از میان رفت. بسیاری از مردم در معرض تهدید و ارعاب نازیها قرار گرفتند و آلمان را ترک کردند. این امر در نمایشگاهی که در طی این کنگره (برلین) برگزار گردید، یادآوری شد. خیلی خوب بود که این موضوع برای جامعهٔ ریاضی و غیرریاضی روشن شد. ما نباید جنایتهای هولناکی را فراموش کنیم که تنها نمونه‌ای از آنها سرنوشت ۵۳ ریاضیدانی است که از برلین بیرون رانده شدند. دربارهٔ مکتبها صحبت می‌کردیم. ایسایی شور[3] یک مکتب جبر در برلین داشت. او دانشجویانِ بسیاری داشت. «سخنرانیهای شور» که در اسرائیل در یادبود او ایرادشده در دست است؛ و بعد البته در گوتینگن، مکتبها از میان رفتند. امی نوتر مکتبی نداشت ولیکن به بسیاری از ریاضیدانان برجسته از رشته‌های مختلفی که او خودش در آنها کار نمی‌کرد، رهنمود می‌داد. من او را جزو «اسلاف» خود می‌دانم. چرا که او استاد بزرگِ استاد من هاینتس هوپف در توپولوژی بود، و البته مجبور شد آلمان را ترک کند. به فاصلهٔ کوتاهی بعد از آن، در آمریکا درگذشت.

ر. ل. پس در نظر شما «مکتب» عبارت است از گروهی از افراد در حول یک شخصیت قوی.

ف. ه. بله. همان‌طور که قبلاً گفته شد، در دوران فعالیت بنکه در مونستر (حدود ۴۰ سال) او بیش از ۵۰ دانشجوی دکتری داشت، که عدهٔ معدودی از آنها قبل و در حین جنگ بودند، چرا که در دورهٔ نازی ریاضیات افول کرد. بعد از جنگ او فعالیت و روابطش با گروهِ هانری کارتان را گسترش داد. لذا این نمونه‌ای از یک مکتب است.

ر. ل. بنابراین به‌نظر می‌رسد که شما یک دیدگاه گراف‌مانند دارید، ارتباطاتی بین گروههای کوچک می‌بینید و عقیده ندارید که مکتبهایی در مقیاس یک کشور وجود دارند.

ف. ه. خیر. من همچنین مدتی در زوریخ زیر نظر هاینتس هوپف و بنو اِکمان[4] درس خواندم. در آنجا یک مکتب توپولوژی تحت نظارت هاینتس هوپف وجود داشت، ولیکن به بزرگی مکتب بنکه نبود و آنقدر دانشجو نداشت. بعدها البته اِکمان خودش هم مکتبی به‌وجود آورد. اخیراً، به مناسبت هشتادمین سالگرد تولد اِکمان یک ریاضیدان کاتالونیایی «شجرهٔ اخلاف» اکمان را کشیده بود که تا چهار نسل را شامل می‌شد.

ر. ل. آیا ریاضیدانان مهم دیگری را می‌بینید که فکر کنید در کار شما تأثیر داشته‌اند؟

ف. ه. بعد از بنکه و کارتان، اکمان و هوپف، از کودایرا[5]، اسپنسر، بوِرل، سِر، چرن و توم نام می‌برم. من نُه مقاله با مایکل اتیا نوشتم. من از او، بسیار بسیار زیاد یاد گرفتم. ما از کارهای رائول بوت استفاده کردیم. همکاری با همکار جوانم دان تساگیر[6] هم برای من خیلی مهم بود.

ر. ل. دانشجوی کسی بودن، و با یکدیگر به یک گروه کوچک تعلق داشتن، روابطی نزدیکتر از رابطهٔ اردوش ــ یعنی داشتن مقالهٔ مشترک ــ هستند، به سراغ روابط ضعیفتر که برویم چه تعداد ریاضیدان می‌شناسید؟

1. Grauert 2. Remmert 3. Issai Schur 4. Beno Ekmann
5. Kodaira 6. Don Zagier

ف. ه. من معمولاً نام و چهره را به یاد نمی‌آورم، و فقط به یاد می‌آورم که آنها را در بُن در مؤسسهٔ ماکس پانک، یا در مسافرتهای مختلف خود یا در کنفرانسها دیده‌ام. با احتساب ۴۳ سال «دوران بُن» مطمئناً هر سال ۳۰ الی ۴۰ دیدارکننده را ملاقات کرده‌ام و اگر موارد تکراری به‌حساب آورده نشود، روی هم ۱۰۰۰ تا یا بیشتر می‌شود. احتمالاً بتوانم حدود ۲۰۰ ریاضیدان را نام ببرم. من چندین مقاله با اتیا، بوِرل و تساگیر نوشته‌ام، و بسیاری کسان دیگر هستند که با آنها حداقل یک مقاله نوشته‌ام، برای مثال با هوپف، وان دو وِن[1]، کودایرا. به‌طور کلی کسانی که با آنها حداقل یک مقاله داشته‌ام تقریباً ۲۰ نفرند. حال دیگر سعی نمی‌کنم حساب کنم که چه تعدادی از افراد با رابطهٔ مرتبهٔ ۳ی اردوش با من مربوط می‌شوند.

ر. ل. راجع به این عبارت که به دیودونه نسبت داده شده چه فکر می‌کنید: در جهان ۱۰۰ ریاضیدان وجود دارند، دیگران فقط سیاهی لشکرند.

ف. ه. من این را تأیید نمی‌کنم. در هر دانشگاه معتبر جهان دو یا سه ریاضیدان وجود دارند که بسیار خوب هستند. ولیکن، مسلّماً اگر راجع به ریاضیدانان پیشگام و برجسته حرف بزنیم، که در این صورت تعریف آن عبارت است از کسانی که حوزه‌های جدیدی را بنیان گذاشته‌اند، کسانی که روشهای جدیدی ابداع کرده‌اند، کسانی که اکتشافاتِ بزرگی کرده‌اند، کسانی که برای گروه بزرگی از ریاضیدانان اهمیت دارند، آن وقت عدد ۱۰۰ و یا شاید ۲۰۰ یا ۳۰۰ ممکن است قابل قبول باشد. وقتی به تعدادِ افرادِ شایسته‌ای که خود آنها را ملاقات کرده‌ام فکر می‌کنم، رقم ۱۰۰ به‌نظرم کوچک می‌آید.

ر. ل. اگر به تحقیقات به‌صورت کلی نگاه کنیم، آیا این‌طور به‌نظرتان می‌رسد که بعضی مسیرهای تحقیقاتی رشد می‌کنند و بعد می‌میرند؟ آیا فکر می‌کنید که کسی بتواند تعیین کند که مسیری از تحقیقات با شکست مواجه شده؟ (و در این صورت، چه کسی؟)

ف. ه. مسیرهای تحقیقاتی خودشان به‌وجود می‌آیند. من آنها را جهتهایی طراحی (و برنامه‌ریزی)شده نمی‌دانم. برای خود من، وقتی که به پرینستن آمدم، نظریهٔ بافه‌ها[2] که توسط لوری[3] بنیانگذاری شده بود مطرح بود و آنگاه جریان سمینارهای کارتان و سِر در پاریس و سمینارهای کودایرا و اسپنسر در پرینستن پیش آمد. لذا نظریهٔ بافه‌ها و کاربردهای آن در هندسهٔ جبری بایستی یاد گرفته می‌شدند، و این امر مسیر تازه‌ای را گشود. در درونِ این مسیر، من کار خود را روی قضیهٔ ریمان-رُخ انجام می‌دادم. بعدها قضیهٔ ریمان-رُخ گروتندیک و قضیهٔ اندیس اتیا و سینگر مطرح شدند. این همه مسیری بسیار عریض تشکیل می‌دهند که به چندین مسیر تقسیم شده است. یکی از این مسیرها که در آنالیز است، در متن سخنرانی بیسموت در کنگرهٔ برلین دیده می‌شود؛ وی گزارشی تاریخی هم دربارهٔ آن موضوع ارائه کرد. بنابراین، خیلی اوقات می‌توان یک مسیر را ۳۰ الی ۴۰ سال دنبال کرد. [آن مسیر] هیچگاه به انتها نمی‌رسد.

ر. ل. پس وقتی سعی می‌کنید یک دیدگاه تاریخی به‌دست آورید، به گذشته نگاه می‌کنید؟

ف. ه. بله، برای مثال توجه کنید به آنچه در روز کاری [Arbeitstagung][4]

1. Van de Ven 2. sheaf theory 3. Leray

۴. روز خاصی در مؤسسهٔ بن که از ریاضیدانان حاضر خواسته می‌شود فی‌البداهه سخنرانی کنند.-م.

در بُن می‌گذشت که در آنجا مسیر دیگری که من تعقیب کردم، شاخص بود: میلنر و کره‌های غریب[1] او، نتایج اسمیل دربارهٔ حدس پوانکاره در ابعاد بالاتر و رابطهٔ کره‌های غریب با تکینه‌ها [کار بریسکورن[2]]. بسیاری چیزها از این رهگذر پدید آمدند. در این راستا تکینه‌های A، D، E، در بسیاری جاها پیش می‌آیند، که در کنگرهٔ (بین‌المللی ریاضیدانان در برلین) هم مطرح شدند. بنابراین اگر حوزهٔ خاصی برای مدتی خیلی آرام باشد، نمی‌توان گفت که مرده است. ممکن است دوباره برخیزد.

ر. ل. با توجه به آنچه در گذشته در ریاضیات رخ داده است، راجع به شاخهٔ تاریخ ریاضیات چه فکر می‌کنید؟

ف. ه. خوب، من فکر می‌کنم که رشتهٔ بسیار مهمی است. تاریخ‌شناسِ ریاضیات بودن، آسان نیست. شما باید ریاضیات را هم، به معنایی بسیار گسترده، بدانید. به نظر من شما در صورت داشتن تصوراتی از تاریخ ریاضیات است که می‌توانید درک و شناخت واقعی از ریاضیات داشته باشید. ریاضیدانان حرفه‌ای معمولاً در دورهٔ خاصی از حرفه‌شان، توجهی [به تاریخ ریاضیات] ندارند. آنها می‌خواهند به پیش بروند. ولیکن معمولاً، فرد در طول بخشی از دورهٔ کاری خود علاقه‌مند می‌شود بداند که [آن موضوع] چگونه به‌وجود آمده است. من از خواندن کتابهای تاریخی بسیار لذت می‌بردم. با وجود این وقت آن را نداشتم که خود، مانند بعضیها، به‌صورت حرفه‌ای به تاریخ ریاضیات بپردازم.

ر. ل. آیا منظور شما این است که خصوصیتی در تاریخ ریاضیات هست که برای تاریخ‌شناسِ ریاضیات شدن کافی نیست که تنها چند متن قدیمی خوانده شوند؟

ف. ه. بله. [تاریخ ریاضیات] احتیاج به‌کار فراوان دارد. برای حرفه‌ای شدن در این رشته، باید اصل منابع، نامه‌ها، و آرشیوها را خواند. یک نمونهٔ خوب، وان در واردن است، که به‌خاطر تحقیقاتش در هندسهٔ جبری مشهور است و یک تاریخ‌شناسِ حرفه‌ای شد. او کتابهایی دربارهٔ تاریخ قدیم ریاضیات نوشته است.

ر. ل. آیا احساس می‌کنید که در قبال کل ریاضیات مسؤولیتهایی دارید؟

ف. ه. بله، همیشه [چنین احساسی داشته‌ام]؛ در طی دو دوره ریاست انجمن ریاضی آلمان، و یا ریاست انجمن ریاضی اروپا، و در ۱۳ سال ریاست مؤسسهٔ ماکس پلانک، و در ۱۴ سال «سرپرستی رشتهٔ تحقیقاتی خاص»، همیشه این تعهد را احساس می‌کردم، و همچنین بعد از وحدت آلمان، هنگامی‌که از من خواسته شد که به کمیته‌هایی برای کمک به سازماندهیِ دوبارهٔ ریاضیات در آلمان شرقی سابق بپیوندم.

ر. ل. در ارتباط با دیدگاه خودتان دربارهٔ ریاضیات در طول پنجاه سال، مسیرهای چندی را که شما در آنها وارد شده بودید ذکر کردید، آیا وقایع دیگری نیز هستند که فکر کنید خیلی مهم بوده‌اند؟

ف. ه. بله، البته؛ موارد بسیاری هستند. معلومات من بسیار محدود است. من به این موضوع بر اساس تجارب خودم نگاه می‌کنم. مطمئناً می‌توانم [تحولات] نظریهٔ اعداد و نظریهٔ گروههای حسابی و بسیاری از شاخه‌های آن را ذکر کنم. نظریهٔ گروههای لی و نظریهٔ نمایش نیز فوق‌العاده توسعه یافته‌اند. من از دوست خود آرمان بورِل و هاریش-چاندرا[3] یاد می‌کنم.

1. exotic 2. Brieskorn 3. Harish-Chandra

در مورد دستاوردهای تازه‌تر، باید به فالتینگس که هم‌اکنون در مؤسسهٔ ماکس پانک در بُن است، و البته به کارِ وایلز در حلّ فرضیهٔ فرما اشاره کنم. در طول پانزده سال گذشته روابط جدید و شگفت‌آوری بین ریاضیات و فیزیک پدید آمده است (اتیا، ویتن). در کنگرهٔ [برلین] به کارایی نامعقول فیزیک در کشف قضایای ریاضی اشاره شد (قول معمول در جهت عکس است)، اما این حکم در هر دو جهت درست است. حداقل، این چیزی است که در دو دههٔ اخیر دیده‌ایم. ما سخنرانی کامران وفا در کنگره را شنیدیم که به بررسی این جریان می‌پرداخت: نظریهٔ ریسمان، خمینه‌های کالابی-یاو[1]، نظریهٔ آیینه‌ها که نتایج متعددی در هندسهٔ جبری به‌دست می‌دهد، مثلاً شمارش تعداد خمهای گویا؛ کافی است به کونتسویچ[2] اشاره کنم. همهٔ اینها بسیار مهیج است، و در این کنگره مورد بحث بود.

ر. ل. آیا موارد دیگری هم به نظرتان می‌رسد؟

ف. ه. همان‌طورکه گفتم، موارد بسیاری هستند. در سالهای اخیر، خیلیها دربارهٔ «کوانتومی‌سازی» صحبت می‌کنند: چیزهای مهمی در هندسهٔ دیفرانسیل، در حساب وردشها وجود دارند. پیشرفتهای زیادی به‌دست آمده است. مثلاً در سیستمهای دینامیکی، همان‌طور که در سخنرانی موزر که پنجاه سال گذشته را دربر می‌گرفت، شنیدیم.

ر. ل. دربارهٔ فعالیت شما: چگونه، کجا و چه وقت کار می‌کنید؟

ف. ه. خوب، من هر روز به دفترکارم می‌رفتم و هنوز هم می‌روم. در آنجا با افرادی که به آن حوالی می‌آیند صحبت می‌کنم. و کارهای مدیریتی خود را انجام می‌دهم. من عادت کرده‌ام که کار ریاضی واقعی یعنی نوشتن مقاله را در خانه و در اتاق مطالعهٔ خود، و معمولاً در شنبه‌ها، یکشنبه‌ها و یا روزهای تعطیل دیگر، انجام دهم.

ر. ل. استیو اسمیل زمانی گفت که زیباترین قضیه‌هایش وقتی به ذهنش رسیده که در سواحل ریو بوده است.

ف. ه. بله، این ممکن است در حین قدم زدن یا در وان حمام یا وقتی که آدم آرامشی دارد اتفاق بیفتد.

ر. ل. نوشتن برای شما چگونه است؟ آیا چیز خوشایندی است، یا چیزی است که مجبورید آن را انجام بدهید، ولی قسمت ناخوشایند کار است؟

ف. ه. نوشتن همیشه برای من ناخوشایند است. تصمیم‌گیری برای نوشتن ناخوشایند است، و پس از تصمیم‌گیری، احتمالاً به چند روزی وقت برای اینکه واقعاً شروع کنم احتیاج دارم. ولی، وقتی که شروع کنم، مقاله‌ای که خیلی طولانی نباشد، اغلب اوقات نسبتاً سریع تمام می‌شود. لذت واقعی وقتی به آدم دست می‌دهد که مقاله آماده می‌شود.

ر. ل. بعضیها عکس این احساس را دارند، وقتی مقاله تمام می‌شود، از آن بیزار می‌شوند، برای اینکه همان چیزی نیست که موقع شروع کردن انتظارش را داشتند.

ف. ه. خیر، وقتی مقاله تمام می‌شود، من با رضایت به آن نگاه می‌کنم. البته، ممکن است قسمتی از آن باشد که آن را دوست نداشته باشم. این [موضوع]

1. Calabi-Yau 2. Kontsevitch

خیلی خوشایند نیست ولیکن من معمولاً وقتی مقاله کامل می‌شود، راضی و خشنودم.

ر. ل. چه وقت به این نتیجه می‌رسید که دستاوردی باید منتشر شود؟ این سؤال شامل یك سؤال دیگر هم می‌شود: چه چیزی باید منتشر بشود؟

ف. ه. مطلبی که منتشر می‌شود باید واقعاً یک نتیجهٔ جدید، یک قضیهٔ مهم، با مثال زیبا، چیزی باشد که آدم فکر کند جالب است. من نمی‌خواهم هر نتیجهٔ کوچکی منتشر شود. معمولاً وقتی سخنرانی می‌کنم، از من خواهش می‌شود که آن‌را بنویسم، مثلاً برای چاپ در «گزارشها»ی یک کنفرانس. من دوست دارم سخنرانی کنم و شاید بعد آن را به چاپ برسانم و یا اصلاً این کار را نکنم.

ر. ل. آیا شما شاگردانی دارید؟

ف. ه. من درواقع همیشه دوست داشته‌ام که درس بدهم. در بن، بسیاری اوقات در کلاسهایی که تا ۴۰۰ دانشجو داشت به مبتدیان درس می‌دادم. من به آنها حسابان ۱، حسابان ۲، شاید نظریهٔ توابع و مباحث دیگر را درس می‌دادم، و آنگاه دوباره از اول شروع می‌کردم. داشتن شاگردان مبتدی همیشه این امکان را فراهم می‌کند که دانشجویانی داشته باشید که بعدها برای دریافت «دیپلم» یا درجهٔ دکتری کار کنند. من، جمعاً ۴۰ دانشجوی دکتری در دورهٔ کاری خود داشته‌ام.

ر. ل. دورهٔ کاری شما تمام نشده است.

ف. ه. خوب، در حال حاضر هیچ دانشجویی ندارم. من از دانشگاه و از ریاستِ مؤسسهٔ ماکس پلانک بازنشسته شده‌ام. ولی هنوز در M.P.I (مؤسسهٔ ماکس پلانک) کار می‌کنم.

ر. ل. آیا دانشجویان به شما ایده‌های تازه و نو می‌دهند، یا اینکه احساس می‌کنید راهنمای آنها در اولین گامهایشان هستید؟

ف. ه. آنها معمولاً به من ایده‌های تازه می‌دادند، با بعضی از آنها بعدها مقالهٔ مشترک نوشتم. هنگامی که رسالهٔ خود را تهیه می‌کردند، من خیلی با آنها کار نمی‌کردم، برای اینکه معمولاً وقت زیادی نداشتم، ولیکن مراقب بودم که در یک جو جذّابِ ریاضی کار کنند. همچنین به آنها می‌گفتم که با چه کسی صحبت کنند، چه کسی قرار است به بُن بیاید، چه بخوانند. و آنگاه دوباره با هم حرف می‌زدیم. زمانی‌که روی رساله‌شان کار می‌کردند، ارتباط زیادی با آنها برقرار نمی‌کردم. آنها قرار بود که از همان ابتدا کاملاً مستقل باشند.

ر. ل. آیا شما تجربهٔ شکست را هم در کارهایتان داشته‌اید؟

ف. ه. گمان می‌کنم موارد زیادی اتفاق افتاده که آنچه را که می‌خواستم به‌دست نیاورده‌ام. ولیکن به‌طور کلی از نتایج به‌دست آمده راضی و خوشحالم.

ر. ل. تأثیر خانوادهٔ شما در اینکه ریاضیات را انتخاب کنید، چه‌قدر مهم بود؟

ف. ه. خیلی. پدر من معلم ریاضیات بود. من خیلی اوقات با او حرف می‌زدم. به کتابهایی که در گوشه و کنار خانه بودند، علاوه بر کتابهای درسی معمولیِ مدرسهٔ ابتدایی، دسترسی داشتم، تا اینکه آن خانه بر اثر بمباران ویران شد. من مطمئناً وضعیتی بهتر از دیگران داشتم. در نوجوانی، در نتیجهٔ بحث با پدرم، تصمیم گرفتم کارِ ریاضی بکنم.

ر. ل. در چه سنی این تصمیم را گرفتید؟

ف. ه. شاید وقتی‌که ده سال داشتم. در آن زمان برایم معلوم نبود که این کار چه نوع شغل و حرفه‌ای خواهد بود.

ر. ل. آیا شما فکر می‌کنید که ریاضیاتْ ساختاری مستقل از علوم دیگر است یا رابطهٔ دوطرفهٔ مستحکمی بین ریاضیات و احتیاجاتِ دیگر علوم وجود دارد؟

ف. ه. اشیای ریاضی در ارتباط با چیزهایی هستند که در طبیعت وجود دارند. به چندوجهی‌های منتظم نگاه کنید. آنها در طبیعت وجود دارند، بنابراین ریاضیدانها آنها را اختراع نکرده‌اند بلکه کشف کرده‌اند. احتمالاً بسیاری از ساختارها در ریاضیات اختراع شده‌اند، ولیکن آنها هم اختیاری و دلخواه نیستند. ریاضیدانان نمی‌توانند هرکاری را که می‌خواهند بکنند، سیر پیشرفتِ طبیعیِ موضوع آنها را به دنبال خود می‌کشاند. رابطهٔ نزدیکی بین ریاضیات با فیزیک و نجوم وجود دارد. در زمانهای قدیم، جداکردن این رشته‌ها از یکدیگر مشکل بود. امروزه، همان‌طورکه گفته شد، دوباره رابطهٔ بسیار نزدیکی بین ریاضیات و فیزیک وجود دارد.

ر. ل. در بارهٔ این عقیده چه فکر می‌کنید: ریاضیات یك زبان است؟

ف. ه. ریاضیات روشی برای مطالعه و بیان نظریه‌هاست. فیزیکدانان بدون ریاضیات نمی‌توانستند نتایج خود را بنویسند و یا در بارهٔ نتایجشان صحبت کنند. از این لحاظ، ریاضیات می‌تواند یک زبان باشد، ولی من عبارت «زبان» را دوست ندارم. به نظر من ریاضیات را نمی‌توان با زبان مقایسه کرد. در ریاضیات مفاهیمی پدید می‌آید و زبان برای توصیف آنها به‌کارگرفته می‌شود.

ر. ل. شما فکر می‌کنید که [ریاضیات] در همان سطح زبان نیست؟

ف. ه. بله، ما همه نوع اسمی را معرفی می‌کنیم، ما یک روش ریاضی برای توصیف چیزها داریم، ولی از نظر من این کاملاً مشابه با زبان نیست.

ر. ل. در بارهٔ معیارهای زیبایی در ریاضیات چه فکر می‌کنید؟ آیا می‌توانید ریاضیات زیبا را مشخص کنید؟

ف. ه. بله، من احساسی دارم که بعضی از اثباتها زیبا هستند. همچنین ساختارهای خاصی، در نظریهٔ گروهها، با [داشتن] تقارنهای بسیار، زیبا هستند. اثباتی که واقعاً قانع‌کننده است، اثباتی شما می‌توانید آن را تا آخر تعقیب کنید، زیباست. بنابراین دیدگاهِ زیبایی‌شناسی دقیقاً در همانجاست. اگر شما درسی بدهید و آن درس بسیار خوب ارائه شود، می‌تواند زیبا باشد. و حتی یک فرد غیر ریاضیدان هم می‌تواند آن‌را حسّ کند. ولی همهٔ این [موضوع] را نمی‌توان به‌خوبی تعریف کرد. هرکسی معیار خود را دارد.

