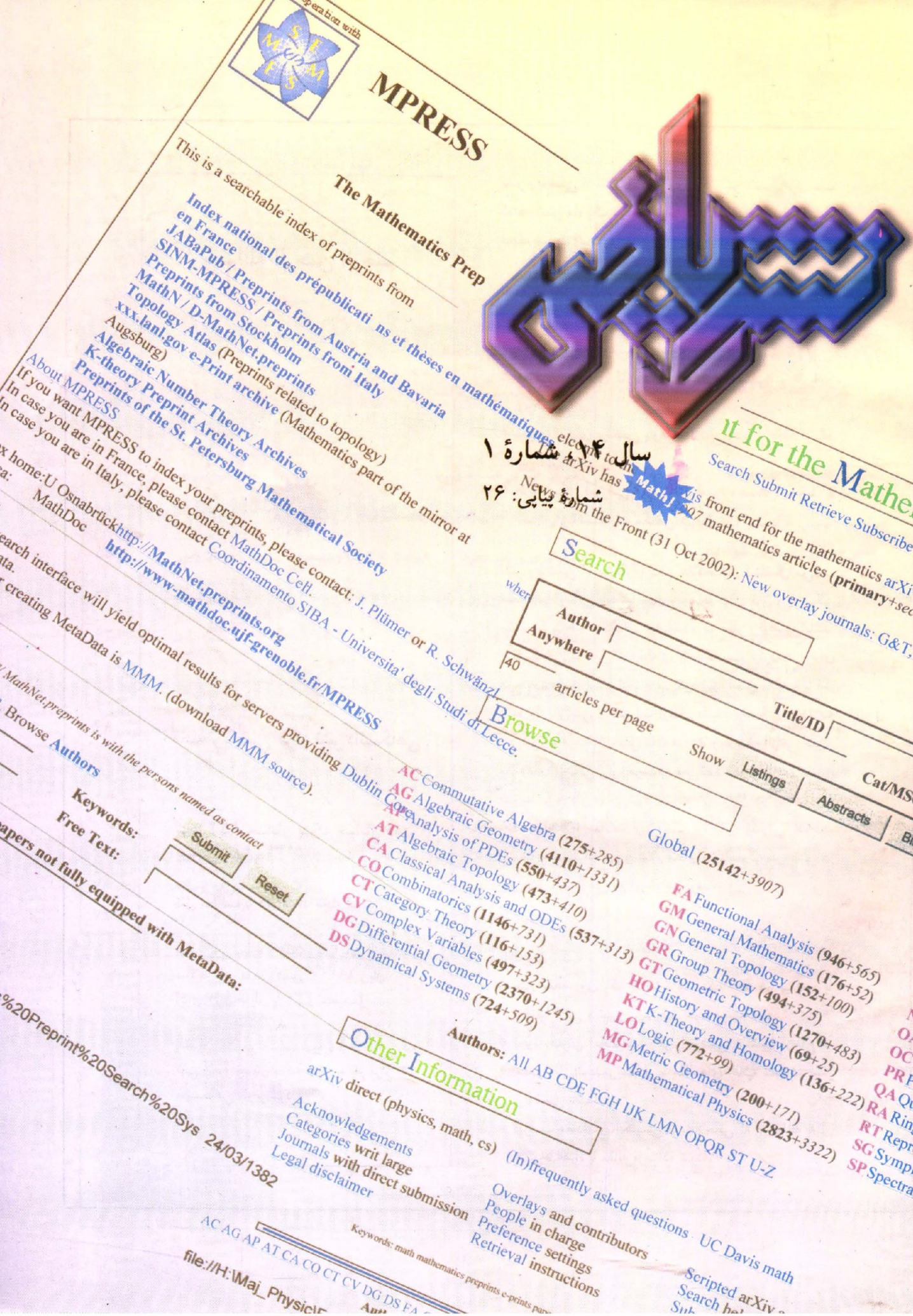


MPRESS

The Mathematics Prep

This is a searchable index of preprints from

Index national des prépublicati ns et thèses en mathématiques
en France
JABaPub / Preprints from Austria and Bavaria
SINM-MPRESS / Preprints from Stockholm
MathN / D-MathNet.preprints
Topology Atlas (Preprints related to topology)
xxx.lanl.gov e-Print archive (Mathematics part of the mirror at Augsburg)
Algebraic Number Theory Archives
K-theory Preprint Archives
Preprints of the St. Petersburg Mathematical Society

About MPRESS

If you want MPRESS to index your preprints, please contact: J. Plümer or R. Schwänzl
In case you are in France, please contact MathDoc Cell.
In case you are in Italy, please contact Coordinamento SIBA - Universita' degli Studi di Lecce.

x home:U Osnabrückhttp://MathNet.preprints.org
MathDoc http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/MPRESS

earch interface will yield optimal results for servers providing Dublin Cor
ata.
r creating MetaData is MMM. (download MMM source).

/ MathNet.preprints is with the persons named as contact

Browse **Authors**

Keywords:
Free Text:
Submit
Reset

apers not fully equipped with MetaData:

%20Preprint%20Search%20Sys 24/03/1382

سال ۱۴، شمارهٔ ۱
شمارهٔ پیاپی: ۲۶

elc m to th
arXiv has
News from the Front (31 Oct 2002): New overlay journals: G&T, AGT, and JN
Math J
is front end for the mathematics arXiv, maintained
07 mathematics articles (**primary**+*secondary*) as of

It for the Mathematics

Search Submit Retrieve Subscribe Journals Categ

Search

wher

Author
Anywhere
Title/ID
Cat/MSC

40 articles per page

Show **Listings** **Abstracts** **BibTeX**

Browse

Global (**25142**+*3907*)

AC Commutative Algebra (**275**+*285*)
AG Algebraic Geometry (**4110**+*1331*)
AP Analysis of PDEs (**550**+*437*)
AT Algebraic Topology (**473**+*410*)
CA Classical Analysis and ODEs (**537**+*313*)
CO Combinatorics (**1146**+*731*)
CT Category Theory (**116**+*153*)
CV Complex Variables (**497**+*323*)
DG Differential Geometry (**2370**+*1245*)
DS Dynamical Systems (**724**+*509*)

FA Functional Analysis (**946**+*565*)
GM General Mathematics (**176**+*52*)
GN General Topology (**494**+*100*)
GR Group Theory (**1270**+*375*)
GT Geometric Topology (**69**+*483*)
HO History and Overview (**136**+*25*)
KT K-Theory and Homology (**200**+*222*)
LO Logic (**772**+*171*)
MG Metric Geometry (**99**+*25*)
MP Mathematical Physics (**2823**+*3322*)

NA Numerica
NT Number T
OA Operator A
OC Optimizati
PR Probabilit
QA Quantum
RA Rings and
RT Represent
SG Symplecti
SP Spectral T

Authors: All AB CDE FGH IJK LMN OPQR ST U-Z

Other Information

arXiv direct (physics, math, cs) (In)frequently asked questions UC Davis math
Acknowledgements Overlays and contributors Scripted arXiv
Categories **writ large** People in charge Search hel
Journals **with direct submission** Preference settings Sub
Legal disclaimer Retrieval instructions

AC AG AP AT CA CO CT CV DG DS FA

Keywords: math mathematics preprints e-prints pap

file://H:\Maj_Physic\F

بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

بهای این شماره ۵۵۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۱۱۰۰۰ ریال. (برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۴، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۸۲

شمارهٔ پیاپی: ۲۶

nashriaz@acnet.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

- **هیأت ویراستاران:**

حسن حقیقی
سیاوش شهشهانی
پدرام صفری
سیامک کاظمی

- **مشاوران این شماره:**

امیرحسین اصغری، میرشمس‌الدین ادیب‌سلطانی، محمد جلوداری‌ممقانی، آرش رستگار، محمدهادی شفیعیها، مهرداد شهشهانی، علی عمیدی، بیژن ظهوری‌زنگنه، همایون معین، منوچهر وصال

- **یاران برون‌مرزی:**

امیر اکبری، رامین تکلوبیغش، عطاءالله تقا، مسعود خلخالی، سعید ذاکری، پیمان کسایی، کاوه لاجوردی، کیوان ملاحی

- **دستیار فنی:** زهرا دلاوری
- **طراح:** شکوه پیله‌فروشها
- **حروفچین و صفحه‌آرا:** سیده مریم طاهریان
- **ناظر چاپ:** علی صادقی
- **لیتوگرافی:** مردمک
- **چاپ و صحافی:** منفرد (میدان شهدا، خ شهید کفایی، شمارهٔ ۳۶)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

گزارش ۲

مقاله‌ها

ژان پیر سِر و نظریهٔ اعداد	فریدون شهیدی	۶
اول‌بودنْ یک مسألهٔ P است	حسن حقیقی	۱۰
نشر الکترونیک	پدرام صفری	۱۷
میراث آبل در هندسهٔ جبری	فیلیپ گریفیث	۳۵
علوم آماری: تحول، محرکها، جهت‌گیری‌ها	پیتر هال	۴۸
توپولوژی و جبر مجرد: دو رهیافت به درک ریاضی	هرمان وایل	۵۵
گرایشهای محتمل در ریاضیات در دهه‌های آینده	میخائیل گروموف	۶۳
تأملاتی در بارهٔ آیندهٔ ریاضیات	فلیکس براؤدر	۶۴

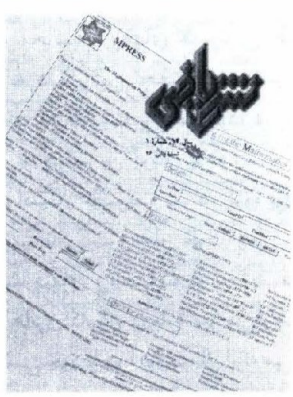
آموزش و مسأله

ماجرای یک مسأله	کسری علیشاهی، رضا مقدسی	۶۸

نقد و بررسی

ریاضیات و استعاره:

چرا علوم‌شناختی برای ریاضیات اهمیت دارد؟	جورج لاکوف، رافائل تونز	۷۳
ریاضیات جسم‌بنیاد	جوزف اوسلاندر	۷۸
ریاضیات در ۳۷ درجه	جان الن پاولوس	۷۹



روی جلد

به مناسبت درج مقالهٔ «نشر الکترونیک»

گزارش

اعطای اولین جایزهٔ آبل به ژان‌پیر سر

آکادمی علوم و ادبیات نروژ، جایزهٔ آبل در سال ۲۰۰۳ را که اولین جایزه از جوایز صندوق آبل است به خاطر نقش اساسی ژان‌پیر سر در شکل‌دادن به بسیاری از قسمتهای ریاضیات معاصر، از جمله توپولوژی، هندسهٔ جبری، و نظریهٔ اعداد، به او اعطا کرد.

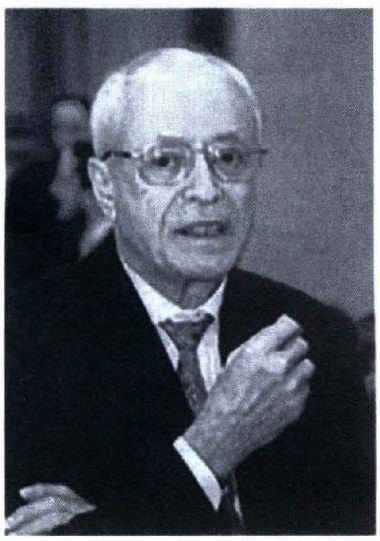
سر این جایزه را روز سوم ژوئن ۲۰۰۳ در مراسمی در دانشگاه اسلو از دست هارالد پنجم پادشاه نروژ دریافت کرد. وی در این مراسم سخنانی با عنوان «اعداد اول، معادلات، فرمهای پیمانه‌ای» ایراد کرد.

ژان‌پیر سر در سپتامبر ۱۹۲۶ در شهر باژ[1] فرانسه به دنیا آمد. طی سالهای ۱۹۴۵ تا ۱۹۴۸ تحصیلاتش را در اکول نرمال سوپریور پاریس گذراند و دکتری خود در ریاضیات را در سال ۱۹۵۱ از دانشگاه سوربن دریافت کرد. وی در رسالهٔ دکتری‌اش دامنهٔ روشهای کلافهای تاری را گسترش داد و روشهای جبری کاملاً نوینی را برای مطالعهٔ توپولوژی به‌کار برد؛ به خصوص نگاشتهای بین کره‌های از بعد بالا را بررسی کرد و موفق شد فصل جدیدی را در محاسبهٔ گروههای هوموتوپی بگشاید.

به دنبال این تحقیقات اساسی در توپولوژی و سایر رشته‌هایی که در آنها به فعالیت پرداخته بود، در سال ۱۹۵۴ موفق به اخذ مدال فیلدز شد. او جوانترین فردی بوده است که تاکنون به دریافت این مدال نائل شده است. عضویت سر در گروه بورباکی و ارتباط نزدیکش با عده‌ای از ریاضیدانان پیشرو زمان خود، او را در موقعیتی قرار داد که بتواند در بسیاری از پیشرفتهای ریاضیات در اواسط قرن بیستم نقش مهمی ایفا کند.

هانری کارتان دربارهٔ سر می‌گوید: «هنگامی که من سمینارهای مستمر ریاضی خود را در اکول نرمال ارائه می‌دادم سر فعالانه در آنها شرکت می‌کرد و سؤالات بسیاری از من می‌پرسید و با این سؤالات به من کمک کرد تا بسیاری از

1. Bages



مفاهیم را کشف کنم. برای من بسیار مهم بود که او را ببینم و سؤالهایش را بشنوم. حتی هنگامی‌که رساله‌اش را آماده کرد به سؤال کردن از من ادامه می‌داد، و من مجبور بودم به آنها فکر کنم.» کارتان مهمترین موفقیت خود را کشف ارتباط بین توپولوژی جبری و توابع تحلیلی می‌دانست و آنها را به کمک قضایایی کلی بیان کرده بود. اما به اعتقاد وی این قضایا به کمک سر کشف شده بودند و کارتان وی را در این مورد بسیار تحسین می‌کرد. کارتان ضمن تحقیقاتش در توپولوژی جبری در فاصلهٔ سالهای ۱۹۴۷ تا ۱۹۵۰ سه تعریف مقدماتی برای مفهوم بافه ارائه داد که آخرین آنها پس از تغییراتی به شکل امروزی آن درآمد. یکی از کارهای اساسی سر در این زمینه، به‌کارگیری این مفاهیم در آنالیز مختلط چند متغیره، هندسهٔ جبری روی $\mathbb{C}$ و به‌طور کلی روی میدانهای جبری-بسته بود. گروتندیک که تحت‌تأثیر سر بود از این مفهوم جدید استفاده کرد و مفهوم «اسکیم» را ابداع نمود و به این ترتیب راههایی جدید و بدیع برای مطالعهٔ هندسهٔ جبری کلاسیک گشود و دامنهٔ مطالعهٔ اشیاء هندسی را بسیار وسیعتر کرد.

قضیهٔ دوگانی سر که در دههٔ پنجاه کشف شد، به‌عنوان ابزاری اساسی و کارا در مطالعهٔ کوهومولوژی واریته‌های جبری به‌کار می‌رود و بسیاری از قضایای کلاسیک هندسهٔ جبری را می‌توان به‌کمک آن به شیوه‌ای ساده‌تر استنتاج کرد و یا آنها را در کلیترین حالت بیان و اثبات نمود.

یکی دیگر از دستاوردهای سر در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری، قضیه‌ای است که به قضیهٔ $S_2 + R_1$ مشهور است و شرایط لازم و کافی برای نرمال بودن یک واریته و یا یک حلقه را بیان می‌کند. این قضیه در اکثر اثباتهای مربوط به نرمال بودن حلقه یا واریته نقشی اساسی ایفا می‌کند.

سر در سال ۱۹۵۷ موفق شد تعریف روشنی از مفهوم چندگانگی [تعدد] نقاط روی واریته‌های جبری و یا حلقه‌های موضعی ارائه کند. وی این عدد را به‌عنوان مجموع متناوب طولهای مدولهای Tor معینی معرفی کرد. این تعریف از آن جهت حائز اهمیت است که تا آن زمان مفهوم چندگانگی نقاط در هندسهٔ جبری مفهومی روشن نبود و در وضعیتهای مختلف، تفاوتهای اساسی پیدا می‌کرد. این خود دستاوردی مهم در نظریهٔ تقاطع در هندسهٔ جبری بوده است.

از جمله حدسهای مهمی که در این سالها از طرف سر مطرح شد این بود که هر مدول تصویری روی حلقهٔ چندجمله‌ایها با ضرایب در یک میدان، آزاد است. معادل هندسی این حدس این است که هر کلاف‌برداری روی یک فضای آفین بدیهی است. این حدس نقش مؤثری در پیشرفتهای اولیهٔ نظریهٔ K داشته است و در نهایت کوئیلن[1] و سوسلین[2]، آن را مستقلاً در سال ۱۹۷۶ اثبات کردند. یکی دیگر از حوزه‌هایی که سر کارهای اساسی در آن

1. Quillen 2. Suslin

انجام داده است، نظریهٔ اعداد است. کارهای وی در این موضوع در چهل سال گذشته، به خصوص حدسهای وی، باعث شکوفا شدن هرچه بیشترِ این قدیمیترین نظریهٔ ریاضی شده است.

ارتباط نزدیک سر با آندره ویل سبب شده بود که هر دو برای حل حدس مهم تانیاما-شیمورا تلاش کنند. ضمن این تلاشها سر حدسهای مهم و عمیقی در ارتباط با خمهای بیضوی روی $\mathbb{Q}$ صورت‌بندی کرد. با حل و فصل این حدسها گامهای اساسی برای تعیین تکلیف حدس فوق و قضیهٔ آخر فرما برداشته شد. نقش سر در این تلاشها بسیار برجسته و آشکار است (ر. ک. مقالهٔ «ژان پیرسر و نظریهٔ اعداد» در همین شمارهٔ نشر ریاضی).

از طرف دیگر، فعالیتهای مشترک سر با آرتین سبب شد تا سر بتواند یکی از عمیقترین قضایای نظریهٔ اعداد، یعنی قضیهٔ تقابل مربعی، را به حالتهای غیرآبلی تعمیم دهد. در اهمیت قضیهٔ تقابل مربعی همین بس که تاکنون بیش از ۲۰۰ اثبات متفاوت از آن ارائه شده است. ابزار وی در این تعمیم، کوهومولوژی خمهای پیمانه‌ای بود.

آثار سر به شیوه‌ای دقیق، روشن، و کامل به رشتهٔ تحریر درآمده و پر است از مطالب اصیل، به‌طوری که هریک از آنها یک مرجع استاندارد در حوزهٔ مربوطه به حساب می‌آید.

اعضای کمیتهٔ انتخاب کنندهٔ برندهٔ جایزهٔ آبل در سال ۲۰۰۳، ارلینگ اشتورمر[1] (رئیس کمیته)، جان بال[2]، ژاکوب پالیس، دیوید مامفرد، و فریدریش هیرتسبروخ بوده‌اند.

مبلغ جایزه ۶ میلیون کرون نروژ معادل ۸۲۵۰۰۰ دلار آمریکاست. صندوق یادبود آبل در ژانویهٔ ۲۰۰۲ تأسیس شد و هدف اصلی آن تخصیص جایزه‌ای بین‌المللی به کارهای برجسته و مؤثر در حوزهٔ ریاضیات به منظور ارتقاء سطح ریاضیات در جامعه و تشویق جوانان علاقه‌مند است. این صندوق توسط وزارت آموزش و تحقیقات نروژ اداره می‌شود.

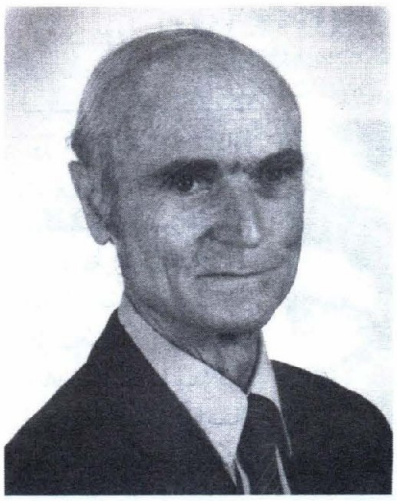
ح. ح

دانلد کاکستر (۱۹۰۷-۲۰۰۳)

هرلد اسکات مک‌دانلد کاکستر[3] که اغلب او را شاخصترین نمایندهٔ هندسهٔ کلاسیک در قرن بیستم می‌دانند در آخرین روز مارس ۲۰۰۳ (۱۱ فروردین سال جاری) در تورنتوی کانادا درگذشت. او در فوریهٔ ۱۹۰۷ در لندن متولد شد و از کودکی استعداد خارق‌العاده‌ای از خود نشان داد. نخست در موسیقی و زبان درخشید به‌طوری که در ۱۲ سالگی یک اپرا نوشت و زبان جدیدی اختراع کرد که برای آن راهنمایی به زبان فرانسه و لاتین تنظیم نمود. بالاخره، زیباییهای هندسه و تقارن او را به سوی ریاضیات کشاند و با حمایت برتراند راسل وارد دانشگاه کیمبریج شد و در سال ۱۹۳۱ درجهٔ دکتری ریاضیات را از کیمبریج دریافت کرد. از سال ۱۹۳۶ به عضویت هیأت علمی دانشگاه تورنتو درآمد و باقی عمر خود را عمدتاً در تورنتو گذراند.

کاکستر مؤلف دوازده کتاب و بیش از ۲۰۰ مقاله است. محور اصلی آثار او تقارن در هندسه و گروههای تقارن اشیاء هندسی است. کاکستر نه تنها نقشی اساسی در شناخت و رده‌بندی اشیاء هندسی منظم در ابعاد بالا دارد بلکه کارهای او در هندسهٔ فضای سه بعدی و صفحه نیز بسیار الهامبخش

1. Erling Stormer 2. John M. Ball 3. H. S. M. Coxeter



و تأثیرگذار بوده است. کار او در مورد تقارنهای بیست‌وجهی منتظم نقش برجسته‌ای در تحقیقات شیمی دربارهٔ مولکولهای کربن ۶۰ داشت و جایزهٔ نوبل شیمی ۱۹۹۶ نصیب این تحقیقات شد. اشر[1] طراح معروف که در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در آمستردام با کاکستر آشنا شد، آثار خود در زمینهٔ آجربندی صفحهٔ هذلولوی و دایرهٔ حدی را تحت‌تأثیر او خلق کرد (برای ملاحظهٔ نمونه‌ای از آنها، ر. ک. ص. ۵).

همچنین، باکمینیستر فولر[2] فیلسوف و نظریه‌پرداز بزرگ معماری، «گنبد ژئودزیکی» معروف خود را با الهام از کارهای کاکستر طراحی کرد و یک کتاب خود را به او تقدیم نمود. بسیاری از آثار مهم هندسی کاکستر زمانی به چاپ رسید که اساساً هندسه چندان مورد توجه نبود. در سالهای اخیر کارهای کاکستر موردتوجه بیشتر قرار گرفته است و پیوندهای عمیقی که وی میان هندسه و نظریهٔ گروهها کشف کرد موضوع پژوهشهای بسیار است.

شایعهٔ اثبات حدس پوانکاره

یکی از معروفترین مسائل حل نشدهٔ ریاضیات، یافتن جواب برای سؤالی است که پوانکاره در سال ۱۹۰۴ به این مضمون مطرح کرد:

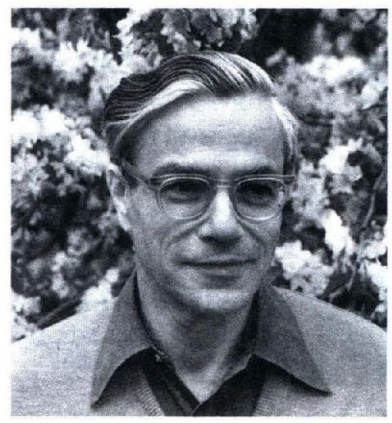
آیا هر خمینهٔ فشرده و هموار سه بعدی که ساده-همبند باشد با کرهٔ سه بعدی همسانریخت است؟

پاسخ مثبت این حدس به حدس پوانکاره معروف شده است. این یکی از مسائلی است که حل آن جایزهٔ یک میلیون دلاری بنیاد کلی را به ارمغان خواهد آورد. تاکنون به کرّات راه‌حل‌های نادرستی برای این مسأله پیشنهاد شده‌اند که بعضی حتی منجر به پیشرفتهای قابل ملاحظه‌ای در توپولوژی شده‌اند. ویلیام ترستن ریاضیدان معاصر و یکی از برندگان مدال فیلدز در سال ۱۹۸۳، حدسی عمیق در مورد رابطهٔ هندسه و توپولوژیِ خمینه‌های سه بعدی دارد که در صورت صحّت، به سؤال پوانکاره نیز جواب مثبت خواهد داد. چند سال پیش، ریچارد همیلتن روشی برای اثبات حدس ترستن طرح کرد و اخیراً گریشا پرلمن[3] ریاضیدان روس روشهایی برای فائق آمدن بر مشکلاتی که پیاده‌سازی طرح همیلتن دارد پیشنهاد کرده است. تحقیقات پرلمن اکنون در دست بررسیِ متخصصان است و چنانچه از محک بررسی سربلند بیرون آید پاسخ مثبتی نیز برای سؤال پوانکاره حاصل خواهد شد.

س. ش

1. Escher 2. Buckminister Fuller 3. Grisha Perelman

آرمان بورل (۱۹۲۳ـ۲۰۰۳)



آرمان بورل[1]، ریاضیدان سوئیسی تبار مقیم امریکا، روز ۱۱ اوت (۲۰ مرداد) در پرینستن بر اثر سرطان درگذشت. محور اصلی کار او نظریهٔ گروههای لی بود که نقش فزاینده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضیات جدید پیدا کرد. اولین کار عمدهٔ او اِعمال روشهای متعلق به توپولوژی جبری در نظریهٔ گروههای لی و فضاهای همگن بود. دیگر اثر مهم او مقالهٔ کلاسیک «Groupes linéaires algébriques» (گروههای جبری خطی) است که نقطهٔ عطفی در نظریهٔ گروههای جبری محسوب می‌شود. بورل همچنین به بررسی گروههای حسابی و کوهومولوژی آنها، فرمهای خودریخت و نمایشهای بینهایت بعدی گروههای لی حقیقی و pـآدیک پرداخته است و ایده‌های او در زمینهٔ مسائل پیچیده و گوناگون به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم راهگشا بوده است.

آرمان بورل روز ۲۱ مه ۱۹۲۳ در شهر فرانسوی زبان لاشو-دو-فون[2] در سوئیس متولد شد، در سال ۱۹۴۹ از مؤسسهٔ صنعتی فدرال سوئیس در زوریخ (ETH) فارغ‌التحصیل شد و درجهٔ دکتری دولتی[3] خود را از دانشگاه پاریس در سال ۱۹۵۲ دریافت کرد. او در همین سال با گابریل آلین پیتت ازدواج کرد که از او دو فرزند دختر یافت. بورل تا سال ۱۹۵۷ در مراکز مختلف علمی ازجمله مؤسسهٔ فدرال سوئیس، مرکز ملی تحقیقات علمی فرانسه (CNRS)، دانشگاه ژنو و مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن (IAS) به فعالیت پرداخت که در این سال به سمت استادی در IAS رسید و باقی فعالیت شغلی خود را در این مرکز گذراند تا در سال ۱۹۹۳ بازنشسته شد. البته او به کرّات استاد مدعو مراکز مختلف علمی بوده است، ازجمله در دانشگاههای شیکاگو، برکلی، ام. آی. تی.، ییل، پاریس، توهوکو (ژاپن) و تاتا (هند). وی نقشی بسیار بنیادی و مؤثر در فعالیتها و حیات علمی IAS داشت. در ضمن عضو گروه بورباکی در فرانسه نیز بود.

بورل تا آخرین سالیان عمرش بسیار فعال بود، برنامه‌های مختلف علمی در مراکز دانشگاهی ترتیب می‌داد و با علاقهٔ بسیار به ورزش، طبیعت و موسیقی می‌پرداخت. آخرین کار او کتابی است که مشترکاً با یکی از همکارانش نوشته است و در سال ۲۰۰۴ به چاپ خواهد رسید.

1. Armand Borel 2. La Chaux-de-Fonds
3. doctorat d'état

جایزهٔ شاو

بنیاد شاو در هنگ‌کنگ جایزه‌های سالانه‌ای در سه زمینهٔ اخترشناسی، علوم‌زیستی و پزشکی، و علوم ریاضی اهدا می‌کند. این جوایز یک میلیون دلاری به افرادی اهدا می‌شود «که به پیشرفت عمده‌ای در پژوهشها یا کاربردهای علمی نایل شده باشند، و کار آنها تأثیر مثبت و عمیقی بر بشریت گذاشته باشد». ظاهراً این مبلغ جایزه بیشترین مبلغ در میان جوایز موجود ریاضی است.

اعلان برندگان و اعطای جوایز هر سال در ماههای ژوئن و اوت صورت می‌گیرد ولی روند تعیین برندگان از یک سال قبل آغاز می‌شود. حدود شمول «علوم ریاضی» به عمد مبهم گزارده شده است، ولی صراحتاً شامل ریاضیات کاربردی نیز می‌شود. اولین جایزهٔ شاو در تابستان ۲۰۰۴ اهدا می‌شود و در میان هیأت داوران نام افرادی چون بورگینیون (رئیس مؤسسهٔ مطالعات علمی فرانسه IHES) و گریفیث (رئیس پیشین مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن IAS) به چشم می‌خورد. نشانی وب‌گاه این جایزه چنین است

`http://www.shawprize.org/`

پ. ص.
با تشکر از ع. ت.

تِک (TEX) بیست و پنج ساله شد

گردهمایی سالانهٔ «گروه کاربران تک»[1] در ۲۰ تا ۲۴ ژوئیه (۲۹ تیر تا ۲ مرداد) سال جاری، در جزیرهٔ هاوایی برگزار شد. گروه کاربران تک یک سازمان غیرانتفاعی است که از ۶۱ کشور جهان نمایندگانی در آن عضویت دارند. گروههای متعددی در نقاط مختلف جهان برروی این سیستم حروفچینی رایانه‌ای کار می‌کنند وکارایی و قابلیتهای آن را مداوماً ارتقاء می‌بخشند. هر ساله نمایندگانی از آنها برای گفتگوی رو در رو در بارهٔ کارهایی که در مورد این سیستم و نرم‌افزارهای جانبی آن انجام داده‌اند و یا باید انجام دهند گرد هم می‌آیند:

ویژگیهای ممتاز تک به‌خصوص از لحاظ نمادسازی و صفحه‌بندی و نیز امکانات ویرایش موجب شده است که بسیاری از ناشران متون علمی تک را به‌عنوان سیستم اصلی خود برای واژه‌پردازی و چاپ برگزینند. با ساده‌سازی‌ها و تطبیق تک با ویندوز و وب در سالهای اخیر، کارکردن با تک به‌سادگی کارکردن با سایر واژه‌پردازهای متداول شده و در جامعهٔ ریاضی، استفاده از تک فراگیر گشته است. قابلیت خروجی ابرمتن‌های این سیستم حروفچینی، امکان قراردادن همه نوع متن ریاضی را در وب‌گاه‌ها فراهم کرده است.

دانلد کنوت[2] استاد علم رایانه در استنفرد هنگامی که سومین جلد کتابش هنر برنامه‌نویسی حروفچینی شد، چندان از نتیجهٔ کارش راضی نبود ولی نمی‌توانست تغییرات موردنظرش را در متن حروفچینی شده اِعمال کند. به همین

1: TEX Users Group 2. D. Knuth

دلیل به فکر افتاد سیستم خاصی برای واژه‌پردازی متون ریاضی و علمی پدید آورد که قابلیتهای بیشتری داشته باشد و ازجمله بتوان تغییرات لازم را در متنهای تهیه شده برای چاپ به‌آسانی اِعمال کرد. این تلاش چندی بعد به ثمر رسید و سیستم تک در ۱۹۷۸ به‌وجود آمد و در دسترس عموم قرار گرفت. کنوت در سال ۱۹۸۶ پنج جلد کتاب با عنوان «یانه و حروفچینی انتشار داد که حاصل نهایی کارهای او در این زمینه است. از آن زمان تاکنون قابلیتهای تک به‌طور مستمر افزایش یافته و نیز هر روز بر دامنهٔ کاربردها و طیف کاربران آن افزوده شده است.

مجلهٔ نشر ریاضی یکی از نخستین نشریات فارسی زبان است که به معرفی تک پرداخته است (ر.ک. «حروفچینی کامپیوتری متنهای ریاضی»، سال ۲، شمارهٔ ۲، مرداد ۱۳۶۸).

ح.ح

بزرگداشت بورباکی

در تاریخ ۱۲ ژوییهٔ ۲۰۰۳ (۲۱ تیر ماه سال جاری) طی مراسمی در دهکدهٔ بسان شاندس[1] از لوح یادبودی در بزرگداشت نیکولا بورباکی پرده‌برداری شد. این دهکده محل برگزاری اولین کنگرهٔ بورباکی از ۱۰ تا ۱۷ ژوییهٔ سال ۱۹۳۵ بوده است. در این مراسم پروفسور کریستیان اوزل[1] پیرامون تاریخچه و آثار بورباکی سخنرانی کرد و نمایشگاهی از آثار و «زندگی» بورباکی نیز برگزار شد. هر چند تألیف سلسلهٔ کتب بورباکی اکنون متوقف شده است ولی سمینار بورباکی سالی چهار بار در محل مؤسسهٔ هانری پوانکاره در پاریس برگزار می‌شود و طی آن ریاضیدانان صاحب‌نام فرانسوی و بعضاً غیرفرانسوی گزارشهایی از مهمترین تحقیقات جدید و جاری ریاضیات عرضه می‌کنند.

1. Besse on Chandesse

س. ش

******

آقایان احمد شفیعی‌ده‌آباد و کاوه لاجوردی دو تن از اعضای هیأت ویراستاران نشر ریاضی که چندین سال با مجله همکاری داشتند از این شماره به‌علت اشتغالات دیگر از این هیأت کناره‌گیری کرده‌اند. ضمن آرزوی موفقیت برای ایشان، امیدواریم همکاری خود را با مجله به صورتهای دیگری ادامه دهند. ضمناً آقای حسن حقیقی از این شماره به هیأت ویراستاران پیوسته‌اند.

1. Hauzel



طرحی از اشر؛ آجربندی صفحهٔ هذلولوی و دایرهٔ حدی؛ این طرح را اشر با الهام‌گیری از کارهای کاکستر خلق کرده است.

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، صص. ۶ـ۹

ژان پیر سِر و نظریهٔ اعداد

فریدون شهیدی*

ژان پیر سِر[1] دستاوردهای اساسی و متنوعی در نظریهٔ اعداد دارد. چنانکه از جلد سوم (۱۹۷۲ـ۱۹۸۴) و جلد چهارم (۱۹۸۵ـ۱۹۹۵) مجموعهٔ آثار وی پیداست، کار عمدهٔ او در ۳۰ سال اخیر دورهٔ کاری‌اش در این زمینه بوده است. این تحقیقات ادامهٔ طبیعی کار قبلی او در زمینهٔ توپولوژی جبری و هندسهٔ جبری است. در این باره در یکی از مصاحبه‌های سر که که اکنون جزو مجموعهٔ مقالاتش (صفحهٔ ۹۵، جلد چهارم) انتشار یافته، توضیح کامل داده شده است.

نمی‌توان از تحقیقات سر در نظریهٔ اعداد یاد کرد و به کار او در کوهومولوژی گالوایی اشاره‌ای نکرد. ولی این دستاورد نسبتاً معروف و تثبیت شده است و بنابراین، من در اینجا به‌بحث دربارهٔ بعضی از مقالات بعدی او در نظریهٔ اعداد می‌پردازم. دست‌کم دومقالهٔ اولی که مطرح می‌کنم، جزو پیشرفتهای اساسی به‌شمار می‌آیند و آخری هم مقالهٔ جدید زیبایی است که در جورنال انجمن ریاضی آمریکا [۵] منتشر شده و مربوط است به توزیع یکسان[2] ویژه‌مقدارهای هکه در چندزمینهٔ متفاوت، که پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

۱. نخست از مقالهٔ مشترک او با پیر دُلین [۷] شروع می‌کنم که به‌نظر بسیاری از متخصصان یک دستاورد دورانساز در نظریهٔ فرمهای خودریخت[3] است.

فرض کنید H نشان‌دهندهٔ نیمصفحهٔ بالایی اعداد مختلط $z = x+iy$، $y > 0$ باشد. همچنین فرض کنید Γ یک زیرگروه همنهشتی از $SL_2(\mathbb{Z})$، ماتریسهای صحیح دو در دویی که دترمینان آنها ۱ است، باشد. این، به‌بیان دقیقتر، بدان معنی است که عدد طبیعی Nای وجود دارد به‌طوری که $\Gamma \supset \Gamma(N)$ که در آن

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) | \gamma = I (\text{پیمانهٔ } N)\}$$

1. Jean-Pierre Serre 2. equidistribution
3. automorphic forms

$\Gamma(N)$ یک زیرگروه همنهشتی اصلی نامیده می‌شود.

فرض کنید k عددی صحیح است و f تابعی مختلط روی H. مرسوم است که به‌ازای هر $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ قرار می‌دهند

$$(f|_k\gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma \cdot z)$$

که در آن به‌ازای $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$،

$$\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

(به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathrm{Im}(\gamma \cdot z) = y/|cz+d|^2$ و نتیجه گرفت: $\gamma.z \in H$.)

تابع f را فرم پیمانه‌ای تمامریخت[1] به‌وزن k نسبت به Γ می‌نامند اگر

۱) به‌ازای هر $\gamma \in \Gamma$، $f|_k\gamma = f$،

۲) f روی H تمامریخت باشد، و

۳) با مفروض بودن $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$، $f|_k\sigma$ بسطی به‌صورت سری توانی برحسب $\exp(2\pi iz/N)$ داشته باشد که در آن هیچ توان منفی‌ای ظاهر نشود، یعنی f روی «تیزه‌ها»[2]ی H، $\mathbb{Q} \cup i\infty$، هم تمامریخت باشد.

گوییم f تیزه‌ای[3] است اگر هیچ نمای نامثبتی در هر بسط ظاهر نشود، یعنی f روی همهٔ تیزه‌ها صفر باشد. فرض کنید $M_k(\Gamma)$ و $S_k(\Gamma)$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ فضاهای برداری مختلط همهٔ فرمهای پیمانه‌ای و فرمهای تیزه‌ای به‌وزن k نسبت به Γ باشند.

1. holomorphic 2. cusps 3. cuspidal

در آنچه در پی می‌آید، بحث را به فرمهایی نسبت به زیرگروه هکهٔ[1] $\Gamma_0(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ که با

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | c \equiv 0 \ (N \text{ پیمانهٔ}) \right\}$$

تعریف می‌شود، محدود می‌کنیم. ولی یک سرشت دیریکله[2] از نوع دلخواه را مجاز می‌داریم. $\Gamma = \Gamma_1(N)$ را به‌صورت

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv d \equiv 1 \ (N \text{ پیمانهٔ}), c \equiv 0 \ (N \text{ پیمانهٔ}) \right\}$$

تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم ε یک سرشت دیریکله به‌پیمانهٔ N باشد یعنی یک همریختی

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*.$$

گوییم ε زوج است اگر $\varepsilon(-1) = 1$، و فرد است اگر $\varepsilon(-1) = -1$. توجه کنید که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to d \ (\text{N پیمانهٔ})$$

یک یکریختی بین $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ برقرار می‌کند و در نتیجه ε یک سرشت $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ را تعریف می‌کند.

یک فرم پیمانه‌ای به‌وزن k نسبت به $\Gamma_1(N)$ از نوع (k, ε) نسبت به $\Gamma_0(N)$ نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$،

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z).$$

فرض کنید $M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$ فضای برداری این فرمها باشد.

گروه $\Gamma_1(N)$ یک زیرگروه نرمال $\Gamma_0(N)$ است و $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. به‌علاوه $\Gamma_0(N)$ با عمل کردن بر H، بر $M_k(\Gamma_1(N))$ و $S_k(\Gamma_1(N))$ عمل می‌کند و در نتیجه

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\Delta\varepsilon \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$$

و همین‌طور است در مورد $S_k(\Gamma_1(N))$. پس اگر ε را به‌کار ببریم، می‌توانیم مطالعهٔ فرمها نسبت به $\Gamma_1(N)$ را به مطالعهٔ فرمها نسبت به $\Gamma_0(N)$ ولی با سرشت دیریکله، تقلیل دهیم.

اگر $f \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$، آنگاه بااستفاده از $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$

نتیجه می‌گیریم $f(z+1) = f(z)$ و بنابراین، بسط فوریهٔ

$$f(z) = \sum_{a \geq 0} a_n q^n$$

1. Hecke 2. Dirichlet character

را به‌دست می‌آوریم که در آن $q = \exp(2\pi i z)$. حال به‌ازای هر عدد اول p، عملگرهای هکهٔ T_p و U_p را با

$$f|T_p = \sum a_{pn} q^n + \varepsilon(p) p^{k-1} \sum a_n q^{pn}$$

به‌ازای هر $p \nmid N$ و

$$f|U_p = \sum a_{pn} q^n$$

به‌شرط $p|N$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، تابع حاصل باز به $M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$ تعلق دارد و تیزه‌ای است اگر f چنین باشد. (توجه: نماد ۱ به‌معنای تحدید نیست.)

عملگرهای T_p نسبت به حاصلضرب داخلی پترسن[1]، ارمیتی هستند و بنابراین می‌توانند همزمان قطری شوند. ما به آن اعضایی از $M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$ علاقه‌مندیم که ویژه‌تابعهای مشترک به‌ازای همهٔ آن عملگرها هستند.

به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر به‌علاوه فرض کنیم $a_1 = 1$، آنگاه به‌ازای هر $p \nmid N$، ویژه‌مقدار λ_p از T_p روی f، که با $T_p f = \lambda_p f$ تعریف می‌شود، همان $\lambda_p = a_p$ است.

یک ایدهٔ جالب توجه، تعمیم تقابل آرتینی است، یعنی اینکه بتوانیم فرمهای پیمانه‌ای را به‌وسیلهٔ اشیای حسابی پارامتری کنیم. نتیجهٔ بنیادی سر در این زمینه در مقالهٔ مشترکش با دُلین این است که اگر $k = 1$ و ε فرد باشد، آنگاه می‌توان نمایشهای مختلطی ازگروه گالوای مطلق به‌عنوان اشیای پارامتری‌کننده انتخاب کرد. در آن صورت، گزاره‌های حسابی از قبیل حدس رامانوجان دربارهٔ ضرایب فوریهٔ فرمهای تیزه‌ای بلافاصله نتیجه می‌شوند. قضیهٔ لافورگ که مدال فیلدز را برایش به‌ارمغان آورد، این مسأله را در مورد میدانهای توابع با بُعد دلخواه حل و فصل کرد؛ قبلاً درینفلد به‌خاطر حل حالت ۲بعدی آن مدال فیلدز گرفته بود. نوعی از فرمهای پیمانه‌ای که تکلیف مسألهٔ پارامتری‌سازی برای آن روشن نشده است، همتایِ میدان اعدادیِ فرمهایی است که درینفلد بررسی کرد. برنامهٔ لنگ‌لندز شامل مجموعه‌ای از نتایج و حدسها در جهت اثبات کل این ایده، هم در مورد میدانهای توابع و هم در مورد میدانهای اعداد، است.

حال برای بیان دقیق قضیهٔ دُلین-سر، چند کلمه‌ای دربارهٔ نمایشهای گالوا می‌گوییم.

فرض کنید $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ عبارت است از گروه گالوای مطلق $\mathbb{Q}$، حد معکوس گروههای گالوایِ منسوب به همهٔ بسطهای متناهی $\mathbb{Q}$، مجهز به توپولوژی کرول[2] که در آن عناصر یک پایه برای مجموعه‌های باز، پایدارساز[3]های بسطهای متناهی $\mathbb{Q}$ هستند. منظور از یک نمایش مختلط $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$، همریختی پیوسته‌ای چون

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(V)$$

است که در آن V یک فضای برداری مختلط است. در اینجا بیشتر با نمایشهای دوبعدی سروکار داریم یعنی حالتی که در آن $\mathrm{Aut}(V) = GL_2(\mathbb{C})$.

1. Petersson 2. Krull 3. stabilizer

اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از $\overline{\mathbb{Q}}$ بالاسر p باشد، فرض کنید $F_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ نشان‌دهندهٔ خودریختی فروبنیوس در $\mathfrak{p}$ باشد. به‌بیان دقیقتر، به‌ازای هر $x \in O_{\mathfrak{p}}$، که $O_{\mathfrak{p}}$ حلقهٔ اعداد صحیح $\overline{\mathbb{Q}}$ در $\mathfrak{p}$ است،

$$F_{\mathfrak{p}}(x) \equiv x^p (\mathfrak{p} \text{ پیمانهٔ})$$

چون $\mathfrak{p}$های متفاوتی بالاسر p وجود دارند، $F_{\mathfrak{p}}$ یکتا نیست، ولی ردهٔ مزدوجی آن را باز با F_p نمایش می‌دهیم. گروه اینرسی $I_{\mathfrak{p}}$ در $\mathfrak{p}$، زیرگروه همهٔ τهای متعلق به $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ است که به‌ازای هر $x \in Q_{\mathfrak{p}}$ در

$$\tau(x) \equiv x (\mathfrak{p} \text{ پیمانهٔ})$$

صدق می‌کنند.

نمایش ρ را بی‌شاخه[1] در p می‌نامند اگر روی $I_{\mathfrak{p}}$ به‌ازای $\mathfrak{p}$ای بالاسر p، بدیهی باشد. از آنجا که تصویر $\rho(F_p)$ یک ردهٔ مزدوجی در $GL_2(\mathbb{C})$ است، می‌توان

$$Tr(\rho(F_p)) = \mathrm{trace}\ (\rho(F_p))$$

و $\det(\rho(F_p))$ را در نظر گرفت.

قضیهٔ اصلی دُلین‌ـسر در این مقاله، قضیهٔ ۴. ۱، نتیجهٔ مهم زیر را در جهت مسألهٔ پارامتری‌سازی اثبات می‌کند.

قضیه فرض کنید N عددی صحیح و مثبت و ε یک سرشت دیریکلهٔ فرد به پیمانهٔ N باشد یعنی $\varepsilon(-1) = -1$. همچنین فرض کنید f فرم پیمانه‌ای ناصفری به‌وزن ۱ و سرشت دیریکلهٔ ε باشد یعنی عنصری در $M_1(\Gamma_0(N), \varepsilon)$ که ویژه‌تابعی برای T_p با ویژه‌مقدار a_p به‌ازای هر $p \nmid N$ است. در این صورت، نمایشی چون $\rho: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{C})$ وجود دارد که به‌ازای هر $p \nmid N$ بی‌شاخه است به‌قسمی‌که $Tr(\rho(F_p)) = a_p$ و $\det(\rho(F_p)) = \varepsilon(p)$. به‌علاوه ρ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر f تیزه‌ای باشد.

نتیجه (حدس رامانوجان) $|a_p| \leq 2$

انتظار داریم که هر نمایش دوبعدی $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ یا یک فرم پیمانه‌ای به‌وزن ۱ (ρ فرد) یا یک فرم ماس[2] (ρ زوج) را پارامتری می‌کند. عکس این موضوع به‌وضوح غلط است زیرا حتی τـتابع رامانوجان، فرم تیزه‌ایِ بهنجارِ یکتایِ به‌وزن ۱۲ نسبت به $SL_2(\mathbb{Z})$، گالوایی از هیچ نوع نیست. این فلسفهٔ معکوس به لنگ لندز (و تونل) امکان داده است که حدس آرتین دربارهٔ تمامریختی Lـتابعهای آرتین منسوب به نمایشهای مختلط تحویل‌ناپذیر دوبعدی $G_{\mathbb{Q}}$ را به‌ازای هر ρ که تصویرش در $PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ حل‌پذیر باشد، ثابت کنند. ریچارد تیلر و همکارانش اکنون توانسته‌اند پارامتری‌سازی معکوس را برای بسیاری از نمایشهای مختلط دوبعدی فردِ گروه گالوایِ از نوع حل‌ناپذیر ثابت کنند. ولی حل و فصل پارامتری‌سازی معکوس و حدس آرتین برای نمایشهای دلخواه ۲ بعدی $G_{\mathbb{Q}}$ هنوز مورد سؤال است، به‌خصوص برای نمایشهای زوج.

1. unramified 2. Maass

یک پیشرفت چشمگیر جدید در مورد فرمهای ماس در جهت مستقیم (نه‌معکوس) به‌وسیلهٔ پیتر سرنک به‌دست آمده است که اخیراً ثابت کرد فرمهای ماس بهنجاری که ضرایب فوریهٔ آنها، a_pها، به $\mathbb{Z}$ تعلق دارند، در واقع به وسیلهٔ نمایشهای زوج $G_{\mathbb{Q}}$ پارامتری می‌شوند [۴]. وی در این اثبات از نتایج اخیر کیم‌ـشهیدی [۲] استفاده کرده است.

۲. سر تحقیقاتی اساسی در نظریهٔ نمایشهای پیمانه‌ای گروههای گالوا کرده است. در اینجا فضای نمایش ρ روی میدان $\overline{F}_p$، بستار جبری میدان $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ از p عنصر است، که p عددی اول است. ما بیشتر با نمایشهای دوبعدی سر و کار داریم و بنابراین

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{F}_p)$$

یک همریختی پیوسته است.

بررسی چنین نمایشهایی بسیار مهم است. مثلاً یک نقطهٔ شروع در اثبات وایلز از حدس شیمورا‌ـتانیاما در مورد خمهای بیضوی نیمه‌پایدار، یعنی ابزار اصلی در اثبات او از قضیهٔ آخر فرما، نمایشی از $G_{\mathbb{Q}}$ روی نقاط pـبخشی (نقاط از مرتبهٔ p) از $E(\overline{\mathbb{Q}})$ است که در آن E خم بیضوی موردنظر است. پیمانه‌ای بودن این نمایش به‌ازای نقاط ۳ و ۵ـبخشیِ خم بیضوی فرای، نقطهٔ آغاز کار وایلز است.

سر در سال ۱۹۸۷ در مقاله‌ای [۶] چند حدس بسیار دقیق دربارهٔ نمایشهای پیمانه‌ای مطرح می‌کند. به‌بیان دقیقتر، او حدس می‌زند که هر نمایشِ فردِ تحویل‌ناپذیرِ پیوستهٔ

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\overline{F}_p)$$

پیمانه‌ای است به‌این معنی که فرمی تیزه‌ای نسبت به $\Gamma_0(N)$ وجود دارد با ضرایب فوریهٔ متعلق به حلقهٔ اعداد صحیح $\overline{\mathbb{Z}}$ از $\overline{\mathbb{Q}}$ که تحویل آنها به پیمانهٔ $\mathfrak{p}$، که $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از $\overline{\mathbb{Z}}$ بالاسر p است، همنهشت با اثر $(\rho(F_p))$ است؛ و همین‌طور است در مورد دترمینانها.

حالت خاصی از این حدس که ریبت آن را ثابت کرد [۳]، امکان پایین‌آوردن تراز فرم، N، را بدون تغییر نمایش پیمانه‌ای متناظر $G_{\mathbb{Q}}$ فراهم می‌آورد. چنانکه می‌دانیم، اگر کاهش تراز به‌روش ریبت، به‌وسیلهٔ حدس شیمورا‌ـتانیاما، بر فرم پیمانه‌ای به‌وزن ۲ منسوب به‌خم فرای اِعمال شود، به‌تناقص می‌انجامد و قضیهٔ آخر فرما ثابت می‌شود. فرم پیمانه‌ایِ به‌وزن ۲ منسوب به‌خم بیضوی فرای E با ارتقاء نمایش پیمانه‌ای $G_{\mathbb{Q}}$ روی نقاط ۳ـبخشی $E(\overline{\mathbb{Q}})$، نخست به یک فرم با وزن ۱ به‌روش لنگ‌لندز‌ـتونل و سپس با ضرب کردن در یک سری آیزنشتاین، به‌دست می‌آید.

۳. مقاله را با بحث مختصری دربارهٔ ایده‌های سر در مورد توزیع یکسان ویژه‌مقدارهای هکهٔ فرمهای تیزه‌ای به‌پایان می‌آوریم. اگر f متعلق به $S_k(\Gamma_0(N))$ باشد، یعنی فرمی تیزه‌ای به وزن k که ویژه تابعی برای همهٔ عملگرهای هکه با ضابطهٔ $a_1 = 1$ است، آنگاه بنا به قضیهٔ دُلین، ضرایب فوریهٔ بهنجار آن، $|a_n|$، نابیشتر از ۲اند. حدس معروف ساتو‌ـتیت دلالت

می‌کند که ویژه‌مقدارهای $a_p \in [-۲, ۲]$ باید روی $[-۲, ۲]$ دارای توزیع یکسان نسبت به اندازهٔ طبیعی

$$\mu_\infty = \frac{۱}{\pi}\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}} \quad dx = \frac{۲}{\pi}\sin^۲\varphi d\varphi$$

باشند. این حدس بسیار دشوار است و چنانکه سر در کتابش: نمایشهای l-آدیک آبلی توضیح می‌دهد، از ویژگیهای تحلیلی خاصی از L-تابعهای توانی متقارن $GL(۲)$ نتیجه می‌شود. هرچند در پرتو پیشرفت جدید در مورد ویژگیهای تحلیلی این L-تابعها [۱] شواهد جدیدی در جهت تأیید حدس به‌دست آمده، تا حل و فصل آن راه زیادی مانده است.

سر در مقاله‌ای [۵] مسأله‌ای ساده‌تر ولی مرتبط با مطلب فوق را بررسی می‌کند و اندازهٔ ساتو-تیت μ_∞ را به مفهومی به‌مکانهای p آدیک تعمیم می‌دهد؛ به این منظور، یک اندازهٔ μ_p به‌ازای هر p به‌صورت

$$\mu_p = \frac{p+۱}{\pi}\cdot\frac{(۱ - x^۲/۴)^{۱/۲}\cdot dx}{(p^{۱/۲} + p^{-۱/۲})^۲ - x^۲}$$

معرفی می‌کند که به‌وضوح برابر با اندازهٔ ساتو-تیت μ_∞ است وقتی $p \to \infty$، در حالی که $\mu_۱ = d\frac{\varphi}{\pi}$. سپس یکسان بودن توزیع ویژه‌مقدارهای هکهٔ بهنجار در $[-۲, ۲]$ را ثابت می‌کند. برای اینکه تصوری از این حکم (و حتی از موضوع یکسانیِ توزیع) به‌دست آورید، یکی از نتایج آن را بیان می‌کنیم:

فرض کنید α و β دو عدد حقیقی صادق در $-۲ \le \alpha \le \beta \le ۲$ باشند، همچنین فرض کنید N_λ و k_λ عددهای صحیح مثبتی باشند که p، N_λ را عاد نکند و k_λ زوج باشد، به‌علاوه فرض کنید $k_\lambda + N_\lambda \to +\infty$ وقتی $\lambda \to +\infty$. در این صورت، چگالی مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای هکهٔ بهنجارشده a_p بخش بر $p^{(k_\lambda - ۱)/۲}$ از فرمهای تیزه‌ای در $S_{k_\lambda}(N_\lambda)$ که بین α و β قرار دارند، وقتی $\lambda \to +\infty$ به $\int_\alpha^\beta \mu_p(x)$ میل می‌کند.

این دستاورد، کاربردهای بسیاری از جمله شناختِ بهتر درجات ممکنِ میدانهای تعریف فرمهای تیزه‌ای (یعنی درجات توسیعهای $\mathbb{Q}$ با الحاق ضرایب فوریه)، توزیع ویژه‌مقدارهای فروبنیوس برای خمهای روی میدانهای توابع، و مسائل مربوط به توزیع در مورد گرافهای رامانوجان دارد.

مراجع

1. Henry H. Kim and Freydoon Shahidi, "Cuspidality of symmetric powers with applications", *Duke Math. J.*, (1) **112** (2002) 177-197.
2. Henry H. Kim and Freydoon Shahidi, "Functional products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2", with an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart, *Ann of Math.*, (3) **155** (2002) 837-893.
3. K. A. Ribet, "On modular representations of Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms", *Invent. Math.*, (2) **100** (1990) 431-476.
4. P. Sarnak, "Mass cusp forms with integer coefficients", *A Panorama of Number Theory of the View from Baker's Garden*, G. Wustholz, ed., Cambridge University Press (2002) 121-128.
5. Jean-Pierre Serre, "Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke Tp", (French) ["Asymptotic distribution of the eigenvalues of the Hecke operator T_p"], *J. Amer. Math. Soc*, (1) **10** (1997) 75-102.
6. Jean-Pierre Serre, "Sur les représentations modulaires de degré 2 de Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$", (French) ["on modular representations of degree 2 of Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$"], *Duke Math. J.*, (1) **54** (1987) 179-230.
7. Jean-Pierre Serre and Pierre Deligne, "Formes modulaires de poids 1", *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (**7**) (1974) 507-530.

* * * * * *

* فریدون شهیدی، دانشگاه پردو، آمریکا

shahidi@math.purdue.edu

کاربرد ساده‌ای از قضیهٔ آخرفرما

اندرو وایلز ثابت کرد که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به‌ازای $n \ge ۳$ هیچ جواب نابدیهی در اعداد صحیح ندارد.

به‌کمک این قضیه می‌توان قضیهٔ زیر را به‌صورتی ساده‌تر نتیجه گرفت.

قضیه. به‌ازای $n \ge ۳$، $\sqrt[n]{۲}$ گویا نیست.

اثبات. به خلاف، فرض کنیم $\sqrt[n]{۲} = q/q$ که p و q اعدادی صحیح و مثبت هستند و نسبت به هم اول‌اند. بنابران $\frac{p^n}{q^n} = ۲$ و یا $۲q^n = q^n + q^n = p^n$. اما بنابر قضیهٔ فوق، معادلهٔ اخیر به‌ازای $n \ge ۳$ هیچ جواب نابدیهی ندارد. بنابراین تساویِ فرض ممکن نیست و به این ترتیب حکم قضیه نتیجه می‌شود.

* * * * * *

اثبات از ویلیام هنری شولتز (William Henry Schultz)
دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه کارولینای شمالی در شارلوت.

مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ مه ۲۰۰۳

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، صص. ۱۰ـ۱۶

اول بودنْ یک مسألهٔ P است

حسن حقیقی*

در روز یکشنبه چهارم اوت ۲۰۰۲، مانیندرا اگراوال[1]، استاد مؤسسهٔ تکنولوژی کانپور هند، به همراه دو دانشجوی خود، ساکسنا[2] و کایال[3]، الگوریتمی برای تعیین اول‌بودن یک عدد طبیعی ارائه دادند که نه تنها تعداد عملیات لازم برای اجرای آن تابعی چندجمله‌ای از طول عدد در یک دستگاه شمار است بلکه می‌تواند اول‌بودن یا نبودن هر عدد طبیعی را به‌طور قطعی تعیین کند. به این ترتیب، مسألهٔ قدیمیِ

تعیین اول‌بودن یک عدد طبیعی یک مسألهٔ P است یا NP

که در حوزهٔ نظریهٔ الگوریتمی اعداد و نظریهٔ پیچیدگی محاسبه مطرح بود، حل شد.

ایشان ابتدا راه‌حل خود را، که در مقاله‌ای ۹ صفحه‌ای تنظیم شده بود، برای ۱۵ نفر از متخصصان تراز اول این دو رشته ازجمله کارل پومرانس[4]، هندریک لنسترا[5]، دانیل برنستاین[6]، و چند هموطن هندی خود فرستادند و نظر آنها را در مورد درستی آن جویا شدند. در همان روز متخصصان هندی موفقیت آنها را تبریک گفتند. روز بعد پومرانس با جملهٔ «این بهترین نتیجه‌ای است که در طی ۱۰ سال گذشته به آن برخورده‌ام» مهر تأییدی بر درستیِ کار آنها زد و در عصر روز دوشنبه پنجم اوت، سمیناری برای توضیح دستاورد آنها در دانشگاه خود ترتیب داد و از سارا رابینسن، یکی از نویسندگان بخش علمی روزنامهٔ نیویورک تایمز نیز برای شرکت در این سمینار دعوت به‌عمل آورد. به‌دنبال این تأیید، اگراوال مقالهٔ مذکور را از طریق وب‌گاه خود [۳] در دسترس همگان قرار داد و خانم رابینسن نیز، بر اساس آنچه در سمینار پومرانس عنوان شده بود، خبر حل مسألهٔ فوق را در روز هشتم اوت، از طریق روزنامه نیویورک تایمز، به اطلاع عموم رساند و به دنبال آن سیل‌نامه‌های الکترونیکی حاوی پیامهای تبریک به‌سوی حل‌کنندگان مسأله سرازیر شد. هندریک لنسترا با رفع چند اشتباه جزئی در مقاله، درستی اثبات را تأیید کرد و در هشتم اوت، دانیل برنستاین نیز با مختصر تغییری در استدلالهای مقاله، اثبات ایشان را به‌صورتی کوتاهتر ارائه نمود. به این ترتیب درمدت زمانی کمتر از یک هفته، که در جامعهٔ ریاضی تقریباً بی‌سابقه است، حل مسأله مورد پذیرش جامعهٔ ریاضیدانان قرار گرفت. اگرچه الگوریتم ارائه شده عملاً در مقایسه با الگوریتمهای موجود در زمینهٔ تشخیص اول‌بودن یک عدد طبیعی، تعداد عملیات بیشتری را باید انجام دهد و در نتیجه سرعت اجرای کمتری دارد اما مزیت آن نسبت به این الگوریتمها در دو ویژگی چندجمله‌ای‌بودن طول زمان اجرای عملیات و قطعیتی‌بودن آن است، به‌خصوص که الگوریتمهای قبلی یا دارای ویژگی احتمالاتی بودند و یا بر فرضهای اثبات‌نشده‌ای، مانند حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان متکی بودند. این تمایزها به لحاظ نظری حائز اهمیت هستند وگرنه الگوریتمهای احتمالاتی سریعتری [۱۴] وجود دارند که اول‌بودن یک عدد را با احتمال زیادی و در زمان بسیار کوتاهتری تعیین می‌کنند.

در این مقاله پس از طرح مسأله، تلاشهای انجام‌گرفته برای حل آن را به‌ترتیب تاریخی معرفی و بررسی می‌کنیم و سپس به الگوریتم جدید اگراوال‌ـکایال‌ـساکسنا می‌پردازیم.

صورت مسأله

فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی و Primes مجموعهٔ اعداد اول باشد در این صورت

۱. آیا می‌توان روشی کارآمد برای تعیین عضویت یک عضو دلخواه n از $\mathbb{N}$ در مجموعهٔ Primes پیدا کرد؟

1. M. Agrawal 2. N. Saxena 3. N. Kayal 4. C. Pomerance
5. H. W. Lenstra 6. D. Bernstein

به عبارت دیگر آیا می‌توان روش قاعده‌مندی پیدا کرد که به همهٔ پرسشهایی از یک نوع، مثلاً «آیا n عددی اول است؟» پاسخ دهد؟

مسألهٔ دیگری که همواره همراه با این مسأله طرح می‌شود این است که:

۲. آیا می‌توان روشی کارآمد برای تجزیهٔ n به حاصلضربی از عناصر Primes پیدا کرد؟

این دو مسأله از آن جهت اهمیت دارند که ارتباط نزدیکی با بسیاری از مسائل مربوط به اعداد صحیح دارند و علی‌رغم اینکه قدمت آنها به قبل از میلاد مسیح می‌رسد، هنوز یکی از حوزه‌های فعال تحقیقات ریاضی را تشکیل می‌دهند و هر روز خبر موفقیتی تازه در این زمینه می‌رسد، به‌خصوص که امروزه از اعداد اول بزرگ برای به رمز درآوردن اطلاعات و انتقال آن از طریق خطوط مخابراتی از نقطه‌ای به نقطه دیگر استفاده می‌کنند زیرا دشواری تجزیهٔ اعداد صحیح بزرگ، به نوعی ایمنی اطلاعات رمزی شده را در مقابل رمزگشایی آن توسط افراد غیرمجاز افزایش می‌دهد.

اقلیدس در کتاب اصول خود، این دو مسأله را از دیدگاه وجودی بررسی می‌کند و گاوس که به شهریار ریاضیات معروف است، در کتاب تحقیقات حسابی خود [۱۱، ص ۳۹۶] این دو مسأله را چنین توصیف می‌کند:

«مسألهٔ تشخیص اعداد اول از اعداد مرکب و تجزیهٔ اعداد مرکب به عوامل اول، یکی از مهمترین و مفیدترین مسائل حساب شناخته شده است. هندسه‌دانان قدیم و جدید چندان به این مسأله پرداخته‌اند که صحبت مفصل در بارهٔ آن بسیار زائد خواهد بود. معهذا باید اعتراف کنیم که تمامی روشهایی که تاکنون پیشنهاد شده، یا به حالتهای خیلی خاصی محدود بوده‌اند و یا آنقدر پرزحمت و کسل‌کننده‌اند که حتی برای اعدادی که از حد جداول ساخته‌شده توسط محاسبه‌گران حرفه‌ای تجاوز نمی‌کنند، یعنی برای اعدادی که نیازی به روشهای هوشمندانه برای تشخیص اول‌بودنشان نیست، صبر و حوصلهٔ زیادی از محاسبه‌گران حرفه‌ای طلب می‌کنند و آنها را به زحمت می‌اندازند. این روشها را به سختی می‌توان برای اعداد بزرگتر به‌کار برد. به علاوه شأن علم ایجاب می‌کند که به هر وسیله ممکن که بشود، برای مسأله‌ای چنین زیبا و چنین پرآوازه راه‌حلی کشف کرد.»