ر. ل. آیا شما فکر می‌کنید که تلاش برای تعریف چنین «زیبایی» فایده‌ای داشته باشد؟ یا آنکه تنوعِ معیارهای زیبایی‌شناسانه ممکن است به چیزهای جالبتری منجر شود؟

ف. ه. تنوع خوب است. ولیکن پایهٔ مشترکی وجود دارد که هرکسی آن را قبول دارد.

ر. ل. آیا شما فکر می‌کنید که این سلیقهٔ زیبایی‌شناسانه وابسته به زمان است، یا اینکه آن‌را «جهان شمول» و غیرقابل تغییر در طول اعصار می‌دانید؟

ف. ه. چنانچه به قضایای هندسهٔ نااقلیدسی نگاه کنیم، آنها زیبا باقی مانده‌اند. اگر به هندسهٔ اقلیدسی و مطالبی که در مدرسه یاد گرفتیم، مثلثها، نگاه کنیم آنها زیبا هستند و همچنان زیبا خواهند ماند.

ر. ل. بنابراین شما مثالهایی دارید که در طول ۲۰۰۰ سال به‌جای مانده‌اند، از نظر شما این موضوع نشان می‌دهد که یك چنین پایهٔ مشترکی وجود دارد،

ف. ه. بله.

ر. ل. آیا ریاضیدان‌بودن، مانند نجاربودن، یك حرفه است یا چیز دیگری است؟

ف. ه. خوب، ریاضیات یک حرفه است، ولیکن فرد ممکن است خودش را کاملاً وقف آن کرده باشد. ریاضیات می‌تواند همچنین یک سرگرمی باشد. این موضوع در مورد بعضی نجاران هم که به کارشان به‌عنوان هنر نگاه می‌کنند و از آخر هفته‌هایشان برای ساختن اشیایی خاص استفاده می‌کنند، صادق است. در هر صورت من فکر می‌کنم که ریاضیدان باید کاملاً ریاضیات را دوست داشته باشد، عملاً هیچ‌گاه آن‌را ترک نکند، و هیچگاه از فکرکردن به آن باز نایستد. بعضی ریاضیدانان، ازجمله خود من، بسیار سرگرم امور مدیریتی هستند. بنابراین همیشه مقاطع زمانیی هستند که میزان کار ریاضی در آنها کم می‌شود. ولی آن دوست‌داشتن هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد.

ر. ل. نظرتان دربارهٔ این جمله که آن‌را به آداماار نسبت می‌دهند چیست: «ایده‌های ساده معمولاً در آخر کار پیدا می‌شوند.»

ف. ه. من فقط می‌توانم عبارتی از هاینتس هوپف را نقل کنم. او هنگامی‌که توم نشان فیلدز را دریافت می‌کرد، سخنانی در معرفی و تمجید توم ایراد کرد. او دربارهٔ جبر کوبوردیسم، ساختاری که امکان می‌دهد خمینه‌ها، به‌استثنای خمینه‌های مرزی، جمع و ضرب شوند، صحبت کرد. این پایه و اساس کار توم بود. هوپف گفت: «این مفهوم ممکن بود در نظر من بسیار ساده بیاید.» یک ایدهٔ ساده ممکن است منجر به مطلبی بسیار زیبا و مهم شود. مفهوم گروه هوموتوپی هم ایدهٔ ساده‌ای است.

ر. ل. سؤال من بیشتر مربوط به لحظه‌ای می‌شد که شما به‌آن ایده‌های ساده دست می‌یابید، آیا در شروع کار با وضعیت آشفته و درهم و برهمی روبه‌رو هستید و تنها در آخر کار به ایدهٔ حقیقی می‌رسید؟ یا گمان می‌کنید که ممکن است ایده‌ای در ذهنتان جرقه بزند که شما را در بخش خاصی از کار به پیش برد؟

ف. ه. ممکن است ایده‌های ساده‌ای وجود داشته باشند که قضیهٔ چهار رنگ را، بدون کمک کامپیوتر، کوتاهتر کنند. ممکن است ایده‌های ساده‌ای باشند که تقسیم‌بندی گروههای سادهٔ متناهی را بهتر کنند. می‌توانیم امیدوار باشیم.

ر. ل. به‌نظر می‌رسد که شما باز از ذکر هر قاعده‌ای خودداری می‌کنید و می‌گویید که ببینیم چه‌چیزی اتفاق می‌افتد و فقط نتیجه را تحسین کنیم.

ف. ه. بله من نمی‌توانم یک حکم کلی بدهم. وقتی ریاضیدانان باید مسأله‌ای را حل کنند که به حل ۱۰۰۰۰۰ معادلهٔ خطی نیاز دارد، از کامپیوتر استفاده می‌کنند. این کاری عملی همچون بهینه‌سازی مسیرها و جدول زمانبندی برای قطارهای برقی یا تراموا‌ها در یک شهر است. کار سنگینی است که باید انجام شود، خیلی خوب و جالب است که بتوان آن‌را انجام داد، ولی همیشه به‌عنوان یک کار ریاضی، جالب نیست. شاید ایدهٔ اینکه چگونه باید انجام شود زیبا و جالب باشد، و بعد از مدتی ساده‌ترین و بهترین روشها هم ممکن است پیدا شوند.

ر. ل. به نامهایی که برای اشیای ریاضی ابداع می‌شوند، چه‌اهمیتی می‌دهید؟ آیا شما هم بعضی از این نامها را ابداع کرده‌اید؟

ف. ه. بله. من کلمهٔ «Garbe» را که معادل آلمانی «بافه» است پیشنهاد کردم. همین‌طور رده‌های تاد[1] را معرفی کردم. شاید این کار را قبلاً کوداییرا کرده بود ولی نه به این صراحت. من چندجمله‌ایهایی را که در قضیهٔ ریمان-رخ ظاهر می‌شوند رده‌های تاد نامیدم. همچنین [در مواردی] یک حرف را به‌عنوان نام مطرح کردم، مانند L-گونه و A-گونه، یا اسمهایی را به‌کار بردم مانند «نشان» [«دستینه»[2]] که از قبل وجود داشتند.

ر. ل. آیا هیچ اهمیتی به‌آن نامها می‌دهید؟

ف. ه. خوب، من فکر می‌کنم که نامها می‌توانند حاوی نشانه‌ای از معنا باشند؛ نامها را نمی‌توان خیلی دلخواهانه نسبت داد. در اصطلاحات «بافه» یا «Garbe» یا «faisceau» [معادل فرانسوی کلمهٔ «بافه»]. سعی شده نشان داده شود که این اشیا چگونه چیزی هستند.

ر. ل. آیا اسمی هست که در طول ۵۰ سال گذشته ابداع شده و شما خصوصاً آن را دوست داشته باشید؟

ف. ه. در نظرم نیست.

ر. ل. [دربارهٔ رابطهٔ] ریاضیات و هنر، ریاضیات و کامپیوتر [چه می‌گویید]؟

ف. ه. البته کامپیوتر کمک بزرگی برای ریاضیدانان است. ما می‌توانیم آزمایشهایی در حوزه‌هایی که غیرقابل دسترس بودند، انجام دهیم. من ریاضیدانانِ بسیار نظری را دیده‌ام که یک فرضیه را، قبل از شروع به‌اثبات، آزمایش می‌کردند. نتیجهٔ آزمایش لزوماً منجر به اثبات فرضیه نمی‌شد، ولیکن گواه مستحکمی از صحت آن بود. اثباتهایی به‌کمک کامپیوتر انجام شده است، مانند قضیهٔ چهاررنگ، و تا به حال اثبات غیرکامپیوتری برای آن به‌دست نیامده است. پژوهشهای ریاضی، خصوصاً به‌سبب استفاده از کامپیوتر، با گذشته فرق دارد. با وجود این، در اساس به‌همان صورت است. کارها در ذهن ما انجام می‌شوند، کامپیوتر تنها وسیله‌ای است برای کمک به ما.

ر. ل. در نظر شما کامپیوتر نوع پیچیده‌ای از پرگار یا خط‌کش است،

ف. ه. بله، ولیکن وقتی می‌بینم که دیگران چگونه و چقدر سریع از آن استفاده می‌کنند، چقدر در نظریهٔ اعداد پیشرفت می‌کنند، واقعاً حیرت زده می‌شوم و آن را تحسین می‌کنم.

ر. ل. راجع به نقش کامپیوتر در ارتباطات چه می‌گویید؟

ف. ه. پست الکترونیک حیرت‌انگیز است، ولی من می‌ترسم که هنر نوشتن علامات و نشانه‌های ریاضی از دست برود. البته پست الکترونیک یک راه ارتباط فوری است که بسیار کاراتر از تلفن است. ابزار خوبی برای نوشتن مقالات مشترک است، گرچه بهتر است که رو در رو بحث شود.

1. Todd Classes 2. signature

ر. ل. آیا فکر می‌کنید که کامپیوتر روش کار ریاضی را تغییر می‌دهد یا اینکه فکر می‌کنید این فقط یك مُد است و مردم به‌روشهای قدیمیِ کار با یکدیگر، ملاقات، بحث و نوشتن، باز خواهند گشت؟

ف. ه. هر دوی آنها. ارتباط از طریق پست الکترونیک باقی خواهد ماند و جزئی از زندگی روزمره خواهد بود. من امیدوارم که ریاضیدانان همچنان علاقه‌مند به ملاقات با یکدیگر باشند. در حقیقت علی‌رغم وجود پست الکترونیک، دائماً ملاقاتهای بیشتر و بیشتری صورت می‌گیرند!

ر. ل. پس شما فکر می‌کنید ملاقاتهای خیلی زیادی انجام می‌شوند،

ف. ه. احتمالاً! ریاضیدانان باید در خانه بنشینند و کار کنند. من هیچ نشانی از این موضوع نمی‌بینم که این ارتباطات الکترونیک سریع، تعداد ملاقاتها را کم کند. ما به هر دو نیاز داریم. ارتباط الکترونیک و ملاقاتها، ولی در هیچ یک از آنها نباید زیاده‌روی شود.

ر. ل. ممکن است کمی دربارهٔ آموزش در دبیرستان و مقطع لیسانس بگویید؟ ریاضیدانان چه‌نقشی را باید یا نباید، یا شاید داشته باشند؟

ف. ه. معلم دبیرستان باید به‌دانش‌آموزان بفهماند که ریاضیات رشتهٔ بسیار جالبی است، که زیباست، و بار دیگر می‌گویم، که می‌توان آن را دوست داشت. می‌توان سؤالات بسیار جذابی پیدا کرد که دانش‌آموزان روی آنها کار کنند. البته، معمولاً می‌شنویم که دانش‌آموزانی که از دبیرستان به‌دانشگاه می‌آیند، گاه به‌اندازهٔ کافی آموزش ندیده‌اند، و یا انگیزهٔ کافی ندارند. این شاید برای آن باشد که آنها [در مدرسه فقط] دستورالعمل یاد می‌گیرند. شاید هم برای آن باشد که معلم باید راهکارهای تعیین شده در یک برنامه را که توسط مقالات بالاتر نوشته شده، دنبال کند و انعطاف بسیار کمی در تعلیماتش دارد. ما فقط در صورتی می‌توانیم دانشجویان خوبی به‌دست آوریم که معلمان خیلی خوبی در دبیرستانها داشته باشیم. به‌همین‌ترتیب، درسهای مربوط به مبتدیان در دانشگاه، حساب دیفرانسیل و انتگرال، باید چنان ارائه شود که برای دانشجویان جالب و هیجان‌انگیز باشد، با شرح تاریخی مهیج و کاربردهایی در همه‌جا.

ر. ل. به‌عبارت دقیقتر، فکر می‌کنید ریاضیدانانی مانند شما، ریاضیدانانِ فعال در پژوهش، چه‌نقشی باید در آموزش دبیرستانی ایفا کنند؟

ف. ه. اولاً باید در درسهایمان معلمان آینده را تربیت کنیم، تا از پایهٔ خوبی برخوردار شوند. ثانیاً باید رابطه با معلمان را بعد از تحصیلاتشان حفظ کنیم. درسهای خاصی را برای آنها ارائه دهیم تا ارتباط آنها با دانشگاه سست نشود. خیلی خوب می‌شود که این ارتباط در قالب دیدارها و ملاقاتهای منظم باشد. برای مثال، هاینریش بنکه، که چندبار از او سخن گفتم، چنان ملاقاتی را سالی یک‌بار ترتیب می‌داد. معلمان از همهٔ نواحی اطراف می‌آمدند. او مجله‌ای را با همراهی اُتو توپلیتس، به‌نام زمستر بریشته [گزارش نیمساله] برای معلمان پایه‌گذاری کرد.

ر. ل. اخیراً برای کاری که برای وزارت آموزش و پرورش فرانسه انجام می‌دهم، از چندین نفر از کسانی که در دورهٔ لیسانس خود دروس ریاضی خوانده‌اند (مثلاً پزشکها، مهندسان، آرشیتکتها، ...) این سؤال را پرسیدم: «چه‌چیزی از ریاضیاتی که در طول تحصیل خود یاد گرفتید به‌یاد می‌آورید؟» جواب اکثریت بزرگ آنها یك «هیچ‌چیز» ساده بود، عکس‌العمل شما چیست؟ آیا فکر می‌کنید که اهمیتی که در دبیرستان به‌ریاضیات داده می‌شود موجه است؟ آیا گمان می‌کنید که [پاسخ آنها] مبالغه‌آمیز است، یا اینکه فکر می‌کنید با توجه به‌اینکه این پاسخ بسیار تأسف‌آور است، باید ریاضیات دیگری را تدریس می‌کردیم؟ آیا به‌نظر شما تغییر جهتی لازم است تا کسانی را که نمی‌خواهند در آینده ریاضیدان بشوند، قانع کند که ریاضیات می‌تواند برای آنها مهم باشد؟

ف. ه. شما آرشیتکتها را مطرح کردید. آنها مطمئناً به‌ریاضیات احتیاج دارند. همان‌گونه که مهندسان احتیاج دارند.

ر. ل. من در حقیقت فقط سؤال را مطرح می‌کنم، پاسخ آرشیتکتها مأیوس‌کننده‌ترین پاسخ نبود، ولیکن اکثر مهندسان اول جواب می‌دادند «هیچ‌چیز» و بعد اقرار می‌کردند که آنها ممکن است کمی از آمار استفاده کنند، کار آنها عمدتاً شبیه‌سازی است.

ف. ه. ما مسلماً کارهای زیادی باید انجام دهیم تا ریاضیات را در اجتماع زنده نگاه داریم. در اینجا، در کنگره، کوششهایی انجام شد. از جمله یک نویسنده و شاعر آلمانی، هانسن مگنس انتسنز برگر[1]، که در آلمان خیلی معروف است، سخنرانی کرد. وی سعی کرد توضیح دهد که چرا ریاضیدانان در یک جزیره زندگی می‌کنند و چرا پلهای متحرک بالا کشیده شده‌اند و هیچ ارتباطی برقرار نمانده است. او همچنین بر علیه کسانی که همیشه می‌گویند «من در ریاضیات خیلی ضعیف بودم» و از این موضوع افتخار می‌کنند، صحبت کرد و سعی کرد توضیح دهد که چرا چنین تمایلی وجود دارد درحالی‌که از طرف دیگر ریاضیات در همه جا، ولو به‌طرز نامرئی، به‌کار می‌رود. سخنرانیهای عمومی دربارهٔ مثلاً ریاضیات و پزشکی (از قبیل آنکه دیروز برگزار شد)، قاعدتاً جلب توجه می‌کنند. این حقیقت دارد که بسیاری از مردم فکر می‌کنند ریاضیات فعالیت خاصی است که هیچ فایده‌ای ندارد، خیلی ملال‌آور و کمی عجیب و غریب است.

ر. ل. چرا چنین است؟ آیا فکر می‌کنید ما ممکن است مسؤولیتی در این وضع داشته باشیم، هم از لحاظ روش تدریسمان و هم از لحاظ ریاضیاتی که می‌گذاریم تدریس شود؟

ف. ه. بله، ما مسؤولیتی داریم، ما به دانشجویان لیسانس درس می‌دهیم. این [اشکال] ممکن است مربوط به نوع ارتباطی باشد که با دانشجویان قبلی دورهٔ لیسانس که اکنون معلم‌اند، برقرار می‌کنیم. همچنین ما باید با عامهٔ اجتماع رابطه داشته باشیم. موزهٔ ریاضیات که قسمتهایی از آن در نمایشگاه ساختمان اورانیا (در خلال کنگرهٔ برلین) نشان داده شد، اقدام جالبی است. [برگزاری] آن نمایشگاه موفقیت‌آمیز بود. به‌من گفتند که یک بعداز ظهر، ۱۰۰۰ دانش‌آموز به‌آنجا آمده‌اند. این تلاشها منجر به ایجاد یک موزهٔ ریاضیاتِ دائمی در شهر گیسن خواهد شد که قرار است آلبرشت بویتل‌اشپاخر[2] استاد ریاضی در دانشگاه گیسن، آن را سازماندهی کند.

1. Hans Mgnus Enzensberger 2. Albrecht Beutelspacher

بولتسانو، کوشی، اپسیلن، دلتا•

والتر فِلشر*
ترجمهٔ سیامک کاظمی

در این مقاله شرح می‌دهم که مفاهیم حد وَ پیوستگی را بولتسانو و کوشی در سالهای بین ۱۸۱۷ و ۱۸۲۳ چگونه توضیح دادند و بکار بردند. در اواخر مقاله به دامنهٔ کاربرد روش اپسیلن-دلتایی در نوشتن اثباتهای متناهی برای حکمهایی می‌پردازم که به‌علت اشتمال بر حد و پیوستگی به فرایندهای نامتناهی مربوط می‌شوند.

۱. اصطلاحات امروزی. تعریفهای زیر بیش از صد سال است که رایج است:

فرض کنید f تابعی باشد که در یک همسایگی $V = \{x; |x-a| < q\}$ از عددی چون a تعریف شده است. عددی مانند b را B-حد f در a می‌نامند اگر به‌ازای هر ϵ مثبت، δی مثبتی (با ضابطهٔ $\delta < q$) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر y، از $|a - y| < \delta$ نتیجه شود $|b - f(y)| < \epsilon$.

فرض کنید s دنباله‌ای چون $\langle x(i) | \in \omega \rangle$ از عددهای $x(i)$ باشد که با مجموعهٔ ω از عددهای طبیعی اندیسگذاری شده است. گویند دنبالهٔ s به a همگرا است، و a را حد s می‌نامند، اگر به‌ازای هر ϵ مثبت، nای متعلق به ω وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i \in \omega$، از $i > n$ نتیجه شود $|a - x(i)| < \epsilon$.

عددی چون b را C-حد f در a می‌نامند اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $\langle x(i) | i \in \omega \rangle$ که مقادیرش در V باشند، همگرایی s به a همگرایی $f \circ s = \langle f(x(i)) | i \in \omega \rangle$ به b را ایجاب کند.

لم. b، B-حد f در a است اگر و تنها اگر b، C-حد f در a باشد.

نکته‌ای را در این زمینه به نقل از سیرپینسکی (۱۹۱۶) خاطرنشان می‌کنم: این استلزام که B-حد، C-حد است، صورت ضعیف زیر از اصل موضوع انتخاب را ایجاب می‌کند و در واقع معادل با آن است: به‌ازای هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های ناتهیِ عددهای حقیقی، یک تابع انتخاب وجود دارد.

فرض کنید σ/o یکی از B و C باشد. تابع f را در a، σ/o-پیوسته می‌نامند اگر $f(a)$ در a، σ/o-حد باشد.

لم. f در a، B-پیوسته است اگر و تنها اگر f در a، C-پیوسته باشد.

و باز، این حکم که تابعی B-پیوسته، C-پیوسته است، صورتی ضعیف از اصل موضوع انتخاب را که در بالا ذکر شد ایجاب می‌کند و در واقع با آن معادل است.

تذکر روش شناختی. B-مفهوم‌ها مستلزم سورهایی هستند که روی مجموعه‌هایی از اعداد (یعنی روی ϵ، δ، و y) تغییر می‌کنند. C-مفهوم‌ها نیز مستلزم چنین سورهایی (یعنی ϵ، n، و i) هستند اما علاوه بر آن، مستلزم سوری هستند که روی همهٔ دنباله‌های s تغییر کند. دنباله‌ها مفاهیمی از مرتبهٔ بالاتر از اعدادند (دنباله‌ها از مرتبهٔ دوم و اعداد از مرتبهٔ اول هستند). به این معنا، پیچیدگی منطقی C-مفهوم‌ها بیشتر از پیچیدگی B-مفهوم‌هاست. این موضوع در آنالیز مطرح نیست زیرا مفهوم تابع نیز از مرتبهٔ دوم است.

به‌خصوص، B-پیوستگی مستقیماً ویژگیهای موضعی در a و در $f(a)$ را به‌هم پیوند می‌دهد در حالی‌که C-پیوستگی از یک مفهوم تجریدیِ اضافی و واسطه، یعنی مفهوم دنباله‌ها و همگرایی آنها (یا حدهایشان)، بهره می‌گیرد: فرایندهای حدی در a در تناظر با فرایندهای حدی در $f(a)$ قرار می‌گیرند.

تذکر اصطلاح‌شناختی. استفاده از حرفهای ϵ و δ به شکلی که در تعریف قبل دیدیم، در تمام نوشتگان این مبحث (ازجمله در انتشارات به خط سیریلیک) مرسوم شده است. به‌طور مشخص، B-مفهوم‌ها با استفاده از حروف ϵ و δ،

و همگرایی دنباله نشان داده می‌شوند، و بنابراین Cـحد به‌کمک حرف ϵ و حرف n یا N نمایانده می‌شود. پس در مورد Cـمفهوم‌ها از δ استفاده نمی‌شود. کارکردن با مفاهیم با استفاده از اپسیلن، گاهی «اپسیلن کاری»[1] نامیده می‌شود، حال آنکه رجوع به تکنیکهای اپسیلن‌ـدلتایی نشان‌دهندهٔ آن است که یک حرف (و بنابراین یک سور) برای δ نیز به‌کار می‌رود یعنی Bـمفهوم‌ها موردنظرند.

۲. برنامهٔ دالامبر. ژان‌ـباپتیست دالامبر (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳)، همراه با اویلر و برادران برنولی، یکی از ریاضیدانانی بود که مظاهرِ عصر حماسی حسابان به‌شمار می‌روند. وی به اتفاق دنیس دیدرو، ویراستار دایرةالمعارف یا فرهنگ مستدل علوم، صنایع، و حرف بود. در جلد نهم این دایرةالمعارف (در سال ۱۷۶۵) در مقالهٔ Limite [حد] چنین نوشت

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; en sorte que la différence d'un pareille quantité à sa *limite* est absolument inassignable···
>
> A proprement parler, la limite ne coincide jamais, ou ne devient jamais égale, à la quantité dont elle est la limite; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peut qu'on voudra ···
>
> می‌توان گفت که یک grandeur [کمیت، مقدار؛ منظور از این اصطلاح درواقع یک «نقطهٔ پیوستار هندسی» است] حد grandeur دیگری است اگر دومی بتواند از هر grandeur مفروضی، هرقدر کوچک، به اولی نزدیکتر شود، البته بدون آنکه grandeur میل‌کننده از آنکه به آن میل می‌کند بگذرد و به قسمی که تفاضل این grandeur و حدش مطلقاً غیرقابل تعیین باشد.
>
> به زبان دقیق، حد یک کمیت هیچ‌گاه بر آن کمیت منطبق، و با آن برابر، نمی‌شود ولی آن کمیت بیشتر و بیشتر به حد میل می‌کند و اختلافش با آن هرقدر که بخواهیم، کوچک می‌شود.

دالامبر در جلد چهارم این دایرةالمعارف (۱۷۵۴) در مقالهٔ Différentiel [دیفرانسیل] به‌بحث در بارهٔ خارج‌قسمت تفاضلی پرداخت و، در مورد سهمی $y^2 = ax$، شیب مماس $(a/2y)$ را به‌طور هندسی به‌عنوان حد نسبت $a/(2y + \xi)$ تعیین کرد. وی مقاله را با این عبارات به‌پایان رساند:

> Celui-ci nous paroît suffire pour faire entendre aux commençans la vraie métaphysique du calcul différentiel. Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantitées infiniment petites, n'est que pour abrèger & simplifier les raisonnements; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantitées; que ce calcul ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un rapport* ···
>
> Il ne s'agit point, comme on le dit encore ordinairement, de quantitées infiniment petites dans le calcul différentiel; il s'agit uniquement de limites de quantitées finites. Ainsi la métaphysique & des quantitées infiniment petites plus grandes ou plus petites les unes que les autres, est totalement inutile au calcul différentiel. On ne se sert du terme d'*infiniment petit*, que pour abrèger les expressions. Nous ne dirons donc pas avec bien des géometres qu'une quantité est infiniment petite, non avant qu'elle s'évanoüisse, non après qu'elle est évanoüie, mais dans l'instant même où elle s'évanoüit; car que veut dire une définition si fausse, cent fois plus obscure que ce qu'on veut définir? Nous dirons qu'il n'y a point dans le calcul différentiel de quantitées infiniment petites.
>
> Mais les inventeurs cherchent à mettre le plus de mystère qu'ils peuvent dans leurs découvertes; & en général les hommes ne haïssant point l'obscurité, pourvû qu'il en résulte quelque chose merveilleux. Charlatanerie que tout cela! La verité est simple, & peut être toujours mise à portée de tout le monde, quand on veut en prendre la peine.
>
> به‌نظر می‌رسد که این برای فهماندن متافیزیکِ واقعیِ حساب دیفرانسیل به فرد مبتدی کفایت کند. وقتی این مطلب خوب فهمیده شد، روشن خواهد گشت که فرضِ کمیتهای بینهایت کوچک فقط برای اختصار و ساده‌سازی استدلال است، که اساساً حساب دیفرانسیل لزومی ندارد وجود این کمیتها را فرض کند، و چیزی که این حساب به آن فرو می‌کاهد، تعیینِ جبری حد یک خارج‌قسمت است ...
>
> برخلاف آنچه معمولاً می‌گویند، کمیتهای بینهایت کوچک نیستند که در حساب دیفرانسیل مطرح‌اند، بلکه فقط حدهای کمیات متناهی‌اند که مطرح هستند. بنابراین، متافیزیک کمیات بینهایت کوچک، و اینکه کدام‌یک کوچکتر یا بزرگتر از دیگری است، کلاً در حساب دیفرانسیل بیفایده‌اند. اصطلاح بینهایت کوچک فقط برای اختصار به‌کار گرفته می‌شود. ما چون بسیاری از هندسه‌دانان نخواهیم گفت که کمیت پیش از صفرشدن یا پس از صفرشدنْ بینهایت کوچک نیست بلکه درست در لحظهٔ صفرشدنْ بینهایت کوچک است، زیرا چنین تعریفی که صد بار مبهمتر از چیزی است که می‌خواهد توضیح دهد فایده‌ای

1. epsilontics

ندارد. ما می‌گوییم هیچ کمیت بینهایت کوچکی در حساب دیفرانسیل وجود ندارد.

ولی ابداع‌کنندگان سعی می‌کنند ابداعات خود را تا جایی‌که می‌توانند با رازورمز بیامیزند، و عموم مردم هم ابداً از ابهام بیزار نیستند به شرط اینکه نتیجهٔ شگفت‌آوری دربرداشته باشد. همهٔ اینها شیادی است! حقیقت ساده است و می‌توان آن را در دسترس همهٔ جهانیان قرار داد به شرط اینکه کسی بخواهد در این جهت تلاش کند.

امروز که این عبارات را می‌خوانیم، ممکن است احساس کنیم در زمان وایرشتراس یا کانتور یا حتی به قلم یک ریاضیدان معاصر نوشته شده است. ولی در هنگام نوشتن این عبارات، جزئیات رویکرد ریاضی به‌مفهوم حد هنوز مشخص نشده بود و آنچه دالامبر نوشت، بیشتر برنامه‌ای بود که باید در آینده اجرا می‌شد تا توصیف وضع موجود. این برنامه بعداً با گامهای قاطعی که بولتسانو و کوشی برداشتند، اجرا شد.

۳. بولتسانو. برنهارد بولتسانو (۱۷۸۱ـ۱۸۴۸) ریاضیات را در پراگ زیر نظر استانیسلاو ویدرا[1] و فرانتس‌ـیوزف گرستنر[2] خواند. در همان حین به تحصیل الهیات هم می‌پرداخت و چند روز قبل از دریافت درجهٔ دکتری در ریاضیات، عنوان کشیش (آزاد) هم گرفت. در سال ۱۸۰۷ یک کرسی الهیات در پراگ به‌دست آورد اما به پرورش و گسترش علائق ریاضی خود نیز ادامه داد و در سال ۱۸۱۷ کتاب کوچکی [۱] انتشار داد که به اثبات قضیهٔ مقدار میانی اختصاص داشت.

وی در صفحهٔ ۱۱ این کتاب تعریفی از پیوستگیِ تابعی چون f به‌ازای یک متغیر x به‌دست داد:

Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, dass eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x, die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändere, nur so viel, dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man nur ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.

توضیح درست مطلب این است: این گفته که تابعی چون $f(x)$ بنا به قانون پیوستگی به‌ازای همهٔ مقادیر x در بیرون و درون کرانهای مشخصی تغییر می‌کند صرفاً به این معنی است که: اگر x چنین مقداری باشد، آنگاه تفاضل $f(x+\omega)-f(x)$ را می‌توان کوچکتر از هر مقدار مفروضی کرد فقط اگر بتوان فرض کرد که ω به‌قدر دلخواه کوچک است.

پس با مفروض بودن $\epsilon > 0$ داریم $|f(x+\omega)-f(x)| < \epsilon$ به‌شرط اینکه ω «به‌قدر دلخواه کوچک» باشد.

بولتسانو تعریفش را فقط در دو جا به‌کار می‌گیرد. یکی در صفحهٔ ۵۲ که در آنجا نشان می‌دهد اگر f و φ توابعی تعریف شده و پیوسته در همسایگیی از عددی چون α باشند و $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$، آنگاه $f(\alpha+\omega)<\varphi(\alpha+\omega)$ به شرط اینکه ω به‌قدر کافی کوچک باشد (مثلاً δای وجود داشته باشد به‌طوری که از $|\omega|<\delta$ نتیجه شود $f(\alpha+\omega)<\varphi(\alpha+\omega)$).

من اثبات بولتسانو را با استفاده از شیوهٔ نمادگذاری او بازسازی می‌کنم. البته آن را کلمه به کلمه ترجمه نمی‌کنم ولی استدلالش را با دقت و امانتداری باز می‌گویم. فرض کنید $A=\varphi(\alpha)-f(\alpha)$. به‌ازای هر Ω و Ω' مثبت، بنا به پیوستگی، داریم

$$\varphi(\alpha)-\Omega' < \varphi(\alpha+\omega) < \varphi(\alpha)+\Omega' \qquad (۱)$$

$$f(\alpha)-\Omega < f(\alpha+\omega) < f(\alpha)+\Omega \qquad (۲)$$

پس،

$$-f(\alpha)-\Omega < -f(\alpha+\omega) < -f(\alpha)+\Omega \qquad (۳)$$

به‌شرط اینکه ω به‌قدر کافی کوچک باشد (یعنی δ_1 و δ_2 وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که از $|\omega|<\delta_1$ نتیجه شود $|f(\alpha)-f(\alpha+\omega)|<\Omega$ و از $|\omega|<\delta_2$ نتیجه شود $|\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha+\omega)|<\Omega'$، پس (۱) و (۲) برقرارند به شرط اینکه $|\omega|<\delta$، که در آن δ عدد کوچکتر از میان دو عدد δ_1 و δ_2 است). با جمع‌کردن طرفهای چپ (۱) و (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\varphi(\alpha)-\Omega'+(-f(\alpha)-\Omega) < \varphi(\alpha+\omega)-f(\alpha+\omega)$$

به شرط اینکه ω به‌قدر کافی کوچک باشد. اما در اینجا طرف چپ، $A-(\Omega+\Omega')$ است، و این مثبت می‌ماند اگر Ω و Ω' به‌قدر کافی کوچک انتخاب شوند (یعنی برابر با $A/۳$).

دومین استفاده‌ای که بولتسانو از تعریفش می‌کند در صفحات ۵۷ـ۵۸ است که در آنجا نشان می‌دهد که تابع داده شده به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای $q(x)=\alpha+b\cdot x^m+c\cdot x^n+\cdots+p\cdot x^r$ پیوسته است. من باز اثبات بولتسانو را با استفاده از شیوهٔ نمادگذاری او بازسازی می‌کنم و هر چند آن را کلمه به کلمه ترجمه نمی‌کنم، استدلال را امانتدارانه باز می‌گویم. نخست، تفاضل $q(x+\omega)-q(x)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$b\cdot((x+\omega)^m-x^m)+c\cdot((x+\omega)^n-x^n)+\cdots$$
$$+p\cdot((x+\omega)^r-x^r).$$

وی آنگاه با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای این را به شکل $\omega\cdot T(\omega)$ می‌نویسد که در آن، با ثابت نگه‌داشتن x، $T(\omega)$ برابر است با عبارت زیر

$$\left\{\begin{array}{l} m\cdot b\cdot x^{m-1}+m\cdot(m-1)/2b\cdot\omega\cdot x^{m-2}+\cdots+b\cdot\omega^{m-1} \\ +n\cdot c\cdot x^{n-1}+n\cdot(n-1)/2c\cdot\omega\cdot x^{n-2}+\cdots+c\cdot\omega^{n-1} \\ +\cdots \\ +r\cdot p\cdot x^{r-1}+r\cdot(r-1)/2p\cdot\omega\cdot x^{r-2}+\cdots+p\cdot\omega^{r-1} \end{array}\right\}$$

(یک اشتباه چاپی غیرمهم در متن بولتسانو وجود دارد: عاملهای b، c، $\cdots$، p در ستون آخر حذف شده‌اند). حال یک ω_1 مثبت مشخص انتخاب کنید و فرض کنید S عددی نامنفی حاصل از مجموع $T(\omega_1)$ باشد که اگر به‌جای هر یک از جمعوندهای این مجموع قدر مطلقش را قرار دهیم، به‌دست

1. Vydra 2. Gerstner

می‌آید. اگر $\omega_1 > \omega > 0$، آنگاه $|T(\omega)| < T(\omega_1)| \leq S$، پس $|q(x+\omega)-q(x)| = \omega \cdot |T(\omega)| < \omega \cdot S$. از این رو اگر D مثبت و ω کوچکتر از هر دوی ω_1 و D/S باشد، آنگاه $|q(x+\omega)| - q(x)| < D$.

می‌بینیم در حالی که در کاربرد اول، δ_1 و δ_2، به‌ترتیب متناظر با Ω و Ω'، به‌صراحت ذکر نشده‌اند، در کاربرد دوم، δی متناظر با $\epsilon = D$ صریحاً به‌عنوان عدد کوچکتر در میان دو عدد ω_1 و D/S معین شده است. بنابراین در هر دو مورد، بولتسانو تعریف خود را دقیقاً به‌معنی امروزیِ Bـپیوستگی به‌کار می‌برد.

مفاهیم بولتسانو، که روشن و بی‌ابهام عرضه شده‌اند، در نخستین نگاه به‌نظر می‌رسد همان‌طور از مغز او بیرون تراویده‌اند که آتنه از مغز زئوس پدید آمده بود.

به نظر نمی‌رسد که بولتسانو، صرف‌نظر از آشناییها و ارتباطاتی که در پراگ داشت، ارتباطی با ریاضیدانان داشته بوده باشد. در نتیجه، دستاورد ریاضی او کاملاً ناشناخته ماند و فقط سی سال پس از مرگ او بود که در معرض توجه جامعهٔ ریاضی قرار گرفت. به‌خصوص نوشته‌های بولتسانو تأثیری در کشف مجدد Bـپیوستگی به‌دست وایرشتراس و دیگران نداشت.

۴. کوشی

۴ الف. کار کوشی در بارهٔ متغیرها و حد آنها. کتابهای درسی ریاضی امروزی هنوز هم واژهٔ «متغیر» را به‌کار می‌برند ولی شیئی ریاضی را که با این کلمه نامیده می‌شود تعریف نمی‌کنند. امروز «متغیر» یک شیء زبانی است، حرفی است که برای نشان‌دادن [چیزی] به‌کار می‌رود، و دانشجو فقط به‌طور ضمنی می‌آموزد که جمله‌هایی شامل این کلمه بسازد. این امر هماهنگ با این گرایش است که ریاضیات را موضوعی در نظر می‌گیرند که فقط با مفاهیم سروکار دارد و ارتباطات مفاهیم را با زبانی که برای سخن گفتن از آنها به‌کار می‌رود نادیده می‌گیرند. حذف جنبه‌های زبانشناختی در ریاضیات نوین با موفقیت قابل ملاحظه (وگاه قابل تأسف) به اجرا درآمده است.

اوگوستن لویی کوشی (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷) برنامهٔ دالامبر را در دو کتاب درسی آنالیزش، [۲] و [۳]، به مرحلهٔ عمل درآورد.

در هر دو کتاب، کوشی نخست می‌کوشد توصیفی ریاضی از آنچه به‌صورت فرایندی حدی تصور می‌شود، به‌دست دهد (وی چنان از این موضوع سخن می‌گوید که گویی یک تجربهٔ ذهنی است). در صفحهٔ ۴ از [۲] (مجموعهٔ آثار، ۳، ص. ۱۹) اصطلاح «کمیت متغیر» را توضیح می‌دهد:

> On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes après des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise parmi les dernières de l'alphabet.···
>
> نام متغیر به کمیتی اطلاق می‌شود که فرض می‌کنند مقادیر متفاوت متعددی را یکی پس از دیگری می‌گیرد. چنین کمیتی را با حرفی نشان می‌دهند که یکی از آخرین حروف الفبا[ی لاتین] است.

او سپس به توصیف حد این‌گونه انتسابها[ی مقادیر] می‌پردازد:

> Lorsque les valeurs successivement attribuées à une mûeme variable s'approchent indéfiniment d'une valuer fixe, de manière à finir par en différer aussi petit que l'on voudre, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.···
>
> اگر مقادیری که متوالیاً به یک متغیر نسبت داده می‌شوند به‌قدر نامعینی [بلاانقطاع] به یک مقدار مشخص نزدیک شوند یعنی اختلافشان با آن مقدار به‌قدر دلخواه کوچک شود، آنگاه آن حرف (مقدار) را حد آن مقادیر می‌نامند.

به‌خصوص، متغیرهایی وجود دارند که انتسابهای [مقادیر به] آنها دارای حد صفرند:

> Lorsque les valeurs numériques successives d'une mûeme variable décroissant indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.
>
> اگر مقادیر عددی متوالیِ یک متغیر به‌قدر نامعینی کاهش یابند یعنی از هر عدد مفروضی کوچکتر شوند، آنگاه این متغیر تبدیل به چیزی می‌شود که آن را بینهایت کوچک یا کمیت بینهایت کوچک می‌نامند. حد این نوع متغیر، صفر است.

همین تعریفها در [۳] (مجموعهٔ آثار، ۴، ص. ۱۶) آمده‌اند. در نوشته‌های بعدی کوشی وقتی به این تعریفها مراجعه می‌شود، عبارت «aussi petit que l'on voudre» معمولاً به این صورت بیان می‌شود که تفاضل بین valeurs [مقادیر] نسبت داده شده به متغیر و آن valeur fixe [مقدار مشخص] را می‌توان از هر عدد مثبت مفروضی کوچکتر کرد.

۴ ب. چند نکته. متغیر در تعریف کوشی یک حرف نیست بلکه مفهومی ریاضی است، مفهومِ فرمی که باید با انتسابهای مقادیر پر شود. در این زمینه سه نکتهٔ زیر را متذکر می‌شوم.

۱. کوشی می‌نویسد که مقادیر به یک متغیر نسبت داده می‌شوند؛ او از مفهوم انتساب سخن نمی‌گوید. همچنین در نمادگذاری بین (۱) متغیر، که می‌تواند آن را با x نشان دهد، (۲) انتساب، و (۳) مقادیر انتساب، فرقی نمی‌گذارد. از این‌رو اغلب x را برای نشان‌دادن مقدار نسبت داده شده نیز به‌کار می‌برد.

۲. L، دامنهٔ این‌گونه انتساب A، نامشخص می‌ماند؛ ظاهراً فرض می‌شد که آنها دست‌کم در یک رابطهٔ ترتیبی صدق می‌کنند (بنابراین می‌شد از valeurs les unes après des autres [مقادیر یکی پس از دیگری] صحبت کرد). به‌خصوص انتسابها را می‌توان به‌صورت دنباله‌هایی تعریف شده بر ω در نظر گرفت ولی آنها می‌توانند کلیتر هم باشند مانند نگاشت همانی روی تمام‌بازه (مفهوم نوین دنبالهٔ مورـاسمیت را به‌یاد آورید). بردهای انتسابها نیز مشخص نمی‌شوند ولی از عبارات کوشی واضح به‌نظر می‌رسد

که numériques هستند یعنی مرکب از اعداد حقیقی‌اند.

۳. توجه کنید که هر نیمخط $(z, \rightarrow)$ شامل زیرمجموعه‌ای همپایان مرکب از عددهای طبیعیِ بزرگتر از عددی معین چون N است. بنابراین، وضعیتهایی که شامل حدهای انتسابهایِ Aیِ موردنظر کوشی هستند در حالات زیر می‌گنجند:

(ک ۱) اگر a متناهی و L زیرمجموعه‌ای همپایان از $(z, \rightarrow)$ با ترتیب صعودی باشد (حالت خاص: L مجموعهٔ ω از عددهای طبیعی باشد)، آنگاه به‌ازای ϵ مفروض، yای در L وجود دارد به‌گونه‌ای که از $l \in L$ و $y > l$ نتیجه می‌شود $|a - A(l)| < \epsilon$؛

(ک ۲) اگر a متناهی و L زیرمجموعه‌ای همپایان از $(\leftarrow, z)$ با ترتیب صعودی باشد (حالت خاص: L مجموعهٔ همهٔ $z - 1/n$ها با $n \in \omega$ باشد)، آنگاه به‌ازای ϵ مفروض δای در L وجود دارد به‌گونه‌ای که از $l \in L$ و $l > z - \delta$ نتیجه می‌شود $|a - A(l)| < e$؛

(ک ۳) اگر a نامتناهی و L زیرمجموعه‌ای همپایان از $(z, \rightarrow)$ با ترتیب صعودی باشد (حالت خاص: L مجموعهٔ ω از عددهای طبیعی باشد)، آنگاه به‌ازای n مفروض، yای در L وجود دارد به‌گونه‌ای که از $l \in L$ و $l > y$ نتیجه می‌شود $n < A(l)$؛

(ک ۴) اگر a نامتناهی و L زیرمجموعه‌ای همپایان از $(\leftarrow, z)$ با ترتیب صعودی باشد (حالت خاص: L مجموعهٔ همهٔ $z - 1/n$ها با $n \in \omega$)، آنگاه به‌ازای n مفروض، δای در L وجود دارد به‌گونه‌ای که از $l \in L$ و $l < z - \delta$ نتیجه می‌شود $n < A(l)$.

کوشی می‌نویسد که متغیری که انتساب [مقادیر به] آن به صفر میل کند، یک «quantité infiniment petite» [کمیت بینهایت کوچک] «می‌شود». چون کوشی قبلاً متغیر را به‌عنوان «quantité variable» [کمیت متغیر] معرفی کرده بود، کلمهٔ «quantité» [کمیت] در اینجا به‌معنایی مجردتر از معنای عدد یا مقدار در پیوستار هندسی به‌کار رفته است (البته این مسأله مسکوت مانده است که آیا کمیتی متغیر با انتسابی که به صفر میل می‌کند، عملاً یک ' کمیت بینهایت کوچک'[۱] هست یا فقط ' کمیت بینهایت کوچک' می‌شود.) بنابراین ' کمیت بینهایت کوچک' به‌گونه‌ای تعلق دارد که کاملاً متفاوت با گونهٔ اعداد (valeurs numériques [مقادیر عددی] متغیر) یا معادلاً، اندازه‌های هندسی است.

کوشی دلیل معرفی ' کمیتهای بینهایت کوچک' را در [۳، ص. ۹] بیان کرده است:

> Mon but principal a été de concilier la rigeur, dont je m'étais fait une loi dans mon Cours d'analyse, avec le simplicité qui résulte de la considération directe des quantitées infiniment petites.
>
> هدف اصلی من این بوده است که دقتی را که به‌عنوان قانون در درس آنالیز خود رعایت می‌کردم با سادگیِ ناشی از بررسی مستقیم ' کمیتهای بینهایت کوچک' آشتی بدهم.

۱. در بقیهٔ مقاله، کمیتهای بینهایت کوچک به معنی موردنظرِ کوشی را در داخل دو تک‌گیومه به‌صورت ' کمیتهای بینهایت کوچک' می‌آوریم تا از سایر معانی این اصطلاح متمایز شود. در اصل انگلیسی مقاله، عین اصطلاح فرانسوی «quantitées infiniment petites» مرتباً تکرار شده است ــ م.

رهیافت ریاضی کوشی در بررسی ' کمیتهای بینهایت کوچک'، در بیشتر موارد، مبتنی بر این نکته است که عددی چون c حد انتساب مقادیر $j + c$ به متغیر $j + x$ است اگر و تنها اگر ۰، حد انتساب مقادیر j به متغیر x باشد یعنی این متغیر تحت آن انتساب، 'بینهایت کوچک' شود. بر این اساس، حکمهایِ راجع به حد را می‌توان به حکمهایی دربارهٔ ' کمیتهای بینهایت کوچک' برگرداند.

مثال زیر را به‌عنوان مثالی آموزنده از [۳] (مجموعهٔ آثار، ۴، ص. ۱۸) نقل می‌کنم.

Cela posé, si la variable y est exprimée en fonction de la variable x par la équation

$$y = f(x) \tag{1}$$

Δy, ou l'accrosissement de y correspondent à l'accroisse- ment Δx de la variable x, sera déterminé par la formule

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{3}$$

[p. 19] $\cdots$ Il est bon d'observer que, des équations (1) et (2) réunies, on conclut

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{5}$$

Soient maintenant h et i deux quantitées distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite, et $\alpha = i/h$ le rapport infiniment petit de ces deux quantitées. Si l'on attribue à Δx la valeur finie h, la valeur de Δy, donnée par l'equation (5), deviendra ce qu'on appelle la différence de la fonction $f(x)$, et sera ordinairement une quantité finie. Si, au contraire, l'on attribue à Δx une valeur infiniment petite, si l'on fait par example

$$\Delta x = i = \alpha \cdot h,$$

la valeur de Δy, savoir

$$f(x + i) - f(x) \quad \text{ou} \quad f(x + \alpha \cdot h) - f(x)$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite. C'est ce que l'on verifiera aisément à l'égard des fonctions

$$A^x, \cdots$$

auxquelles correspondent les différences

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1) \cdot A^x, \cdots$$

dont chacune referme un facteur $A^i - 1$ ou ... qui converge indéfiniment avec i vers zero.