از طرف دیگر ماهیت الگوریتمی راه‌حل‌های مورد نظر برای دو مسألهٔ فوق آنها را در کانون توجه دانشمندان علوم نظری رایانه نیز قرار داده است، به‌خصوص که این دو مسأله در ارتباط با یک سؤال اساسی این حوزه، یعنی این سؤال قرار دارند که: آیا می‌توان مسائلی طرح کرد که از محدودهٔ توانایی روشهای ماشینی خارج باشد؟ و این دانشمندان طبعاً به دنبال یافتن راه‌حل مناسبی برای این دو مسأله هستند. مسائلی از این نوع، به‌طور مشخص در نظریهٔ محاسبه‌پذیری[1] و پیچیدگی[2] محاسبه مورد بررسی قرار می‌گیرند که هدف آنها پیداکردن شاخصی کمّی برای الگوریتمهایی است که برای حل مسائل ارائه می‌شوند تا بتوان به این وسیله الگوریتمهای مختلفی را که برای یک مسأله ارائه می‌شوند با هم مقایسه کرد. به دلیل محدودیت منابع، به‌خصوص دو منبع زمان لازم برای اجرای الگوریتم و رسیدن به نتیجه و همچنین فضای حافظهٔ لازم برای ذخیره‌سازی نتایج در هر مرحله از اجرا، الگوریتمهایی که از این دو منبع کمتر استفاده کنند، بر آنهایی که لااقل از یکی از این دو منبع بیشتر استفاده می‌کنند، ارجحیت دارند. به این لحاظ، زمان لازم برای اجرای دستورالعملهای یک الگوریتم برروی ورودی آن، یک شاخص مهم الگوریتم به‌شمار می‌رود و معمولاً به صورت تابعی از اندازهٔ ورودی الگوریتم، که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد طبیعی است، بیان می‌شود. در اینجا زمان برحسب ثانیه یا چرخهٔ پردازشگر یک رایانهٔ خاص بیان نمی‌شود، بلکه منظور از آن، تعداد عملیات مقدماتی (بیتی) یا مراحل مورد نیاز برای اجرای یک الگوریتم است. الگوریتمها را برحسب تابع اخیر به دو دستهٔ زمان‌چندجمله‌ای[1] و زمان‌نمایی[2] تقسیم می‌کنند و مسائلی که زمان اجرای نمایی دارند، مسائل دشوار نامیده می‌شوند. علاوه بر سرعت، دو ویژگی زیر نیز در بررسی آنها حائز اهمیت هستند.

- درستی (یا قطعیت). یعنی الگوریتم باید بتواند خروجی صحیح به‌دست دهد.
- عمومیت. یعنی الگوریتم باید بتواند برای همهٔ ورودیها (اعداد) و نه فقط انواع خاصی از آنها اجرا شود و خروجی را تعیین کند.

مسائل مورد بحث در این نظریه براساس ویژگیهای الگوریتمهایی که برای حلشان ارائه شده رده‌بندی می‌شوند. برای معرفی بعضی از آنها که در این مقاله مورد نیازند، فرض کنیم برنامهٔ رایانه‌ای دارای دستورالعمل $GOTO\ L\ OR\ L'$، که L و L' شماره‌های سطر برنامه هستند، باشد. همچنین فرض کنیم با پرتاب یک سکهٔ سالم تصمیم می‌گیریم که کدام‌یک از سطرها باید برای اجرا انتخاب شوند. ردهٔ NP[3] (غیرقطعیتی و زمان چندجمله‌ای) متشکل از تمامی زیرمجموعه‌های A از $\mathbb{N}$ است به‌طوری که برنامه یک ورودی N را می‌پذیرد و دارای ویژگیهای زیر است:

۱. برای یک عدد صحیح و مثبت d، برنامه پس از اجرای n^d مرحله متوقف می‌شود. در اینجا n، طول عدد ورودی N در یک دستگاه شمار، معمولاً دودویی، است.

۲. اگر N عضو A نباشد خروجی الگوریتم «نه» است.

۳. اگر N عضو A باشد، آنگاه به‌ازای حداقل یک دنباله از پرتابها، خروجی «بله» است.

ردهٔ RP[4] (تصادفی و زمان چندجمله‌ای) مشابه ردهٔ NP است، منتهی به جای ۳ باید قرار داد:

۳'. اگر N در A باشد آنگاه به‌ازای حداقل ۵۰٪ دنباله‌های پرتاب سکه، خروجی «بله» است.

رده‌های مسائل P و EXP متشکل از مجموعه‌هایی هستند که عضویت در آنها به کمک برنامه‌هایی که روی هر رایانه اجرا می‌شوند تعیین می‌شود [۱۶]. به عبارت دیگر از دستور $GOTO$ احتمالاتی استفاده نمی‌کنند و زمان اجرای آنها نیز تابعی چندجمله‌ای (در مورد ردهٔ P) و تابعی نمایی (در مورد ردهٔ EXP) از طول عدد ورودی است. بنابر تعریف، رده‌های مسائل

1. computability 2. complexity

1. Polynomial time 2. Exponential time

3. Non-deterministic Polynomial time

4. Random Polynomial time

فوق رابطهٔ زیر را با یکدیگر دارند.

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{RP} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{EXP}$$

روشن است که $\mathrm{P} \neq \mathrm{EXP}$، اما $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ یک حدس حل‌نشده است که بنیاد کلی[1] در سال ۲۰۰۰ جایزه‌ای یک میلیون دلاری برای کسی که درستی یا نادرستی آن را ثابت کند تعیین کرده است [۱۷].

با این مقدمه، در قسمت بعد، از هر رده یک الگوریتم برای مسألهٔ اول‌بودن ارائه می‌کنیم و در پایان، الگوریتم اگراوال‌ـکایال‌ـساکسنا (AKS) را شرح می‌دهیم. بجز دو الگوریتم مقدماتی ۱ و ۲، هستهٔ اصلی بقیهٔ الگوریتمها را قضیهٔ کوچک فرما تشکیل می‌دهد. در این الگوریتمها، اگر ورودی اول باشد، خروجی الگوریتم دلالت بر اول‌بودن ورودی می‌کند. اما ممکن است ورودی مرکب باشد ولی خروجی الگوریتم دلالت بر اول‌بودن ورودی بنماید که آشکارا نادرست است. به همین دلیل در بخشی از این الگوریتمها دستورالعملهایی وجود دارد که این خروجی به ظاهر درست ولی واقعاً نادرست به دست نیاید و در واقع قسمت مشکل اثبات درستی این الگوریتمها را تشکیل می‌دهد. این تلاش برای اثبات درستی الگوریتمها نشان می‌دهد که تا چه اندازه نظریه‌های قوی ریاضی می‌توانند راهگشای ارائه راه‌حل‌های ساده برای انجام محاسبات درست شوند.

آزمونهای اول‌بودن

بجز الگوریتم تقسیم و الگوریتم غربال اراتستن، الگوریتمهایی را که برای آزمون اول‌بودن یک عدد طبیعی ابداع شده‌اند می‌توان به سه گروه عمدهٔ زیر تقسیم کرد.

۱. الگوریتمهای احتمالاتی و الگوریتمهایی که با فرض درستی حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان ساخته شده‌اند، یا به‌عبارت دیگر الگوریتمهای شرطی.

۲. الگوریتمهایی که برای آزمون اول‌بودن اعداد خاصی، مانند اعداد فرما $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ یا اعداد مرسن $M_p = ۲^p - ۱$ و اعداد به‌صورت $N = f \cdot ۲^n + ۱$، ساخته شده‌اند [۱۴].

۳. الگوریتمهایی که براساس برخی خواص خمهای بیضوی و یا نظریهٔ اعداد جبری در طی ۲۰ سال گذشته ابداع شده و گسترش یافته‌اند [۷].

چون الگوریتم AKS در اساس مشابهت بسیاری با الگوریتمهای نوع ۱ دارد، در اینجا تنها در بارهٔ برخی از الگوریتمهای نوع ۱، الگوریتم تقسیم و الگوریتم اراتستن توضیح می‌دهیم.

۱. **الگوریتم تقسیم.** ساده‌ترین آزمون اول‌بودن یک عدد طبیعی براساس تعریف عدد اول است یعنی عدد فرد n بر اعداد فرد ۲ تا $[\sqrt{n}]$ تقسیم می‌شود و از روی ماندهٔ تقسیم می‌توان تعیین کرد که آیا n اول است یا خیر. این روش اول‌بودن یک عدد را با قطعیت تعیین می‌کند و برای هر عدد طبیعی قابل اجراست. اما با بزرگترشدن عدد n، چون تعداد عملیات تقسیم افزایش می‌یابد، سرعت رسیدن به نتیجه کاهش می‌یابد. در واقع تعداد عملیات بیتی لازم برای رسیدن به نتیجه تابعی نمایی از طول عدد n در یک دستگاه شماراست. به این ترتیب، با این الگوریتم، مسألهٔ اول‌بودن در ردهٔ EXP قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال اگر n یک عدد s رقمی در پایهٔ ۱۰ باشد آنگاه $n > ۱۰^{s-۱}$ و یا $\sqrt{n} > \sqrt{۱۰^{s-۱}}$ خواهد بود و با ۱۰۰ برابرشدن n، تعداد تقسیمهایی که باید انجام داد نیز لااقل ۱۰ برابر بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، مزیت این روش در این است که یک تجزیهٔ نابدیهی و درست از عدد n را به‌دست می‌دهد و به این ترتیب الگوریتم فوق می‌تواند مسألهٔ ۲ را نیز پاسخ دهد، اما نه پاسخی سریع.

۲. **الگوریتم غربال اراتستن.** این الگوریتم نیز روشی برای تعیین اول‌بودن یک عدد طبیعی به‌دست می‌دهد، منتهی چون در عمل تقسیم، تمام مضارب نابدیهی یک عدد اول بین ۲ تا $[\sqrt{n}]$ را حذف می‌کند تعداد تقسیمها بسیار کاهش می‌یابد و تعداد عملیات بیتی لازم برای رسیدن به نتیجه دیگر نمایی نخواهد بود. این الگوریتم اول‌بودن یک عدد طبیعی را با قطعیت تعیین می‌کند و برای همه اعداد طبیعی قابل اجراست. مراحل این الگوریتم را می‌توان به‌صورت زیر مرتب کرد.

ورودی: یک عدد طبیعی n

خروجی: اول‌بودن یا مرکب‌بودن n

۱. L را برابر فهرست تمامی اعداد صحیح بین ۲ تا $[\sqrt{n}]$ قرار بده. همچنین قرار بده $F = \emptyset$ و $\mathrm{P} = \emptyset$.

۲. m، کوچکترین عدد فهرست L را انتخاب کن. اگر m یک مقسوم‌علیه n بود، قرار بده $F = F \cup \{m\}$ و $\mathrm{P} = \mathrm{P}$. در غیر این صورت $F = F$ و $\mathrm{P} = \mathrm{P} \cup \{m\}$.

۳. تمامی مضارب عدد m را در فهرست L حذف کن و فهرست حاصل را برابر L' قرار بده.

۴. اگر $L' \neq \emptyset$، قرار بده $L = L'$ و دوباره از مرحلهٔ ۲ شروع کن.

۵. اگر $L = \emptyset$ و اگر $F = \emptyset$، آنگاه n عددی اول است و اگر $F \neq \emptyset$، آنگاه F مجموعهٔ تمام مقسوم‌علیه‌های اول n را به‌دست می‌دهد. P نیز مجموعهٔ تمام اعداد نسبت به n اولِ کمتر از $[\sqrt{n}]$ را به‌دست می‌دهد.

اگرچه زمانی که برای هر عدد m صرف می‌شود تقریباً برابر $O(\log \log m)$ است و این الگوریتم در مجموع نسبت به الگوریتم تقسیم خیلی سریعتر به خروجی الگوریتم نزدیک می‌شود، اما چون میزان فضای حافظهٔ لازم برای ذخیرهٔ اعضای P و F، هنگامی که n بزرگ و بزرگتر می‌شود به‌صورت نمایی رشد می‌کند و از محدودهٔ قابل قبول فضای حافظهٔ رایانهٔ نظری که برای اجرای الگوریتم در نظر گرفته می‌شود تجاوز خواهد کرد، عملاً قابل استفاده نیست.

۳. **الگوریتم فرما.** سومین الگوریتم آزمون اول‌بودن برپایهٔ قضیهٔ کوچک‌فرما ساخته شده است.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ کوچک‌فرما). اگر n یک عدد اول باشد و a یک عدد صحیح به طوری که $(a, n) = ۱$، آنگاه (پیمانهٔ n) $a^{n-۱} \equiv ۱$.

ماندهٔ تقسیم $a^{n-۱}$ بر n را می‌توان با استفاده از روابط زیر به شیوه‌ای

1. Clay

مؤثر به‌دست آورد. فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد و $n-1$ را در پایهٔ ۲ بتوان به‌صورت

$$n-1=b_0+b_1 2+b_2 2^2+b_3 2^3+\cdots+b_k 2^k, b_i\in\{0,1\}, 0\le i\le k$$

نوشت. در این صورت

$$a^{n-1}=a^{b_0}\times a^{b_1 2}\times a^{b_2 2^2}\times\cdots\times a^{b_k 2^k}$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای محاسبهٔ ماندهٔ تقسیم a^{n-1} بر n کافی است با مربع‌کردن متوالی رابطهٔ (پیمانهٔ n) $a^{2^i}\equiv r$ و پیداکردن ماندهٔ جدید، ماندهٔ تقسیم a^{n-1} بر n را به‌دست آورد. این عملیات در زمانی چندجمله‌ای، معادل $O(\log^3 n)$ انجام خواهد گرفت.

الگوریتمی را که برپایهٔ مشاهدات فوق ساخته می‌شود می‌توان به شکل زیر صورت‌بندی کرد:

ورودی: یک عدد طبیعی n

خروجی: n مرکب است یا معلوم نیست که اول است.

۱. یک عضو a از $\{2,\ldots,n-1\}$ را انتخاب کن.

۲. (a,n) را محاسبه کن. اگر $(a,n)>1$ آنگاه n مرکب است.

۳. اگر $(a,n)=1$ آنگاه ماندهٔ تقسیم a^{n-1} به پیمانهٔ n را حساب کن. اگر این مانده بزرگتر از یک بود آنگاه n مرکب است. در غیر این‌صورت، نمی‌توان با قاطعیت گفت که n اول است.

اشکال به کارگیری این الگوریتم در این است که چون عکس قضیهٔ فوق درست نیست، الگوریتم نمی‌تواند به‌عنوان آزمونی برای اول‌بودن مورد استفاده قرار گیرد. به‌عنوان مثال، اگرچه $(7,25)=1$ و (پیمانهٔ ۲۵) $7^{24}\equiv 1$ اما ۲۵ عددی اول نیست. به این ترتیب این الگوریتم علی‌رغم اینکه زمان‌چندجمله‌ای و برای همهٔ اعداد طبیعی قابل اجراست، ویژگی قطعیتی ندارد.

هر عدد طبیعی مرکبی nای که رفتاری شبیه رفتار اعداد اول در قضیهٔ کوچک‌فرما داشته باشد یعنی به‌ازای عدد صحیح a که $(a,n)=1$، در حکم قضیه صدق کند، به عدد شبه‌اول[1] در پایه a موسوم است. برای یک عدد ثابت a، مشاهده‌شده که اعداد شبه‌اول در پایهٔ a خیلی نادرند. حتی در مقایسه با اعداد اول، تعدادشان در بازه‌های محدود خیلی کمتر از تعداد اعداد اول در همان بازه است. به‌عنوان مثال تعداد اعداد اول کمتر از 10^{10} برابر ۴۵۵۰۵۲۵۱۲ است در حالی‌که در این فاصله ۱۴۸۸۴ عدد شبه‌اول در پایهٔ ۲ وجود دارد [۱۳]. یعنی به‌طور نسبی، به‌ازای هر ۱۰۰۰ عدد اول کوچکتر از 10^{10}، ۳ عدد مرکب وجود دارند که به‌ازای $a=2$ در قضیهٔ کوچک‌فرما صدق می‌کنند. حتی اعداد مرکب nای وجود دارند که در تمام پایه‌های a، که $(a,n)=1$، در قضیهٔ کوچک فرما صدق می‌کنند. به‌عنوان مثال، عدد $n=561=3\times 11\times 17$ به‌ازای هر عدد صحیح a که $(a,n)=1$، در قضیهٔ کوچک‌فرما صدق می‌کند. چنین اعدادی را اعداد کارمایکل[2] می‌نامند. ثابت شده است که تعداد این اعداد بی‌پایان است [۱].

۴. الگوریتم میلر[3]. این الگوریتم در سال ۱۹۷۶ توسط میلر ارائه شد [۱۲]. سؤال زیر می‌تواند توجیه‌کنندهٔ ساختار این الگوریتم باشد.

1. pseudoprime 2. Carmichael numbers 3. G. L. Miller

سؤال: مرکب‌بودن یا اول‌بودن n چه نقشی در جوابهای معادلهٔ همنهشتی (پیمانهٔ n) $a^2\equiv 1$ می‌تواند داشته باشد؟

فرض کنیم n یک عدد اول باشد. آنگاه معادلهٔ (پیمانهٔ n) $a^2\equiv 1$ تنها دو جواب ± 1 دارد. از طرف دیگر اگر n حاصلضرب k عامل اول فرد باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ماندهٔ چینی معادله اخیر دارای 2^k جواب خواهد بود. حال اگر (پیمانهٔ n) $a^{n-1}\equiv 1$، آنگاه واضح است که $a^{\frac{n-1}{2}}$ یک ریشهٔ دوم به پیمانهٔ n خواهد بود. بنابراین اگر (پیمانهٔ n) $a^{\frac{n-1}{2}}\not\equiv\pm 1$، آنگاه n یک عدد مرکب خواهد بود. به‌عنوان مثال عدد مرکب ۵۶۱ که در آزمون فرما صدق می‌کند در پایهٔ ۷ در رابطهٔ (پیمانهٔ ۵۶۱) $7^{560}\equiv 1$ صادق است ولی (پیمانهٔ ۵۶۱) $7^{280}\not\equiv 1$؛ به این ترتیب ۵۶۱ عددی مرکب است. این استدلال نشان می‌دهد که می‌توان نقص الگوریتم ۳ را در مورد ورودیهایی که اول نیستند ولی در قضیهٔ کوچک‌فرما صدق می‌کنند، تا اندازه‌ای مرتفع کرد. برای این کار فرض کنیم n عددی فرد باشد و $n-1=2^s m$ که $(2,m)=1$. این تجزیه در زمانی چندجمله‌ای صورت می‌گیرد. اگر $(a,n)=1$ و (پیمانهٔ n) $a^m\equiv 1$ یا به‌ازای یک i، به‌طوری که $1\le i\le s-1$، (پیمانهٔ n) $a^{2^i m}\equiv -1$، آنگاه n اول است، یا نمی‌توان از این نتیجه به مرکب‌بودن آن پی برد. و اگر به‌ازای a، با $(a,n)=1$ یکی از تساویهای فوق برقرار نشود، آنگاه n عددی مرکب است. براساس مشاهدهٔ فوق الگوریتم زیر را می‌توان ساخت. اما قبل از بیان دستورالعملهای الگوریتم و برای سادگی، به‌ازای $a\in\{2,3,\ldots,n-1\}$، دنبالهٔ

$$a^m(n \text{ پیمانهٔ}), a^{2m}(n \text{ پیمانهٔ}), a^{2^2 m}(n \text{ پیمانهٔ}),\ldots,$$
$$a^{2^{s-1}m}(n \text{ پیمانهٔ}) \quad (*)$$

را یک دنبالهٔ نوع اول می‌نامیم هرگاه تمامی عناصر آن یک باشد و یا یکی از عناصر ماقبل آخر آن برابر -1 باشد. در غیر این صورت آن را یک دنبالهٔ نوع دوم می‌نامیم. الگوریتم به‌صورت زیر است.

ورودی: یک عدد طبیعی فرد

خروجی: عدد n مرکب است یا معلوم نیست که اول است.

۱. قرار بده $S=\{2,3,\ldots,n-1\}$.

۲. قرار بده $n-1=2^s m$ که $(m,2)=1$.

۳. یک عضو a از S انتخاب کن.

۴. اگر $(a,n)\neq 1$ آنگاه n مرکب است.

۵. اگر $(a,n)=1$ با a، دنبالهٔ $(*)$ را تشکیل بده.

۶. اگر این دنباله از نوع دوم بود، آنگاه n یک عدد مرکب است.

۷. اگر این دنباله از نوع اول بود، آنگاه معلوم نیست که n اول است.

عملیات بیتی مرحلهٔ ۲، چندجمله‌ای است. همچنین تعداد عملیات بیتی لازم برای هر a برابر $O(\log^3 n)$ است. بنابراین الگوریتم فوق یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای است. چون این الگوریتم نیز براساس قضیهٔ کوچک‌فرما ساخته شده، همان نقص الگوریتم فرما را دارد. اگر ورودی مرکب و فرد n، به‌ازای یک aی عضو S با شرط $(a,n)=1$، دنباله‌ای از نوع اول تولید

کند، یک عدد شبه‌اول قوی[1] در پایهٔ a نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال عدد $۸۹ \times ۲۳ = ۲۰۴۷$ در پایهٔ ۲، یک دنباله از نوع اول تولید می‌کند و لذا یک عدد شبه‌اول قوی در پایهٔ ۲ است در [۱۳] ثابت می‌شود تعداد اعداد شبه‌اول قوی در یک پایهٔ معین a نامتناهی است. از طرف دیگر، نشان داده می‌شود [۶. ص. ۸۱] که هیچ عدد مرکبی مانند n وجود ندارد که به‌طور همزمان در همهٔ پایه‌های a، با $(a,n)=۱$، شبه‌اول قوی باشد. به‌عنوان مثال در [۱۳] نشان داده می‌شود که تنها یک عدد $n < ۲۵ \times ۱۰^۹$ وجود دارد که به‌طور همزمان در پایه‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ شبه‌اول قوی است اما در پایهٔ ۱۱، دنباله‌ای از نوع دوم تولید می‌کند. به این ترتیب در استفاده از الگوریتم میلر تنها تعداد کمی از اعدادی که نسبت به ورودیِ اول‌اند باید برای تشکیل دنبالهٔ مانده‌ها و تصمیم‌گیری در بارهٔ اول‌بودن n مورد استفاده قرار گیرند و بنابراین تعداد عملیات لازم برای تشخیص اول‌بودن یا مرکب‌بودن n بسیار کاهش می‌یابد.

اما چگونه می‌توان این اعداد را در مجموعهٔ $\{۲,۳,\dots,n-۱\}$ شناخت و انتخاب کرد؟

فرض کنیم n یک عدد اول فرد باشد و a یک عضو $\{۲,۳,\dots,n-۱\}$. همچنین، فرض کنیم $n-۱ = ۲^s m$ که $(m,۲)=۱$ و $a^{n-۱} \equiv ۱ (n$ (پیمانهٔ $n)$ یا $n | a^{n-۱}-۱$. در نتیجه n باید یکی از عوامل سمت راست تساوی

$$a^{n-۱}-۱ = (a^m-۱)(a^m+۱)(a^{۲m}+۱)(a^{۴m}+۱)\dots (a^{۲^{s-۱}m}+۱)$$

را بشمارد. بنابراین دنبالهٔ (*) دنباله‌ای از نوع اول خواهد بود.

حال فرض کنیم $n=p^j$ که $j>۱$ و p یک عدد اول فرد است. می‌دانیم یک عضو a از $\{۲,۳,\dots,n-۱\}$ وجود دارد به‌طوری که $(a,n)=۱$ و $a^{\varphi(n)} \equiv ۱ (n$ (پیمانهٔ $n)$، ولی به‌ازای هر $a^d \not\equiv ۱ (n$ (پیمانهٔ $n)$، $\varphi(n) > d$. چنین عنصری را یک ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ n می‌نامند. با این فرض، به‌ازای هر ریشهٔ اولیهٔ a، $a^{n-۱}$ همنهشت با ۱ به پیمانهٔ n نخواهد بود. زیرا اگر $a^{n-۱}$ همنهشت با یک به پیمانهٔ n باشد آنگاه $\varphi(n)=(p-۱)p^{j-۱} | p^j-۱$ که یک تناقض است. بنابراین در این حالت با انتخاب یک ریشهٔ اولیه، دنبالهٔ (*) از نوع دوم خواهد بود و الگوریتم به درستی مرکب‌بودن n را نتیجه می‌دهد. حال فرض کنیم n یک عدد مرکب فرد باشد که توانی از یک عدد اول فرد نیست. هرگاه هر یک از عوامل ضرب n، لااقل یکی از عوامل سمت راست تساوی فوق را بشمارد، دنبالهٔ (*) از نوع اول خواهد بود و n نیز در رابطهٔ $a^{n-۱} \equiv ۱ (n$ (پیمانهٔ $n)$ صدق خواهد کرد. در این حالت نمی‌توان از روی دنبالهٔ (*) به اول‌بودن یا مرکب‌بودن n پی برد. با این فرض، این وضعیت نمی‌تواند برای تمامی عناصر مجموعهٔ $\{۲,۳,\dots,n-۱\}$ پیش آید زیرا

قضیهٔ ۲ [مرجع ۶. ص. ۸۲]. فرض کنیم n یک عدد مرکب فرد با لااقل دو عامل اول p و q باشد که $p=۲^{s_۱}m_۱+۱$ و $q=۲^{s_۲}m_۲+۱$ و $(m_۱,۲)=(m_۲,۲)=۱$. گیریم $s_۱,s_۲ \geq ۱$ و همچنین $s_۱ \leq s_۲$.

نیز فرض کنیم a عددی صحیح با شرط $(a,n)=۱$ باشد، گیریم ماندهٔ a به پیمانهٔ p مربع کامل باشد و به پیمانه q مربع کامل نباشد، در این صورت دنبالهٔ (*) دنباله‌ای از نوع دوم خواهد بود.

برای آزمودن دو شرط آخر قضیهٔ اخیر از محک زیر (محک اویلر) می‌توان استفاده کرد.

قضیهٔ ۳ [مرجع ۶. ص. ۷۹]. فرض کنیم p یک عدد اول باشد، همچنین فرض کنیم a یک عدد صحیح باشد که بر p بخش‌پذیر نیست، آنگاه (پیمانهٔ p) $a^{\frac{p-۱}{۲}} \equiv ۱$ اگر و تنها اگر یک عدد صحیح t وجود داشته باشد به طوری‌که (پیمانهٔ p) $a \equiv t^۲$.

در قضیهٔ ۳، a را می‌توان به کمک قضیهٔ ماندهٔ چینی به‌دست آورد. اما این قضیه مبتنی بر فرضِ دانستنِ لااقل دو عامل اول n است که چنین aای را به‌دست می‌دهند و اگر قبلاً این دو عامل را می‌شناختیم، خود به خود مسألهٔ مرکب‌بودن n پاسخی مثبت داشت. به ناچار باید از ابزار دیگری برای پیداکردن a استفاده کرد.

تابع $\chi : \mathbb{Z}_n \to \{-۱,۱\}$ را، که $\mathbb{Z}_n$ گروه جمعی مانده‌های تقسیم به پیمانهٔ n است، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(a) = \begin{cases} (a/q) & s_۱ < s_۲ \\ (a/q)(a/p) & s_۱ = s_۲ \end{cases}$$

که $(a/q)=۱$ هرگاه ماندهٔ a به پیمانهٔ q مربع کامل باشد و $(a/q)=-۱$ هرگاه این مانده مربع کامل نباشد. روشن است که χ یک همریختی گروههاست و بنابر قضیهٔ ۲، aای وجود دارد که $\chi(a)=-۱$. بنابراین χ یک همریختی نابدیهی است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۲، برای نیمی از اعداد بین ۱ تا n، عدد n یک عدد شبه‌اول قوی در پایهٔ آنها نخواهد بود. یا به عبارت دیگر با انتخاب چنین اعدادی، آزمون میلر حکم به مرکب‌بودن n خواهد داد. میلر [۱۲] با مشاهدهٔ اینکه گروه ضربی $\{۱,-۱\}$ یک زیرگروه ضربی $\mathbb{C}^*$ است و همریختی فوق یک همریختی از $\mathbb{Z}_n$ در $\mathbb{C}^*$ تعریف می‌کند، به کمک قضیه‌ای از انکنی [۴] ثابت کرد که در صورت پذیرش درستی حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان[1] (ERH)، یک ثابت مثبت c وجود دارد به طوری‌که به‌ازای هر مشخصهٔ ناثابتی $(\neq ۱)$ به پیمانهٔ n یک عدد صحیح و مثبت a موجود است که $a < c\log^۲ n$ و $(a,n)=۱$ و $\chi(a)=-۱$. به این ترتیب با کمک قضیهٔ انکنی نیازی به انتخاب تمامی اعضای $\{۲,۳,\dots,n-۱\}$ برای تشکیل دنبالهٔ مانده‌های (*) به‌منظور تشخیص مرکب‌بودن و یا اول‌بودن n نیست و کافی است این دنباله را برای اعضای $\{۲,۳,\dots,[c\log^۲ n]\}$

1. strong pseudoprime

۱. حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان (ERH). ریمان حدس زد که صفرهای تابع زتا که از توسیع $\zeta(s)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^s}$ به $\mathrm{Re}(s)>۰$ به‌دست می‌آید روی خط $\mathrm{Re}(s)=\frac{۱}{۲}$ قرار دارند. درستی یا نادرستی این حدس نیز ازجمله مسائل مشکل نظریهٔ اعداد و یکی از ۷ مسألهٔ یک میلیون دلاری بنیاد کلی در سال ۲۰۰۰ است [۱۶].

اگر به جای سری فوق، سری $L(\zeta,\chi)=\sum_{\substack{a=۱\\(a,n)=۱}}^{\infty}\frac{\chi(a)}{a^\zeta}$ را که در آن χ یک تابع مشخصه از $\mathbb{Z}_n$ در $\mathbb{C}^*$ است، در نظر بگیریم، این حکم را که صفرهای سری فوق روی خط $\mathrm{Re}(\zeta)=\frac{۱}{۲}$ قرار می‌گیرند حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان می‌نامند [۱۰].

تشکیل داد. چون تعداد عملیات بیتی الگوریتم برای aی معین $O(\log^{۳} n)$ است و $a < c\log^{۲} n$، پس تعداد عملیات بیتی الگوریتم فوق حداکثر $\log^{۵} n$ خواهد بود. به این ترتیب الگوریتم میلر، با فرض درستی حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان، الگوریتمی زمان‌چندجمله‌ای و قطعیتی خواهد بود. به عبارت دیگر با این الگوریتم، مسألهٔ Primes یک مسألهٔ P خواهد بود. ولی نقص این الگوریتم مشروط‌بودن آن به درستی حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان است.

در [۸] رهیافتی دیگر به مسألهٔ فوق، منتهی بدون استفاده از ERH ارائه شده است.

۵. الگوریتم احتمالاتی رابین. همان‌طورکه قبلاً گفته شد، الگوریتم احتمالاتی الگوریتمی است که ممکن است زمان اجرای خیلی طولانی یا نامحدود داشته باشد. البته با شرطی‌کردن تعداد تکرارهای الگوریتم، اجرای الگوریتم پس از برآورده‌شدن شرط متوقف می‌شود و نتیجهٔ به‌دست آمده با احتمال زیادی درست خواهد بود. اما اگر قبل از برآورده‌شدن شرط، الگوریتم به جواب برسد، نتیجهٔ به‌دست آمده صحیح خواهد بود.

رابین مشاهده کرد که اگر n عددی اول یا توانی از یک عدد اول نباشد آنگاه معادلهٔ $a^{۲} \equiv ۱ (n$ پیمانهٔ $)$ ، $(n,a) = ۱$ حداقل دارای چهار ریشه است و ثابت کرد که در الگوریتم میلر هیچ عدد مرکبی نمی‌تواند یک عدد شبه‌اول قوی برای بیش از $\frac{n}{۴}$ انتخابهای a از مجموعهٔ $\{۲,۳,\ldots,n-۱\}$ باشد. بنابراین اگر a به تصادف از $\{۲,۳,\ldots,n-۱\}$ انتخاب شود احتمال اینکه دنبالهٔ مانده‌ها به پیمانهٔ n، $(*)$، با این انتخابْ دنباله‌ای از نوع اول باشد حداکثر $\frac{۱}{۴}$ و احتمال اینکه از نوع دوم باشد برابر با $۱ - \frac{۱}{۴}$ خواهد بود. رابین براساس استدلال فوق الگوریتم خود را در سال ۱۹۸۰ به‌صورت زیر ارائه داد.

ورودی: عدد فرد n و عدد صحیح و مثبت k.
خروجی: n مرکب است یا با احتمال معینی اول است.
۱. یک عدد به‌تصادف از مجموعهٔ $\{۲,۳,\ldots,n-۱\}$ انتخاب کن.
۲. $n-۱$ را تجزیه کن و قرار بده $n-۱ = ۲^{s}m$ به طوری‌که $(m,s) = ۱$.
۳. $b \equiv a^{m}$ $(n$ پیمانهٔ $)$ را محاسبه کن.
۴. اگر $b \equiv \pm ۱$ $(n$ پیمانهٔ $)$ آنگاه احتمالاً n اول است و اجرا را متوقف کن.
۵. در غیر این‌صورت دنبالهٔ $(*)$ را تشکیل بده. اگر دنباله از نوع دوم بود، n مرکب است و اجرا را متوقف کن.
۶. در غیر این‌صورت به مرحلهٔ ۲ برو و با انتخاب aی دیگر عملیات فوق را انجام بده.
۷. اگر پس از k بار اجرای الگوریتم فوق، در هر بار اجرا، دنبالهٔ $(*)$ از نوع اول بود اجرا را متوقف کن و n احتمالاً اول است.

این الگوریتم علی‌رغم اینکه دارای زمان اجرای چندجمله‌ای است، چون براساس قضیهٔ کوچک فرما ساخته شده همان نقص الگوریتمهای فرما و میلر را دارد و نمی‌تواند قطعیتی باشد. اما چون عدد مرکب n نمی‌تواند در تمام پایه‌های a از دنبالهٔ $(*)$، دنباله‌ای از نوع اول تولید کند احتمال اینکه پس از rبار اجرا متوقف شود حداقل برابر $۱ - ۴^{-r}$ است. بنابراین هر چه تعداد تکرارها بیشتر شود دقت نتیجهٔ به‌دست آمده بیشتر خواهد بود. به‌عبارت دیگر می‌توان به دلخواه، دقت نتیجهٔ به‌دست آمده را تعیین کرد. مزیت این الگوریتم بر الگوریتم میلر در استفاده‌نکردن از حدسی اثبات نشده است.

الگوریتم اول‌بودن اگراوال، کایال و ساکسنا (AKS)

الگوریتمهای ۳ و ۴ و ۵، همگی براساس قضیهٔ کوچک فرما ساخته شده‌اند و در آنها به کمک شرایطی اضافی، سعی شده از حالتهایی که ممکن است عدد مرکبی مانند n در قضیه صدق کند پرهیز شود تا به این وسیله بتوانند قطعیتی‌بودن آن را ثابت کنند.

اما رهیافت اگراوال و همکارانش برای رفع این نقیصه، متفاوت با رهیافتهای فوق است و به‌جای محاسبه در $\mathbb{Z}_n$ محاسبات را در حلقهٔ بزرگتر $\mathbb{Z}_n[x]$، یعنی چندجمله‌ای‌های با ضرایب در $\mathbb{Z}_n$، انجام می‌دهند و از محک زیر برای تشخیص اول‌بودن استفاده می‌کنند.

قضیهٔ ۴ [مرجع ۳]. فرض کنیم n و a دو عدد صحیح مثبت باشند و $(a,n) = ۱$، آنگاه n اول است اگر و تنها اگر

$$(x-a)^{n} \equiv (x^{n}-a) \quad (n \text{ پیمانهٔ})$$

اما عملیات بیتی لازم برای محاسبهٔ ضرایب $(x-a)^{n}$ به‌صورت نمایی رشد می‌کند. اگراوال ابتدا با استفاده از این قضیه یک الگوریتم تصادفی برای آزمون اول‌بودن وضع کرد [۲]. اما بعداً با انجام محاسبات در حلقهٔ $\mathbb{Z}_n[x]/(x^{r}-۱)$ که r یک عدد اول کوچک است و به نحو مناسبی انتخاب می‌شود، مشاهده کرد که تعداد این عملیات تا حد یک تابع چندجمله‌ای از ورودی n کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با انتخاب $r = ۱$، حلقهٔ $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{(x^{r}-۱)}$ با $\mathbb{Z}_n$ همریخت می‌شود و همان قضیهٔ فرما را نتیجه می‌دهد. اگراوال با انتخاب یک عامل تحویل‌ناپذیر $h(x)$ مانند $x^{r}-۱$ و یافتن یک زیرگروه ضربی میدان $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{(h(x))}$ که p یک شمارندهٔ اول n است و مرتبهٔ آن به‌اندازهٔ کافی بزرگ است، اطلاعاتی راجع به n دست می‌آورد، که در دو قضیهٔ زیر می‌توان آنها را خلاصه کرد.

قضیهٔ ۵ [مرجع ۵]. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و q و r دو عدد اول باشند، همچنین فرض کنیم S یک مجموعهٔ s عضوی از اعداد صحیح باشد، گیریم $q|r-۱$ و $n^{r-۱/q}(r$ پیمانهٔ $) \notin \{۰,۱\}$ و برای هر a و a' متمایز از S رابطهٔ $(n,a-a') = ۱$ برقرار باشد، فرض کنیم $\binom{q+s-۱}{s} \geq n^{۲\lfloor\sqrt{r}\rfloor}$ و برای هر $a \in s$ رابطهٔ $(x+a)^{n} \equiv x^{n}+a$ $(\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{(x^{r}-۱)}$ پیمانهٔ $)$ برقرار باشد، آنگاه n توانی از یک عدد اول است.

قضیهٔ ۶ [مرجع ۵]. فرض کنیم n و r دو عدد صحیح مثبت باشند و S یک مجموعهٔ s عضوی از اعداد صحیح باشد، همچنین فرض کنیم n یک ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ r باشد و $(n,a-a') = ۱$ برای همه a و a'های

متمایز عضو S برقرار باشد، گیریم $\binom{\varphi(r)+s-1}{s} \geq n^{\lfloor\sqrt{r}\rfloor}$ و رابطهٔ $(x+a)^n = x^n + a$ در حلقهٔ $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{(x^r-1)}$ برای تمامی aهای عضو S برقرار باشد، آنگاه n توانی از یک عدد اول است.

در اینجا $\lfloor\sqrt{r}\rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\sqrt{r}$ را نشان می‌دهد.

اگراوال و همکارانش پس از اثبات قضایای فوق الگوریتم زیر را ساخته‌اند.

ورودی: عدد صحیح $n > 1$.

خروجی: n مرکب است یا n اول است.

۱. اگر n به‌صورت توانی از یک عدد اول بود خروجی را مرکب قرار بده.

۲. قرار بده $r = 2$.

۳. مادامی که $n > 2$، عملیات را انجام بده.

۴. اگر $1 \neq (n, r)$، خروجی را مرکب قرار بده.

۵. اگر r اول بود بزرگترین عامل اول $r-1$ را بیاب و آن را q بنام { اگر

$$q \geq 4\sqrt{r}\log n \text{، } n^{\frac{r-1}{q}} \not\equiv 1 (r \text{ پیمانهٔ})$$

عملیات را متوقف کن }

۶. وگرنه یکی به r اضافه کن و مجدداً از ۳ شروع کن.

۷. برای a از ۱ تا $2\sqrt{r}\log n$.

اگر $(x-a)^n \not\equiv (x^n - a)((x^r - 1, n)$ (پیمانهٔ)، خروجی را مرکب قرار بده.

در صورت انجام کامل عملیات فوق، خروجی یک عدد اول است.

با این الگوریتم، مهمترین قسمت مقالهٔ [۳] اثبات در قضیهٔ زیر است

قضیهٔ ۷ [مرجع **۳**. قضیهٔ ۴.۱]. خروجی الگوریتم فوق اول است اگر و تنها اگر p اول باشد،

که نشان می‌دهد که الگوریتم فوق یک الگوریتم قطعیتی است و

قضیهٔ ۸ [مرجع **۳** قضیه ۵.۱]. پیچیدگی الگوریتم فوق به صورت $O(\text{poly}(\log^{12} n))$ است،

که منظور از $\text{poly}(\log^{12} n)$ یک چندجمله‌ای از متغیر $\log^{12} n$ است. و این قضیه نشان می‌دهد تعداد عملیات بیتی این الگوریتم یک چندجمله‌ای است و به این ترتیب با الگوریتم فوق، مسألهٔ اول‌بودن در ردهٔ P قرار می‌گیرد.

تشکر و قدردانی. نویسندهٔ مقاله لازم می‌داند از آقای دکتر غلامرضا خسروشاهی که متن مقالهٔ اگراوال و همکارانش را در اختیار نویسنده قرار دادند، از آقای دکتر امیر اکبری که راهنماییهای ارزنده‌ای در مورد حدس تعمیم‌یافتهٔ ریمان ارائه کردند، و همچنین از آقای دکتر سیاوش شهشهانی که نقصهای پیش‌نویس مقاله را یادآوری نمودند، سپاسگزاری کند.

مراجع

1. W. R. Alford, A. Granville, C. Pomerance, "There are infinitely many Carmichael numbers", *Ann. Math.*, **140** (1994) 703-722.
2. M. Agrawal, S. Biswas, "Primality and Identity testing via Chinese Remindering", In *Proceeding of Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science*, (1999) 202-209.
3. M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena, "Primes is in P", preprint (2002), `www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html`.
4. N. C. Ankeny, "The least quadratic non-residue", *Ann. Math.*, **55** (1952) 65-72.
5. D. J. Bernstein, "An exposition of the Agrawal-Kayal-Saxena primality-proving theorem", preprint (2002), `cr.yp.tc/papers/aks.pdf`.
6. D. M. Bressoud, *Factorization and Primality*, Springer-Verlag, New York (1989).
7. A. H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1996).
8. H. Cohen, H. W. Lenstra, "Primality testing, and Jacobi sum", *Math. Comp.*, **42** (1984), 297-330.
9. S. Cook, "The P versus NP problem", preprint (2000), www.claymath.org.
10. J. Dixon, "Factorization and primality tests", *Amer. Math. Monthly*, **91** (1984) 333-352.
11. C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* (Translated By A. A. Clarke), 2nd Printing, Springer-Verlag (1998).
12. G. Miller, "Reimann's hypothesis and test's for primality", *J. Comp. System Sci.*, **13** (1976) 300-317.
13. C. Pomerance, J. L. Selfridge, S. S. Wagstaff, Jr., "The pseudoprimes to $25 * 10^9$", *Math. Comp.* **35** (1980) 1003-1026.
14. Primepages.org.
15. M. O. Rabin. "Probabilistic algorithms for primality testing", *J. Number Theory*, **12** (1980) 128-138.
16. S. Wagon, "Primality testing", *Math. Intelligencer*, (3) **8** (1986).
17. www.claymath.org.

******

* حسن حقیقی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

haghighi@kntu.ac.ir

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، صص. ۱۷ـ۳۴

نشر الکترونیک•

پدرام صفری*

مقدمه

در انتهای کتابی ریاضی که در سال ۲۰۰۰ منتشر شده است به مقاله‌ای به این صورت ارجاع داده شده است:

P. Ozsváth, Z. Szabó: *The Symplectic Thom Conjecture*, Ann. of Math., **151** (2000), 93-124; math.DG/9811097.

این نحوهٔ ارجاع از نفوذ روزافزون نشر الکترونیک و تعامل جدی آن با نشر سنتی مقالات و کتب حکایت می‌کند و سؤالات زیادی در ذهن برمی‌انگیزد، از مسائل فنی و حقوقی و اقتصادی گرفته تا چشم‌انداز تأثیر و تأثر نشر الکترونیک بر روند تولید و انتقال علم. وضعیت تعادل این فرایند در حال گذار چه خواهد بود؟

مارشال مک‌لوهان زمانی گفت: «رسانهٔ خود پیام است»[1]. پیامهای اینترنت گسترده و متنوع‌اند. عمومی‌کردن دسترسی به اطلاعات و در عین حال فردیت‌بخشیدن به آن، انتقال ساده و سریع اطلاعات به‌صورت زنده و برخط[2]، و دوسویه‌بودن رسانه، همگی از پیامهای اینترنت هستند.

این نوشتار ورودی است به پدیدهٔ گسترده و گسترش‌یابندهٔ نشر الکترونیک، با تأکید ویژه‌ای بر نشر الکترونیک ریاضی. قصد ما در اینجا تنها ارائهٔ چشم‌اندازی کلی از این پدیده است و سعی می‌کنیم ضمن تشریح مثالهایی مهم به اهمیت، فواید، مشکلات و دغدغه‌های موجود در زمینهٔ نشر الکترونیک اشاره کنیم.

1. Medium is the message. 2. online

فهرست مطالب

■ نشر الکترونیک چیست؟
- «کارگزارهای پیش‌چاپ»[1] یا «بایگانیهای e-چاپ»[2] (تعریف، مثال، arXiv)
  - انواع کارگزارهای پیش‌چاپ (موضوعی، عمومی؛ مقایسهٔ تطبیقی فلسفه‌های تمرکزگرایی و تنوع‌گرایی: آرشیوهای مرکزی، پوششی؛ MPRESS، OAI، کارگزارهای تجاری)
  - توفیق یک کارگزار پیش‌چاپ
  - در علوم دیگر چه می‌گذرد؟
- مجلات الکترونیک (اقتصاد نشر، چالشها، ناشران تجاری، تعاونیها، اقلیدس)

■ مسائل نشر الکترونیک (دوام: امنیت سازمانی و اقتصادی، بایگانی در درازمدت، حقوق مالک اثر؛ تأثیر اقتصاد و فرهنگ، سنت ارجاع به گذشته)

■ چشم‌انداز آینده

تابلوها:

اجتماعات الکترونیک — فن‌آوری نشر الکترونیک
کارگزارهای موضوعی و عمومی — نشر الکترونیک از زبان آمار
مجلات الکترونیک

* * * * * *

1. preprint servers 2. e-prints archives

■ نشر الکترونیک چیست؟

سابقهٔ ارتباطات الکترونیک، به‌خصوص برای مقاصد علمی، چندان طولانی نیست. توسعهٔ این ارتباطات به تشکیل اجتماعات الکترونیک هم منجر شده که خود باعث تسهیل و گسترش همکاریهای علمی دانشمندان گشته است [تابلوی اجتماعات الکترونیک]. اما اوج این روند، تأثیری است که ارتباط الکترونیک بر امر انتشار آثار و مقالات علمی گذاشته است، به‌طوری که ناشران سنتی، به‌خصوص نوع تجاری آن را، به عکس‌العمل واداشته است. به قول توپولوژیدان معروف رابین کِربی[1]، همان‌طور که TEX «ریاضیدانان را به تایپیست تبدیل کرد»، مجلات الکترونیک هم آنها را به ناشر تبدیل می‌کند. انتشار نوشته‌ها به‌صورت الکترونیک چنان آسان شده است که داوریِ محتوا و صحت مطالب مذکور عملاً به بعد از «انتشار» موکول شده است. از این پس، در این مقاله، مراد ما از «نشر» یا «انتشار» مفهوم عام آن است که پخش مقاله را کلاً شامل است. از سوی دیگر، از انتشار مقالات داوری‌شده اصطلاحاً تحت عنوان «چاپ‌شدن» یاد می‌کنیم، گرچه مقاله به‌صورت الکترونیک منتشر شده باشد. بنابراین، به‌منظور بررسیِ تفکیکی و دقیقتر، مقالات الکترونیک را برحسب زمان داوری به دو دستهٔ پیش از داوری (پیش‌چاپ‌ها) و پس از داوری (مجلات الکترونیک) تفکیک می‌کنیم.

این دو دسته از نظر ماهیت رسانهٔ انتشار (اینترنت) فرق چندانی ندارند، اما نوع مسائلِ پیش روی آنها متفاوت است. درواقع تفاوت اصلی از این ناشی می‌شود که ظاهراً وِب[2] رسانهٔ مناسبی برای «انتشار» مطالب است نه برای «بایگانی» آنها[3]، یا دست‌کم توانایی وب در بایگانی‌کردن مورد تردید است. در ادامه با تفصیل بیشتری به این مطالب خواهیم پرداخت.

در هر حال نشر الکترونیک مزایایی کاملاً مشخص نسبت به نشر کاغذی دارد که قابل انکار نیست، گرچه به نظر نمی‌رسد که به این زودی جای نشر سنتی را بگیرد. توانایی تسریع ارتباط و به نوعی جهانی‌سازیِ جامعهٔ علمی، کاهش مسیر و واسطه‌های نشر (و در نتیجه کاهش قابل ملاحظهٔ هزینه‌های نشر)، وجود گزینه‌های مختلف و حق انتخاب برای کاربر، بهره‌وری از امکانات ماشین (مثلاً امکانات جستجو[4] یا توانایی تولید ورودی برای نرم‌افزارهای مختلف علمی)، امکان استفادهٔ آسانتر و گسترده‌تر از گرافیک، پویانمایی[5]، رابطهٔ دوسویه[6] با کاربر، و به‌طور خلاصه تمام امکانات بهره‌وری‌های آموزشی و کمک‌آموزشی از کامپیوتر همگی از مزایای نشر الکترونیک هستند. برای کشورهای کمتر توسعه‌یافته، بسیاری از اینها نعمتهایی هستند که قبلاً کمتر دست‌یافتنی یا ناممکن به نظر می‌رسیدند، ولی هنوز هم غالب چنین کشورهایی به دلایل مختلف، ازجمله ضعفهای ساختاری، آموزشی، تکنیکی، یا حتی عدم آگاهی، از این نعمتها محروم‌اند و در صورت انفعال و عدم اقدام مدبرانهٔ این کشورها برای دسترسیِ به موقع و کافی به این فن‌آوری، این امر ممکن است در طول زمان به افزایش هر چه بیشتر شکاف علمی بین کشورهای توسعه‌یافته و دیگران منجر شود.

• کارگزارهای پیش‌چاپ یا بایگانیهای e-چاپ

در دوران ماقبل اینترنت، نویسندگان مقالات غالباً مقالات خود را با پست معمولی برای همکاران خود ارسال می‌کردند یا به هنگام سخنرانی بین حضار پخش می‌کردند. امروزه این امر بیشتر به‌صورت الکترونیک از طریق e-نامه[1] یا وب صورت می‌گیرد و یکی از روشهایی که با استقبال فزاینده‌ای مواجه است استفاده از کارگزارهای پیش‌چاپ است.

درواقع، کارگزار پیش‌چاپ مکانیسم الکترونیک خودکاری برای مبادلهٔ پیش‌چاپ مقالات علمی است که غالباً به‌صورت وبِ رسانه‌ای عمل می‌کند. دسترسی به این کارگزارها برای همگان آزاد و رایگان است. نویسندگانْ مقالاتِ خود را مستقیماً برروی کارگزار قرار می‌دهند و خوانندگان مستقیماً می‌توانند مقالات مورد علاقهٔ خود را دریافت کنند. هیچ‌گونه دخالت و کنترلی، اعم از داوری، ویرایش، یکنواخت‌سازیِ قالب و صفحه‌آرایی مقالات، ... در این مراحل اعمال نمی‌شود و مقالات دقیقاً به‌همان صورتی که نویسنده برروی کارگزار قرار داده است به دست خواننده می‌رسد. گاهی اوقات مقالات پس از «چاپ»

وب رسانهٔ مناسبی برای «انتشار» مطالب است، اما توانایی آن برای «بایگانی» مورد تردید است.

توسط نویسندگانشان از روی کارگزار برداشته می‌شوند، اما غالباً پیش‌چاپ‌ها همیشه برروی کارگزار باقی می‌مانند، بنابراین این کارگزارها به نوعی بایگانیِ پیش‌چاپ‌ها هم به‌حساب می‌آیند. از سوی دیگر، برخی مجلات مقالاتِ چاپ‌شدهٔ خود را برروی این کارگزارها هم قرار می‌دهند، بنابراین اطلاق لفظ پیش‌چاپ بر آنها دیگر معنایی ندارد، از این لحاظ برخی آنها را درکل e-چاپ نامیده‌اند. به نظر می‌آید که به این ترتیب مرز بین مقالات چاپ‌شده (دائم) و چاپ‌نشده (موقت) در حال محوشدن است. برخی نیز معتقدند که این کارگزارهای e-چاپ نهایتاً به منابع اولیهٔ نوشتگان علمی تبدیل خواهند شد. در هر حال، حتی هم‌اکنون هم این کارگزارها فرهنگ تحقیق و چاپ مقالات را متحول کرده‌اند. این امر در هر یک از رشته‌های ریاضی و فیزیک به نوعی در حال شکل‌گیری است. در ریاضی، قراردادن پیش‌چاپ‌ها در این کارگزارها جزئی از «فرایند چاپ» مقاله شده است.[2] در فیزیک، به‌خصوص در شاخه‌های داغ تحقیقاتی مانند نظریهٔ ریسمان، بسیاری از فیزیکدانان معتبر که دیگر نیازی به چاپ مقالات خود نمی‌بینند مقالات تأثیرگذاری را ــ که

1. Robion Kirby 2. Web

۳. نقل به مضمون از استیون کرانتس [Ks].

4. search 5. animation 6. interactive

1. e-mail

۲. تعبیر از Dale Alspach [J1].

اجتماعات الکترونیک e-Communities

تقریباً از همان زمان که پست الکترونیک عمومی شده، «میزگرد»[1] ها و «تابلوهای اعلانات»[2] الکترونیک نیز برای گسترش و تسهیل ارتباطهای گروهی تأسیس شده‌اند که هر کدام کارکرد خاص خود را دارند و از روشهای ارتباطی متنوعی استفاده می‌کنند. یکی از این روشها استفاده از فهرست پستی[3] است که وجه مشخصهٔ آن یک‌طرفه‌بودن کانال ارتباطی است، یعنی فقط صاحب فهرست پستی می‌تواند پیغامی برای اعضا ارسال کند. ساده‌ترین مثال، یک فهرست پستی شخصی است که از دوستان فرد تشکیل شده است. غالب مجلات یا ناشران فهرستی پستی از علاقه‌مندان دارند تا آنها را از تازه‌های خود باخبر کنند. نمونه‌ای از اینها، فهرست پستی رایگان انتشارات اشپرینگر است که اعضای خود را از فهرست مقالات مجله‌های دلخواهشان به محض انتشار توسط اشپرینگر باخبر می‌سازد.[4] البته فهرستهای پستی عمومی (و نه یک‌طرفه) نیز وجود دارند. در چنین مواردی، e-نامهٔ فرستاده‌شده به فهرست پستی به طور خودکار به تمامی اعضا فرستاده[5] می‌شود. Irmath نمونه‌ای از این فهرستهای پستی است که توسط جمعی از دانشجویان مقاطع عالی ریاضی و ریاضیدانان جوان ایرانی در اواخر سال ۱۳۷۳ تشکیل شده است. این فهرست پستی به دلیل کاهش مشارکت اعضای آن و نیز به خاطر ضعف پشتیبانی فنی غیرفعال شده است.

یکی دیگر از انواع اجتماعات الکترونیک، گروههای خبری[6] هستند. یک کارگزار خبری[7] (که مشابه یک کارگزار پستی[8] است) امکان فنی دسترسی به گروههای خبری را فراهم می‌کند. یک گروه خبری مانند sci.math در واقع مخزنی از e-نامه‌های ارسال‌شده به آن گروه خبری است که تمام مشترکین به آن دسترسی دارند و می‌توانند خود نیز به آن e-نامه ارسال کنند، بنابراین طیفی از e-نامه‌های مختلفِ مورد توجه مشترکین در این گروههای خبری یافت می‌شود: اخبار، سؤال و جوابها، بحثهای تخصصی و غیرتخصصی، ....

همان‌طور که ذکرشد، کارگزار خبری فقط امکان «فنی» دسترسی به گروههای خبری را فراهم می‌کند، اما ممکن است محدودیتهای غیرفنی هم برای دریافت و ارسال پیام به این گروههای خبری وجود داشته باشد. اخبار و اطلاعات در برخی موارد چنان باارزش هستند که عضویت در گروه خبریِ مربوطه مستلزم پرداخت حق اشتراک است، مثلاً یک گروه خبری مربوط به اخبار اقتصادی یا موارد مشابه. در برخی از این گروهها، مثلاً در sci.math.research، e-نامه‌های ارسال‌شده به گروه توسط گرداننده[9]ای بررسی می‌شوند تا از پخش موارد نامربوط (مثلاً e-نامه‌های «نوابغ» تثلیث‌گر) جلوگیری شود، در حالی که از این موارد در گروهی خبری مانند sci.math کم‌وبیش یافت می‌شوند. بنابراین هر گروه خبری با توجه به نحوهٔ ادارهٔ آن تشخص پیدا می‌کند.

1. forum 2. bulletin-boards 3. mailing list
4. http://link.springer.de/ 5. forward 6. newsgroup
7. news server 8. mail server 9. moderator

فهرست منتخبی از گروههای خبری ریاضی

sci.math	alt.sci.math.combinatorics
sci.math.research	alt.sci.math.probability
sci.math.num-analysis	alt.sci.math.galois_fields
sci.math.symbolic	

ظهور وب کانال دیگری برای تشکیل اجتماعات اینترنتی پدید آورد. یکی از قدیمیترین نمونه‌های این‌گونه اجتماعات، Group Pub Forum است که به متخصصان نظریهٔ گروهها اختصاص دارد. یک نمونهٔ دیگر، commalg.org است که برای استفادهٔ متخصصان جبر جابه‌جایی طراحی شده است. در این پایگاهها مقالات، اخبار کنفرانسها و سایر مطالب جالب توجه و مربوط به جامعهٔ مربوطه یافت می‌شود. این مطالب به طور جمعی و داوطلبانه با مشارکت خود اعضای این جوامع تأمین می‌شود و مؤسسان آن عملاً فقط کار طراحی صفحات را به‌عهده دارند.

در مقیاس کوچکتر، می‌توان گروههای تحقیقاتی‌ای را یافت که برای استفادهٔ گروه خود صفحاتی در اینترنت ایجاد می‌کنند تا نتیجهٔ تحقیقات هر فرد به سرعت و به صورت برخط در اختیار تمامی همکارانش در سراسر دنیا قرار گیرد. در مواردی که مسائلی چون حق مالکیت اثر[1]، حق ثبت[2] یا مقررات افشا[3]ی مشابه وجود دارد، دسترسی به این اطلاعات فقط از طریق گذرواژه[4] امکان‌پذیر است.

فهرست منتخبی از اجتماعات الکترونیک ریاضی

- **Topology Atlas**
  http://at.yorku.ca/topology/
- **Group Pub Forum**
  http://www.bath.ac.uk/~masgcs/gpf.html
- **CommAlg**
  http://www.commalg.org/
- **Graph Theory Resources**
  http://www.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/
- **Probability Web**
  http://www.mathcs.carleton.edu/probweb/probweb.html

1. copyright 2. patent 3. disclosure 4. password

شاید هرگز به زیور طبع آراسته نخواهند شد ــ در این کارگزارها قرار داده‌اند. مرزهای تحقیقاتی در رشته‌هایی مانند نظریهٔ ریسمان در واقع این چنین پیشرفت می‌کند. ارجاع به e-چاپ‌ها تأخیر زمانی ارجاعات[1] به یک مقاله را از سالها به ماهها کاهش داده است.

مثال

شمارهٔ ارجاع در مثالی که در ابتدای این نوشتار آمده به شماره‌گذاری arXiv (بخوانید آرکایو) اشاره می‌کند که عمده‌ترین بایگانی e-چاپ کنونی در ریاضی و فیزیک است. این کارگزار در سال ۱۹۹۱ میلادی با نام hep-th[2] در آزمایشگاههای ملی لوس‌آلاموس[3] متولد شد. این کارگزار، که یکی از قدیمیترین‌ها در دنیاست، حدود یک ماه پس از شروع به کار بایگانی دیگری (mp_arc)[4]، توسط پال گینزپارگ[5] فیزیکدان تأسیس شد. این دو کارگزار هر دو از طریق e-نامه و ftp فعالیت می‌کردند و ابداع وب به طرق ارتباطی آنان افزود، اما نحوهٔ فعالیت موفقیت‌آمیز آنها متفاوت بود. mp_arc به‌صورت پایگاه کوچکی برای ریاضی-فیزیکدانان باقی ماند و به زندگی خود ادامه می‌دهد، در حالی که hep-th با «بلعیدن» تعداد زیادی از کارگزارهای کوچکِ دیگر به موجود غول‌آسایی تبدیل شد که hep-th سابق اکنون تنها یکی از زیرردهای آن است. کارگزارهای پیش‌چاپ هندسهٔ جبری در دانشگاه دوک[6] (تأسیس در ۱۹۹۲ توسط دیوید موریسون[7])، هندسهٔ دیفرانسیل در مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی (MSRI)[8] و فضاهای باناخ در دانشگاه ایالتی اوکلاهما (تأسیس در ۱۹۸۹ توسط دِیل آلسپاخ[9]) نمونه‌هایی از کارگزارهایی هستند که هر یک به‌نوعی توسط xxx.lanl.gov سابق و arXiv.org فعلی هضم و جذب شده‌اند، گرچه در عین حال برخی هنوز به فعالیت مستقل خود هم ادامه می‌دهند و زندگی دوگانه‌ای دارند.

arXiv

arXiv در ارتباط با مجلات نیز موفقیتهایی داشته است. حدود ۴۰ مجله توافق کرده‌اند که نویسندگان مقالات با مطلع‌کردن ویراستاران از شمارهٔ پیش‌چاپ خود در arXiv ــ که قبلاً در آنجا قرار داده شده است ــ به ارائهٔ مقالهٔ خود به مجله اقدام کنند (ارائه‌ی مستقیم)[10]. ویراستاران هم می‌توانند به‌همین طریق مقاله را در اختیار داوران قرار دهند. چهار مجله هم علاوه بر این توافق کرده‌اند که تمام مقالات چاپ‌شدهٔ خود را در arXiv قرار دهند (ovelay journals). یکی از این مجلات، مجلهٔ بسیار معتبر *Annals of Mathematics* است که این موفقیت بزرگی برای arXiv و حتی برای بایگانیهای پیش‌چاپ محسوب می‌شود.

امروزه arXiv مقالاتی در تمام شاخه‌های فیزیک، ریاضی،

۱. citation time-lag: مدت زمان بین انتشار یک مقاله و ارجاعات به آن در مقالات دیگر.

۲. مخففِ high-energy physics – theoretical.

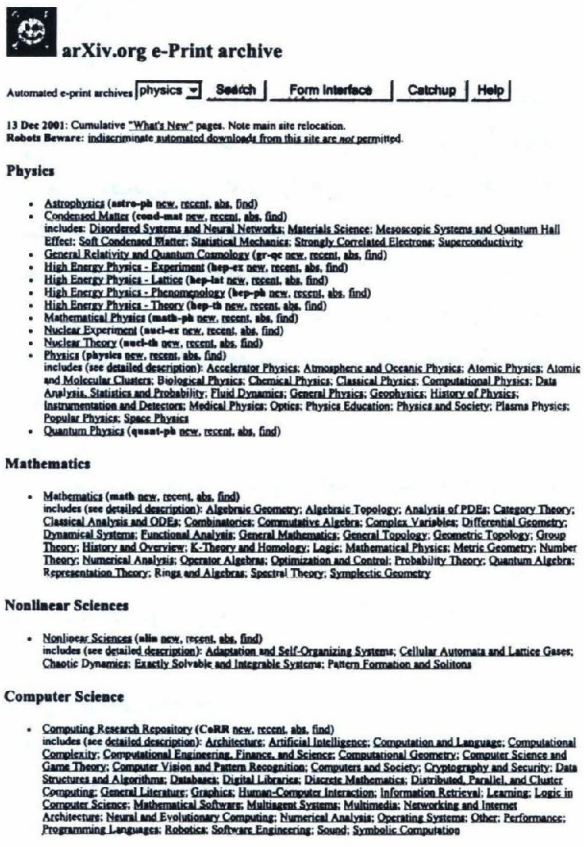
3. Los Alamos National Laboratories

۴. مخففِ mathematical physics preprint archive.

5. Paul Ginsparg 6. Duke 7. David Morrison

8. Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley

9. Dale Alspach 10. direct submission



arXiv.org e-Print archive

Automated e-print archives physics Search Form Interface Catchup Help

13 Dec 2001: Cumulative "What's New" pages. Note main site relocation.
Robots Beware: indiscriminate automated downloads from this site are *not* permitted.

Physics

- Astrophysics (astro-ph new, recent, abs, find)
- Condensed Matter (cond-mat new, recent, abs, find)
  includes: Disordered Systems and Neural Networks; Materials Science; Mesoscopic Systems and Quantum Hall Effect; Soft Condensed Matter; Statistical Mechanics; Strongly Correlated Electrons; Superconductivity
- General Relativity and Quantum Cosmology (gr-qc new, recent, abs, find)
- High Energy Physics - Experiment (hep-ex new, recent, abs, find)
- High Energy Physics - Lattice (hep-lat new, recent, abs, find)
- High Energy Physics - Phenomenology (hep-ph new, recent, abs, find)
- High Energy Physics - Theory (hep-th new, recent, abs, find)
- Mathematical Physics (math-ph new, recent, abs, find)
- Nuclear Experiment (nucl-ex new, recent, abs, find)
- Nuclear Theory (nucl-th new, recent, abs, find)
- Physics (physics new, recent, abs, find)
  includes (see detailed description): Accelerator Physics; Atmospheric and Oceanic Physics; Atomic Physics; Atomic and Molecular Clusters; Biological Physics; Chemical Physics; Classical Physics; Computational Physics; Data Analysis, Statistics and Probability; Fluid Dynamics; General Physics; Geophysics; History of Physics; Instrumentation and Detectors; Medical Physics; Optics; Physics Education; Physics and Society; Plasma Physics; Popular Physics; Space Physics
- Quantum Physics (quant-ph new, recent, abs, find)

Mathematics

- Mathematics (math new, recent, abs, find)
  includes (see detailed description): Algebraic Geometry; Algebraic Topology; Analysis of PDEs; Category Theory; Classical Analysis and ODEs; Combinatorics; Commutative Algebra; Complex Variables; Differential Geometry; Dynamical Systems; Functional Analysis; General Mathematics; General Topology; Geometric Topology; Group Theory; History and Overview; K-Theory and Homology; Logic; Mathematical Physics; Metric Geometry; Number Theory; Numerical Analysis; Operator Algebras; Optimization and Control; Probability Theory; Quantum Algebra; Representation Theory; Rings and Algebras; Spectral Theory; Symplectic Geometry

Nonlinear Sciences

- Nonlinear Sciences (nlin new, recent, abs, find)
  includes (see detailed description): Adaptation and Self-Organizing Systems; Cellular Automata and Lattice Gases; Chaotic Dynamics; Exactly Solvable and Integrable Systems; Pattern Formation and Solitons

Computer Science

- Computing Research Repository (CoRR new, recent, abs, find)
  includes (see detailed description): Architecture; Artificial Intelligence; Computation and Language; Computational Complexity; Computational Engineering, Finance, and Science; Computational Geometry; Computer Science and Game Theory; Computer Vision and Pattern Recognition; Computers and Society; Cryptography and Security; Data Structures and Algorithms; Databases; Digital Libraries; Discrete Mathematics; Distributed, Parallel, and Cluster Computing; General Literature; Graphics; Human-Computer Interaction; Information Retrieval; Learning; Logic in Computer Science; Mathematical Software; Multiagent Systems; Multimedia; Networking and Internet Architecture; Neural and Evolutionary Computing; Numerical Analysis; Operating Systems; Other; Performance; Programming Languages; Robotics; Software Engineering; Sound; Symbolic Computation

پشتیبانی فنی arXiv

علوم غیرخطی[1] و علوم رایانه در خود ذخیره کرده است و از پشتیبانی فنی و علمی و مالی و تجهیزات خوبی برخوردار است. سامانهٔ[2] arXiv بر اثر توجهی که در طول زمان به اصلاح و تکمیل آن معطوف شده است بسیار قابل اعتماد شده و نرم‌افزار آن ظرافت و دقت خاصی یافته است. راهنما[3]ی سایت مفصل و روشن است. arXiv از معدود کارگزارهایی است که دارای خودْمترجم TEX[4] است و تشخیص می‌دهد که مقالهٔ موردنظر از چه نگارشی[5] از TEX استفاده کرده، سپس به‌طور خودکار مقاله را در نگارش مزبور ترجمه[6] می‌کند و قالب[7] درخواستی را (اعم از dvi، ps، pdf) تولید می‌کند. برای اینکه حفظ، نگهداری و سهولت دسترسی به اطلاعات موجود در arXiv تضمین شود، arXiv دارای ۱۷ پایگاه آینه‌ای[8] در نقاط مختف جهان است. «تصویر»[9] موجود در دانشگاه کالیفرنیا در دِیویس[10]، ظاهری آراسته و گرافیکی‌تر از خودِ arXiv دارد و شاید برای مبتدیان مناسبتر باشد. یکی دیگر از مزایای «تصویر» مزبور این است که فهرستی الفبایی از نویسندگان مقالات موجود در arXiv را دارد و یک کلیک برروی نام نویسنده، فهرست مقالات او را از arXiv استخراج می‌کند.