پس کوشی در اینجا یک ' کمیت بینهایت کوچک' i در نظر می‌گیرد و یک quantité finie [کمیت متناهی] h (که مطمئن نیستیم آیا عددی

مثبت در نظر گرفته شده یا یک متغیر با انتسابی که به چیزی متفاوت با صفر میل می‌کند). وی سپس می‌نویسد $\alpha = i/h$، که (متغیری با) یک انتساب است که مقادیرش خارج‌قسمتهای مقدارهای i و مقدار(های) hاند (نشان‌دادن متغیر i و مقادیرش با یک حرف، سردرگمی ایجاد می‌کند). حال اگر Δx برابر h باشد، $i = \alpha \cdot h$ برابر Δy است. وی $f(x+i) - f(x)$ این را با تابع نمایی $f(x) = A^x$ نشان می‌دهد که در آن

$$\Delta y : A^{x+i} - A^x = (A^i - ۱).A^x$$

بنابراین Δy در اینجا یک ' کمیت بینهایت کوچک' است که با ' کمیت بینهایت کوچک' B با مقادیر $A^i - ۱$ و عدد ثابت A^x نشان داده می‌شود.

این مثال نشان می‌دهد که مقادیر سه ' کمیت بینهایت کوچک' i، Δy، و B عددهای حقیقی معمولی‌اند (و همه به صفر می‌گرایند). کوشی هیچ عدد ناارشمیدسی «بینهایت کوچک»ی را هرگز برای ' کمیتهای بینهایت کوچک' خود به‌کار نبرده است.

۴ پ. مقایسهٔ دالامبر با کوشی. تعریف دالامبر از حد

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, ...

و تعریف کوشی از حد

Lorsque les valeurs successivement attribués à une mûeme variable s'approchent indéfiniment d'une valuer fixe, de manière à finir par en différer aussi petit que l'on voudre, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.

یک مضمون دارند. هر دو شامل عبارت «به‌ازای هر ϵ» (در تعریف دالامبر به شکل

approcher ... plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer

و در تعریف کوشی به شکل

différer aussi petit que l'on voudre)

هستند. حال آنکه هیچ‌یک شامل عبارت «δای وجود دارد» نیستند ــ احتمالاً به این دلیل که هر دو مؤلف بدیهی می‌دانستند که یک تقریب، وقتی به‌دست آمد، ناگزیر بهتر خواهد شد. یک تفاوت بین دو مؤلف، استفاده‌ای است که آنها از تعریفهایشان می‌کنند. دالامبر مقاله‌های کوتاهی برای یک دائرةالمعارف می‌نوشت و نوشته‌اش توصیفی بود حال آنکه کوشی کتاب درسی می‌نوشت و از مفاهیم خود برای اثبات قضیه‌های نابدیهی ریاضی استفاده می‌کرد. اما تفاوت عمدهٔ آنها در میزان حلاّجی مفاهیم بود.

هر دو مؤلف با مفهوم حدِ حاصل از تقریب‌زنی شروع کردند. تقریب‌زنی، که گاهی به‌عنوان فرایندی تصور می‌شود که در زمان یا حتی در حرکت رخ می‌دهد، در عمل ریاضی به‌صورت یک فرایند محاسبه یا ساخت جلوه‌گر می‌شود که مراحل آن یا با عددهای گسسته و یا به‌وسیلهٔ قطعه‌ای از پیوستار شمرده می‌شوند. دستاورد مفهومیِ کوشی این بود که فرایند تقریب‌زنی را به‌طور ریاضی به مفهوم یک متغیر به‌اضافهٔ انتساب مقادیر فروکاست.

به زبان امروزی، فُرمهای کوشی را که باید با انتسابها پر می‌شدند می‌توان تابع نامید، ولی برای تمیزگذاشتن بین آنها و توابع واقعی که کوشی بعداً مدنظر قرار داد، می‌توان آنها را نطفه‌های تابعی خواند. ریاضیات در سیر رشد و تحول خود (دست‌کم) از زمان وایرشتراس، فرمها و انتسابها را کنار گذاشته و دنباله‌ها، خواه سَ‌دنباله‌ها یا دنباله‌های مورـاسمیت، را جایگزین آنها کرده یا تعریف صریح Bـحد را به‌کار گرفته است.

در حالی که در تعریف کوشی از حد، متغیر و انتساب به‌کار رفته است، استفادهٔ او از این اصطلاح و این مفهوم درکتابهایش شامل توصیفاتی است که در بخش ۴ب با شماره‌های (ک ۱)ـ(ک ۴) آمده‌اند، و بنابراین شامل Bـحدهایی نیز هست که اگر انتسابهای موجود در آنها را همانی روی L بگیریم، حاصل می‌شوند. گرابینر در سه مقاله‌اش، [۵]، [۶]، [۷]، خاطرنشان کرده است که کوشی خارج‌قسمت تفاضلی را، که در Théorème [قضیه]اش در [۳] (مجموعهٔ آثار، ۴، ص. ۴۴) مورد بررسی قرار داد، به‌عنوان حد تعریف کرد ولی خاصیتی که به‌کار گرفت، ویژگی یک Bـحد بود. درواقع، کوشی در آنجا حروف ϵ و δ را همان‌طور که ما به‌کار می‌بریم، به‌کار گرفت.

استدلالهای اپسیلن‌ـدلتایی استدلالهایی در بارهٔ نابرابریها هستند که امروز با استفاده از نمادهای ϵ و δ نوشته می‌شوند. ولی این نوع استدلالها (معمولاً بدون کاربرد این حرفهای خاص) چندین دهه پیش از بولتسانو و کوشی، زمانی‌که هیچ تعریف اپسیلن دلتایی وجود نداشت، به‌کار می‌رفتند. در مکاتبه‌ای با پست الکترونیک، در فهرست *Historica Mathematica*، به تاریخ ۲ی فوریهٔ ۲۰۰۰، کوئیرو[1] خاطرنشان کرد که در اثر پرتغالی زبان [۴] گزاره‌ای [گزارهٔ ۱ درکتاب XV، صص. ۱۹۷ـ۱۹۸] هست به این مضمون که اگر متغیر x به صفر میل کند، چندجمله‌ای $ax + bx^۲ + \cdots + gx^n$ نیز چنین می‌کند. درواقع (استدلال چنین ادامه پیدا می‌کند که) فرض کنید Q داده شده است. در این صورت اگر $x < ۱$ و $x < Q/nP$ که در آن P بزرگتر از هر یک از ضرایب است، به‌ازای هر یک از جمعوندهای dx^k، $dx^k < Q/n$. اما در این صورت Q از مجموع آنها بزرگتر است. (مرجع [۱۰] را نیز ببینید.)

گرابینر خاطرنشان می‌کند که لاگرانژ در [۸] یک استدلال اپسیلن‌ـدلتایی در اثبات قضیه‌ای در بارهٔ مشتقات به‌کار برده است. به‌طور مشخص، او نوشته است (مجموعهٔ آثار، ص. ۸۷):

Soit D une quantité donnée qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra; on pourra donc toujours donner à i une valeur assez petite pourque la valeur de V soit renfermée entre des limites D et $-D$; ...

فرض کنید D کمیتی مفروض باشد که بتوان آن را به‌قدر دلخواه کوچک گرفت؛ در این صورت همواره می‌توان مقداری به i نسبت

1. João Filipe Queiró

داد که به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد تا مقدار V بین حدهای D و $D-$ باشد.

حدس گرابینر دایر بر اینکه هم کوشی و هم بولتسانو ممکن است نحوهٔ استدلال خود را از این منبع آموخته باشند با توجه به این واقعیت که هر دو نفر از رسالهٔ لاگرانژ نقل‌قول کرده‌اند تقویت می‌شود.

۴ ت. **پیوستگی.** تعریف کوشی از پیوستگی در [۲]، صص. ۳۴ـ۳۵] (مجموعهٔ آثار، ص. ۴۳) چنین است

Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignés à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites donnés, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-mûeme.

با توجه به این، تابع $f(x)$، بین دو کران متغیر x، نسبت به این متغیر پیوسته است اگر به‌ازای هر مقدار x بین این کرانها، مقدار عددی تفاضل $f(x+\alpha)-f(x)$ همراه با آنِ α [مقدار عددی α] به‌قدر نامعینی کاهش یابد. به‌عبارت دیگر، تابع $f(x)$ نسبت به x بین این کرانها پیوسته می‌ماند اگر، بین این کرانها، نمو بینهایت کوچکی از متغیر همواره نمو بینهایت کوچکی از خودِ تابع را به همراه داشته باشد.

در اینجا تعریف درواقع به دو صورت بیان شده است. در [۳] فقط صورت دوم در تعریف پیوستگی ظاهر شده است.

هر یک از دوجملهٔ تعریف کاملی است و از عبارتِ «en d'autres terms» [به‌عبارت دیگر] چنین برمی‌آید که با هم معادل‌اند.

در صورت اول از تعریف، متغیر x ثابت نگه داشته می‌شود و حرف α نشان‌دهندهٔ یک متغیر است. این صورت حاکی است که $|f(x+\alpha)-f(x)|$ «همراه با» کاهش نامعین α به‌قدر نامعینی کاهش می‌یابد. در اینجا «avec celle de α» [همراه با آنِ α (مقدار عددی α)] ممکن است متقارن به‌نظر برسد. اما اگر یک شرط یکطرفه از آن برداشت می‌شد: «si celle de α décroît indéfiniment» [اگر مقدار α به‌قدر نامعینی کاهش یابد]، آنگاه بیانگر Cـپیوستگی یا Bـپیوستگی می‌بود (برحسب اینکه کاهش متغیر α به‌صورت دنباله‌ای در نظر گرفته می‌شد یا پیوسته). دلیلی ندارد که تصور کنیم کوشی، اگر تحت فشار قرار می‌گرفت، ادات شرط «اگر» را انتخاب نمی‌کرد.

اما «en d'autres terms» [به‌عبارت دیگر] گویای معنای زیر است: اگر انتساب با مقادیر α یک ' کمیت بینهایت کوچک' باشد، آنگاه انتساب با مقادیر $|f(x+\alpha)-f(x)|$ نیز چنین است. ولی اگر x ثابت و α متغیر باشد، آنگاه α به صفر میل می‌کند اگر و تنها اگر $x+\alpha$ به x میل کند، و چون $f(x)$ نیز ثابت است، $|f(x+\alpha)-f(x)|$ به صفر میل می‌کند اگر و تنها اگر $f(x+\alpha)$ به $f(x)$ میل کند. پس در اینجا کوشی باز Cـپیوستگی یا Bـپیوستگی را تعریف می‌کند.

تا جایی که من می‌دانم، کوشی از صورت اول در هیچ‌یک از مثالهایش استفاده نکرده است. صورت دوم را، علاوه بر سایر کاربردها، برای مشخص‌سازی جواب پیوستهٔ معادلهٔ تابعی‌اش ([۲]، ص. ۱۰۳ و چند صفحهٔ بعد]) و بعداً برای اثبات قضیهٔ مقدار میانی ([۲]، ص. ۴۶۲]) به‌کار برد. یک کاربرد بسیار جالب توجه Cـپیوستگی در اثبات اخیر در این نتیجه‌گیری دیده می‌شود که اگر دو متغیر به یک مقدار a میل کنند، آنگاه چون تابع $f(x)$ پیوسته می‌ماند، مقادیر متناظر f هم به $f(a)$ میل می‌کنند.

گرابینر در مقالاتش، [۵]، [۶]، [۷]، خاطرنشان می‌کند که لاگرانژ در [۹] توصیف (نه تعریف!) تقریباً همانندی از پیوستگی آورده است؛ وی موقعی این کار را می‌کند که تابعی به‌صورت $i\cdot P$ را (که P می‌تواند به i وابسته باشد) در نظر می‌گیرد و می‌نویسد (مجموعهٔ آثار، سری ۲، جلد ۹، ص. ۲۸):

il s'ensuit que, en considérant la courbe dont i serait l'abscisse et l'une de ces fonctions $[i\cdot P]$ l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses, et ... le cours de la courbe sera nécessairement continue depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper et s'en approchera, par conséquent, d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée, de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée, et alors toute valeur plus petite de i répondra aussi dès ordonnées moindres que la quantité donnée.

نتیجه می‌شود که، وقتی خمی را در نظر می‌گیریم که i طول آن و یکی از توابع $[i\cdot P]$ عرض آن است، این خم محور را در مبدأ طولها قطع می‌کند و ... مسیر خم لزوماً در ورای این نقطه ادامه می‌یابد؛ پس این خم قبل از قطع کردن محور به‌قدر نامعینی به آن نزدیک می‌شود و در نتیجه از هر کمیت مفروضی کوچکتر می‌شود به‌طوری که همواره می‌توانیم طول iای پیدا کنیم که عرض متناظر آن کوچکتر از یک کمیت مفروض باشد و لذا هر مقدار کوچکتر از i هم عرضی کوچکتر از کمیت مفروض به‌دست خواهد داد.

۵. مقایسهٔ بولتسانو و کوشی. هم بولتسانو و هم کوشی تعریفهایی از پیوستگی به‌دست دادند که بیانگر Bـپیوستگی و Cـپیوستگیِ امروزی است. هر دو نفر تعریفهایشان را دقیق کردند و آنها را به مفهوم امروزی به‌کار بردند؛ هر دو نفر این تعریفها را با مقایسهٔ اعداد و فواصل آنها به‌کمک نابرابریها برای اثبات قضایای مهمی در آنالیز به‌کار گرفتند. ولی کوشی مفهوم حد را تعریف کرد و آن را به‌کار برد حال آنکه بولتسانو چنین نکرد.

کوشی در مورد حد و پیوستگی تعریفهایی را ترجیح می‌داد که در آنها یک مفهوم واسطه، توصیف‌کنندهٔ یک فرایند تقریب‌زنی، به‌کار رفته بود یعنی مفهوم نطفه‌های تابع، مفهوم متغیر و انتساب. ولی بولتسانو دغدغه‌ای در

این باره نداشت که ریاضیدانان وقتی از فرایندهای نامتناهی صحبت می‌کنند به تصور خودشان چه کاری دارند انجام می‌دهند: تعریف او از پیوستگی، این مفهوم را به سطح مبادی فرو آورد و به همان صورتی که در عمل و تجربهٔ ریاضی مشهود است مطرح ساخت. همین موضوع در مورد تعریف اول کوشی صادق است ولی این تعریف، شاید به دلایل آموزشی، بی‌استفاده ماند.

آثاری از بولتسانو و کوشی که در اینجا در بارهٔ آنها بحث کردیم به منظورهای متفاوتی نگاشته شده‌اند. کوشی کتاب درسی می‌نوشت تا کمک کارِ درسهایش در آنالیز باشد. هدف از درس، یاددادن چیزهای تازه است، و یکی از شگردهای آموزشی هم ارائهٔ انگیزه و زمینهٔ مفاهیم با استفاده از چیزهای شناخته‌شده و شهود است. اما بولتسانو کتاب درسی نمی‌نوشت بلکه مقاله‌ای برای پایه‌ریزی بنیانِ مفهومیِ یک مفهوم خاص و اساسی آنالیز یعنی پیوستگی می‌نوشت. آنچه برای کوشی ابزاری برای چیزهای بعدی بود برای بولتسانو موضوع اصلی تحقیق بود.

کوشی درکتابهای درسیش قضایای خیلی بیشتری آورده است تا بولتسانو در رسالهٔ خود در بارهٔ مبانی. (دستنوشته‌های مفصلی در بارهٔ آنالیز به قلم بولتسانو وجود دارد که عیناً چاپ شده است ولی تاریخ نوشتن آنها مربوط به ۱۸۳۰ به بعد است.) آثار کوشی را معاصرانش و نسلهای بعد خواندند. ولی در مورد بولتسانو چنین نشد. بنابراین تأثیر بولتسانو در مقایسه با کوشی ناچیز بوده است.

کوشی حرفهای ϵ و δ را یک‌بار در ارتباط با حد به‌کار برد؛ بولتسانو D و ω را در ارتباط با پیوستگی به‌کار برد؛ او از حرفهای ϵ و δ هم، هر چند در زمینه‌ای متفاوت، در اثباتی در صفحات ۴۷ـ۴۸ از [۱]، استفاده کرد.

اما تاریخ ریاضیات تاریخ نمادگذاری نیست بلکه تاریخ ابداعات و مفهومهاست؛ و در آنجا، سال ۱۸۱۷ چهار سال نسبت به ۱۸۲۱ تقدم دارد. البته، ظاهراً دلیلی در دست نیست که فرض کنیم کوشی از کار بولتسانو آگاه بوده است.

صرف‌نظر از ریاضیات، تحولات سیاسیِ دورهٔ زندگی این دو مرد هم تأثیر قاطعی در سرنوشت آنها داشته است.

شرح جامعی از زندگی بولتسانو در

«Biographisches Bibel-Lexikon»

آمده است که روی شبکه به آدرس www.bautz.de/bbkl قابل دستیابی است. دیدگاههای فلسفی و مذهبی او بازتابی از روشنگری ژوزفی[1] بود. کرسیی که بولتسانو در ۱۸۰۷ به تصدی آن فراخوانده شد، به‌منظور مقابله با افکار آزادیخواهانه‌ای که از فرانسه می‌آمد ایجاد شده بود. بولتسانو با سخنرانیهای خود در جامعهٔ دانشگاهی توفیق زیادی در تبلیغ جنبه‌های اجتماعی اخلاقیات کاتولیکی به‌دست آورد. ولی تا سال ۱۸۱۱ دستور داشت که از یک کتاب درسی به قلم یک عالم الهیات وینی استفاده کند. او اعتراض کرد و بالاخره هم موفق شد ولی دشمنیهای شخصی مؤثری هم برانگیخت. وقتی در سال ۱۸۱۹ پای یکی از دوستانش به یک اغتشاش دانشجویی کشیده شد، دشمنانش فرصت را غنیمت شمرده او را متهم کردند که عنصر افراطیِ خطرناکی است، و در سال ۱۸۲۰ کرسی خود را از دست داد و از تدریس منع شد. بعداً کلیسا به بررسی عقاید او پرداخت و هدفش خلع بولتسانو از مقام کشیشی بود اما این نقشه در ۱۸۲۵، به علت حمایت اسقفهای مافوقش از او، به شکست انجامید. پس از برکناری، بولتسانو زندگی را با کارهای گهگاهی به‌عنوان معلم خصوصی و کشیشِ جانشین و دریافت کمک از دوستان، به سختی می‌گذراند.

لازار کارنو جزو کسانی بود که در سال ۱۷۹۲ به اعدام لوئی شانزدهم رأی داده بودند؛ وی بعدها آخرین وزیر کشور ناپلئون شد. او در سال ۱۸۱۵ از فرانسه گریخت و دیگر هرگز بازنگشت؛ در سال ۱۸۱۶ نامش از فهرست اعضای آکادمی حذف شد وکوشی که هنوز ۲۷ سالش نشده بود به جانشینی او منصوب شد. کوشی کرسی خود در پلی‌تکنیک را تا سال ۱۸۳۰ حفظ کرد. در ژوییهٔ آن سال آزادیخواهانِ فرانسه با بسیج عوام پاریس، شارل دهم را مجبور به کناره‌گیری کردند، و به این ترتیب سلسلهٔ بوربون بر افتاد. آنها فردی از خاندان اورلئان به‌نام لویی‌فیلیپ فرزند فیلیپ اِگالیتهٔ بدنام را به پادشاهی برگزیدند. کوشی حاضر نشد سوگند وفاداری نسبت به کسی ایراد کند که او را غاصب می‌دانست، و در نتیجه شغلش را از دست داد. ولی همچنان عضو آکادمی باقی ماند. او فرانسه را ترک کرد، در تورن و پراگ به‌تدریس پرداخت و فقط در ۱۸۳۸ به پاریس بازگشت. در سال ۱۸۳۹ وزارت مربوطه با رأی همکارانش که او را به عضویت کولژ دو فرانس[1] برگزیده بودند مخالفت کرد. در همان سال اعضای بورو دِ لونژیتود[2] او را به عضویت برگزیدند ولی پس از آنکه چهار سال در آنجا خدمت کرد، وزارتخانه انتخاب او را باطل کرد. در سال ۱۸۴۸ حکومت جمهوری کوشی را به تصدی یک کرسی در دانشکدهٔ علوم منصوب کرد ولی وی در ژوئن ۱۸۵۲ مجبور شد از این هم دست بکشد زیرا دوباره مسألهٔ سوگند وفاداری، این بار نسبت به لوئی ناپلئون، مطرح شد؛ بالاخره در سال ۱۸۵۴ کرسی را با امتیاز ویژه و بدون قید و شرط به‌دست آورد.

۶. باغ‌وحش بینهایت کوچکها. عبارات بولتسانو در بخشهای قبل برای تطابق با زبان امروزی نیازی به تعبیر نداشت ولی کوشی از 'کمیتهای بینهایت کوچک' سخن گفته است که امروز دیگر به‌کار نمی‌رود. البته او این کار را پس از معرفی حد به زبانی که نیاز به تعبیر و تفسیر ندارد انجام داد و 'کمیتهای بینهایت کوچک' را به‌عنوان حالتی خاص از حد تعریف کرد. پس، همراه با اصطلاح حد، برای 'کمیتهای بینهایت کوچک' هم می‌توان تعبیری به‌زبان امروزی ارائه کرد که تعبیر متعارف قلمداد شود. کوشی 'کمیتهای بینهایت کوچک' را به‌عنوان یک اصطلاح (دقیق) به‌کار برد، به‌عنوان وسیله‌ای برای حفظ ارتباط با گذشته، که بینهایت کوچکها عددهایی متعلق به ردهٔ پایینتری از اعداد ارشمیدسی قلمداد می‌شدند.

---

۱. ظاهراً منسوب به پدر روحانی ژوزف (Joseph، ۱۵۷۷ـ۱۶۳۸) معروف به عالیجناب خاکستری که نام اصلیش فرانسوا لوکلر دو تراملبه و محرم اسرار ریشیلیو وزیراعظم فرانسه بود ـ م.

۱. Collége de France، مؤسسهٔ علمی مشهور فرانسه (تأسیس شده در ۱۵۲۹) که استادانش معمولاً از دانشمندان معروف‌اند. نهادی آزاد و مستقل است؛ نه امتحان دارد و نه گواهینامه با درجهٔ علمی می‌دهد؛ شرکت در سخنرانیهای آن برای عموم آزاد است ــ دایرةالمعارف فارسی، مصاحب.

۲. Bureau des Longitudes، انجمن رسمی علما که در رصدخانهٔ پاریس به موضوعات ریاضیات و نجوم می‌پردازد ــ فرهنگ فرانسه‌ـفارسی، سعید نفیسی.

ابراهام رابینسن عددهای حقیقی R را در هیأتی ناارشمیدسی چون S نشاند که در آن همهٔ Lـساختارهای صادق در R، در S نیز صادق‌اند. L زبانی است که نامهایی برای همهٔ اعداد حقیقی، محمول‌ـنشانه‌هایی برای همهٔ مجموعه‌ها و روابط بین اعداد حقیقی، دارد. این رابطهٔ فارياضی بین R و S را می‌توان با یک شرط «مجموعه جواب» به ظاهر ساده‌تر، مانند آنکه در کتاب کیسلر[1] دیده می‌شود، بیان کرد.

به این ترتیب، تعمیم مفاهیم آنالیز «استانده» از R به یک آنالیز «نااستانده» روی S میسر گشت که در این آنالیز جدید، وجود عددهای بینهایت کوچک یعنی اعداد کوچکتر از $1/n$ به‌ازای n طبیعی، به ما امکان می‌دهد بعضی استدلالها راکه لایب‌نیتس و معاصرانش مجبور بودند مبهم بگذارند، به‌شیوه‌ای تازه و دقیق بیان کنیم.

رابینسن در [۱۲] تعریفهای کوشی را در صفحات ۲۶۹ـ۲۷۰ نقل می‌کند و در ادامه می‌افزاید:

> از عبارات بالا چنین استنباط می‌کنیم که کمیتهای بینهایت کوچک در رهیافت کوشی به آنالیز اهمیت بنیادی دارند. ولی این کمیتها عدد نیستند بلکه متغیر، یا حالتهای متغیرهایی که حدشان صفر است، هستند . . .
>
> تصویر دقیق کمیت بینهایت کوچک در ذهن کوشی هر چه بوده باشد، می‌توانیم تعریفهای بعدی او را بررسی کنیم و ببینیم که اگر کمیتهای بینهایت کوچک و بینهایت بزرگِ ذکر شده در آن تعریفها را به مفهوم آنالیز نااستانده تعبیر کنیم، آن تعریفها معادل چه هستند. بنابراین، در مورد مفهوم پیوستگی، تعریف کوشی را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که بگوییم به‌ازای $f(x)$ تعریف شده در بازهٔ $a < x < b$، $f(x)$ در آن بازه پیوسته است اگر، به‌ازای αی بینهایت کوچک، تفاضل $f(x+\alpha) - f(x)$ همواره (toujours) بینهایت کوچک باشد. حال اگر «همواره» را به‌معنای «به‌ازای هر x استانده» تعبیر کنیم، پیوستگی معمولی را در آن بازه به‌دست می‌آوریم ولی اگر آن‌را به‌معنای «به‌ازای هر x» بگیریم، پیوستگی یکنواخت به‌دست می‌آید.

رابینسن در پاراگراف اخیر چیزی را معرفی کرده است که من آن را تعبیر رابینسن می‌نامم:

> (الف) هر جا کوشی از ' کمیتهای بینهایت کوچک' سخن گفته، در صورت امکان فرض می‌کنیم که این کمیتها اعداد بینهایت کوچکی به‌مفهوم آنالیز نااستانده هستند، و
>
> (ب) شرح و بسطهای بعدی کوشی را با فرض (الف) و با استفاده از اطلاعات امروزی (یا وایرشتراسی) در بارهٔ تمایزهایی از قبیل تمایز پیوستگی و پیوستگی یکنواخت، تعبیر می‌کنیم.

این، تعبیر، دریافتهای ریاضی زیبایی درپی داشته است. ازجمله، بعضی حکمهای غلط کوشی (در بارهٔ سریِ توابع پیوسته، پیوستگی در حالت چندمتغیره . . .) را می‌توان به این طریق به‌صورت حکمهای درستی در آنالیز نااستانده تعبیر کرد. در این زمینه، به مقالات روشنگر جان کلیو، [۱۳] و [۱۴]، مراجعه کنید.

1. J. Keisler

ولی باید تأکید کرد که تعبیر رابینسن به هیچ‌وجه توضیحی برای مضمون تاریخی نوشته‌های کوشی نیست و از عبارات رابینسن در بالا پیداست که او چنین منظوری نداشته است. کوشی صریحاً نوشت که ' کمیتهای بینهایت کوچک' او مقادیر عددی دارند، یعنی عددهای حقیقی هستند:

> Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable ...
>
> وقتی مقادیر عددی متوالی یک متغیر . . .

البته، (مثلاً) عددهای بینهایت کوچک ناارشمیدسی پاسکال هنوز در پسِ ذهن کوشی و معاصرانش بوده است. ولی کوشی در مورد ' کمیتهای بینهایت کوچک' خود قاطعاً تصریح می‌کند که آنها انتسابهایی به متغیرها هستند که مقادیرشان عددهایی حقیقی‌اند. در نوشته‌های کوشی هیچ جا ذکری از بینهایت کوچکها نشده است. با این حال، گاه و بیگاه مقاله‌هایی می‌بینیم که مؤلفان آنها بدون توجه به نوشتار کوشی سعی می‌کنند خودشان را قانع کنند که تعبیر رابینسن «منظور واقعی» کوشی را توضیح می‌دهد. در اینجا به مقالهٔ گوردون فیشر [۱۵] اشاره می‌کنم که در آن بر مبنایِ این ادعایِ غلط که کوشی صریحاً مقادیر بینهایت کوچک را از دایرهٔ شمول ' کمیتهای بینهایت کوچک' خود کنار نگذاشته، بارها اظهار می‌شود که تعبیر رابینس از لحاظ تاریخی درست است:

> «وقتی مقدارهای عددی متوالی یک متغیر به‌قدر نامعینی [بلاانقطاع] کاهش می‌یابند به‌گونه‌ای که از هر عدد مفروضی کمتر می‌شوند، این متغیر تبدیل به چیزی می‌شود که یک بینهایت کوچک (un infiniment petit) یا یک کمیت بینهایت کوچک نام دارد. متغیری از این نوع دارای حد صفر است.» جملهٔ اول می‌تواند به این معنی باشد که وقتی مقادیر عددی (یعنی مطلق) یک متغیر چنان کاهش یابند که کوچکتر از هر عدد مثبتی باشند، آنگاه این متغیر مقادیری بینهایت کوچک اختیار می‌کند (انتهای صفحهٔ ۳۱۶).
>
> قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم که تعریف کوشی از متغیر، مقادیر بینهایت کوچک را طرد نمی‌کند (پاراگراف ۳، ص. ۳۱۸). . . . ممکن بود به‌صورت . . . در نظر گرفته شود که در آن α مجاز نیست مقادیر بینهایت کوچک ناصفر اختیار کند. ولی وضع چنین محدودیتی ضروری نیست، وکوشی هم نمی‌گوید که مطلوب یا حتی ممکن است (پاراگراف ۲، ص. ۳۱۹).

در این زمینه همچنین می‌توان از مقاله‌ها و کتابهایی به قلم لاوگویتس[1] یاد کرد که با پرهیز از آنالیز نااستانده، به این عنوان که ابداع تحقیرآمیز منطقدانان است، «ریاضیات بینهایت کوچک» خودش را عرضه می‌کند و با استفاده از آن به تعبیر ماهرانهٔ جنبه‌های گوناگون ریاضیاتِ دورهٔ اویلر تاکوشی می‌پردازد. و این بود نگاهی به باغ‌وحش بینهایت کوچکها.

۷. سازوکارِ متناهی‌سازی. آنالیز ریاضی سرشار از شگفتیهاست. تعجب‌آور نیست که بتوانیم حکمهایی در بارهٔ مثلثها یا در بارهٔ اعداد، مثلاً تجزیه به عوامل اول و یکتایی آن، ثابت کنیم. ولی آنالیز با فرایندهایی

1. D. Laugwitz

نامتناهی ــ یا دست‌کم چیزهایی که به تصور ما نامتناهی‌اند ــ سروکار دارد، و با این حال می‌خواهیم حکمهایمان را با نوشتن تعدادی متناهی سطر اثبات کنیم.

وقتی ما از تابع یا متغیری که indéfiniment [به‌قدر نامعینی، یا بلاانقطاع] به یک مقدار میل می‌کند سخن می‌گوییم، فرایندی حدی را در نظر داریم. تحلیل بولتسانو و کوشی از مفاهیم حد و پیوستگی از ϵ به‌عنوان شاخص تقریب آغاز می‌شد و به δ، که ϵ به آن وابسته است، می‌انجامید. مفهوم فرایند حدی اگر برحسب ϵ و δ بیان شود ــ تا جایی که به‌کاربرد ریاضی مربوط است ــ به شیوه‌ای متناهی‌وار انجام شده است.

تا اینجا ϵ و δ (و در مورد دنباله‌ها، همچنین n و N) همچون دستگیره‌هایی به‌نظر می‌رسند که به مراحل آن فرایندهای نامتناهی الصاق شده‌اند. به نظر می‌رسد که اگر در تمرینهای ذهنی خود به طرز مناسبی از آنها استفاده کنیم، به ما امکان می‌دهند که تعدادی متناهی استدلال را برای اثبات حکمهایی به‌کار بریم که در نهایت، راجع به همهٔ مراحل آن فرایند نامتناهی هستند. البته تمرینهای ذهنی تمرینهایی در منطق هستند. در اینجا کاربرد آنها را در برهان ساده‌ای از آنالیز نشان می‌دهم.

می‌خواهم نشان دهم که تابع $f(x) = a^x$ با ضابطهٔ $a > 1$ به‌ازای عدد گویای مثبت x در 0 دارای Bـحدِ 0 است. من استلزام و عطف را با علائم اختصاری $\Rightarrow$ و $\wedge$، و سورهای «به‌ازای هر x:» و «xای وجود دارد:» را با $\forall x$ و $\exists x$ می‌نمایانم. از قواعد فرگه‌ای سور استفاده می‌کنم.

(RE) از $B \Rightarrow C(t)$ نتیجه می‌شود $B \Rightarrow \exists x C(x)$

(LE) از $B(y) \Rightarrow C$ نتیجه می‌شود $\exists x B(x) \Rightarrow C$ (*)

(RA) از $C \Rightarrow B(y)$ نتیجه می‌شود $C \Rightarrow \forall x B(x)$ (*)

(LA) از $B(t) \Rightarrow C$ نتیجه می‌شود $\forall x B(x) \Rightarrow C$

با این قیدها در (LE) و در (RA) که

(*) حرف y متغیری آزاد است که در C ظاهر نمی‌شود.

عملاً در اینجا استفاده‌ای از (LA) نمی‌کنم. پنج گام اول اثبات، محاسباتی آشنا روی نابرابریها هستند. از تعریف f نتیجه می‌شود

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \qquad (0)$$

حال $h = f(1/n) - 1$ مثبت است، و نابرابری برنولی حاکی است که

$$h > 0 \Rightarrow 1 + nh < (1+h)^n \qquad (1)$$

، پس

$$1 + n \cdot (f(1/n) - 1) < a \qquad (2)$$

، پس

$$f(1/n) < (a-1)/n \qquad (3)$$

، پس

$$1/n < \epsilon/(a-1) \Rightarrow f(1/n) < \epsilon \qquad (4)$$

اگر اصل استقرای ریاضی را برای استنتاج نابرابری برنولی (۱) به‌کار گیریم، نتیجه می‌گیریم که حرف n در آنجا متغیری آزاد است؛ پس در (۴) هم هر دوی ϵ و n آزادند. هدف اول من این است که ثابت کنم

$$\exists n(1/n < \epsilon/(a-1)) \Rightarrow \exists n(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \qquad (5)$$

این بنا به قاعدهٔ (LE) از

$$1/n < \epsilon/(a-1) \Rightarrow \exists n(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon)$$

نتیجه می‌شود که n در سمت چپ آزاد است و این رابطه هم خود با استفاده از قاعدهٔ (RE) از

$$1/n < \epsilon/(a-1) \Rightarrow (1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon)$$

به‌دست می‌آید. رابطهٔ اخیر نیز از (۰) و (۴) نتیجه می‌شود و ما معمولاً این‌گونه استدلالها را شرح و تفصیل نمی‌دهیم. ولی برای نشان‌دادن اینکه هیچ سوری برای این به‌کار نمی‌رود، جزئیات (گزاره‌ای) را نشان می‌دهم

الف. (از (۰)) $1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < f(1/n)$

ب. (تعدی) $f(1/n) < \epsilon \wedge f(1/m) < f(1/n) \Rightarrow f(1/m) < \epsilon$

پ. (از ب و الف) $(1/n) < \epsilon \wedge 1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon$

ت. (از پ و (۴)) $1/n < \epsilon/(a-1) \wedge 1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon$

(از ت) $1/n < \epsilon/(a-1) \Rightarrow (1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon)$

پس (۵) ثابت شده است. بنا به‌ویژگی ارشمیدسی، مقدمهٔ (۵) قابل اثبات است:

(۶) $\exists n\ 1/n < \epsilon/(a-1)$، پس

(۷) $\exists n\,(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon)$.

هدف دوم من این است که ثابت کنم

$$\exists n\ (1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon)$$

$$\Rightarrow \exists \delta\ \forall y(y < \delta \Rightarrow f(y) < \epsilon) \qquad (8)$$

و این طبق قاعدهٔ (LE) از

$$(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \Rightarrow \exists \delta\, \forall y(y < \delta \Rightarrow f(y) < \epsilon)$$

نتیجه می‌شود که n در سمت چپ آن آزاد است و این رابطه با قاعدهٔ (RE) از

$$(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \Rightarrow \forall y(y < 1/(n+1) \Rightarrow f(y) < \epsilon)$$

به‌دست می‌آید که خود بنا به قاعدهٔ (RA) از

$$(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \Rightarrow (y < 1/(n+1) \Rightarrow f(y) < \epsilon)$$

نتیجه می‌شود و در آن n و y آزادند. و باز، ما معمولاً این را شرح و تفصیل نمی‌دهیم ولی برای نشان‌دادن اینکه هیچ سوری به‌کار نمی‌رود من جزئیات (گزاره‌ای) را نشان می‌دهم:

الف. (از (۰)) $y < 1/(n+1) \Rightarrow f(y) < f(1/(n+1))$

ب. $(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \Rightarrow f(1/(n+1)) < \epsilon$

پ. $(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \wedge y < 1/(n+1) \Rightarrow$

(از الف و ب) $f(y) < f(1/(n+1)) \wedge f(1/(n+1)) < \epsilon$

ت. (تعدی) $f(y) < f(1/n+1) \wedge f(1/n+1) < \epsilon \Rightarrow f(y) < \epsilon$

ث. (از پ و ت) $(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \wedge y < 1/(n+1) \Rightarrow$

$f(y) < \epsilon$

(از ث) $(1/m < 1/n \Rightarrow f(1/m) < \epsilon) \Rightarrow (y < 1/(n+1) \Rightarrow f(y) < \epsilon)$

پس (۸) ثابت شده است. مقدمه بنا به (۷) قابل اثبات است، پس

$$\exists\delta\,\forall y(y<\delta\Rightarrow f(y)<\epsilon) \qquad (۹)$$

چون ϵ در اینجا آزاد است، از قاعدهٔ (RA) نتیجه می‌شود

$$\forall\epsilon\,\exists\delta\,\forall y(y<\delta\Rightarrow f(y)<\epsilon) \qquad (۱۰)$$

پس f در ۰ دارای حد ۰ است. حال با قراردادن $f(۰)=۰$، طبق معمول، پیوستگی f به‌ازای متغیرهای گویای نامنفی ثابت می‌شود.

حکم (۱۰) نمونهٔ بارز حکمهای موردنظر در آنالیز است. اثبات آن نخست مشتمل بود بر تبدیلاتی از نابرابریها، با متغیرهای آزاد y، n، ϵ؛ قواعد سور فقط در اواخر وارد کار شد. فرمولهای به‌دست آمده از ترکیبات نابرابریها بدون سور، به‌ازای بینهایت عدد قابل اثبات بودند زیرا به‌ازای متغیرهای آزاد قابل اثبات بودند (یک ویژگی خاص نابرابری برنولی این است که قاعدهٔ استقرا را می‌توان به‌صورتی به‌کار برد که n را به‌عنوان یک متغیر آزاد به‌دست دهد)؛ پس نخستین گام برای در چنگ گرفتن بینهایت، استفاده از متغیرهای آزاد بود.

دومین گام استفاده از قاعده‌های (LE) و (RA) با قید $(*)$ روی متغیرهای آزاد بود. برای تضمین برقراری

$$C\Rightarrow\forall xB(x) \qquad (الف\ ۱)$$

خواننده ممکن است با الهام از تعبیرِ معناشناختیِ «به‌ازای هر x» سعی کند

$$C\Rightarrow B(۱),C\Rightarrow B(۲),\dots,C\Rightarrow B(r),\dots \qquad (الف\ ۲)$$

را به‌ازای هر ثابتِ عددی ۱، ۲، ...، r، ... برقرار سازد که کاری بی‌پایان خواهد بود. در عوض، با تضمین برقراری

$$C\Rightarrow B(x) \qquad (الف\ ۳)$$

به‌عنوان مقدمهٔ (LR)، که در آن x متغیری آزاد است که در C ظاهر نمی‌شود، اثبات $C\Rightarrow B(x)$ شامل متغیر x به‌عنوان پارامتری است که به‌جای آن می‌توان هر ثابت عددی r را گذاشت، و بنابراین برای هر فرمول در (الف ۲) اثباتی تولید می‌کند که رونوشت همان اثبات با قراردادن r به‌جای x است. به این دلیل، به هر اثبات (الف ۳) می‌توان به چشم یک اثبات یکنواخت برای بینهایت فرمول (الف ۲) نگریست.

همین وضعیت برای قاعدهٔ (LE) پیش می‌آید که در آن برقراری

$$\exists xB(x)\Rightarrow C \qquad (ب\ ۱)$$

با برقراری یکی از بینهایت فرمول

$$B(۱)\Rightarrow C,B(۲)\Rightarrow C,\cdots,B(r)\Rightarrow C,\dots \qquad (ب\ ۲)$$

تضمین نمی‌شود بلکه با برقراری

$$B(x)\Rightarrow C \qquad (ب\ ۳)$$

به‌عنوان مقدمهٔ (LE) تضمین می‌شود که در آن x متغیری آزاد است که در C ظاهر نمی‌شود.

و باز هر اثبات (ب ۳) را می‌توان اثباتی یکنواخت برای یکی از بینهایت فرمول (ب ۲) دانست.

خواننده توجه دارد که (LE) همچنین توصیف‌کنندهٔ استدلالی است که برای اثبات یک حکم C با استفاده از فرضِ تهی نبودن یک مجموعهٔ B به‌کار می‌رود: عنصری دلخواه چون x در B انتخاب کنید و C را از فرض $B(x)$ یعنی این فرض که x در B است استنتاج کنید. ریاضیدانان بادقتی ازقبیل اریش کامکه و پیتر هیلتن، در هنگام تحلیلِ استدلال خود، اعتقاد داشتند که آنها در این وضعیت به اصل موضوع خاصی برای «انتخاب x دلخواه در مجموعهٔ ناتهی B» نیازمند بوده‌اند.

پس ϵ و δ آن ابزارهای اساسی نبودند که به ما امکان دادند اتباتمان را در تعدادی متناهی از سطور بنویسیم. بلکه آن ابزارها قاعده‌های سور (RA) و (LE) با استفاده از مقدمه‌های متغیر آزاد تحت قید $(*)$ بودند. ϵ و δ خودشان فقط آن متغیرهای آزاد خاصی بودند که بنا به ملاحظات استراتژیک چنان انتخاب شده بودند که مقدمه‌های بی‌سوری فراهم شود تا سپس قواعد سور بر آنها قابل اِعمال باشد.

قواعد سور (LE) و (RA) با $(*)$ در ۱۸۷۹ به‌وسیلهٔ گوتلوب فرگه (۱۸۴۸ـ۱۹۲۵) کشف شدند و او به این طریق، منطق ریاضی را پایه‌ریزی کرد.

البته ریاضیدان معاصر، که اشیای ریاضی را متشکل از مجموعه‌ها در نظر می‌گیرد، ممکن است این واقعیت را دوست نداشته باشد که تنها راه اثبات «به‌ازای هر x : $B(x)$» در نظر گرفتن چیزهای واقعی غیرمفهومی است یعنی نخست، اثبات $B(y)$ با یک حرف y در نقش یک متغیر آزاد. اما اگر اثباتهایی را که عملاً انجام می‌دهد بررسی کند، متوجه خواهد شد که این کاری است که همیشه ــ به‌جای ارائهٔ بینهایت اثبات برای تک‌تک نمونه‌های $B(r)$ به‌ازای بینهایت عدد r ــ انجام می‌دهد.

و بنابراین، قواعد سور به جاهای معدودی مربوط می‌شوند که «بخیه‌ها»ی بدنهٔ ریاضی که از متغیرها تشکیل شده است، هویدا هستند. این ابزارهای زبانی، این توسل به واقعیات سادهٔ زبان به ما امکان می‌دهد با فرایندهایی که تصور می‌کنیم نامتناهی باشند، رفتاری متناهی‌وار داشته باشیم.

مراجع

1. B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehratzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Abhandlungen der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 3. Folge, Band 5, 1. Abtheilung. Prag, H. Haase, 1817, 60 pp.).

مرجع [۱۱] ترجمهٔ این اثر به انگلیسی است.

2. A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris 1821 (reprinted in Oeuvres Complètes, sér. 2., vol. 3).

3. A. L. Cauchy, *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur l'Calcul Infinitésimal*, Paris 1823 (repr. in Oeuvres Complètes, sér. 2., vol. 4).

4. J. A. da Cunha, *Principios Mathematicos*, Lisboa, A. L. Galhardo 1790; *Principes Mathématiques.* Traduit littéralement du Portugais par J. M. d'Abreu. Bordeaux, A. Racle 1811. (Reprints of both editions: Departamento de Matemática, Coimbra 1987).

5. J. V. Grabiner, The origins of Cauchy's theory of the derivative, *Historia Math.* **5** (1978) 379-409.

6. J. V. Grabiner, Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, *American Math. Monthly* (1983) 185-194.

7. J. V. Grabiner, Cauchy and Bolzano. In Everett Mendelsohn (editor): *Transformation and Tradition in the Sciences*, Cambridge (Mass.) UP 1984, 105-124.

8. J. L. Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions.* 2. éd., Paris 1806 (reprinted with different pagination in Oeuvres, sér. 2, vol. 10).

9. J. L. Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évannouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantitées finies*, 2. éd., Paris, 1813; reprinted with different pagination in Œuvers, sér. 2, vol. 9.

10. J. F. Queiró, José Anastásio da Cunha: A Forgotten Forerunner, *Math. Intelligencer* 10 (1988) 38-43.

11. S. B. Russ, A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem, *Historia Math.* **7** (1980) 156-185.

12. A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1966.

13. J. P. Cleave, Cauchy, Convergence and Continuity, *British J. Phil. Sci.* **22** (1971) 27-37.

14. J. P. Cleave, The concept of 'variable' in nineteenth century analysis, *British J. Phil. Sci.* **30** (1979) 266-278.

15. G. Fisher, Cauchy and the infinitely small. *Historia Math.* **5** (1978) 313-331.

* * * * * *

• Walter Felscher, "Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta", *Amer. Math. Monthly*, (9) **107** (2000) 844-862.

* والتر فلشر، دانشگاه توبینگن، آلمان

felscher@informatik.uni-tuebingen.de

نخستین کاربرد نمادهای مشتق•

نمادهای dx، dy، dx/dy را برای نخستین بار گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۶۴۶ـ۱۷۱۶) در دستنوشته‌ای به تاریخ ۱۱ نوامبر ۱۶۷۵ به‌کار برد.

مبدع نماد $f'(x)$ برای مشتق اول، $f''(x)$ برای مشتق دوم، و غیره، ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳) است. وی در نظریهٔ توابع تحلیلی‌اش در ۱۷۹۷ نمادهای $f'x$ و $f''x$ را به این منظور به‌کار برد و در تجدید چاپ آن در ۱۸۰۶، $f'(x)$ و $f''(x)$ را جایگزین آنها کرد.

لاگرانژ در سال ۱۷۷۰ در رسالهٔ روش نوین حل معادلات حرفی از راه سریها، $\frac{d\Psi}{dx}$ را با Ψ' نمایش داد. این نماد در رساله‌ای به قلم «فرانسوا داویه دّ فونسونکس» نیز در ۱۷۵۹ ظاهر شده بود که گمان می‌رود نویسندهٔ واقعی این رساله همان لاگرانژ بوده باشد.

لاگرانژ به سال ۱۷۷۲ عبارات $u' = du/dx$ و $du = u'dx$ را در مقالهٔ «در بارهٔ نوع جدیدی از محاسبات مربوط به مشتقگیری و انتگرالگیری از کمیات متغیر» در گزارشهای تازهٔ آکادمی سلطنتی علوم و ادبیات برلین به‌کار برد.