1. nonlinear science 2. system 3. documentation

4. TEX autocompiler 5. version 6. compile

7. format 8. mirror site 9. front

10. http://front.math.ucdavis.edu/

آنچه بیش از همهٔ این‌ها arXiv را متمایز کرده نحوهٔ ادارهٔ آن است. arXiv کارکنانی تمام‌وقت و نیز همکارانی داوطلب و متعهد دارد. علاوه بر اینها، هیأتهای مشاور علمی arXiv بر نحوهٔ کار آن نظارت می‌کنند. arXiv هم‌چنین راهکاریهای برای کاهش میزان اغلاط علمی در مقالات دارد. وقتی نویسنده‌ای مقاله‌اش را در arXiv قرار می‌دهد صدها نفر خلاصهٔ مقاله را از طریق e-نامه دریافت می‌کنند، بنابراین نویسندگان مراقب آنچه می‌نویسند هستند زیرا در معرض قضاوت جمعی قرار می‌گیرد. البته در هر حال امکان خطا منتفی نیست. نویسنده در صورت لزوم می‌تواند به تصحیح مقالهٔ خود اقدام کند و نگارش جدید مقاله‌اش را در arXiv بگذارد؛ شماره‌گذاری arXiv شمارهٔ نگارش را نیز منظور می‌کند و نگارشهای قبلی و احیاناً مغلوطِ مقالات از بایگانی arXiv حذف نخواهند شد.

همان‌طور که TEX ریاضی‌دانان را به تایپیست تبدیل کرد، وب هم آنها را به ناشر تبدیل می‌کند.

با وجود اینکه arXiv در آزمایشگاههای لوس‌آلاموس پدید آمد، اما از نظر مالی به آن وابسته نبود و هزینه‌های آن را وزارت انرژی[1] و بنیاد ملی علوم[2] امریکا بر عهده گرفته بودند. این هزینه‌ها به حدود سالی ۳۰۰۰۰۰ دلار بالغ می‌شد که غالباً به مصرف حقوق سه نفر کارکنان arXiv می‌رسید و هزینه‌های سخت‌افزاری در برابر حقوق این افراد قابل اغماض بود. امسال گینزپارگ که گردانندهٔ اصلی arXiv است به دعوت دانشگاه کُرنل[3] به عضویت هیأت علمی آن دانشگاه درآمده است و بنابراین مقر اصلی arXiv را نیز با خود به آنجا منتقل می‌کند. با این نقل‌مکان، کمک مالی وزارت انرژی امریکا به arXiv قطع خواهد شد و در مقابلْ کتابخانهٔ دانشگاه کُرنل هزینه‌های اصلی زیرساختاری و نگهداری arXiv را به عنوان «زیرمجموعهٔ ویژه»ای از خود برعهده خواهد گرفت. قطع کمکهای دولتی و برخورداری از حمایت یک دانشگاه خصوصی به arXiv ثبات و آزادی عمل بیشتری خواهد بخشید؛ به‌علاوه دانشگاه کرنل در سالهای اخیر به مرکزی برای نوآوری در ارتباطات الکترونیک دانشگاهی تبدیل شده است و لذا پایگاه مناسبی برای arXiv است. در عین حال هنوز نگرانیهایی در مورد تأمین مالی arXiv (و کلاً کارگزارهای پیش‌چاپ) در درازمدت وجود دارد. در ادامه هنگام بیان مشکلات نشر الکترونیک بیشتر به این دغدغه‌ها خواهیم پرداخت.

○ انواع کارگزارهای پیش‌چاپ

با وجود اینکه arXiv به بزرگترین کارگزار پیش‌چاپ تبدیل شده است، اما به هیچ وجه تنها منبع e-چاپ‌ها نیست. درکل می‌توان کارگزارهای e-چاپ را به دو دستهٔ موضوعی[1] و عمومی[2] تقسیم کرد. (اینها به غیر از صفحهٔ شخصی نویسندگان است که مقالات خود را در آن قرار می‌دهند.) کارگزارهای موضوعی عموماً به ابتکار یک یا چند ریاضیدان با علایق مشابه تأسیس می‌شوند و مخاطبان محدود ولی فعالی دارند. حجم این کارگزارها کوچک، پیچیدگی تکنیکی آنها کم و ظاهرشان ساده است. به عنوان مثال، علاوه بر مواردی که قبلاً ذکر شد [تابلوی اجتماعات الکترونیک]، می‌توان به Hopf Topology Archive اشاره کرد. این کارگزار در سال ۱۹۹۲ میلادی توسط کلَرنس ویلکرسن[3] از دانشگاه پردو به منظور تسریع مبادلهٔ پیش‌چاپ‌ها و کاهش هزینه‌های این کار، و در عین حال تبلیغ کارهای خود و همکارانش، تأسیس شد. با این حال این کارگزار فواید جانبی پیش‌بینی‌نشده‌ای هم داشته است، مثلاً اینکه در یک نظر چشم‌اندازی از تحقیقات روز دنیا را در توپولوژی ارائه می‌دهد. کارگزارهای موضوعی غالباً به محافل گرم ریاضیدانان همکار در یک شاخهٔ مشخص تبدیل می‌شوند و این خود دلیل کافی و انگیزهٔ مناسبی برای تأسیس چنین کارگزارهایی است.

کارگزارهای عمومی که دستهٔ دیگری از کارگزارها را تشکیل می‌دهند عمدتاً شامل کارگزارهایی می‌شوند که توسط دانشکده‌های ریاضی یا مؤسسات پژوهشی راه‌اندازی شده‌اند و نماد تحقیقات انجام شده در آن مراکز هستند. حاصل تحقیقات اعضای هیأت علمی، پژوهشگران و میهمانان این مؤسسات در این کارگزارها قرار داده می‌شود. مجموع تعداد مقالات موجود در این کارگزارها شاید با تعداد مقالات موجود در arXiv برابری کند.

arXiv خود نمونه‌ای دیگر از کارگزارهای عمومی است که در واقع از تلفیقی از کارگزارهای موضوعی با سلایق متنوع تشکیل شده است. نگاهی به تاریخچهٔ رشد arXiv دو طرز فکر عمده را در بارهٔ کارگزارهای پیش‌چاپ نمایان می‌کند. گروهی از کارگزارهای موضوعی (مانند کارگزار هندسهٔ جبری در دانشگاه دوک) به arXiv پیوستند یا (مانند Banach Space Archive) در آن شعبه‌ای[4] ایجاد کردند؛ و گروهی دیگر (مانند mp_arc) در مقابل ادغام در arXiv مقاومت کردند. شاید arXiv در دعوت از دیگران برای پیوستن به خود کمی گستاخی و تکبر به خرج داده باشد و به این ترتیب رنجش عده‌ای را برانگیخته باشد، ولی در هر حال هر دو گروه دلایل متین و قابل تأملی در توجیه رفتار خود دارند. تمرکزگرایان، یا طرفداران کارگزارهای «بزرگ»، به صرفه‌جویی در هزینه‌ها و منابع انسانی لازم برای نگهداری کارگزار اشاره می‌کنند. هزینه‌های سخت‌افزاریِ بایگانیِ e-چاپ‌ها مجتمع و در نتیجه مقرون به‌صرفه‌تر است، و برنامهٔ رایانه‌ای لازم برای پردازش e-چاپ‌ها می‌تواند بر هر تعداد از مقالات عملیات انجام دهد، چه ۱۰۰ تا باشند، چه ۱۰۰۰۰ تا، بنابراین هزینه‌های نیروی انسانی نیز کاهش می‌یابد. در صورت ظهور فن‌آوری‌ها و تکنیکهای جدیدِ نگهداری اطلاعات، تبدیل فایلها به قالب جدید به همین ترتیب با سرعت و سهولت بیشتری انجام

1. Department of Energy
2. National Science Foundation (NSF) 3. Cornell

1. subject-based 2. general 3. Clarence Wilkerson
4. overlay

می‌گیرد. اینها همه درواقع از مزایای مقیاس است ــ «هر چه بزرگتر، بهتر». تمرکزگرایان عیوبی را هم برای کارگزارهای کوچک سراغ دارند. این کارگزارها ــ که غالباً در دانشکده‌ها و مؤسسات تحقیقاتی مستقرند ــ در اختیار مدیران شبکه[1] اند و این صاحبْ‌اختیاران گاهی دخالت در شبکهٔ تحت نظر خود را برنمی‌تابند، حتی اگر از جانب نویسندگان مقالات باشد. نمونه‌هایی از مقاومت مدیران شبکه در برابر دسترسی یا ارتقاء[2] نرم‌افزارهای مربوط به کارگزار e-چاپ مستقر در آن شبکه گزارش شده است، در حالی که چنین مشکلی در مورد arXiv وجود ندارد.

دلایل تنوع‌گرایان

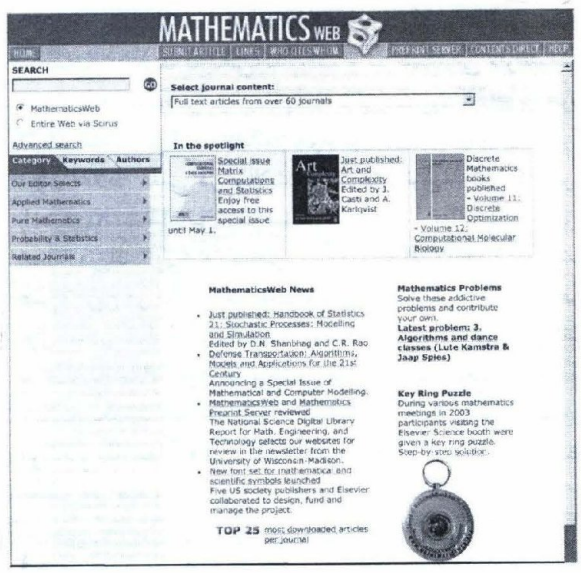
از سوی دیگر، تنوع‌گرایان، یا طرفداران کارگزارهای «کوچک»، نگران‌اند که وجود کارگزارهای مرکزی[3] باعث کاهش بودجه‌های تحقیقاتی سایر مراکز و هدایت سرمایه‌ها به سوی کارگزارهای مرکزی شود، در حالی که با وجود کارگزارهای محلی[4]، هزینه‌ها بین تعداد زیادی از مؤسسات سرشکن می‌شود. آنان همچنین به وجود نوعی رابطهٔ انسانی بین نویسندگان مقالات و رشتهٔ کاری‌شان اشاره می‌کنند. وقتی کارگزارها کوچک و موضوعی باشند، مسؤولیت نگهداری مطالب موجود در آنها بین کسانی تقسیم می‌شود که به موضوع علاقه‌مندند و برای ادارهٔ کارگزار دلسوزتر. در عین حال این تنوع و تکثر به عمومیترشدن علم و تشکیل اجتماعات علمی کمک می‌کند. تنوع‌گرایان معتقدند همان‌طور که دنیا بیش از پیش به سمت استفادهٔ موازی از شبکه‌های رایانه‌ای غیرمتمرکز به جای رایانه‌های بزرگ مرکزی پیش می‌رود، به همان ترتیب هم استفاده از آرشیوهای مرکزیِ متروک و به جای آن استفاده از «آرشیوهای بالقوه»[5] رایج خواهد شد. این آرشیوها در واقع نوعی کارگزار پوششی[6] هستند که خود e-چاپی را در خود ذخیره نکرده‌اند، بلکه منابعشان بین کارگزارهای کوچکتر، مثلاً کارگزارهای دانشکده‌ها، توزیع شده‌اند. کارگزار پوششی با دریافت فرمان جستجو، «شناسنامه[7]» مقالات موجود در کارگزارهای اقماری خود را «درو»[8] کرده و موارد مربوط را استخراج می‌کند.

MPRESS

در هر صورت، وجود کارگزارهای پراکنده و غیرمجتمع یک واقعیت است و کارگزارهای پوششی یک نیاز محسوس. مهمترین کارگزار پوششی موجود، «سامانهٔ جستجوی پیش‌چاپ ریاضی» (MPRESS)[9] است که ابتدا تحت عنوان D-MathNet توسط انجمن ریاضی آلمان برای پوشش کارگزارهای بخشهای ریاضی دانشگاههای آلمان تأسیس شد. MPRESS اکنون از حمایت انجمن ریاضی اروپا و اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی برخوردار است و دایرهٔ بزرگتری از کارگزارها را تحت پوشش خود دارد که شامل arXiv و کارگزارهای دیگری در امریکا، فرانسه و استرالیا می‌شود و حوزهٔ فعالیت آن همچنان رو به گسترش است.

از آنجا که قابلیت جستجو یکی از مهمترین امکانات یک کارگزار است، اهمیت هماهنگ‌کردن شناسنامهٔ مقالات روشن

1. administrators 2. upgrade 3. centralized
4. distributed 5. virtual archives
6. umbrella server 7. metadata 8. harvest
9. Mathematical Preprint Search System



می‌شود. شناسنامهٔ یک مقاله شامل عنوان، نام نویسندگان و چکیدهٔ مقاله می‌شود. یکی از تلاشهایی که در راه هماهنگ‌کردن شناسنامه‌ها صورت گرفته ابتکار OAI[1] است که گینزپارگ خود یکی از پایه‌گذاران آن است. OAI پروتکل‌هایی برای تسهیل مبادلهٔ اطلاعات کارگزارهای مختلف بر روی شبکه طراحی می‌کند و انتظار می‌رود به‌عنوان «کوچکترین مخرج مشترک» شناسنامهٔ e-چاپ‌ها به صورت استاندارد پذیرفته شود. یک اقدام مرتبط دیگر، راه‌اندازی Self-Archiving Initiative است که نرم‌افزاری است رایگان و توسط استون هارند[2] در انگلیس نوشته شده است. این نرم‌افزار با استانداردهای OAI منطبق است و خروجی آن قابل «درو»شدن توسط «آرشیوهای بالقوهٔ جهانی» است. این به نویسندگان مقالات امکان می‌دهد تا برای خودشان آرشیوی بسازند. هارند خود با استفاده از این نرم‌افزار آرشیو Cite-Base را ساخته است. این آرشیوی در علوم شناختی[3] است که داده‌های خود را از arXiv و Cogprints می‌گیرد.

OAI

کارگزارهای تجاری

در اینجا لازم است به کارگزارهای ناشران تجاری هم اشاره‌ای کنیم. اولین کارگزار اینچنینی در ریاضی توسط اِلزه‌ویر[4] در سال ۲۰۰۱ تأسیس شد، گرچه نه نشانی[5] و نه محتوای این پایگاه اشاره‌ای به الزه‌ویر ندارد. استفاده از این کارگزار آزاد و رایگان است و ناشر متعهد شده که آن را رایگان نگاه دارد، علاوه بر اینکه قراردادن پیش‌چاپ‌ها در این کارگزار تعهدی برای نویسندگان آنها (مثل ارسال مقالات برای چاپ در یکی از مجلات اِلزه‌ویر) ایجاد نمی‌کند. همچنین اگر نویسنده‌ای مقالهٔ خود را در یکی از مجلاتِ با کپی‌رایتِ الزه‌ویر به چاپ رساند اجازه دارد نسخهٔ نهایی مقالهٔ خود را با گذاشتن در این کارگزار به رایگان در اختیار همگان قرار دهد. از دیگر

1. Open Archives Initiative (openarchives.org)
2. Stevan Harnad 3. cognitive science 4. Elsevier
5. http://www.mathpreprints.com/

فهرست منتخبی از کارگزارهای موضوعی
Subject e-Print Servers

- **Hopf Topology Archive**
  `http://hopf.math.purdue.edu/pub/hopf.html`
- Preprints at **Topology Atlas**
  `http://at.youku.ca/topology/preprint.htm`
  `http://at.yorku.ca/topology/`
- **K-theory Preprint Archive**
  `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/`
- **Mathematical Physics Preprint Archive** (mp_arc)
  `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/mp_arc-home.html`

برای فهرستی کاملتر، [AMS2] را ببینید.

مشخصه‌های این کارگزار آن است که به کاربران امکان نمره‌دهی به مقالات را (در مقیاس صفر تا پنج ستاره) می‌دهد و می‌تواند مقالات جستجوشده را نیز برحسب نمره مرتب کند. همچنین کارگزار مزبور جزئی از «درگاه ریاضی»[1] الزه‌وی‌یر است[2] که کارگزاری است پوششی و شناسنامهٔ پیش‌چاپ‌ها و مقالات مجله‌های الزه‌وی‌یر و سایر ناشران را پوشش می‌دهد. اما چرا یک ناشر تجاری به تأسیس چنین کارگزار پیش‌چاپ رایگانی همت گماشته است؟ الزه‌وی‌یر درصدد است با این کار نویسندگان و خوانندگان مجلات را به سوی ScienceDirect ــ که نسخهٔ برخطِ مجلات الزه‌وی‌یر برای مشترکان است ــ جلب کند.

خلاصه اینکه طیف وسیعی از کارگزارهای عمومی وجود دارد که در یک سمت آن کارگزارهای مرکزی (مثل arXiv) و در سمت دیگر آن کارگزارهای پوششی (مثل MPRESS) قرار دارند. نظر تمرکزگرایان به صواب نزدیکتر است یا نظر تنوع‌گرایان؟ برخی معتقدند که هر دو روش لازم است. کتاب سوزان اسکندریه تجربهٔ عبرت‌آموزی است. در دنیا فقط یک کتابخانهٔ مرکزی بزرگ وجود ندارد، بلکه هزاران کتابخانه وجود دارند؛ به همین ترتیب، منابع مختلفی هم باید برای دسترسی به مطالب ریاضی موجود باشند. آنچه نیاز است، وفور و تکرار است ــ مثل قند مکرر.

○ توفیق یک کارگزار پیش‌چاپ

همان‌طورکه ذکر شد، دلایل زیادی برای اینکه کسی دست به تأسیس یک کارگزار بزند وجود دارد. چنین کارگزاری به طور قابل ملاحظه‌ای

1. math portal 2. `http://www.mathematicsweb.org/`

فهرست منتخبی از کارگزارهای عمومی
General e-Print Servers

• کارگزارهای مرکزی Centralized Servers

- **ArXiv**
  `http://arxiv.org/`
- **Mathematics Preprint Server** (part of MathematicsWeb, sponsored by Elsevier Science)
  `http://www.mathpreprints.com/`
- **MSRI Preprints**
  `http://www.msri.org/publicatins/preprints/`
- **IHES Preprints**
  `http://www.ihes.fr/IHES/Scientifique/Preprint/preprint.htm`
- **SUNY Stony Brook Preprints**
  `http://www.math.sunysb.edu/preprints.html`

• کارگزارهای پوششی Umbrella Servers

- **MPRESS:** A **Math-Net** Preprint Search System
  `http://mathnet.preprints.org/`
  `http://www.math-net.org/`
- **CiteBase** (Search across multiple archives) (part of `http://eprints.org/`)
  `http://citebase.eprints.org/`
- **MathematicsWeb**: Elsevier's Math Portal
  `http://www.mathematicsweb.org/`
- **ResearchIndex (CiteSeer)**: scientific virtual library from NEC
  `http://citeseer.nj.nec.com/cs/`

برای فهرستی کاملتر، [AMS2] را ببینید.

از تأخیر در دریافت مقالات می‌کاهد، علاوه بر اینکه هزینه‌ها را نیز کاهش می‌دهد و دسترسی به مقاله‌ها را آسانتر می‌کند. از سوی دیگر، کارگزار پیش‌چاپ کارکردی اجتماعی دارد و ارتباط علمی فرد با فرد را به یک فعالیت جمعی تبدیل می‌کند ــ این در اصل از خاصیت اینترنت در عمومی‌سازی اطلاعات[1] نشأت می‌گیرد.

1. democratization of information

کارگزارهای مرکزی یا کارگزارهای پوششی؟

فواید تأسیس یک کارگزار

همچنین هر کارگزارْ چشم‌اندازی را از مباحث تحقیقاتی مورد علاقهٔ روز ارائه می‌دهد، علاوه بر اینکه نقشی تبلیغاتی هم برای صاحب خود ایفا می‌کند.

اما تأسیس کارگزار همیشه هم موفقیت‌آمیز نیست. مثالهای حیرت‌آوری از اقدام به تأسیس کارگزار وجود دارد که به شکست انجامیده است، حتی اقداماتی که از سوی انجمنهای حرفه‌ای با پشتوانه‌های قوی علمی و مالی و صنفی صورت گرفته است. یک نمونهٔ آن، کارگزار انجمن ریاضی امریکا (AMS) است که حیاتش بیش از چهار سال ادامه نیافت. شکستهای مشابهی نیز نصیب انجمن ریاضی کانادا و انجمن فیزیک امریکا شده است. به نظر می‌رسد که کارگزارهای موفق غالباً به جوامعِ نسبتاً کوچک ریاضیدانان با علایق مشابه تعلق دارد. همچنین فعالیت گستردهٔ تحقیقاتی در یک شاخه نیز می‌تواند به رشد و نمو یک کارگزار منجر شود، مانند آنچه برای arXiv در مورد نظریهٔ ریسمان اتفاق افتاد.

اما چرا کارگزار انجمن ریاضی امریکا از کارایی لازم برخوردار نبود؟ کارگزار مزبور در واقع یک کارگزار پوششی بود و بنابراین معمولاً اصل مقاله را شامل نبود، بلکه به آن به وسیلهٔ پیوند[1] ارجاع می‌داد. این روش قابل اطمینانی نیست، زیرا با تغییر نشانی مقاله، ارجاع مزبور به یک پیوند مرده تبدیل می‌شود. همچنین به دلیل تردیدهایی که مسؤولان انجمن ریاضی امریکا (AMS) در مورد مسائل حقوقی و تجاریِ تأسیس چنین کارگزاری و نیز تأثیر کارگزارهای پیش‌چاپ بر آیندهٔ مجلات سنتی داشتند، پیش‌چاپ‌ها دارای تاریخ انقضا بودند و پس از مدت معینی از کارگزار حذف می‌شدند. بنابراین کارگزار مزبور از دو خاصیت مهم برای موفقیت یک وب‌گاه[2]، یعنی دسترسی مطمئن و دوام، برخوردار نبود. این کارگزار در سال ۱۹۹۹ بر اثر بی‌استفاده‌ماندن تعطیل شد و AMS اکنون فقط به نگهداری فهرستی از کارگزارهای پیش‌چاپ ریاضی بسنده کرده است.

○ در علوم دیگر چه می‌گذرد؟

همان‌طور که اشاره شد، فیزیک بیشترین استفاده را از کارگزارهای پیش‌چاپ می‌کند و استفاده از arXiv جزئی جدایی‌ناپذیر از فرهنگ تحقیق و تبادل نتایج علمی در فیزیک شده است. در واقع این فرهنگ از فیزیک است که به ریاضی هم سرایت کرده است، کما اینکه استفاده از کارگزارهای پیش‌چاپ در میان شاخه‌هایی از ریاضیات متداولتر است که ربط بیشتری به فیزیک و به‌خصوص نظریهٔ ریسمان دارند، مثل هندسهٔ جبری، جبر کوانتومی و هندسهٔ دیفرانسیل، و این هم بیشتر به خاطر نفوذ و نقش محوری arXiv در تطور و تکامل این نظریه است. در عوض در شاخه‌هایی مانند آنالیز عددی تبادل اطلاعات علمی به‌طور سنتی از طریق فهرستهای پستی[3] و گروههای خبری[4] صورت می‌گیرد. در علوم رایانه هم عمدتاً گرایش به سمت استفاده از صفحه‌های شخصی یا کارگزارهای دانشکده‌هاست، به‌همین دلیل وجود یک کارگزار پوششی

1. link 2. website 3. mailing lists 4. newsgroups

اهمیت پیدا می‌کند. ResearchIndex (که توسط شرکت NEC راه‌اندازی شده است و قبلاً CiteSeer خوانده می‌شد) این کار را به روش خاصی انجام می‌دهد: این سرویس مرتباً در صفحات شخصی دانشمندان علوم رایانه به گشت و گذار می‌پردازد و مقالات جدید را جمع‌آوری و نگهداری می‌کند. البته arXiv هم بخشی مخصوص علوم رایانه دارد که CoRR[1] خوانده می‌شود؛ گرچه استفاده از CoRR روزافزون است، اما به نظر می‌رسد که هنوز هم ResearchIndex محبوبیت بیشتری دارد.

یکی از تفاوتهای اهداف نشر در ریاضی با سایر علوم، اولویت «دقت» و محتوا بر «سرعت» چاپ است.

علوم دیگر با مشکلات بیشتری در استفاده از کارگزارهای پیش‌چاپ دست به گریبان‌اند. مثلاً در شیمی از آنجا که مقالات غالباً شامل مطالبی در بارهٔ اطلاعات یا اختراعات ثبتی و انحصاری هستند، تبادل پیش‌چاپ‌ها اصولاً خیلی معمول نیست. در علوم زیست‌ـپزشکی[2] وضع از این هم بدتر است، زیرا مجلات نویسندگان را از اعلان و بحث در بارهٔ مطالب مقاله‌شان ــ تا زمان چاپ مقاله ــ منع می‌کنند. از این‌رو کارگزارهای این شاخه‌های علمی (http://preprint.chemweb.com/ و http://NetPrints.org/ توسط الزه‌وی‌یر برای شیمی و توسط مجلهٔ بریتانیایی پزشکی برای زیست‌ـپزشکی) چندان با اقبال روبه‌رو نشده‌اند. البته ریاضی و فیزیک امتیاز دیگری هم بر سایر علوم دارند و آن تداول استفاده از TEX است. ریاضیدانان خود مانند دانلد کنوت[3]، مبدع TEX، دوست دارند منابع را در دسترس همگان بگذارند. TEX که زبانی با منبع باز[4] است به کاربران امکان مبادلهٔ فایلهایی را می‌دهد که در قالب متن[5] و مستقل از پلاتفرم کاربر هستند و به راحتی به قالبهای دیگر مانند postscript یا pdf قابل تبدیل‌اند. استفاده از نرم‌افزارهای تجاری (مثلاً Microsoft Word) در شاخه‌های دیگر علمی، کار مبادلهٔ فایلها را دشوارتر می‌کند. یک مزیت دیگر TEX، بستن دست «نوابغ» است، زیرا خیلی غیرمحتمل است که تئلیث‌گری به یادگیری زبان TEX همت گمارد.

به نظر می‌رسد که یکی از دلایل اصلیِ تفاوتِ میزان و نحوهٔ استفادهٔ علوم مختلف از کارگزارهای پیش‌چاپ، دیدگاههای متفاوت آنها نسبت به «نشر» است. مثلاً در فیزیک، نشریافته‌ها به منظور «اطلاع‌رسانی» به همکاران فیزیکدان و همکاری علمی صورت می‌گیرد، لذا سرعت نشر اهمیت پیدا می‌کند، که در قالب وب به نحو

1. Computing Research Repository 2. biomedical
3. Donald Knuth 4. open source 5. text

مناسبی تحقق یافته است. ولی در ریاضی، هدف از نشر، «ثبت» است، بنابراین دقت اولویت دارد؛ مقالات باید داوری شوند و مجلات محوریت پیدا می‌کنند. در نتیجه با وجود اینکه قراردادن مقالات ریاضی در کارگزارهای پیش‌چاپ عملاً جزئی از فرایند انتشار آنها شده است، اما داوری‌شدن و «چاپ» مقاله در مجله است که هدف اصلی است، خواه مجله کاغذی باشد یا الکترونیکی.

مجلات الکترونیک

سنتاً مجلات کاغذیْ امر داوری، تایپ و امور فنیِ چاپ، پخش و نگهداری یا بایگانی مقالات وارده را برعهده داشته‌اند. در سالهای اخیر میزان افزایش هزینه‌های اشتراک مجلات کاغذی از سوی ناشران تجاری سیری نجومی داشته است که در برخی موارد حتی بیش از رشد هزینه‌های چاپ و نشر بوده است (تحقیق جامع کِربی [Kr] را در این زمینه ببینید) ــ این در حالی است که اصولاً مبلغی برای داوری مقالات پرداخته نمی‌شود یا مقدار آن بسیار ناچیز است. روند رشد قیمت مجلات تخصصی چنان بود که نقض غرضی جدی به‌حساب می‌آمد؛ این مجلات بیشتر از آنکه عاملی برای توسعهٔ فرهنگ پژوهشیِ ریاضی باشند آن را مهار می‌کردند. اتفاقاً این روند مقارن شد با ظهور اینترنت؛ قابلیتهای TEX، قدرت رسانه‌ای وب، و امکان داوری مقالات توسط خود ریاضیدانان، این استقلال، آزادی و توانایی را برای آنان فراهم می‌کرد که خود رأساً امر تایپ، نشر و چاپ مقالاتشان را در اختیار بگیرند و ناشران تجاری سنتی را از چرخهٔ نشر حذف کنند. بدین ترتیب نهضت الکترونیکی نشر ریاضی با تأسیس تعدادی مجلهٔ رایگان الکترونیک وارد مرحله‌ی تازه‌ای شد [تابلوی مجلات الکترونیک] و بازار نشر را دستخوش تغییر و تحولاتی کرد که همچنان ادامه دارد.

انتشار رایگان مجلات الکترونیک آن‌طور که آسان می‌نمود نبود. این مجلات نیز مانند هر مجلهٔ نوپای دیگری برای تثبیت خود احتیاج به کسب شهرت و اعتبار در جامعهٔ مخاطبان خود دارند؛ با این تفاوت که مانند مجلات متعارف [کاغذی] در کتابخانه‌ها در معرض دید نیستند. بنابراین حفظ و اعتلای کیفیت و جذب مقاله‌های عالی از یک سو و تبلیغ کافی از سوی دیگر برای آنها اهمیت بیشتری پیدا می‌کند ــ و تبلیغ البته امری است که ناشران تجاری در آن موفقترند. شاید عده‌ای از ریاضیدانان هنوز مجلات الکترونیک را چندان جدی نمی‌گیرند، در حالی که این مجلات تنها از لحاظ سبک انتشار با مجلات کاغذی تفاوت دارند و سطح علمی یک مجله را باید از روی کیفیت مقالات و داوری آنها ارزیابی کرد. با وجود این برخی ریاضیدانان، به‌خصوص جوانترها، هنوز هم ترجیح می‌دهند که مقالات خود را به مجلات جاافتاده و معتبر کاغذی ارسال کنند تا بیشتر در معرض دید قرار بگیرند. به هر حال با اینکه مجلات رایگان الکترونیک عمری حداکثر ده ساله دارند، برخی از آنها توانسته‌اند به اتکای کیفیت مقالات و سطح علمی هیأت ویراستاران در زمرهٔ مجلات معتبر قرار گیرند، مانند مجلهٔ *Geometry and Topology*

اقتصاد نشر

چالشهای مجلات الکترونیک

گزیده‌ای از مجلات الکترونیک
e-Journals

- **Geometry and Topology**
  http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/
- **Algebraic and geometric Topology**
  http://www.maths.warwick.ac.uk/ag/
- **Electronic Journal of Combinatorics**
  http://www.combinatorics.org/
- **Electronic Journal of Probability**
  http://math.washington.edu/~ejpecp/
- **Documenta Mathematica**
  http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/Welcome-eng.html
- **New York Journal of Mathematics**
  http://nyjm.albany.edu:8000/nyjm.html
- **Pacific Journal of Mathematics**
  http://nyjm.albany.edu:8000//PacJ/
- **American Jounal of Mathematics** $
  http://muse.jhu.edu/journals/american_jounal_of_mathematics/
- **Annals of Mathematics**
  http://www.math.princeton.edu/~annals/
- **Duke Mathematical Journal** $
  http://www.dukemathjournal.org/
- **JSTOR** $
  http://www.jstor.org/
- **Project Euclid** $
  http://projecteuclid.org/
- **Project Muse**$
  http://muse.jhu.edu/
- **ScienceDirect** from Elsevier Science (includes Academic Presss journals) $
  (Former "IDEAL Library" is now integrated into ScienceDirect.)
  http://www.sciencedirect.com/
- **LINK** from Springer $
  http://link.springer.de/
- **Kluwer Journals** $
  http://www.wkap.nl/journal/
- **International Press Journals** $
  http://www.intlpress.com/journals/
- **World Scientific Math Journals** $
  http://journals.wspc.com.sg/maths.html

که به همت توپولوژیدان معروف رابین کربی تأسیس شده است.

وجه مشترک همهٔ مجلات الکترونیک، امر داوری است. مجلات همچنین ناچارند اشکالات احتمالی TEXای یا گرافیکی مقاله را رفع کنند و غلطهای املایی را تصحیح کنند[1]. اما از لحاظ صفحه‌آرایی هر مجله با حال و هوای مخصوص خود منتشر می‌شود. برخی (مانند *Electronic Journal of Combinatorics*) به کمترین تغییرات در قالب مقاله اکتفا می‌کنند (تنها ابعاد صفحه و آرم مجله) و بنابراین گستره‌ای از قالبهای متنوع در میان مقالات منتشره دیده می‌شود، و نیز مقالات به محض پذیرفته‌شدن منتشر می‌شوند (یعنی بر روی وب قرار می‌گیرند). برخی دیگر قالب مقالات را به‌وسیلهٔ یک فایل سَبکی[2] کمکی یکنواخت می‌کنند (*Documenta Mathematica*). مجلهٔ *New York Journal of Mathematics* (NYJM) از امکانات فنی‌تر وب و فن‌آوری چندرسانه‌ای نیز بهره می‌گیرد که در نوع کاغذی قابل اعمال نیست: قالبهای dvi یا pdf مقالات منتشره در این مجله به صورت فرامتن[3] هستند، یعنی دارای پیوندهای داخلی و خارجی‌اند ــ از نام نویسنده در ابتدای مقاله یا شمارهٔ مراجع در متن به نشانی کامل آنها در انتها، و نیز از مراجع به نقد آنها در *MathSciNet* یا *Zentralblatt*، یا به خود مقالهٔ مرجع در صورتی که در وب موجود باشد. همچنین هر مقالهٔ منتشر شده در *NYJM*، صفحه‌ای مخصوص به خود برای پیوندها دارد: برای دسترسی به نقدهای گوناگون مقاله که بعد از چاپ آن نوشته شده‌اند، یا به مقالات مرتبط به مقاله، و یا حتی به برنامه‌های رایانه‌ای مربوط.

در عین حال، مؤسسات انتشاراتی تجاری هم از قافلهٔ رقابت الکترونیک عقب نمانده‌اند. الزه‌وی‌یر که به تازگی انتشارات آکادمیک پرس[4] و مجلات آن را در اختیار گرفته است و به این ترتیب به بزرگترین ناشر تجاری در زمینهٔ ریاضی و آمار تبدیل شده است، بیشترین خدمات الکترونیک را به کاربران ارائه می‌دهد. این خدمات شامل یک کارگزار پیش‌چاپ ریاضی (mathpreprints.com)، بانک مجلات (ScienceDirect) و در رأس آنها درگاه ریاضیِ این انتشارات (mathematicsweb.org) است که همگی به هم مرتبط‌اند. الزه‌وی‌یر همچنین یک دستگاه جستجوی ویژهٔ علوم را که Scirus نام دارد طراحی کرده و در وب قرار داده است. بجز مقالات محافظت‌شده در ScienceDirect که با اشتراک قابل دسترسی است، سایر مطالب موجود در این پایگاهها آزاد و استفاده از آنها رایگان است.

اشپرینگر، دیگر ناشر بزرگ تجاری ریاضی، نیز با تأسیس سرویس LINK مقالات مجله‌های ریاضی خود را بر روی وب برده و در دسترس مشترکین خود قرار داده است. LINK همچنین یک سرویس خبردهی e-نامه‌ای برای کاربران متقاضی دارد که به محض انتشار، فهرست و خلاصهٔ مقالات را به رایگان در اختیارشان قرار می‌دهد.

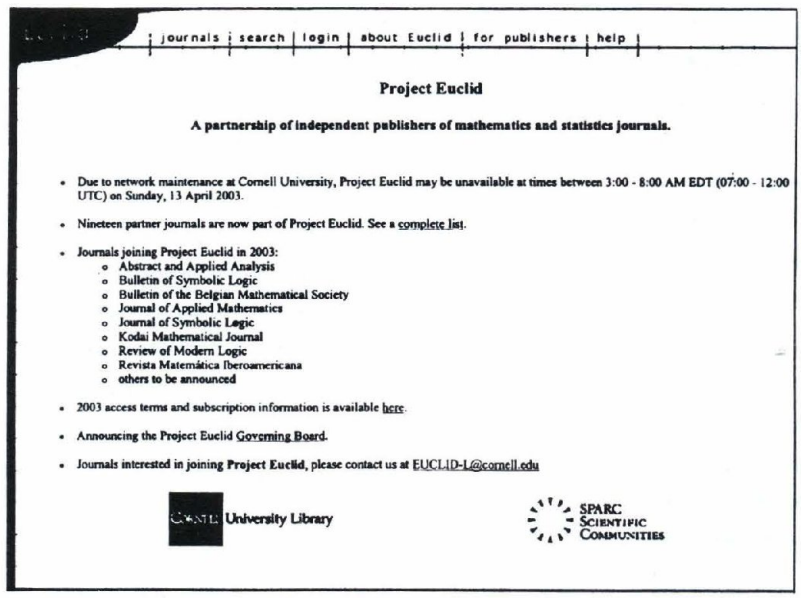
1. spell-check 2. style file 3. hypertext
4. Academic Press

کلوور[1] که ناشر تجاری بزرگ دیگری در زمینهٔ ریاضی است نیز چندین ناشر کوچکتر را در خود بلعیده و در ضمن تعدادی از مجلاتی را که توسط مؤسسات تجاری و غیرتجاری منتشر می‌شد در اختیار گرفته است. این تحولات بازار نشر، یعنی ادغام و توسعهٔ ناشران چندملیتی تجاری و حل‌شدن ناشران کوچکتر در آنها، و جهش قیمت مجلات تخصصی، وضعیت ناشران کوچک و اغلب آکادمیک را حساسیت‌برانگیز کرده است. این ناشران مجلاتی با کیفیت مطلوب و قیمت پایین منتشر می‌کنند که جزو بدنهٔ پژوهشی ریاضی هستند، بنابراین حفظ تعادل اقتصادی آنها در عرصهٔ رقابت با غولهای نشر

مجلات الکترونیک تنها از لحاظ سبک انتشار با مجلات کاغذی تفاوت دارند و سطح علمی یک مجله را باید از روی کیفیت مقالات و داوری آنها ارزیابی کرد.

برای جامعهٔ علمی اهمیت دارد. اما این ناشران در پیوستن به کاروان نشر الکترونیک به کندی عمل کرده‌اند: برخی اصولاً به این وادی پا ننهاده‌اند و برخی دیگر حضوری کمرنگ دارند که به هیچ‌وجه از قابلیتهای وب بهره‌ای نبرده است. آنها در واقع همان صورت کاغذی مجله را به صورت برخط عرضه می‌کنند که قابلیتهایی همچون جستجو، پیوند، نگهداری[2]، توسعهٔ سیستم، سرویسهای خبردهی به کاربران، و امکانات عملیاتی[3] مانند شناسنامه، تشخیص هویت[4] و تجارت الکترونیک در آن به ندرت یافت می‌شود، و ظاهراً تجار بشان نشان می‌دهد که تقاضای زیادی برای این قابلیتها وجود ندارد. این ناشران برای ورود به دنیای نشر الکترونیک نیاز به یاری دارند ولی از آنجا که برای انسجام[5] کار ویراستاری خود ارزش بسیار قائل‌اند از یاری جستن از غیر اکراه دارند. از این‌رو وجود ائتلافهایی برای ناشران کوچک، مستقل و تثبیت‌شده ضروری به نظر می‌رسد. یکی از اقدامات در این راستا، «پروژهٔ اقلیدس»[6] است که به صورت مشترک توسط کتابخانهٔ دانشگاه کُرنل و انتشارات دانشگاه دوک و با بودجه‌ای تخصیص‌یافته از سوی مؤسسهٔ اندرو ملون[7] انجام می‌شود. این همکاری استراتژیک بین دو نهاد که هر دو در کار خود بسیار باتجربه‌اند این پروژه را در موقعیت ممتازی قرار داده است ــ کتابخانه‌ی کُرنل در توسعه و مدیریت کتابخانهٔ دیجیتال پیشرو بوده است و انتشارات دوک سابقه‌ای طولانی در انتشار دو مجلهٔ پرنفوذ ریاضی و امور فنی و «تِک‌ـنیکی»[8] آنها دارد. این دو نهاد همچنین از همکاری تعدادی از ناشران مجلات هم بهره می‌برند

1. Kluwer 2. preservation 3. operational
4. authentication 5. integrity
6. Project Euclid (http://projecteuclid.org/)
7. Andrew W. Mellon 8. TEXnical


journals | search | login | about Euclid | for publishers | help

Project Euclid

A partnership of independent publishers of mathematics and statistics journals.

- Due to network maintenance at Cornell University, Project Euclid may be unavailable at times between 3:00 - 8:00 AM EDT (07:00 - 12:00 UTC) on Sunday, 13 April 2003.
- Nineteen partner journals are now part of Project Euclid. See a complete list.
- Journals joining Project Euclid in 2003:
  - Abstract and Applied Analysis
  - Bulletin of Symbolic Logic
  - Bulletin of the Belgian Mathematical Society
  - Journal of Applied Mathematics
  - Journal of Symbolic Logic
  - Kodai Mathematical Journal
  - Review of Modern Logic
  - Revista Matemática Iberoamericana
  - others to be announced
- 2003 access terms and subscription information is available here.
- Announcing the Project Euclid Governing Board.
- Journals interested in joining Project Euclid, please contact us at EUCLID-L@cornell.edu

CORNELL University Library

SPARC Scientific Communities

و تأیید SPARC[1] را نیز به همراه دارند.

طراحی پروژهٔ اقلیدس به نحوی است که بیشترین انعطاف را برای مجلات تحت پوشش خود تأمین کند، از هزینهٔ اشتراک و نحوهٔ مدیریت آن گرفته تا صورت ظاهری مجله و تصمیم‌گیری در مورد قالب فایلها، به طوری که هویت مستقل مجلات محفوظ بماند. تنها امر غیرقابل مناقشه، یکنواختی قالب شناسنامه است که برای کارآمدی مشترک سامانه، مثلاً جستجوی بین مجله‌ای، لازم است. در این مورد، پروژهٔ اقلیدس از استانداردهای OAI استفاده می‌کند.

پروژهٔ اقلیدس مدلهای اقتصادی متنوعی طراحی کرده است تا نیازهای کاربران، نویسندگان، ویراستاران، ناشران و کتابخانه‌های مشترک خود را به صورت متعادلی تأمین کند.

یکی از این مدلها مدل «پرداخت در برابر خدمات» است. این ساده‌ترین مدل موجود است که هر ناشر در برابر خدمتی که از سوی پروژهٔ اقلیدس ارائه می‌شود هزینهٔ مربوطه را پرداخت می‌کند و تمام مراحل اشتراک و برنامه‌ریزی امور مربوطه به مجلهٔ خود را در اختیار دارد. مدل دیگر، «مدل گردایه»[2] است که در آن مجلات عضو به صورت دسته‌ای و با هم برای اشتراک عرضه می‌شوند. این یک نوع نشر همکارانه است که هم از نظر جذب مشتری برای ناشران مفید است و هم از نظر تخفیفهای ویژه برای مشترکان (کتابخانه‌ها یا کاربران). پروژهٔ اقلیدس مدلی ترکیبی هم دارد که عناصری از هر یک از دو مدل مذکور را شامل است و مجلات عضو این مدل می‌توانند در دستهٔ «افزوده[3]» به مشترکان عرضه شوند. جزئیات هر کدام از این مدلها در پایگاه پروژه اقلیدس موجود است.

پروژهٔ اقلیدس از سه واحد اصلی تشکیل شده است. واحد اول یک کارگزار پیش‌چاپ است که به صورت مستقل ولی در عین حال مرتبط با واحدهای دیگر عمل می‌کند. هر نویسنده‌ای می‌تواند مقالهٔ خود را در این واحد قرار دهد ولی این تعهدی برای او ایجاد نمی‌کند، گرچه در صورت تمایل می‌تواند مقالهٔ خود را مستقیماً به مجلات عضو پروژه برای داوری ارائه[4] کند. واحد دوم برای ویراستاران و داوران طراحی شده است و امکانات لازم را برای مراحل ویراستاری الکترونیکی فراهم می‌کند. ویراستار مجله، مقالهٔ ارائه شده را در بخش داور موردنظرش قرار می‌دهد و او را از طریق e-نامه از مقالهٔ جدید مطلع می‌کند. داور نظراتش را به‌طور محرمانه اعلام می‌کند. تمام این عملیات در محیطی محافظت‌شده توسط گذرواژه[5] شخصی انجام می‌گیرد. در پایان مراحل ویراستاری، ویراستار می‌تواند نگارش نهایی مقاله را در واحد سوم بارگذاری[1] کند، که در واقع وبگاه مجله است و توسط پروژهٔ اقلیدس تأمین می‌شود. مجلات در عین استقلال هویتی از خدمات پروژهٔ اقلیدس بهره‌مند می‌شوند، مثلاً در معرض دید بیشتری قرار می‌گیرند و امکانات کاربری بیشتری در اختیارشان قرار می‌گیرد، مانند جستجوی کلید واژه‌ها یا کل متن (در یک مجلهٔ به‌خصوص، یا در تمام آنها، یا در مجلات منتخب کاربر، یا در کل وبگاه پروژهٔ اقلیدس ازجمله e-چاپ‌ها)، سرویس خبردهی e-نامه‌ای، یا خدمات چندرسانه‌ای[2] یا دوسویه[3].

تاکنون چندین مجلهٔ معتبر زیرپوشش پروژهٔ اقلیدس قرار گرفته‌اند، مانند *Annals of Mathematics* و *Experimental Mathematics* (رایگان)، مجلات ریاضی دوک و میشیگان (تا مدتی رایگان)، و مجلات دیگری که به مشترکان نسخهٔ کاغذی به‌صورت رایگان عرضه می‌شوند (مثل *Journal of Applied Probability*)، یا مجلاتی که با اندکی پرداخت اضافه در اختیار مشترکان نسخهٔ کاغذی قرار می‌گیرند (مثل *Rocky Mountain Journal of Mathematics*).

پروژه‌هایی مانند اقلیدس در راهی گام نهاده‌اند که آینده‌ای نامشخص دارد، ازجمله بازاریابی و رقابت با ناشران تجاری برای یک کتابخانهٔ دانشگاهی تجربه‌ای جدید خواهد بود. تحولات چند سال آینده می‌تواند در پیروزی یا شکست این پروژه بسیار تعیین‌کننده باشد.

آیا انقلاب الکترونیکی در نشر، روشهای داوری مقالات را نیز تغییر خواهد داد؟ به دلیل دستاوردهای نشر الکترونیک و تحولات بازار نشر، نیاز به تغییراتی در نحوهٔ داوری مقالات احساس می‌شود و این مسأله به یکی از بحثهای اساسی روز تبدیل شده است. مدلهای گوناگونی برای چگونگی این کار پیشنهاد شده است ([G] و مراجع آن را ببینید). خود گینزپارگ، مؤسس arXiv، با توجه به نیازهای مختلف خوانندگان مقالات (یکی دسترسی سریع به نتایج دیگران

1. Scholarly Publishing & Academic Resources Coalition (وابسته به انجمن کتابخانه‌های پژوهشی)

2. aggregation 3. add-on 4. submit 5. password

1. upload 2. multimedia 3. interactive

و دیگری تأیید صحت آنها) مدلی دولایه پیشنهاد می‌کند. لایهٔ اول تنها یک سامانهٔ توزیع سریع (مانند arXiv) است که پذیرش مقاله در آن با کمترین محکها (مثلاً با تحقیق نشانی e-نامه، نام مؤسسهٔ مربوطه و مانند اینها[1]) صورت می‌گیرد و اصولاً به‌صورت ماشینی و خودکار قابل انجام است. هدف اصلی این لایه تسهیل ارتباط در جامعهٔ پژوهشی و تهیهٔ مخزنی از مقالات «قابل داوری» بدون نوفهٔ[2] زیاده از حد است. در عین حال این لایه می‌تواند نظرات محرمانهٔ خوانندگان را در بارهٔ مقالات جمع‌آوری کند و در اختیار داوران قرار دهد؛ این ارزیابیِ عقل جمعی از مقالاتْ کار ذی‌قیمتی است که از دوباره‌کاریِ داوران نیز جلوگیری می‌کند ولی در روش فعلی انجام نمی‌شود.

در لایهٔ فوقانی ــ که لایهٔ داوری است ــ تعداد اندکی از مقالات لایهٔ اول برای نقد[3] برگزیده می‌شوند. ملاکهای این انتخاب می‌تواند به عوامل مختلفی بستگی داشته باشد، ازجمله پیشنهاد یا امتیازدهی خوانندگان، میزان ارجاعات به مقاله یا انتخاب ویراستاران. هدف در این مرحله افزایش کارایی داوری با تمرکز روی تعداد کمتری از مقالات است که در عین حال احتمال پذیرش بیشتری دارند و در درازمدت مفیدتر واقع می‌شوند، لذا ارزش «پرداختن» داوران و ویراستاران را دارند. در عین حال، مقالات از لایهٔ اول حذف نمی‌شوند؛ به این ترتیب مقالاتی که در ابتدا مورد توجه قرار نمی‌گیرند ولی بعداً به ارزششان پی برده می‌شود در این مدل کمتر از روش فعلی مورد بی‌مهری قرار می‌گیرند.

«پرداختن به مقاله» می‌تواند طیف وسیعی از کارها را شامل شود، از داوری سطحی گرفته تا حاشیه‌نویسی تخصصی و اظهارنظر حرفه‌ای با ذکر نام؛ این روش اخیر، مدل پیشنهادی [Kg] به‌نام مدل «مجلهٔ باز» است که مانند روش نقد مقالات در *Mathematical Reviews* و تعمیمی از آن است (نه روش معمول در داوری مجلات که در آن نظرات و نام داور مخفی می‌ماند). همچنین «پرداختن به مقاله» می‌تواند شامل الصاق توضیحاتی در بارهٔ محتوای مقاله، اهمیت آن، راهنمایی در بارهٔ متون مربوط، تاریخچهٔ سیر موضوع (چه تلاشهای گذشتگان و چه دستاوردهای آیندگان) و ارجاعات باشد ــ این امر می‌تواند در زمان نقد تثبیت شود یا به‌طور مداوم به روز شود. در عین حال سامانهٔ مزبور در مقابل مدلهای مالی مختلف انعطاف‌پذیر است. در هر صورت اظهارنظر در بارهٔ چنین مدلهای داوری نیاز به محک تجربه دارد.

■ مسائل نشر الکترونیک

مدلِ نویسنده-داور-خواننده برای نشر الکترونیکیِ مجلات ریاضی به صورت رایگان، بسیار جذاب است. مسلماً این مدل در کاهش هزینه‌های چاپ کاغذی، ارسال، و دیگر موارد فنی چاپ بسیار مؤثر است، ازکارهای تکراری جلوگیری می‌کند و از انحصار ناشران تجاری می‌کاهد، اما حقیقت این است که این روش تا حدودی متکی بر مشارکتهای داوطلبانه افراد است و بنابراین نمی‌تواند نهادینه شود، مگر اینکه سازوکارهای دیگری اندیشیده شود. در ضمن، هزینه‌ها به‌طور کامل حذف نمی‌شوند، بلکه به نوع دیگری تبدیل می‌شوند: هزینه‌های سخت‌افزاری رسانه‌های اینترنتی، هزینه‌های نرم‌افزاری برای پردازش مقالات، هزینه‌های نگهداری و ارتقاء، هزینه‌های نیروی انسانی متخصص و انواع مخارج مرتبط دیگر به اندازهٔ کافی قابل توجه هستند. در حال حاضر اکثر مجلات الکترونیکِ رایگان با تکیه بر منابع دانشکده‌ها و نیروی انسانیِ داوطلبانه به حیات خود ادامه می‌دهند، اما در مقیاس وسیعتر یا در درازمدت دیگر نمی‌توانند متکی به فرد باشند و نیاز به پشتوانه‌ای نهادین دارند.[1] پیشنهادهایی برای تأمین امنیت سازمانی و اقتصادی این ناشرین ارائه شده است. یکی تشکیل «کنسرسیوم»ی از انجمنهای حرفه‌ای علمی است تا این فعالیتها را پشتیبان باشد. این پیشنهاد به طور خاص در مورد arXiv مطرح شده است. البته arXiv که به‌تازگی تحت پوشش دانشگاه کُرنل قرارگرفته است از لحاظ سازمان‌یافتگی و تأمین مالی وضع مساعدتری نسبت به سایر نشریات الکترونیک پیدا کرده است، ولی با وجود این، احتیاج به روشی جامعتر احساس می‌شود. راهی که arXiv در پیش گرفته است، یعنی کسب پشتیبانیِ یک کتابخانهٔ حرفه‌ای و مجهز با کارکنانی مجرب و متخصص، خود روشی کاملاً قابل توجه است. در هر حال سؤالاتی مطرح است که پاسخ به آنها نیازمند زمان است. هزینه‌های چنین فعالیتی در درازمدت نامعلوم است و در چنین موقعیتی که انواع روشها و مبادلات علمی در حال شکل‌گیری و آزمایش است، گزینش انحصاری یک روش و حذف روشهای دیگر یک ریسک جبران‌ناپذیر به حساب می‌آید و بهتر است منتظر ماند تا برتریهای روشهای مختلف در عمل معلوم شود. در هر حال پشتیبانیِ کتابخانه‌ای مزیتی بر پشتیبانیِ انجمنی دارد و آن هماهنگی امور مختلف (ویرایشی، اداری، فنی و تجهیزاتی) و خدمت‌رسانی به کاربران است که کتابخانه‌های دانشگاهی در آن تجارب ذی‌قیمتی دارند، در حالی که این امر برای انجمنهای علمی ممکن است به کابوسی بدل شود.

از دیگر مواردی که به موضوع دو۴ مربوط می‌شود، مسألهٔ (فنی) بایگانی درازمدت (فایلِ) مقالات است. مقالات ریاضی معمولاً در یکی از «گویش»[2]های TEX نوشته می‌شوند، و ناشران الکترونیکی آنها را در همان قالب متنی و/یا در قالبهای دیگری که از فایل TEX به‌راحتی به‌دست می‌آیند، مانند dvi، ps یا pdf عرضه می‌کنند. مسألهٔ درازمدت، ظهور فن‌آوری‌ها، قالبها و پروتکل‌های جدید یا سیستمهای عامل ناسازگار و در نتیجه لزوم تبدیل قالبها و بازیابی فایلهاست. به نظر می‌رسد که این مسأله با ارتقاء برنامه‌ها به سادگی قابل حل باشد، اما دست‌اندرکاران امور رایانه‌ای و برنامه‌نویسی با ناسازگاریها و دردسرهای تبادل فایلها بین سیستمهای عامل متداول آشنایند ــ دردسرهایی که حتی برای

1. career review 2. noise 3. peer review

۱. مورد قابل ذکر، Geometry Center در دانشگاه مینه‌سوتاست که پس از رفتن ترستن از این دانشگاه به پایگاه مرده‌ای تبدیل شده است و فقط به نگهداری یک کارگزار ناپایدار و کم‌کشش برای پاسخگویی به طالبان نرم‌افزارهایش بسنده کرده است.

2. dialect

فن‌آوری نشر الکترونیک

با اینکه وِب در اصل به منظور تسهیل ارتباط دانشمندان ایجاد شد اما هنوز هم نگارش ریاضی، زبان علم، در وب با مشکلات زیادی روبه‌رو است. هنوز هم بهترین راه تبادل متون ریاضی، مبادلهٔ فایلها با قالبهای سنتی TEX، dvi، ps یا pdf است و در این روش وِب تنها نقش یک واسطه را ایفا می‌کند، نه یک رسانه. فایلها پس از انتقال باید توسط یک برنامهٔ کمکی خوانده شوند، نه با استفاده از گردشگر وِب. به این ترتیب کارآیی رسانه‌ای وب بدون استفاده باقی می‌ماند: قابلیت جستجو (مطالب مندرج در فایلها قابل شناسایی توسط وِب نیستند و در نتیجه جزئی از شبکه جهانی اینترنت به حساب نمی‌آیند)، پیوند فرامتنی[1] (که امکان تهیهٔ مقالات غیرخطی را فراهم می‌کند)، امکان بریدن و چسباندن[2] مطالب، قابلیتهای دوسویه[3] و چندرسانه‌ای همگی در این میان از دست می‌روند.

کوششهایی در جهت ترجمهٔ فایلهای TEX به زبان رسمی وِب، html[4]، انجام شده است ولی هنوز نتیجهٔ مطلوبی حاصل نشده است. یک راه استفاده از تصاویر برای نمایش عبارات ریاضی در متن html است، ولی این روش هنوز بسیاری از محدودیتهای ذکرشده را به همراه دارد. همچنین برنامه‌هایی با استفاده از Java برای نمایش متون ریاضی وجود دارد که آن هم با مشکلات خاص خود همراه است.

راه دیگر استفاده از صورتهای گسترش‌یافتهٔ زبان html است. یک تلاش در این زمینه، تهیهٔ زبان MathML[5] از سوی W3C[6] است. W3C کنسرسیومی است که استانداردهای وب را طراحی می‌کند و html خود از محصولات آن است. یکی از پروژه‌های در دست انجام W3C، زبان XML[7] است که قالب فراگیر متون و داده‌های ساختاریافتهٔ وب است. یکی از کاربردهای خانوادهٔ XML، MathML است که توسط گروه کاری ریاضی W3C برای توصیف ریاضی در وِب طراحی می‌شود.

MathML برخلاف TEX زبانی بسیار مطول است و قابل نگارش دستی نیست، بنابراین یا باید از نگارندهٔ مخصوصی برای تولید MathML استفاده کرد یا از برنامه‌ای برای تبدیل TEXبه MathML. چندین برنامه برای نگارش یا تبدیل به MathML وجود دارد، ازجمله

- TTM (TEX to MathML)
  `http://hutchinson.belmont.ma.us/tth/mml/`
- TechExplorer (IBM محصول)
  `http://www.ibm.com/software/network/techexplorer/`

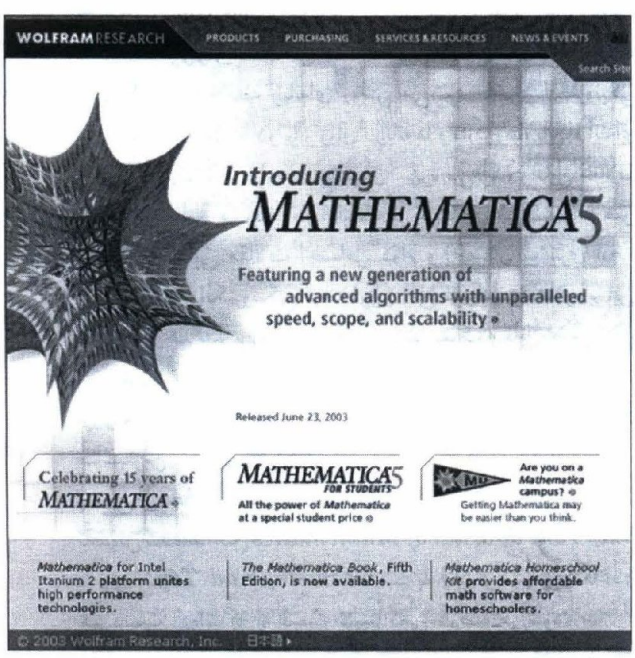
همچنین نگارش جدید Mathematica به طورکامل از MathML پشتیبانی می‌کند و با Java نیز تلفیق شده است. این نگارش Mathematica قابلیت تبدیل عبارات ریاضی به MathML را دارد، حتی به سادگیِ بریدن و چسباندن فرمول در محیط دیگر. Mathematica پایگاهی برای اطلاع‌رسانیِ به‌روز در بارهٔ MathML تأسیس کرده است: `http://www.mathmlcentral.com/`.

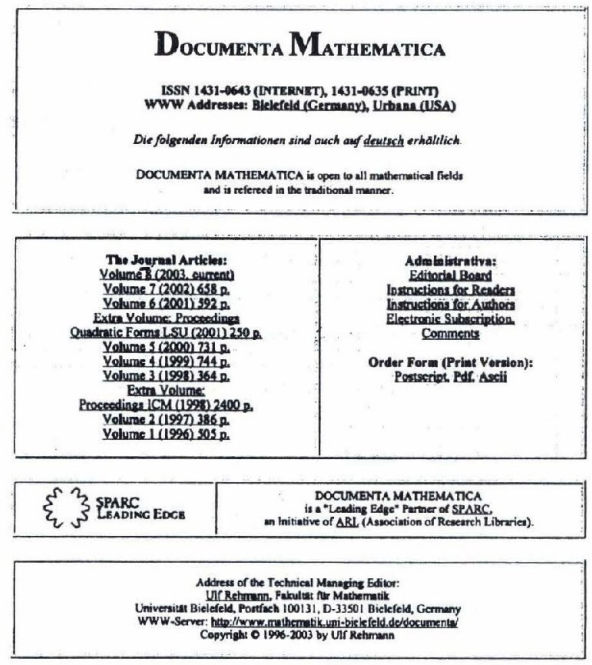
1. hypertext linking 2. cut and paste 3. interactive
4. Hypertext Markup Language (or: Meta-Language)
5. Mathematical Markup Language
6. World Wide Web Consortium (`www.W3C.org`)
7. Extensible Markup Language

با این همه MathML هنوز با اقبال مواجه نشده است، زیرا هنوز در مرورگرهای متداول وِب (ازجمله Internet Explorer، Netscape و نسل جدید آن Mozilla) قابل استفاده نیست. در واقع حتی استفاده از قلم[1]های غیرلاتین استاندارد (مانند قلمهای Unicode) در برخی پلاتفرم‌ها (مثل Macintosh یا ایستگاههای کار[2] مجهز به X-Windows مانند SUN یا Silicon Graphics) با مشکل مواجه است. در صورت حل این مشکلات و پشتیبانی MathML توسط مرورگرهای جدیدتر و همگانی، استفاده از این زبان می‌تواند به‌سهولت رایج شود.

روش دیگر ــ که به‌خصوص در مورد بایگانی الکترونیکی مقالاتِ قبلاً منتشرشده به کار می‌رود ــ اسکن‌کردن متون چاپی است. یک مشکل در این مورد، اندازهٔ تصاویر اسکن شده است که غالباً بسیار بزرگ هستند و برای مبادله در وِب چندان مناسب نیستند. البته به کمک تکنیکهایی می‌توان از حجم این فایلها کاست، مثلاً آن را در قالب مناسبی درآورد. جدیدترین قالب که از فن‌آوری موجک[3]ها بهره می‌گیرد، DjVu[4] است که در آزمایشگاههای AT&T تهیه شده است.

1. font 2. workstations 3. wavelet
4. `http://www.djvuzone.org/`





DOCUMENTA MATHEMATICA

ISSN 1431-0643 (INTERNET), 1431-0635 (PRINT)
WWW Addresses: Bielefeld (Germany), Urbana (USA)

Die folgenden Informationen sind auch auf deutsch erhältlich.

DOCUMENTA MATHEMATICA is open to all mathematical fields and is refereed in the traditional manner.

The Journal Articles:
Volume 8 (2003, current)
Volume 7 (2002) 658 p.
Volume 6 (2001) 392 p.
Extra Volume: Proceedings
Quadratic Forms LSU (2001) 250 p.
Volume 5 (2000) 731 p.
Volume 4 (1999) 744 p.
Volume 3 (1998) 364 p.
Extra Volume:
Proceedings ICM (1998) 2400 p.
Volume 2 (1997) 386 p.
Volume 1 (1996) 505 p.

Administrativa:
Editorial Board
Instructions for Readers
Instructions for Authors
Electronic Subscription.
Comments

Order Form (Print Version):
Postscript, Pdf, Ascii

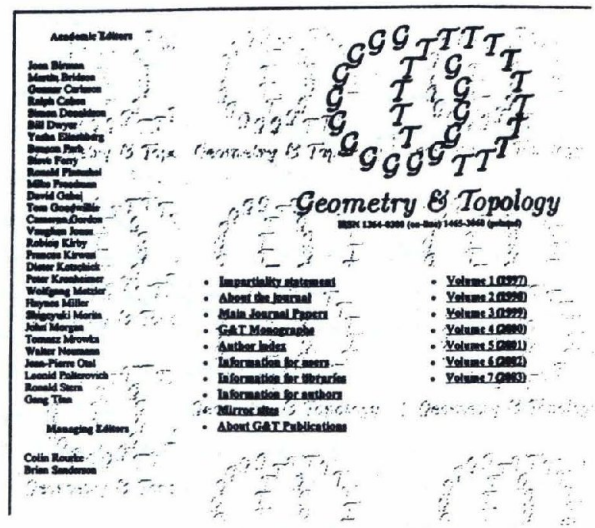
SPARC LEADING EDGE

DOCUMENTA MATHEMATICA
is a "Leading Edge" Partner of SPARC,
an Initiative of ARL (Association of Research Libraries).