نماد D_xy را لویی فرانسوا آنتوان آربوگاست (۱۷۵۹ـ۱۸۰۳) در سال ۱۸۰۰ در مقالهٔ «در بارهٔ محاسبهٔ مشتقات و مورد استعمال آنها در نظریهٔ دنباله‌ها و حساب دیفرانسیل» معرفی کرد. نماد D را هم آربوگاست در همین اثر به‌کار برد. هر چند یوهان برنولی قبلاً آن را معرفی کرده بود، ولی این علامت را به مفهوم عملگر به‌کار نبرده بود.

* * * * * *

• منبع:

http://members.aol.com/jeff570/calculus.html

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، صص. ۵۸-۶۲

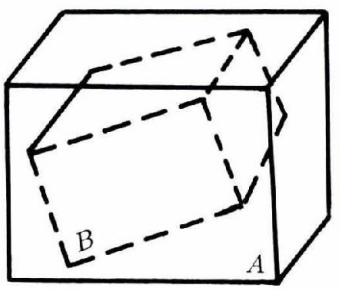
آموزش و مسأله

چند مسألهٔ دیگر ...

کسری علیشاهی*

قصد دارم با نقل یک مسأله، و راه‌حل شگفت‌انگیز آن شروع کنم:

مسألهٔ ۱. گویا قانونی در راه‌آهن روسیه وجود دارد که طبق آن مجموع طول، عرض و ارتفاع جعبه‌های بار نباید از یک مترونیم بیشتر شود! مسأله این است: آیا می‌توان یک جعبهٔ غیرمجاز را درون یک جعبهٔ مجاز جاسازی کرد؟ به بیان دقیقتر: اگر مکعب مستطیل B با اضلاع b_1, b_2 و b_3 کاملاً درون مکعب مستطیل A با اضلاع a_1, a_2, a_3 قرار گرفته باشد، آیا ممکن است که $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$؟



جواب سؤال منفی است، ایدهٔ اثبات، در نظرگرفتن A_t و B_t، به ترتیب، به عنوان tـهمسایگی‌های A و B در $\mathbb{R}^3$ است (tـهمسایگی یک مجموعه در $\mathbb{R}^3$ یعنی نقاطی که فاصلهٔ آنها تا مجموعه از t بیشتر نباشد). به‌سادگی می‌توان فهمید که tـهمسایگی یک مکعب‌مستطیل [توپُر] از چه چیزهایی تشکیل شده: خود مکعب‌مستطیل اولیه، شش مکعب‌مستطیلِ جانبی به ضخامت t، دوازده ربع استوانه روی اضلاع با شعاع قاعدهٔ t و هشت تا یک‌هشتم کره به شعاع t روی رئوس. و بنابراین حجم این tـهمسایگی، برابر مجموع حجم اجزاء تشکیل‌دهندهٔ آن و به‌راحتی قابل محاسبه است:

$$V(A_t) = (a_1a_2a_3) + 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)t + \pi(a_1 + a_2 + a_3)t^2 + \frac{4}{3}\pi t^3 \quad \text{(i)}$$

حال توجه کنید که چون $B \subseteq A$ پس برای هر t، $B_t \subseteq A_t$ و بنابراین: $V(B_t) \leq V(A_t)$. اگر مقادیر $V(A_t)$ و $V(B_t)$ را مطابق (i) جایگذاری کنیم، پس از حذف جملهٔ مشترک $\frac{4}{3}\pi t^3$ از دو طرف نامساوی و میل‌دادن t به ∞ حکم به‌دست می‌آید: $\pi(a_1 + a_2 + a_3) \leq \pi(b_1 + b_2 + b_3)$! □

یکی از گامهای مهم در اثبات فوق به‌دست آوردن رابطهٔ (i) است. یعنی فرمولی ساده برای حجم tـهمسایگی A؛ به نظر می‌رسد که مکعب‌مستطیل بودنِ A در اینجا نقش عمده‌ای دارد، این‌طور نیست؟ نه! و اثبات اینکه این‌طور نیست به عهدهٔ شما:

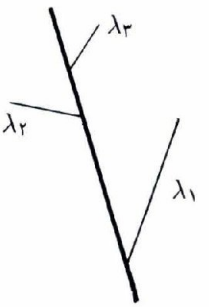
مسألهٔ ۲. اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ شکلی محدب و کراندار باشد و $V(A_t)$ حجمِ nبعدیِ tـهمسایگی A در $\mathbb{R}^n$ را نمایش دهد، نشان دهید $V(A_t)$ به شکل یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب t است! (راهنمایی: ابتدا مسأله را برای چندوجهی‌ها حل کنید.)

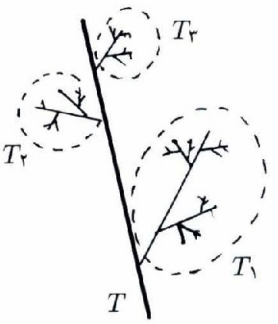
حکم مسألهٔ شمارهٔ ۲، حکم عمیقی است، اگر بنویسیم: $V(A_t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j t^{n-j}$، λ_jها فقط به شکل A بستگی داشته و با حرکت صلب A در $\mathbb{R}^n$ تغییری نمی‌کنند، کمیتهای خالص هندسی! می‌توانید خودتان را متقاعد کنید که λ_n و λ_{n-1} به‌ترتیب حجم nبعدی و

سطح $n-1$بعدی شکل A را نشان می‌دهند ولی بقیهٔ λ_iها کمتر شناخته شده‌اند.

ایدهٔ در نظر گرفتن tـهمسایگی در مواردی که با موجودی غیرمحدب سروکار داریم هم می‌تواند نتیجه‌بخش باشد. مسألهٔ بعد، مثال واقعاً جالبی است:

پاره‌خطی به طول ۱ در نظر بگیرید که پاره‌خطهای کوچکتری به طول λ_1، ... ، λ_n از آن منشعب شده‌اند. حال اگر روی هرکدام از این پاره‌خط‌ها همین فرایند انشعاب را تکرار کنیم (یعنی پاره‌خط‌های کوچکتری با همان زاویه و نسبت طول منشعب کنیم) و مرتباً این کار را ادامه دهیم ... نهایتاً شکلی به‌دست می‌آید که آن را T می‌نامیم. با توجه به نحوهٔ بازگشتیِ ساختن T، واضح است که T_1، T_2 ... T_n ، شاخه‌های اصلی، نسخه‌های کوچک شده‌ای از خود T هستند.





مسألهٔ ۳. نشان دهید اگر $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 1$، آنگاه شاخه‌های T درهم گیر می‌کنند، یعنی $\overline{T}_i$ها نمی‌توانند همگی مجزا از یکدیگر باشند.

اثبات: $f(t)$ را برابر $A(T_t)$، یعنی مساحت t همسایگی T، تعریف می‌کنیم. اگر $\overline{T}_i$ها همگی مجزا از هم باشند، چون مجموعه‌هایی فشرده هستند پس فاصلهٔ مثبتی از هم دارند و بنابراین برای t به‌اندازهٔ کافی کوچک، $(T_i)_t$ها با هم اشتراک ندارند و بنابراین

$$f(t) = A(T_t) \geq \sum_{i=1}^{n} A((T_i)_t)$$

(توجه: اندیس i که فقط مقادیر صحیح می‌گیرد برای شمارش شاخه‌هاست ولی اندیس t که فقط مقدار پیوسته می‌گیرد برای نمایش tـهمسایگی است.) اما همان‌طور که گفتیم T_i، تجانسی با نسبت λ_i از T است و بنابراین $(T_i)_t$ تجانسی با ضریب λ_i از $T_{\frac{t}{\lambda_i}}$ است یعنی

$$A((T_i)_t) = A(\lambda_i T_{\frac{t}{\lambda_i}}) = \lambda_i^2 f(\frac{t}{\lambda_i})$$

بنابراین داریم

$$f(t) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 f(\frac{t}{\lambda_i}) \qquad \text{(ii)}$$

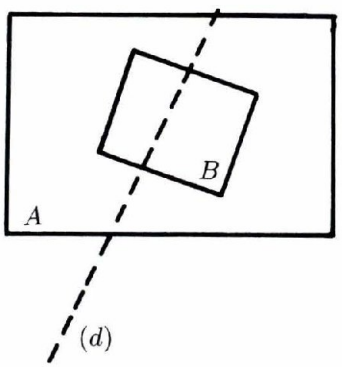
حال، کافی است توجه کنید که طبق تعریف، f تابعی است مثبت و صعودی و چون λ_iها از یک کوچکترند، از رابطهٔ (ii) داریم

$$f(t) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 f(\frac{t}{\lambda_i}) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 f(t) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2) f(t)$$

و این با $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 1$ در تناقض است! □

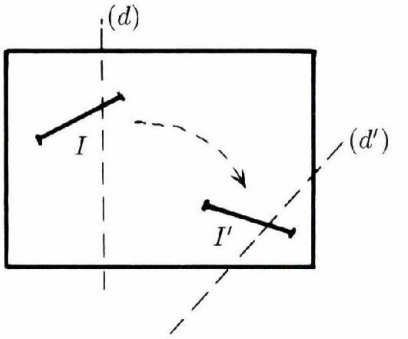
خوب، حالا می‌خواهیم مسألهٔ شمارهٔ ۱ را از زاویهٔ دید دیگری بررسی و حل کنیم. این راه‌حل دشوارتر است و جزئیات مشکلی دارد که وارد آن نخواهیم شد اما در عوض حکم قویتری را اثبات می‌کند. بگذارید باز با یک مسأله ادامه بدهیم:

مسألهٔ ۴. مستطیل B درون مستطیل A قرار گرفته است. اگر خط d از بین خطوطی که A را قطع می‌کنند به‌تصادف انتخاب شود، احتمال آنکه d، B را هم قطع کند چقدر است؟



(مواظب باشید، این از مسائلی است که بهتر است از دو راه حل نشوند، چون به‌احتمال زیاد دو جواب متفاوت به‌دست می‌آید!)

اگر به‌جای انتخاب خط، صحبت از انتخاب نقطه بود خیلی راحت مساحت B را تقسیم بر مساحت A می‌کردیم. ولی چرا؟ چون مساحت تنها اندازه معقول روی مجموعهٔ نقاط صفحه است که تحت تبدیلات صلب ناورداست (ما نمی‌خواهیم با عوض کردن جای B درون A، احتمال عوض شود!) آیا چنین اندازه‌ای روی مجموعهٔ خطوط به‌جای مجموعهٔ نقطه‌ها هم وجود دارد؟ بله و این همان چیزی است که نمی‌خواهیم در اینجا ثابت کنیم ولی بیایید ببینیم این اندازه، با فرض وجود، چه‌رفتاری دارد: احتمال اینکه خط d (که تصادفی انتخاب شده و A را قطع می‌کند) پاره‌خط I



درون شکل A را هم قطع کند به‌جای قرارگرفتن I بستگی ندارد (چون اگر I را با یک دوران و انتقال به‌جای دیگری ببرید همهٔ خطوطی که قبلاً I را قطع می‌کردند هم با این دوران و انتقال، Iای واقع در مکان جدید را قطع می‌کنند) همچنین اگر طول I را دو برابر کنیم احتمال هم دو برابر می‌شود چون مثل این است که دو I را در کنار هم گذاشته‌ایم و احتمال اینکه خطی هر دوی آنها را قطع کند صفر است. پس احتمال اینکه یکی از آنها را قطع کند ـ مجموع احتمالهای قطع کردن تک تک آنهاست! نتیجه‌ای که از مجموع این حرفها گرفته می‌شود این است:

$$P(\text{خط } d,\ I \text{ را قطع کند}) = \lambda \cdot l(I) \qquad \text{(iii)}$$

(λ ضریبی ثابت است و $l(I)$ یعنی طول I).

این رابطه را می‌توان به زبان دیگری بیان کرد: برای شکل دلخواه F، X_F را متغیری تصادفی بگیرید که تعداد برخوردهای خط تصادفی d با شکل F را نشان می‌دهد. در این صورت رابطهٔ (iii) می‌گوید

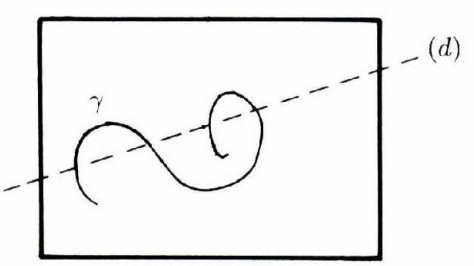
$$E(X_I) = \lambda \cdot l(I)$$

و بنابراین اگر F اجتماعی از پاره‌خط‌های I_1، I_2، ...، I_n باشد (مثلاً یک خم شکسته):

$$E(X_F) = E(\sum_{1}^{n} X_{I_j}) = \sum_{1}^{n} E(X_{I_j}) = \lambda \sum_{1}^{n} l(I_j) = \lambda \cdot l(F)$$

و با یک حدگیری (تقریب زدن با خمهای شکسته)، برای هر خم دلخواه γ داریم

$$E(X_\gamma) = \lambda \cdot l(\gamma) \qquad \text{(iv)}$$



$X_\gamma(d) = ۴$

رابطهٔ (iv) در حالت خاص قابل توجه است: اگر γ مرز شکلی محدب باشد، تقریباً هر خط d، یا اصلاً γ را قطع نمی‌کند و یا دقیقاً دو بار قطع می‌کند و بنابراین

$$P(d,\ \gamma \text{ را قطع کند}) = \frac{1}{2}E(X_\gamma) = \frac{\lambda}{2}l(\gamma)$$

اگر در مسالهٔ ۳، γ را مرز شکل A بگیریم، داریم

$$1 = P(d \text{ محیط } A \text{ را قطع کند}) = \frac{\lambda}{2} \cdot (\text{A محیط}) \Rightarrow \lambda = \frac{2}{A\text{محیط}}$$

و حالا γ را مرز B قرار دهید:

$$P(d,\ B \text{ را قطع کند}) = \frac{\text{محیط } B}{\text{محیط } A} = \frac{\text{محیط } B}{\frac{\text{محیط A}}{2}} \qquad \square$$

حال به یک بعد بالاتر برویم، فضای سه‌بعدی. من فقط نتایج را بیان می‌کنم و اثبات دقیق را به عهدهٔ شما می‌گذارم: فرض کنید مکعب مستطیل B درون مکعب مستطیل A قرار گرفته است؛

احتمال آنکه نقطه‌ای که به تصادف در A انتخاب شده B را هم قطع کند برابر است با $\frac{\text{حجم}B}{\text{حجم}A} = \frac{\Pi bi}{\Pi ai}$.

احتمال آنکه خطی که به‌تصادف انتخاب شده و A را قطع می‌کند B را هم قطع کند برابر است با $\frac{\text{مساحت}B}{\text{مساحت}A} = \frac{\Sigma bibj}{\Sigma aiaj}$.

و بالاخره

احتمال آنکه صفحه‌ای تصادفی که A را قطع می‌کند B را هم قطع کند برابر است با $\frac{\text{محیط}B}{\text{محیط}A} = \frac{\Sigma bi}{\Sigma ai}$.

و ما می‌دانیم که احتمال یک رویداد هیچ‌گاه از یک بیشتر نیست، پس $b_1 + b_2 + b_3 \leq a_1 + a_2 + a_3$!

این هم راه‌حل دوم برای مسأله که قولش را داده بودم. یک نکته باقی می‌ماند. چرا این راه‌حل قویتر است؟

چون می‌گوید که اگر در فضای n بعدی، مکعب A به اضلاع a_1، a_2، ...، a_n شامل مکعب B به اضلاع b_1، b_2، ...، b_n باشد، در این صورت هر عبارت متقارن مقدماتی بر حسب a_iها از عبارت نظیرش برحسب b_iها بیشتر یا با آن مساوی است و $\sum b_i \leq \sum a_i$ تنها یکی از این نامساویهاست. آیا این نامساویها همهٔ آن چیزی است که برای قرار گرفتن B درون A لازم است؟ نه، خودتان می‌توانید به‌راحتی مثال ناقضی دوبعدی ارائه دهید. (دو مستطیل A و B که هم مساحت و هم محیط A از B بیشتر است ولی B در A جا نمی‌شود)، ...

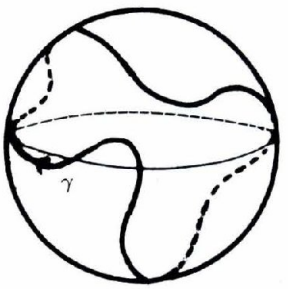
اجازه بدهید مبحث مربوط به جاسازی شکلی در شکل دیگر را با ذکر یک مسألهٔ دشوار که حل آن را نمی‌دانم خاتمه دهم:

مسألهٔ ۵. آیا می‌توان از دل یک مکعب چوبی توپر به ضلع ۱ دو مکعب چوبی کوچکتر به‌طول اضلاع a و b درآورد که $a + b > 1$؟

اکنون می‌خواهم رویکرد دوم به مسألهٔ ۱ را در مورد مسأله‌ای کلاسیک، متفاوت و نه‌چندان ساده به کار بندم.

مسألهٔ ۶. خم سادهٔ بستهٔ γ بر روی کرهٔ واحد، به‌طور کامل داخل هیچ

نیم‌کره‌ای جا نمی‌گیرد. نشان دهید طول خم لااقل 2π است.



برای چند لحظه صورت مسأله را فراموش کنید و به‌توضیحات مسألهٔ ۴ برگردید، با این تفاوت که همه‌جا به‌جای «انتخاب تصادفی خط d از بین خطوطی که A را قطع می‌کنند»، «انتخاب تصادفی دایرهٔ عظیمهٔ d روی کرهٔ واحد» قرار دهید و پاره‌خط I را هم به‌عنوان پاره‌خطی روی کره تعبیر کنید، یعنی قسمتی از یک دایرهٔ عظیمه. با این اصلاحات روابط (iii) و (iv) بی‌کم و کاست برقرار می‌مانند. تعبیر رابطهٔ (iv) در اینجا چنین می‌شود:

(iv)′ اگر γ خمی روی کره باشد، یک دایرهٔ عظیمهٔ تصادفی به‌طور متوسط $\lambda \cdot l(\gamma)$ بار آن را قطع می‌کند (λ یک ضریب ثابت است).

اگر به‌جای γ یک دایرهٔ عظیمه (مثلاً استوا) را قرار دهیم چون تقریباً هر دایرهٔ عظیمه‌ای آن را دو بار قطع می‌کند داریم

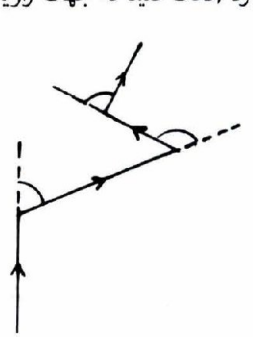
$$۲ = \lambda \cdot (۲\pi) \Rightarrow \lambda = \frac{۱}{\pi}$$

حالا γ را خمی بگیرید که در مسألهٔ ۶ از آن صحبت شده؛ شرط مسأله در واقع چیزی نیست جز آنکه هر دایرهٔ عظیمه γ را قطع می‌کند و چون γ بسته است تقریباً هر دایرهٔ عظیمه‌ای آن را زوج بار قطع می‌کند. پس تقریباً هر دایرهٔ عظیمه‌ای γ را لااقل دوبار قطع می‌کند و بنابراین

$$۲ \leq (\frac{۱}{\pi}) \cdot l(\gamma) \Rightarrow l(\gamma) \geq ۲\pi$$ □

و بالاخره آخرین مسأله، که آن را فقط به‌این دلیل مطرح می‌کنم که حیف است این کار را نکنم!

یک خم شکسته را در نظر بگیرید. منظور از میزان تغییر جهت در هر نقطهٔ شکستگی، زاویه‌ای است که پاره‌خط با امتداد پاره‌خط قبلی می‌سازد، و مقداری بین ۰ تا π دارد (دقت کنید که جهت زاویه اهمیتی ندارد).



مسألهٔ ۷. نشان دهید برای هر خم شکستهٔ بسته در فضا، مجموع تغییر جهت‌ها لااقل 2π است. توجه کنید که در حالتی که خم، مسطح و محدب باشد حالت تساوی رخ می‌دهد زیرا «مجموع زوایای خارجی برابر است با 2π».

و این هم راه‌حلی که این مسأله را به‌آنچه تاکنون گفته‌ایم، مربوط می‌کند: فرض کنید خم شکستهٔ ما از قرار گرفتن بردارهای u_1، u_2، ... و u_n یکی پس از دیگری ساخته شده باشد. از آنجایی که خم بسته است، داریم $\sum u_i = ۰$؛ حال بردارهای یکهٔ $e_i = \frac{u_i}{|u_i|}$ را در نظر بگیرید. این بردارها نقاطی روی کرهٔ واحد مشخص می‌کنند و تغییر جهت خم در گذر از u_i به u_{i+1} در واقع چیزی نیست جز طول کمان بین e_i و e_{i+1} روی کرهٔ واحد. پس اگر کمانهای بین e_1 و e_2، e_2 و e_3، ...، و e_n و e_1 را بکشیم تا خم بستهٔ γ روی کره واحد به‌دست آید مجموع تغییر جهت‌های خم شکستهٔ اولیهٔ ما همان طول γ خواهد بود. تنها نکتهٔ باقیمانده این است که e_iها نمی‌توانند همگی در یک نیمکره واقع شوند زیرا در این صورت بردار v وجود خواهد داشت که برای هر i، $\langle e_i, v\rangle > ۰$ و بنابراین: $\sum \langle u_i, v\rangle = \langle \sum u_i, v\rangle = \langle ۰, v\rangle = ۰$. ولی در این صورت $\sum \langle u_i, v\rangle > ۰$ (متوجه نکته که شدید؟ حالا دیگر مسألهٔ ۶ کار را تمام کرده است!) □

توضیحات، مسائل و صحبتهای نهایی

مسألهٔ ۱ و راه‌حل اول آن را می‌توانید در [۴] پیدا کنید، مقالهٔ زیبایی است.

مسألهٔ ۲ حالت بسیار خاصی است از قضیهٔ زیر که نقش اساسی در بررسی مجموعه‌های محدب دارد:

قضیه: اگر C_1، ...، C_k اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ و λ_1، ...، λ_k اعدادی مثبت باشند، حجم nبعدی $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_k C_k$ به‌شکل چند جمله‌ای همگنی از درجهٔ n برحسب λ_1، ...، λ_k است:

$$\left(\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_k C_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i | X_i \in C_i \right\}\right)$$

ضرایب این چند جمله‌ای همگن را «حجمهای آمیخته» می‌نامند. برای به‌دست آوردن مسألهٔ ۲ کافی است قرار دهید $k = ۲$، گوی واحد$= C_2$ و $\lambda_1 = ۱$!

اثبات این قضیه را می‌توانید مثلاً در [۳] ببینید.

مسألهٔ ۳ از دوست عزیزم، آقای امید نقشینه ارجمند است. توان ۲ در صورت مسأله از بعد فضا ناشی می‌شود، به‌سادگی می‌توانید اثبات را برای وقتی که T در $\mathbb{R}^k$ قرار دارد و $\sum \lambda_i^k > ۱$ تعمیم بدهید و نیز نشان دهید که نامساوی اکید هم لازم نیست، حتی اگر $\sum \lambda_i^k = ۱$، باز حکم مسأله برقرار می‌ماند.

سؤال آخر اینکه در صفحه ($k = ۲$)، اگر نامساوی اکید باشد، آیا می‌توان گفت که نه فقط بستار T_iها بلکه خود آنها با هم اشتراک دارند؟

ایده‌های مسألهٔ ۴ و راه‌حل دوم مسألهٔ ۱ را از [۱] گرفتم؛ خواندن این مقاله برای من بسیار لذت‌بخش بود. برای دیدن جزئیاتی از راه‌حل که من از آنها گذشتم و نیز دیدن مطالب جالب دیگر می‌توانید به این مقاله مراجعه کنید. بگذارید دو سؤال دیگر، یکی در مورد مسألهٔ ۴ و یکی در مورد مسألهٔ ۱ که پاسخ آنها را نمی‌دانم، مطرح کنم:

(۱) اگر در مسألهٔ ۴ به‌جای انتخاب یک نقطه و یا یک خط تصادفی، شکلی دیگر، مثلاً یک مربع به ضلع ۱ را به تصادف انتخاب کنیم که A را قطع کند، احتمال اینکه B را هم قطع کند چقدر است؟

(۲) فرض کنید A و B دو مکعب مستطیل با اضلاع a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 باشند، یک شرط لازم و کافی برای اینکه B کاملاً درون A جا شود برحسب a_iها و b_iها پیدا کنید.

صورت دو بعدی مسألهٔ ۵ از اردوش است و جواب آن منفی است: اگر دو مربع مجزا درون مربعی به‌ضلع ۱ قرارگرفته باشند جمع اضلاع آنها نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد.

مسألهٔ ۶ در بعد n به‌جای ۳ هم درست است (خم بسته‌ای روی S^{n-1} که به‌طورکامل در هیچ نیمکره‌ای قرار نمی‌گیرد طولی لااقل برابر 2π دارد). می‌توان آن را از جهت دیگری هم تعمیم داد:

خم بستهٔ γ روی کرهٔ واحد، هر دایره به‌شعاع r را قطع می‌کند، ثابت کنید طول γ لااقل برابر $\frac{2\pi}{r}$ است (مسألهٔ ۶، حالت $r = 1$ است).

ایدهٔ مسألهٔ ۷ را از قضیه‌ای در هندسهٔ دیفرانسیل گرفتم، قضیهٔ فنشل[1]:

اگر $C : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ خمی بسته و C^2 باشد که با طول پرمایش شده، و $k(t)$ انحنا در لحظهٔ t را نشان دهد در این صورت انحنای کل، $\int_0^L |k(t)|dt$ لااقل برابر 2π است.

سعی کنید مسألهٔ ۷ را به‌شکل نتیجه‌ای از قضیهٔ فنشل به‌دست آورید و نیز نشان دهید خود این قضیه به‌کمک مسألهٔ ۶ قابل اثبات است.

1. Fenchel

مسألهٔ ۷ همچنین راه‌حلی مقدماتیتر با استقرا روی تعداد نقاط شکستگی دارد، پیدا کردن این راه‌حل تمرین خوبی در هندسهٔ فضایی دبیرستانی است!

و آخرین مسأله، حالت گسستهٔ تعمیمی از قضیهٔ فنشل منسوب به فاری[1] و میلنر[2]:

اگر در مسألهٔ ۷ خم شکستهٔ موردنظر، به‌علاوه، گره هم خورده باشد، نشان دهید مجموع تغییر جهت‌ها لااقل برابر 4π است.

توضیحات بیشتری در مورد قضایای فنشل و فاری-میلنر را در [۲] پیدا خواهید کرد.

مراجع

۱. جیان کارلو روتا، «احتمال هندسی»، نشر ریاضی سال ۱۰، شمارهٔ ۲، صص ۲۱-۲۷.

2. Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc. (1976).

3. Rolf Schneider, *Convex Bodies: The Brunn Minkowsky Theory*, Cambridge University Press (1993).

4. Alexander Shen, "Unexpected proofs", *Math. Intelligencer*, (3) **21** (1999) 48-50.

******

* کسری علیشاهی، دانشگاه صنعتی شریف

1. Fary 2. Milnor

چند کتاب مسأله، از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی

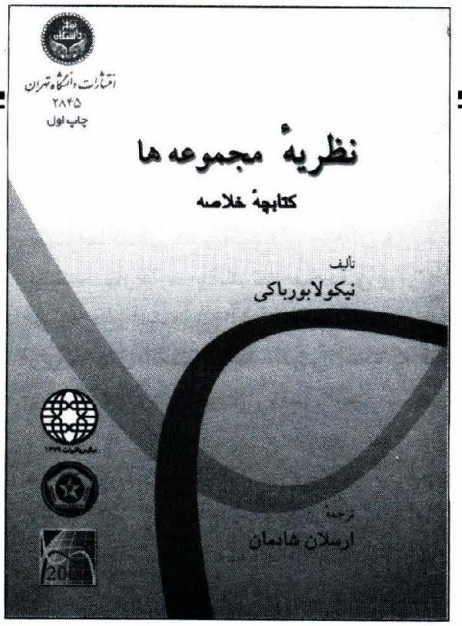
- **مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (۱)**
  یوژف کورشاک
  ترجمهٔ سعید فاریابی
- **مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (۲)**
  یوژف کورشاک
  ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی
- **المپیادهای ریاضی آمریکا**
  مری س. کلمکین
  ترجمهٔ سعید اکبری، لیدا رنجبر مطلق، سیدعبادالله محمودیان
- **المپیادهای ریاضی بین‌المللی** (جلد اول)
  سموئل گرایتزر
  ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
- **المپیادهای ریاضی بین‌المللی** (جلد دوم)
  مری کلمکین
  ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
- **۲۰۰۰ مسئلهٔ حل‌شده در ریاضیات گسسته**
  سیمور لیپشوتس، مارک لارس لیپسن
  ترجمهٔ اسدالله کارشناس نجف‌آبادی

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، صص. ۶۳-۶۵

کتاب

نظریهٔ مجموعه‌ها

کاوه لاجوردی*



نظریهٔ مجموعه‌ها (کتابچهٔ خلاصه). نیکولا بورباکی. ترجمهٔ ارسلان شادمان، مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران. تهران، ۱۳۷۹. ۱۲۰ ص. ۶۰۰۰ ریال.

در موردِ ایدئولوژیِ گروه بورباکی و نیز در موردِ تاریخچهٔ آن و وضعیتِ فعلی‌اش در این نقد چیزی نخواهم گفت؛ پیشنهاد می‌کنم [ب] و [و] و [کا] را ببینید ([ه] هم بسیار خواندنی است).

به اقتضای علائقِ ریاضی‌ام با چند کتابِ معروف در جبر (جابه‌جایی و هومولوژیک) و با چندین کتابِ معروف در نگرهٔ مجموعه‌ها آشنا هستم. برای مقایسهٔ منزلتِ بورباکی در این دو شاخهٔ ریاضیات به فهرستهای مراجعِ بعضی از اینها نگاه کردم، و حدسم با قوتی بیش از آنچه تصور (یا آرزو؟) می‌کردم تأیید شد: از ۱۸ کتابِ در دسترسم در نگرهٔ مجموعه‌ها فقط یکی به نگرهٔ مجموعه‌های بورباکی ([B]، [B/Eng.]) ارجاع داده است؛ ارجاع به جبرِ بورباکی در کتابهایی که بررسی کردم ۶ مورد از ۱۱ مورد بود.[۱] گمان می‌کنم همین آمارگیریِ سردستی هم نشان دهد که در متونِ امروزیِ نگرهٔ مجموعه‌ها اثرِ بورباکی را «تحویل نمی‌گیرند». به‌نظر می‌آید شهرت و اعتبارِ بورباکی ربطی به نگرهٔ مجموعه‌های آنان ندارد.

تحلیلِ این امر ساده است. اولاً در فهرستِ اعضای گروه ([کا] را ببینید) نامِ هیچ منطقی‌ای دیده نمی‌شود، و حال آنکه هر یک در شاخه یا شاخه‌های دیگری فحلی بوده است. در سمینارِ بورباکی هم از آغاز تا دست‌کم ۱۹۶۱[۲] (سالِ نشر متنِ فرانسهٔ [D]) بسیار کم به منطقِ ریاضی به‌معنای امروزین پرداخته شده است؛ بالاخص، به گفتهٔ دیودونه، چگالیِ بحثِ مجموعه‌ها در سمینارِ بورباکی صفر بوده است ([D]، ص. ۴). ثانیاً برای بورباکی نگرهٔ مجموعه‌ها فی‌نفسه در مقامِ هدف مطرح نبوده است و فقط پاسخی بوده است به دغدغهٔ ساختن یا یافتنِ مبنایی برای کلِّ اثرِ عظیمِ اصولِ ریاضیات[۳]. توجه کنید: بورباکی در جبر به جبر می‌پردازند، در توپولوژیِ عمومی به توپولوژیِ عمومی، و در گروههای لی و جبرهای لی به گروههای لی و جبرهای لی؛ اما در نگرهٔ مجموعه‌ها نه به نگرهٔ مجموعه‌ها که به «مبانیِ ریاضیات» می‌پردازند. در تقسیم‌بندی‌ای کلّی می‌توان گفت که مباحثِ عمدهٔ نگرهٔ مجموعه‌ها اینها هستند: استقلال از اصولِ موضوع (قضیهٔ گودل-کوهن در استقلالِ فرضیهٔ پیوستار از ZFC را به یاد آورید) و جستجوی اصولِ موضوعِ جدید (مثلاً در «کاردینالهای بزرگ»)؛ نگرهٔ مجموعه‌های توصیف‌پذیر (حکمی نوعی: هر مجموعهٔ بورلِ با فلان خاصیتْ از بهمان نوع است)؛ ترکیبیاتِ نامتناهی (بحثی نوعی: تعمیمِ قضیهٔ رمزی به حالتهای نامتناهی). هیچ‌یک از اینها را نمی‌توان در بورباکی یافت. آنچه «مبانیِ ریاضیات» خوانده می‌شود جزء بسیار کوچکی از نگرهٔ مجموعه‌ها است: بحث در اشتراک و اجتماع و حاصل‌ضربِ مجموعه‌ها، و خاصیتهای مجموعه‌های مرتب و مجموعه‌های متناهی و شمارا، و لمِ تسورن (که تقریباً کلِّ مطالبِ [B] را تشکیل می‌دهند)، و نیز نحوهٔ ساختنِ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ (که در [B] نیامده) ــ بحثِ پژوهشی در این موضوعاتْ ده‌ها سال است که به پایان رسیده است.[۴]

اگر بخواهید واردِ آنالیزِ ریاضی شوید بعید است حسابان برای دانشجویانِ پرستاری بهترین مدخل باشد. جدی‌تر: اگر بخواهید در معادلاتِ دیفرانسیلِ پژوهش کنید یاد گرفتنِ پیش‌نیازها را با خواندنِ ریاضیاتِ (حتی پیشرفتهٔ) مهندسی شروع نمی‌کنید. درست است که هر مهندسِ کشتی‌ساز باید بتواند از پسِ حلِ چند معادلهٔ دیفرانسیل برآید، اما (حتی اگر تفاوت در اهداف و روشهای ریاضیات و علومِ مهندسی را نادیده بگیریم) این نشان نمی‌دهد که متنی که برای آموزشِ مهندسانِ کشتی‌ساز نوشته شده است متنِ ریاضیِ به‌دردخوری محسوب می‌شود. نگرهٔ مجموعه‌های بورباکی کتابی است (قدیمی) در مبانیِ ریاضیات و نه در نگرهٔ مجموعه‌ها؛ هدفش تثبیتِ زبان و نمادگذاری است برای کسی که می‌خواهد (احتمالاً با خواندنِ بقیهٔ مجلداتِ بورباکی) در ــ مثلاً ــ جبرِ لی یا انتگرالِ لُبگ تخصص پیدا کند. کتابچهٔ

نتایج («کتابچهٔ خلاصه»)[۵] خلاصه‌ای است ۳۷صفحه‌ای از اصلِ بیش از ۳۰۰صفحه‌ایِ چنین کتابی؛ ترجمه و انتشارِ این کتابچه که را به چه کار می‌آید؟

از صحبتهای متواضعانه و بلندنظرانه که بگذریم، مترجم در پیشگفتارش دو انگیزهٔ مشخص برای انتشارِ این ترجمه(ها) ذکر می‌کند.[۶] اول آنکه هنگامِ ترجمه و نشرِ فلان کتابِ توپولوژی (که مشخصاتِ کاملِ ترجمهٔ فارسی را در کتابنامه آورده است) دریافته است که «گرچه چندین کتاب خوب توپولوژی دیگر در کشور تألیف یا ترجمه شده است»، «کاربران ریاضی» به‌طورِ کلّی «نیازی ملموس و قابل درک» دارند به متنی کم‌حجم که جامعِ تعاریف و گزاره‌های اساسی باشد:

> خصوصاً کسانی که ریاضی‌دان حرفه‌ای در ریاضیات محض نیستند، نیاز دارند بدانند تعاریف دقیق و ارتباط بین مفاهیم از چه قرار است، بی آن که لازم باشد وقت خود را صرف ریزه‌کاریهای اثبات بنمایند. بدیهی است که فراوانی این افراد بیش از تعداد دانشجویان ریاضی است. ــ ص. ۳.

احتمالاً به نحوِ پیشینی (بدونِ دیدنِ کتابچه) هم می‌توان در موردِ واقع‌بینانه بودن و تحقق‌پذیریِ این هدف قضاوت کرد. [در موردِ مشخصِ توپولوژیِ عمومی به‌نظر می‌آید که کتابچهٔ نتایج فقط دو گروه را به‌کار آید: ریاضی‌دانانِ حرفه‌ای، و دانشجویانِ مستعدی که بخواهند با صِرفِ دیدنِ تعاریف و صورتِ قضایا خودْ «ریزه‌کاری‌های اثبات» را بازسازی کنند.

انگیزهٔ دیگرِ مترجم:

> لازم به یادآوری است که برخی از متون مفصل بورباکی به انگلیسی ترجمه شده و از این رو برای بسیاری از خوانندگان قابل استفاده است. اما کتابچه‌های خلاصه تا آنجا که مترجم اطلاع دارد به زبان فرانسه انتشاریافته و به زبان انگلیسی ترجمه نشده است. به این ترتیب، نیاز به ترجمهٔ فارسی کتابچه‌های خلاصه بیشتر احساس می‌شود. ــ ص. ۳.

متأسفانه اطلاعِ مترجم ناقص است: ترجمهٔ انگلیسیِ کتابچهٔ نتایج نگرهٔ مجموعه‌ها دست‌کم سی‌ودو سال است که منتشر شده است: [**B/Eng.**] که در مقابلِ من است حاویِ کتابچهٔ نتایج هست، و از قضا به احتمالِ زیاد همان کتابی است که در صفحهٔ ۱۱۳ از ترجمهٔ فارسیْ مشخصاتش را تحتِ شمارهٔ 13 نوشته‌اند.

اما بدونِ هم‌دلی با مترجم در انگیزه‌هایش برای ترجمه هم می‌توان به کیفیتِ ترجمه توجه کرد ــ همین‌جا بگویم که من در این ترجمه فقط یک غلطِ گمراه‌کننده یافته‌ام (توضیح خواهم داد)، و بیشترِ خرده‌هایی که بر ترجمه خواهم گرفت جنبهٔ ریاضیِ صرف ندارد.

غلط این است: در ص. ۸۳ اولین مثالِ ذکرشده برای «نظریه‌های تک‌ارز» (نگره‌هایی که همهٔ مدلهایشان یکریخت‌اند) «کل نظریهٔ مجموعه‌ها» است. در متنِ فرانسه «La théorie des nombres entires» آمده ([**B**]، E. R. 37) و در ترجمهٔ انگلیسی ([**B/Eng.**]، ص. 385) "The theory of integers"، که معنای آنها یکی است: نظریهٔ اعدادِ صحیح.

وجهِ مشترکِ همهٔ نکته‌هایی که در ادامه خواهم گفت این است: (گمان می‌کنم که) نشان می‌دهند در ترجمه و چاپ این اثرِ کلاسیک، حرمتِ کلاسیک‌بودنِ آن رعایت نشده است. ببینید، در اینجا با اثرِ سترگی مواجه هستیم (اصلِ کتاب را می‌گویم) که برای نوشتنِ هر صفحه‌اش ریاضی‌دانانِ بزرگی هفته‌ها کار کرده‌اند و طرحهای اولیهٔ متعددی را به‌کلّی کنار گذاشته‌اند. نمادها با وسواسِ زیاد انتخاب شده‌اند، و کیفیتِ حروفچینی استانداردْآفرین بوده است. و در این موارد می‌توان تفصیل داد بی‌آنکه اغراق کرد. پس حالا که، مطابقِ معرفیِ مترجم در داخلِ جلد، این ترجمه «هم از تجارب نگارشی شادمان بهره می‌گیرد و هم از ویراستاری دو استاد برجسته، [...] برخوردار است»، انتظارمان این است که با نثری فخیم (و روان) روبه‌رو شویم و با حروفچینی‌ای پاکیزه، هر دو یادآورِ اصلِ کتاب. نیز طبیعی است انتظار داشته باشیم مترجم جز در مواردِ کاملاً ضروری چیزی به متن اضافه نکند.

□ نثرِ ترجمه گاه چندان پخته نیست:

> «وجود دارد $\iota \in J$ به قسمی که $x \in X_\iota$». ــ ص. ۳۸.
> (یا با نماد ساده‌تر $\Pi_\iota X_\iota$ وقتی $J = I$ باشد). ــ ص. ۴۵.

[«باشد» به‌نحوِ آزاردهنده‌ای زاید است.]

رسم‌الخطِ واحدی هم اِعمال نشده. [مثالهای متعدد را حذف می‌کنم.] اشتباهِ چاپی هم خیلی کم نیست.

□ در متنِ فرانسه و در ترجمهٔ انگلیسی، حروفِ کوچکِ لاتینِ ارجاع‌دهنده به اشیاء ریاضی به‌صورتِ ایتالیک چاپ شده‌اند و حروفِ بزرگ به‌صورتِ رومَن (غیرایتالیک). در ترجمهٔ فارسی همهٔ حروفِ لاتین ــ و بعضاً نشانه‌های مرکبِ لزوماً غیرایتالیک نیز ــ ایتالیک‌اند (مثلاً ص. ۴۷ را ببینید). حروفِ کوچکِ آلمانی هم گاه ایتالیک و سیاه چاپ شده‌اند (بندِ ۷).

□ ابداعِ نمادِ «$\varnothing$» برای مجموعهٔ تهی از ابداعاتِ بورباکی (مشخصاً: آندره وی؛ [**V**] را ببینید) است. در متنِ فارسی به‌جای این نماد (که از حروفِ الفبای نروژی (و دانمارکی و ...) است) در بیشترِ موارد حرفِ یونانیِ «ϕ» به‌کار رفته. در صفحاتِ ۲۱ـ۱۸ و در صفحهٔ ۴۶ ناگهان «ϕ» با «$\varnothing$» جایگزین شده، اما بعداً باز «ϕ» پدیدار شده.

□ در متنِ اصلی و در ترجمهٔ انگلیسی، چنان‌که رسمِ مشهورِ بورباکی است، پاراگرافهایی با حروفِ ریزتر از متن چاپ شده است؛ این پاراگرافها نوعاً حاویِ مثالهای پیشرفته و نکاتِ باریکی‌اند که در دورِ اولِ مطالعه می‌توان نادیده‌شان گرفت. از این تفاوتهای حروف در متنِ فارسی اثری نیست ــ مثلاً آخرین جملهٔ پاراگرافِ ماقبلِ آخرِ ص. ۶۹ از متنِ فارسی، در متنِ فرانسه (E. R. 31) و در ترجمهٔ انگلیسی (ص. 379) پاراگرافِ مستقلی است با حروفی ریزتر از بقیهٔ متن.

□ حکمتِ بعضی اضافاتِ مترجم را نمی‌فهمم:

> مترجم: نشان (اندیس) را با حرف یونانی ι (یوتا) نمایش داده‌ایم که شبیه حرف i انگلیسی است اما نقطه ندارد. ــ پانوشتِ ص. ۲۶.

در ص. ۶۳ در داخلِ متنِ مترجمْ توضیحِ بورباکی در موردِ دلیلِ منحصر به فرد بودنِ $\sup X$ و $\inf X$ را «تکمیل» کرده است، و در پانوشتِ ص. ۷۶

«این پانزده مجموعه» را فهرست کرده است ــ «بی آن که لازم باشد وقت خود را صرف ریزه‌کاریهای اثبات بنمایند»؟

موردی هم هست (ص. ۷) که مترجم در پایانِ جمله‌ای اضافه کرده است «[توجه شود که $\tilde{\in}$ با $\in$ فرق دارد.]». درکِ اینکه اینها فرق دارند شاید خیلی سخت نباشد؛ سؤالِ «چه فرقی دارند؟» را مترجم جواب نداده است. و البته «$\tilde{\in}$» هم در اصل کتاب نمادِ دیگری است.

* * * * * *

معتقدم که از آدابِ حرمت‌نهادنِ مترجمان به نویسندگانِ آثارِ مهم (و غیرمهم) آن است که هیأتِ کتاب در ترجمه چنان نباشد که اهمیتِ نویسنده تحت‌الشعاعِ اهمیتِ مترجم قرار گیرد. به عللی که شاید از حیطهٔ نظارتِ مترجم کتابچهٔ خلاصه خارج بوده است، متنی که در داخلِ جلد در معرفیِ مترجم چاپ شده (بدونِ احتسابِ تصویرِ ایشان) بیش از دوبرابرِ متنی است که در معرفیِ بورباکی آمده است.[۷] عبارات و تعابیرِ معرفیِ مترجم هم گاه چندان با معیارهای گزارشِ آکادمیک نمی‌خوانَد ــ مثلاً نوشته شده است که مترجم «با گذراندن امتحانِ و اخذ سرتیفیکا» از محضر فلان و بهمان بهره برده‌اند و دکتری را زیر نظر کسی گذرانده‌اند که «استاد با نفوذ رشتهٔ پیچیدهٔ آنالیز چند متغیر مختلط است»، و غیره.

حرفِ آخر اینکه شمارهٔ این کتاب در انتشاراتِ دانشگاهِ تهران دوهزار و چهارصد و هشتاد و پنج است. جداً متأسفم که می‌توان بر (البته بعضی از) آثارِ ناشری چنین پرسابقه نقدهایی در اثباتِ ویرایش‌ناشدگی نوشت. بر بعضی کتابهای انتشاراتِ «دانشگاهِ مادر» نقدهای محتوایی کوبنده‌ای هم نوشته‌اند. انتشاراتِ دانشگاهِ تهران باید کارِ ویرایش (و گزینش) را جدی بگیرد. و قدمِ اول شاید اصلاحِ ذهنیتی باشد که باعث می‌شود در شناسنامه‌های کتابهای مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران بنویسند «مسئوولیت صحت مطالب کتاب با مترجم [یا: مؤلف] است.»

پانوشتها

۱. تا این سیاهه زیاد جا نگیرد، فقط نامِ مؤلف و سالِ نشر را می‌نویسم. کتابهای حاویِ ارجاع به بورباکی را با «*» مشخص کرده‌ام. کتابهای نگرهٔ مجموعه‌ها:

[Bernays 68], [Ciesielski 97], [Cohen 66], [Devlin 79, 93], [Devlin 84], [Drake 74], [Enderton 77], [Erdős *et al.* 84], [Jech 78], [Kechris 95], [Kunen 80], [Levy 79], [Moschovakis 80], [Roitman 90], [Rubin, Rubin 85]*, [Suppes 60,72], [Takeuti, Zaring 71, 82], [Vaught 85].

کتابهای جبر:

[Anderson, Fuller 74,92]*, [Atiyah, Macdonald 69]*, [Eisenbud 95]*, [Gelfand, Manin 96]*, [Hungerford 74], [Matsumura 86]*, [Northcott 53], [Rotman 79], [Sharp 90], [Sharpe, Vámos 72], [Strooker 90]*.

۲. متنِ [B] بخش‌بخش و به این صورت منتشر شده است ([Ω] را ببینید): خلاصهٔ نتایج در ۱۹۳۹، فصلهای ۱ و ۲ در ۱۹۵۴، فصلِ ۳ در ۱۹۵۶، فصلِ ۴ در ۱۹۶۶.