Address of the Technical Managing Editor:
Ulf Rehmann, Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld, Postfach 100131, D-33501 Bielefeld, Germany
WWW-Server: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/
Copyright © 1996-2003 by Ulf Rehmann

تبادل فایلهای سادهٔ متنی بین سیستمهای عامل متداولی چون ویندوز[1] و مکینتاش[2] یا یونیکس[3] بروز می‌کند. مثالهای معروفی از اطلاعات مهم وجود دارد که به دلیل تغییرات فن‌آوری‌های بایگانی از دست رفته‌اند، مانند اطلاعات اولین سفر اکتشافی وویجر[4] [Ks]. با توجه به سرعت زیاد پیشرفت فن‌آوری‌های الکترونیک، این مسأله جدی و نگران‌کننده به نظر می‌رسد. در برخی موارد، دسترسی به اطلاعات بایگانی‌شدهٔ الکترونیک فقط به سیستم عامل مشخص، قالب فایل و نرم‌افزار بستگی ندارد، بلکه ممکن است به سخت‌افزار و رایانهٔ خاص هم بستگی داشته باشد. اینجاست که برتری کاغذ بر حافظهٔ رایانه‌ای روشن می‌شود. ناشران الکترونیکی برای حفاظت داده‌ها در برابر زوال[5] رایانه‌ها و کارگزارها، پایگاه آینه‌ای تأسیس می‌کنند، از نوارهای پشتیبان[6] بهره می‌برند، و فایل مقالات را به‌صورت لوح فشرده[7] در کتابخانه‌ها نگهداری می‌کنند، اما هنوز هم نسخهٔ چاپی مقالات احساس دوام و اطمینان بیشتری ایجاد می‌کند. جوهر الکترونیکی گرچه ارزان ولی فرّار است. علاوه بر این، کاغذ هنوز هم بهترین رسانهٔ مطالعه است: سبک و قابل حمل و نقل و تاشدن است، احتیاج به انرژی و وسایل جانبی ندارد و همیشه ارزان و در دسترس است. حتی برای خواندن مقالات الکترونیک هم مناسبترین راه پرینت‌کردن آن است. شاید به همین دلایل است که بعضی از مجلات الکترونیک ــ که از ابتدا به منظور الکترونیکی‌بودن تأسیس شده‌اند، مثل *New York Journal of Mathematics* یا *Geometry and Topology* ــ به انتشار نسخه‌ای کاغذی هم دست زده‌اند که به قیمت نسبتاً کمی عرضه می‌شود.

1. Windows 2. Macintosh 3. Unix 4. Voyager
5. crash 6. backup storage tapes 7. CD-ROM



Geometry & Topology

Academic Editors
Joan Birman
Martin Bridson
Gunnar Carlsson
Ralph Cohen
Simon Donaldson
Bill Dwyer
Yasha Eliashberg
Benson Farb
Steve Ferry
Ronald Fintushel
Mike Freedman
David Gabai
Tom Goodwillie
Cameron Gordon
Vaughan Jones
Robion Kirby
Francis Kirwan
Dieter Kotschick
Peter Kronheimer
Wolfgang Metzler
Haynes Miller
Shigeyuki Morita
John Morgan
Tomasz Mrowka
Walter Neumann
Jean-Pierre Otal
Leonid Polterovich
Ronald Stern
Gang Tian

Managing Editors
Colin Rourke
Brian Sanderson

- Impartiality statement
- About the journal
- Main Journal Papers
- G&T Monographs
- Author index
- Information for users
- Information for libraries
- Information for authors
- Mirror sites
- About G&T Publications

- Volume 1 (1997)
- Volume 2 (1998)
- Volume 3 (1999)
- Volume 4 (2000)
- Volume 5 (2001)
- Volume 6 (2002)
- Volume 7 (2003)

یکی دیگر از مسائل پیش روی نشر الکترونیک ــ که بیشتر به مرحلهٔ چاپ مربوط می‌شود ــ موضوع حقوق معنوی مالک اثر است. اگر مقاله‌ای که در مجله‌ای به چاپ رسیده در صفحهٔ شخصی نویسنده هم به رایگان موجود باشد، آیا دیگر خریداری برای مجله باقی می‌ماند؟ یا مثلاً اگر مجله‌ای الکترونیک مالکیت اثر را از نویسنده بگیرد، آیا انگیزهٔ کافی در نویسندگان برای چاپ اثرشان در آن مجله وجود خواهد داشت؟ برخورد ناشران با این موضوع متفاوت است. مجلهٔ الکترونیک *Documenta Mathematica* (مانند بسیاری از مجلات الکترونیکی دیگر) قراردادی را به این نحو با نویسنده امضا می‌کند که حق نشر اثر را به مجله می‌دهد و در عین حال به نویسنده اجازه می‌دهد که مقالهٔ خود را در جای دیگر هم منتشر کند، با این شرط که چاپ اصل مقاله در *Documenta Mathematica* ذکر شود. AMS به نویسندگان اجازه می‌دهد که حق مالکیت اثر را برای خود محفوظ بدارند. اِلزه‌وی‌یر مالکیت

جوهر الکترونیکی گرچه ارزان ولی فرّار است.

مقالاتی را که در مجلات خود چاپ می‌کند در اختیار می‌گیرد، اما به نویسندگان اجازهٔ قراردادن مقالاتشان را در وب می‌دهد. برخی ناشران دیگر اجازهٔ قراردان مقاله در صفحات شخصی را می‌دهند ولی در کارگزارهای e-چاپ را نه. برخی دیگر اجازهٔ قراردادن پیش‌چاپ را در وب می‌دهند، ولی مقالهٔ نهایی را نه. و البته همان‌طور که اشاره شد برخی حتی قراردادن مقاله در وب را تشویق می‌کنند (مانند مجلات overlay هم‌پیمان با arXiv). به قول ریچارد پَله[1]، فرض کنید مقاله‌ای داوری، تایپ و غلط‌گیری‌شده و آمادهٔ چاپ است و قرارداد حقوق معنوی اثر برای نویسنده فرستاده می‌شود تا امضا

1. Richard Palais

کند. اگر در این مرحله نویسنده از حقوق الکترونیکی خود صرف‌نظر نکند و بخواهد آن را برای خود محفوظ نگه دارد، آیا ناشر از چاپ مقاله‌اش امتناع خواهد کرد؟ ریچارد پَله معتقد است که بسیاری از ناشران تسلیم نویسندگان خواهند شد.

مشخصاً سیستم حقوقی کشورها و نحوهٔ برخورد آنها با مسائل حقوق معنوی بر ناشران تأثیر می‌گذارد، و طبیعتاً نگهبانان گنجینه‌های بزرگ علمی که خود از آن منتفع می‌شوند از بزرگترین مخالفان گردش آزاد مطالب علمی هستند.[1] مجموعه‌ای از چنین تعاملاتی است که نهایتاً صحنهٔ اقتصادی نشر را شکل خواهد داد.

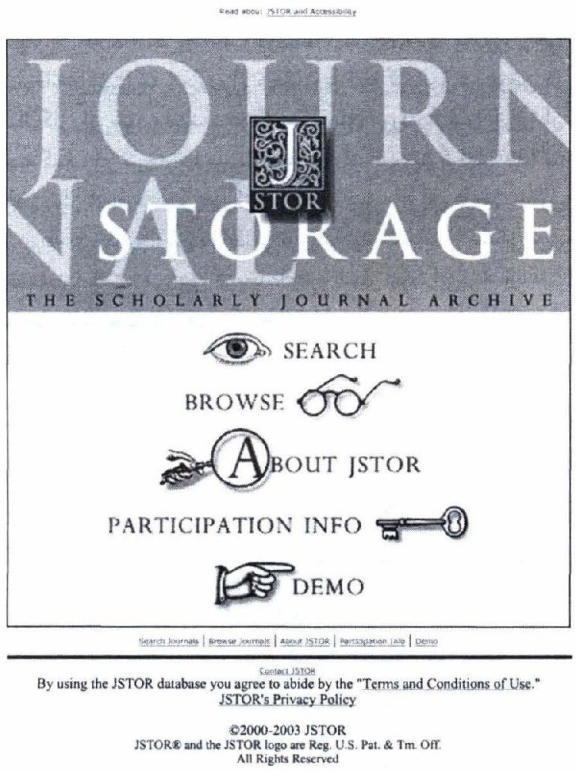
در مورد خاص رشتهٔ ریاضی، مشکلات نشر الکترونیک بیش از آنکه به مسائل علوم پایه شباهت داشته باشد با مشکلات علوم انسانی قرابت دارد. یکی از این تشابهات اقتصاد است، زیرا برخلاف رشته‌هایی مانند مهندسی یا علوم زیستی، تأثیر اقتصادی ریاضیات ناچیز است. مورد دیگر به فرهنگ و جامعه‌شناسی ریاضی برمی‌گردد، که در آن دقت و محتوا بیش از سرعت چاپ اهمیت دارد. الگوی ارتباطی یک جامعه ریشه در فرهنگ آن دارد، بنابراین امور نشر در یک شاخهٔ علمی به نحوی تکامل پیدا می‌کند که پاسخگوی نیازهای آن فرهنگ باشد. چنین فرهنگ تکامل‌یافته‌ای تمایل دارد که الگوهای خود را تحکیم و تثبیت کند و در نتیجه تغییر الگوی نشر در آن شاخه کندتر صورت می‌گیرد و مشکلتر است، حتی اگر دلایل قاطع و منافع الزام‌آوری برای آن وجود داشته باشد. برعکس، به گواهی تجربه تاکنون الگوهایی موفقتر بوده‌اند که الگوهای موجود را همانندسازی کرده‌اند. شاید این دلیلی برای موفقیت arXiv در زمینهٔ فیزیک باشد، زیرا مدت مدیدی است که فیزیکدانان از مبادلهٔ پیش‌چاپ برای پخش نتایج پژوهشی خود استفاده می‌کنند، در حالی که از سوی دیگر، با وجود رشد مناسب arXiv در ریاضی، این کارگزار تنها ۷٪ تولید ریاضی را شامل است.

از دیگر موارد تفاوت فرهنگی، سنت ارجاع به مقالات گذشته است که در ریاضیات اهمیت دارد ــ در برخی شاخه‌های علمی، مقالات چند سال گذشته تنها ارزش تاریخی دارند، اما در ریاضیات نوشته‌هایِ با عمر ده، بیست یا حتی صد سال هنوز در پژوهش مفیدند. به همین دلیل است که کوششهایی برای نشر الکترونیک این آثار انجام‌شده یا در جریان است. یک نمونه پروژهٔ JSTOR[2] است که از سال ۱۹۹۴ به صورت آزمایشی با بودجه‌ای اختصاص‌یافته از طرف مؤسسهٔ اندرو ملون آغاز به کار کرد و از سال بعد به صورت مؤسسه‌ای غیرانتفاعی به ثبت رسید. JSTOR طی توافقهایی با مجلات مختلف (ازجمله برخی مجلات ریاضی، در کنار مجلات علوم انسانی و شاخه‌های دیگر)، تصویر مقاله‌های چاپ‌شدهٔ آنها را بر روی وب قرار می‌دهد. هر مجلهٔ عضو با JSTOR در مورد یک دیوار متحرک[3] به توافق رسیده است: این دیوار تعیین می‌کند که

۱. پیش‌نویس قانونِ آزادی نشر الکترونیکِ مطالبِ دارای کپی رایت در وب که به تازگی در مجلس آلمان مطرح شده است خشم اشپرینگر را برانگیخته است.

2. Journal Storage (http://www.jstor.org/)

3. moving wall



مقالات با چه عمر معینی (مثلاً بیشتر از ۵ سال) می‌توانند در بایگانی JSTOR قرار گیرند. برخی از مجله‌های ریاضی تحت پوشش این پروژه عبارت‌اند از *Annals of Mathematics*، *Journal of AMS* و *American Mathematical Monthly*.

پروژهٔ بلندپروازانه‌تر دیگر در زمینهٔ ثبت الکترونیکیِ متون ریاضی، پروژهٔ «کتابخانهٔ دیجیتال ریاضی»[1] است که هنوز در مراحل مقدماتی قرار دارد. این پروژه ــ که طرح کلی آن در [E] پیش‌بینی شده است و با سازماندهی کتابخانهٔ دانشگاه کُرنل و بودجه‌ای از طرف بنیاد ملی علوم آمریکا (NSF) در آستانهٔ شکل‌گیری است ــ در نظر دارد متون ریاضی بیست قرن گذشته را به صورت الکترونیک ضبط کند. برای تعیین متون قابل قبول، سیاستگذاری و پرداختن به مسائل فنی و حقوقی و غیره در کوتاه‌مدت یا بلندمدت، [E] کمیته‌هایی را با در نظر گرفتن جوانب مختلف پیشنهاد کرده است. برنامهٔ پیشنهادی [E] انعطاف‌پذیر و در عین حال جهت‌دهنده است و محصول آن قابل استفادهٔ انواع ناشران.

■ چشم‌انداز آینده

تاریخ نشان داده است که آینده در قالب پیش‌بینی نمی‌گنجد. آنچه در ادامه می‌آید تنها براوردی از «آیندهٔ نزدیک» با توجه به سیر وقایع تاکنون است. اجازه دهید ابتدا کمی به عقب برگردیم و به وضعیت نشر مجلات در چند سال اخیر نگاهی بیندازیم.

1. http://www.library.cornell.edu/dmlib/

یکی از تبعاتِ افزایش تعداد و قیمت مجلات تخصصی ریاضی، ناتوانی کتابخانه‌ها در پرداخت هزینه‌های اشتراک بود؛ بنابراین برخی کتابخانه‌ها اشتراک شماری از مجلات را قطع کردند و در عوض در قبال کاربران خود متعهد شدند که مقاله‌های مورد نیازشان را برایشان تهیه کنند. در نتیجه خدمات «تهیهٔ مدارک[1]» رونق گرفت. مقالات را می‌توان از خود ناشر یا از کتابخانه‌های هم‌پیمان با پرداخت حقوق مربوطه تهیه کرد و از این لحاظ می‌توان این‌گونه خدمات را مکملی برای خدمات امانت‌دهی بین کتابخانه‌ای به شمار آورد. این‌گونه خدمات توسط مؤسسات چندی به کتابخانه‌ها ارائه می‌شوند، ازجمله توسط انجمن ریاضی آمریکا که سرویس MathDoc را به این منظور راه‌اندازی کرده است و اکنون به‌عنوان سرویسی در MathSciNet حضوری اینترنتی و عمومی یافته است. خدمات «تهیهٔ مدارک» در مجموع از هزینه‌های کتابخانه‌ها می‌کاهند و در عین حال سود کمتری برای ناشران (در مقایسه با اشتراک مجلاتشان) به همراه دارند. از این‌رو خیلی دور از انتظار نیست که با گسترش این خدمات،

- در بین مجلات علمی سنتی فقط مجلات برگزیدهٔ عمومیتر دوام خواهند یافت. مجلات تحقیقی اصلی عملاً به سمت الکترونیکی‌شدن پیش می‌روند و اغلب آنهاکه مجلات بسیار تخصصی با خوانندگان محدودند، فقط به صورت الکترونیکی موجود خواهند بود یا تنها نسخهٔ کاغذیِ مورد تقاضا را منتشر خواهند کرد.[2]

این اتفاق به‌خصوص در مورد رشتهٔ ریاضی که شاخه‌های تخصصی آن بسیار از هم جدا و باریک شده‌اند بسیار بارز خواهد بود.

- بسیاری یا بیشتر مجلاتِ صرفاً الکترونیکیِ رایگان منقرض خواهند شد یا برای تأمین هزینه‌های خود مشترک خواهند پذیرفت.

به بسیاری از مشکلات این‌گونه مجلات قبلاً اشاره کرده‌ایم ــ ناپایداری سازمانی و اتکا به یارانه‌های دانشگاهها و مانند آنها، همیشگی‌نبودن همکاری‌های انگیزه‌مند و داوطلبانه، و چالشهای فنی (امور TEX، بایگانی الکترونیک، ...). برای رفع این مشکلات،

- پروتکل‌هایی برای استانداردکردن ساختار فایلهای الکترونیکی معمول خواهند شد تا دسترسی به مقالات از لحاظ فنی به صورت «جهانی[3]» امکان‌پذیر باشد.

به این ترتیب شبکه‌ای جهانی از متون تحقیقی ریاضی تحقق پیدا خواهد کرد ــ مثلاً پیوند نقدهای یک مقاله (در مجله‌های ناقد) و اصل مقاله به یکدیگر، و پیوند به مقالات مرجع یک نوشته از نظر فنی ممکن خواهد شد. تأکید بر لفظ «فنی» به این خاطر است که ممکن است موانعی از نظر اجازهٔ دسترسی (مثل هزینهٔ اشتراک)

1. Document Delivery 2. paper-on-demand
3. universal

ورود به عصر الکترونیک
انقراض مجلات صرفاً الکترونیکی رایگان
استاندارد‌ها

نشر الکترونیک از زبان آمار

- تعداد مقالات ریاضی منتشرشده در سال ۱۸۷۰ حدود ۸۴۰ عدد و در سال ۱۹۹۴ حدود ۵۰۰۰۰ عدد بوده است. در مجموع حدود یک میلیون و نیم مقالهٔ ریاضی وجود دارد که تقریباً نیمی از آنها در دههٔ اخیر چاپ شده است. [O1]
- برای ذخیرهٔ[1] این ۵۰۰۰۰ مقاله در قالب TEX حدود ۲٫۵GB لازم است (در مورد تمام مقالات موجود در قالب bitmap، این مقدار حدود ۱۰۰۰GB تخمین زده می‌شود). قیمت یک دیسک نوری با ظرفیت ۷GB بین ۲۰۰ تا ۳۰۰ دلار است، در حالی که کتابخانه‌های خوب ریاضی بیش از ۱۰۰۰۰۰ دلار در سال برای اشتراک مجلات هزینه می‌کنند. [O1]
- تعداد سالانهٔ مقالات علمی هر ۱۰ تا ۱۵ سال دوبرابر می‌شود که نمایشگر رشد نمایی ۷٪ در سال است. در مقایسه، سرعت پردازنده‌ها هر ۱۸ ماه دوبرابر می‌شود (رشد نمایی ۶۰٪ در سال). [O1]
- تا پایان سال ۲۰۰۲، بیش از ۱۸۰۰۰۰ مقالهٔ فیزیک، ۲۰۰۰۰ مقالهٔ ریاضی و ۳۰۰۰ مقالهٔ علوم رایانه در arXiv ذخیره شده است. این فقط حدود ۷٪ از مقالات منتشر شده است [KH]. در زمان نگارش این مقاله، بیش از ۲۴۰۰۰ مقالهٔ ریاضی در arXiv وجود دارد. در حال حاضر، تعداد مقالات مورد بررسی MR[2] از مرتبهٔ ۱۰۰۰۰۰ است که حدود ۵۵۰۰۰ تا از آنها برای نقد گزینش می‌شوند. [G]
- طبق آمار MR، در سال ۱۹۹۹، ۵۴۴ عنوان مجلهٔ کاغذی ریاضی وجود داشته است. تعداد مجلات الکترونیکی تخصصی ریاضی ۳۵ عدد است. [KH]
- در سال ۱۹۹۸ قیمت مجلات ریاضی از ۳٫۹۰ دلار در صفحه تا ۰٫۰۸ دلار در صفحه متغیر بوده است. یک معیار دقیقتر، قیمت برحسب حرف[3] است؛ قیمت مجلات از بیش از ۴٫۷۰ دلار در ۱۰۰۰۰ حرف تا ۰٫۲۰ دلار در ۱۰۰۰۰۰ حرف در نوسان است. [Kr]
- تخمین زده می‌شود که تعداد مقالات STM[4] (علمی، فنی، پزشکی) منتشرشده در سال از مرتبهٔ ۲ـ۱٫۵ میلیون عدد است و درآمدی بیش از ۸ میلیارد دلار در سال برای ناشرانشان به همراه دارد. متوسط درآمد سرانه در هر مقاله براساس آمار غیررسمی بین حدود ۱۰۰۰ تا بیش از ۱۰۰۰۰ دلار در مقاله متغیر است. در یک سامانهٔ توزیع صِرف الکترونیکی (یعنی بدون لحاظ‌کردن داوری و ویرایش) مانند arXiv، هزینه‌ها کمتر از ۱۰ دلار در مقاله است، یعنی کمتر از یک درصد هزینهٔ ناشران غیرانتفاعی. در عین حال، هزینه‌های ویراستاری MR برای هر مقاله تقریباً ۱۴۰ دلار است. [G]
- در سال ۲۰۰۲ بیش از بیست میلیون بارگیری[5] کامل مقالات از arXiv صورت گرفته است. به این ترتیب هر مقاله به طور متوسط ۳۰۰ بار در فاصلهٔ زمانی ۲۰۰۲ـ۱۹۹۶ بارگیری شده است. میزان بارگیری برخی مقاله‌ها به ده‌ها هزار بار می‌رسد. [G]

1. storage 2. Mathematical Reviews
3. character 4. Scientific, Technical, Medical
5. download

موجود باشد. نیز منظور از دسترسی، قابلیتِ خوانده‌شدنِ برخط و بارگیری[1] و پرینت‌کردن آن در قالبهای متعارف روز است.

طرح تشکیل یک شبکهٔ جهانی به هم مرتبط و چند لایه از متون توصیفی ریاضی دستمایهٔ پیشنهاد پروژهٔ Math Survey (mathsurvey.org) قرار گرفته است. همچنین با توجه به سیر تکامل الکترونیکیِ *Mathematical Reviews* ــ که با گذر از *MathSciDisk* و شبکه‌های محلی دانشگاهی به شبکهٔ جهانیِ *MathSciNet* انجامیده است و MathDoc به آن افزوده‌شده است ــ برخی حتی به امید روزی هستند که اصل مقالاتِ بررسی و نقدشده در *MathSciNet* (از لحاظ فنی) در دسترس باشد و به این ترتیب شبکه‌ای جهانی از متون تحقیقی ریاضی به‌وجود آید.

بایگانی، راز بقا

- مجلاتی که تدابیر مقتضی برای بایگانی الکترونیکی مقالات خود (با توجه به تحولات فن‌آوری ضبط الکترونیکی) اتخاذ نکرده باشند احتمالاً منقرض خواهند شد.

- بسیاری از متون تحقیقاتی مهم ریاضی که متعلق به دوران ماقبل اینترنت هستند به صورت الکترونیکی ضبط خواهند شد.

اولین قدمها در این زمینه توسط JSTOR و پروژهٔ Mathematics Digital Library برداشته شده است.

کتابخانه‌ها به‌عنوان ناشر

- کتابخانه‌های فردا با ورود به عرصهٔ نشر الکترونیکی به عنوان رقبایی برای ناشران تجاری مطرح خواهند شد.

این نقش جدید کتابخانه‌ها یک مرحلهٔ تکاملی طبیعی در چرخهٔ زندگیشان به‌عنوان واسطه‌های ارتباطات دانشگاهی به‌شمار می‌آید. البته کتابخانه‌ها در این عرصه با چالشهایی جدی روبه‌رو هستند (مدلهای اقتصادی مناسب، بازاریابی، مدیریت تعاون، امور فنی و عملیاتی، تدوین سیستم انعطاف‌پذیر و در عین حال متعادلی که نیازهای نویسندگان، داوران، ناشران و کاربران را به تناسب تأمین کند)، با این حال به نظر می‌رسد که با توجه به تجارب آکادمیکشان مناسبترین نهاد برای نشر الکترونیک دانش باشند. پروژه‌های Euclid و Muse[2] نطفه‌های این‌گونهٔ جدید از ناشران الکترونیک هستند.

در دوران گذار از عصر نشر کاغذی به نشر الکترونیک، عوامل زیادی در قیمت‌گذاری مجلات الکترونیک در مقایسه با مجلات سنتی دخیل هستند. آنچه برای همهٔ ناشران مشترک است، مخارج امور منشی‌گری و تجهیزات رایانه‌ای است. ناشران سنتی مخارجی مانند هزینه‌های کاغذ، چاپ، توزیع و پست، تایپ، و ویرایش دارند که در مورد ناشران الکترونیک هزینه‌های سخت‌افزار، نرم‌افزار، پشتیبانی سامانه‌های تولید و توزیع، و ویرایش ساختارهای فایلها جای آن را می‌گیرد. در مورد مجلات الکترونیکی مجلل‌تر، تهیهٔ فایلهای تعاملی[3] و پرداختن به امورگرافیکی هم به این فهرست اضافه می‌شود، ولی در مجموع باز هم هزینه‌های یک مجلهٔ الکترونیک در واحد اطلاعات کمتر از هزینه‌های مجلهٔ کاغذی یا دوزیست متناظر خواهد بود. در نتیجه

اقتصاد نشر

- هزینه‌های سرانهٔ کتابخانه‌ها برای متون تحقیقاتی ریاضی در عصر الکترونیک کاهش خواهد یافت. از سوی دیگر، این به معنی کاهش درآمد نشر مجلات ریاضی نیز خواهد بود.

با این حال

نقش نویسندگان

- نهایتاً این نویسندگان هستند که محیط نشر الکترونیک را شکل خواهند داد.

نویسندگان نیروی محرکهٔ نشر هستند و جهتگیری عمومی آنهاست که به رونق یا کسادی کارگروهی از ناشران می‌انجامد. این نویسندگان هستند که با انتخاب ناشر تصمیم می‌گیرند که مایل‌اند چه مبلغی برای دسترسی به اثرشان پرداخته شود، یا اصلاً چیزی پرداخته شود یا نه، یا چقدر تلاش برای بایگانی الکترونیکی مقالاتشان صورت گیرد، یا اینکه چه اندازه به تبلیغات و در معرض دید قرارگرفتن کارشان اهمیت می‌دهند، یا به چه میزان از قابلیتهای وب در عرضهٔ اثرشان استقبال می‌کنند یا به آن نیاز دارند.

سرنوشت نشر الکترونیک در ایران چگونه خواهد بود؟ تاکنون بعضی از نشریات مرکز نشر دانشگاهی، نشر ریاضی و نشر دانش، با انتشار مقاله‌هایی در اطلاع‌رسانی به جامعهٔ علمی ایران در زمینهٔ تأثیر رایانه و اینترنت بر پیشرفت و گسترش علوم پیشرو بوده‌اند (فهرست بعد از مراجع را ببینید). انتظار می‌رود که مرکز نشر دانشگاهی عملاً هم در مورد «نشر الکترونیک» پیشگام باشد و با تقویت سامانهٔ اینترنتی خود برای شروع، مثلاً نسخهٔ الکترونیکی این مقاله و ضمایمِ مرتباً نوشوندهٔ آن را در اینترنت نشر کند.

1. download 2. http://muse.jhu.edu/ 3. interactive

مراجع

[AMS1] American Mathematical Society, *Math on the Web*. http://www.ams.org/mathweb/

[AMS2] American Mathematical Society, *Directory of Mathematics Preprint and e-Print Servers*, http://www.ams.org/global-preprints/

[B] Donald Babbitt, "Mathematics jurnals: past, present and future – a personal view", *Notices of the AMS*, (1) **44** (Jan. 1977) 29-32.

[BCP] "Best current practices: recommendations on electronic information communication", *Notices of the AMS*, (8) **49** (sept. 2002) 922-925. http://www.ceic.math.ca/ceic_docs/best_practices/Best-Practices.pdf

[E] John Ewing, "Twenty centuries of mathematics: digitizing and disseminating the past mathematical literature", *Notices of the AMS*, (7) **49** (Aug. 2002) 771-777.

[EMIS] EMIS [The European Mathematical Society Information Service], "The electronic library of mathematics, mathematical journals", http://www.emis.de/journals/

[G] Paul Ginsparg, "Can peer review be better focused?", http://arxiv.org/blurb/pg02pr.html

[J1] Allyn Jackson, "From preprints to e-prints: the rise of electronic preprint servers in mathematics", *Notices of the AMS*, (1) **49** (Jan. 2002) 23-31.

[J2] Allyn Jackson, "The slow revolution of the free electronic-journal", *Notices of the AMS*, (9) **47** (Oct. 2000) 1053-1059.

[Kg] Greg Kuperberg, "Scholarly mathmatical communication at a crossroads", arXiv: math.HO/0210144 v1, (9 Oct. 2002).

[KH] Zsuzsa Koltay and H. Thomas Hickerson, "Project Euclid and the role of research libraries in scholarly publishing", *Journal of Library Administration*, (1, 2) **35** (2001) 83-98.

[Kr] Robion Kirby, "Comparative prices of math journals", http://www.math.berkeley.edu/~kirby/journals.html (May 27, 1997, Updated Jan. 2000).

[Ks] Steven G. Krantz, "Freeware or vaporware?", *Notices of the AMS*, (11) **47** (Dec. 2000) 1357.

[MML] W3C Math Home, http://www.W3C.org/Math/

[O1] Andrew M. Odlyzko, "Tragic loss or good riddance?, the impending demise of traditional scholarly journals", *Notices of the AMS*, (1) **42** (Jan. 1995) 49-53.

(به ستون روبه‌رو مراجعه شود)

[O2] Andrew Odlyzko, "The economics of electronic journals", (reprint in) *The Journal of Electronic Publishing (JEP)*, (1) **4** (Sept. 1998), http://www.press.umich.edu/jep/04-01/odlyzko.html

[P] Jim Pitman, "The mathematics survey proposal", http://mathsurvey.org/proposal.html

[Y] Ralph Youngen, "Toward a mathematical markup language", *Notices of the AMS*, (9) **44** (Oct. 1977) 1107-1109.

مقالات مربوط به نشر الکترونیک در مجلات مرکز نشر دانشگاهی

- «حروفچینی کامپیوتری متنهای ریاضی»، علی پارسا، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۲ (۱۳۶۸)، صص ۱۱۴ـ۱۱۹.
- «زوال قریب‌الوقوع مجلات تحقیقیِ چاپی: فقدان مصیبت‌بار یا خلاصیِ مسرت‌انگیز؟»، اندرو اُدلیزکو، ترجمهٔ تقی یزدانبخش، نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، (۱۳۷۴)، صص ۳۰ـ۲۵.
- «گزارشی از اتصال ایران به شبکه‌های کامپیوتری جهانی»، ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ، نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۴)، صص ۲۴ـ۲۱.
- «سفری به MathSciNet»، یحیی تابش، نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۲ (۱۳۷۶)، صص ۴۸ـ۴۷.
- «ریاضیات و اینترنت»، پل دیویس، ترجمهٔ میلاد نکویی، نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۲ (۱۳۷۶)، صص ۵۲ـ۴۹.
- «مجسم‌سازی ریاضیات: راهی به‌سوی یک کاوشکدهٔ ریاضی»، ریچارد پَله، ترجمهٔ سیدعلی کتان‌فروش، نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۸)، صص ۱۹ـ۸.
- «تأثیر اینترنت بر ریاضیات»، والتر ویلینجر و ورن پاکسن، ترجمهٔ افرا علیشاهی، نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۸)، صص ۲۹ـ۲۰.
- «فرهنگ‌سازی در سایبراسپیس»، نصرالله پورجوادی، نشر دانش، سال ۱۹، شمارهٔ ۱ (شمارهٔ پیاپی ۱۰۰، بهار ۱۳۸۱)، صص ۴ـ۲.
- «خط فارسی و رایانه»، حسین معصومی‌همدانی، نشر دانش، سال ۱۹، شمارهٔ ۲، (شمارهٔ پیاپی ۱۰۱، تابستان ۱۳۸۱)، صص ۶ـ۲.

* * * * * *

* پدرام صفری، پژوهشگاه دانشهای بنیادی (IPM)

safari@ipm.ir

میراث آبل در هندسهٔ جبری•

فیلیپ گریفیث*

ترجمهٔ حمید هزاری

• مقدمه
• ریشه‌های قضیهٔ آبل
• قضیهٔ آبل و چند پیامد آن
• عکسهای قضیهٔ آبل
• میراث در هندسهٔ جبری ــ دو حدس
ــ بافته‌ها
ــ معادلات دیفرانسیل آبل برای نقاط روی یک رویه
• بازگویی

این مقاله برگرفته از یک سخنرانی است که در بزرگداشت دویستمین سال تولد نیلس هنریک آبل در ماه ژوئن ۲۰۰۲ در اسلو ایراد شد. اهداف این سخنرانی این بود که: اولاً، قضیهٔ آبل در شکل کمابیش اصلی آن بازگو شود. ثانیاً، دو مورد از عکسهای قضیه که کمتر شناخته شده‌اند بررسی گردد و ثالثاً به بیان دو مطلب (از میان چندین مطلب) مهم و جالب از هندسهٔ جبری امروزی بپردازیم که لااقل ریشهٔ بخشی از آنها را می‌توان در کارهای آبل یافت. در بخش بازگویی نیز من این نظر را مطرح می‌کنم که جنبه‌های حسابی قضیهٔ آبل می‌تواند به‌عنوان مبحثی اساسی در قرن ۲۱ مورد توجه قرار گیرد.

منظور از این سخنرانی ارائهٔ یک بحث مستند نیست بلکه می‌خواهم ــ از دیدگاه خودم ــ ماجرای قضیهٔ شگفت‌انگیز آبل و میراث آن در هندسهٔ جبری را حکایت کنم. در سخنرانی دیگری در این کنفرانس که توسط کریستیان هوزل ایراد شد تاریخچه و تحلیلی عالی از کارهای آبل ارائه شد.

متناسب با سبک توصیفی و غیررسمی این مقاله (تنها برهانی که در این مقاله ارائه می‌شود یکی از برهانهایی است که خود آبل برای قضیه‌اش عرضه کرده است) در آخر مقاله چند مرجع عمومی برای راهنمایی معرفی شده و نباید آن را کتابنامه دانست.

۱. ریشه‌های قضیهٔ آبل

در دورهٔ قبل از آبل و در زمان خود او، ریاضیدانان علاقهٔ بسیاری به محاسبه و بررسی انتگرال توابع جبری داشتند، یعنی انتگرالی به‌صورت

$$\int y(x)dx \qquad (۱.۱)$$

که در آن $y(x)$ «تابعی» است که در معادلهٔ

$$f(x,y(x)) = ۰ \qquad (۲.۱)$$

صدق می‌کند، که $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر با ضرایب مختلط است و γ مسیر انتگرالگیری، خمی قطعه قطعه هموار در صفحهٔ x است. به نظر می‌رسد این را می‌دانستند که با انتخاب یک شاخهٔ مناسب از جوابهای معادلهٔ (۲.۱) در امتداد یک مسیر انتگرالگیری که از نقاط شاخه‌ای (ریشه‌های تکراری) نمی‌گذرد، (۱.۱) خوش‌تعریف می‌شود، هر چند که این مطلب مدتها به‌طور رسمی و نمادین بیان نشده بود. به زبان امروزی‌تر فرض کنیم خم جبری $F^۰$ در $\mathbb{C}^۲$ با معادلهٔ زیر داده شده است

$$f(x,y) = ۰$$

فرم دیفرانسیل گویای ω را با تحدید فرم زیر روی $F^۰$

$$\omega = ydx$$

در نظر می‌گیریم که روی F، بستار $F^۰$ در فشرده‌سازی $\mathbb{C}^۲$ به‌وسیلهٔ صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^۲$ یا $\mathbb{P}^۱ \times \mathbb{P}^۱$ تعریف شده است. کمان γ را نیز طوری می‌گیریم ک از نقاط تکینگی F و قطبهای ω نگذرد. در این‌صورت (۱.۱) چنین می‌شود

$$\int_\gamma \omega \qquad (۳.۱)$$

البته در عمل ریاضیدانان آن زمان علاقه‌مند به حالتهای کلیتر

$$\int r(x,y(x))dx \qquad (۴.۱)$$

بودند که $r(x,y)$ تابعی گویا از x و y است و $y(x)$ مانند بالاست. تعریف رسمی و امروزی (۴.۱) مانند (۳.۱) است که در آن به‌جای ω تحدید ۱ـفرم دیفرانسیل گویای $r(x,y)dx$ به روی F را قرار می‌دهیم.

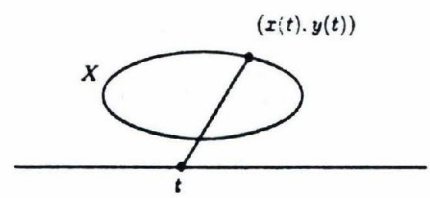
به‌خصوص آنها علاقه‌مند به‌بررسی انتگرالهای ابر بیضوی

$$\int \frac{p(x)dx}{\sqrt{q(x)}} \qquad (۵.۱)$$

به‌ازای چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ بودند که

$$q(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n$$

یک چندجمله‌ای درجهٔ n با ریشه‌های متمایز است. در زمان آبل این را می‌دانستند که در حالتهای $n = 1, 2$ این انتگرالها برحسب توابع مقدماتی (مثلثاتی و لگاریتمی) قابل بیان هستند. دلیل هندسی آن (که آن را هم می‌دانستند) این است که در این حالت خم را می‌توان مانند شکل زیر به‌طور گویا پارامتری کرد.



با جایگذاری توابع گویای $x(t)$ و $y(t)$ در (۵.۱) به انتگرال

$$\int r(t)dt$$

می‌رسیم که $r(t)$ یک تابع گویاست و آن را می‌توان با استفاده از بسط کسری جزئی $r(t)$ محاسبه کرد.

همچنین علاقهٔ خاصی به انتگرالهای ابربیضوی در حالتهای $n = 3, 4$ داشتند، ضمن اینکه اندک مطالب مهمی نیز از طریق کارهای اویلر، لژاندر و سایرین دریافته بودند. دلیل اصلی اینکه آنها به‌سراغ حالت عمومی انتگرالهای بیضوی رفتند این بود که: وقتی در محاسبهٔ طول کمانی بر روی یک دایره، به توابعی مثلثاتی که توسط

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad (۶.۱)$$

مشخص می‌شوند، می‌رسیم، طبعاً این علاقه به‌وجود می‌آید که توابعی را که در محاسبهٔ طول کمان کل بیضی ظاهر می‌شوند بررسی کنیم. پس با جایگذاری

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

طول کمان بیضی

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > 1$$

به انتگرال بیضوی

$$a \int \frac{(1 - k^2x^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad (۷.۱)$$

در شکل لژاندر آن تبدیل می‌شود.

توجه ویژه‌ای نیز به انتگرالهای (۱. ۴) مبذول می‌شد که تصور می‌رفت این ویژگی خیلی خاص را دارند که دارای معادلات تابعی یا قضایای جمعی هستند. برای مثال با اعمال روش ترسیم بدیهی که در هندسهٔ ترکیبی برای دو برابر کردن طول کمان دایره به‌کار می‌رود، در انتگرال (۱. ۶)، می‌توانیم فرمولهای معروف $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بازیابیم. با این روش حتی می‌توان بسط $\sin(\theta + \theta')$ را نیز بازیافت که آن را می‌توان یک قضیهٔ جمعی برای انتگرال (۱. ۶) دانست. در قرن ۱۸ نیزکنت فاگنانوی ایتالیایی با کشف یک روش ترسیم ترکیبی برای دو برابر کردن طول کمانِ روی یک بیضی، و با به‌کارگیری آن در انتگرال (۱. ۷) توانست یک قضیهٔ جمعی برای انتگرال بیضوی (۱. ۷) ارائه کند. همان‌طور که در بالا اشاره شد، تصور بر این بود که این ویژگی، ویژگی خیلی خاصی باشد، و اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ مطالعات متمرکز و گسترده‌ای روی آن انجام شد.

۲. قضیهٔ آبل و چند پیامد آن

در کارهای آبل دربارهٔ انتگرالهای توابع جبری دو مفهوم اصلی وجود دارد:

- مجموعهای آبلی
- وارون‌سازی

این مفاهیم، آبل را به‌شکلهای بسیار عمومی

- معادلات تابعی

برای انتگرالها رساند. حال به تشریح این ایده‌ها می‌پردازیم.

ابتدا توجه خود را به چیزی که اکنون مجموعهای آبلی نامیده می‌شود معطوف می‌کنیم. انتگرالهای (۱. ۱) و خیلی کلیتر، انتگرالهای (۱. ۴) توابعی «قویاً متعالی*» از حد بالای انتگرال هستند و در نتیجه مطالعهٔ مستقیم آنها در حالت کلی بسیار دشوار است. ایدهٔ آبل این بود که مجموع انتگرالهای وابسته به نقاط متغیری را در نظر بگیرد که از نقاط تقاطع $F = \{f(x,y) = 0\}$

* در تعبیر اصطلاح قویاً متعالی باید دقت کرد (به بازگویی (بخش ۵) مراجعه کنید.) آبل بازهم در مقاله‌ای که در سال ۱۸۲۶ منتشر کرد، وجود چند جمله‌ای‌های F و R را به‌طوری که معادلهٔ

$$\int \frac{F dx}{\sqrt{R}} = \ln\left(\frac{P + \sqrt{R}Q}{R - \sqrt{R}Q}\right)$$

دارای جواب برای چندجمله‌ای‌های نسبت به‌هم اول Q و P باشد نشان داد. در اینجا R یک چندجمله‌ای از درجهٔ $2n$ با ریشه‌های متمایز و F یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ است. بنابراین تابع زیر انتگرال یک دیفرانسیل از نوع سوم است. این از موارد «استثنایی» است که انتگرال متعالی است ولی برحسب توابع مقدماتی قابل بیان است.

با خانواده‌ای از خمهای $G_t = \{g(x,y,t) = ۰\}$ (که به‌طور گویا به‌پارامتر t وابسته هستند) به‌دست می‌آیند. بدین‌گونه که اگر

$$F \cap G_t = \sum_i (x_i(t), y_i(t))$$

مجموعهٔ جوابهای

$$\begin{cases} f(x,y) = ۰ \\ g(x,y,t) = ۰ \end{cases}$$

باشد که با استفاده از نماد دورهای جبری به‌صورت مجموع نوشته شده است؛ مجموع آبلی وابسته به (۱. ۴) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

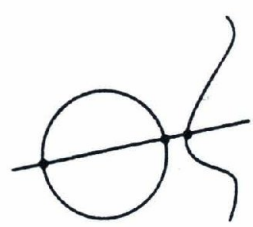
$$u(t) = \sum_i \int_{x_۰}^{x_i(t)} r(x, y(x))dx \qquad (۱.۲)$$

در زیر توضیح می‌دهیم که مفهوم این عبارت چیست. یک مثال مهم وقتی به‌دست می‌آید که G_t یک خانواده از خطها مانند اشکال زیر باشد

(۱) $F = \{x^۲ + y^۲ = ۱\}$



(۲) $F = \{y^۲ = x^۳ + ax + b\}$



در هر دو حالت قرار می‌دهیم $\omega = \frac{dx}{y}$ و در نتیجه انتگرالهای (۱. ۴) به‌ترتیب چنین می‌شوند

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} & (۱) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^۳+ax+b}} & (۲) \end{cases} \qquad (۲.۲)$$

با اینکه عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ مجموع آبلی در حالت کلی توابعی قویاً متعالی هستند اما قضیهٔ آبل مجموع آبلی را به‌صورت یک تابع مقدماتی بیان می‌کند.

قضیه: مجموع آبلی (۱. ۲) به‌صورت

$$u(t) = r(t) + \sum_\lambda a_\lambda \log(t - t_\lambda) \qquad (۳.۲)$$

است که در آن $r(t)$ تابعی گویا از t است.

در زیر یکی از اثباتهای آبل را می‌آوریم

اثبات: برای کوتاهی برهان، تابع گویای

$$q(x,y) = r(x,y)f_y(x,y)$$

را تعریف می‌کنیم. پس تابع زیر انتگرال که در انتگرالهای مجموع آبلی ظاهر می‌شود عبارت است از تحدید فرم

$$\frac{q(x,y)dx}{f_y(x,y)}$$

به‌خم F. حال با یک محاسبه به‌دست می‌آوریم

$$u'(t) = \sum_i \frac{q(x_i(t), y_i(t))x_i'(t)}{f_y(x_i(t), y_i(t))}$$

از طرفی با توجه به روابط

$$\begin{cases} f(x_i(t), y_i(t)) = ۰ \\ g(x_i(t), y_i(t), t) = ۰ \end{cases}$$

داریم

$$x_i'(t) = \left(\frac{g_t f_y}{f_x g_y - f_y g_x}\right)(x_i(t), y_i(t))$$

در نتیجه

$$u'(t) = \sum_i s(x_i(t), y_i(t)) \qquad (۴.۲)$$

که $s(x,y)$ تابعی گویاست که به‌وسیلهٔ

$$s(x,y) = \left(\frac{qg_t}{f_x g_y - f_y g_x}\right)(x,y)$$

مشخص می‌شود. (صفر نبودن تابع گویایی که در مخرج ظاهر می‌شود از این نتیجه می‌شود که خمهای F و G_t مؤلفهٔ مشترکی ندارند.) سپس آبل مشاهده کرد که طرف راست (۲. ۴) تابعی گویا از t است. (از دیدگاه آنالیز مختلط این واضح است زیرا $u'(t)$ یک تابع تک‌مقداری و برخه‌ریخت[1] از t به‌ازای $t \in \mathbb{P}^۱$ است و در نتیجه با انتگرالگیری از بسط کسری جزئی آن، حکم مطلوب حاصل می‌شود.

آبل در «گزارش پاریس» خود و همچنین در نوشته‌های بعدیش، عبارتهایی تقریباً صریح و روشن برای طرف راست (۲. ۴) و در نتیجه برای جملاتی که در فرمول $u(t)$ در قضیهٔ او ظاهر می‌شوند، ارائه کرد. برای مثال وقتی خانوادهٔ G_t از خطوط تشکیل می‌شود فرمول درون‌یابی لاگرانژ عبارتی صریح برای $u'(t)$ به ما می‌دهد

حال کاربردهای قضیهٔ آبل را برای دو انتگرال (۲. ۲) بیان می‌کنیم. هر دوی آنها مبتنی است بر ایدهٔ دوم آبل که در بالا به‌آن اشاره شد، یعنی «وارون‌سازی» انتگرال (۱. ۴)، بدین‌گونه که مختصات $x(u)$ و $y(u)$ را به‌عنوان توابعی تک مقداری از متغیر u روی خم F چنان در نظر می‌گیریم که

$$u = \int_{(x_۰,y_۰)}^{(x(u),y(u))} \omega \qquad (۵.۲)$$

1. meromorphic

که در آن ω تحدید $r(x,y)dx$ به خم F است. مثلاً برای انتگرال (۱) در (۲. ۲) به‌وضوح داریم

$$u=\int_{(0,1)}^{(\sin u,\cos u)}\omega$$

اگر طرف راست (۲. ۳) را با استفاده از فرمول درون‌یابی لاگرانژ محاسبه کنیم به‌رابطهٔ

$$\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{x_1y_2+x_2y_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

می‌رسیم که آن را به‌عنوان فرمول مجموع برای تابع سینوس می‌شناسیم.

قبل از اینکه انتگرال دوم در (۲. ۲) را بررسی کنیم، یادآور می‌شویم که آبل درگزارش پاریس خود اشاره به‌دسته‌ای «شایان توجه» از انتگرالهای آبلی (۱. ۴) می‌کند که امروز به آنها انتگرالهای نوع اول گفته می‌شود، یعنی انتگرالهایی که برای آنها طرف راست (۲. ۳) ثابت باشد (این آشکارا هم‌ارز است با اینکه انتگرال آبلی موضعاً یک تابع کراندار از حد بالای انتگرالگیری باشد). هم‌چنین آبل صریحاً انتگرالهای نوع اول را برای مثالهای متعددی مشخص می‌کند. مثلاً نشان می‌دهد که برای خمهای ابر بیضوی

$$y^2=p(x)$$

که $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n+1$ با ریشه‌های متمایز است، انتگرالهای نوع اول عبارت‌اند از

$$\begin{cases}\omega=\frac{g(x)dx}{y}\\ \deg(g(x))\leqq\left[\frac{n}{2}\right]\end{cases}$$

به‌خصوص با این فرض که x^3+ax+b ریشه‌های متمایز دارد، عبارت (۲) در (۲. ۲) یک انتگرال نوع اول است. حال قضیهٔ آبل را برای خانوادهٔ خطوطی که این خم درجهٔ سوم را قطع می‌کنند می‌توان با رابطهٔ

$$u_1+u_2+u_3=c \qquad (۶.۲)$$

بیان کرد که c یک مقدار ثابت است و

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x(u),y(u))}\frac{dx}{y} \qquad (۷.۲)$$

به‌جای u در (۲. ۷) قرار می‌دهیم u_i که $i=1,2,3$. با مشتق‌گیری از (۲. ۷) داریم

$$1=\frac{x'(u)}{y(u)}$$

و در نتیجه

$$y(u)=x'(u) \qquad (۸.۲)$$

با انتخاب مناسب (x_0,y_0) (مثلاً نقطهٔ عطف $[1,0,0]$ که روی تقاطع F با خط در بینهایت $\mathbb{P}^2$ قرار دارد) داریم

$$\begin{cases}c=0\\ x(-u)=x(u)\end{cases}$$

و (۲. ۶) تبدیل به قضیهٔ جمعی معروف زیر برای انتگرال بیضوی می‌شود

$$x(u_1+u_2)=R(x(u_1),x'(u_1),x(u_2),x'(u_2)) \qquad (۹.۲)$$

که در آن R تابعی گویاست که مختصهٔ x سومین نقطه تلاقی یک خط با F را به‌صورت تابعی گویا از مختصات دو نقطهٔ دیگر بیان می‌کند.

البته $x(u)$ تابع معروف $\wp$ وایرشتراس است و بحث بالا نشان می‌دهد که تابع $\wp$ در معادلهٔ تابعی (۲. ۹) و معادلهٔ دیفرانسیل

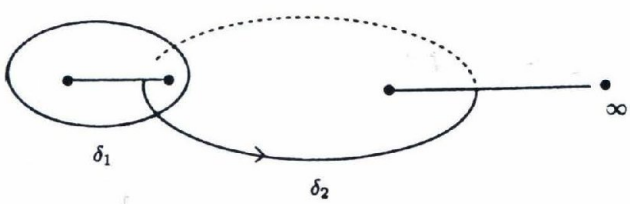
$$x'(u)^2=x(u)^3+ax(u)+b$$

صدق می‌کند. حال با بیان دو نکته، این موضوع را بیشتر تشریح می‌کنیم.

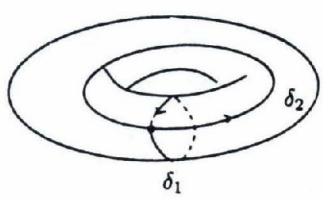
اولی این است که برای تعریف انتگرال

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} \qquad (۱۰.۲)$$

صفحهٔ x به‌همراه نقطهٔ بینهایت را در امتداد برشهایی که دو ریشهٔ x^3+ax+b را به‌هم و ریشهٔ سوم را به $x=\infty$ وصل می‌کنند می‌بُریم.



در این صورت $\sqrt{x^3+ax+b}$ روی این صفحهٔ برش‌خورده تک‌مقداری می‌شود و می‌توان خم جبری F را پوششی ۲ برگی از صفحهٔ x در نظر گرفت که در برشها یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی F رویهٔ ریمانی وابسته به تابع جبری $\sqrt{x^3+ax+b}$ است. تصویر توپولوژیک F همان چنبرهٔ معروف است.



بدین ترتیب انتگرال (۲. ۱۰) به‌صورت انتگرالی در امتداد یک مسیر روی یک رویهٔ ریمانی تعبیر می‌شود و انتخاب مسیر تنها نسبت به ترکیبات خطی δ_1 و δ_2 خوش‌تعریف است. به‌خصوص با توجه به (۲. ۷) به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}x(u+\lambda_i)=x(\lambda_i)\\ y(u+\lambda_i)=y(\lambda_i)\end{cases} \qquad (۱۱.۲)$$

که
$$\lambda_i = \oint_{\delta_i} \frac{dx}{y}$$

دوره‌های تناوب $\frac{dx}{y}$ هستند. حال اگر Λ شبکهٔ تولیدشده توسط λ_1 و λ_2 درصفحهٔ مختلط باشد، پارامتری‌سازی آشنای

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda \to & & F \\ \downarrow & & \cup \\ u & \to & (x(u), x'(u)) \end{array}$$

از خم درجهٔ سوم به‌وسیلهٔ تابع $\wp$ و مشتقش به‌دست می‌آید.

آبل در گزارش پاریس خود در حالت کلی به‌ارائهٔ ویژگیهای تحلیلی اساسی آن دسته از توابع بیضوی می‌پردازد که از وارون‌سازی انتگرالی از نوع اول روی یک خم حاصل می‌شوند.

این را هم یادآور شویم که بعد فضای انتگرالهای از نوع اول یک تعریف از گونای یک خم است (یا گونای حسابی در حالتی که F تکین است.) به‌دنبال کار پیشقدمانهٔ آبل، بسط و توسعهٔ مطلب بالا به گونای دلخواه به‌دست ژاکوبی، ریمان و دیگر ریاضیدانان قرن ۱۹ انجام گرفت.

نکتهٔ دوم این است که توابع $x(u)$ و $y(u)$ راکه در (۲. ۷) ظاهر می‌شوند می‌توان به‌طور موضعی چنان تعریف کرد که در (۲. ۸) صدق کنند و معادلهٔ تابعی (۲. ۹) در جاهایی که تعریف شده است صادق باشد. اما از این معادلهٔ تابعی می‌توان استفاده کرد و $x(u)$ و $y(u)$ را به توابعی برخه‌ریخت و تام گسترش داد، بدین‌صورت که اگر $x(u)$ برای $|u| < \epsilon$ تعریف شده باشد با استفاده از (۲. ۹) می‌توانیم $x(2u)$ و با ادامهٔ این روش، $x(u)$ را به‌ازای $|u| < 2\epsilon$، $|x| < 3\epsilon$، ... تعریف کنیم. این اصل که با به‌کارگیری یک معادلهٔ تابعی بتوان یک شیء موضعی را به یک شیء فراگیر گسترش داد، در حقیقت یک نتیجهٔ اساسی قضیهٔ آبل است، قضیه‌ای که در ادامه بیشتر به آن خواهیم پرداخت.

در خاتمهٔ این بخش به دو پیامد مستقیم قضیهٔ آبل در هندسهٔ جبری اشاره می‌کنیم:

(۱) سرچشمه‌های نظریهٔ هاج؛ (۲) استفاده از تناظرها

(۱): آبل چیزی را که ما امروز فضای دیفرانسیلهای منظم $H^0(\Omega^1_F)$ می‌نامیم از بقیه متمایز کرد و آن‌را به‌عنوان یک ناوردای پایه‌ای یک خم جبری در نظر گرفت. همچنین $h^0(\Omega^1_F) = \dim H^0(\Omega^1_F)$ را برای مثالهای متعددی محاسبه کرد که می‌توان آنها را به‌عنوان اولین مراحل در جهت مرتبط کردن $h^0(\Omega^1_F)$ با گونای حسابی تعبیر کرد. بعدها ریمان تعبیر دیگری از $h^0(\Omega^1_F)$ به‌صورت نصف اولین عدد بتی عرضه کرد (که حقیقتاً باید آن را از سرچشمه‌های نظریهٔ هاج دانست).

(۲): اثباتی را که از قضیهٔ آبل در بالا ارائه شد می‌توان به‌صورت نمودار زیر خلاصه کرد

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \subset F \times \mathbb{P}^1 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ F & & & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

که در آن

$$I = \{(x, y, t) : f(x, y) = g(x, y, t) = 0\}$$

تناظر وقوع است و نگاشت

$$\omega \to d\left(\sum_i \int_{x_0}^{x_i(t)} \omega\right)$$

در اثبات، به‌زبان امروزی همان نگاشت اثر

$$\omega \to (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

است که ۱ـفرمهای گویا روی F را به ۱ـفرمهای روی $\mathbb{P}^1$ می‌برد.

۳. عکسهای قضیهٔ آبل

برای بازگویی شکل فراگیر و متعارف قضیهٔ آبل و عکس آن، در این بخش دو تا از عکسهای این حکم را که کمتر شناخته شده‌اند بیان می‌کنیم. این دو مثالهایی هستند از اصلی که در پیش به آن اشاره شد، یعنی گسترش دادن یک شیء موضعی به یک شیء فراگیر توسط یک معادلهٔ دیفرانسیل.

شکل متعارف قضیهٔ آبل و عکس آن، آنچنان که در مراجع دیده می‌شود، با این پرسش سروکار دارد:

چه‌وقت یک بخشیاب[1]

$$D = \sum_i n_i p_i \qquad (۱.۳)$$

از یک رویهٔ ریمانی X، بخشیاب یک تابع برخه‌ریخت است؟ یعنی چه آزمونی وجود دارد که مشخص کند

$$D = \sum_{p \in X} \nu_p(f) p \qquad (۲.۳)$$

به‌ازای یک تابع $f \in \mathbb{C}(X)^*$؟

جواب بدین‌گونه است: ابتدا باید یادآوری کنیم که برای یک ۱ـفرم منظم $\omega \in H^0(\Omega^1_X)$، یک دورهٔ تناوب عبارت است از انتگرال $\int_\delta \omega$ که $\delta \in H_1(X, \mathbb{Z})$. حال دو شرط برای برقراری (۳. ۲) وجود دارد. اولی این است که درجهٔ بخشیاب D چنین باشد

$$\deg D =: \sum_i n_i = 0 \qquad ((۱)\ ۳.۳)$$

اگر این شرط برقرار باشد می‌توانیم بنویسیم $D = \delta\gamma$ برای یک ۱ـزنجیر γ، و در این صورت شرط دوم این است که برای هر $\omega \in H^0(\Omega^1_X)$،

$$\int_\gamma \omega \equiv 0 \qquad ((۲)\ ۳.۳) \quad \text{(به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب)}$$

لزوم شرط (۳. ۳(۱)) نتیجه‌ای از قضیهٔ مانده است:

$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p\left(\frac{df}{f}\right) = \sum_{p \in X} \nu_p(f) = 0, f \in \mathbb{C}(X)^*$$

اما لزوم (۳. ۳(۲)) اساساً نتیجه‌ای از قضیهٔ آبل است: به‌ازای $t \in \mathbb{P}^1$ قرار می‌دهیم

1. divisor

$$f^{-1}(t) = \sum_t p_i(t) =: D_t$$

حال آرایش نقاط $\sum_i p_i(t)$ با یک پارامتر گویا حرکت می‌کند و $D = D_0 - D_\infty$. چون ω یک دیفرانسیل منظم است پس مجموع آبلی

$$\sum_i \int_{p_i(0)}^{p_i(t)} \omega$$

ثابت است و چون $\int_\gamma \omega$ تنها به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب خوش تعریف است، (۳. ۳(۲)) برقرار است. با روشی دیگر و این بار با استفاده از تناظرها، اگر

$$I \subset X \times \mathbb{P}^r$$

که در آن

$$I = \{(p,t) : f(p) = t\}$$

مانند قبل داریم

$$d\left(\sum_i \int_{p_i(0)}^{p_i(t)} \omega\right) = (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

یک ۱ـفرم منظم روی $\mathbb{P}^1$ است و در نتیجه برابر صفر است.

عکس قضیهٔ آبل در شکل متعارف و فراگیر آن این است که شرایط (۳. ۳(۱)) و (۳. ۳(۲)) برای برقراری (۳. ۲) کافی نیز هستند. این حقیقت را می‌توان بدین‌شکل فرمول‌بندی کرد: نگاشت

$$\mathrm{Div}^0(X) \to J(X)$$

از گروه بخشیابهای درجهٔ صفر به واریتهٔ ژاکوبی

$$J(X) =: H^0(\Omega_X^1)^*/H_1(X,\mathbb{Z})$$

با ضابطهٔ

$$\langle D, \omega\rangle =: \int_\gamma \omega \qquad \text{(به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب)}$$

که در آن $D \in \mathrm{Div}^0(X)$، $\partial\gamma = D$ و $\omega \in H^0(\Omega_X^1)$، باید یک به یک باشد.

اما اولین عکس موضعی قضیه مبتنی بر چیزی است که ما آن را معادلات دیفرانسیل آبل خواهیم خواند، که صرفاً بیانگر شرایطی هستند که آرایشی از نقاط $p_i \in X$ به همراه بردارهای مماس $\tau_i \in T_{p_i}(X)$ باید در فرم بینهایت کوچک

$$\sum \langle \omega(p_i), \tau_i\rangle = 0, \quad \omega \in H^0(\Omega_X^1) \qquad (۴.۳)$$

از قضیهٔ آبل صدق کنند. این را می‌توان بدین‌گونه نیز بازگو کرد: $\sum_i P_i$ را به‌عنوان نقطه‌ای از حاصلضرب متقارن $X^{(d)}$ در نظر می‌گیریم. هر ۱ـفرم منظم ω روی X یک ۱ـفرم $\mathrm{Tr}\,\omega$ روی $X^{(d)}$ القاء می‌کند که با

$$(\mathrm{Tr}\,\omega)(p_1 + \cdots + p_d) = w(p_1) + \cdots + \omega(p_d)$$

مشخص می‌شود. در این صورت (۳. ۴) هم‌ارز است با دستگاه دیفرانسیل

$$\mathrm{Tr}\,\omega = 0, \quad \omega \in H^0(\Omega_X^1) \qquad (۵.۳)$$

روی $X^{(d)}$. از دیدگاه معادلات دیفرانسیل نکتهٔ قابل اشاره این است که خمیده‌های انتگرالی موضعی و ماکسیمال (۳. ۵) مجموعه‌هایی باز در خمینهٔ انتگرالی فراگیر $\mathbb{P}^r \subset X^{(d)}$ هستند. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل (۳. ۵) به‌درستی بیانگر شرط حرکت گویای بینهایت کوچک بخشیابهاست. به‌طور دقیقتر:

> در هر فضای مماس $T_z X^{(d)}$، $z = p_1 + \cdots + p_d$، معادلهٔ (۳. ۵) یک زیرفضای V با ویژگیهای زیر را تعریف می‌کند: (۱) V بر یک خمینهٔ انتگرالی موضعی (۳. ۵) مماس است؛ و (۲) این خمینه‌های انتگرالی موضعی را می‌توان به یک خمینهٔ انتگرالی فراگیر که با $\mathbb{P}^r$ یکریخت است گسترش داد.

ویژگی (۱) خودبه‌خود برقرار نیست، بلکه نیاز به شرط انتگرال‌پذیری سیستم دیفرانسیل خارجی (۳. ۵) دارد که این امر شرایطی را تحمیل می‌کند اضافه بر اینکه در همسایگیهایی که رتبهٔ معادلهٔ (۳. ۵) می‌پرد، داشته باشیم $d(\mathrm{Tr}\,\omega) = 0$. ویژگی (۲) نیز منعکس‌کنندهٔ جنبهٔ معادلهٔ تابعی قضیهٔ آبل است که در بالا ذکر شد.

عکس دوم قضیهٔ آبل برای اولین بار توسط هموطن او یعنی سوفوس لی فرمول‌بندی و اثبات شد. ما این را در یک حالت خاص و براساس شکل زیر بیان می‌کنیم: در صفحه تعدادی کمان تحلیلی F_i داریم و روی هر F_i، یک دیفرانسیل منظم ناصفر ω_i. برای خط L، که در یک همسایگی U از خط L_0 در فضای خطوط واقع در صفحه قرار دارد، نگاشت

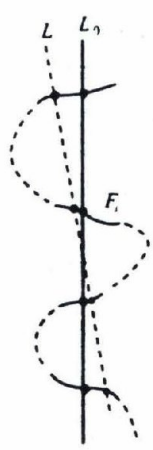
$$L \to F_1 \times \cdots \times F_n \qquad (۶.۳)$$

را با ضابطهٔ

$$L \to (p_1(L), \cdots, p_n(L))$$

تعریف می‌کنیم، که $p_i(L) = L \cdot F_i$. در این شرایط رابطهٔ آبل چنین است

$$\sum_i \omega_i(p_i(L)) = 0 \qquad (۷.۳)$$



یعنی[1] تحت نگاشت (۳. ۶)، پس‌کشی[1] $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ روی $F_1\times\ldots\times F_n$ به U باید صفر باشد. حال نتیجهٔ لی این است:

تحت شرط (۳، ۷)، خم جبری فراگیر F و دیفرانسیل منظم ω روی F موجودند به‌طوری که

$$\begin{cases} F_i \subset F \\ \omega|F_i = \omega_i \end{cases}$$

باز هم می‌بینیم که با استفاده از معادلهٔ تابعی (۳. ۷) مفروضات موضعی (F_i,ω_i) به یک (F,ω) فراگیر گسترش می‌یابند.

۴. چند میراث قضیهٔ آبل

شاید بتوان گفت «میراث» اصلی قضیهٔ آبل، سلسلهٔ پیشرفتهایی است که به درک ما از واریتهٔ پیکار یا گروه رده‌های بخشیاب یک واریتهٔ جبری انجامیده است. این پیشرفتها حاصل کار ریاضیدانان بسیار از آن زمان تا عصر حاضر است. تأثیر آبل را از این حقیقت می‌توان دریافت که مؤلفهٔ همانی واریتهٔ پیکار یک واریتهٔ آبلی است و لااقل در حالت مختلط، توابع روی آن اصطلاحاً توابعی آبلی هستند. اما در اینجا قصد دارم فارغ از نقل این پیشرفتها و جزئیات آن، دو میراث دیگر از قضیه را مختصراً شرح دهم. یکی از آنها مطلب جالب ولی کمتر شناخته‌شده‌ای است به نام بافته‌ها[2]. دیگری نیز براساس کار مشترک و تازهٔ من با مارک گرین است.

۱.۴ بافته‌ها

در اینجا توجه خود را به‌بافته‌های مسطح محدود می‌کنیم. (هرچند این موضوع در هر بعد و «نقص بعد»ی مورد توجه است.) همچنین با اینکه تعریف را می‌توان به‌طور فراگیر و حتی روی خمینه‌ها ارائه کرد، ولی تاکنون بیشتر هندسهٔ موضعی آن موردنظر بوده است و بنابراین ما در یک مجموعهٔ باز $\mathbb{R}^2$ کار می‌کنیم.

تعریف: یک nـبافتهٔ $\mathcal{W}(n)$ با n تا برگ‌بندی که در وضعیت عمومی قرار دارند مشخص می‌شود.



ثابت $= F_i(x,y)$

برگهای بافتهٔ iام از مجموعه‌های تراز یک تابع $F_i(x,y)$ تشکیل شده‌اند. منظور از «وضعیت عمومی» نیز این است که خطوط مماس بر برگهایی که از یک نقطه می‌گذرند متمایزند. گاهی مناسب است که این خطوط مماس را با یک معادلهٔ پفافی[3]

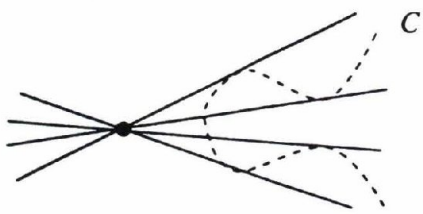
$$\omega_i = 0$$

مشخص کنیم که برای یک تابع ناصفر λ_i، $\omega_i = \lambda_i dF_i$.

1. pullback 2. webs 3. Pfaffian

موضوع هندسهٔ بافته‌ای توسط بلاشکه[1] و همکارانش در هامبورگ در دههٔ ۱۹۲۰ بنیانگذاری شد. مسألهٔ اصلی، پیدا کردن ناورداهای یک بافته بود، به‌خصوص پیدا کردن شرایطی که بافته، خطی شدنی باشد. یعنی بعد از یک وابرریختی[2]، برگهای بافته تبدیل به‌خطوطی در صفحه شوند.

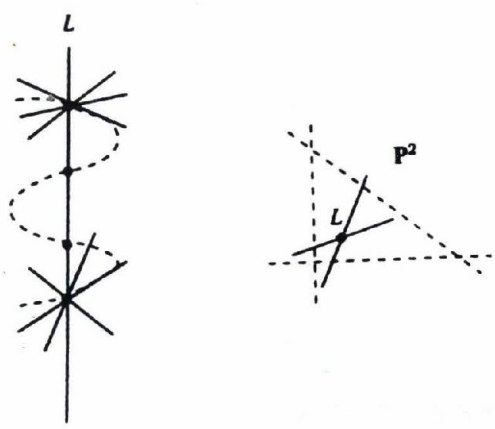
از همان ابتدا معلوم بود که بافته‌ها با هندسهٔ جبری مرتبط‌اند. برای مثال شکلی که در زیر می‌بینید یک بافتهٔ خطی است.



(۱)

در اینجا C یک خم جبری در صفحه است و از یک نقطهٔ عمومی خارج از آن همهٔ مماسهای ممکن بر C رسم شده‌اند. (در اینجا و در ادامه، جهت تصویرنگاری بهتر، همهٔ خطوط مماس را حقیقی در نظر می‌گیریم.) n، درجهٔ بافته نیز همان درجهٔ خم دوگان است که آن را از هندسهٔ جبری می‌شناسیم.

همان‌طور که در شکل (۲) می‌بینیم دوگان تصویری شکل (۱) به یک خم جبری C از درجهٔ n در صفحه یک nـ بافته نسبت می‌دهد که در یک مجموعهٔ باز U از فضای تصویری دوگان قرار دارد (که از خطوط در صفحه تشکیل شده است.)



(۲)

در اینجا هر نقطه از U با خطی چون L در صفحه مشخص می‌شود. خطوطی که از هر یک از n تا نقطهٔ تقاطع C با L می‌گذرند، n دسته خط به ما می‌دهند که با دوگان‌سازی تصویریِ هر یک از این n دسته، یک خط در فضای دوگان به‌دست می‌آید.

منبع دیگری از مثالهای بافته که تنها به آن اشاره می‌کنیم، خمهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$P(x,y,y') = (y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + P_n(x,y) = 0$$

در صفحه است.

حال می‌پردازیم به‌مهمترین ناوردای بافته‌ها که آن نیز توسط مکتب بلاشکه تعریف شده است:

1. Blaschke 2. diffeomorphism

تعریف. یک رابطهٔ آبلی به‌وسیلهٔ

$$\sum_i g_i(F_i)dF_i = ۰ \qquad (۱.۴)$$

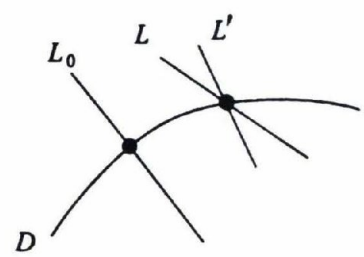
مشخص می‌شود که $g(\xi) = (g_۱(\xi), \cdots, g_n(\xi))$ برداری از توابع یک متغیره است، همچنین اگر $A(\mathcal{W})$ فضای برداری همهٔ تابعهای $g(\xi)$ باشد که در (۴. ۱) صدق می‌کنند، رتبهٔ بافته را چنین تعریف می‌کنیم

$$r(\mathcal{W}) = \dim A(\mathcal{W})$$

به‌عنوان مثالی از یک رابطهٔ آبلی فرض کنیم ω یک دیفرانسیل ناصفر نوع اول باشد. ابتدا انتگرال موضعی

$$I(L) = \int_{L_۰ D}^{L \cdot D} \omega \qquad (۲.۴)$$

را در نظر می‌گیریم. (شکل زیر را ببینید.)



در اینجا توجه ما به یک کمان D روی C و یک همسایگی باز U از یک خط $L_۰$ که کمان D را در یک نقطه قطع می‌کند، معطوف است. به‌وضوح در شکل بالا

$$I(L) = I(L')$$

یعنی $I(L)$ روی دسته‌ای از خطوط که از یک نقطهٔ ثابت روی C می‌گذرد ثابت است. بنابراین مجموعه‌های تراز I خطوطی در U هستند و خمهای انتگرالی دیفرانسیل $dI(L)$ دقیقاً از این خطوط تشکیل شده‌اند. حال با مراجعه به شکل (۲) و انجام این عملیات روی کمانهای حول هر یک از نقاط تقاطع و با استفاده از قضیهٔ آبل می‌بینیم که هر ω یک رابطهٔ آبلی به ما می‌دهد.

مثلاً اگر C ناتکین باشد و قرار دهیم $h^۰(\Omega^۱_C) = \dim H^۰(\Omega^۱_C)$، آنگاه برای بافتهٔ $\mathcal{W}_C$ که در شکل (۲) به C نسبت داده شد، داریم

$$h^۰(\Omega^۱_C) \leqq r(\mathcal{W}_C) \qquad (۳.۴)$$

یک دستاورد مکتب بلاشکه این است که برای هر nـبافته $\mathcal{W}(n)$،

$$r(\mathcal{W}(n)) \leqq \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} \qquad (۴.۴)$$

از طرفی می‌دانیم که برای $\mathcal{W}(n) = \mathcal{W}C$ به‌صورت بالا،

$$h^۰(\Omega^۱_C) = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$$

بنابراین در (۴. ۳) تساوی برقرار می‌شود. در حالت کلی گوییم یک بافتهٔ $\mathcal{W}(n)$ رتبهٔ ماکسیمم دارد اگر در (۴. ۴) تساوی رخ دهد. حال یک مسألهٔ اساسی این است:

(۴. ۵) **مسأله:** همهٔ بافته‌های با رتبهٔ ماکسیمم را بیابید.

قبل از پرداختن به این مسأله، به این نکته به‌عنوان یکی دیگر از روابط هندسهٔ بافته‌ای و هندسهٔ جبری اشاره کنیم که عکس قضیهٔ آبل از سوفولوس لی که در بالا گفته شد نتیجهٔ زیر را در بر دارد:

(۴. ۶) یک بافتهٔ **خطی** با رتبهٔ ناصفر، جبری است.

در اینجا این نکته را باید افزود که رابطهٔ آبلی کامل است یعنی اینکه هر g_i ناصفر است. همچنین منظور از جبری بودن یک بافته این است که این بافته از یک خم جبری با روشی که در شکل (۲) بیان شد، به‌دست آمده است.

نکتهٔ قابل ذکر دیگر این است که گاهی مفید است که یک رابطهٔ آبلی را در شکل «جمع‌شده» آن مانند

$$\sum_i G_i(F_i(x,y)) = \text{ثابت} \qquad (۷.۴)$$

بنویسیم، که $G_i(\xi)$ توابعی از ξ هستند با $G_i'(\xi) = g_i(\xi)$.

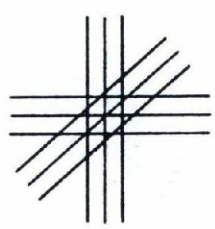
برگردیم به مسألهٔ (۴. ۵)؛ به‌ازای $n = ۳$ داریم

$$r(\mathcal{W}(۳)) \leqq ۱$$

و بلاشکه ثابت کرده است که اگر تساوی برقرار باشد، آنگاه بافتهٔ ما جبری از نوع (۲) فوق خواهد بود. خلاصهٔ آن به این صورت است که اگر شکل جمع‌شدهٔ (۴. ۷) از رابطهٔ آبلی را در نظر بگیریم، می‌توان آن را به‌صورت معادلهٔ تابعی لگاریتم نوشت:

$$\varphi_۱(x) - \varphi_۱(y) + \varphi_۱\left(\frac{y}{x}\right) = ۰ \qquad (۸.۴)$$

و با تقریب یک وابرریختی موضعی، بافتهٔ ما به‌صورت شکل زیر در می‌آید.



(۳)

به‌ازای $n = ۴$ داریم

$$r(\mathcal{W}(۴)) \leqq ۳$$

و باز هم اگر تساوی برقرار باشد بافته جبری خواهد بود. این پدیده را با استفاده از (۴. ۶) این‌گونه می‌توان بیان کرد: پایه‌ای برای روابط آبلی مانند

$$\sum_i g_{ij}(F_j)dF_j = ۰ \quad i = ۱, ۲, ۳ \qquad (۹.۴)$$

در نظر می‌گیریم. حال به ماتریس

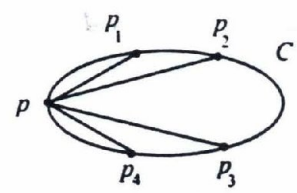
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

توجه می‌کنیم. سطرهای آن تشکیل یک پایه برای روابط آبلی می‌دهند و ستونهای آن یک نگاشت

$$U \to \mathbb{P}^2 \qquad (10.4)$$

به‌دست می‌دهند که با توجه به (۴. ۹)، $\mathcal{W}(3)$ را به یک بافتهٔ خطی در یک مجموعهٔ باز صفحهٔ تصویری می‌نگارد. حال می‌توانیم از (۴. ۶) استفاده کنیم و حکم مطلوب را نتیجه بگیریم.

در حالت $n = 5$، داریم $r(\mathcal{W}(5)) \leqq 6$. در این حالت یک بافتهٔ خطی‌نشدنی (و در نتیجه ناجبری) با رتبهٔ ماکسیمم توسط بُل[1] پیدا شده است که آن را در زیر به‌تصویر می‌کشیم:



(۴)

در اینجا، p_iها نقاط ثابتی در وضعیت عمومی هستند و p نیز یک نقطهٔ متغیر عمومی است. برگهای برگ‌بندی‌ها عبارت‌اند از خطوط $L_i = \overline{pp_i}$ و مقطع مخروطی C که از نقاط $pp_1 \cdots p_5$ می‌گذرد. پنج تا از شش رابطهٔ مستقل آبلی از به‌کار بردن قضیهٔ آبل در شکل (۴) حاصل می‌شوند. شکل جمع‌شدهٔ رابطهٔ ششم را می‌توان به‌وسیلهٔ

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(y) + \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) - \varphi_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \varphi_2\left(\frac{x}{y}\frac{1-y}{1-x}\right) = 0 \qquad (11.4)$$

بیان کرد، که ما آن را به‌عنوان شکل آبلی معادلهٔ تابعی مربوط به دی‌لگاریتم می‌شناسیم، و در اینجاست که بار دیگر آبل وارد داستان ما می‌شود! ولی این بار از دیدگاهی کاملاً متفاوت.

در حالتهای $n = 6, 7, 8$، بافته‌های مسطح استثنایی با رتبهٔ ماکسیمم وجود دارند، یعنی بافته‌هایی با رتبهٔ ماکسیمم که از نوع (۲) نیستند. در ضمن همهٔ آنها براساس دی‌لگاریتم هستند. برای مثال وقتی $n = 6$ دو بافتهٔ استثنایی وجود دارد، یکی از آنها شامل رابطهٔ شش جمله‌ای برای دی‌لگاریتم است و دیگری همان رابطهٔ پنج جمله‌ای (۴. ۱۱). در حالت $n = 9$، هنو[2] نشان داده است که این بار تری‌لگاریتم به عنوان یک رابطهٔ آبلی در یک ۹ـبافته با رتبهٔ ماکسیمم ظاهر می‌شود که ترکیبی از بافتهٔ نوع (۲) با بافتهٔ بل نیست. حال این سؤال بدیهی پیش می‌آید:

سؤال: آیا همهٔ بافته‌های با رتبهٔ ماکسیمم که جبری شدنی نیستند از این نوع هستند؟

ما قصد نداریم این سؤال را دقیقاً صورت‌بندی کنیم. اما مضمون شهودی آن این است که آیا به‌ازای هر k، عدد طبیعی $n(k)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که یک $n(k)$ـبافتهٔ «جدید» با رتبهٔ ماکسیمم وجود داشته باشد به‌طوری که یکی از رابطه‌های آبلی آن یک معادلهٔ تابعی با $n(k)$ جمله به‌ازای kـامین پلی‌لگاریتم $\mathfrak{L}_{ik}$ باشد یا نه؟ در اینجا منظور از «جدید» اشاره به گسترش کلی پدیدهٔ بالاست که برای لگاریتم یعنی $k = 1$، وقتی که $n(1) = 3$، برای بافتهٔ بل وقتی که $k = 2$ و $n(2) = 5$ و برای بافتهٔ هنو وقتی که $k = 3$ و $n(3) = 9$ اتفاق می‌افتد.

۲.۴ معادلهٔ دیفرانسیل آبل برای نقاط روی یک رویه

می‌دانیم که هندسهٔ یک واریتهٔ جبری در آرایش زیرواریته‌های جبری آن منعکس می‌شود. با اقتباس از آبل آموخته‌ایم که زیرواریته‌ها را به‌پیمانهٔ رابطهٔ هم‌ارزی گویا بررسی کنیم، یعنی در یک واریتهٔ جبری مختلط هموار X دو زیر واریتهٔ Z، Z' را به‌طور گویا هم‌ارز می‌گیریم اگر یک خانوادهٔ $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ از زیرواریته‌ها وجود داشته باشد به‌طوری که $Z_0 = Z$ و $Z_\infty = Z'$. و وقتی گروه $Z^p(X)$ از دورهای جبری با نقص بعد p را به‌پیمانه رابطهٔ تولیدشده به‌وسیلهٔ هم‌ارزی گویا در نظر می‌گیریم به گروههای چاو[1] $CH^p(X) = Z^p(X)/Z^p_{\mathrm{rat}}(X)$ می‌رسیم.

وقتی X یک خم جبری است، قضیهٔ آبل و عکس آن یک مجموعهٔ کامل از ناورداهای نظریهٔ هاج برای مؤلفه‌های همانی $CH^1(X)_0$ (که این البته واریتهٔ ژاکوبی است) ارائه می‌کنند. در حالت کلی $CH^1(X)$ واریتهٔ پیکار X است که مؤلفه همانی آن یک واریتهٔ آبلی است، که داستان آن بسیار شبیه حالت خمهای جبری است.

با این حال، در مورد آرایش نقاط روی یک رویهٔ جبری داستان کاملاً متفاوت است. (زیرا بنا بر نتیجه‌ای که مامفرد[2] در دههٔ ۱۹۶۰ به‌دست آورد می‌دانیم که $CH^2(X)$ ممکن است نامتناهی‌بعد باشد.) چند سال پیش، فرمول اسپنسر بلاک[3] برای فضای مماس صوری $T_f CH^2(X)$، این علاقه را در من و مارک گرین به‌وجود آورد که ببینیم چه مضمون هندسی در پس فرمول اسپنسر نهفته است. از اینجا به یک تعریف هندسی برای فضای مماس $TZ^2(X)$ رسیدیم و سپس فضای مماس هندسی را چنین تعریف کردیم

$$T_g CH^2(X) = TZ^2(X)/TZ^2_{\mathrm{rat}}(X) \qquad (12.4)$$

که $TZ^2_{\mathrm{rat}}(X)$ فضای مماس زیرگروه ۰ـدوره‌هایی است که به‌طور گویا با صفر هم‌ارزند و بعد این هم قضیه‌ای است که

$$T_g CH^2(X) \cong T_f CH^2(X) \qquad (13.4)$$

از این پس برای سهولت، هر دوی اینها را با $TCH^2(X)$ نشان می‌دهیم و از این فضای برداری به‌عنوان فضای مماس $CH^2(X)$ یاد خواهیم کرد.

1. Bol 2. Hénaut

1. Chow groups 2. Mumford 3. Spencer Bloch

در (۴. ۱۲) و (۴. ۱۳)، تلویحاً شرایط هندسی بینهایت کوچکی وجود دارد که آرایشی از نقاط را تبدیل به‌اولین مرتبهٔ آن در یک ردهٔ هم‌ارزی گویا می‌کند. یادآور می‌شویم که شرط هم‌ارز گویا بودن یک $\circ$-دور Z روی X این است که

$$Z = \sum_{\nu} (f_\nu)$$

که f_ν یک تابع گویا روی یک خم تحویل‌ناپذیر Y_ν است و (f_ν) بخشیاب آن. حال یک تغییر مرتبهٔ اول در داده‌های (Y_ν, f_ν)، تغییر مرتبهٔ اولی از $\sum_\nu (f_\nu)$ را نتیجه می‌دهد و ما به‌دنبال شرایطی هندسی روی آرایشی از نقاط $p_1 + \cdots + p_d$ (که برای سادگی متمایز فرض شده‌اند) و بردارهای مماس $\tau_i \in T_{p_i} X$ هستیم تا یک تغییر مرتبهٔ اول $\sum_\nu (f_\nu)$ را فراهم سازند.

همان‌طور که دیدیم، برای آرایشهای نقاط روی یک خم جبری، جواب سؤال مشابه توسط معادلهٔ آبل (۵. ۳) داده می‌شود. حال می‌خواهیم به‌شرح جواب این سؤال در حالت رویه‌های جبری بپردازیم. برای این کار ابتدا متذکر می‌شویم که روش آبل برای ساخت تابع اثر را می‌توان به‌هر فرم دیفرانسیل از هر درجه‌ای روی یک واریتهٔ جبری هموار تعمیم داد؛ یعنی فرمول

$$\omega(p_1 + \cdots + p_d) = \omega(p_1) + \cdots + \omega(p_d)$$

یک نگاشت

$$H^\circ(\Omega^q_X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} H^\circ(\Omega^q_{X^{(d)}})$$

را تعریف می‌کند. وقتی $\dim X \geqq 2$، حاصلضربهای متقارن در امتداد قطر تکین هستند و بدین‌ترتیب فرمهای دیفرانسیل منظم به‌عنوان فرمهای گویایی که روی هر تکینگی‌زدایی[1] X منظم باشند، تعریف می‌شود.

حال فرض می‌کنیم τ_i و p_i مانند بالا باشند، و قرار می‌دهیم

$$\tau = \sum_i (p_i, \tau_i) \in TX^{(d)}$$

اولین مجموعه از شرایط به‌طوری که عنصر

$$\tau \in TZ^2_{\mathrm{rat}}(X) \qquad (۱۴.۴)$$

مانند حالت خم باشد این است که برای همهٔ ۱-فرمهای منظم $\varphi \in H^\circ(\Omega^1_X)$،

$$\langle \mathrm{Tr}\varphi, \tau \rangle = \sum \langle \varphi(p_i), \tau_i \rangle = \circ \qquad (۱۵.۴)$$

معادلهٔ (۴. ۱۵) فقط می‌گوید که τ باید در هستهٔ مشتق نگاشت آلبانیزه[2] باشد.

عنصر سازندهٔ جدید از ۲-فرمهای روی X می‌آید. از کارهای مامفرد و بلاخ معلوم شده بود که ۲-فرمها مناسب‌اند؛ در زیر یک شرح هندسی در این باره می‌آوریم. ابتدا به این اشاره کنیم که اگر هر خمینهٔ مختلط n بعدی X، مثلاً یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}^n$، داشته باشیم و اگر خانواده‌ای از فرمهای $\varphi_d \in H^\circ(\Omega^q_{X^{(d)}})$ را که دارای ویژگی موروئی

$$\varphi_{d+1}\Big| X^{(d)} = \varphi_d$$

است در نظر بگیریم که در آن نگاشت شمول $X^{(d)} \to X^{(d+1)}$ با

$$p_1 + \cdots + p_d \longrightarrow p + p_1 + \cdots p_d$$

برای یک نقطهٔ ثابت $p \in X$ داده شده باشد، آنگاه قضیه‌ای هست که می‌گوید:

(۴. ۱۶) فرمهای موروئی به عنوان یک جبر خارجی توسط ۱-فرمهای q-فرمهای روی X که $\circ \leq q \leq n = \dim X$، تولید می‌شوند؛ و تولید همهٔ این فرمها لازم است.

نکتهٔ هندسی این است: X را نطفهٔ[1] یک همسایگی نقطه‌ای از $\mathbb{C}^n$ بگیریم که $X^{(d)}$ هموار است؛ در این‌صورت ۱-فرمها، فرمولهای از هر درجه را تولید می‌کنند و تنها در امتداد قطرهاست (که نشان‌دهندهٔ ساختار بینهایت کوچک X هستند) که به همهٔ فرمها از همهٔ درجات (البته نسبت به $\dim X$) نیاز داریم.

دیگر عنصر سازندهٔ جدید این است که

(۴. ۱۷) میدان تعویف $p_i \in X$ وارد شرط (۴. ۱۴) می‌شود.

در توضیح این مطلب، برای سادگی فرض می‌کنیم که رویهٔ جبری X روی $\mathbb{Q}$ (یا روی یک میدان عددی) تعریف شده است. مثلاً فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^N$ به یک $X^\circ \subset \mathbb{P}^3$ تصویر شده که X° دارای یک معادلهٔ آفین

$$f(x, y, z) = \circ$$

است که در آن $f \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. حال فرض کنیم x و y پارامترهای یکنواخت‌ساز موضعی حول $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ باشند و می‌نویسیم

$$\tau_i = \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial}{\partial y}$$

توجه کنیم که ۲- فرمهای منظم روی X با پس‌کشی

$$\omega = \frac{g(x, y, z) dx \wedge dy}{f_z(x, y, z)}\Big|_{X^\circ} \qquad (۱۸.۴)$$

به روی X حاصل می‌شوند که $\deg g \leq \deg f - 4$ و g روی خم مضاعف X° صفر است. از طرفی چون X روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده می‌توان یک پایه برای $H^\circ(\Omega^2_X)$ به‌وسیلهٔ ۲-فرمهای (۴. ۱۸) یافت که $g \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. این را هم یادآوری می‌کنیم که دیفرانسیلهای کهلر[2]

$$\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$$

عبارت‌اند از فضای برداری مختلط تولیدشده به‌وسیلهٔ عبارات δa، $a \in \mathbb{C}$ به‌پیمانهٔ روابط

$$\begin{cases} \delta(a+b) & = \delta a + \delta b \\ \delta(ab) & = a\delta b + b\delta a \\ \delta a & = \circ \quad \text{برای } a \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. desingularization 2. Albanese

1. germ 2. Kähler

حال تعریف می‌کنیم

$$\langle \omega(p_i), \tau_i \rangle = \frac{g(x_i, y_i, z_i)}{f_z(x_i, y_i, z_i)} (\mu_i \delta y_i - \lambda_i \delta x_i) \in \Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}} \quad (۱۹.۴)$$

و

$$\langle \operatorname{Tr} \omega, \tau \rangle = \sum_i \langle \omega(p_i), \tau_i \rangle \quad (۲۰.۴)$$

در این صورت معادلهٔ دیفرانسیل آبل برای ۲ـفرمها با معادلهٔ $\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$ـ مقداری

$$\operatorname{Tr} \omega = 0 \quad (۲۱.۴)$$

تعریف می‌شود که ω مانند بالاست، و قضیه‌ای هم هست حاکی از اینکه معادلات (۴. ۱۵) و (۴. ۲۱) تغییر گویای بینهایت کوچکی را که در بالا شرح داده شد، تعریف می‌کنند.

(۴. ۲۲) **نتیجه.** اگر $\omega(p_i) \neq 0$ و x_i و y_i عناصر متعالی مستقلی باشند، آنگاه (۴. ۲۰) دارای جواب ناصفر نیست.

به‌عبارت دیگر هر قدر d بزرگ باشد، $z = p_1 + \cdots + p_d$ـدور 0 در ردهٔ هم‌ارزی گویایش «صلب» می‌باشد. (که این شامل تغییرات مجاز $(z + z') - z'$ برای هر $z' \in X^{(d')}$ نیز می‌شود.) این نتیجه علاوه بر اینکه اثباتی برای قضیهٔ مامفرد می‌دهد، معنای نسبتاً دقیقی به‌کاربرد مفهوم «نوعی» می‌دهد که در بحث مامفرد و گسترشهای بعدی آن توسط رویتمن[1]، و وازن[2] و دیگران، آمده است. و در آخر نیز داریم

(۴. ۲۳) **نتیجه.** اگر $x_i, y_i \in \overline{\mathbb{Q}}$، آنگاه (۴. ۲۰) برای هر انتخاب از τ_i ها صفر است.

این یک حالت بینهایت کوچک حدس معروف بیلینسن و بلاک است (که یک حکم وجودی هندسی به‌دست می‌دهد، گرچه تنها برای مرتبهٔ اول). به‌هرحال فهم انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل آبل (۴. ۱۵) و (۴. ۲۱) یک مسألهٔ عمیق و اساسی است.**

حال این پرسش منطقی به‌نظر می‌رسد که چگونه شیء اساساً حسابی $\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$ وارد یک مسألهٔ هندسی محض می‌شود که دربارهٔ مماسهای کمانهایی در فضای 0ـدوره‌های روی یک رویهٔ جبری است. مثال زیر چگونگی این امر را نشان می‌دهد.

مثال از آنجا که این مسألهٔ موضعی است، پس فضای کمانهای $z(t)$ در $Z^2(\mathbb{C})$ را در نظر می‌گیریم که منظور از کمان، یک ترکیب خطی متناهی با ضرایب صحیح از نگاشتهای تحلیلی از tـقرص به‌حاصلضرب متقارن $(\mathbb{C}^2)^{(d)}$ است. سپس می‌توانیم یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی فضای کمانها تعریف کنیم، و فضای مماس، فضای برداری مختلط زیر است

$$TZ^2(\mathbb{C}^2) = \{Z^2(\mathbb{C})^2 \text{ کمانها در}\} / \sim$$

رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ نیز به‌وسیلهٔ ویژگیهای زیر مشخص می‌شود:

(۱) $z_i(t) \sim \widetilde{z}_i(t) \quad i = 1, 2$
$\Rightarrow z_1(t) \pm z_2(t) \sim \widetilde{z}_1(t) \pm \widetilde{z}_2(t)$

(۲) $z(\alpha t) \sim \alpha z(t) \quad \alpha \in \mathbb{Z}$

(۳) $\alpha z(t) \sim \alpha \widetilde{z} \Rightarrow z(t) \sim \widetilde{z}(t) \quad \alpha \in \mathbb{Z}^*$

(۴) و اگر $z(t)$، $\widetilde{z}(t)$ کمانهایی در $\operatorname{Hilb}_0(X)$ با بردارهای مماس برابر در $T\operatorname{Hilb}_0(X)$ باشند، آنگاه $z(t) \sim \overline{z}(t)$.

حال قرار می‌دهیم

$$z_{\alpha\beta}(t) = \operatorname{Var}(x^2 - \alpha y^2, xy - \beta t), \quad \alpha \neq 0$$

و F را گروه آزاد تولید شده به‌وسیلهٔ 0ـدورهای

$$w_{\alpha\beta}(t) = z_{\alpha\beta}(t) - z_{1\beta}(t)$$

می‌گیریم. در این صورت نتیجهٔ زیر را داریم:

(۴. ۲۴) نگاشت

$$F/\sim \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$$

که با

$$w_{\alpha\beta}(t) \to \beta \frac{\delta\alpha}{\alpha}$$

تعریف می‌شود، یک یکریختی خوش‌تعریف است.

به‌عنوان یک نتیجه هندسی نابدیهی می‌بینیم که اگر α ریشه واحد باشد آنگاه

$$z_{\alpha\beta}(t) \sim z_{1\beta}(t)$$

و این بیانگر یک رابطهٔ بسیار جالب و ظریف بین هندسه و حساب در نقص‌بعدهای بالاتر است.

در مجموع می‌توان گفت معادلات دیفرانسیل آبل (۴. ۲۱) برای حرکت گویای آرایشهای نقاط روی یک رویه، دارای خصلتی حسابی‌ـهندسی هستند. (انتگرالگیری از این معادلات چالش بزرگی در پیش می‌نهد. (نگاه کنید به پانوشت (**).)

۵. بازگویی

بحث را با انتگرال (۱. ۱)

$$\int y(x)dx$$

1. Roitman 2. Voisin

** انتگرالگیری از یک معادلهٔ دیفرانسیل به‌معنی پیدا کردن جواب به‌وسیلهٔ یک فرایند تکرار است. از آنجا که $\mathbb{Q}$ مشتق ندارد روشهای حساب و دیفرانسیل عملی نیست. باید مسأله را با وسایل دیگری به مسألهٔ «نموها» تبدیل کنیم، شاید با یک فرایند تکرار که در هر مرحله از «پیچیدگی حسابی» 0ـدور بکاهد، یا با تحلیل معادله‌های دیفرانسیل (۴. ۱۰) و (۴. ۲۰) در کامل‌سازیهای $\mathbb{Q}$ تحت همهٔ ارزه‌ها(valuations).

از یک تابع جبری شروع کردیم. در آنجا دیدیم که در زمان آبل چنین انتگرالهایی به‌عنوان توابعی «قویاً متعالی» از حد بالای انتگرالگیری در نظر گرفته می‌شدند و بینش عمیق آبل در پیدا کردن دستورالعملی بود که با آن بتوان از میان آنها روابط ساده‌ای بیرون کشید. در سالهای اخیر علاقهٔ مجددی به انتگرالهای (۱. ۱) به‌وجود آمده است که دقیقاً به‌خاطر متعالی بودن آنها در حالت کلی است. روابطی از نوع آبلی، چه همهٔ چنین روابطی را تولید کنند و چه نکنند، پیامد آنها یکی از عمیقترین مسائل در هندسهٔ جبری حسابی است. اکنون این را به‌طور خلاصه تشریح می‌کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ جبری

$$f(x, y(x)) = 0$$

که $y(x)$ در آن صدق می‌کند، روی $\mathbb{Q}$ (یا روی یک میدان عددی) تعریف شده باشد، یعنی $f(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y]$. برای $\xi_0, \xi \in \mathbb{Q}$ قرار می‌دهیم

$$u(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} y(x)dx \qquad (1.5)$$

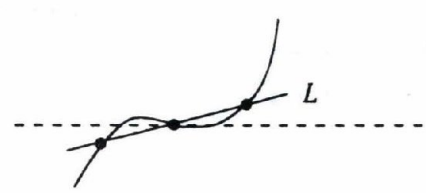
ویژگیهای تعالی اعداد $u(\xi)$ طی سالهای متمادی توسط ریاضیدانان بسیاری همچون انریکو بامبیری[1] مطالعه شده است. بامبیری در سال ۱۹۸۱ توانست نتیجه‌ای را که ابتدا در ۱۹۲۹ زیگل[2] اعلام کرده بود اثبات کند که به‌طور غیررسمی می‌توان آن را چنین بیان کرد:

(۲. ۵) فرض می‌کنیم $u(\xi)$ یک تابع جبری از ξ نباشد و برای سهولت می‌گیریم $\xi_0 = 0$ که به‌عنوان مقداری منظم از $y(x)$ در نظر گرفته شده است، در این صورت برای هر عدد طبیعی l، ثابت $C(l)$ وجود دارد که اگر

$$|\xi| < C(l)$$

آنگاه $u(\xi)$ در هیچ معادلهٔ جبری روی $\mathbb{Q}$ از درجهٔ l صدق نمی‌کند.

این نتیجه همچنین برای انتگرالهای کلیتر (۱. ۴) نیز صادق است، به‌خصوص در مورد انتگرال یک دیفرانسیل نوع اول. فرض کنیم F یک خم درجهٔ سوم و ξ_0 مختصهٔ x یک نقطهٔ عطف باشد، که خط مماس بر نقطهٔ عطف لغزشهای کوچکی دارد:



و با استفاده از قضیهٔ آبل به روابط خطی

$$u(\xi_1) + u(\xi_2) + u(\xi_3) = 0 \qquad (3.5)$$

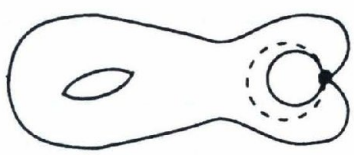
1. Enrico Bombieri 2. Siegel

به‌ازای $|\xi_i|$ به‌اندازهٔ دلخواه کوچک، می‌رسیم. پس اگر به $u(\xi_i)$ها به‌عنوان اعدادی تقریباً متعالی به‌مفهوم (۵. ۲) بنگریم، به‌خاطر دلایل هندسی که از قضیهٔ آبل ناشی می‌شود، آنها باید در معادلات جبری (عملاً معادلاتی خطی) روی $\mathbb{Q}$ صدق کنند.

انتگرالهای به‌شکل

$$\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)} r(x, y(x))dx \qquad (4.5)$$

که $(\xi_0,\eta_0), (\xi,\eta) \in F(\overline{\mathbb{Q}})$، به‌همراه همتاهای تحلیلی آنها در بعدهای بالاتر، توسط کونتسویچ[1] و تساگیر[2] دوره‌های تناوب نامیده شده‌اند. دوره‌ها شامل حالتی که $(\xi,\eta) = (\xi_0,\eta_0)$ نیز می‌شوند؛ یعنی انتگرال در امتداد یک دور بستهٔ $\gamma \in H_1(F,\mathbb{Z})$. در حقیقت با یکی گرفتن (ξ,η) و (ξ_0,η_0) انتگرال (۵. ۴) تبدیل به انتگرالی بر یک دور بسته روی خمی تکین می‌شود.



دوره‌های تناوب یک میدان شمارای $\prod$ تولید می‌کنند که

$$\overline{\mathbb{Q}} \subset \Pi \subset \mathbb{C}$$

کونتسویچ و تساگیر همچنین خاطرنشان می‌کنند که هیچ مثال صریح و شناخته‌شده‌ای از یک عدد متعالی که دورهٔ تناوب نباشد در دست نیست.

اصل کلی این است:

(۵. ۵) روابط Π روی $\overline{\mathbb{Q}}$ باید با شرایطی هندسی تعریف شوند،

یک مثال از این اصل در بالا داده شد. برای مثال دیگر، اگر دیفرانسیلهای از نوع اول $\omega_1, \cdots, \omega_g$ را که روی $\overline{\mathbb{Q}}$ تعریف شده‌اند چنان در نظر بگیریم که یک پایه برای $H^0(\Omega^1_F)$ نیز باشند، همچنین اگر $\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g} \in H_1(F,\mathbb{Z})$ یک پایهٔ متعارف برای اولین هومولوژی انتگرالی باشد، آنگاه دوره‌های

$$\pi_{\alpha j} = \int_{\gamma_j} \omega_\alpha$$

در اولین رابطه‌های دوخطی ریمان صدق می‌کنند:

$$\sum \pi_{\alpha i} Q_{ij} \pi_{\beta j} = 0 \qquad (6.5)$$

که در اینجا $Q = ||Q_{ij}||$ وارون ماتریس تقاطع است. به‌طور هندسی، این رابطه از ردهٔ قطر $\Delta \subset F \times F$ می‌آید. از این کلیتر، هر تناظر تعمیم یافتهٔ $T \subset \underbrace{F \times \cdots \times F}_{n}$ یک رابطهٔ چندجمله‌ای از درجهٔ n روی $\mathbb{Q}$

1. Kontsevich 2. Zagier

به‌دست می‌دهد. یک حدس زیبا و عمیق از گروتندیک این است که همهٔ رابطه‌های $\pi_{\alpha j}$ روی $\mathbb{Q}$ با چنین روشی به‌دست می‌آیند. در حقیقت حدس گروتندیک حکم مشابهی برای واریته‌های هموار از بعد دلخواه روی $\overline{\mathbb{Q}}$ و همهٔ کوهومولوژی‌های دورام جبری تعریف شده روی $\overline{\mathbb{Q}}$ است.

من فرمولبندی دقیق و غیرمبهمی از (۵. ۵) مشتمل بر حدس گروتندیک (که از لحاظی فراگیر است) و رابطه‌های از نوع آبل (که از لحاظی موضعی‌اند، گرچه از شرط فراگیر تساوی $h^{\circ}(\Omega^{1}_{\mathbb{P}^{1}}) = 0$ ناشی می‌شوند) نمی‌شناسم. اما با در نظر گرفتن جنبه‌های حسابی معادلات دیفرانسیل آبل که در بخش قبل مطرح شد و پرسشهای حسابی مربوط به دوره‌ها که در بالا آمد، معتقدم که تقریباً با اطمینان می‌توان گفت جنبه‌های حسابی قضیهٔ آبل و میراث آن، در قرن سوم بعد از آبل یك مبحث اساسی و عمیق برای ریاضیدانان خواهد بود.

۶. راهنمایی در بارهٔ نوشتگان این مبحث

«گزارش پاریس» (Paris memoiré) معروف آبل مقاله‌ای است با عنوان

Memoiré sure une propriété genérale d'une class trés entendue des fonctions transcendantes

که در سال ۱۸۲۶ به آکادمی علوم پاریس تسلیم شد و در جلد هفتم «گزارش» در ۱۸۴۱ انتشار یافت. این مقاله در مجموعهٔ آثار آبل:

Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel, pages 145-211

نیز آمده است.

مقاله‌ای که در پانوشت (*) به آن ارجاع داده شده،

sur l'integration de la formule differentielle $pdx/\sqrt{R}, R$ and ρ étant des fonctions entières, Oevres complétes, pages 104-144

است. مقالهٔ جدید مالیشف (V. A. Malyshev)،

Abel equations, St. Petersburg Math. J., vol. 13 (2002), pages 1-45

حاوی گسترشی از قضیهٔ آبل و راهنمایی بیشتری در مورد نوشتگان است.

روایت معمولی قضیهٔ آبل و عکس (فراگیر) آن در کتابهای متعارف مربوط به رویه‌های ریمانی آمده است، مثلاً در کتاب معروف

Die idee der Riemannischer flächen

اثر هرمان وایل.

عکسهای موضعی، ازجمله قضیهٔ سوفوس لی و گسترشهای آن به‌وسیلهٔ داربو و دیگران، در مقاله‌ای به قلم این مؤلف:

Variations on a theorem of Abel, Inventiones Math., vol. 35 (1976), pages 321-390

مورد بحث قرار گرفته است. مقالهٔ جدید

G. Henkin, *Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths*, Invent. Math., vol. 135 (1991), pages 297-328

نتایج و مراجع جدیدی را که پس از مقالهٔ فوق‌الذکر انتشار یافته‌اند معرفی می‌کند.

نظریهٔ بافته‌ها برای نخستین بار در کتاب

Geometrie der Geube. Topologische Frogen der Differentialgeometrie, Springer, Berlin (1938)

اثر بلاشکه (W. Blaschke) و بُل (G. Bol) عرضه شد. دو اثر جدید، یکی

Analytic web geometry, in Web Theory and Related Topics, World Sci. Publishing, Toulouse (1996), 6-47

اثر هنو (A. Hénaut) و دیگری

Differential geometry of webs in Handbook of differential geometry, vol. I, pages 1-152, North-Holland (2000)

اثر اکیویس (M. Akivis) و گُلدبرگ (V. Goldberg) حاوی مروری بر آثار جدید و راهنمایی بیشتر در مورد نوشتگان است.

صورت آبلی معادلهٔ تابعی برای دی‌لگاریتم در مقاله‌ای از آبل:

Note sur la fonction $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$, Oeuvres complétes, pages 189-193

آمده است.

فرمول بلاک (Bloch) برای $T_f CH^2(X)$ را می‌توان در منبع زیر یافت

Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Ser. IV (1980).

بحثی در بارهٔ گسترش قضیهٔ آبل به آرایه‌های نقاط روی یک رویهٔ جبری در نوشته‌ای به قلم مارک گرین و این مؤلف با مشخصات زیر

Abel's differential equations, Houston J. of Math. (volume in honor of S. S. Chern), vol. 28 (2002), pages 329-351

آمده است.

در مقاله‌ای از کونتسویچ (M. Kontsevich) و زاگیر (D. Zagier):

Periods, Mathamatics unlimited–2001 and beyond, Springer, Berlin (2001), pages 771-808

یک بررسی کلی از ویژگیهای حسابی انتگرالهای جبری انجام شده است. قضیهٔ بومبیری-زیگل (Bombieri-Siegel) در مقاله‌ای از بومبیری با مشخصات زیر شرح داده شده است

On G-functions, Recent progress in analytic number theory, Vol. 2, Durham (1979), pages 1-67.

کتاب

G-functions and geometry, Aspects of mathematics, E/3, Friedr. Vieweg and Sohn, Brandenberg (1989)

اثر اندره (I. André) شامل «تعمیم»ی از این موضوعات، ازجمله بحثی در بارهٔ حدس گروتندیک است.

* * * * * *

• Phillip Griffiths, "The legacy of Abel in algebraic geometry", *Legacy of Neils Henrik Abel: The Abel Bicentennial Oslo, June 3-8 2002*, by R. Piene and O. A. Lauda (eds.), Springer (2003).

* فیلیپ گریفیث، دانشگاه پرینستن، آمریکا

علوم آماری:
تحول، محرکها و جهت‌گیری‌ها•

پیتر هال*
ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

در این نوشته، تحول علوم آماری را طی قرن گذشته به اختصار مرور می‌کنیم و توجه خاصی به عوامل و انگیزه‌های اصلی آن داریم: کاربردها، نظریه‌های ریاضی که زیربنای آن را تشکیل می‌دهند، و اخیراً، پیشرفت محاسبات الکترونیکی که به تحقق آن یاری رسانده است. خواهیم دید که تأثیرات متقابل این جنبه‌های مختلف، پیچیده است و علی‌رغم بعضی تنشهایی که ممکن است (مثلاً بین هواداران نظریه از یک سو و کاربردها از سوی دیگر) رخ دهد، مستقیماً برای آمار سودمند است. پیشرفت در ابعاد گوناگون، یقیناً جنبهٔ ممتاز آمار در میان علوم ریاضی است و البته هم منشأ قوت آن است (مثل نقشی که آمار به‌عنوان تنها ابزار ریاضی در تحلیل و تعبیر داده‌های آزمایشی و مشاهده‌ای ایفا می‌کند) و هم منشأ ضعف آن (به‌خصوص اینکه آمار هیچ جایگاه طبیعی در هیچ نظام علمی خاصی، حتی شاید در خودِ آمار هم ندارد). به همین دلیل، سیر پیشرفتهای آتی آمار تا اندازه‌ای از اختیار آماردانان هم خارج شده است. از دیدگاهی دیگر، این مرحله از مسیر تحول آمار، نشان‌دهندهٔ بازگشت به ریشه‌های علم آمار است که تنوعِ بسیار دارند. این ریشه‌ها، به‌عنوان نمونه، در نجوم، کشاورزی، انسان‌شناسی، جانورشناسی، روانشناسی، اقتصاد و ریاضی جای دارند. این مرحله، به اضافهٔ رشد خارق‌العادهٔ توان محاسباتی، حاکی از تغییرات اساسی هم در نحوهٔ کار و تفکر آماری و هم در نوع روشهایی است که در آینده به‌کار خواهند رفت. با این حال، اجتناب‌ناپذیریِ این گذار، خود حاکی از این است که بحث بر سر درستی یا نادرستی آن، چیز چندانی عاید ما نمی‌کند. به هر تقدیر، وضعیت کنونی آمار به یقین مبنای صحیحی برای پیشرفتهای آتی است، درست همان‌طور که گوناگونی سرچشمه‌ها، مبنای محکمی را در سالهای اولیهٔ رشد این موضوع برای آن فراهم کرده بود.

۱. پیشرفتهای قرن بیستمی

تئودور پورتر تاریخدانی در دانشگاه کالیفرنیا در لُس‌آنجلس، دربارهٔ آمار می‌نویسد: «اگر نگوییم هیچ‌وقت، لااقل از زمان ابداع حسابان به این طرف، هیچ شاخهٔ جدیدی از ریاضیات تا به این اندازه دامنهٔ کاربرد وسیعی نداشته است». وی در کتابش با عنوان ظهور تفکر آماری در سالهای ۱۸۲۰ تا ۱۹۰۰ که به سال ۱۹۸۶ منتشر شد [۱۹]، تمام توجه خود را به آن سالهای قرن نوزدهم معطوف نمی‌کند، بلکه در همان بند آغازی این کتاب، محرکهای متعدد و دستاوردهای علوم آماری در قرن بیستم توصیف می‌شود:

> «در قرن بیستم، آمار به‌عنوان ابزار ریاضی تحلیلِ داده‌های آزمایشی و مشاهده‌ای شناخته شده است. آمار که در سیاستگذاریهای رسمی آن را تنها مبنای مطمئن برای قضاوت دربارهٔ مثلاً تأثیر روشهای درمان یا بی‌خطر بودن مواد شیمیایی می‌دانند، و اهل صنعت و تجارت از آن در مواردی همچون کنترل کیفیت صنعتی سود می‌جویند، به وضوح در میان آن دسته از محصولات علم جای دارد که تأثیرشان بر زندگی عمومی و خصوصی افراد بسیار گسترده و فراگیر است. همچنین تحلیل آماری برای حصول نتایج قابل اعتماد از مشاهدات تجربی، در بسیاری از رشته‌های علمی اجتناب‌ناپذیر

شده است. در حوزه‌های جدیدی همانند ژنتیک کمّی، مکانیک آماری و آزمون هوش در روانشناسی، ریاضیات آماری جزء لاینفک نظریهٔ مربوط شده است.»

هرچند قرن بیستم شاهد توسعه و شکوفایی حوزه‌های بسیاری از ریاضیات بوده است، تعداد اندکی از آنها در طی عمرشان دچار دو انقلاب بزرگ شده‌اند، و آمار یکی از آنهاست. انقلاب نخست، پیدایش و نشر یک علم ریاضی جدید به منظور تحلیل داده‌های متضمن خطاهای تصادفی بود. روشهای این علم آنقدر به قرن بیستم تعلق دارد که منصفانه می‌توان گفت: «پایه‌های آمار ریاضی در سالهای بین ۱۸۹۰ تا ۱۹۳۰ ریخته شد.»[۱۹]. در زمانی که پورتر کتاب خود را نوشت، یعنی تقریباً پانزده سال پیش، هنوز هم صحت این مطلب قابل دفاع بود که «روشهای اصلی تحلیل داده‌های عددی طی همین دوره پایه‌ریزی شدند».

ولی امروزه از نظر بسیاری از آماردانان این ادعا باید تعدیل شود. در همین پانزده سال، سرعت و حافظهٔ رایانه‌ها، هزار برابر شده است و انقلاب دوم در آمار که یقیناً متأثر از، و شاید هم ناشی از، پیشرفت در فن محاسبات رایانه‌ای بوده است، باعث تغییرات اساسی در روشهای آماری گشته و این تازه ابتدای راهی طولانی است و در چند دههٔ آینده، موضوع آمار به چیزی تبدیل خواهد شد که از نظر بُرد و نوع مسائل مورد بررسی و تأکید، با آنچه امروزه می‌شناسیم، تفاوت بسیار خواهد داشت. اگر پیشرفتهای قبلی آمار در بستر پیشرفتهای امروزیِ محاسبه رخ داده بود، آنگاه به احتمال زیاد این موضوع کمتر جنبهٔ ریاضی می‌داشت و بیش از آنچه اکنون هست، یک علم تجربی به شمار می‌رفت.

بخش بزرگی از آمار در انتهای قرن نوزدهم و ابتدای قرن بیستم از کاربردهایی در علوم زیستی و اجتماعی و نیز کشاورزی نشأت گرفت و تا اندازهٔ زیادی متخصصان این حوزه‌های علمی بودند که علم آمار را توسعه دادند و بخشی از نسل اول آماردانان را تربیت کردند. مثلاً فرانسیس گالتون که شاید بیشتر به خاطر تحقیقات پیشگامانه‌اش دربارهٔ هوش انسان مشهور باشد، انسان‌شناس و سیاح بود. فلورانس نایتینگل که هم در پرستاری و هم در ریاضیات آموزش دیده بود، اطلاعات زیادی دربارهٔ آمار مرگ و میر داشت و این اطلاعات انگیزه‌ای برای نوآوری و ابتکار او در جمع‌آوری، ارائه و تعبیر داده‌های آماری شد. کارل پیرسون، که ریاضیدان بود، یقیناً به خاطر روشهایی شهرت یافت که در ضمن به‌کاربردن آمار در مسائل زیست‌شناسی مربوط به وراثت و تکامل ابداع کرد. ویلیام گوست[1] (استودنت)، شیمیدانی که دستی هم در ریاضیات داشت، نخستین کارها را در زمینهٔ مسائل کوچک‌نمونه‌ای در آمار انجام داد. رافائل ولدَن[2]، که جانورشناس بود، نخستین تحقیقات را دربارهٔ زیست‌سنجی انجام داد و تأسیس مجله‌ای را که بیومتریکا نامیده شد به منظور ثبت تحقیقات بیشتر در این زمینه، پیشنهاد کرد. فرانسیس اجوورث[3] زبانشناس بود و ریاضیات را هم پیش خود آموخته بود، لکن مهمترین کار او در آمار مربوط به زمانی می‌شود که به‌عنوان اقتصاددان فعالیت می‌کرد. چارلز اسپیرمن[4] که معادلِ ناپارامتری ضریب همبستگی را ابداع کرد، روانشناس بود. رانلد فیشر درجهٔ کارشناسی نجوم را از دانشگاه

1. William Gossett 2. Raphael Weldon 3. Francis Edgeworth
4. Charles Spearman

کیمبریج اخذ کرده بود ولی ریاضیات هم می‌دانست و انگیزه‌اش از مطالعه در آمار، علاقه‌اش به خطاهای مشاهده‌ای در داده‌های نجومی بود. با وجود این، کارهای اصلی او در آمار عمدتاً به سال ۱۹۱۹ مربوط می‌شود که با انستیتوی تحقیقات کشاورزی در روتمستد[1] همکاری می‌کرد و هم آن موقع بود که کارهای پیشگامانه‌ای در زمینهٔ طرحهای آزمایشی و تحلیل واریانس انجام داد.

البته، یک روند بسیار تأثیرگذار دیگر هم در علوم آماری در قرن بیستم وجود داشت که محرک اصلیش خودِ ریاضیات بود نه اینکه از ریاضیات به‌عنوان ابزاری صرف برای توصیف و توسعه بهره جوید. واربرگ [۲۴] به‌خصوص کارهای آبراهام والد[2] در آمار نظری را نقطهٔ شروع «دورهٔ چهارم» در گسترش آمار می‌داند. والد آموزش ریاضی بسیار پیشرفته‌ای دیده بود و علاقهٔ اصلیش نظریهٔ فضاهای متریک و هندسهٔ دیفرانسیل بود، با این حال ماندگارترین کارهای علمی او در زمینهٔ آمار، به‌خصوص تحلیلهای دنباله‌ای و نظریهٔ توابع تصمیم است.

در قسمت نظری آمار، گذشته از اینها، می‌توان گفت که پیشرفت علم احتمال در قرن بیستم و به‌خصوص آن بخشی که به مکاتب آمریکایی، فرانسوی و روسی مربوط می‌شود، تأثیر زیادی بر علم آمار داشته است. لکن مناقشات ناشی از جنگ سرد [بین شوروی سابق و غرب] از یک سو و دیوار شیشه‌ای که متأسفانه آماردانان را به نظری و تجربی تقسیم‌بندی کرده است، مانع از گسترش ارتباط بین احتمال و آمار شده است. به‌عنوان نمونه‌ای از مسألهٔ اول، یادآور می‌شویم که حتی در سال ۱۹۹۱ اندکی پس از اوجگیری گلاسنوست در شوروی، روزنامهٔ بریتانیایی ساندی تایمز در شمارش هزارتن از سازندگان قرن بیستم، هیچ جایگاهی برای آندری کولموگوروف قائل نشده بود در حالی‌که برخی از دانشمندان نه چندان تأثیرگذار غربی (و اتفاقاً رانلد فیشر و کارل پیرسون) را در فهرست خود آورده بود. کولموگوروف در درجهٔ اول ریاضیدانی با استعداد و قوهٔ ابداع فوق‌العاده و در درجهٔ دوم احتمال‌دان بود. طیف علائق علمیش، از منطق ریاضی و کوهومولوژی گرفته تا حرکت سیارات و جریان متلاطم هوا در موتورهای جت، گسترده بود. با وجود این، بی‌شک شهرتش بیشتر به خاطر دستاوردهای او در نظریهٔ احتمال است، تا جایی که دایرةالمعارف بریتانیکا، احتمال را «تخصص اصلی» او می‌داند. دستاورد کولموگوروف دربارهٔ ویژگیهای فرایندهای تصادفی، گذشته از کاربردهای دیگرش، ارتباط مستقیمی با نظریهٔ آماری اطلاعات و از آن طریق، با علوم رایانه‌ای دارد.

البته، هدف اصلی من از شرح کارهای شخصیتهای آمار قرن بیستم، نشان دادن گستردگیِ فوق‌العادهٔ ریشه‌های آمار است نه توصیف فعالیتهای علمی تک‌تک بنیانگذاران آن. می‌توانستیم به نام افراد دیگری هم اشاره کنیم، مثلاً هارالد کرامر[3] که همانند گوست هم شیمیدان بود و هم ریاضیدان؛ بوریس گنه‌دِنکو[4]، هرلد جفریز[5]، جرزی نیمن[6] که همچون فیشر هم فیزیکدان بودند و هم ریاضیدان؛ پراسانتا ماهالانوبیس[7] که علاوه بر این پیش‌زمینه، امتحان تریپوس در علوم طبیعی را هم در دانشگاه کیمبریج گذرانده بود. تِد هنان[8]، که مانند اجوورث از پیش‌زمینهٔ اقتصادی خود تأثیر می‌گرفت؛

1. Rothamsted 2. Abraham Wald 3. Harald Cramér
4. Boris Gnedenko 5. Harold Jeffreys 6. Jerzy Neyman
7. Prasanta Mahalanobis

هرلد هتلینگ[1] که هم در روزنامه‌نگاری و هم در ریاضیات آموزش دیده بود و بسیاری افراد دیگر. کمتر شاخه‌ای از علوم ریاضی در قرن بیستم بوده است که بتوان ادعا کرد افرادی با پیش‌زمینه‌هایی تا این حد متنوع، جزو مبدعان برجستهٔ آن بوده‌اند.

۲. محرکهای متعدد آمار

شرحی که در بخش قبل راجع به پیدایش روشهای امروزی آمار آوردیم، چگونگی انگیزه‌بخش بودن مسائل عملی را نشان داد. حتی کارِ والد در زمینهٔ تحلیلهای دنباله‌ای که تا اندازهٔ زیادی مرهون دقت و وسعت معلومات ریاضی او بود، از لزوم استانداردهای بالا درکنترل کیفیت صنعتی طی جنگ دوم جهانی انگیزه گرفته بود.

با وجود این، بخش اعظم جنبهٔ نظری آمار و احتمال بدون هیچ‌گونه ارتباط مستقیمی با کاربردها رشد کرده است. در موارد مهمی، نظریه، انگیزه‌بخش، نیرودهنده و تأثیرگذار بوده و خود منجر به کاربردهای خاصی شده است. برای مثال، انگیزهٔ اصلی فِلِر در تکمیل کارِ کولموگوروف در صورت‌بندی نظریهٔ احتمال به کمک نظریهٔ اندازه صرفاً ریاضی بود، لکن طی این کار به طیف وسیعی از کاربردهای احتمال به‌ویژه در ژنتیک علاقه‌مند شد. یا کارهای کولموگوروف در زمینهٔ فرایندهای مارکوفی زمان-پیوسته و نیز نظریهٔ ارگودیک، آثار کاربردی خاصی داشته است (از جمله کاربرد در نظریهٔ تلاطم شاره‌ها و پدیده‌های وابسته به آن). با این حال، دیدگاههای کولموگوروف دربارهٔ کاربردهای «درست»، مانع از گسترش مرزهای نظریه می‌شد. برای مثال، مشهور است که کولموگوروف دربارهٔ کاربرد بالقوهٔ خود-نگاشت‌های دایره در نظریهٔ ضربان قلب، به یکی از شاگردانش [گویا آرنولد] توصیه کرده بود که «این از آن دست مسائل کلاسیکی نیست که شایستهٔ تحقیق باشد». مسألهٔ کاربرد در ضربان قلب همچنان ناتمام ماند تا آنکه بالاخره ۲۵ سال بعد مورد توجه مجدد قرار گرفت.

شایان ذکر است که برای مدتی طولانی، پیشرفت آمار تأثیر نسبتاً کمی از پیشرفت محاسبات الکترونیکی می‌گرفت. محاسبات رایانه‌ای که از نظر تاریخی شاید بتوان گفت از میانهٔ دههٔ ۱۹۴۰ آغاز شده، در دست‌کم یک ربع قرن نقش چندان مهمی در آمار ایفا نمی‌کرد. با این حال، استثناهای قابل‌توجهی هم وجود داشت، از جمله کارِ جان توکی همراه با کولی در مورد الگوریتم تبدیل فوریهٔ سریع [۴]، یا کلیتر از آن، تشخیص زودهنگام توکی در مورد تأثیر عظیمی که رایانه‌های رقمی می‌توانستند داشته باشند، و نیز توسعهٔ محاسبات آماری در روتمستد در بریتانیا. اما به رایانه‌ها، چه دستی و چه الکترونیکی، تا اندازهٔ زیادی، به چشم ابزارهایی برای کشف ویژگیهای روشهای موجود نگاه می‌شد تا به‌عنوان وسیله‌ای برای ایجاد روشهای دیگر. البته، توانِ نسبتاً کم ماشینهای محاسبهٔ قدیمی هم از جملهٔ دلایل چنین وضعی بود.

برای مثال، یکی ازکارهای اولیه در «مطالعهٔ شبیه‌سازی» را اگون پیرسون، پسر کارل، انجام داد و به کمک آن ویژگیهای گوناگون ضرایب همبستگی رتبه‌ای متعارف را روشن ساخت. [رجوع کنید به [۷]، [۸]، [۱۸]]. روش مونت‌کارلو که عمدتاً در فیزیک مطرح شد و برای محاسبهٔ انتگرالها و کمیتهای وابسته به آنها به‌کار رفت، تا دههٔ ۱۹۷۰ نقش مهمی در آمار بازی نمی‌کرد، تا آنکه نخستین کارها را در این زمینه جان همرزلی[1] و ریاضیدانان دیگری انجام دادند، هرچند ممکن است آماردانان آنها را از خودشان بدانند. البته، استثناهایی هم وجود داشت مثل کاری که جورج بارنارد [۱] در مورد آزمون مونت‌کارلو انجام داد و همین‌طور تحقیقاتی که روی روشهای نمونه‌گیریِ مجدد صورت گرفت که بعداً دربارهٔ آنها توضیح خواهیم داد.

درواقع، یکی از دلایل اصلی [عدم رویکرد به ماشینهای محاسبه] این بود که اکثریت آماردانان تا حدود نیمهٔ دوم دههٔ ۷۰ به آسانی به رایانه‌های الکترونیکی پرقدرت دسترسی نداشتند. البته، توکی خیلی پیشتر یعنی از سال ۱۹۴۵ با آزمایشگاههای بل همکاری می‌کرد و از آن طریق به رایانه دسترسی داشت. اما تا دو یا سه دههٔ آخر قرن بیستم، برای اکثریت آماردانان، محاسبات الکترونیکی یا ناممکن بود و یا در بهترین حالت، فرایندی پردردسر و غیرتعاملی.

اکنون، در آغاز قرن جدید، وضعیت کاملاً تغییر کرده است. طی دو دههٔ گذشته، محاسبات رایانه‌ای همراه با کاربردهای بالقوه و نظریه‌های ریاضی به‌عنوان یکی از محرکان اصلی و نه فقط یک عامل تسهیل‌کننده، در ایجاد و تکامل روشهای آماری مؤثر بوده است. محاسبات رایانه‌ای را دیگر به راستی می‌توان محرک و مولد دانست، زیرا در علم نوین آمار، بسیاری از مسائل ابتدا به شکل «مجرد» ــ یعنی به‌صورت مسائلی که بالقوه کاربردی‌اند اما بدون آنکه کاربرد خاصی از آنها در نظر باشد ــ بازبینی و سپس راه‌حل‌هایی برمبنای روشهای آماریِ رایانه-محور برای آنها ارائه می‌شود. نمونهٔ خوبی از این دست، ارائهٔ روشهای خودگردان برای ساختن بازه‌های اطمینان و آزمونهای فرض است (برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به بخش ۳ رجوع کنید). فنون جدید و نظریه‌های ریاضیِ زیربنای آنها، عمدتاً به واسطهٔ وجود ابزارهای محاسباتی که می‌توان به وقت نیاز از آنها استفاده نمود، توسعهٔ فراوان یافته‌اند. سالها بود که مبانی احتمالاتی برای پیشبرد مرزهای نظریه وضع شده بود، لکن بدون دسترسی به ابزارهای محاسباتیِ موردنیاز، انگیزه و توجیه کافی برای پرداختن به مسائل فراهم نبود.

بحث فوق گویای این است که ارّابهٔ محاسبات، از جنبه‌های مهمی، در جلو اسبِ انگیزه‌های کاربردی بسته شده است. در هیچ کجای تاریخ گذشتهٔ آمار، محاسبات (که امروزه برمبنای توان رایانه‌های الکترونیکی سنجیده می‌شود) هیچ‌گاه در پیشبرد روشهای آمار چنین محرک مهمی که اکنون هست نبوده است. البته، بعضیها از این وضع متأسف‌اند و نظیر همان دغدغه‌هایی را دارند که دربارهٔ نقش محرّک نظریه‌های ریاضی در پیشبرد آمار ابراز می‌شود.

ولی این دغدغه‌ها دربارهٔ نقش نظریه و محاسبه، نابه‌جا هستند زیرا برمبنای دیدگاهی نسبت به تحول آمار استوارند که همهٔ ابعاد آن را در نظر نمی‌گیرد، دیدگاهی که انگیزه‌ها و محرکهای گوناگون را در یک طیف خطی ایده‌آل کنار هم قرار می‌دهد یا در بهترین حالت آنها را از طریق یک نمودار مسطح به هم مربوط می‌سازد. در این دیدگاه، تصور بر این است که خدمت‌رسانی علم آمار به جامعه، فرهنگ و نیز صنعت در صورتی بهینه خواهد بود که نتایج عملی در وهلهٔ نخست موردنظر قرارگیرد و سپس تحقیقات

1. Harold Hotelling

1. John Hammersley

قهقرایی برای رسیدن به مبانی انجام شود. اما در حقیقت، ارتباطهای بهینه خیلی پیچیده‌ترند و در راستای هر مسیر ارتباطی، انگیزشهایی وجود دارد.

به خصوص، قبلاً به اهمیتی اشاره کردیم که انگیزه‌های ریاضی برای عالمان آمار، نظیر فِلِر و کولموگوروف داشته است. آمار نظری و محاسبهٔ رایانه‌ای توانسته‌اند با روشهایی که گاهی توصیف دقیق آنها مشکل است ولی حقیقتِ وجودی دارند، از طریق ارائهٔ مضامین مشترکی که فراتر از تقسیم‌بندیهاست، وحدتی به آمار ببخشند. یگانه‌سازی حتی از خود آمار هم فراتر رفته است. برای مثال، دقیقاً ۳۰ سال پیش، کسانی که از دیدگاه ریاضی در مهندسی سیستمها نظریه‌پردازی می‌کردند، روشهای خود گردانِ خاصی را برای براورد پارامترهای آماری ارائه دادند (مثلاً رجوع کنید به [۲۱]، [۲۰]). این روشها، با خودگردان افرون ارتباط دوری دارند، از این نظر که در آنها از روشهای تکرار عددی برای ساختن براوردکننده‌هایی استفاده می‌شود که عملکرد بهتری دارند، مثلاً براوردکننده‌هایی که اُریبی کمتری دارند. از آن طرف در بستر محاسبات هم تعداد زیادی از دست‌اندرکارانِ حوزه‌های متعدد، با نرم‌افزارهای آماری از قبیل S^+ و R آشنا (و حتی متکی به آنها) شده‌اند و لذا رهیافتهایشان به حل مسائل با رهیافت آماردانانی که آن نرم‌افزارها را ارائه داده‌اند، یکسان شده است.

تحقق و توضیح بسیاری از مباحث جاری و مهم در آمار معاصر، نیازمند نظریه‌های ریاضی کاملاً پیشرفته‌ای بوده است. روشهای موجکی یکی از این موارد است. تعریف و ساختن بسطهای موجکی تجربی و حتی درک درست مزیتهای عملی روشهای متفاوت، نیازمند به‌کارگیری آنالیز ریاضی جدید است. به همین صورت، بعضی از مفاهیم اساسی در نظریهٔ تحلیل تابعی داده‌ها، مانند مفهوم چگالی روی فضای توابع و روشهای استنباط آماری دربارهٔ ساختار آن، محتاج ابزارها و مفاهیم پیچیده‌ای از ریاضیات است. حاصل به‌وجود آمدن روشهایی از این دست این است که امروزه ارتباط بین نظریه و کاربردها، خیلی مهمتر و پیچیده‌تر از آن است که قبلاً بود.

این پیچیدگی، تا اندازه‌ای از این واقعیت نشأت می‌گیرد که بسیاری از روشهای جدید آماری، نتایجی به دست نمی‌دهند که بتوان آنها را به‌طور صریح از روی داده‌ها حساب کرد، بلکه فقط می‌توان، مثلاً، به کمک روشِ مونت‌کارلو، تقریبهایی عددی از آنها به‌دست آورد. فرایندهای آماری جدید و سازوار[1]ی (مثل فرایند داده‌کاوی) وجود دارند که در آنها کوشش بر این است که نوعی مصالحه بین پیچیدگی نتیجه و سادگی تعبیر آن برقرار شود. به همین صورت، نظریهٔ حاکم بر پیشرفتهایی از این دست، نیازمند نوعی انتزاع ریاضی است که از یک طرف آنقدر انعطاف‌پذیر باشد که جنبه‌های اساسی آماری مسألهٔ در دستِ بررسی را حفظ کند، و از طرف دیگر آنقدر نیرومند باشد که بتواند نتایج نظری را به‌طور شفاف، به خصوص برای کاربران آمار بیان کند. از این‌رو، در حالی‌که صورت‌بندی روشهای آماری ارتباط تنگاتنگی با روشهای محاسباتی رایانه‌ای پیدا می‌کند، استدلالهای ریاضی موردنیاز برای توصیف این روشها، بیش از پیش محتاج مهارتهای آماردانان نظری می‌شود. درواقع طنز قضیه در این است که، توجه زیاد علوم آماری جدید به محاسبات رایانه‌ای به جای فرمولهای سادهٔ جبری، نیاز به ریاضیات خلاق و حرفه‌ای را بیشتر کرده است.

1. adaptive

ضمناً، بخشی از قویترین حمایتها از پیشرفت محاسبات رایانه‌ای و الگوریتمهای وابسته به آن، در سالهای اولیه، از جانب دانشمندان علوم ریاضی به عمل آمده است، نه لزوماً از جانب دانشمندان دیگری که از محاسبات الکترونیکی بیشترین فایده را درکارهایشان می‌برده‌اند. برای مثال، فرانک ییتس[1]، آماردان مشهور که از دانشگاه کیمبریج مدرک ریاضی گرفته بود، نقش اصلی را در تأسیس انجمن رایانهٔ بریتانیا داشت و مدتی هم رئیس آنجا بود. او در جایی می‌نویسد: «برای اینکه کسی آماردان نظری خوبی باشد باید محاسِب خوبی هم باشد و لذا باید بهترین ابزارهای محاسباتی را هم در اختیار داشته باشد». البته، حمایت ریاضیدانان از محاسبات رایانه‌ای گاهی هم با مخالفتهای شدیدی روبه‌رو شده است. نمونه‌اش کولموگوروف است که علی‌رغم مخالفتهای شدیدی که در اتحاد شوروی با او می‌شد، از ریاضیات محاسباتی و نظریهٔ محاسبات دفاع می‌کرد. نتیجه‌اش این شد که بسیاری از دانشمندان علم رایانه در شوروی سابق از دههٔ ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ شاگردان یا شاگردانِ شاگردان کولموگوروف بودند.

۳. روشهای نمونه‌گیری مجدد: یک مطالعهٔ موردی

ارائهٔ روشهای نمونه‌گیری مجدد یا روشهای خودگردان مثال روشنگری است از اینکه چگونه جنبه‌های متفاوتی از علم، از قبیل کاربردهای خاص، ریاضیات، و محاسبهٔ رایانه‌ای، می‌توانند در زمانهای متفاوت طوری گرد هم آیند که محرک و ایجادکننده مجموعهٔ واحدی از روشها باشد. مناسبترین تعریف امروزی روشهای نمونه‌گیری مجدد این است که در این روشها در تعریف یک کمیت مجهول مثل یک پارامتر، به جای توزیع آماری مجهول، همتای تجربی آن را قرار می‌دهند. به این ترتیب، میانگین نمونه، براوردکنندهٔ خودگردانِ میانگین جامعه خواهد بود و این نشان می‌دهد که ریشه‌های اصلی روشهای خودگردان را باید در روزگاران گذشته جُست.

اما، در نظر گرفتن رابطهٔ بین نمونهٔ مجددِ به‌تصادف انتخاب شده با نمونهٔ اصلی به‌عنوان «مدلی» برای رابطهٔ نمونه و جامعه‌ای که نمونه از آن انتخاب می‌شود، ایدهٔ نوینی است و می‌توان گفت به اواسط قرن بیستم برمی‌گردد. به خصوص پراسانتا ماهالانوبیس [۱۷]، ریاضیدان هندی، از این رویکرد استفاده کرد تا اطلاعاتی دربارهٔ تغییرپذیری آزمونهای میدانی به‌دست آورد. امروزه، این روش را «روش خودگردان انتخاب m شیء از میان n شیء بدون جایگذاری» می‌نامیم. کار ماهالانوبیس انگیزهٔ عملی خاصی داشت: تحلیل داده‌های مربوط به محصول برنج در فصلِ برداشت ۱۹۳۴ـ۱۹۴۴، در ایالات بیهار هند. کار لیلیان و ویلیام مَدو [۱۶] و نیز هاوارد جونز [۱۲] هم، به روشهای خودگردان امروزی ارتباط دارد، هرچند این روشها مستقیماً از آن نتیجه نشده‌اند. مک‌کارتی ([۱۴]، [۱۵]) نیز از طراحان اولیهٔ زیرنمونه‌گیری تصادفی بود، منتها این بار در زمینهٔ بررسی نمونه‌ای.

جان هارتیگان ([۱۰]، [۱۱]) این ایده را بسیار گسترش داد، منتها بیشتر از جنبهٔ روش‌شناسی تا از نظر کاربردهایی که ممکن بود داشته باشد. نظریهٔ او دقت و توضیح لازم ــ و در حد خودش، انگیزه و توجیه اساسی ــ برای این فن فراهم کرد. در سوی دیگر طیف، جولیان سایمن جامعه‌شناس (که اقتصاددانی معتقد به بازار آزاد، لیبرال، و فردی جامع‌الاطراف بود)، طرحی

1. Frank Yates

برای روش‌شناسی آمار برمبنای شبیه‌سازی مونت‌کارلو ارائه داد که بسیار شهودی و در عین حال آینده نگرانه بود (رجوع کنید به [۲۲]، بخش ۴). طرح سایمن عاری از هرگونه نظریهٔ ریاضی، و بنابراین عاری از بینشها و مفاهیمی اساسی بود که می‌شد از آن طریق آنها را به‌دست آورد و انتقال داد. اتکای این طرح بر شبیه‌سازیهای تصادفی تکراری، در زمانی‌که محاسبهٔ فشردهٔ نتایج آماری به یک اصل تبدیل شده بود و رایانه‌های پرقدرتی که به آسانی در دسترس باشند هنوز دوران طفولیت خود را می‌گذراندند، باید عجیب و غریب به نظر آمده باشد، لکن این طرح سایمن، چندان بیشتر از طرحهای دیگرش با مخالفت روبه‌رو نشد (پس از مرگ سایمن در سال ۱۹۹۸، بن واتنبرگ[1] در یادداشتی به مناسبت فوت او که در نشریهٔ وال‌ستریت چاپ شد از او به‌عنوان سرمایه‌داری دو آتشه یاد می‌کند که «با طرفداران محیط زیست و مالتوسی‌ها درگیر مبارزهٔ فکری شد»). با این حال، رویکرد سایمن منعکس‌کنندهٔ دیدگاه تجربی درستی دربارهٔ علوم اجتماعی بود.

کار سایمن قدیمیتر از آن است که متأثر از امکانات محاسباتیِ سهل‌الوصول بوده باشد، و همان‌طور که گفتیم مسلماً از نظریه هم الهام نگرفته است. درواقع، براد افرون [۵ و ۶] بود که ارتباط حیاتی بین دو جنبهٔ محاسباتی و نظریِ کارهای سایمن را هوشمندانه و به طرزی بسیار مؤثر برقرار کرد. افرون مشاهده کرد که وقتی به جای یک توزیع نمونه‌گیری واقعی، براوردکننده‌اش را قرار می‌دهیم، مفهوم «پارامتر» را وسیعتر از آنچه قبلاً تصور می‌شد می‌توان تعبیر کرد. درواقع، این تعبیر از پارامتر، پارامترهای تنظیم‌کننده در انواع زیادی از فرایندهای براورد و خیلی چیزهای دیگر را شامل می‌شود (حتی ترازهای اسمیِ بازه‌های اطمینان و آزمونهای فرض را می‌توان پارامترهای تنظیم‌کننده تلقی کرد). سپس این ایده‌ها را به منابع محاسباتی نیز ربط داد: هنگامی‌که توابع توزیع نمونه‌گیری را نمی‌توان مستقیماً حساب کرد، در صورت وجودِ امکان محاسباتی کافی، می‌توان آن را با دقت دلخواه به روش مونت‌کارلو تقریب زد. افرون، روشهای خودگردان را به سمتی سوق داد که می‌بایست در دو دههٔ بعد از آن دنبال شود و به‌علاوه نام این روشها را هم او بر آنها نهاد.

پس از آن، توان محاسباتی و نظریهٔ ریاضی مشترکاً عامل ایجاد و تکامل روشهای خودگردان بوده دامنهٔ کاربردهای بالقوهٔ آنها را وسعت داده‌اند. مثلاً، نظریهٔ ریاضی تقریب توزیعی، نقش مهمی در رفع ابهاماتی اساسی که دربارهٔ مناسبترین روشهای استفاده از خودگردان وجود داشت، بازی کرده است. هرچند این نظریه از کارهای چبیشف و اجورث در حدود یک قرن پیش سرچشمه می‌گیرد، لکن تا اندازهٔ زیادی بر پیشرفتهای بسیار جدیدتر احتمال و آمار نظری استوار است، به‌ویژه آن بخشی که رابی باتاچاریا و ر. رنگه رائو توصیف کردند [۲]. این نظریهٔ ریاضی و نظریه‌های پیش از آن، ارتباط چندان مستقیمی با پیشرفتهای جاری در روشهای آماری نداشته‌اند، با وجود این، دیدگاهی به‌دست می‌دهند که برای حصول اطمینان از دقت و صحت کاربردهای روشهای خودگردان در حوزه‌های دیگر علمی از پزشکی گرفته تا مهندسی، بسیار مهم بوده است. از سوی دیگر، تحولات سریع در سخت‌افزارهای محاسباتی طی دههٔ ۱۹۸۰ انگیزه‌ای شد برای پیشرفتهای کلی در روشهای خودگردانِ دوگانه، و غلبه بر آن نوع مسائلی که در نتیجهٔ مطالعات نظری به‌وجود آمده بود. این پیشرفتها هم اغلب بدون اینکه کاربرد خاصی محرک آنها باشد، حاصل شدند، هرچند بعدها، کاربردهای مهمی به‌دست آمده است.

با این پیشرفتها، نمونه‌گیری مجدد به‌عنوان روشی برای حل انواع مسائل آماری و حل بهتر مسائل سنتی تثبیت شده است. با این حال، همهٔ این روشها وابسته به این ایده است که توزیع تجربی اولیه چیز مقدسی است. عملکرد بسیاری از روشهای آماری را می‌شود با تعدیل داده‌ها به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بهبود بخشید و این یکی از مسیرهای پیشرفت را در آینده تشکیل خواهد داد. روشهایی عینی برای تغییر نمونه ارائه خواهد شد، از جمله: تجدید وزن داده‌ها، یا واقعاً تغییر مقدار آنها، یا افزودن «شبه داده‌ها»یی که به کمک نمونهٔ اصلی تولید شده‌اند، همین‌طور تقلیل اریبی و واریانس، یا ساختن براوردکننده‌های استوارتر، یا سازگارکردن داده‌ها با یک «الگوی کیفی» (تا مثلاً پاسخی یکنوا یا تک مُدی به یک هم‌متغیر بدهند). همین ایده‌ها را می‌شود برای دستیابی به برازش بهتری به یک الگوی پارامتری، یا تولیدِ (مثلاً) اثری از شکل توزیع پاسخ که ممکن است در نتیجهٔ فقدان داده‌های «دورافتاده» ایجاد شود، به‌کار برد. این داده‌ها به‌طور ضمنی و به کمک الگوریتمهای تنظیم‌کنندهٔ داده‌ها معلوم می‌شوند و نه به‌طور صریح توسط خود آزمایش‌کننده. این روشها، به شدت رایانه‌ـمحور خواهند بود، مخصوصاً اگر در مورد داده‌های وابسته به‌کار روند، ولی خوب! این موضوع مانعی تعیین‌کننده نیست. نمونه‌گیری مجدد با توزیع تعدیل شده یا تنظیم‌شده و تجربی سروکار دارد نه با خود توزیع اصلی.

۴. آمار به کجا خواهد رفت و چه کسی آن را به آنجا خواهد بُرد؟

بخش اول را با اشاره به پیش‌زمینه‌های بسیار متفاوتِ دانشمندانی آغاز کردیم که موضوع آمار را در انتهای قرن نوزدهم توسعه داده، آن را به قرن بیستم رساندند. در میان آنها، انسان‌شناس (مثل گالتون)، زیست‌شناس (مثل ولدن)، اقتصاددان (مثل اجورث)، روانشناس (مثل اسپیرمن) و ریاضیدان (مثل فیشر و کولموگوروف) وجود داشت. این مبدعان اولیه، همراه با هم، پایه‌های علمی را ریختند که طی چند دههٔ گذشته، در سطح وسیعی توسط «آماردانان» به‌کار گرفته و تدریس شده است.

با این حال، همان‌طور که بخش مهمی از آنالیز ریاضی به‌صورت شاخه‌های متعددی درآمد که بر آنالیز تکیه دارند و آن را به‌کار می‌برند (همانند ریاضیات زیستی، ریاضیات مهندسی، ریاضیات مالی و بیمه)، همین اتفاق هم برای آمار افتاد. ایده‌های مربوط به آماربیزی، منطق فازی و روش درستنمایی ماکسیمم فیشر، کاربردهای متنوعی در مهندسی، مثلاً در دستگاههای پیشرفتهٔ اندازه‌گیری ماتریسی در دوربینها، دارند. تعداد اندکی از کاربردها را افرادی ارائه داده‌اند که در دانشکدهٔ آمار تحصیل کرده‌اند، لکن این مطلب از ارزش روشها و نتایج آنها نمی‌کاهد. داده‌کاوی، که به نظر می‌رسد با علوم رایانه و فناوری اطلاعات بیش از آمار مرتبط باشد، نمونهٔ بارزتری است. این مبحث از جنبه‌های متعدد به فنونی که آماردانان ارائه داده‌اند متکی است (مثل رده‌بندی و درختهای رگرسیون؛ برای آگاهی بیشتر به [۳] رجوع کنید.)، ولی مورد استفادهٔ وسیع افرادی است که در فناوری اطلاعات کار می‌کنند.

1. Ben Wattenberg

بعضی از مباحث آماری دیگری که در انتهای قرن بیستم پیشرفت سریعی داشته‌اند، عبارت‌اند از ژنتیک آماری (به خصوص در ارتباط با ژنوم انسانی)، یادگیری ماشین و محاسبات عصبی (بخش عمدهٔ این موضوع اساساً آماری است هرچند بیشتر ابداع‌کنندگان آن، آماردان نبوده‌اند)، و روشهای تحلیل مجموعه‌های عظیم داده‌ها. توسعهٔ روشهای آماریِ رایانه‌ـمحور با رشدی سریعتر از مبانی نظری و آزمایشهای عددی، آمار را به طرز چشمگیری در راستای جهتهای بیان شده در فوق به پیش خواهد راند.

در حال حاضر، فقط در آستانهٔ دستیابی به آن چیزهایی هستیم که می‌توان به کمک ماشینهای محاسب، به چنگ آورد. قانون مور[1] حاکی از اینکه سرعت و حافظهٔ سخت‌افزار رایانه‌ها تقریباً هر هیجده ماه دو برابر می‌شود، بیش از ۳۰ سال است که برقرار بوده و تصور هم نمی‌رود که ناگهان نقض شود. البته اگر هم این‌طور شود، قوانین جدیدی که با فناوریهای جدید محاسباتی هماهنگی داشته باشد، جای آن را خواهند گرفت. به این ترتیب، همهٔ حوزه‌های علم بالاجبار به سمت گشایش افقهای جدید و وسیع در بررسی و تعبیر داده‌ها، حرکت می‌کنند. تعداد نسبتاً کمی از این پیشرفتها در بُعد کیفیِ داده‌ها (مثلاً در تراز «نوفه») و بیشتر آنها در کمیت داده‌ها منعکس خواهد شد و لذا روشهای جدید آماری لزوماً بخش مهم و اساسی این پیشرفتها را تشکیل خواهند داد. با وجود این، مسیرهای پیشرفت، آنقدر متعدد و پیشرفتها در هر مسیر آنقدر زیاد خواهد بود که تعداد کافی آماردان برای حضور در بطن هریک از این مسیرها وجود نخواهد داشت، حتی اگر چنین فرصتِ حضوری برای آماردانان فراهم باشد که البته این‌طور نیست.

حتی معلوم نیست که آماردانان تمام اصول زیربناییِ روشهای آینده را وضع کرده و حاضر داشته باشند. جدا از فنون جدید آماری که برای بهره‌برداری از رایانه‌های سریع و سریعتر شونده ارائه خواهد شد، نغمه‌هایی از بیرون آمار هم به گوش می‌رسد که مبانی آمار نیز محتاج بازنگری‌اند (برای مثال، توضیحی دربارهٔ دیدگاه دیوید کرانتس[2] را در ادامهٔ بحث ملاحظه کنید). اگر بخواهیم فنی‌تر صحبت کنیم، روشهایی که در حال حاضر به‌کار می‌بریم، هنوز تا حد زیادی، تقریباً خطی‌اند و از جنبه‌های مهمی که البته در آینده تغییر خواهند کرد، متأثر از کاربردهای جدیدی هستند که نوع جدیدی از مسائل را پیش رو قرار می‌دهد. به نظر می‌رسد در آینده، روشهای آماری جدید فراوانی ــ بیش از پیش به‌دست کسانی که آمار کلاسیک را نیاموخته‌اند ــ ارائه خواهد شد.

این وضعیت، باعث دلواپسی‌های فراوانی در میان آماردانان در انتهای قرن بیستم شده است. مثلاً دیوید فینی در مقاله‌ای که در خبرنامه انجمن سلطنتی آمار چاپ شد [۹]، می‌نویسد:

> «ممکن است آماردانان حرفه‌ای کنترل خود را بر آنچه به نام رشتهٔ آنها انجام می‌شود ــ و حتی نگرانی خود را در این باره ــ از دست بدهند [این مقاله را] با این پرسش آغاز کردم که [آمار] به کجا می‌رود؟ و پاسخ من این است که «رو به حضیض»! و راه بازگشت طولانی و پرپیچ و خم است، ولی اگر بخواهیم به آنچه غولهای آمار ۷۵ سال پیش ارائه دادند وفادار بمانیم، چاره‌ای بجز یافتن راه بازگشت نداریم.»

بی‌شک، علم آمار در حال بازگشت به پیش‌زمینه‌های متعددی است که از آنها سرچشمه گرفته است. آمار را در آینده، همانند یک قرن پیش، کاربران آن به‌طرز چشمگیری توسعه داده و به‌کار خواهند بُرد. این بازگشت به ریشه‌ها، به شکلی کاملاً متفاوت و همراه با روشها و انگیزه‌های بسیار پربارتر و متنوعتر از آنچه در ابتدای قرن بیستم بوده، صورت خواهد پذیرفت.

فینی دربارهٔ خطرهای ملازم با این دورهٔ گذار را از جمله خطر بالقوهٔ ارتکاب خطاهای جدی، تذکار می‌دهد.این خطرها را با این تذکرات لفظی نمی‌توان کاهش داد زیرا واقعاً جدی‌اند. اما خود از ثمرات موفقیت آمارند، ثمرهٔ آن موقعیتی هستند که [۱۹] چنین توصیف می‌کند: «آمار در میان آن دسته از محصولات علم جای دارد که تأثیرشان در زندگی عمومی و خصوصی افراد بسیار گسترده و فراگیر است». اگر این مشکلات و مسائل وجود نداشتند، آنگاه موضوعی به گستردگی و تنوع آمار که امروزه مستقیماً در زندگی همهٔ افراد بشر دخیل است، نه تنها متحول و شکوفا نمی‌شد، بلکه یا مرده بود و یا در حال مرگ بود. انقلاب دوم در علم آمار به سرعت در حال شتاب‌گیری است و نباید انتظار داشت دقیقاً در همان جهاتی پیش رود که به قول فینی «غولهای آمار ۷۵ سال پیش ارائه دادند» و همانها بود که به انقلاب اول منجر شده بود.

نباید تصور کنیم که خود ما همیشه در بهترین موقعیت برای توسعهٔ رشتهٔ خود یا حتی کسب بصیرت عمیقتری دربارهٔ آن هستیم. گاهی هم نگاه از بیرون می‌تواند مفید و آموزنده باشد. از زمان اسپیرمن تا حالا، روانشناسان، روشهای آماری متعددی را برای رفع حاجات خود ارائه داده و به‌کار برده‌اند. دیوید کرانتس [۱۳] دیدگاه روانشناسان را دربارهٔ نامناسب بودن آزمونهای فرض سنّتی آماری، در بعضی زمینه‌های مهم، بیان کرده است. او قویاً معتقد است که «منازعات کنونی در روانشناسی حکایت از نقصان جدی در مبانی آمار دارد». به‌علاوه، نمونه‌هایی از روشهایی در دست است که آماردانان دانسته یا ندانسته آنها را از حوزه‌های علمی دیگر قرض گرفته‌اند. لذا، جریان روش‌پردازی آماری همیشه در آن جهتهایی که علمای قدیم آمار پیش روی ما قرار داده‌اند پیش نمی‌رود. مثلاً، اشتغال آماردانان به ارائه روشهای تصویرپردازی، گذرگاهی دوطرفه از ایده‌ها بین آمار و علوم دیگر را پدید آورده که برای هر دو طرف سودمند است.

در آغاز قرن بیستم، وقتی ادموند ویتاکر و جورج واتسن توابع خاص و نظریهٔ مربوط به آنها را به نام «آنالیز جدید» معرفی کردند [۲۵] و این موضوع در همان اوایل قرن به حوزهٔ مهندسی و فیزیک راه پیدا کرد، ریاضیدانان محض قاعدتاً نگران از دست دادن کنترل خود [بر این موضوع] شده و احساس خطر کرده‌اند. آن خطرها ممکن است به بزرگی خطرهایی که در وضعیت گذار کنونی در آمار مطرح است، نبوده باشند زیرا آنالیز ریاضی تجویزی‌تر [دارای ضابطه‌های مشخصتر] است و فلسفهٔ چندگانه‌ای بر آن حاکم نیست که کاربرد و آموزش آن نیاز به کنترل و نظارت داشته باشد. ولی مهندسان آن زمان همان‌قدر در برابر ایمنی بشر و حفظ محیط زیست مسؤول بوده‌اند که همکاران امروزی آنها که در ژنتیک (یکی از نمونه‌های مورد اشارهٔ فینی) یا طراحی راکتورهای هسته‌ای بی‌خطر.(که استفاده از نظریهٔ

1. Morre 2. David Krantz

قابلیت اعتماد در آن با انتقاد آماردانان روبه‌رو شده) کار می‌کنند. نتیجه در مورد ریاضیات این شد که به جامعه، فرهنگ و صنعت سود رسید و هم از این طریق ریاضیات غنی‌تر شد، در سطح وسیعتری شناخته شد، و به‌طور کلی از سلامت بیشتری برخوردار شد.

مسلماً وضع آمار تشابه کاملی با ریاضیات ندارد؛ با وجود این، آنقدر مشابهت هست که بتوان هم نسبت به حرفهٔ آمار و هم نسبت به خود آماردانان خوشبین بود. تنوع روبه گسترش و قابل ملاحظهٔ کاربردهای آمار و تأثیرات متقابل فوق‌العاده پرباری که مابین ایده‌های آماری، روشهای محاسباتی و نظریه‌های ریاضی برقرار شده است، اهمیت و سرزندگی آمار را در آینده تضمین می‌کند.

مراجع

1. Barnard. G. A. (1963): Contribution to discussion. *J. Roy. Statist. Soc. Ser.* B **25**, 294
2. Bhattacharya, R. N. and Ranga Rao, R. (1976): *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.* Wiley, New York
3. Breiman. L.. Friedman. J. H., Olshen, R. A., Stone, C. J. (1984): *Classification and Regression Trees.* Wadsworth, Belmont, California
4. Cooley. J. W. and Tukey, J. W. (1965): An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comp.* **19**, 297-301
5. Efron, B. (1979 a): Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Ann. Statist.* **7**, 1-26
6. Efron, B. (1979 b): Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable. *SIAM Rev.* **21**, 460-480
7. Fieller, E. C., Hartley, H. O. and Pearson, E. S. (1957): Tests for rank correlation coefficients, I. *Biometrika* **44**, 470-81
8. Fieller, E. C. and Pearson, E. S. (1961): Tests for rank correlation coefficients. II. *Biometrika* **48**, 29-40
9. Finney, D. (2000): Whither... goes now the practice of statistical science? *Roy. Statist. Soc. News* **27** No. 7, 1-2
10. Hartigan, J. A. (1969): Using subsample values as typical values. *J. Amer. Statist. Assoc.* **64**, 1303-1317
11. Hartigan, J. A. (1971): Error analysis by replaced samples. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **33**, 98-110
12. Jones, H. L. (1956): Investigating the properties of a sample mean by employing random subsample means. *J. Amer. Statist. Assoc.* **51**, 54-83
13. Krantz, D. H. (1999): The null hypothesis controversy in psychology. *J. Amer. Statist. Assoc.* **94**, 1372-1381
14. McCarthy, P. J. (1966): Replication (an approach to the analysis of data from complex surveys): *National Center for Health Statistics*
15. McCarthy, P. J. (1969): Pseudo-replication: half-samples. *Rev. Int. Statist. Inst.* **37**. 239-264
16. Madow, W. G., and Madow, L. H. (1944): On the theory of systematic sampling, I. *Ann. Math. Statist.* **15**, 1-24
17. Mahalanobis, P. C. (1946): Report on the Bihar crop survey: Rabi season 1943-1944. *Sankhyā* **7**, 269-280
18. Pearson, E. S. and Snow, B. A. S. (1962): Tests for rank correlation coefficients. III. Distribution of the transformed Kendall coefficient. *Biometrika* **49**, 185-191
19. Porter, T. (1986): *The Rise of Statistical Thinking, 1820-1900.* Princeton University Press, Princenton
20. Prasad, R. M., Sinha, A. K., and Mahalanabis, A. K. (1977): Two- stage bootstrap algorithms for parameter estimation. *Internat. J. Systems Sci.* **8**, 1365-1374
21. Rowe, I. H. (1970): A bootstrap method for the statistical estimation of model parameters. *Internat. J. Control* **12**, 721-738
22. Simon, J. L. *Basic Research Methods in Social Science.* Random House, New York
23. Sunday Times Magazine, The (1991): *1000 Makers of the Twentieth Century.* Times Newspapers Ltd, London
24. Varberg, D. (1994): The development of modern statistics. In: *From Five Fingers to Infinity. A Journey Through the History of Mathematics.* Ed. F. J. Swetz. Open Court, Chicago
25. Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1902): *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, UK

* * * * * *

• Peter Hall, "Statstical science: Evolution, motivation and direction", in *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid (eds.), springer (2001).

* پیتر هال، دانشگاه ملی استرالیا

همه به توزیع نرمال اعتقاد دارند، تجربه گران به این دلیل که آن را یک قضیهٔ ریاضی می‌پندارند و ریاضیدانان به این دلیل که آن را یک واقعیت تجربی می‌انگارند.

لیپمن (G. Lippmann)

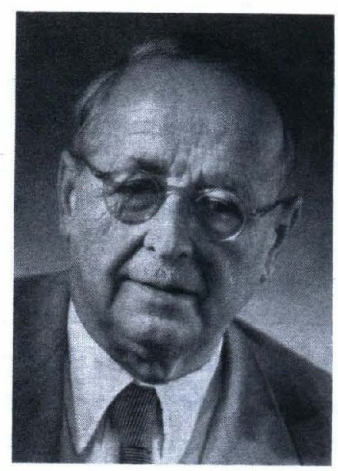
فیزیکدان فرانسوی (۱۹۲۲_۱۸۴۵)

مقالهٔ کلاسیک

توپولوژی و جبر مجرد: دو رهیافت به درک ریاضی

هرمان وایل

ترجمهٔ حمیدرضا طاهری



Hermann Weyl

پذیرفتن یک واقعیت ریاضی که به زور زنجیره‌ای پیچیده از استدلال و محاسبهٔ صوری چشم بسته و گام به گام حاصل می‌شود چندان خوشایندمان نیست. دوست داریم دیدگاهی کلی نسبت به هدف و مسیر اثبات داشته باشیم، می‌خواهیم ایدهٔ اثبات را درک کنیم، و به چارچوب عمیقتر دست یابیم، اثبات مدرن ریاضی با یک ماشین مدرن یا یک طرح آزمایش چندان متفاوت نیست: اصول بنیادی ساده در پسِ توده‌ای از جزئیات فنی پنهان و تقریباً غیرقابل رؤیت‌اند. وقتی فلیکس کلاین در رشته سخنرانیهایش در مورد ریاضیات قرن نوزدهم در بارهٔ ریمان صحبت می‌کرد گفت:

> بی‌شک تاج افتخار هر نظریهٔ ریاضی اثبات قانع‌کنندهٔ همهٔ احکام آن است. شک نیست که ریاضیات با چشم‌پوشی از اثبات قانع‌کننده به اعتبار خود صدمه خواهد زد. امّا رمز اکتشافات درخشان همواره ارائهٔ پرسشهای نو خواهد بود و زمینه‌سازی برای قضایای جدید که نتایج و ارتباطات جدیدی را

هرمان وایل (Hermann Weyl) را بعضیها آخرین دانشمندی می‌دانند که نه تنها بر همهٔ شاخه‌های ریاضیات زمان خود تسلط داشت و آثار ماندنیِ متعددی در ریاضیات از خود به جا گذاشت بلکه از تأثیرگذارترین دانشمندان فیزیک ریاضی در نیمهٔ اول قرن بیستم بود. وی در فلسفه و هنر نیز صاحبنظر بود. وایل در سال ۱۸۸۵ در آلمان متولد شد، تحصیلات دانشگاهی خود را در دانشگاههای مونیخ و گوتینگن گذراند و سپس مدتی در دانشکدهٔ فنی زوریخ تدریس می‌کرد. وقتی در سال ۱۹۳۰ به استادی گوتینگن دعوت شد، او را جانشین طبیعی هیلبرت قلمداد می‌کردند ولی او پس از چند سال به عضویت دائم مؤسسهٔ مطالعات عالی در پرینستن در آمد و تا سال ۱۹۵۴ که بازنشسته شد در آنجا ماند. هرمان وایل در سال ۱۹۵۵ در زوریخ درگذشت. کتابهای معروف او عبارت‌اند از فضا-زمان-ماده، ذهن و طبیعت، گروههای کلاسیک، نظریهٔ جبری اعداد، فلسفهٔ ریاضیات و علوم طبیعی، پیوستار (که تحت تأثیر افکار شهودگرایانهٔ براوْر نوشته شده)، و تقارن.

متن حاضر ترجمهٔ سخنرانی هرمان وایل در دورهٔ تابستانی جامعهٔ سوئیسی دبیران در اکتبر ۱۹۳۱ در شهر برن است که نخستین بار در

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, **38** (1932) 177-188

به زبان آلمانی چاپ رسیده و در جلد سوم از چهار جلد مجموعهٔ آثار وایل تجدیدچاپ شده است. ترجمهٔ انگلیسی مقاله به قلم ایب شنیتسر (Abe Shenitzer) در مجلهٔ امریکن متمتیکال مانتلی در دو بخش (شماره‌های ماه مه و اوت-سپتامبر ۱۹۹۵) به چاپ رسیده و ترجمهٔ فارسی از روی این متن انگلیسی به عمل آمده است. عنوان انگلیسی مقاله این است:

"Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension"

> در دسترس قرار خواهند داد. بدون خلق‌کردن دیدگاههای جدید و بدون ارائهٔ هدفهای نو، ریاضیات به‌سرعت در موشکافیهای اثباتهای منطقی مستهلک خواهد شد و با از دست رفتن مایه‌اش به رکود خواهد گرایید. بدین ترتیب، به اعتباری، ریاضیات بیشتر توسط کسانی به پیش رفته است که وجه مشخصه‌شان شهود بوده است نه ارائهٔ اثباتهای دقیق.

عنصر اساسی روش خود کلاین، درکی شهودی از ارتباطات درونی بود که مبانی‌شان پراکنده بود. تا حدی می‌توان گفت وقتی یک کوشش متمرکز منطقی مورد نیاز بود او چندان موفّق نبود. در خطابه‌اش به مناسبت یادبود دیریکله، مینکوفسکی از تمایز میان اصل مینیممی که آلمانیها تمایل دارند به دیریکله نسبت دهند (و درواقع ویلیام تامسن گسترده‌ترین استفاده را از آن کرده است) و اصل راستین دیریکله صحبت کرد: فایق‌آمدن بر مسائل با حداقل محاسبهٔ کورکورانه و حداکثر تفکّر روشنگرانه. مینکوفسکی می‌گفت که در واقع دیریکله بود که عصر جدیدی را در تاریخ ریاضیات فرا آورد.

رمز این‌گونه درک[1] امور ریاضی چیست و از چه عناصری تشکیل شده است؟ اخیراً در فلسفهٔ علم کوششهایی صورت گرفته است که میان درک، یا مهارت تعبیر در علوم انسانی، و تبیین[2] علمی، تمایزی قایل شوند، و لغات شهود و درک در فلسفه با هاله‌ای از اسرار آمیخته شده‌اند که نوعی عمق ذاتی و بلاواسطگی را تداعی می‌کند. در ریاضیات ترجیح ما این است که با اعتدال و به دور از احساسات به امور بنگریم. در اینجا من نمی‌توانم به این مطالب وارد شوم و به نظرم می‌رسد که تحلیل دقیقی از عملیات ذهنی ذی‌ربط بسیار دشوار است. ولی دست‌کم می‌توانم از میان شاخصه‌های متعدّد فرایند درک یکی را که از اهمیتی تعیین‌کننده برخوردار است برگزینم. می‌توان جنبه‌های مختلف یک کار تحقیقی ریاضی را از هم جدا ساخت، به هر یک از طریق مجموعهٔ پیش‌فرضهای نسبتاً محدود و آسان‌یاب آن دسترسی یافت، و آنگاه با ترکیب این نتایج جزیی به کل پیچیدهٔ آن بازگشت. این گام ترکیبی نهایی صرفاً مکانیکی است. هنر اصلی در اولین گام، تفکیک تحلیلیِ مناسب و تعمیم است. ریاضیات چند دههٔ اخیر از تعمیم و صوری‌سازی بهرهٔ بسیار برده است. امّا این تصور که تعمیم در ریاضیات به خاطر نفس تعمیم است، برداشت نادرستی از این واقعیت است که تعمیم طبیعی به سبب تقلیل‌دادن تعداد فرضها موجب ساده‌سازی می‌شود و درک بعضی جنبه‌های مسألهٔ تفکیک‌شده را میسّر می‌سازد. بدین ترتیب صحبت از زمینهٔ راستین یا منبع راستین یک مسأله، امری ذهنی و مبتنی بر جزمیت دلبخواه است. شاید تنها ضابطهٔ طبیعی‌بودن یک تفکیک و تعمیم متناظر آن ثمربخش‌بودن آن است. اگر این فرایند به طریقی اسلوبمند، بسته به موضوع، به‌دست یک محقق کار آموخته و زبردست انجام گیرد که با اتکا به قیاسهای حاصل از تجربه‌اش عمل می‌کند، به اصول موضوعی می‌رسیم که امروزه بیشتر حربهٔ کاوش عملی ریاضی است تا وسیله‌ای برای روشن‌سازی و تعمیق مبانی.

در سالهای اخیر ریاضیدانان آنقدر به موضوعهای کلّی و صوری‌سازی پرداخته‌اند که همان‌طور که انتظار می‌رفت، موارد بسیاری از تعمیم آسان و بیمایه ظاهر شده است. پولیا به این پدیده «تعمیم با رقیق‌سازی» نام داده است. این عمل، کارمایهٔ اساسی ریاضی را افزایش نمی‌دهد. بلکه مانند طولانی‌ساختن مدت صرف غذا با رقیق‌کردن آش است. این را باید زوال تلقی کرد، نه پیشرفت. کلاین در کهنسالی گفت: «به نظر من ریاضیات مثل مغازه‌ای شده است که در دوران صلح اسلحه می‌فروشد. ویترین مغازه مملو از اقلام لوکسی است که عملکرد مبتکرانه، ماهرانه و چشمگیرشان برای صاحبنظران تحسین‌برانگیز است، ولی هدف واقعی از ساخت این اشیاء، که ضربه‌زدن و شکست دادن دشمن باشد، به حاشیه رانده‌شده و عملاً فراموش شده است.» شاید این اتهام عاری از حقیقت نباشد، ولی در مجموع، نسل ما این ارزیابی از کوششهایش را غیرمنصفانه می‌پندارد.

دو شیوهٔ درک وجود دارد که در زمان ما به‌گونه‌ای ویژه نافذ و باثمر از آب درآمده است. این دو، توپولوژی و جبر مجرد هستند. جایای این دو شیوهٔ تفکّر را می‌توان در بخش عظیمی از ریاضیات مشاهده کرد. با بررسی مفهوم عدد حقیقی می‌توان از آغاز به ریشهٔ این امر پی برد. دستگاه اعداد حقیقی مانند سر یانوس[1] است که دو صورت پشت به هم دارد. از یک سو این دستگاه قلمرو اعمال جمع و ضرب و وارون آنهاست، و از سوی دیگر یک خمینهٔ پیوسته است، و دو نظام به‌طور پیوسته به هم مرتبط‌اند. یکی چهرهٔ جبری و دیگری چهرهٔ توپولوژیک اعداد است. از آنجا که دستگاه اصل موضوعی مدرن ساده‌نگر است و (برخلاف امور سیاسی مدرن) از آمیزه‌های مبهم صلح و جنگ گریزان، بین این دو جنبه تفکیکی روشن قائل شده است. مفهوم اندازهٔ یک عدد، که با روابط $>$ و $<$ بیان می‌شود، زمینه‌ای میانی بین جبر و توپولوژی است.

بررسی پیوستارها صرفاً توپولوژیک است در صورتی که به آن خصوصیات و تمایزهایی محدود شود که تحت اثر دگردیسی‌های پیوستهٔ دلخواه یا نگاشتهای پیوستهٔ دلخواه تغییر نمی‌کنند. نگاشتها لازم است فقط تا آن اندازه خواص را حفظ کنند که نقاط متمایز را به یک نقطه ننگارند. بدین ترتیب اینکه یک رویه مانند سطح کره بسته باشد یا مانند صفحهٔ عادی، باز، یک خاصیت توپولوژیک است. قطعه‌ای از صفحه، ساده‌ـهمبند خوانده می‌شود اگر مانند درون یک دایره هر برش آن را تجزیه کند. از طرف دیگر یک ناحیهٔ حلقوی دوگانه‌ـهمبند است به این مفهوم که برشهایی وجود دارند که آن را تجزیه نمی‌کنند ولی هر برش بعدی منجر به تجزیه می‌شود. هر خم بسته روی سطح کره را می‌توان با تغییرشکل پیوسته در یک نقطه جمع کرد ولی برای سطح چنبره چنین نیست. دو خم بسته در فضا ممکن است به هم زنجیر شده یا نشده باشند. اینها نمونه‌هایی از خواص و وضعیتهای توپولوژیک‌اند که به تمایزهای ابتدایی که زیربنای اشتقاقات ظریفتر اشکال هندسی است مربوط‌اند و به تک مفهوم همبندی پیوسته تکیه دارند. ارجاع به ساختارهای خاص یک خمینهٔ پیوسته، مانند متریک لِبِگ، با توپولوژی بیگانه است. مفاهیم ذی‌ربط دیگر، مفهوم حدّ، همگرایی یک دنبالهٔ نقاط به نقطه‌ای، همسایگی و خط پیوسته است.

پس از این مرور مقدماتی بر توپولوژی، می‌خواهم در مورد انگیزه‌هایی که موجب پیدایش جبر مجرّد شد به اختصار صحبت کنم. آنگاه با مثالی ساده نشان خواهم داد که چگونه می‌توان به یک موضوع از دو دیدگاه توپولوژیک و جبر مجردی نگریست.

تنها کاری که یک جبردان محض می‌تواند با اعداد انجام دهد به کارگیری چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است. اگر یک دستگاه یک میدان باشد، یعنی تحت این عملیات بسته باشد، جبردان نمی‌تواند به بیرون این

1. understanding 2. explanation

۱. Janus، رب‌النوع دروازه‌ها در اساطیر رومی که دو صورت داشت و هر دو طرف را نظاره می‌کرد.م.

مجموعه یا بگذارد. ساده‌ترین میدان، میدان گویاست. مثال دیگر میدان اعدادِ به شکل $a+b\sqrt{۲}$ است که در آن a و b اعداد گویا هستند. مفهوم معروف تحویل‌ناپذیری چندجمله‌ای‌ها نسبی است و به میدان ضرایب چندجمله‌ای وابسته است. چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب در میدان K روی K تحویل‌ناپذیر خوانده می‌شود در صورتی که نتوان آن را به‌صورت $f_۱(x)\cdot f_۲(x)$ نوشت که در آن $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ دو چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب در K باشند. حل معادلات خطی و تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترک دو چندجمله‌ای توسط الگوریتم اقلیدسی به‌ترتیب در چارچوب میدان ضرایب معادلات و چندجمله‌ایها صورت می‌گیرند. مسألهٔ کلاسیک جبر، حلّ معادلهٔ جبری $f(x)=۰$ است که ضرایب آن متعلّق به میدانی چون K، مثلاً میدان اعداد گویا، است. اگر ریشه‌ای چون ϑ از این معادله معلوم باشد، آنگاه می‌توانیم به همهٔ اعدادی که با به‌کارگیری چهار عمل جبری بر ϑ و عناصر (معلوم) K حاصل می‌شوند دست یابیم. اعدادی که به این طریق به‌دست می‌آیند میدانی چون $K(\vartheta)$ تشکیل می‌دهند که شامل K است. در $K(\vartheta)$، ϑ نقش یک عدد تعیین‌کننده را دارد که می‌توان همهٔ اعداد دیگر $K(\vartheta)$ را به‌صورت اشتقاقی گویا از ϑ به‌دست آورد. اما بسیاری دیگر از عناصر $K(\vartheta)$، عملاً همهٔ آنها، نقشی مشابه ϑ دارند. بنابراین اگر به‌جای بررسی معادلهٔ $f(x)=۰$ به بررسی $K(\vartheta)$ بپردازیم، به اقدامی پیشرونده دست زده‌ایم زیرا با این عمل همهٔ نکات پیش‌پا افتاده را پشت سر می‌گذاریم و همهٔ معادلاتی را که می‌توان به کمک تبدیلات چرنهاوزن[1] از $f(x)=۰$ به‌دست آورد تواماً مورد بررسی قرار می‌دهیم. نظریهٔ جبری، و بالاخص نظریهٔ حسابیِ میدانهای عددی یکی از والاترین ابداعات ریاضیات است، و از نظر غنا و عمق نتایج، کاملترینِ آنهاست.

میدانهایی در جبر هستند که عناصرشان عدد نیستند. مجموعهٔ چندجمله‌ایهایِ با یک متغیر یا مجهول x (با ضرایب در یک میدان) تحت جمع، تفریق و ضرب بسته است ولی تحت تقسیم بسته نیست. چنین دستگاه کمیاتی را یک حوزهٔ صحیح می‌نامند. این ایده که حرف x یک متغیر است که به‌طور پیوسته مقادیری را به خود می‌گیرد با جبر بیگانه است، بلکه x فقط یک نماد خالی است که ضرایب چندجمله‌ای را به‌صورت یکنواختی می‌آراید و به‌خاطرسپردن قواعد جمع و ضرب را آسان می‌سازد. ۰ آن چندجمله‌ای است که همهٔ ضرایبش صفر است (نه آن چندجمله‌ای که به‌ازای هر مقدار متغیر x مقدار صفر را می‌گیرد). می‌توان نشان داد که حاصلضرب هر دو چندجمله‌ای ناصفر، خود ناصفر است. دیدگاه جبری، جایگزینی یک عدد a از میدان را به‌جای x منع نمی‌کند. اما می‌توان به‌جای x یک چندجمله‌ای با یک یا چند مجهول y، z ... را نیز قرار داد. چنین جایگزینی یک فرایند صوری است که حوزهٔ صحیح $K[x]$ (چندجمله‌ایهای برحسب x) را با «حفظ ساختار» بر K یا حوزهٔ صحیح $K[y,z,\ldots]$ می‌نگارد. در اینجا مقصود «حفظ ساختار» به معنای حفظ روابطی است که عملیات جمع و ضرب ایجاب می‌کنند. این عملیات صوری با چندجمله‌ایهاست که قرار است در درس جبر به دانش‌آموزانمان یاد دهیم. اگر نسبت چندجمله‌ایها را در نظر بگیریم به میدان تابعهای گویا دست می‌یابیم که باید به همان شیوهٔ صوری با آن برخورد کنیم. در اینجا میدانی داریم که عناصر آن تابع هستند نه عدد. مشابهاً، چندجمله‌ایها و تابعهای گویا با دو یا سه متغیر x، y یا x، y، z با ضرایب در K به‌ترتیب تشکیل یک حوزهٔ صحیح یا میدان می‌دهند.

سه حوزهٔ صحیح زیر را با هم مقایسه کنید: اعداد صحیح، چندجمله‌ایهای برحسب x با ضرایب گویا، و چندجمله‌ایهای برحسب x و y با ضرایب گویا. الگوریتم اقلیدسی در حوزهٔ اول برقرار است و قضیهٔ زیر حاصل می‌شود: اگر a و b دو عنصر نسبت به هم اول باشند، آنگاه عناصر p و q در حوزهٔ صحیح مناسب وجود دارند که:

$$۱=p\cdot a+q\cdot b \qquad (*)$$

این مطلب نتیجه می‌دهد که دو حوزهٔ صحیح فوق حوزه‌های تجزیهٔ یکتا هستند. قضیهٔ $(*)$ برای چندجمله‌ایهای دومتغیری برقرار نیست. مثلاً $x-y$ و $x+y$ نسبت به هم اول هستند ولی برای هر انتخاب چندجمله‌ایهای $p(x,y)$ و $q(x,y)$، ضریب ثابت چندجمله‌ای $p(x,y)(x-y)+q(x,y)(x+y)$ صفر است نه یک. با وجود این، چندجمله‌ایهای دو متغیری با ضرایب در یک میدان تشکیل یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا می‌دهند. این مثال به شباهتها و تمایزهای جالب توجّهی اشاره دارد.

در جبر راه دیگری نیز برای ساختن میدان وجود دارد. در این راه نه از اعداد و نه از توابع، بلکه از همنهشتی‌ها استفاده می‌شود. p را یک عدد اول می‌گیریم. دو عدد صحیح را یکی می‌گیریم اگر تفاضل آنها بر p قابل قسمت باشد، یا به عبارت دیگر اگر به پیمانهٔ p همنهشت باشند. (برای «رؤیت» این امر، محور حقیقی را حول دایره‌ای به محیط p بپیچانید.) حاصل، یک میدان با p عنصر است. این نمایش در همهٔ نظریهٔ اعداد فوق‌العاده سودمند است. مثلاً این قضیهٔ گاوس را در نظر بگیرید که کاربردهای متعددی دارد: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشند که همهٔ ضرایب حاصلضرب آنها، $f(x)\,g(x)$، بر p قابل‌قسمت باشد، آنگاه همهٔ ضرایب $f(x)$، یا همهٔ ضرایب $g(x)$، بر p قابل قسمت‌اند. این درواقع چیزی جز این قضیهٔ بدیهی نیست که حاصلضرب دو چندجمله‌ای نمی‌تواند صفر شود مگر اینکه یکی از عوامل صفر باشد، که البته در اینجا چندجمله‌ایها با ضرایب در میدان توصیف شده در بالا گرفته شده‌اند. این حوزهٔ صحیح دارای چندجمله‌ایهایی است که صفر نیستند ولی به‌ازای همهٔ مقادیر متغیّر صفر می‌شوند. یک چنین چندجمله‌ای x^p-x است. درواقع طبق قضیهٔ فرما داریم

$$a^p-a\equiv ۰\ (p\text{ پیمانهٔ})$$

کوشی از رهیافت مشابهی برای ساختن اعداد مختلط استفاده می‌کند. او از واحد موهومی i به‌عنوان متغیر استفاده می‌کند و چندجمله‌ایهای روی اعداد حقیقی به پیمانهٔ $i^۲+۱$ را در نظر می‌گیرد، یعنی دو چندجمله‌ای یکی گرفته می‌شوند در صورتی که تفاضل آنها بر $i^۲+۱$ قابل‌قسمت باشد. با این روش، معادلهٔ غیرقابل حلّ $i^۲+۱=۰$ به اعتباری حلّ شده در نظر گرفته می‌شود. توجه کنید که معادلهٔ $i^۲+۱$ روی اعداد حقیقی اول است. کرونکر ساخت کوشی را به طریق زیر تعمیم داد. فرض کنید K یک میدان باشد و $p(x)$ یک چندجمله‌ای اول روی K. اگر چندجمله‌ایهای $f(x)$ روی K به پیمانهٔ $p(x)$ در نظر گرفته شوند، یک میدان تشکیل می‌دهند (و نه فقط یک حوزهٔ صحیح). از نظر جبری این فرایند کاملاً معادل روش پیشین است و می‌توان آن را فرایند توسیع K به $K(\vartheta)$ با الصاق یک ریشه از $p(\vartheta)=۰$

1. Tschirnhausen

تلّقی کرد. اما این ارجحیت را دارد که در قلمرو جبر محض صورت می‌گیرد و نیازی به حلّ‌کردن معادله‌ای که روی K حل‌نشدنی است ندارد.

کاملاً طبیعی است که این پیشرفتها موجب یک ساخت‌وساز صرفاً اصل موضوعی برای جبر شده باشد. یک میدانْ دستگاهی از اشیاء، موسوم به عدد، است که تحت دو عمل به نام جمع و ضرب که در اصول موضوع معمول صدق می‌کنند بسته است: هر دو عمل شرکت‌پذیر و جابه‌جایی [تعویض‌پذیر] هستند، ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است، و هر دو عمل به صورتی یکتا وارون‌پذیرند و تفریق و تقسیم را نتیجه می‌دهند. اگر اصل وارون‌پذیری ضرب حذف شود، دستگاه حاصل را حلقه می‌نامند. اکنون دیگر «میدان» لزوماً، مانند قبل، به بخشی از پیوستار اعداد حقیقی یا اعداد مختلط اطلاق نمی‌شود، بلکه یک جهان قائم به ذات است. عملیات میدان را می‌توان بر عناصر یک میدان اعمال کرد ولی بر عناصر میدانهای مختلف نمی‌توان. در این فرایند نیازی نیست که به تجرید مصنوعی روابط اندازه‌ای، $>$ و $<$، بپردازیم. این روابط به جبر ارتباطی ندارند و «اعدادِ» یک «میدان عددی» مجّرد لازم نیست که تابع چنین روابطی باشند. به جای پیوستار عددی یکنواخت آنالیز، اکنون ما بینهایت میدان با ساختارهای مختلف داریم. اکنون می‌توان ملاحظه کرد که فرایندهایی که قبلاً توصیف کردیم، یعنی الحاق یک متغیّر و یکی گرفتن عناصری که نسبت به یک عنصر اول ثابت همنهشت باشند، دو شیوهٔ ساخت هستند که از حلقه‌ها و میدانهای داده شده، حلقه‌ها و میدانهای دیگری پدید می‌آورند.

پایه‌ریزی اصل موضوعیِ ابتدایی هندسه نیز ما را به مفهوم مجرّد عدد سوق می‌دهد. مورد هندسهٔ مسطحهٔ افکنشی [تصویری] را در نظر بگیرید. اصول موضوع وقوع به‌تنهایی به یک «میدان عددی» منجر می‌شوند که ارتباطی طبیعی با آن دارد. عناصر آن، یعنی «اعداد»، اشیایی صرفاً هندسی، و به واقع اتساع[1]ها هستند. در اینجا نقطه و خط به ترتیب نسبتهای سه‌تایی‌های «اعداد» این میدان‌اند، یعنی $x_1 : x_2 : x_3$ و $u_1 : u_2 : u_3$، به این صورت که واقع‌شدن نقطهٔ $x_1 : x_2 : x_3$ بر خط $u_1 : u_2 : u_3$ با معادلهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

بالعکس اگر از این عبارتهای جبری برای تعریف اصطلاحات هندسی استفاده کنیم، هر میدان مجرّد به یک صفحهٔ افکنشی وابسته منجر می‌شود که در آن اصول وقوع برقرارند. نتیجه اینکه می‌توان از اصول وقوع محدودیت خاصی را بر میدان عددی نتیجه گرفت. در اینجا همسازی پیشینی میان هندسه و جبر به چشمگیرترین صورت نمایان می‌شود. برای اینکه دستگاه عددی هندسی به پیوستار اعداد حقیقی معمولی مبدل شود باید اصول موضوع ترتیب و پیوستگی را وارد کار کنیم که ماهیتی بسیار متفاوت با اصول موضوع وقوع دارند. بدین ترتیب به معکوس جریانی که قرنها بر ریاضیات سلطه داشته است و به نظر می‌آید در ابتدا از هندوستان شروع شده و از طریق متون عربی به غرب متصل شده است می‌رسیم؛ تاکنون مفهوم عدد را پیشینهٔ منطقی هندسه می‌پنداشته‌ایم و در رویکرد به هر قلمرو اندازه، مفهومی تمام و اسلوبمند از عدد در نظر داشته‌ایم که مستقل از کاربردهای خاص است. ولی اکنون به دیدگاه یونانیان رجعت می‌کنیم که طبق آن هر موضوع قلمرو عددی ذاتی مربوط به خود را دارد که از درون آن می‌تراود. این رجعت را نه فقط در هندسه بلکه در فیزیک کوانتومی نوین نیز می‌بینیم. طبق فیزیک کوانتومی، اندازه‌های فیزیکی وابسته به یک وضعیت فیزیکی خاص (نه مقادیر عددی که بسته به حالات مختلف اتخاذ می‌کنند) پذیرای نوعی جمع و نیز ضرب ناجابه‌جایی (غیرتعویض‌پذیر) هستند، و بدین ترتیب به یک دستگاه اندازه‌های جبری منجر می‌شوند که ذاتاً وابسته به آن است و بخشی از دستگاه اعداد حقیقی نیست.

و اکنون، همچنان که قول دادم، مثالی ساده ارائه خواهم کرد که تعامل میان شیوه‌های تحلیل توپولوژیک و جبر مجردی را مجسم می‌سازد. من نظریهٔ توابع جبری از یک متغیر x را در نظر خواهم گرفت. فرض کنید $K(x)$ میدان تابعهای گویا از x با ضرایب دلخواه مختلط است. همچنین فرض کنید $f(x)$، یا به‌طور دقیقتر $f(z;x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n نسبت به z با ضرایب در $K(x)$ باشد. قبلاً توضیح دادیم که چه وقت یک‌چنین چندجمله‌ای، تحویل‌ناپذیر روی $K(x)$ محسوب می‌شود. این یک مفهوم صرفاً جبری است. حال رویهٔ ریمانی n ارزشی تابع $z(x)$ را که به‌وسیله معادلهٔ $f(z;x) = 0$ تعیین می‌شود بسازید. n لایهٔ این رویهٔ ریمانی روی صفحهٔ x قرار می‌گیرند. برای سهولت کار، توسط افکنش گنجنگاری، به صفحهٔ x نقطه‌ای در بینهایت می‌افزاییم و صفحهٔ x را به کرهٔ x مبدل می‌کنیم. مانند کره، رویهٔ ریمانی مربوط نیز اکنون بسته خواهد بود. تحویل‌ناپذیری چندجمله‌ای f در یک ویژگی بسیار سادهٔ توپولوژیک رویهٔ ریمانی $z(x)$ بازتاب می‌یابد، که آن همبندبودن رویهٔ ریمانی است: اگر یک مُدل کاغذیِ این رویهٔ ریمانی را تکان دهیم این کاغذ تکه‌تکه نمی‌شود. در اینجا شاهد تطابق یک مفهوم صرفاً جبری و یک مفهوم صرفاً توپولوژیک هستیم. این دو، تعمیمهایی در جهتهای مختلف به ذهن القاء می‌کنند. مفهوم جبری تحویل‌ناپذیری به این وابسته است که ضرایب چندجمله‌ای عناصر یک میدان هستند. بالاخص می‌توان به‌جای $K(x)$ از میدان تابعهای گویا نسبت به x با ضرایب در یک میدان مفروض K که جایگزین پیوستار اعداد مختلط می‌شود استفاده کرد. از طرف دیگر، از دیدگاه توپولوژی اینکه رویهٔ در دست یک رویهٔ ریمانی است، دارای ساختار همدیسی است، و از تعدادی متناهی لایه تشکیل شده که بالای صفحهٔ x قرار دارند، همه بی‌ربط است. هر طرف می‌تواند دیگری را به داخل‌کردن مسائل جانبی وندیده‌گرفتن جنبه‌های اساسی متّهم کند. کدام درست می‌گوید؟ پرسشهایی از این قبیل، که به خودِ واقعیات مربوط نیستند بلکه به شیوه‌های نظارهٔ واقعیات مربوط‌اند، ممکن است در صحنهٔ اجتماع و در برخورد با عواطف انسانی موجب غوغا و کشمکش شوند. در ریاضیات، عواقب آنچنان جدی نیست. با این حال تمایز میان نظریهٔ توپولوژیک ریمان در باب توابع جبری و مکتب جبرگرای وایرشتراس منجر به انشعابی میان ریاضیدانان شد که تقریباً یک نسل به درازا کشید.

وایرشتراس خود به شاگرد وفادارش هرمان شوارتس نوشت: «هر چه بیشتر در مورد اصول نظریهٔ توابع غور می‌کنم ــ که البته اشتغال ذهنی دائمی من است ــ بیشتر این اعتقادم تقویت می‌شود که نظریه باید بر مبنای حقایق جبری بنا شود، و بنابراین، این روش درستی نیست که بالعکس از «مفاهیم متعالی» (به اختصار) برای اثبات قضایای ساده و بنیادی جبری کمک بگیریم. این علی‌رغم جذابیتی است که مثلاً در نظر اول ملاحظاتی که ریمان بر مبنای آن بسیاری از مهمترین خواص توابع جبری را کشف کرد برای ما دارند.» امروزه این به نظر ما خیلی یکطرفه است، هیچ‌یک از دو

1. dilation

روش دِدِکِ، توپولوژیک و جبری، را نمی‌توان بی‌قید و شرط برتر از دیگری تلقی کرد. نمی‌توانیم به خاطر اینکه وایرشتراس برنامهٔ خود را نیمه‌کاره رها کرد او را سرزنش نکنیم. درست است که او صریحاً یک ساخت جبری از تابعها ارائه کرد ولی تحلیلی جبری از ضرایب به‌دست نداد، ضرایبی که در پیوستار اعداد مختلط قرار دارند و به اعتباری خارج از حیطهٔ تخیل جبردانان‌اند. نظریهٔ عمومی غالب در ادامهٔ راه وایرشتراس نظریهٔ میدانهای عددی مجرد و توسعه‌های آن با استفاده از معادلات جبری بوده است. بدین ترتیب نظریهٔ تابعهای جبری در جهت بنیاد اصل موضوعی مشترک با نظریهٔ اعداد جبری حرکت می‌کند. درواقع آنچه هیلبرت را به رهیافتهایش در نظریهٔ میدانهای عددی سوق داد قیاس [بین این نظریه] و وضعیت موجود در قلمرو تابعهای جبری بود که توسط ریمان با روشهای توپولوژیک کشف شده بود. (البته وقتی پای اثبات پیش می‌آید، این قیاس بی‌حاصل است.)

مثال ما از «تحویل‌ناپذیر-همبند» از نظری دیگر نیز نوعی و نمونه است. توجه کنید که ضابطهٔ توپولوژیک در مقایسه با ضابطه جبری چقدر از نظر بصری ساده‌تر و قابل درک‌تر است (مُدل کاغذی را تکان دهید و مشاهده کنید که جدا می‌شود یانه). تقدم بصری پیوستار (که به نظر من از این لحاظ بر ۱ و اعداد طبیعی برتری دارد)، از روش توپولوژیک حربهٔ مناسبی برای اکتشاف و جمع‌بندی ایده‌های ریاضی ساخته است، ولی همین امر وقتی اثباتهای دقیق مطرح می‌شود منشأ مشکلات این روش است؛ یعنی همان‌طور که به باصره نزدیک است، در برخوردهای منطقی رام‌ناشدنی است. به این دلیل است که وایرشتراس، ماکس نوتر و دیگران روشهای مستقیم ساخت جبری را که پرزحمت‌ترند، ولی مستحکم‌تر به‌نظر می‌رسند به روشهای متعالی-توپولوژیک ریمان ترجیح می‌دادند. اکنون، گام به گام، جبر مجرّد سازوبرگ ناهنجار محاسباتی را پاکیزه می‌کند. بدین ترتیب، جبر نقش الدورادو[1]ی روش اصل موضوعی را به خود می‌گیرد.

لازم است چندکلمه‌ای در مورد روش توپولوژی بیفزایم که تصویری که ارائه کرده‌ام بیش از حد گنگ و نادقیق نشود. برای اینکه یک پیوستار، مثلاً یک خمینهٔ دوبعدی بسته، یعنی یک رویه، را موضوع بررسی ریاضیاتی قرار دهیم، باید در ذهنمان آن را به تعدادی متناهی «قطعهٔ ساده» تجزیه کنیم که هر یک طبیعت توپولوژیک یک گوی مستدیر را داراست. این قطعات سپس طبق طرح ثابتی متوالیاً به قطعات کوچکتری تقسیم می‌شوند و بدین ترتیب هر نقطهٔ بخصوص پیوستارْ نقطهٔ تقارب دنباله‌ای نامتناهی از قطعات تودرتو خواهد بود که در فرایند تجزیهٔ متوالی حاصل می‌شوند. در حالت یک‌بُعدی، «تقسیم متعارف» یک پاره‌خط نصف‌کردن متوالی آن است. در حالت دوبُعدی هر یال نصف می‌شود و سپس هر قطعهٔ رویه به مثلثهایی تجزیه می‌شود که آن مثلثها از وصل‌کردن خطوطی روی رویه از وسط یالها به رئوس (قدیم و جدید) به دست می‌آیند. ساده‌بودن یک قطعه، قابلیت تقسیم آن به قطعات به دلخواه کوچک با تکرار این فرایند است. بهترین راه برای توصیف طرح تقسیم اولیه به قطعات کوچکتر، که از این پس آن را «اسکلت» خواهیم خواند، برچسب‌نهادن نمادین بر قطعات رویه، یالها و رئوس، و تجویز روابط مرزی متقابل این عناصر است. با پیگیری این تقسیمات متوالی، می‌توان گفت که خمینه توسط شبکه‌ای با تراکم فزاینده از مختصات فراگرفته می‌شود و نشانی‌دادن هر نقطه به‌وسیلهٔ دنباله‌ای نامتناهی از نمادها میسر می‌شود همان‌گونه که اعدادْ نقاط یک خط را مشخص می‌کنند. اعداد حقیقی در اینجا به‌صورت دودویی ظاهر می‌شوند و تقسیمات یک پیوستار باز یک‌بُعدی را نمایش می‌دهند. غیر از این می‌توان گفت که پیوستار طرح حسابی ذاتی خودش را دارد؛ ارائهٔ مختصات عددی با ارجاع به طرح تقسیم خاص یک پیوستار باز یک‌بعدی، نقض طبیعت امور است و تنها توجیه آن، سهولت خارق‌العادهٔ عملی درکاربری محاسباتی است که چهار عمل اصلی به ارمغان می‌آورد. در مورد یک پیوستار واقعی، تقسیمات با اندکی بی‌دقتی همراه است. باید در ذهن خود فرض کنیم که در طی تکرار تقسیمات، مرزهای تعیین‌شده توسط تقسیمات پیشین به‌طور فزاینده‌ای دقیقتر تثبیت می‌شوند. همچنین در مورد یک پیوستار واقعی، فرایند تقسیم که عملاً بی‌پایان است تنها به مرحلهٔ معیّنی می‌رسد. اما برخلاف تحقق عملی، نشانی‌دادن در یک پیوستار واقعی، یعنی طرح ترکیبیاتی، یا *nullform* حسابی، به‌طور پیشینی تا بینهایت مشخص است، و ریاضیات فقط با طرح ترکیبیاتی سروکار دارد. از آنجا که تقسیمات متوالی اسکلت توپولوژیک اولیه طبق طرح معیّنی به پیش می‌رود، باید بتوان همهٔ خواص توپولوژیک خمینهٔ اولیه را از اسکلت آن باز خواند. این بدان معنی است که به‌طور اصولی باید بتوان توپولوژی را به‌صورت ترکیبیات متناهی دنبال کرد. در توپولوژی، به اعتباری، عناصر غایی، یا اتمها، قطعات سادهٔ اسکلت هستند و نه نقاط خمینهٔ پیوستهٔ مورد بحث. بالاخص، اگر دو اسکلت در دست باشند باید بتوان دریافت که منجر به خمینه‌های هم‌ارز می‌شوند یا نه. به عبارت دیگر، باید بتوان دریافت که آیا می‌توان این دو اسکلت را تقسیمات خمینهٔ واحدی تلقی کرد یا نه.

همتای جبری گذر از معادلهٔ جبری $f(z;x)=0$ به رویهٔ ریمانی، گذر از معادله به میدان ایجادشده توسط تابع $z(x)$ است. دلیل آن این است که رویهٔ ریمانی فوق نه تنها زیستگاه تابع $z(x)$ است، بلکه زیستگاه همهٔ تابعهای جبری این میدان می‌باشد. آنچه شاخصهٔ نظریهٔ توابع به سبک ریمان است، مسألهٔ عکس است: ساختن میدان تابعهای جبری برای رویهٔ ریمانی داده شده. این مسأله همواره دارای راه‌حلّ منحصر به فردی است. از آنجا که هر نقطهٔ $\wp$ از رویهٔ ریمانی بالا سر نقطهٔ مشخصی از صفحهٔ x قرار دارد. رویهٔ ریمانی به این صورت که ارائه شده است در صفحهٔ x نشانده داده شده است. گام بعدی این است که از رابطهٔ نشاندن[1] $\wp \to x$ تجرید لازم را استخراج کنیم. نتیجه اینکه رویهٔ ریمانی یک رویهٔ به اصطلاح معلق می‌شود که مجهّز به یک ساختار همدیسی و اندازهٔ زاویه است. توجه کنید که از نظریهٔ معمول رویه‌ها باید یاد بگیریم که میان خود رویه که ساختاری پیوسته متشکل از عناصری از نوع خاص، یعنی نقاط آن، است و نشاندن رویه در فضای سه‌بعدی که به هر نقطهٔ $\wp$ از رویه نقطه‌ای چون P را در فضای زیستگاه منسوب می‌کند تمایز قایل شویم. در مورد رویهٔ ریمانی تنها تفاوت در این است که رویهٔ ریمانی و صفحهٔ زیستگاه همبُعد هستند. متناظر با تجرید فوق، از دیدگاه جبری، ناوردایی تحت تبدیلات دوگویا[2]ی دلخواه حاصل می‌شود. برای ورود به قلمرو توپولوژی باید از ساختار همدیسی منسوب به رویهٔ ریمانی صرف‌نظر کرد. در ادامهٔ مقایسه می‌توان گفت که ساختار همدیسی یک رویهٔ ریمانی هم‌ارز ساختار متریک یک رویهٔ عادی

۱. El Dorado شهر یا ناحیه‌ای احتمالاً تخیّلی در قارهٔ آمریکا که وفور طلا و جواهراتش در قرون ۱۶ و ۱۷ میلادی در میان اروپاییان زبانزد شده بود-م.

۱. امروزه به جای اصطلاح نشاندن (embedding) در این مورد، اصطلاح غوطه‌ورسازی (immersion) معمول است-م.

2. birational

است که توسط فرم اساسی اول تعیین می‌شود، یا مشابه ساختارهای مستوی و افکنشی که به رویه‌ها، به ترتیب، در هندسهٔ مستوی یا افکنشی دیفرانسیل نسبت داده می‌شود. در پیوستار اعداد حقیقی، عملیات جبری $+$ و $\cdot$ بازتاب جنبه‌های ساختاری هستند، و در یک گروه پیوسته، قانونی که به یک زوج مرتب از عناصر، حاصلضرب آنها را نسبت می‌دهد نقش مشابهی را ایفا می‌کند. این ملاحظات ممکن است فهم ما از ارتباط روشها را تقویت کرده باشد. مسأله در اینجا، مسألهٔ منزلت است، اینکه کدام را باید اولیه پنداشت. در توپولوژی با همبندی پیوسته شروع می‌کنیم و در طی خاص‌ترشدن مطلب، گام‌به‌گام خصوصیات ساختاری ذی‌ربط را می‌افزاییم. در جبر، به مفهومی، ترتیبْ معکوس است. در جبر، عملها آغاز تفکر ریاضی‌اند، و پیوستگی، یا جانشین جبری مناسبی برای آن، در آخرین گام تخصیص افزوده می‌شود. دو روش در جهتهای مخالف پیش می‌روند. بیخود نیست که با هم رابطهٔ خوبی ندارند. آنچه که در یکی از سهل‌الوصول‌ترین خواص است، بسیاری اوقات در دیگری از مکتوم‌ترین خاصیتهاست. در چند سال اخیر در نظریهٔ نمایش گروههای پیوسته به‌وسیلهٔ جایگزینی‌های خطی، من به‌گونه‌ای بارز دریافته‌ام که چه مشکل می‌توان این هر دو کارفرما را توأماً راضی نگاه داشت. نظریات کلاسیکی چون نظریهٔ توابع جبری را می‌توان با هر دو دیدگاه وفق داد؛ اما از منظر این دو دیدگاه، تصویرهای کاملاً متفاوتی ظاهر می‌شود.

پس از این همه اظهارات کلی اکنون می‌خواهم با دو مثال ساده مفهوم‌سازی‌های مختلف در جبر و توپولوژی را نشان دهم. مثال کلاسیک ثمربخش‌بودن روش توپولوژیک، نظریهٔ ریمان در بارهٔ توابع جبری و انتگرال آنهاست. اگر به رویهٔ ریمانی به‌عنوان یک رویهٔ توپولوژیک بنگریم، تنها مشخصهٔ آن عدد همبندی یا گونهٔ sp رویه است. برای کره $p = 0$ و برای چنبره p برابر ۱ است. سودمندبودن تقدم توپولوژی بر نظریهٔ تابعی از نقش قاطع عدد توپولوژیک p در نظریهٔ توابع روی رویهٔ ریمانی سرچشمه می‌گیرد. چند قضیهٔ چشمگیر را نقل می‌کنم: تعداد دیفرانسیلهای همه جا منظم مستقل خطی روی رویه برابر p است. مرتبهٔ کل (یعنی تفاضل تعداد صفرها و تعداد قطبهای) یک دیفرانسیل روی رویهٔ ریمانی برابر $2p - 2$ است. اگر بیش از p نقطه روی رویهٔ ریمانی مشخص کنیم، آنگاه دقیقاً یک تابع تک‌مقداری روی رویهٔ ریمانی وجود دارد که ممکن است در این نقاط قطب ساده داشته باشد و در جاهای دیگر منظّم باشد. اگر تعداد نقاط p بوده و این نقاط در وضعیت کلی قرار داشته باشند، آنگاه این مطلب دیگر درست نیست. جواب دقیق را قضیهٔ ریمان-رُخ ارائه می‌کند که در آن رویهٔ ریمانی تنها توسط عدد p در قضیه ظاهر می‌شود. اگر همهٔ تابعهای روی رویهٔ ریمانی را در نظر بگیریم که همه جا غیر از تک‌مکان p منظّم هستند و در p قطب دارند، آنگاه مرتبه‌های ممکن برای این تابعها همهٔ اعداد ۱، ۲، ۳، ... به استثنای بعضی توانهای p است (قضیهٔ حفره‌های وایرشتراس). به سادگی می‌توان مثالهای بسیار دیگری نیز از این نوع ارائه کرد. گونهٔ p به همهٔ نظریهٔ تابعهای روی یک رویهٔ ریمانی رخنه می‌کند. در هر گام به آن برمی‌خوریم، نقش آن مستقیم و بدون واسطهٔ محاسبات پیچیده ظاهر می‌شود و از معنای توپولوژیک آن قابل فهم است (با این فرض که اصل تامسن-دیریکله را از اول به عنوان یک اصل نظریهٔ توابع وارد کنیم).

قضیهٔ انتگرال کوشی اولین فرصت را برای ورود توپولوژی به نظریهٔ توابع فراهم می‌سازد. انتگرال یک تابع تحلیلی روی یک مسیر بسته صفر است مشروط به اینکه دامنهٔ تعریف تابع که شامل مسیر است ساده-همبند باشد. می‌خواهم نشان دهم چگونه می‌توان این وضعیت نظریهٔ تابعی را «توپولوژیزه» کرد. اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، انتگرال $\int_\gamma f(z)dz$ به هر خم عددی چون $f(\gamma)$ منسوب می‌کند به قسمی که:

$$F(\gamma_1 + \gamma_2) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2) \qquad (\dagger)$$

و در اینجا مقصود از $\gamma_1 + \gamma_2$ خمی است که در آن نقطهٔ انتهایی γ_1 برابر نقطهٔ ابتدایی γ_2 است. معادلهٔ تابعی (†) انتگرال $F(\gamma)$ را به‌عنوان یک تابع مسیری جمعی مشخص می‌کند. همچنین هر نقطه دارای یک همسایگی است که برای هر خم بستهٔ γ در آن همسایگی داریم $F(\gamma) = 0$. یک تابع مسیری با این خواص را از این پس یک انتگرال توپولوژیک، یا به‌طور خلاصه یک انتگرال، خواهم خواند. درواقع تنها پیش‌فرض این مفهوم وجود یک خمینهٔ پیوسته است که بتوان روی آن خم رسم کرد. این جوهرهٔ توپولوژیک مفهوم آنالیزی انتگرال است. انتگرالها را می‌توان با هم جمع کرد و در اعداد ضرب کرد: بخش توپولوژیک قضیهٔ انتگرال کوشی این مطلب را بیان می‌کند که روی یک خمینهٔ ساده-همبند هر انتگرال هومولوگ با صفر است (نه فقط در همسایگیها، بلکه به‌طور سرتاسری)، یعنی $F(\gamma) = 0$ برای هر خم بسته روی خمینه. تعریف «ساده-همبند» را در این مطلب بازمی‌یابیم. بخش نظریهٔ تابعی این مطلب را بیان می‌کند که انتگرال یک تابع تحلیلی یک انتگرال توپولوژیک به مفهومی است که ارائه کردیم. تعریف مرتبهٔ همبندی [که آمادهٔ ارائه آن هستیم] به راحتی در این چارچوب جا می‌افتد. انتگرالهای F_1، F_2، ...، F_n روی یک رویهٔ بسته، مستقل خطی خوانده می‌شوند اگر در یک رابطهٔ هومولوژی

$$c_1F_1 + c_2F_2 + \cdots + c_nF_n \sim 0$$

با ضرایب ثابت c_i صدق نکنند مگر اینکه همهٔ ضرایب صفر باشند. مرتبهٔ همبندی یک رویه حداکثر تعداد انتگرالهای مستقل خطی است. برای یک رویهٔ بستهٔ دوطرفه (پشت و رو دار) مرتبهٔ همبندی، h، همیشه برابر عدد زوج $2p$ است که p گونهٔ رویه می‌باشد. از مفهوم هومولوژی میان انتگرالها، می‌توانیم به مفهوم هومولوژی میان مسیرها گذر کنیم. رابطهٔ هومولوژی مسیری:

$$n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots + n_r\gamma_r \sim 0$$

بدین معنی است که برای هر انتگرال F تساوی

$$n_1F(\gamma_1) + n_2F(\gamma_2) + \cdots + n_rF(\gamma_r) = 0$$

برقرار است. اگر به اسکلت توپولوژیک که رویه را به قطعات ساده تقسیم می‌کند بازگردیم و به‌جای زنجیره‌های مسیرهای پیوسته، زنجیره‌های گسستهٔ متشکل از قطعات ساده را در نظر بگیریم، عبارتی برای مرتبهٔ همبندی، h، برحسب s، k، و e، یعنی تعداد قطعات، یالها و رأسها، به‌دست می‌آوریم. عبارت موردنظر فرمول چندوجهی معروف اویلر، یعنی $h = k - (e + s) + 2$ است. بالعکس، اگر با اسکلت توپولوژیک شروع کنیم، استدلال ما نتیجه می‌دهد که این ترکیب تعداد رئوس، یالها و قطعات یک ناوردای توپولوژیک است، یعنی برای اسکلتهای «هم‌ارز» که یک خمینهٔ واحد را نسبت به تقسیمات مختلف نمایش می‌دهند یکی است.

در کاربردهای نظریهٔ توابع، می‌توان با توسل به اصل تامسن-دیریکله، انتگرالهای توپولوژیک را به‌عنوان انتگرالهای واقعی دیفرانسیلهای تحلیلی-منظّم روی رویهٔ ریمانی به «تحقق» رساند. می‌توان گفت که همهٔ کار ساخت و ساز در جنبهٔ توپولوژیک اجرا می‌شود و تحقق نتایج توپولوژیک به‌شیوهٔ نظریهٔ تابعی به یاری یک اصل کلی انتقال که اصل دیریکله باشد صورت می‌گیرد. این به مفهومی مشابه هندسهٔ تحلیلی است که در آن کارهای ساخت و ساز در قلمرو اعداد صورت می‌گیرد و آنگاه نتایج به کمک یک اصل انتقال که در مفهوم مختصات نهفته است به «تحقق» هندسی می‌رسند.

همهٔ این مطالب را می‌توان به صورت کاملتری در نظریهٔ یکنواخت‌سازی مشاهده کرد که نقشی مرکزی در همهٔ نظریهٔ توابع ایفا می‌کند. اما در اینجا، ترجیح می‌دهم به کاربرد دیگری اشاره کنم که احتمالاً بسیاری از شما با آن آشنایی بیشتری دارید. مقصود من هندسهٔ شمارشی[1] است، که موضوع آن تعیین تعداد نقاط تقاطع، تکینه‌ها و مفاهیم مشابه ساختارهای جبری گویاست. برای این نظریه، شوبرت[2] و تسویتن[3] نظامی کلی ارائه دادند که از توجیه کافی برخوردار نبود. در اینجا بود که توپولوژی در دستان لفشتس[4] و وَن دِر وردن[5] به موفقیت قاطعی نایل آمد و تعاریفی استثناناپذیر از تعدّد[6] و نیز قوانینی استثناناپذیر به‌دست آمدند. برای دو خم روی یک رویهٔ دوطرفه که در نقطه‌ای همدیگر را قطع می‌کنند، یک خم نسبت به خم دیگر ممکن است در طرف چپ یا طرف راست نقطهٔ تقاطع قرار گیرد. به هر صورت، نقطهٔ تقاطع را با یکی از دو وزن $+1$ یا -1 مشخص می‌کنیم. مجموع وزنها در نقاط تقاطع (که ممکن است مثبت یا منفی باشد) تحت تغییرات پیوستهٔ دلخواه خمها ناورداست، درواقع اگر به جای خمها، خمهای هومولوگ را در نظر بگیریم نیز تغییر نمی‌کند. بنابراین می‌توان به این عدد از طریق روشهای ترکیبیاتی توپولوژی دست یافت و فرمولهای کلی و شفافی به‌دست آورد. دو خم جبری درواقع دو رویهٔ ریمانی بسته هستند که به‌صورت نگاشتهای تحلیلی در فضای چهاربعدی حقیقی نشانده شده‌اند. اما در هندسهٔ جبری نقاط تقاطع با تعدد مثبت شمارش می‌شوند در حالی که در توپولوژی جهت تقاطع در نظر گرفته می‌شود. به این دلیل عجیب به نظر می‌رسد که می‌توان مسألهٔ جبری را به‌روش توپولوژیک حل کرد. توضیح مسأله این است که در مورد خمینه‌های تحلیلی، تقاطع همواره یک جهت دارد. اگر دو خم در صفحهٔ x_1x_2 در مجاورت نقطهٔ تقاطع با تابعهای $x_1 = x_1(s)$، $x_2 = x_2(s)$، و $x_1 = x_1^*(t)$، $x_2 = x_2^*(t)$ نمایش داده شوند، آنگاه جهت ± 1 تقاطع خم اول با خم دوم همان علامت دترمینان ژاکوبی

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_1^*}{dt} & \frac{dx_2}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s,t)}$$

در نقطهٔ تقاطع است. در مورد «خمهای» مختلط-جبری، این ضابطه همواره مقدار $+1$ را به‌دست می‌دهد. درواقع فرض کنید z_1 و z_2 مختصات مختلط در صفحه و s و t به‌ترتیب پارامترهای مختلط دو «خم» باشند. قسمتهای حقیقی و موهومی z_1 و z_2 نقش مختصات حقیقی در صفحه را ایفا می‌کنند.

1. enumerative geometry 2. Schubert 3. Zeuthen
4. Lefschetz 5. van der Waerden 6. multiplicity

به‌جای اینها می‌توانیم از z_1، $\bar{z}_1$، z_2 و $\bar{z}_2$ استفاده کنیم. اما در این صورت دترمینانی که علامت آن جهت تقاطع را مشخص می‌کند برابر است با:

$$\frac{\partial(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\partial(s, \bar{s}, t, \bar{t})} = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s,t)} \cdot \frac{\partial(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial(\bar{s}, \bar{t})} = \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s,t)} \right|^2$$

که بدون استثنا مثبت است. توجه کنید که نظریهٔ هورویتس[1] در بارهٔ تناظر خمها را نیز می‌توان به یک هستهٔ توپولوژیک تقلیل داد.

در مورد جبر مجرد، من فقط به تأکید یک مفهوم بنیادی می‌پردازم که مفهوم ایده‌آل است. اگر از روش جبری استفاده کنیم، یک خمینهٔ جبری در فضای سه‌بعدی به‌وسیلهٔ مختصات مختلط دکارتی x، y، z مقیّد به تعدادی معادلهٔ

$$f_1(x,y,z) = 0, \ldots, f_n(x,y,z) = 0$$

داده می‌شود که در آن f_iها چندجمله‌ای هستند. در مورد خمها این اصلاً صحیح نیست که دو معادله کفایت می‌کند. نه تنها چندجمله‌ای‌های f_i در نقاط خمینه صفر می‌شوند بلکه هر چندجمله‌ای f به‌صورت

$$f = A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n \quad (A_i\text{ها چندجمله‌ای}) \qquad (**)$$

نیز در نقاط خمینه صفر می‌شود. این چندجمله‌ایها تشکیل یک «ایده‌آل» در حلقهٔ چندجمله‌ایها می‌دهند. ددکیند یک ایده‌آل در یک حلقه را دستگاهی از عناصر حلقه تعریف کرد که تحت جمع، تفریق و ضرب در عناصر حلقه بسته است. این مفهوم برای منظور ما زیاد عام نیست. دلیل آن این است که طبق قضیهٔ پایهٔ هیلبرت، هر ایده‌آل در یک حلقهٔ چندجمله‌ای دارای پایه‌ای متناهی است؛ تعدادی متناهی چندجمله‌ای f_1، $\ldots$، f_n در ایده‌آل وجود دارند که هر چندجمله‌ای ایده‌آل را می‌توان به‌صورت $(**)$ نوشت. بنابراین بررسی خمینه‌های جبری به بررسی ایده‌آلها تقلیل می‌یابد. روی یک رویهٔ جبری، نقطه و خم جبری وجود دارد. خمهای جبری به‌وسیلهٔ ایده‌آلهایی نمایش داده می‌شوند که مقسوم‌علیه‌های ایده‌آلِ تحت بررسی هستند. قضیهٔ بنیادی ماکس نوتر با ایده‌آلهایی سروکار دارد که خمینهٔ صفرهای آنها از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده است و عضویت یک چندجمله‌ای در چنین ایده‌آلی را مشروط به رفتار در این نقاط می‌کند. این قضیه به‌سادگی از تجزیهٔ ایده‌آل به ایده‌آلهای اول نتیجه می‌شود. تحقیقات امی نوتر نشان می‌دهد که مفهوم ایده‌آل که نخست توسط ددکیند معرفی شد مانند ریسمان آریادنه[2] سراسر جبر و حساب را می‌پیماید. ون در وردن موفق شد حساب شمارشی[3] را بر مبنای منابع جبری نظریهٔ ایده‌آلها توجیه کند.

اگر به‌جای پیوستار اعداد مختلط در یک میدان مجرد دلخواه عددی کارکنیم، قضیهٔ بنیادی جبر که طبق آن هر چندجمله‌ای مختلط یک متغیری را می‌توان [به‌طور یکتا] به عوامل خطی تجزیه کرد لازم نیست برقرار بماند. بدین ترتیب این نسخهٔ کلی در مورد کار جبری باید مدنظر باشد: توجه کنید که در اثبات از قضیهٔ بنیادی استفاده می‌شود یا نه. در هر نظریهٔ جبری یک قسمت مقدماتیتر وجود دارد که مستقل از قضیهٔ بنیادی است و بنابراین در

1. Hurwitz

۲. Ariadne's thread، در اساطیر یونانی، ریسمانی که آریادنه شاهزاده خانم کرتی به تسئوس داد تا پس از کشتن مینوتور راه خود را در هزار چم پیدا کند-م.

3. enumerative calculus

هر میدان معتبر است، و قسمتی پیشرفته‌تر که برای آن قضیهٔ بنیادی ضروری است. قسمت دوم بستار جبری میدان را می‌طلبد. در بیشتر موارد قضیهٔ بنیادی از یک جهش حساس خبر می‌دهد، تا جایی که امکان دارد باید از به کارگیری آن اجتناب کرد. برای اثبات قضایا در یک میدان دلخواه بسیاری اوقات نشاندن این میدان در یک میدان بزرگتر سودمند است. بالاخص می‌توان هر میدان را در یک میدان بسته‌ـجبری نشاند. یک مثال معروف اثبات این امر است که هر چندجمله‌ای حقیقی را می‌توان روی اعداد حقیقی به عوامل خطی و درجهٔ دو تجزیه کرد. برای اثبات، i را به اعداد حقیقی ملحق کرده و بدین ترتیب میدان اعداد حقیقی را در میدان اعداد مختلط می‌نشانیم. این روش، مشابهی در توپولوژی دارد که در بررسی و مشخص‌کردن خمینه‌ها به‌کار می‌رود؛ کار مشابه در مورد رویه، استفاده از رویه‌های پوششی آن است.

امروز جبر ناجابه‌جایی در مرکز توجه است که در آن عمل ضرب، جابه‌جایی فرض نمی‌شود. ظهور این رشته را نیازهای مشخص ریاضیات تحمیل کرده است. عمل ترکیب یک نوع عمل ناجابه‌جایی است. به یک مثال توجه کنید. خواص تقارن تابعهای چندمتغیری $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان یک جایگشت دلخواه s بر این چندجمله‌ای اعمال کرد. هر خاصیت تقارن را می‌توان برحسب یک یا چند معادلهٔ به شکل

$$\sum_s a(s) \cdot sf = 0$$

بیان کرد. در اینجا $a(s)$ نمایشگر ضرایب عددی است که به جایگشتها نسبت داده می‌شوند. این ضرایب متعلق به میدان داده‌شده‌ای چون K هستند. عبارت $\sum_s a(s) \cdot s$ یک «عملگر تقارن» خوانده می‌شود. این عملگرها را می‌توان در اعداد ضرب کرد، با هم جمع کرد، و ضرب نمود، یعنی آنها را به‌طور متوالی اجرا کرد. نتیجهٔ عمل اخیر به ترتیب «عوامل» بستگی دارد. از آنجا که همهٔ خواص صوری محاسبه برای جمع و ضرب عملگرهای تقارن برقرارند، آنها تشکیل یک «حلقهٔ ناجابه‌جایی» می‌دهند (دستگاه عددی ابرمختلط[1]). نقش غالب مفهوم ایده‌آل در قلمرو ناجابه‌جایی نیز باقی می‌ماند. در سالهای اخیر مطالعهٔ گروهها و نمایش آنها به‌صورت جایگزینی‌های خطی به‌طور تقریباً کامل در نظریهٔ حلقه‌های ناجابه‌جایی جذب شده است. مثالها نشان می‌دهد که چگونه گروه ضربی $n!$ جایگشت s به حلقهٔ وابستهٔ کمیتهای $\sum_s a(s) \cdot s$ توسعه می‌یابد که علاوه بر ضرب، پذیرای یک عمل جمع و نیز ضرب در اعداد است. فیزیک کوانتومی موجب حمایت نیرومندی از جبر ناجابه‌جایی شده است.

متأسفانه نمی‌توانم در اینجا مثالی از فن ساختن یک نظریهٔ مجرد جبری بیاورم. این کار مستلزم وضع‌کردن مفاهیم عمومی مناسب، مانند میدانها، ایده‌آلها و امثال آنها، تجزیهٔ گام به گام حکمی که باید ثابت شود (به‌عنوان مثال، حکم «A نتیجه می‌دهد B»، یا $A \to B$، ممکن است به گامهای $A \to C$، $C \to D$، $D \to B$ تجزیه شود)، و تعمیم مناسب این احکام جزئی برحسب مفاهیم عمومی است. همین‌که حکم اصلی به این صورت تقسیم شود و عناصر غیراساسی کنار گذاشته شوند، اثبات گامهای جداگانه علی‌الاصول مشکل جدی در برندارد.

تاکنون این‌گونه به نظر می‌رسد که جاهایی که روش توپولوژیک کاربرد داشته باشد، مؤثرتر از روش جبری است. روش جبری تاکنون موفقیتهایی قابل قیاس با موفقیتهای روش توپولوژیک به‌دست ریمان، بروز نداده است. همچنین تاکنون کسی به اوج قلهٔ یکنواخت‌سازی که کلاین، پوانکاره و کوبه[1] به آن صعود کردند از مسیر جبری دست نیافته است. در اینجا سؤالاتی هستند که باید در آینده جواب داده شود. ولی نمی‌خواهم این احساس روبه رشد در میان ریاضیدانان را از شما پنهان کنم که باروری روش تجرید نزدیک به پایان است. واقعیت این است که مفاهیم عمومی زیبا خود به خود از آسمان نازل نمی‌شوند؛ در ابتدا مسائل مشخصی با پیچیدگیهای تفکیک‌نشده وجود دارند که فقط به زور بازو از پا درمی‌آیند. پس از این است که پرچمداران اصول موضوع وارد صحنه می‌شوند و نشان می‌دهند که چگونه بدون شکستن در و خونین‌شدن دست، می‌شد که از آغاز کلید سحرآمیزی طرح کرد که در را آرام باز کند انگار که خود به خود گشوده شده است. اما اینکه می‌توانند چنین کلیدی بسازند به این سبب است که پس از دخول موفقیت‌آمیز می‌توانند قفل را از جلو و عقب، و از بیرون و درون بررسی کنند. پیش از آنکه بتوانیم تعمیم دهیم، صوری‌سازی کنیم و اصل موضوعی نماییم، باید مایهٔ ریاضی موجود باشد. من تصور می‌کنم مایهٔ ریاضی‌ای که در چند دههٔ گذشته بر مبنای آن صوری‌سازی انجام داده‌ایم نزدیک به اتمام است و حدس می‌زنم که نسل بعدی با دوران دشواری در ریاضیات مواجه خواهد شد.

تنها هدف این سخنرانی این بود که حضار تصوری از جوّ فکری که در آن بخش قابل ملاحظه‌ای از تحقیقات ریاضی نوین انجام می‌گیرد به‌دست آورند. برای آنهایی که قصد دارند عمیقتر وارد موضوع شوند چند مرجع توصیه می‌شود. پیشگامان راستین جبر اصل موضوعی مجرد، ددکیند و کرونکر هستند. در دوران ما، این جهتگیری را اشتاینیتس[2]، امی نوتر و مکتب او، و امیل آرتین به‌گونه‌ای قاطع به پیش برده‌اند. اولین پیشرفت بزرگ در توپولوژی در اواسط قرن نوزدهم به وقوع پیوست و نتیجهٔ نظریهٔ تابعی ریمان بود. پیشرفتهای جدیدتر عمدتاً به تعدادی از آثار پوانکاره در سالهای ۱۸۹۵ـ۱۹۰۴ که به تحلیل جا[3] اختصاص دارد مربوط است. به کتابهای زیر اشاره می‌کنم:

1. hypercomplex number system

مراجع

۱. در مورد جبر

Steinitz, *Algebraic Theory of Fields*, appeared first in *Crelles Journal* in 1910. It was issued as a paperback by R. Baer and H. Hasse and published by Verlag W. de Gruyter, 1930. H. Hasse, *Higher algebra I, II*. Sammlung Göschen 1926/27.

B. v. d. Waerden, *Modern algebra I, II*. Springer 1930/31.

۲. در مورد توپولوژی

H. Weyl, *The Idea of a Riemann Surface*, second ed. Teubner 1923.

O. Veblen, *Analysis Situs*, second ed., and S. Lefschetz, Topology. Both of these books are in the series Colloquium Publications of the American Mathematical Society, New York 1931 and 1930 respectively.

۳. جلد ۱ از

F. Klein, *History of Mathematics in the 19th Century*, Springer 1926.

1. Koebe 2. Steinitz 3. analysis situs

در آستانهٔ ورود به قرن بیست و یکم و هزارهٔ سوم میلادی، نوشته‌های گوناگونی در بارهٔ چشم‌انداز ریاضیات در سده و هزارهٔ جدید منتشر شده که در شماره‌های پیشین نشر ریاضی بعضی از آنها نقل شده یا به آنها اشاره شده است. در اینجا دو نوشتهٔ دیگر از نظر خوانندگان می‌گذرد.

گرایشهای محتمل در ریاضیات در دهه‌های آینده*

میخائیل گروموف*

آنچه می‌خوانید توضیحات مختصری است در بارهٔ گرایشهای محتمل در ریاضیات در چند دههٔ آینده.

۱. ریاضیات کلاسیک در جستجوی هماهنگیِ ساختاری است. سرآغاز این ریاضیات از لحاظ تاریخی، پی‌بردن هندسه‌دانان یونان باستان به این نکته بود که پیوستار ۳بعدی ما تقارن (دورانی و انتقالیِ) قابل تعمقی دارد (گروههای $O(3)$ و $\mathbb{R}^3$) که بر خصوصیات اساسی دنیای فیزیکی حکمفرماست. (این تقارن در تفکر آگاهانهٔ ما حضور ندارد هر چند در زندگی روزمره خود در هنگام ایجاد یا انجام حرکت مکانیکی، مثلاً در راه‌رفتن، به‌کرات با آن مواجه می‌شویم و از آن استفاده می‌کنیم . دلیل این موضوع تا حدی تعویض‌ناپذیری $O(3)$ است که درک آن دشوار است.) بعدها تقارنهای (تعویض‌ناپذیر) عمیقتری کشف شدند: لورنتس و پوانکاره در نسبیت، گروههای پیمانه‌ای برای ذرات بنیادی، تقارن گالوایی در هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد، و غیره. و می‌بینیم که ریاضیات مشابهی بار دیگر، در سطحی که آنقدر بنیادی نیست، ظاهر می‌شود، مثلاً در بلورها و شبه‌بلورها، در خودتشابهی[1] برای برخالها، دستگاههای دینامیکی و مکانیک آماری، در مونودرومی[2] برای معادلات دیفرانسیل، و غیره.

جستجوی نظم و تقارن در ساختار جهان همچنان هدف اصلی ریاضیات محض (و فیزیک) باقی خواهد ماند. گهگاه (و در بسیاری موارد به‌طور غیرمنتظره) الگوهای تقارنی که ریاضیدانان کشف کرده‌اند کاربردهای عملی و نظری خواهد یافت. درگذشته بارها شاهد چنین اتفاقی بوده‌ایم. مثلاً هندسهٔ انتگرالی مبنای برش‌نگاری با پرتو x (سی. اِی. تی. اسکن) است، حساب اعداد اول به تولید کُدهای کامل می‌انجامد، و نمایشهای بینهایت بعدی گروهها الهامبخشِ طرحی برای شبکه‌های بزرگِ با صرفه با همبندیِ پیچیده است.

۲. با رشدِ بدنهٔ ریاضیات، خودش موضوع تحلیل منطقی و ریاضی قرار گرفت. این امر به پیدایش منطق ریاضی و سپس علوم نظری رایانه منجر شده است. این علوم که امروز وارد دورهٔ بلوغ خود شده است، ایده‌هایی را از ریاضیات کلاسیک می‌گیرد و از پیشرفت فناوری سخت‌افزار رایانه ــ که اجرای عملیِ الگوریتمهایِ طراحی‌شدهٔ نظری را امکان‌پذیر می‌سازد ــ بهره می‌جوید. (تبدیل فوریهٔ سریع و الگوریتم چندقطبی سریع نمونه‌های چشمگیری از تأثیر ریاضیات محض بر روشهای عددیِ مورد استفادهٔ روزمرهٔ مهندسان هستند.) ایده‌های محاسباتی منطقی بر زمینه‌های دیگری ــ مانند پروژهٔ رایانه‌ای کوانتومی، طراحی مولکولی بر مبنای DNA، شکل‌گیری الگوها در زیست‌شناسی، دینامیک مغز، و غیره ــ تأثیر می‌گذارند و از آنها تأثیر می‌پذیرند. انتظار می‌رود که علوم رایانه طی چند دهه ایده‌هایی در سطوحِ باز هم عمیقترِ ریاضی پدید آورند که منجر به پیشرفت اساسی در کاربردِ صنعتی رایانه‌ها شود، مثلاً پیشرفت بزرگی در هوش مصنوعی و روباتیک (که خیلی هم به تأخیر افتاده است).

۳. دستهٔ بزرگی از مسائل هستند که نوعاً از علوم تجربی (زیست‌شناسی، شیمی، ژئوفیزیک، علوم پزشکی، و غیره) نشأت گرفته‌اند و در آنها با مقادیر عظیمی از داده‌های سست‌ساختار سروکار داریم. ریاضیات سنتی، نظریهٔ احتمال، و آمار ریاضی، در مواردی که ساختاری در میان نباشد بسیار خوب عمل می‌کنند (نکتهٔ تعارض‌آمیز این است که فقدان نظم ساختاری و همبستگی در سطح موضعی، به تقارن زیادی در سطح کلی می‌انجامد. مثلاً قانون گاوس در مجموعهای متغیرهای تصادفی پدیدار می‌شود). ولی بسیاری اوقات اجباراً با داده‌های ساختار یافته‌ای روبه‌رو می‌شویم که احتمال کلاسیک در مورد آنها به‌کار نمی‌آید. مثلاً سازندها[1]ی کانی‌شناختی یا تصویرهای میکروسکوپی بافتهای زنده، همبستگیهای (مجهولی) دارند که باید در نظر گرفته شود. (آنچه معمولاً «می‌بینیم» همان «تصویر واقعی» نیست بلکه نتیجهٔ پراکندگی یک موج: نور، پرتو x، موج فراصوتی، زمین‌لرزه و غیره است.) نمونه‌های نظری دیگری در نظریهٔ نشت[2]، در قدم‌زدن تصادفی خودپرهیز[3] (مدلسازی زنجیره‌های مولکولی بلند در حلالها) و غیره دیده می‌شود. چنین مسائلی که در گسترهٔ بین تقارن واضح و آشوب محض پراکنده‌اند، ظهور نوع جدیدی از ریاضیات را می‌طلبند. برای پیشرفت به ایده‌های نظریِ انقلابی و نیز راههای تازه‌ای برای پرداختن به ریاضیات به کمک رایانه و همکاری نزدیکتری با دانشمندان تجربی برای تطبیق نظریه‌های ریاضی با داده‌های تجربی موجود نیاز داریم. (تحلیل موجکیِ سیگنالها و تصاویر، تکنیکهای پراکنش وارونِ وابسته به

1. self-similarity 2. monodromy

1. formations 2. percolation theory 3. self-avoiding

بافت، تحلیل مقیاس هندسی، و تحلیل مولکولهای بزرگ در شکل بلوری با استفاده از پراش پرتو x، بعضی از امکانات را در این زمینه نشان می‌دهند).

این پیشرفت تأثیرات شگرفی هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ صنعتی خواهد داشت. مثلاً یک الگوریتم کارایِ پراکنشِ وارون می‌تواند تشخیص پزشکی را دگرگون سازد و باعث شود که ابزارهای فراصوتی دست‌کم به‌اندازهٔ تحلیل پرتو x در حال حاضر، کارا باشند.

۴. هر چه توان رایانه‌ها به حد نظری آن نزدیکتر می‌شود و ما به مسائل واقعگرایانه‌تر (و بنابراین، پیچیده‌تر) می‌پردازیم، بیش از پیش با «بلای بعد» مواجه می‌شویم که بر سر راه اجرای موفقیت‌آمیز روشهای عددی در علوم و مهندسی قرار دارد. در این مورد به سطح بسیار بالاتری از پیچیدگی ریاضی در معماری رایانه و نیز برنامه‌نویسی همراه با ایده‌های مذکور در (۲) و (۳) نیاز داریم. پیشرفت در این زمینه می‌تواند وسائل نظری را برای اجرای محاسبات روی آرایه‌های داده‌ها که فوق‌العاده سریع رشد می‌کنند، فراهم سازد.

۵. ما باید در آموزش و انتقال اندیشه‌های ریاضی بهتر عمل کنیم. حجم، عمق، و پیچیدگی ساختاریِ مجموعهٔ فعلی ریاضیات ایجاب می‌کند که راههای تازه‌ای برای انتقال کشفیات ریاضی از یک حوزه به حوزه‌های دیگر و دسترسیِ بسیار بیشترِ غیرریاضیدانان به ریاضیات پیدا کنیم. در وضعیت فعلی، ما ریاضیدانان معمولاً اطلاع چندانی از آنچه در علوم و مهندسی می‌گذرد نداریم و دانشمندان تجربی و مهندسان نیز در بسیاری موارد از امکاناتی که پیشرفتهای ریاضیات محض می‌تواند در اختیار آنان قرار دهد بی‌اطلاع‌اند. برای پرکردن این شکاف خطرناک باید مطالب بیشتری از علوم در برنامهٔ آموزش ریاضیدانان آتی گنجانده شود و دانشمندان آینده نیز با هستهٔ اصلی ریاضیات آشناتر شوند. این امر مستلزم طرح برنامه‌های درسی جدید و تلاش عظیمی از جانب ریاضیدانان است که فنون و ایده‌های بنیادی ریاضی را (به‌خصوص آنهایی راکه در چند دههٔ گذشته عرضه شده‌اند) در دسترس طیف وسیعتری از مخاطبان قرار دهند. به این منظور، نیاز به تربیت نسل جدیدی از ریاضیدانان حرفه‌ای داریم که نقش میانجی را میان ریاضیات محض و علوم کاربردی ایفا کنند. امتزاج ایده‌ها برای سلامتِ علوم و ریاضیاتْ ضروری است.

۶. سرمایه‌گذاری در تحقیقات ریاضی باید افزایش یابد. هر چه بیشتر از امکانات رایانه‌ای استفاده می‌کنیم و هر چه روابط را با علوم تجربی و صنعت محکمتر می‌سازیم، نیاز به منابع مالی بیشتری برای حمایت از تحرّک و پویایی ریاضیات داریم. ولی حتی در این صورت هم، نیاز مالی ما بسیار کمتر از سایر شاخه‌های علوم خواهد بود یعنی نسبت بازده به سرمایه برای ریاضیات همچنان زیاد خواهد بود به‌خصوص اگر تلاش قابل توجهی برای ترویج ریاضیات و کاربرد ایده‌های خود انجام دهیم. پس لازم است جامعه را از تمام ظرفیت و امکانات بالقوهٔ پژوهش ریاضی و از نقش حیاتی ریاضیات در پیشرفت صنعتیِ کوتاه‌مدت و درازمدت به‌خوبی آگاه سازیم.

* * * * * *

• Mikhael Gromov, "Possible trends in mathematics in the coming decades", *Notices Amer. Math. Soc.*, (7) **45** (1998) 846-847.

این مقاله نخستین بار به‌عنوان پیوست گزارشی از بنیاد ملی علوم آمریکا انتشار یافته است.

* میخائیل گروموف، مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی، فرانسه
gromov@ihes.fr.

تأملاتی در بارهٔ آیندهٔ ریاضیات•

فلیکس براودر*

یکی از وظایف مقرر رئیس انجمن ریاضی آمریکا (AMS) ایراد سخنرانی به مناسبت پایان دورهٔ ریاست است. اینکه معدودی از رؤسای انجمن به این وظیفه عمل نکرده‌اند نباید باعث شود که آن را جدی نگیریم. ولی محتوای این سخنرانی را مقررات انجمن تعیین نکرده است و می‌تواند یک سخنرانی ریاضی یا بحثی در سیاستگذاری و برنامه‌ریزی باشد.

خواسته‌ام عنوان این سخنرانی هر چه کلیتر باشد. می‌توان در بارهٔ آینده اندیشید، هر چند نمی‌توان آینده را با دقت پیش‌بینی کرد. من نمی‌توانم با هیچ درجه‌ای از قطعیت پیش‌بینی کنم که فرضیهٔ ریمان اثبات یا ابطال خواهد شد، ولی می‌توانم پیش‌بینی کنم که ریاضیدانان در این زمینه تحقیق خواهند کرد تا تکلیف مسأله روشن شود، و این پیش‌بینی با احتمال زیادی درست است. همین موضوع در بارهٔ حدس پوانکاره و سایر مسأله‌های مشهور صادق است.

یک نوع آینده‌نگری این است که بررسی کنیم بعضی از مباحث موردتوجه در آینده احتمالاً از چه جاهایی نشأت خواهند گرفت. راه دیگر این است که فعالیتهای داخلی ریاضیات را از یک سو، و نحوهٔ انطباق ریاضیات را با اهداف و ساختارِ نهادهای ذی‌ربط ــ دانشگاهها، حکومت، بنیادهای خصوصی و غیره ــ از سوی دیگر، بررسی کنیم.

من به بعضی از مقاله‌ها و سخنرانیهای اخیر در بارهٔ این موضوعات و موضوعات وابسته توجه جدی خواهم داشت. یکی از این مقاله‌ها مبتنی بر سخنرانی مایکل اتیا در نشستی در مؤسسهٔ فیلدز در تورنتو است که اخیراً به چاپ رسیده است [۱]. مقالهٔ بسیار جالب و برنامه‌ریزانه‌ای هم به قلم میخائیل گروموف هست که نخست درگزارشی از بنیاد ملی علوم ارائه شد ــ گزارشی بسیار تأثیرگذار در بارهٔ مسائل ریاضیات آمریکا در آینده. همچنین، سخنرانی رابرت مک‌فرسن از مؤسسهٔ مطالعات عالی در پرینستن در همین زمینه، که تنها سخنرانی رسمی‌ای است که من در بارهٔ سیاستگذاری ریاضی در این مؤسسه شنیده‌ام. عنوان این سخنرانی چنین بود: «آیا می‌توان آیندهٔ ریاضیات را پیش‌بینی کرد؟» مک‌فرسن به یک روند بازگشتی در ریاضیات قرن بیستم اشاره کرد که پس از نیم قرن تأکید بر نظریه‌های مجرّد کلی، به مسائل ملموس ومشخص و کاربردهای علمی بازمانده از ۱۹۰۰ بازگشته‌ایم.

هیلبرت و پوانکاره

یکی از مشهورترین اقدامات برای تعیین‌مسیر آیندهٔ ریاضیات در اوایل قرن بیستم در مقاله‌ای از داوید هیلبرت صورت گرفت. هیلبرت این مقاله یا بخشی از آن را درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس که در سال ۱۹۰۰ تشکیل شد، توزیع کرد. از او دعوت خاصی نشده بود که چنین مقاله‌ای عرضه کند، ولی به هر حال این کار را کرد. مشوق او در سخنرانی، هرمان مینکوفسکی بود که درگوتینگن روابط شخصی و ریاضی نزدیکی با او داشت. این سخنرانی

اقدامی بود برای پاسخگویی به مقاله‌ای که قبلاً هانری پوانکاره در اولین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در زوریخ در سال ۱۸۹۷ عرضه کرده بود. مقالهٔ پوانکاره به‌طور مشخص به تشریح آیندهٔ ریاضیات نپرداخته بود بلکه معطوف به این موضوع بود که مسائل ریاضیِ مطرح در فیزیک احتمالاً در ریاضیات بسیار تأثیر خواهند گذاشت. نظری که هیلبرت می‌خواست مطرح کند این بود که مسائل ریاضیِ نشأت گرفته از مسیرهای دیگر، به‌خصوص نظریهٔ اعداد، نیز تأثیرگذار خواهند بود. آن دسته از مسائل هیلبرت که تأثیرگذار بوده‌اند به سه گروه تقسیم می‌شوند، مسائلی در نظریهٔ اعداد، مسائلی در منطق و مبانی، و مسائلی در معادلات دیفرانسیل جزئی. (به کسانی که علاقه‌مندند در بارهٔ منشأ و تأثیر مسائل هیلبرت اطلاعاتی به‌دست آورند، قویاً توصیه می‌کنم کتاب اخیر جرمی‌گری [۳] و مقالهٔ دیوید رو تاریخدان [۴] را بخوانند.)

عده‌ای متذکر شده‌اند که فهرست مسائل هیلبرت و پیش‌بینی او از مسیر تحقیقات ریاضی پس از سال ۱۹۰۰، از بعضی لحاظ سرنوشت طنزآمیزی یافته است. یکی اینکه، در این فهرست پیش‌بینی نشده است که کارهای آتی خود هیلبرت چه خواهد بود و مثلاً کلمه‌ای در بارهٔ مسائل هیلبرت در بارهٔ آنالیز تابعی یا معادلات انتگرالی که موضوع کار هیلبرت در دو دههٔ بعدی بود در آن نیامده است. دوم اینکه در این فهرست از بسیاری از گرایشهای مهم موجود در زمان سخنرانی هیلبرت غفلت شده است. ازجمله در بارهٔ توپولوژی، که پوانکاره آن را بنیان گذاشته بود و چند سال بعد از سخنرانی هیلبرت، براثر آن را متحول ساخت، مطلب چندانی نیامده است. سوم اینکه، بخش مربوط به منطق از دیدگاه روان‌شناختی بسیار جالب است و تأثیرگذارترین بخشِ مسائل هیلبرت است که به قضیهٔ ناتمامیت گودل و دستاورد گودل و پال کوهن در بارهٔ فرضیهٔ پیوستار انجامید، ولی این نتایج قویترین پیش‌فرض هیلبرت را مبنی بر اینکه هر مسأله‌ای قابل حل است، نفی کردند.

با این حال، به گمان من هر کسی که واقعاً جرأت کند کاری شبیه کار هیلبرت انجام دهد قابل تحسین است زیرا از هر چه بگذریم، این کار می‌تواند انگیزه‌ای برای تحقیقات ایجاد کند. تأثیر نهایی مسائل هیلبرت هر چه بوده باشد، مسلماً طرح آنها محرک مهمی برای تحقیقات و تنوع بخشیدن به ریاضیات بوده است.

پوانکاره در کنگرهٔ بین‌المللی ۱۹۰۸ در رُم با گفتاری تحت عنوان «آیندهٔ ریاضیات» به سخنان هیلبرت پاسخ داد. رویکرد پوانکاره بسیار گسترده‌تر و همراه با تساهلِ بیشتری بود و از جمله بر رابطهٔ ریاضیات با فیزیک نظری، که پوانکاره برجسته‌ترین نمایندهٔ آن بود، تأکید داشت. یکی از مسأله‌های هیلبرت، اصل موضوعی‌سازی فیزیک بود. کوشش در این جهت، در آن زمان که درست قبل از پیدایش نظریهٔ نسبیت و نظریهٔ کوانتومی بود، کار نسنجیده‌ای بود. حتی اگر کسی می‌توانست فیزیک را اصل موضوعی کند، خیلی زود باید آن اصول موضوع را فراموش می‌کرد زیرا فیزیک مدت کوتاهی پس از آن دچار تحولی بسیار اساسی شد. پوانکاره خیلی بیشتر از هیلبرت با فیزیکدانها نزدیک بود (هر چند هیلبرت هم روابط خوبی با فیزیکدانان محلی داشت). من شنیده‌ام که فیزیکدانها پوانکاره را یکی از فیزیکدانان بزرگ زمان خودش به‌حساب می‌آورده‌اند، به‌خصوص به خاطر کارهایش در ترمودینامیک و نظریهٔ نسبیت، که پوانکاره در مبادی این موضوع با اینشتین رقابت داشت، و این جدا از مباحثی مانند مکانیک سماوی است که پوانکاره طی سالها سهم اصلی را در پیشبرد آن داشت. این‌گونه تحقیقات وی باعث شد تقاضاهایی که برای اعطای جایزهٔ نوبل فیزیک به او جمع‌آوری شد احتمالاً از هر کس دیگری بیشتر باشد. در واقع گوستامیتناگ‌ـلفلر در سال ۱۹۰۸ به سراغ هر فیزیکدان مهمی در اروپای غربی رفت و از او خواست درخواست‌نامه‌ای را امضا کند مبنی بر اینکه پوانکاره شایستهٔ دریافت جایزهٔ نوبل است. صدها نفر آن را امضا کردند ولی پوانکاره جایزه را به‌دست نیاورد. این ماجرا در کتاب جرمی گری [۳] شرح داده شده است.

چند سال پیش، در همایشی در بنیاد ملی علوم آمریکا، الیوت مونترول[1]، فیزیک‌ریاضیدان، گفت. «نیمهٔ اول قرن بیستم در فیزیک، عصر هیلبرت بود و نیمهٔ دوم آن، عصر پوانکاره.» منظورش چه بود؟ منظورش این بود که تأثیر هیلبرت در به راه انداختن برنامه‌ای پژوهشی که دیگران در نظریهٔ طیفی اجرا کردند، اثری حیاتی بر پیدایش و بسط مکانیک کوانتومی در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ داشت. از دیدگاه مونترول، کار خلاقهٔ پوانکاره در پایه‌ریزی آنچه امروز نظریهٔ آشوب نامیده می‌شود، احتمالاً تأثیر تعیین‌کننده بر فیزیک در نیمهٔ دوم قرن بیستم داشته است.

آندره ویل که عادتاً ریاضیدان متهوّری بود در دههٔ ۱۹۴۰ مقاله‌ای با عنوان «آیندهٔ ریاضیات» [۵] نوشت. من شخصاً همدلی زیادی با این مقاله دارم. این نوشته کاملاً آزاد از ایدئولوژی‌ای است که امروز آن را بورباکیسم می‌نامیم؛ ویل اشاره‌ای به بورباکی نمی‌کند و به ستایش صورتگرایی و حرکت انتزاعی در ریاضیات نمی‌پردازد. کاملاً بورباکی را نادیده می‌گیرد هر چند خود یکی از بنیانگذاران و چهره‌های اصلی این گروه بوده است. او مقاله را با نقل‌قولی از پوانکاره آغاز می‌کند، حال آنکه بورباکی تا اواخر دههٔ ۱۹۷۰ به‌ندرت حرف مثبتی در بارهٔ پوانکاره می‌زد. ویل همچنین با لحنی نه چندان امیدوارانه در بارهٔ تأثیر نهادها بر ریاضیات بحث می‌کند. او در آن موقع تازه یک دوره تدریس را در دانشگاههای آمریکایی به پایان رسانده بود و به آیندهٔ علمی آنها زیاد خوشبین نبود زیرا در آن زمان از ساختار علمی چندان مطلوبی برخوردار نبودند. این مقاله در واقع تا حد زیادی گویای گرایشهای فکری خود ویل در سالهای بعد است. مقاله‌ای است نافذ، و ــ با کمال تعجب ــ چنان پرشور و عاری از پیشداوری نوشته شده که کاملاً به خواندنش می‌ارزد.

ریاضیاتِ هم‌پیوندی

در دورهٔ ریاستم بر انجمن ریاضی آمریکا همایشی با عنوان «چالشهای ریاضی قرن ۲۱اُم» ترتیب دادم که در ماه اوت ۲۰۰۰ در دانشگاه کالیفرنیا، لُس آنجلس تشکیل شد. موضوعهای بسیاری هست که می‌توان آنها را محورِ بحثِ چنین نشستی قرار داد یا تفکر خود را در بارهٔ آیندهٔ ریاضیات حول آنها تنظیم کرد. من موضوع نامتعارفی را انتخاب کردم که خمیرمایهٔ آن بیست‌وپنج سال پیش در مقاله‌ای به قلم دیودونه آمده بود [۶]. این مقاله حاوی چارچوبی است برای بحث در بارهٔ دو جنبه از پیشرفتهای ریاضی: ساختار درونی ریاضیات و ماهیت میان‌رشته‌ای آن. بسیاری از این پیشرفتها را می‌توان نمونه‌هایی از هم‌پیوندی[2] دانست. این اصطلاح را آرتور کُستلر نویسندهٔ سیاسی و علمی وضع کرده است و به حالتی اطلاق می‌شود که

1. Elliott Montroll

۲. معادلی برای bisociation [به‌هم پیوستن، برقراری پیوند دوسویه].

بین دو چیزِ ظاهراً بی‌ارتباط، روابط غیر منتظره‌ای پیدا شود. کستلر عقیده دارد که این پدیده در هر خلاقیتی در کار است. درکتابش دربارهٔ طنز، همهٔ طنزها را از این نوع می داند. می‌توانیم این نظر را بپذیریم یا نپذیریم، ولی من عقیده دارم که «هم‌پیوندی» اصطلاح خوبی است برای توصیف بسیاری از پیشرفتهای مهم در ریاضیات. این موضوع را پوانکاره به زیبایی بیان کرده است:

> هرچه علم بیشتر توسعه می‌یابد،فهم کل آن دشوارتر می‌شود؛ پس می‌کوشیم آن را قطعه قطعه کنیم، و[هر کدام از ما] به قطعه‌ای از آن قناعت کنیم یا به عبارت دیگر، در آن متخصص شویم. [ولی] اگر به این روند ادامه دهیم، مانع سختی در برابر پیشرفت علم خواهد بود. همان‌طور که گفته‌ایم، با وحدت غیرمنتظرهٔ اجزاء متفرق است که علم پیشرفت می‌کند.

ریاضیات امروزی مجموعه‌ای از مباحث فوق‌العاده متنوع است. نخست اشاره می‌کنم که تعداد ریاضیدانان نسبت به پنجاه سال پیش که من شروع به کارکردم بیش از ده برابر شده است. اولین همایشهای AMS که من در آنها شرکت داشتم، نسبت به همایشهای امروزی خیلی کوچک بودند. در آن زمان AMS تقریباً ۴۰۰۰ عضو داشت و اکنون ۳۰۰۰۰ عضو از سراسر جهان داریم. افراد بسیاری در موضوعات بسیار متنوعی کار می‌کنند و بعضی از آنها از هیچ چیزی جز رشتهٔ باریک خود اطلاعی ندارند. این وضعیت از لحاظ تاریخی بسیار نامتعارف است و تا حدی بر نظر جامعهٔ ریاضی در این مورد که چه چیزی خیلی مهم است، اثر دارد. مثلاً حل مسائل معروف تاریخی، مهم قلمداد می‌شود. در جامعهٔ ریاضی، کسی نمی‌تواند تردید کند که قضیهٔ آخرفرما و فرضیهٔ ریمان فوق‌العاده مهم‌اند. همین امر در بارهٔ «مسائل جایزه بر هزاره» که مؤسسهٔ ریاضی کلی آنها را مشخص کرده [۷] صادق است هر چند بعضی از آن مسائل ممکن است شهرت کمتری داشته باشند. این مسائل دست‌کم کاندیداهای مناسبی برای مهم قلمدادشدن هستند.

علاوه بر این گونه مسائل، چه چیزهای مهم‌اند؟ در اینجاست که اصطلاح «هم‌پیوندی» واردکار می‌شود. کسانی که سلیقه و ذائقهٔ جامعهٔ ریاضی را شکل می‌دهند، تقریباً همواره پیشرفتهایی را خیلی مهم قلمداد کرده‌اند که در آنها ایده‌ها و تکنیکهایی از یک رشته مباحث ریاضی بر ایده‌ها و تکنیکهایی از یک رشته مباحث دیگر تأثیر ثمربخش و پرباری داشته است. در تاریخ جدید، نمونهٔ مهمی که شاهدش بوده‌ام، قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر است که در آن نظریهٔ K و هندسهٔ دیفرانسیل از یک سو و معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی از سوی دیگر به‌طور اساسی وحدت یافته‌اند. نمونهٔ دیگر، که شاید از لحاظ تأثیرش بر تحقیقات معاصر ریاضی مهمتر باشد، رسالهٔ سایمن دانلدس است که در آن نتایجی جدید و انقلابی در بارهٔ توپولوژی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر چهاربعدی با استفاده از تکنیکهای نظریهٔ میدان کوانتومی و به‌خصوص با بررسی میدانهای یانگ-میلز به‌دست آورد. نمونه‌ای از این هم مهمتر، تأثیرات متقابل نظریهٔ میدان کوانتومی و توپولوژی درکارهای ادوارد ویتن در دو دههٔ گذشته است.

بسیاری از این نمونه‌ها در همایش دانشگاه کالیفرنیا در لُس آنجلس مطرح شد. یکی از آنها برنامهٔ لنگ لندز بود. راه‌حل وایلز برای مسألهٔ فرما یک حالت خاص و مهم از برنامهٔ لنگ لندز را تحقق بخشید. اما برنامهٔ لنگ لندز چیست؟ اساساً عبارت است از اینکه به‌طور اسلوبمند رابطه‌ای بین نظریهٔ اعداد و مسائل خاصی در نمایشهای گروه و فُرمهای خودریخت برقرار شود. اجرای این برنامه به پیش می‌رود و هر حالت جدیدی که به تحقق می‌پیوندد پیشرفت بسیار مهمی به‌شمار می‌آید. اتیا در مقاله‌اش بر جبر کوانتومی انگشت می‌گذارد و بر آن است که ریاضیات آینده عبارت خواهد بود از پیشرفتهایی جبری مرتبط با این واقعیت که نظریهٔ میدان کوانتومی هم غیرخطی و هم بینهایت بعدی است و بنابراین در خارج از چارچوبِ بیشترِ ریاضیات کلاسیکی قرار می‌گیرد که مردم سعی می‌کنند آن را به‌کار برند.

مثال جالب دیگر، فرایندهای تصادفی است که امروز مبحث نسبتاً کلاسیکی به‌شمار می‌آید. طرح موسوم به برنامهٔ مالیاون[1] عبارت است از قراردادن فرایندهای تصادفی در چارچوب فضاهای سوبولُف. فضاهای سوبولف به صراحت برای بررسی معادلات دیفرانسیل جزئی طراحی شدند و پل مالیاون این مبحث را با قراردادن فرایندهای تصادفی در چارچوب آن دگرگون ساخت. نمونه‌های جالب دیگری از هم پیوندی شایان ذکرند، مثلاً پیشرفتهایی که در توپولوژی خمینه‌های سوبولُف به‌دست آمده است. این مورد دیگری از دخالت فضای سوبولف در جایی است که معمولاً دیده نمی‌شود. از یکی از دست‌اندرکاران این مبحث پرسیدم که آیا توپولوژیدانان کار او را جدی می‌گیرند، و او پاسخ مثبت داد و گفت که مراودات زیادی با هم داریم.

به عقیدهٔ من، مقدار زیادی از پیشرفت درونی ایده‌های ریاضی شامل نمونه‌هایی از این نوع خواهد بود، که ایده‌هایی از یک حوزه ناگهان بر حوزهٔ دیگری اثر می‌گذارند. گاهی این امر احساس ناخوشایندی پدید می‌آورد ولی به نظر من باید بر این احساس غلبه کرد. ظاهراً، دست‌کم در مراکز مهم ریاضی، دانشجویان یاد گرفته‌اند که خود را با این تغییرات دمساز کنند. گاه می‌بینیم که آنها به‌طور دسته‌جمعی از یک گرایش به گرایش دیگر رومی‌آورند. مشاهدهٔ گروهی که تصمیم می‌گیرند علایق خود را عوض کنند، خنده‌آور است.

مهمترین زمینهٔ هم‌پیوندی در رابطهٔ متقابل ریاضیات و علوم دیگر نهفته است.

از مهمترین عوامل بیرونیِ تأثیرگذار بر ریاضیات، البته رایانه است. هر چیزی که به این مقوله مربوط شود، در قرن ۲۱ام و بلکه تا زمانی که تمدن فعلی ما در مسیر کنونی‌اش ادامه داشته باشد ــ در واقع تا زمانی که این تمدن دوام داشته باشد! ــ اهمیت اساسی برای ریاضیات خواهد داشت. پیش‌بینی تأثیر محاسبهٔ کوانتومی دشوار است زیرا هیچ‌کس واقعاً نمی‌داند که چگونه آن را باید به مرحلهٔ اجرا درآورد؛ هنوز به قلمرو مدلسازی ریاضی تعلق دارد. اما بسیاری چیزهای دیگر، از قبیل پیچیدگی محاسبه یا به کار بستن نظریهٔ اعداد در مورد کُدها، مثالهای چشمگیری از هم‌پیوندی هستند که مسلماً سی سال پیش هیچ کسی آنها را پیش‌بینی نمی‌کرد.

در زیست‌شناسی مولکولی، نقش ریاضیات بسیار بزرگتر از آن است که مردم می‌دانند، هر چند ریاضیات تأثیر مهمی، مثلاً، در جریان پروژهٔ ژنوم داشته است. در تحلیل اینکه ژنوم چگونه عملاً سلولهای زنده را خلق می‌کند ریاضیات نقشی از آن هم مهمتر خواهد داشت. این موضوع باعث افزایش ناگهانی علاقه به ریاضیات در میان زیست‌شناسان شده است.

گروموف در مقالهٔ مختصر خود از پیشرفتهای اساسی در تحلیل داده‌ها یاد می‌کند که بر مباحثی همچون ژنوم‌شناسی تأثیر گذاشته است. دیوید داناهو[2]،

1. Malliavin 2. Donoho

یکی از دست‌اندرکاران برجستهٔ تحلیل داده‌ها، در بارهٔ این موضوع در همایش دانشگاه کالیفرنیا سخنرانی کرد. او نشان داد که چگونه ابزارهای ریاضی پیچیده‌ای مانند موجکها در تحلیل داده‌ها به‌کار می‌روند. قواعد و روشهای آمار کلاسیک، دیگر برای حل و فصل بسیاری از مسائلی که با آنها روبه‌رو می‌شویم کفایت نمی‌کنند به‌خصوص وقتی که با توده‌های بزرگی از داده‌ها سروکار داریم ــ و توده‌های بزرگ داده‌ها از اجزای اصلی دنیای جدید هستند.

روابط ریاضیات با نهادهای اجتماعی

روابط بین ریاضیات و سایر علوم نه فقط از لحاظ پیشرفت درونی ریاضیات بلکه همچنین از لحاظ آیندهٔ ریاضیات در [برنامه‌ریزیهای] نهادهای اجتماعی مانند حکومت فدرال مهم است. بنیاد ملی علوم (NSF) در آمریکا اخیراً دست به اقدامی ابتکاری برای افزایش بودجهٔ ریاضی این بنیاد زده است. این ابتکار مستقیماً مرهون مدیر بنیاد، ریتا کالول[1]، است که زیست‌شناس ممتازی است و اعتقاد راسخ دارد که آیندهٔ زیست‌شناسی تا حد زیادی به روابط آن با ریاضیات وابسته است. وی فعالانه از ریاضیات طرفداری می‌کند و برای افزایش بودجهٔ آن طرح‌ریزی کرده است. بعضیها ممکن است تأکیدی را که در این طرح بر پژوهش میان‌رشته‌ای شده دوست نداشته باشند. ولی این تأکیدْ بازتابِ این واقعیت است که ریاضیدانان، به‌خصوص ریاضیدانان جوان، باید به کاربرد ریاضیات در زمینه‌های دیگر توجه داشته باشند.

اهمیت روابط ریاضیات با نهادهای جامعه از مثال زیر معلوم می‌شود. ریاضیدانان آمریکایی معمولاً فرانسه را کشوری می‌دانند که ریاضیات در آنجا مورد حمایت و تشویق قرار می‌گیرد. حال آنکه روابط ریاضیات و ریاضیدانان با حکومت فرانسه گهگاه با مشکلات فراوان همراه بوده است. مثلاً در سال ۲۰۰۰، زمانی که کلود الگره[2] وزیر علوم، تحقیقات، و آموزش فرانسه بود، بحرانی جدّی پیش آمد. وی ژئوفیزیکدان نسبتاً برجسته‌ای است و کتابهای متعددی نوشته که عنوان یکی از آنها شکست افلاطون است. (افلاطون را مظهر ریاضیات در نظر گرفته است.) وی در این کتاب به‌وضوح نشان می‌دهد که در بارهٔ ریاضیاتی که پس از سال ۱۹۰۰ در فیزیک بنیادی حکمفرماست چیزی نمی‌داند. او عقیدهٔ راسخ دارد که با در دست‌بودن رایانه، نیازی به معلومات ریاضیِ بسیار برای پرداختن به علوم نیست. الگره در هنگام وزارتش به این نتیجه رسید که در نظام آموزش فرانسه در اهمیت ریاضیات مبالغه می‌شود، و از حذف کلاسهای ریاضی در مدارس جانبداری کرد. چون دوست بسیار نزدیک نخست‌وزیر بود، به نظر می‌رسید وضع خطرناکی برای ریاضیات پیش آمده است. البته ریاضیدانها از عواقب عقاید جزمی الگره جان به در بردند اما نه به خاطر نفوذ خودشان. الگره خیلی به پَروپایِ اتحادیه‌های مهم معلمان فرانسه پیچید و آنها را که از اصلاحات پیشنهادی او عصبانی بودند از کوره به در برد. در فرانسه، که رژیمی سوسیالیستی دارد، نباید اتحادیه‌های معلمان را عصبانی کنید! باری، الگره علی‌رغم دوستی‌اش با نخست‌وزیر مجبور شد کناره‌گیری کند. او رفت وگمان نمی‌کنم جانشینانش اندیشه‌های او را پیگیری کرده باشند، اما این ماجرا نشان می‌دهد که ریاضیدانان باید آماده و هُشیار باشند تا هنگام بروز این‌گونه مسائل در نهادهایی که سرنوشت ما را رقم می‌زنند، واکنش نشان دهند.

1. Rita Colwell 2. Claude Allègre

خوشبختانه، انجمن ریاضی آمریکا در برخورد با بسیاری از مسائلی که اشاره کردم، روش فعال و مؤثری در پیش گرفته و تا زمانی‌که به ایفای این نقش ادامه می‌دهد، تأثیری اساسی بر آیندهٔ ریاضیات آمریکا خواهد داشت. انجمن نقش فوق‌العاده مهمی در سازماندهی و معطوف ساختن توجهات به مسائل سیاستگذاری ایفا می‌کند که بیشتر اعضا از آن آگاه نیستند. من از اعضا مصرانه می‌خواهم که در این زمینه کسب اطلاع کنند. آنها می‌توانند سری به نشستهای کمیته‌هایی بزنند که به این‌گونه مسائل می‌پردازند. این نشستها در واشنگتن. دی. سی. برگزار می‌شوند و حضور در آنها برای عامهٔ ریاضیدانها آزاد است.

در گزارشی که مقالهٔ گروموف در آن آمده، گفته می‌شود که ریاضیات در ایالات متحده در حال شکوفایی است. ولی به دو دلیل تضمینی وجود ندارد که این شکوفایی ادامه یابد. یکی کمبود منابع است، ولی مهمتر از آن، کمبود نیروی جذب‌شونده، به‌خصوص از میان دانشجویان مستعد آمریکایی، به مشاغل ریاضی است. هر دو مسأله بسیار مهم و اساسی‌اند، و باید به تلاش برای حل آنها ادامه دهیم.

* * * * * *

مراجع

1. Mathematics in the 20th century, by Michael Atiyah, *Bull. London Math. Soc.*, **34** (2002), no. 1, 1-15.

2. *Report of the Senior Assessment Panel of the International Assessment of the U.S. Mathematical Sciences*, National Science Foundation, March 1998. An adapted version of Gromov's essay appeared as "Possible trends in mathematics in the coming decades", in the *Notices*, August 1998, pages 846-7.

3. *The Hilbert Challenge*, by Jeremy Gray, Oxford University Press, 2000.

4. Perspective on Hilbert, by David Rowe, *Perspect. Sci.* **5** (1997), no. 4, 533-70 (1999).

5. The future of mathematics, by André Weil, *Amer. Math. Monthly* **57** (1950), 295-306.

6. Present trends in pure mathematics, by Jean Dieudonné, *Adv. in Math.* **27** (1978), no. 3, 235-55.

7. The Millennium Prize Problems are described on the Clay Institute's website, http://www. claymath.org/.

* * * * * *

• Felix Browder, "Reflections on the future of mathematics", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **49** (2002) 658-662.

این خلاصهٔ سخنرانی براودر پس از دورهٔ ریاست او بر AMS (در سالهای ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰) است.

* فلیکس براودر، دانشگاه راتگرز، آمریکا

browder@math.rutgers.edu

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، صص. ۶۸ـ۷۲

آموزش و مسأله

ماجرای یک مسأله

کسری علیشاهی*، سیدرضا مقدسی*

در اردیبهشت سال ۸۲ امتحان نهایی المپیاد ریاضی برای انتخاب تیم شش نفره از میان ده نفر برگزیده مرحلهٔ قبل، که در طول سال دورهٔ آمادگی را پشت سر گذاشته بودند، به شکلی اساساً متفاوت با سالهای پیش برگزار شد، امتحانی با سه سؤال واقعاً دشوار. در گام اول، طی سه روز، دانش‌آموزان هر روز به مدت چهار ساعت روی یکی از سؤالات کار کردند و نتایجی به‌دست آوردند. گام بعدی امتحان در یک بازهٔ زمانی سه هفته‌ای انجام گرفت و قرار شد هر کس در جهت حل مسائل مطرح‌شده در حد توان بکوشد و نتایج کار خود را، احتمالاً شامل تعمیمها و سؤالات جدیدی که مطرح می‌کند، به‌صورت تحقیقی مکتوب ارائه دهد. نهایتاً در گام آخر با دعوت از تعدادی از اساتید و دانشجویان به‌عنوان هیأت داوری، تک‌تک دانش‌آموزان به‌طور شفاهی در مقابل داوران از نتایج کار خود دفاع کردند و به سؤالات و ابهامات در مورد راه‌حل پاسخ دادند. نتیجهٔ این تجربه به قدر کافی رضایت‌بخش بود! با وجود اینکه سؤالات در مقایسه با مسائل معمول المپیادی به‌مراتب دشوارتر و حل‌کردن آنها نیازمند صبر و حوصله، طی مسیری نسبتاً طولانی و حتی گاه تعریف و ابداع مفاهیم جدید (لااقل در محدودهٔ اطلاعات و تجربیات دانش‌آموزان دبیرستانی) بود اما به نظر می‌رسید دانش‌آموزان کمابیش با موفقیت این مسیر را طی کردند و نهایتاً هم خودشان از تجربهٔ چند هفته کار سنگین راضی بودند و هم هیأت داوران از مشاهدهٔ نتیجهٔ تلاش آنها در جلسات دفاع لذت بردند.

هستهٔ اصلی این نوشته یکی از آن سه مسأله است که قضیه‌ای از مبحث احتمال هندسی به شمار می‌رود. برای آن سه راه‌حل متفاوت ارائه خواهیم کرد. ایده‌های دو راه‌حل اول برگرفته از نتایج کار دانش‌آموزان است که صرفاً با اندکی تغییر و اصلاح و با نمادگذاری ریاضی متفاوت بیان می‌شود. راه‌حل سوم بعداً توسط نویسندگان مقاله (که یکی از آنها پیشنهاددهنده و دیگری عضو هیأت داوری این مسأله بودند) به‌دست آمده است.

******

برگزیدگان المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۲ که این مقاله براساس کار آنها تنظیم شده است (به ترتیب الفبا)

صادق بلوکی	احمد پیوندی	امین خواجه‌نژاد
عباس رضایی	حیدر سبحانی	محمد قراخانی
حسام مهدوی‌فر	غلامحسین مهیمنی	وحیدرضا نصیریان
نیما نورشمس		

صورت مسأله

• $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌هایی محدب و فشرده و $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ را برابر با حجم nبعدی مجموعهٔ

$$\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k | x_i \in A_i\}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید V برحسب λ_iها چندجمله‌ای است.

قبل از پرداختن به راه‌حل‌ها به‌طور جداگانه، نکاتی کلی ذکر می‌کنیم که در همهٔ آنها مشترک است. اولاً واضح است که اگر همهٔ λ_iها به‌طور همزمان t برابر شوند، $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k$ نیز t برابر و بنابراین حجم nبعدی آن t^n برابر می‌شود یعنی:

$$V(t\lambda_1, \ldots, t\lambda_k) = t^n V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

پس با فرض درستی حکم مسأله، V باید چندجمله‌ای همگنی از درجهٔ n باشد. حال بیایید در حالت خاص در صورت مسأله قرار دهیم:

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (\lambda, 1, 0, \cdots, 0)$. نتیجه می‌شود که:

(*) برای هر $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب فشرده، $V(\lambda A + B)$ چندجمله‌ای (از درجهٔ n) برحسب λ است.

نکتهٔ جالبی که در همهٔ راه‌حل‌ها از آن استفاده خواهیم کرد این است که اثبات همین حکم ضعیف‌شده درستی صورت اولیهٔ مسأله را نتیجه می‌دهد. گزارهٔ زیر دلیل این ادعاست:

(**) اگر تابع چندمتغیرهٔ $P(x_1, \dots, x_k)$ برحسب هر یک از متغیرهایش چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n باشد، آنگاه P نیز چندجمله‌ای است.

اگر (*) را ثابت کرده باشیم. کافی است در (**) به‌جایِ P، V بگذاریم تا حکم اصلی مسأله نتیجه شود.

اثبات (**): می‌توان نخست تابع P را برحسب متغیر x به شکل زیر بسط داد:

$$P(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_2, \dots, x_k) x(x-1) \cdots (x-i+1)$$

حال با قراردادن $x = 0, 1, \dots, n-1$ نتیجه می‌شود که P_iها خود تابعهایی $k-1$ متغیره هستند که برحسب هر متغیر چندجمله‌ای می‌باشند. و حکم با استقرا روی k نتیجه می‌شود. □

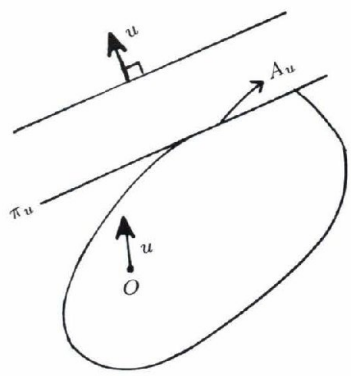
نکتهٔ دیگر اینکه هر کدام از راه‌حل‌ها بسته به نوع ابزارهایی که به کار می‌گیرند حکم را در مورد ردهٔ خاصی از اجسام محدب، مانند چندوجهی‌های محدب و یا شکلهای اکیداً محدب هموار، ثابت می‌کنند و سپس با یک فرآیند حدگیری درستی آن را در حالت کلی نتیجه می‌گیرند. به این معنی که برای هر دو جسم محدب دلخواه A و B، دنبالهٔ $\{(A_n, B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ از اجسامی را که قبلاً حکم در مورد آنها ثابت شده طوری می‌گیریم که $A_n \to A$ و $B_n \to B$ (این میل‌کردن می‌تواند مثلاً به معنای متر هاوسدورف باشد!) در این صورت به‌ازای هر λی ثابت، $\lambda A_n + B_n \to \lambda A + B$ و درنتیجه، $V(\lambda A_n + B_n) \to V(\lambda A + B)$. پس توابع $f_n(\lambda) = V(\lambda A_n + B_n)$ به‌طور نقطه‌ای به تابع $f(\lambda) = V(\lambda A + B)$ میل می‌کنند. گزارهٔ آنالیزی زیر کار را تمام می‌کند:

(***) اگر $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای k متغیره از درجهٔ حداکثر n باشند که به‌طور نقطه‌وار به تابع چندمتغیرهٔ P میل می‌کنند. P خود یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n است.

اثبات: با توجه به (**)، کافی است حکم تنها در حالت یک‌متغیره ثابت شود. در این حالت قرار دهید $P_i(x) = \sum_{j=0}^{n} a_i^j x^j$ و فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ اعدادی متمایز باشند. در این صورت طبق درون‌یابی لاگرانژ ضریبهای چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب مقادیر آن در $x_0, x_1, \dots, x_n$ به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. یعنی توابع پیوستهٔ Lj، $j = 0, 1, \dots, n$ وجود دارند که $a_i^j = Lj(p_i(x_0) \dots p_i(x_n))$ و چون طبق فرض مسأله $p(x_n)$ها همگرایند، بنابراین a_i^jها نیز همگرا می‌شوند: $a_i^j \underset{i\to\infty}{\to} a^j$. حال واضح است که $P(x) = \sum_0^n a^j x^j$ و بنابراین $p_i(x) \underset{i\to\infty}{\to} \sum a^j x^j$. □

و نکتهٔ آخر اینکه بدون از دست‌دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $0 \in A, B$. زیرا اگر هر یک از A یا B را انتقال دهیم $\lambda A + B$ نیز صرفاً انتقال می‌یابد و حجم آن تغییری نمی‌کند. بنابراین می‌توان با انتقال مناسب مبدأ مختصات را درون شکلها قرار داد.

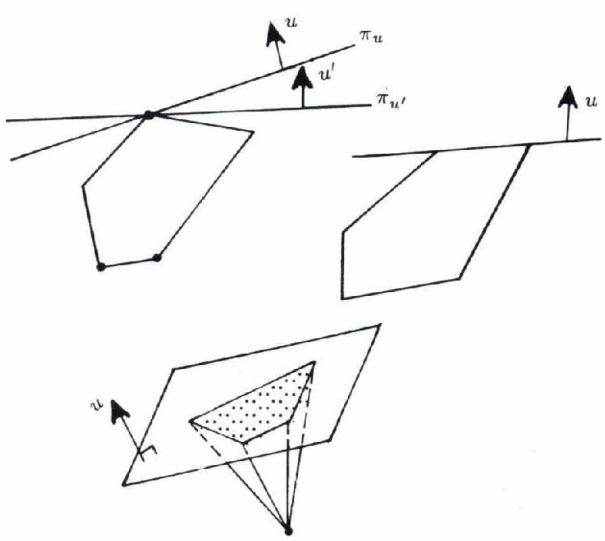
همچنین در راه‌حل‌ها، از تعریفها و نمادهای زیر استفاده می‌شود: فرض کنید $u \in S^{n-1}$ برداری یکه و دلخواه و $A \subset \mathbb{R}^n$ شکلی محدب و فشرده باشد. تحدید تابع خطی $l_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، $l_u(x) = (u, x)$ به مجموعهٔ A، ماکسیمم خود را روی A اتخاذ می‌کند.



اگر ابر صفحه‌ای را در راستای u به شکل A نزدیک کنیم تا با A تماس پیدا کند نقاط اشتراک همان نقاط ماکسیمم‌کنندهٔ l_u روی A هستند. این مجموعه را با A_u نمایش می‌دهیم و می‌گوییم A_u با بردار u مشخص شده است. این مقدار ماکسیمم را هم با $l_u(A_u)$ نمایش می‌دهیم.

اگر A و B دو شکل محدب و فشرده باشند، آنگاه با توجه به خطی‌بودن l_u داریم:

$$(\lambda A + B)_u = \lambda A_u + B_u$$



اگر شکل A یک چندوجهی محدب باشد، A_u پوش محدب رأسهایی از A است که l_u را ماکسیمم می‌کنند. این مجموعه‌ها را یالهای A می‌نامیم. بنابراین، وجه‌های A یالهای $(n-1)$بعدی A هستند. همچنین واضح است که A_u یک وجه A است اگر و تنها اگر با یک $u \in S^{n-1}$ مشخص شود و این بردار همان بردار عمود بر آن وجه است.

راه‌حل اول

در این راه‌حل گزارهٔ $(*)$ را برای چندوجهی‌ها ثابت می‌کنیم.

فرض کنید A و B دو چندوجهی محدب با رأسهای $x_0, \dots, x_k$ و $y_0, \dots, y_l$ باشند. پس این چندوجهی‌ها پوش محدب رأسهای خود هستند یعنی

$$A = \mathrm{co}(\{x_0, \dots, x_k\}) \quad , \quad B = \mathrm{co}(\{y_0, \dots, y_l\})$$

که $\mathrm{co}(P)$ برای $P \subset \mathbb{R}^n$ به‌معنی پوش محدب مجموعهٔ P است.

با توجه به رابطهٔ $\mathrm{co}(P_1)+\mathrm{co}(P_2) = \mathrm{co}(P_1+P_2)$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\lambda A + B &= \mathrm{co}(\{\lambda x_0, \dots, \lambda x_k\}) + \mathrm{co}(\{y_0, \dots, y_l\}) \\ &= \mathrm{co}(\{\lambda x_i + y_j \mid 0 \le i \le k, 0 \le j \le l\})\end{aligned}$$

یعنی $\lambda A + B$ نیز یک چندوجهی محدب است که رأسهای آن بعضی از نقاط $\lambda x_i + y_j$ هستند.

نشان می‌دهیم بردارهای $u \in S^{n-1}$ که مشخص‌کنندهٔ وجوه $(\lambda A + B)$اند، مستقل از λ هستند. برای یک $u \in S^{n-1}$ و $\lambda_0 > 0$ اگر $(\lambda_0 A + B)_u$ یک وجه $\lambda_0 A + B$ نباشد آنگاه $u' \in S^{n-1}$ای وجود دارد که $u' \neq u$ و $(\lambda_0 A + B)_u = (\lambda_0 A + B)_{u'}$. از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که $A_u = A_{u'}$ و $B_u = B_{u'}$.

زیرا اگر چنین نباشد و مثلاً $A_{u'} \not\subset A_u$ آنگاه $x_0 \in A_{u'}$ای هست که در A_u نیست. طبق تعریف A_u داریم:

$$l_u(x_0) < l_u(A_u)$$

اگر $y_0 \in B_{u'}$ نیز نقطهٔ دلخواهی باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\lambda_0 x_0 + y_0 \in \lambda_0 A_{u'} + B_{u'} &= (\lambda_0 A + B)_{u'} = (\lambda_0 A + B)_u \\ l_u(\lambda_0 x_0 + y_0) < \lambda_0 l_u(A_u) + l_u(B_u) &= l_n(\lambda_0 A_u + B_u) \\ &= l_u((\lambda_0 A + B)_u)\end{aligned}$$

تناقض بالا نشان می‌دهد که باید داشته باشیم $A_{u'} \subset A_u$. به‌صورت مشابه می‌توان نشان داد $A_u \subset A_{u'}$ و در نتیجه $A_u = A_{u'}$. اثبات $B_{u'} = B_u$ نیز کاملاً مانند بالاست.

بنابراین برای هر $\lambda > 0$ای داریم:

$$(\lambda A + B)_u = \lambda A_u + B_u = \lambda A_{u'} + B_{u'} = (\lambda A + B)_{u'}$$

یعنی $(\lambda A + B)_u$ نیز وجهی برای $\lambda A + B$ نیست. پس ادعای بالا ثابت می‌شود که بردارهای مشخص‌کنندهٔ وجه‌های $(\lambda A + B)$ مستقل از λ هستند.

حال مبدأ را، که طبق فرض درون شکلهای A و B و در نتیجه درون $\lambda A + B$ می‌باشد، به وجوه $\lambda A + B$ وصل می‌کنیم و به این ترتیب شکل به تعدادی هرم که رأس آنها مبدأ و قاعدهٔ آنها وجوه $\lambda A + B$اند افراز می‌شود. فاصلهٔ مبدأ تا وجه $(\lambda A + B)_u$ برابر است با

$$l_u((\lambda A + B)_u) = \lambda l_u(A_u) + l_u(B_u)$$

که برحسب λ به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

حجم $(n-1)$ بعدی وجه $(\lambda A + B)_u$ نیز با توجه به رابطهٔ $(\lambda A + B)_u = \lambda A_u + B_u$ و استفاده از استقرا برای حکم مسأله روی بعد فضا، یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $(n-1)$ نسبت به λ می‌باشد. بنابراین حجم هر کدام از هرمهای فوق و در نتیجه حجم کل $\lambda A + B$ چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n نسبت به λ خواهد بود.

******

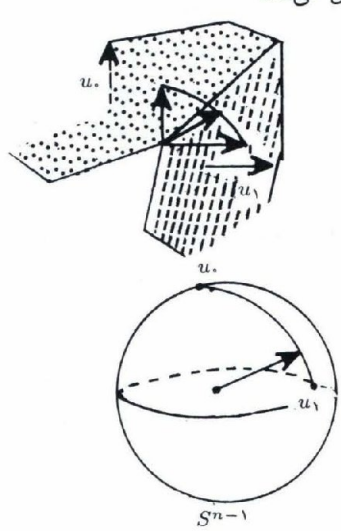
راه‌حل دوم

در این راه‌حل، گزارهٔ $(*)$ را وقتی A یک چندوجهی و B شکلی اکیداً محدب هموار است ثابت می‌کنیم. اگر B یک شکل اکیداً محدب هموار باشد آنگاه برای هر $u \in S^{n-1}$، B_u تنها شامل یک نقطه است. به این ترتیب می‌توانیم تابعی به‌صورت $f : S^{n-1} \to \partial A \subseteq \mathbb{R}^n$ تعریف کنیم که به هر $u \in S^{n-1}$ تنها عضو B_u را نسبت دهد با توجه به اکیداً محدب‌بودن B، f تابعی پیوسته است.

حال فرض کنید A یک چندوجهی باشد برای هر $u \in S^{n-1}$ داریم:

$$(\lambda A + B)_u = \lambda A_u + B_u = \lambda A_u + f(u)$$

قبل از بیان راه‌حل، به بررسی رابطهٔ بین یالهای A و بردارهایی که آنها را مشخص می‌کنند می‌پردازیم: وجه‌های چندوجهی که در حقیقت وجوه $(n-1)$بعدی آن می‌باشند تنها با یک $u \in S^{n-1}$ مشخص می‌شوند (بردار عمود بر وجه) بنابراین متناظر با هر وجه یک نقطه روی S^{n-1} وجود دارد که آن را مشخص می‌کند.



یک یال $(n-2)$بعدی با $u \in S^{n-1}$هایی می‌تواند مشخص شود که اولاً عمود بر آن وجه باشند و ثانیاً محدود به بردارهای عمود بر وجه‌های

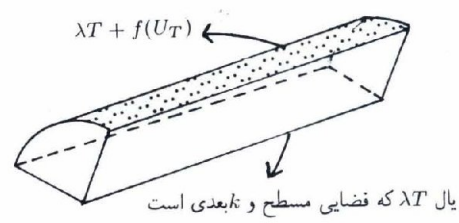
$(n-1)$بعدی باشند که آن را در بردارند. به این ترتیب قسمتی از دایرهٔ عظیمهٔ روی S^{n-1} خواهند بود که محدود به بردارهای عمود بر دو وجه مجاور است.

همین روند را برای یالهای با بعد پایینتر ادامه می‌دهیم: یک وجه kبعدی با $u \in S^{n-1}$هایی مشخص می‌شود که اولاً عمود بر آن و ثانیاً محدود به بردارهایی باشند که وجوه با بعد بالاتر شامل آن یال kبعدی را مشخص می‌کنند.

به این ترتیب $u \in S^{n-1}$هایی که یال kبعدی T از چندوجهی A را مشخص می‌کنند یک ناحیهٔ $(n-k-1)$ بعدی از کرهٔ S^{n-1} است که آن را با U_T نمایش می‌دهیم. (U_T قسمتی از کرهٔ عظیمهٔ $(n-k-1)$بعدی S^{n-1} می‌باشد که محدود به مرزهای بیان شده است).

به این ترتیب سطح کرهٔ S^{n-1} با ناحیه‌های U_T افراز می‌شود. از طرفی برای یک یال T از A داریم

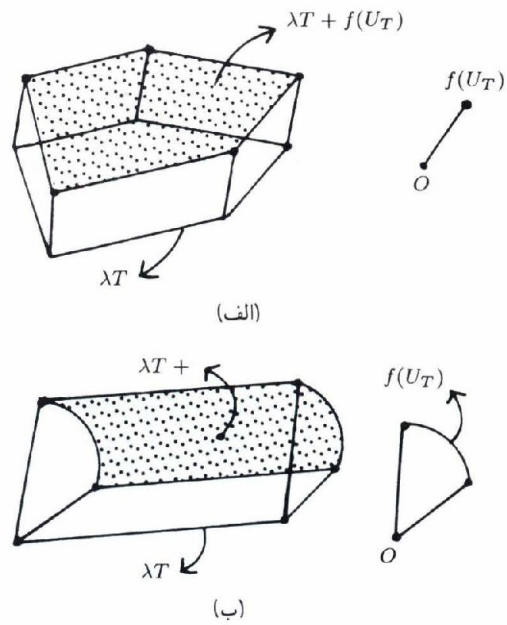
$$\bigcup_{u\in U_T} (\lambda A+B)_u = \bigcup_{u\in U_T} (\lambda T + f(u)) = \lambda T + f(U_T)$$



این مجموعه ناحیه‌ای از مرز شکل $\lambda A + B$ است که به نوعی مربوط به یال T می‌باشد. وقتی λ تغییر می‌کند حجم قاچی که در شکل مشخص شده یعنی ناحیهٔ بین λT و سطح $\lambda T + f(U_T)$، با نسبت λ^k تغییر می‌کند، زیرا حجم kبعدی λT با این نسبت تغییر می‌کند.



برای مثال وقتی $k = n-1$، T یک وجه A و U_T تنها یک نقطه است. در نتیجه $f(U_T)$ نیز تنها یک نقطه است و $\lambda T + f(U_T)$ انتقال‌یافتهٔ λT خواهد بود و قاچی که در بالا ذکر شد در این حالت یک متوازی‌السطوح خواهد بود (همان‌طور که در شکل الف مشخص شده). اگر $k = n-2$، U_T قسمتی از یک دایرهٔ عظیمه است که ناحیه‌ای ۱بعدی است و در نتیجه $f(U_T)$ نیز چنین است (شکل ب).



نشان خواهیم داد که $\lambda A + B$ به شکل λA و قاچهایی که در بالا ساخته شدند افراز می‌شود و بنابراین $V(\lambda A + B)$ چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n نسبت به λ خواهد بود.

برای اثبات اینکه این قاچها با هم اشتراک ندارند کافی است توجه کنیم که قاچ مربوط به یال T برابر است با:

$$\cup_{t\in(0,T]}(\lambda T + tf(U_T)) = \cup_{t\in(0.T]} \cup_{u\in U_T} (\lambda A + tB)_u$$

اگر $u_1 \neq u_0$ و $\lambda a_0 + tb_0 \in (\lambda A + tB)_{u_0}$، خواهیم داشت:

$$l_{u_1}(a_0) \leq l_{u_1}(A_{u_1})$$

$$l_{u_1}(b_0) < l_{u_1}(B_{u_1}) \qquad \text{(با توجه به اکیداً محدب‌بودن } B\text{)}$$

$$\Rightarrow l_{u_1}(\lambda a_0 + tb_0) < l_{u_1}(\lambda A_{u_1} + tB_{u_1}) = l_{u_1}((\lambda A + tB)_{u_1})$$

بنابراین $(\lambda A + tB)_{u_0} \cup (\lambda A + tB)_{u_1} = \phi$.

همچنین اگر $0 < t_1 < t_2$، مرز $\lambda A + t_1 B$ کاملاً درون شکل $\lambda A + t_2 B$ قرار می‌گیرد و در نتیجه مرزهای دو شکل $\lambda A + t_1 B$ و $\lambda A + t_2 B$ اشتراکی ندارند.

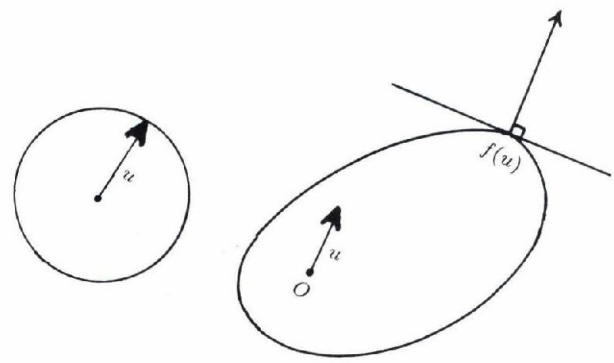
لذا مجموعه‌های $(\lambda A + tB)_u$ وقتی $t \in (0,1]$ و $u \in S^{n-1}$ تغییر کنند از هم جدا هستند. به این ترتیب قاچهای تعریف‌شده در بالا نیز از هم جدا و همگی خارج شکل λA هستند.

******

راه‌حل سوم

اگر A یک شکل اکیداً محدب هموار باشد، نگاشت گاوسی مرز آن (نگاشتی که به هر نقطهٔ مرز، بردار عمود و یکهٔ برونسو در آن نقطه را نسبت می‌دهد)

یک نگاشت هموار و جهت نگهدار است که به خاطر اکیداً محدب‌بودن A، نگاشتی یک به یک و پوشا از مرز A به کرهٔ S^{n-1} خواهد بود و در نتیجه دارای وارون است. این وارون همان تابع $f_A : S^{n-1} \to \partial A \subseteq \mathbb{R}^n$ است که در قسمت قبل معرفی شد. طبق قضیهٔ سارد[1] تقریباً همهٔ نقاط S^{n-1} برای نگاشت گاوسی مقدار عادی‌اند و در نتیجه طبق قضیهٔ تابع وارون، تابع f_A، وارون نگاشت گاوسی، تقریباً در همهٔ نقاطْ مشتق‌پذیر با مشتق وارون‌پذیر خواهد بود.



تابع $F_A : \mathbb{D}^n \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall u \in S^{n-1} \text{ و } t \in [0,1] :$$
$$F_A(tu) := tf_A(u)$$

بنابراین تابع F نیز یک به یک و تقریباً همه جا مشتق‌پذیر خواهد بود. حال فرض کنید A و B دو شکل اکیداً محدب هموار باشند. داریم:

$$f_{\lambda A+B}(u) := (\lambda A + B)_u = \lambda A_u + B_u = \lambda f_A(u) + f_B(u)$$
$$\Rightarrow F_{\lambda A+B}(tu) := tf_{\lambda A+B}(u) = \lambda t f_A(u) + t f_B(u)$$
$$= \lambda F_A(tu) + F_B(tu)$$

از طرفی داریم:

$$V(\lambda A + B) = V(F_{\lambda A+B}(\mathbb{D}^n)) = \int_{F_{\lambda A+B}(\mathbb{D}^n)} 1 dx$$
$$= \int_{\mathbb{D}^n} J(F_{\lambda A+B}) dx = \int_{\mathbb{D}^n} J(\lambda F_A + F_B) dx$$

که $J(F) = |\det \frac{DF}{Dx}|$.

F جهت نگهدار است زیرا f چنین است، در نتیجه $\det \frac{DF}{Dx} \geq 0$ و لذا داریم: $J(F) = \det \frac{DF}{Dx}$. حال با توجه به اینکه $\det(\lambda F_A + F_B)$ چندجمله‌ای درجهٔ n نسبت به λ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $V(\lambda A + B)$ نیز چنین است.

بنا به آنچه ثابت کردیم برای هر تعداد شکل محدب $K_1, K_2, \ldots, K_h$ در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_h K_h) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{h} \nu_{i_1,\ldots,i_n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}$$

1. Sard

می‌توان نشان داد که ضریب $\nu_{i_1,\ldots,i_n}$ متقارن است و فقط به $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$ بستگی دارد. (اثبات این مطلب مثلاً به کمک راه‌حل سوم تمرین خوبی خواهد بود!) $\nu(K_1, K_2, \ldots, K_l)$ را حجم آمیختهٔ $K_1, K_2, \ldots, K_l$ می‌نامند. ثابت می‌شود که حجم آمیخته نامنفی، پیوسته و نسبت به تک‌تک K_iها صعودی است (سعی کنید این حکم را به کمک راه‌حل دوم ثابت کنید).

همان‌طور که در مقدمه هم گفته شد مسألهٔ فوق قضیه‌ای در احتمال هندسی و پایهٔ تعریف کمیتهایی است به‌نام حجمهای آمیخته[1].

در انتها، نوشته را با بیان قضیه‌ای که ابزاری مؤثر در بررسی حجمهای آمیخته به‌شمار می‌رود به‌پایان می‌بریم.

قضیهٔ برون-مینکوفسکی[2]

اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب باشند،

$$V(\lambda A + (1-\lambda)B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda V(A)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)V(B)^{\frac{1}{n}}$$
$$0 \leq \lambda \leq 1$$

اثبات این قضیه را نیز به‌عنوان تمرین به شما واگذار می‌کنیم.

مراجع

۱. پرونده‌های پژوهشی دانش‌آموزان اردوی ۹ نفره المپیاد ریاضی سال ۸۲ـ۸۱. باشگاه دانش‌پژوهان جوان.

2. Daniel A. Klein, Gian-Carlo Rota, *Introduction to geometric Probability*, Cambridge U. P. (1997).

۳. کسری علیشاهی، «چند مسألهٔ دیگر ...»، نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، (۱۳۸۱) صص ۵۸ـ۶۲.

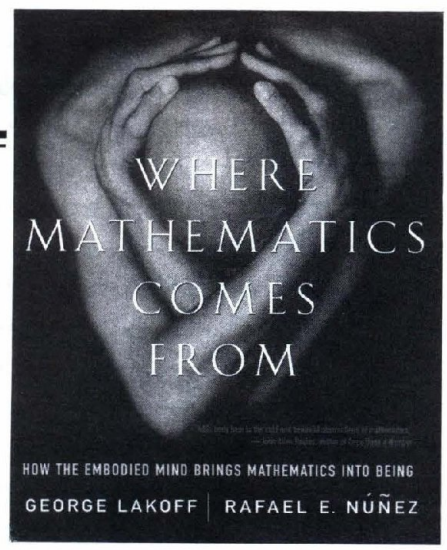
* * * * * *

* کسری علیشاهی، سیدرضا مقدسی، دانشگاه صنعتی شریف

1. mixed volumes 2. Brunn-Minkowski

نقد و بررسی

ریاضیات و استعاره



Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, George Lakoff and Rafael E. Núñez, Basic Books (2000), xvII+493pp.

کتاب ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد نوشتهٔ دو متخصص علوم شناختی، یک زبانشناس (جورج لاکف) و یک روانشناس (رافائل نونز)، در سال ۲۰۰۰ منتشر شد. نویسندگان کتاب این فرضیه را مطرح می‌کنند که منشأ مفاهیم ریاضی را می‌توان به تمامی از طریق علوم‌شناختی کشف کرد و به خصوص تفکر استعاری نقش اساسی در مفهوم‌سازی ریاضیات دارد. در اینجا نخست ترجمه‌ای از مقدمهٔ کتاب می‌آید که در آن برنامه و دیدگاه کلی مؤلفان تشریح شده است. این کتاب از جهات گوناگون مورد تمجید و نیز انتقاد شدید قرار گرفته است. در وب‌گاهِ کتاب:

http://perso.unifr.ch/rafael.nunez/warning.html

فهرستی از نقدهایی که بر کتاب نوشته شده است ملاحظه می‌شود که در اینجا ترجمهٔ دو تا از این نقدها را پس از مقدمهٔ کتاب می‌آوریم. نقد دیگری از کتاب که نسبتاً طولانی است و در وب‌گاه فوق به آن اشاره نشده است در مجلهٔ نوئیسز، شمارهٔ ۱۰، جلد ۴۸، نوامبر ۲۰۰۱، صفحات ۱۱۸۲ـ۱۱۸۸ آمده است. در این وب‌گاه، تصحیح بعضی از غلطهای کتاب نیز دیده می‌شود.

مقدمهٔ کتاب:

چرا علوم‌شناختی برای ریاضیات اهمیت دارد

ترجمهٔ هاله المعی

ریاضیاتی که ما می‌شناسیم ساختهٔ انسان است و مورد استفادهٔ انسانهاست، انسانهایی چون ریاضیدانان، فیزیکدانان، دانشمندان علوم رایانه و اقتصاددانان که همه از نوع انسان اندیشه‌ورزند. شاید این امری بدیهی باشد، اما پیامدهای مهمی دارد. ریاضیاتی که ما می‌شناسیم با مغز انسان و ظرفیتهای ذهنی انسان ساخته شده و محدود به آنهاست. تنها ریاضیاتی که ما می‌شناسیم یا می‌توانیم بشناسیم ریاضیات مبتنی بر مغز و ذهن است.

با یافته‌های علوم‌شناختی و عصب‌شناسی دربارهٔ مغز و ذهن انسان، معلوم شده که مغز ابزار همه کاره‌ای نیست. مغز و بدن طوری با هم تکامل یافته‌اند که مغز مناسبترین کارکرد را برای بدن ایجاد کند. بخش اعظم کار مغز صرف بینایی، حرکت، درک فضایی کنشهای متقابل بین انسانها، هماهنگی، عواطف، زبان و تعقّل روزمره می‌شود. دریافتهای انسان و زبان انسان اتفاقی یا اختیاری نیست، بلکه به دلیل محدودیتهای ساختار مغز، اندامها و جهان اطراف، کاملاً محدود و سازمان‌یافته است.

با این ملاحظات دو سؤال پیش می‌آید:

۱. دقیقاً کدام سازوکار مغز و ذهن انسان به او امکان فرمولبندی اندیشه‌های ریاضی و استدلال ریاضیاتی می‌دهد؟
۲. آیا ریاضیاتِ مبتنی بر مغز و ذهن تمام آن چیزی است که ریاضیات ‌است؟ یا یک ریاضیات متعالی ــ چنانکه افلاطونیان گفته‌اند ــ وجود دارد که ورای تمام کالبدها و اذهان و ساختار عالم ــ این عالم و هر عالم ممکن ــ است؟

سؤال ۱ می‌پرسد که اندیشه‌های ریاضی از کجا می‌آیند و از لحاظ شناختی چگونه باید تحلیل شوند. این یک سؤال علمی است، سؤالی که جوابش را علمِ شناخت، علم میان‌رشته‌ای ذهن، باید بدهد. این سؤال را به‌عنوان یک سؤال تجربی نمی‌شود صرفاً در محدودهٔ ریاضیات بررسی کرد. و اما به‌عنوان سؤالی مربوط به علوم‌تجربی، نمی‌شود آن را با یک فلسفهٔ پیشینی یا با خود ریاضیات جواب داد. پاسخ به این سؤال نیاز به درک فرایندهای شناختی انسان و مغز انسان دارد. علم شناخت برای ریاضیات اهمیت دارد چون تنها علم شناخت می‌تواند جواب این سؤال را بدهد.

سؤال ۱ چیزی است که این کتاب عمدتاً با آن سروکار دارد. ما می‌خواهیم ببینیم که کدام سازوکارهای شناختیِ طبیعی انسان در خلق و درک اندیشه‌های ریاضی به‌کار گرفته می‌شوند. از این قرار، کار ما طرح روشهایی برای تحلیل اندیشه‌های ریاضی است.

اما سؤال ۲ است که در قلب فلسفهٔ ریاضی جا دارد. این سؤالی است که خیلیها دنبال جوابش هستند. جواب ما رک و راست است:

- قضیه‌هایی که انسان اثبات می‌کند در محدودهٔ نظام مفهومیِ ریاضیاتی انسان است.
- تمام دانش ریاضیاتی که ما داریم یا می‌توانیم داشته باشیم دانش در محدودهٔ ریاضیات بشری است.
- هیچ راهی نداریم که بفهمیم قضیه‌هایی که انسانهای ریاضیدان اثبات می‌کنند، در عالمِ ورای نوع بشر یا سایر انواع، حقیقت عینی دارند یا نه.

صورت اصلی استدلال این است:

۱. دربارهٔ وجود ریاضیات افلاطونی نمی‌شود بحث علمی کرد. خیلی که خوش‌بین باشیم، این یک مسألهٔ اعتقادی است مثل ایمان به خدا. یعنی ریاضیات افلاطونی، مثل خداوند، فی‌نفسه از طریق جسم، مغز و ذهن بشر قابل مشاهده یا ادراک نیست. علم به تنهایی قادر به اثبات یا ردّ وجود ریاضیات افلاطونی نیست، همان‌طور که قادر به اثبات یا رد وجود خدا نیست.
۲. مثل تصوّری که از خدا داریم، آنچه از بشر برمی‌آید درک ریاضیات برحسب استطاعت مغز و ذهن بشر است. تنها مفهوم‌سازی ریاضی که از ما برمی‌آید، مفهوم‌سازی بشری است. بنابراین ریاضیاتی که ما می‌دانیم و می‌آموزیم، تنها می‌تواند ریاضیاتِ ساخته و پرداخته انسان باشد.
۳. اینکه ریاضیات بشری چیست، سؤالی مربوط به علوم تجربی است، نه یک سؤال ریاضی یا یک پرسش فلسفی پیشینی.
۴. بنابراین، فقط از طریق علوم‌شناختی ــ بررسی میان‌رشته‌ای مغز، ذهن و ارتباط آنها ــ می‌توانیم جواب این سؤال را پیدا کنیم: ماهیت تنها ریاضیاتی که انسان می‌داند یا می‌تواند بداند چیست؟
۵. بنابراین، اگر ماهیت ریاضیات را به‌عنوان یک سؤال علمی مطرح کنید، آنگاه ریاضیات عبارت است از ریاضیاتی که برای انسان با استفاده از سازوکارهای شناختی مغز متصوّر است.
۶. و اما، ممکن است شما ماهیت ریاضیات را نه یک سؤال علمی بلکه بحثی فلسفی یا اعتقادی در نظر بگیرید. آن وقت زحمت اقامهٔ دلیل علمی به عهدهٔ آنهاست که مدعی‌اند یک ریاضیات افلاطونی متعالی وجود دارد و آن قضایایی که در ریاضیات بشری اثبات می‌شوند، خارج از وجود هر موجود یا نظام مفهومی، بشری یا غیربشری، دارای حقیقت عینی‌اند. فعلاً که علی‌الاصول راهی برای اثباتهای علمی از این قبیل سراغ نداریم.

این کتاب سعی دارد روشن کند ریاضیات بشری، که از طریق مغز و ذهن بشر مفهوم‌سازی می‌شود، چه جور چیزی است. با توجه به وضع فعلی و قابل پیش بینی دانش علمی ما، ریاضیات همان ریاضیات بشری است. مفاهیم ریاضی همان مفاهیم ریاضی بشری است. امیدواریم که این برای شما، با هر عقیده و فلسفه‌ای که برای وجود ریاضیات متعالی دارید، جالب باشد.

بخش مهمی از این بحث نیاز به توضیح بیشتری دارد. چه دلیلی داریم برای آنچه یوجین ویگنر، فیزیکدان، «کارآیی غیرقابل توجیه ریاضیات در علوم طبیعی» می‌نامد (ویگنر، ۱۹۶۰)؟ چگونه می‌توان این واقعیت را توجیه کرد که دانشمندان توانسته‌اند صورتهایی از ریاضیات را پیدا کنند یا بسازند که بسیاری از نمودهای دنیای فیزیکی را به دقت مشخص کند یا حتی به دقت پیش‌گویی کند؟ گاهی فرض می‌شود که کارآیی ریاضیات به‌عنوان ابزاری علمی حاکی از وجود ذات ریاضی در ساختار عالم فیزیکی است. این، البته یک بحث علمی برمبنای علوم‌تجربی نیست.

این بحث را به تفصیل در قسمت ۵ کتاب ادامه خواهیم داد. حرف ما، به اختصار این خواهد بود که آنچه بین ریاضیات و دنیا «جور درآمده» در ذهن دانشمندانی می‌گذرد که دنیا را به دقت مشاهده کرده‌اند، ریاضیات مناسب با آن را خوب فراگرفته‌اند (یا ساخته‌اند) و بعد عقلهایشان را روی هم گذاشته‌اند و اینها را (اغلب با موفقیت) با هم جور کرده‌اند.

بالاخره، می‌رسیم به این نظر که ریاضیات بشری نمونه‌ای، یا تقریبی، از ریاضیات متعالی افلاطونی است. پیش‌فرض این دیدگاه، ایمانی غیرعلمی به وجود ریاضیات افلاطونی است. ادعا می‌کنیم که حتی این دیدگاه نمی‌تواند صادق باشد. استدلال ما مبتنی است بر تحلیلی که درکل کتاب خواهیم داشت دایر بر اینکه ریاضیات بشری اساساً از استعارهٔ مفهومی[1] برای مشخص کردن مفاهیم ریاضی استفاده می‌کند. استعارهٔ مفهومی محدود به ذهن موجود زنده است. به این ترتیب، ریاضیات بشری [که بخش عمده‌اش مبتنی بر استعارهٔ مفهومی است] نمی‌تواند جزئی از ریاضیات افلاطونی باشد که ــ اگر چنین چیزی وجود داشته باشد ــ باید حقیقی محض باشد نه استعاره‌ای.

نتایج ما از این قرار است:

۱. ریاضیات متعالی افلاطونی، اگر هم وجود داشته باشد، به کلی خارج از دسترس آدمیزاد است. بنابراین باور داشتن به ریاضیات افلاطونی یک امر اعتقادی است، چیزی شبیه به ایمان مذهبی. هیچ گواه علمی له یا علیه وجود ریاضیات افلاطونی نمی‌توان داشت.

1. conceptual metaphor

۲. بنابراین، تنها ریاضیاتی که بشر می‌داند یا می‌تواند بداند ریاضیات ذهن‌بنیاد است که ساخته و پرداختهٔ ذهن و مغز بشر و محدود به آن است. به این ترتیب تنها توضیح علمی ماهیت ریاضی، توضیح ریاضیات ذهن‌بنیاد بشری از طریق علوم‌شناختی است. چنین توضیحی از تحلیل اندیشه‌های ریاضی حاصل می‌شود.
۳. تحلیل اندیشه‌های ریاضی نشان می‌دهد که ریاضیات ذهن‌بنیاد بشری، استعاره‌های مفهومی را به‌عنوان بخشی از خود ریاضیات به‌کار می‌گیرد.
۴. به این ترتیب ریاضیات بشری نمی‌تواند جزئی از ریاضیات متعالی افلاطونی، در صورت وجود، باشد. این دلایل وقتی قویتر می‌شوند که دربارهٔ مفاهیم ریاضی بشری مفصلتر بحث کنیم، که خواهیم دید بستگی دارد به اینکه جسم، مغز و ذهن انسان چه جور چیزهایی هستند. نکته اصلی، در مطلب شمارهٔ (۳) است ــ اینکه استعارهٔ مفهومی سازندهٔ ریاضیاتی است که بشر مفهوم‌سازی می‌کند. وقتی بحثهای ما را دربارهٔ استعاره‌های مفهومی در ریاضیات می‌خوانید این نکته یادتان باشد.

کشفهای جدید دربارهٔ ماهیت ذهن

در سالهای اخیر علوم شناختی پیشرفتهای اساسی داشته است، پیشرفتهایی که تأثیر مهمی در درک ما از ریاضیات دارد. شاید عمیقترین یافته‌های جدید اینها باشند:

۱. شکل‌گیری ذهن. خصوصیات جسمانی مغز و کارکرد روزمرهٔ ما در جهان، مفاهیم بشر و تعقل بشر را می‌سازند. این شامل مفاهیم ریاضی و تعقل ریاضی هم می‌شود.
۲. ناخودآگاه شناختی[1]. بیشتر تفکر ما ناخودآگاه است ــ نه به معنی فرویدی، فقط از این لحاظ که مستقیماً با درون‌نگری آگاهانه دسترسی به آن نیست. ما نمی‌توانیم مستقیماً به نظامهای مفهومی و فرایندهای سطحی تفکرمان نگاه کنیم. این شامل بخش عمدهٔ تفکر ریاضی هم می‌شود.
۳. تفکر استعاری. در بیشتر موارد، انسان مفاهیم انتزاعی را برحسب عینیّات تجسم می‌کند. این کار با استفاده از مفاهیم و وجود استدلالی مبتنی بر نظام حسی-حرکتی صورت می‌گیرد. سازوکاری که با آن مفاهیم انتزاعی برحسب عینیات درک می‌شوند، استعارهٔ مفهومی نام دارد. در تفکر ریاضی هم از استعارهٔ مفهومی استفاده می‌شود، مثلاً وقتی‌که اعداد را به‌صورت نقاطی واقع بر یک خط تصور می‌کنیم. این کتاب می‌کوشد این یافته‌ها را در قلمرو ریاضی اعمال کند. یعنی ریاضیات را موضوع علوم‌شناختی قرار می‌دهیم و بررسی می‌کنیم که ریاضیات چگونه ساخته و پرداخته می‌شود، و به‌خصوص چگونه به‌صورت استعاری مفهوم‌سازی می‌شود.

همان‌طورکه روشن خواهد شد، تنها با این بصیرتهای جدید در علوم‌شناختی است که تحلیل عمیق و بنیادی اندیشه‌های ریاضی ممکن می‌شود. نگرشهایی از آن نوع که در سراسر این کتاب عرضه می‌شود در دههٔ ۱۹۶۰ و اوایل دههٔ ۱۹۷۰، در دوران قدیم علوم‌شناختی که ذهن مستقل از بدن در نظر گرفته می‌شد، حتی قابل تصور هم نبود. آن روزها تفکر را مهارت استفاده از نمادهای کاملاً انتزاعی می‌دانستند و همهٔ مفاهیم را واقعی در نظر می‌گرفتند ــ فارغ از همهٔ محدودیتهای زیست‌شناختی و فارغ از یافته‌ها دربارهٔ مغز. به این ترتیب تفکر به عقیدهٔ خیلیها، صورتی از منطق نمادی بود. چنانکه در فصل ۶ خواهیم دید، منطق نمادی، خود یک رشتهٔ ریاضی است که احتیاج به تحلیل شناختی دارد. برای بحثی در تفاوتهای بین علوم شناختی قدیم و جدید نگاه کنید به

Philosophy in the Flesh (Lakoff & Johnson, 1999)

و

Reclaiming Cognition (Núñez & Freeman, eds.,1999)

ریاضیات یکی از عمیقترین و زیباترین کندوکاوهای تخیل است که بشر تاکنون درگیرش شده است. اما بسیاری از زیباییها و عظمتهای آن برای کسانی که دست‌اندرکار ریاضیات نیستند، غیرقابل دسترسی است چون بخش عمدهٔ ساختارِ شناختی ریاضی توصیف نشده است. فعلاً، حتی مفاهیم بنیادی ریاضی دبیرستان برای بسیاری از تحصیلکرده‌ها غیرقابل درک، مرموز و معماگونه است. ما معتقدیم که علوم‌شناختی در بسیاری موارد می‌توانند ابهامات را رفع کنند و پرده‌های رمزوراز را کنار بزنند تا شکوه این مفاهیم به‌روشنی نمایان شود. برای این کار باید آشکار شود که ریاضیات چگونه در تجربه‌های جسمانی ریشه دارند و چگونه استعاره‌های مفهومی اندیشه‌های ریاضی را بنا می‌کنند.

بسیاری از سردرگمی‌ها، معماها، و تعارضات ظاهری ریاضیات به این دلیل پیدا می‌شوند که استعاره‌های مفهومی که بخشی از ریاضیات‌اند، نه استعاره، بلکه واقعی در نظر گرفته می‌شوند. وقتی خصلت بکلی استعاری مفاهیم ریاضی آشکار شود، این قبیل سردرگمی‌ها و تعارضات ظاهری از میان می‌روند.

اما خود استعاره‌های مفهومی از میان نمی‌روند. نمی‌توان با تحلیل از دست آنها رهایی یافت. استعاره بخش اساسی تفکر ریاضی است نه سازوکاری صرفاً کمکی که برای تجسم یا درک آسانتر ریاضیات به‌کار گرفته شود. این استعاره راکه «اعدادْ نقاط روی یک خط هستند» در نظر بگیرید. اعداد لزوماً نباید به‌صورت نقاطی واقع بر خط مفهوم‌سازی شوند؛ مفاهیمی از اعداد وجود دارند که هندسی نیستند. اما محور اعداد یکی از اصلیترین مفاهیم در کلّ ریاضیات است. بدون آن نه هندسهٔ تحلیلی وجود دارد نه مثلثات.

یا این استعاره: «اعدادْ مجموعه هستند» که در تحولات ریاضی اوایل قرن بیستم مفهومی بنیادی داشت. ما مجبور نیستیم اعداد را به شکل مجموعه در نظر بگیریم. علم حساب بدون این استعاره دو هزار سال وجود داشته است ــ یعنی بدون اینکه تصور کنیم صفر مجموعهٔ تهی است، ۱ مجموعهٔ حاوی مجموعهٔ تهی، ۲ مجموعهٔ حاوی ۰ و ۱و . . . . اما اگر از این استعاره استفاده کنیم، صورتهای استدلال دربارهٔ مجموعه‌ها بر اعداد نیز قابل اعمال‌اند. فقط به اعتبار این استعاره است که برنامهٔ «مبانی کلاسیک ریاضیات» می‌تواند وجود داشته باشد.

استعارهٔ مفهومی سازوکاری شناختی است که به ما امکان می‌دهد دربارهٔ نوعی از اشیا طوری استدلال کنیم که انگار از نوع دیگری‌اند. این نشان می‌دهد که استعاره صرفاً یک پدیدهٔ زبانی و یک صنعت خشک و خالی گفتاری نیست، بلکه سازوکاری شناختی است که به قلمرو تفکر تعلق دارد. بعداً در این کتاب می‌بینیم که استعارهٔ مفهومی یک معنی تخصصی دارد: استعارهٔ مفهومی

1. cognitive unconscious

عبارت است از یک نگاشت میان‌حوزه‌ای استنتاج نگهدار[1] ــ سازوکاری عصبی که به ما امکان می‌دهد ساختار استنتاجی یک حوزهٔ مفهومی (مثلاً هندسه) را برای استدلال دربارهٔ یک حوزهٔ دیگر (مثلاً، حساب) به‌کار ببندیم. چنین استعارهٔ مفهومی به ما امکان می‌دهد از آنچه دربارهٔ یک شاخه از ریاضیات می‌دانیم برای استدلال دربارهٔ یک شاخهٔ دیگر استفاده کنیم.

استعارهٔ مفهومی ریاضیات را بسیار غنی می‌کند. اما سردرگمی‌هایی هم به‌بار می‌آورد اگر استعاره‌ها واضح نباشند یا به معنای واقعی در نظر گرفته شوند. آیا صفر نقطه‌ای است روی یک خط؟ یا مجموعهٔ تهی است؟ یا هر دو؟ یا صرفاً یک عدد است نه نقطه و نه مجموعه؟ جواب یگانه‌ای نداریم. هر پاسخی انتخاب یک استعاره است و هر انتخاب استعاره، استنتاجهای مختلفی در اختیار می‌گذارد و موضوع متفاوتی را معیّن می‌کند.

ریاضیات، چنانکه خواهیم دید، استعاره روی استعاره است. وقتی یک مفهوم ریاضی به تنهایی یک دوجین استعاره به همراه دارد، کار دانشمند علوم شناختی است که این لایه‌ها را از هم بازکند طوری که ساختارِ شناختی پایه‌ای آنها آشکار شود.

این کار فی‌نفسه اهمیت علمی دارد، اما ممکن است کاربرد مهمی هم در آموزش ریاضی داشته باشد. ما معتقدیم آشکارشدن ساختارِ شناختی ریاضیات، دسترسی به ریاضیات و درک آن را بیشتر میسّر می‌کند. چون استعاره‌ها براساس تجربه‌های معمولی شکل می‌گیرند بیشتر مفاهیم ریاضی مبتنی بر آنها به زبان عادی قابل درک می‌شوند.

در علوم شناختی ریاضی سؤالاتی مطرح می‌شود که ریاضیات آنها را دربارهٔ خودش نمی‌پرسد، و نمی‌تواند بپرسد. ما چگونه مفاهیمی مثل بینهایت، صفر، خط، نقطه و مجموعه را با ابزارهای ادراکی عادی درک می‌کنیم؟ چطور از آن مفاهیم ریاضی که، برای مبتدیان غریب یا معماگونه‌اند سردرمی‌آوریم؟ مفاهیمی مثل خمهای فضاپرکن، اعداد بینهایت کوچک، نقطهٔ واقع در بینهایت، و مجموعه‌های کژبنیاد[2] (مثل مجموعه‌ای که اعضایش «شامل خودش» است)؟

به‌عنوان مثال، یکی از عمیقترین روابط در کل ریاضیات را در نظر بگیرید. رابطهٔ اویلر، $e^{\pi i} + ۱ = ۰$، که در آن e عدد اعشاری نامتناهی ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵... است، عدد عجیب و غریبی که پایهٔ لگاریتم طبیعی است. این رابطه معمولاً در دوره‌های مقدماتی دانشگاه تدریس می‌شود. اما واقعاً معنایش چیست؟ معمولاً می‌گویند یک کمیت نمایی به‌صورت q^n صرفاً یعنی اینکه عدد q را n بار در خودش ضرب کنیم؛ یعنی $q \cdot q \cdot \cdots \cdot q$. خوب، این تعریف برای درک معنی $۲^۵$ عالی است، می‌فهمیم یعنی $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ که حاصل‌ضربشان می‌شود ۳۲. اما با این تعریف عدد نمایی از $e^{\pi i}$ هیچ چیز دستگیرمان نمی‌شود. اینجا دست‌کم سه ابهام داریم:

۱. چه معنی می‌دهد که یک عدد اعشاری نامتناهی مثل e در خودش ضرب شود؟ اگر ضریب را یک عمل الگوریتمی در نظر بگیریم، این عمل ازکجا شروع می‌شود؟ معمولاً عمل ضرب را از آخرین رقم سمت راست عدد شروع می‌کنیم، اما یک عدد اعشاری نامتناهی آخرین رقمش کجا بود؟

۲. یعنی چه که عددی π بار در خودش ضرب شود؟ π هم یکی دیگر از اعداد اعشاری نامتناهی نامتناوب است. عملی را «π بار» انجام دادن یعنی چه؟

۳. و از همه بدتر، چه معنی دارد که عددی را به تعداد موهومی $(\sqrt{-۱})$ بار در خودش ضرب کنیم؟ و تازه به ما جوابش را هم می‌گویند که می‌شود -۱. اینجا برهان معمولی هیچ کمکی نمی‌کند. این برهان ثابت می‌کند که $e^{\pi i} + ۱ = ۰$ صادق است، اما نمی‌گوید $e^{\pi i}$ اصلاً یعنی چه! ما در این کتاب می‌گوییم.

در این کتاب برخلاف بیشتر کتابهای مربوط به ریاضیات، ما نه تنها به آنچه صادق است بلکه به آنچه معنای اندیشه‌های ریاضی است خواهیم پرداخت. اینکه مفاهیم ریاضی چه طور می‌توانند درک شوند، و چرا صادق‌اند. همین‌طور با ماهیت ریاضی از چشم‌انداز ریاضیات ذهن‌بنیاد، سروکار خواهیم داشت.

یکی از ملاحظات اصلی ما مفهوم بینهایت در نمودهای مختلفش خواهد بود: مجموعه‌های نامتناهی، اعداد ترامتناهی، سریهای نامتناهی، نقطهٔ واقع در بینهایت، بینهایت کوچکها، و اشیایی که با مقادیر دنباله‌ها «در بینهایت» به‌وجود می‌آیند مثل خمهای فضاپرکن. نشان خواهیم داد که یک «استعارهٔ بنیادی بینهایت» وجود دارد که همهٔ اینها موارد خاصی از آن‌اند. منشأ این استعاره خارج از ریاضیات است، اما به نظر می‌رسد پایهٔ ادراک ما از بینهایت در تقریباً همهٔ حوزه‌های ریاضی است. اگر استعارهٔ بنیادی بینهایت را بفهمیم، بسیاری از ابهامهای کلاسیک از میان می‌روند و درک آنچه ظاهراً پیچیده به نظر می‌رسد به مراتب ساده‌تر می‌شود.

نتایج تحقیق ما، عمدتاً نتایج ریاضی نیست بلکه نتایجی مربوط به علمِ شناختی ریاضیات است. نتایجی است دربارهٔ نظام مفهومی بشر که طرحِ اندیشه‌های ریاضی را میسّر می‌کند و ریاضیات در این نظام معنا می‌یابد. اما این نتایج در حد زیادی بازتاب تفکر خودآگاه ریاضیدانان نیست، بلکه نشان‌دهندهٔ نظام مفهومی ناخودآگاه کسانی است که کار ریاضی می‌کنند. نتایج تحقیق ما به‌هیچ‌وجه در ریاضیات تغییری نمی‌دهد اما شاید در روش ادراک ریاضی و بیان معنای نتایج ریاضی، تحولی اساسی ایجاد کند.

بعضی از یافته‌های ما شاید خیلیها را شگفت‌زده کند. این هم چند نمونه:

- منطق نمادی پایهٔ کل عقلانیت نیست، تمام و کمال هم صادق نیست. نظام استعاره‌ای زیبایی است که استعاره‌های عجیب و غریبی دارد. به بعضی دردها می‌خورد اما برای مشخص کردن چیزی مثل گسترهٔ کامل سازوکار تعقل بشر، بسیار ناکافی است.
- اعداد حقیقیِ محور اعداد را «پر نمی‌کنند». یک مبحث ریاضی داریم به اسم اعداد ابرحقیقی که در آن اعداد حقیقی تقریباً روی خط پراکنده‌اند.
- در تعریف جدید پیوستگی توابع، و نیز در آنچه پیوستار خوانده می‌شود، پیوستگی به مفهوم معمول به‌کار نمی‌رود.
- خمهای به اصطلاح فضاپرکن فضا را پر نمی‌کنند.
- اینکه آیا $۱ = ۰٫۹۹۹۹۹۹۹...$ یا نه، جواب مثبت یا منفی قاطعی ندارد. جواب بستگی به نظام مفهومی انتخابی شما دارد. اینکه $۱ = ۰٫۹۹۹۹۹۹۹...$ یک بحث ریاضی است و اینکه $۱ \approx ۰٫۹۹۹۹۹۹۹...$ بحثی است دیگر.

---

1. inference-preserving cross-domain mapping

2. non-well-founded sets

اینها یافته‌های جدید ریاضی نیستند اما راههای تازه‌ای برای ادراک نتایج معروف ریاضی‌اند. اینها یافته‌هایی در علوم شناختی ریاضیات‌اند، نتایجی دربارهٔ ساختار مفهومی ریاضیات و نقش ذهن در خلق مباحث ریاضی.

اگرچه پژوهش ما در خودِ نتایج ریاضی تأثیری ندارد، به ادراک ما از نتایج ریاضی و ادعاهای خیلی از ریاضیدانان ارتباط دارد. پژوهش ما به فلسفهٔ ریاضی هم مربوط می‌شود. ریاضیات ذهن‌بنیاد، آن‌طور که ما در این کتاب توصیف می‌کنیم با هیچ‌یک از فلسفه‌های موجود ریاضی، افلاطون مشربی، شهودگرایی و صورتگرایی، سازگار نیست. با تعابیر جدید پسامدرنیستی از ریاضیات به‌عنوان یک محصول صرفاً اجتماعی هم سازگار نیست. ما براساس نتایج کارمان رهیافت کاملاً متفاوتی به فلسفهٔ ریاضی ارائه خواهیم کرد. معتقدیم فلسفهٔ ریاضی باید سازگار باشد با یافته‌های علمی دربارهٔ تنها ریاضیاتی که بشر می‌داند و می‌تواند بداند. در قسمت ۵ بحث خواهیم کرد که نظریهٔ ریاضیات جسم‌بنیاد[1] ــ که بدنهٔ اصلی نتایجی است که در این کتاب ارائه می‌شود ــ فلسفه‌ای مبتنی بر تجربه‌گرایی برای ریاضیات تبیین می‌کند، فلسفه‌ای هماهنگ با «واقعگرایی جسم‌بنیاد»[2] که لاکُف و جانسن درکتاب پیشگفته بحث کردند و «طبیعت‌گرایی اکولوژیکال»[3] به‌عنوان مبنایی برای نگرش جسم‌بنیاد (Núñez, 1995, 1997).

ریاضیاتی که ما می‌شناسیم ریاضیات بشری است، محصول ذهن بشر است. از کجا می‌آید؟ از ما! ما خلقش می‌کنیم، اما نه دلبخواهی است، نه صرفاً یک محصول اجتماعیِ ناشی از تصادف تاریخی. آنچه باعث می‌شود ریاضیات دلبخواه نباشد، این واقعیت است که در ریاضیات از سازوکار مفهومی بنیادیِ ذهن جسم‌بنیاد بشر، همان‌طور که در دنیای واقعی تکامل یافته است، استفاده می‌شود. ریاضیات محصول تواناییهای عصبی مغز، طبیعت جسم ما، تکامل ما، محیط ما و قدمت اجتماعی و فرهنگی ماست.

وقتی این کتاب را تمام کردید، دلایل این گفته‌های ما روشن خواهد شد.

ساختار کتاب

قسمت اول مقدماتی است. در فصل ۱ با حساب ذاتی مغز سروکار داریم ــ توانایی آنی‌شماری[4] (یعنی تعیین آنی تعداد اشیا در یک مجموعهٔ خیلی کوچک) و عمل جمع و تفریق ابتدایی. در فصل ۲ به سراغ بعضی نتایج اساسی در علوم شناختی می‌رویم که مبانی بقیهٔ مطالب کتاب است. بعد استعاره‌های مبنایی را مطرح می‌کنیم که زمینهٔ درک حساب‌اند (فصل ۳) و در فصل ۴ بحث خواهیم کرد که قوانین حساب از کجا می‌آیند.

در قسمت دوم می‌رسیم به بحث مبنا و مفهوم‌سازی مجموعه‌ها، منطق، و صورتهایی از جبر مجرد مثل گروهها (فصلهای ۵ و ۶ و ۷).

قسمت ۳ مربوط به مفهوم بینهایت به‌عنوان یک مفهوم بنیادی است که در ریاضیات پیشرفته مطرح است سؤال ما این است که چگونه سازوکار مفهومی معمولی و ظرفیتهای شناختی محدود انسان می‌تواند منشأ گسترهٔ کامل مفاهیم ریاضی بینهایت باشد: نقاط واقع در بینهایت، مجموعه‌های نامتناهی، استقرای ریاضی، اعداد اعشاری نامتناهی، حد، اعداد ترامتناهی، بینهایت کوچکها، و غیره. ما بحث می‌کنیم که مفهوم بینهایت بالفعل ماهیتاً استعاری است و یک استعارهٔ مفهومی یکتا ــ«استعارهٔ بنیادی بینهایت»ــ وجود دارد (فصل ۸) که اگر نه همه، بیشتر مفاهیم بینهایت در ریاضیات را در برمی‌گیرد (فصل ۸ تا ۱۱). در قسمت چهار پیامدهای چنین تحلیلی را برای ادراک پیوستار (فصل ۱۲) و پیوستگی و اعداد حقیقی (فصل ۱۲ و ۱۴) بررسی می‌کنیم.

اینجای کتاب، بحث اصلی را متوقف می‌کنیم تا یک تناقض ظاهری به نام «پارادکس طول» را که همه به آن برمی‌خورند مطرح کنیم. این میان‌پرده را مثل نوشیدنی اشتهاآوری که برای تغییر ذائقه بعد از یک وعده غذای مفصل تعارف می‌شود، بعد از یک دوره بحث طولانی آورده‌ایم.

حالا برای قسمت پنج نتایج کافی داریم، بحثی کلّی دربارهٔ نظریهٔ ریاضیات جسم‌بنیاد (فصل ۱۵) و یک فلسفهٔ جدید ریاضی (فصل ۱۶).

برای نمایش قدرت واقعی این رهیافت، کتاب را با قسمت شش به پایان می‌بریم که شامل موردپژوهیِ تفصیلی رابطه‌ای است که مفاهیم محوری ریاضیات کلاسیک را یکجا جمع می‌کند: $e^{\pi i} + 1 = 0$. برای اینکه نشان بدهیم این تساوی واقعاً چه معنایی دارد، باید ساختار شناختی ــ به‌خصوص استعاره‌های مفهومیِ ــ این مقوله‌ها را بررسی کنیم: هندسهٔ تحلیلی (موردپژوهی ۱)، اعداد نمایی و لگاریتمها (موردپژوهی ۲)، اعداد موهومی (موردپژوهی ۳) و سازوکارهای شناختی که اینها را با هم ترکیب می‌کنند (موردپژوهی ۴).

این موردپژوهی را به سه دلیل در انتهای کتاب آوردیم. اول اینکه شرح مفصلی است از اینکه چگونه سازوکارهای شناختیِ توصیف شده درکتاب می‌تواند ساختار ریاضیات کلاسیک را روشن کند. ما این مطلب را بعد از بحث دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی آوردیم تا خواننده مثالی داشته باشد از اینکه چگونه تغییری در ماهیت آنچه ریاضیات است، می‌تواند منجر به ادراک جدیدی از نتایج آشنای ریاضی شود.

دوم اینکه در این موردپژوهی است که تحلیل مفاهیم ریاضی رو می‌آید. با اینکه در سرتاسرکتاب مفاهیم ریاضی را از منظر شناختی تحلیل می‌کنیم، بررسی رابطهٔ اویلر است که قدرت تحلیل مفاهیم ریاضی را به نمایش می‌گذارد و نشان می‌دهد چگونه یک رابطه به تنهایی می‌تواند گستره‌ای بسیار غنی از مفاهیم ریاضی را یکجا جمع کند ــ حتی اگر این رابطه چیزی جز عدد نداشته باشد: e، π، $\sqrt{-1}$، ۱ و ۰. تمام مدت می‌پرسیم چطور اعداد خشک و خالی می‌توانند بیان‌کنندهٔ مفاهیم باشند. در این موردپژوهی است که قوّت پاسخ به این سؤال روشن می‌شود.

بالاخره، این یک حرکت آموزشی است. ما معتقدیم ریاضیات کلاسیک با دیدگاه شناختی به بهترین وجه می‌تواند آموزش داده شود. معتقدیم که آموزش مفاهیم ریاضی و توضیح اینکه چرا حقایق ریاضیاتی از این مفاهیم پیروی می‌کنند، اهمیت دارد. مقصود از این موردپژوهی نشان دادن روش این کار به مدرّسان ریاضی است.

ما این کتاب را گام اولی درطرح علم شناختیِ ریاضیات می‌دانیم ــ رشته‌ای که سازوکار شناختیِ به‌کار رفته در ابداع و مفهوم‌سازی ریاضی را بررسی می‌کند. امیدواریم این رشته به نظر شما هم هیجان‌انگیز، جالب و ارزشمند باشد.

1. theory of embodied mathematics
2. embodied realism
3. ecological naturalism
4. subitize

ریاضیات جسم‌بنیاد*

جوزف اوسلاندر*

ترجمهٔ حسین خسروی

این کتابْ ناقد را در تنگنا قرار می‌دهد. اثری است با هدف بلندپروازانه به قلم یک زبانشناس و یک روانشناس. هدف آنها پایه‌گذاری یک رشتهٔ علوم شناختی برای ریاضیات است. همچنان که در مقدمهٔ کتاب می‌گویند کتاب شامل نتایج [جدید] ریاضی نیست بلکه «حاوی نتایجی درمورد نظام مفهومی انسان است که اندیشه‌های ریاضی را ممکن می‌سازند.» آنها در حد قابل ملاحظه‌ای در این تلاش موفق می‌شوند، ولی کتاب (و به تبع آن استدلال آنها) آغشته به اشتباهات جدی ریاضی است.

دو فصل اول، «حساب ذاتی مغز» و «مدخل کوتاهی بر علوم شناختیِ ذهن جسم‌بنیاد» زمینهٔ لازم از علوم شناختی را ارائه می‌کنند. مؤلفان به تحقیقاتی اشاره دارند حاکی از آنکه نوزادان از تواناییهای ذاتی ریاضیاتی بالاخص توانایی «آنی‌شماری» یعنی تعیین آنی تعداد اشیای یک مجموعهٔ کوچک برخوردارند. برای مفاهیم پیچیده‌تر، لازم است به سازوکارهای شناختی‌ای که مفاهیم ریاضی را مشخص می‌کنند پرداخته شود. لاکُف و نونز استدلال می‌کنند که این سازوکارها همانهایی هستند که مفاهیم عادی را مشخص می‌کنند.

این مطالب منجر به نظریهٔ اصلی مؤلفان می‌شود ــ اینکه ریاضیات براساس استعاره شکل می‌گیرد. بنیادیترین استعاره‌ها، «استعاره‌های مبنایی»[1] هستند که «ما را قادر می‌سازند تجربه‌های روزمره (مانند کُپه کردن اشیاء) را بر مفاهیم مجرّد (مانند عمل جمع) تصویر کنیم». استعاره‌های مبنایی شامل «گردایه سازی، دسته کردن، استفاده از چوب اندازه‌گیری و حرکت در محیط» می‌شود. اهمیت آنها در این است «که انسان را قادر می‌سازند . . . حساب را در ورای مقدار کوچکی که با آن به دنیا آمده‌ایم توسعه دهد». برای مفاهیم مجردتر نیاز به «استعاره‌های ارتباطی»[2] است. اینها حساب را به سایر شاخه‌های ریاضیات، مانند هندسه، پیوند می‌دهند. یک مثال، که مؤلفان آن را «استعارهٔ جول» می‌نامند، عملیات حساب را به عملیات «رده‌ای» (نظریهٔ مجموعه‌ای) پیوند می‌دهد. شاید مهمترین استعارهٔ ارتباطی، آن باشد که مؤلفان آن را «استعارهٔ بنیادی بینهایت» می‌نامند، که کارکردن با مجموعه‌های نامتناهی، نقاط در بینهایت، حدّ سریهای نامتناهی، اشتراکهای نامتناهی و کوچکترین کران بالا را مقدور می‌سازد. طبق نظریهٔ موردبحث، اینها همه «موارد خاص یک استعارهٔ مفهومی عام واحد هستند که در آن فرایندهایی که به‌طور نامحدود ادامه دارند به شکل مختومه و دارای نتیجهٔ نهایی مفهوم‌سازی می‌شوند.» در چند فصل بعدی تجلّی‌های گوناگون «استعارهٔ بنیادی بینهایت» را شرح می‌دهند: حد و پیوستگی، حساب ترامتناهی، بینهایت کوچکها