۳. عنوانِ کاملِ متنِ ۱۹۳۹:

Eléménts de mathematique. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles.

(اصولِ ریاضی، بخشِ اول: ساختارهای اساسیِ آنالیز، کتابِ *I*، نگرهٔ مجموعه‌ها.)

۴. باید روشن باشد که اینها (و مطالبِ پاراگرافِ بعدیِ متن) نه به قصدِ تخفیفِ مقامِ کتاب و نویسندگانِ دانشور و پرذوقش، که در تعریفِ آن است. [B] کتابی در نگرهٔ مجموعه‌ها نیست، اما قرار هم نبوده است که باشد. از طرفِ دیگر، ظاهراً این کتاب (در واقع: کتابچهٔ نتایجش) نقشِ تعیین‌کننده‌ای در تثبیتِ زبان و نمادگذاریِ ریاضیِ فعلی داشته است. در ضمن، متنِ مفصلِ کتاب حاویِ مقدمه‌ای عالی و بحثِ تاریخیِ درخشانی (در بیش از ۴۰ صفحه) است که خواندنِ هر دو برای دانشجویانِ نگرهٔ مجموعه‌ها واجب است.

۵. شاید «کتابچهٔ نتایج» برای «fascicule des résultats» (در انگلیسی: "summary of results") ترجمه‌ای مناسب‌تر از «کتابچهٔ خلاصه» باشد.

۶. مجموعهٔ کتابهای بورباکی سر به چندین هزار صفحه می‌زند، و ظاهراً انتشارِ چهار «کتابچهٔ خلاصه» به اضافهٔ یادداشتهای تاریخی در برنامهٔ کارِ مترجم و ناشر است. پس آیا قضاوت در موردِ این کتاب و این ترجمه بدونِ پرداختن به جایگاهِ کلِّ آثارِ بورباکی یا دستکم پیش از انتشارِ بقیهٔ ترجمه‌های مترجم، شتاب‌زده و ناروا نیست؟ گمان نمی‌کنم. برای حکم به اینکه در [B] نگرهٔ مجموعه‌ها یافت نمی‌شود و اکنون ــ نیم‌قرن بعد از انتشارِ کتابچهٔ نتایج [B] ــ کسی برای خواندنِ ریاضیات محتاجِ خواندنِ این کتاب نیست (و این البته از افتخاراتِ بورباکی است)، لازم نیست مثلاً آثارِ بورباکی در خمینه‌ها را بررسی کنم. برای گفتنِ اینکه "textbook" یعنی «کتابِ درسی» و لذا «دورهٔ کتابهای متن تألیف ژان دُیودنّه» (ص. ۲) ترجمهٔ بدی است، یا برای قضاوت در موردِ نازیبایی «مشمولیت» (به‌جای «شمول»)، یا برای اظهارِ تعجب از اینکه کتابی مقدماتی در ۸۰ صفحه واژه‌نامه‌ای ۲۵صفحه‌ای دارد، لازم نیست بقیهٔ آثارِ مترجم را دیده باشم.

۷. شاید مفید باشد که خواننده ترجمهٔ انگلیسیِ یکی از مجلداتِ بورباکی را بردارد و سعی کند فقط نامِ مترجمش را پیدا کند.

مراجع

[ب] نیکولا بورباکی. «معماری بنای ریاضیات». ترجمهٔ کامبیز محمودیان. جنگ ریاضی دانشجو، جلد ۲ (مهر ۱۳۶۷)، صص. ۱۰۲ـ۸۹.

[کا] مارجری سنچال. «خاموشیِ مستدامِ بورباکی ــ مصاحبه‌ای با پیرکارتیه». ترجمهٔ نفیسه کسروی. همین مجله، سال ۱۰، شمارهٔ ۲ (شهریور ۱۳۷۸)، صص. ۷۱ـ۶۵.

[و] آندره ویل. «بورباکی به روایت آندره ویل». ترجمهٔ عطاءالله تقاء. همین مجله، سال ۵، شمارهٔ ۱ و ۲ (آذر ۱۳۷۲)، صص. ۷۰ـ۶۷.

[ه] پال هالموس، «نیکلای بورباکی». ترجمهٔ سعید ذاکری، جنگ ریاضی دانشجو، جلد ۵، (بهمن ۱۳۶۸)، صص. ۶۵ـ۵۴.

[B] N. Bourbaki, *Eléménts de mathematique: Théorie des ensembles*, chapitres 1 à 4, Masson, Paris (1990).

[B/Eng.] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics: Theory of Sets*, Herman, Paris, and Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968) (reprinted 1974).

[D] Jean Dieudonné, *A Panorama of Pure Mathematics (As Seen by N. Bourbaki)*, Academic Press, Orlando (1982).

[Ω] *Ω-Bibliography of Mathematical Logic*. Volume V: *Set Theory*, edited by A.R. Blass, Springer-Verlag, Berlin (1987).

* * * * * *

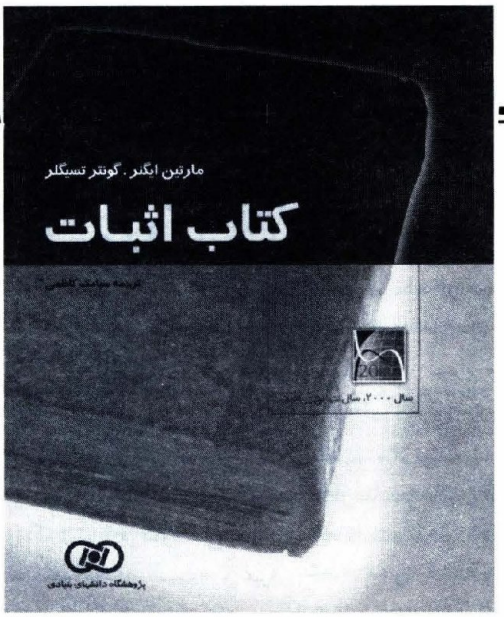
* کاوه لاجوردی

epistemologically@yahoo.com

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، صص. ۶۶ـ۶۸

کتاب اثبات

کیوان ملاحی‌کارای*

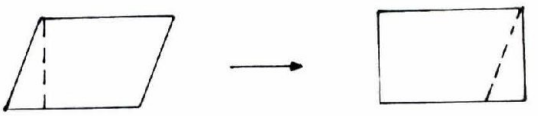


کتاب اثبات. مارتین ایگنر، گونتر تسیگلر. ترجمهٔ سیامک کاظمی. پژوهشگاه دانشهای بنیادی. تهران، ۱۳۷۹. هشت +۲۷۴ ص. ۲۷۰۰ تومان.

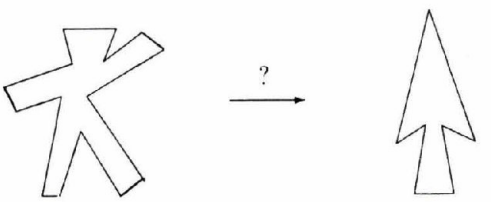
۱. مسألهٔ سوم هیلبرت (هندسهٔ قیچی)

دو چندضلعی با مساحت مساوی در نظر بگیرید. چگونه می‌توان نشان داد که مساحت این دو برابر است؟

یک راه ممکن این است که یکی از آنها را ببریم و قطعه‌های کوچکتر به‌دست آمده را (که فرض می‌کنیم کماکان چندضلعی هستند) دوباره و به شکلی دیگر کنار هم بگذاریم به‌طوری که چندضلعی دوم به‌دست آید:



آیا این‌کار همیشه امکان‌پذیر است؟ مثلاً اگر دو شکل پیچیده‌تر مانند



داشته باشیم، چگونه این‌کار را انجام دهیم؟ این مسأله را بویویی[1] بررسی کرد و به‌دقت ثابت کرد که هر دو چندضلعی با مساحتهای برابر به‌کمک قیچی قابل تبدیل به یکدیگر هستند. حال بیایید مسألهٔ مشابه را در فضا بررسی کنیم. یعنی حالا به جای چندضلعی‌ها، دو چندوجهی با حجم برابر داریم و می‌خواهیم یکی از آنها را قطعه‌قطعه کرده، از کنار هم گذاشتن دوبارهٔ قطعه‌ها، دومی را بسازیم. آیا این کار ممکن است؟

تاریخچهٔ این پرسش دست‌کم به زمان گاوس بازمی‌گردد. او در دو نامه به گرلینگ[2] این سؤال را مطرح می‌کند و گرلینگ مسأله را برای ردهٔ خاصی از چندوجهی‌ها بررسی می‌کند، اما مسأله تا سال ۱۹۰۰ کماکان بدون پاسخ می‌ماند تا اینکه به‌عنوان مسألهٔ سوم در فهرست «مسأله‌های

1. Bolyai 2. Gerling

قرن» هیلبرت قرار می‌گیرد.

چند ماه بعد از سخنرانی هیلبرت در کنگرهٔ ریاضیدانان، ماکس دن[1] کشف شگفت‌انگیزی را اعلام می‌کند: جواب منفی است!

اثباتی که در اینجا می‌خواهم شرح دهم تقریباً به همین شکل در کتاب اثبات آمده است و اساساً همان اثباتِ دن است که کمی «شیکتر» شده است:

فرض کنید P یک چندوجهی باشد و $E(P)$ مجموعهٔ یالهای P را نشان دهد. برای هر یال e، زاویهٔ بین دو وجهی را که در e یکدیگر را قطع می‌کنند با $\alpha(e)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی ناصفر باشد که برای هر x و y حقیقی تساوی

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

برقرار باشد و همچنین $f(\pi) = 0$.

اکنون به کمیت زیر توجه می‌کنیم:

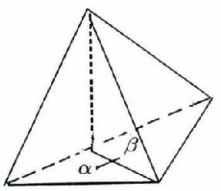
$$D_f(P) = \sum_{e \in E(P)} |e| \cdot f(\alpha(e))$$

که منظور از $|e|$، طول یال e است.

نکته: فرض کنید که چهاروجهی P را به دو چهاروجهی P_1 و P_2 طبق شکل تقسیم کنیم. در این صورت داریم

1. Max Dehn

$$D_f(P_1) + D_f(P_2) = D_f(P) + |e| \cdot f(\alpha) + |e| \cdot f(\beta)$$
$$= D_f(P) + |e| \cdot f(\pi)$$
$$= D_f(P).$$



اکنون به‌سادگی می‌توان دید که اگر چندوجهی P را به چندوجهی‌های P_1، P_2، ...، P_n تقسیم کنیم و از کنار هم گذاردن مجدد آنها، به چندوجهی P' برسیم، داریم

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \cdots + D_f(P_n) = D_f(P')$$

و دن چندوجهی‌هایی با حجم مساوی و مقدار D_f نامساوی پیدا کرد ....

۲. «کتاب»

«پال اردوش دوست داشت از «کتاب» یا «لوح»ی صحبت کند که خداوند اثباتهای زیبا و کامل قضایای ریاضی را در آنجا محفوظ نگه می‌دارد و در این مورد گوشهٔ چشمی داشت به نظر گ.ه. هاردی که ریاضیات زشت جایگاه ابدی و پایداری ندارد. اردوش همچنین می‌گفت که اعتقادات شما در بارهٔ ماوراءالطبیعه هر چه باشد، به‌عنوان ریاضیدان باید وجود این کتاب را باور داشته باشید»[۱].

در اینجا نمی‌خواهم راجع به «کتاب» یا ریاضیات زیبا و زشت اظهارنظر کنم. به‌جای آن سعی می‌کنم که به توصیف شیوه‌ای برای عرضهٔ ریاضیات بپردازم. یکی از جنبه‌های مهم پیشرفت ریاضیات در قرن بیستم، «اصل‌موضوعی‌شدن» آن بود. پس از اینکه ریاضیات به یاری نظریهٔ مجموعه‌ها، پایه‌ای استوار یافت، بورباکی نیز به نوسازی این بنا پرداخت و این تلاشها منجر به تثبیت زبانی دقیق برای توصیف مفاهیم و استقرار نظمی آرامش‌بخش در همهٔ ریاضیات شد. این پیروزی تأثیر عظیم و غیرقابل انکاری بر ریاضیات داشت، اما از سویی دیگر اصرار برای استفاده از این زبان در همه‌جا، باعث شد که حتی در بسیاری از متنهای مقدماتی ریاضی نیز، ایده‌ها در سایهٔ زبان قرار گیرند و ریاضیات ناب برای کسانی که هنوز زبان آن را به‌طور کامل نیاموخته‌اند، به بازی با نمادها شباهت پیدا کند. به‌عنوان مثال، بسیاری از کتابهای امروزی جبر مجرد، با معرفی مفهوم «گروه» و اثبات گزاره‌هایی در مورد آن آغاز می‌شوند، در حالی که گروه مجرد اولین بار توسط هاینریش وبر در سال ۱۸۸۶ تعریف شد و تا آن زمان گروههای جایگشتی، گروه تبدیلات صفحهٔ اقلیدسی و هذلولوی و همچنین گروههای گالوا، به‌دقت مورد مطالعه قرار گرفته بودند. [۶]

برای آنکه منظورم را از آنچه در بالا گفتم بهتر بیان کنم، تقریباً همان اثبات را به شکلی مجردتر تکرار می‌کنم. (این اثبات را می‌توانید در [۲] یا [۴] ببینید.) با همان نمادگذاری‌های بالا، ناوردای دِن را برای چندوجهی P، این‌طور تعریف می‌کنیم

$$D(P) = \sum_{e \in E(P)} |e| \otimes \alpha(e).$$

توجه کنید که $D(P)$ عضوی از گروه آبلی $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ است. همان اثبات بالا، با کمی تغییر صوری، نشان می‌دهد که برای هر تجزیهٔ چندوجهی P به چندوجهی‌های P_1، P_2، ...، P_n تساوی

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \cdots + D(P_n)$$

برقرار است و بنابراین اگر دو چندوجهی قابل تبدیل به یکدیگر باشند، ناورداِی دنِ مساوی دارند. حال مجدداً می‌توان دید که ناوردای دنِ هر مکعب صفر و هر چهاروجهی منتظم ناصفر است. این اثبات دست‌کم دو مزیت نسبت به اثبات نخست دارد: اول آنکه در این اثبات، نقش مبهم تابع f که چیزی نیست جز ساختن یک عدد از روی کمیتی که به جهان پیچیده‌تری تعلق دارد، روشن شده است و دیگر آنکه معرفی ناورداِی دن این نتیجهٔ جالب را نیز به همراه دارد:

برای هر چندوجهی P، زوج مرتب $(\mathrm{vol}(P), D(P))$ ردهٔ هم‌ارزی چندوجهی P را مشخص می‌کند. به بیان دیگر اگر دو چندوجهی با حجم و ناوردای دنِ مساوی داشته باشیم، می‌توانیم هر یک را به دیگری تبدیل کنیم. (برای اثبات می‌توانید [۴] را ببینید.)

اما اثبات اول که به زبانی خودمانیتر نوشته شده است نیز دارای این برتری مهم است که برای درک آن نیازی به شناخت موجود مجردی مثل حاصلضرب تانسوری گروههای $\mathbb{R}$ و $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ نداریم. «کتاب اثبات» که اکنون با دقت بیشتری به آن خواهیم پرداخت نمونهٔ خوبی است برای نشان‌دادن آنکه بسیاری از نتایج ریاضی را می‌توان با اندکی اغماض در مورد کلیت و گاه دقت، در دسترس جمع بزرگتری از دوستداران این رشته قرار داد.

۳. کتابِ اثبات

در دو بخش بالا سعی کردم که سبکی برای نگارش ریاضیات را که در این کتاب به‌کار رفته است توصیف کنم. اکنون نگاهی دقیقتر به کتاب خواهیم انداخت: کتابِ اثبات مجموعه‌ای از سی بخش کم‌وبیش مستقل است که در پنج فصل تحت عنوانهای نظریهٔ اعداد، هندسه، آنالیز، ترکیبیات، و نظریهٔ گراف تدوین شده‌اند و هر یک از بخشها به بررسی یک یا چند مسأله اختصاص یافته است. کتاب با «شش راه برای اثبات نامتناهی بودن اعداد اول» آغاز می‌شود که به نظرم گل سرسبد آنها، که نخستین آنها نیز هست، اثبات اقلیدس است: اگر p_1، p_2، ...، p_n همهٔ اعداد اول باشند، آنگاه $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ نمی‌تواند هیچ عامل اولی داشته باشد چرا که بر هیچ‌یک از اعداد p_1، p_2، ...، p_n بخش‌پذیر نیست! از این اثبات بیش از این می‌توان آموخت: درواقع به همین روش می‌توان وجود تعداد نامتناهی عدد اول در بعضی از تصاعدهای حسابی را نیز ثابت کرد (برای اطلاعات بیشتر به [۳] رجوع کنید.)

اثباتهای کلاسیک دیگری را نیز در کتاب می‌بینیم. اثبات قشنگ کانتور برای ناشمارا بودن اعداد حقیقی، اثبات ویت برای قضیهٔ ودربرن (هر حلقهٔ

۱. بخشی از مقدمهٔ کتاب اثبات.

تقسیم متناهی، جابه‌جایی است.) و اثبات دنِ برای مسألهٔ سوم هیلبرت. در این بین جای اثباتهای زیبایی که برای قضیهٔ اساسی جبر و قضیهٔ چهار مربع وجود دارد واقعاً خالی است. (برای قضیهٔ اساسی جبر، [۶] و [۷] و برای قضیهٔ چهار مربع، [۳] و [۵] را ببینید.)

درکنار اینها، تعدادی قضیهٔ تازه‌تر و همچنین اثباتهایی نو برای قضیه‌های کلاسیک، کتاب را پربارتر کرده‌اند. اثبات باورنکردنی تساگیر[2] برای قضیهٔ دو مربع فرما (که برای دنبال کردن آن، تنها به دانستن تعریف عدد اول نیازمندیم!) و اثبات جدید توماسن برای قضیهٔ پنج رنگ در این زمره‌اند.

درگوشهٔ دیگری ازکتاب نیز با کاربردهای روش احتمالاتی در ترکیبیات آشنا می‌شویم. این روش توانمند که توسط اردوش ابداع شد، امروز در جعبه‌ابزار همهٔ متخصصان ترکیبیات جایی برای خود بازکرده است. ایده‌ای که در پس این روش قرار دارد، ساده و در عین حال بسیار ظریف است: برای اثبات وجود یک ساختار ترکیبیاتی با ویژگیهای مشخص، یک فضای احتمال مناسب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک عضو تصادفی در این فضا به احتمال مثبت دارای این ویژگیهاست [۱].

نمونه‌هایی که در بالا آوردم، درکتاب به تفصیل بررسی شده‌اند. اثباتهای کتاب به دقت نوشته شده‌اند و تصاویری که آنها را همراهی می‌کنند، درک اثباتها را سهولت بخشیده‌اند. در نوشته‌هایی ازاین دست، یادداشتهایی در مورد ارتباط قضایا با مسأله‌های دیگر، تعمیمهای ممکن، و همچنین جنبه‌های تاریخی مسأله‌ها می‌توانند بر جذابیت کتاب بیفزایند، اما ظاهراً نویسندگان کتاب بیشتر به‌خود اثباتها توجه داشته‌اند و از این نوع یادداشتها کمتر درکتاب دیده می‌شود. درپایان فکر می‌کنم که تقریباً همهٔ اثباتهای منتخب، از ظرافت کافی برای حضور در این نسخهٔ زمینی «کتاب» برخوردار هستند.

1. Zagier

مراجع

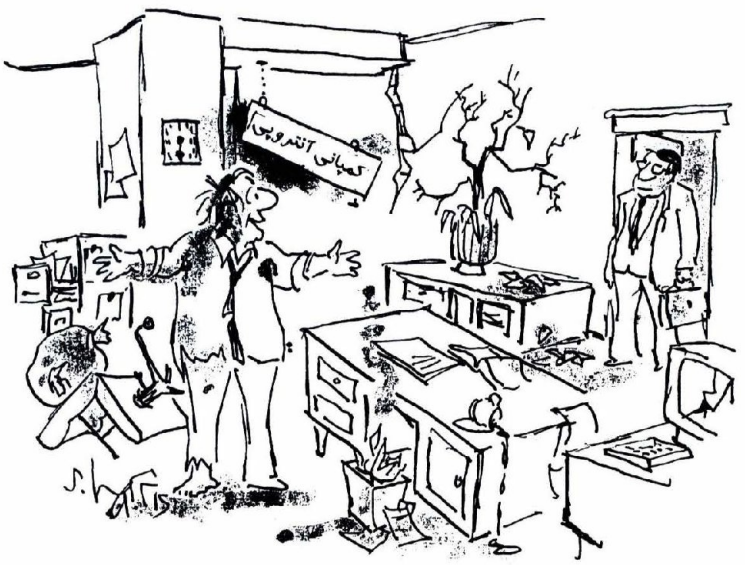
1. N. Alon, J. H. Spencer, P. Erdős, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons (1992) vii.
2. P. Cartier, "Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert", *Sém Bourbaki, 37 ème Année*, 1984-85, no. 646.
3. G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press (1960) 12-13, 302-314.
4. C. H. Sah, *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence*, Pitman Advanced Publishing Program (1979).
5. W. Scharlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski, Lectures on the Theory of Numbers & its Developments*, Springer Verlag (1985) 158-160.
6. B. L. van der Waerden, *A History of Algebra, from al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer Verlag (1985) 94-102, 138-154.

۷. رامین تکلو بیغش. «قضیهٔ اساسی جبر: یک مقدمهٔ تاریخی، چند اثبات». مجلهٔ ریاضی (دانشجویان شمارهٔ ۴) (بهار ۷۲)، صص. ۳ـ۹.

* * * * * *

* کیوان ملاحی‌کارای، دانشگاه ییل آمریکا

keivan@math.yale.edu



«از این بهتر نمی‌شد!»

NASHR-E RIYĀZI

Volume 13, Numbers 1, April 2002

Editorial Board

S. KĀZEMI, K. LĀJEVARDI, P. SAFARI,
A. SHAFIEI DEH ABAD, S. SHAHSHAHĀNI (chairman)

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz@acnet.ir⟩.

CONTENTS

Notes & News

Articles

Hard spheres model and three conjectures, F. REZĀKHĀNLOU

* The dawning of the age of stochasticity, D. MUMFORD

* The present and the future of mathematical physics, H. POINCARÉ

* Three interviews: Adrien Douady, Friedrich Hirzebruch, Mikhael Gromov, R. LANGEVIN

* Bolzano, Cauchy, epsilon, delta, W. FELSCHER

Teaching/Problems

* The teaching and learning of mathematics at the university level, M. ARTIGUE

More problems ..., K. ALISHĀHI

Book Reviews

(A Persian translation of) *Proofs from THE BOOK*, by M. Aigner, G. M. Ziegler (reviewed by K. MALLAHI KARAI)

(A Persian translation of) *Eléménts de mathematique: Théorie des ensembles* (fascicule des résultats), by N. Bourbaki (reviewed by K. LĀJEVARDI)

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

از کتابهای مرکز نشر دانشگاهی

- **اصول آمار زیستی** (جلد دوم)
  برنارد روسنر
  ترجمهٔ علی عمیدی
- **جبر خطی** (چاپ هفتم)
  کنت هافمن، ری کنزی
  ترجمهٔ جمشید فرشیدی
- **مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا**
  (جلد سوم، چاپ سوم)
  چارلز ت. سالکیند، جیمز م. ارل
  ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا
- **نخستین درس در جبر مجرد** (جلد اول، چاپ هفتم)
  جان ب. فرالی
  ترجمهٔ مسعود فرزان
- **طرح و تحلیل آزمایشها**
  داگلاس سی. مونت‌گمری
  ترجمهٔ غلامحسین شاهکار
- **مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا**
  (جلد چهارم، چاپ سوم)
  آرتینو، گاگلیون، شل
  ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی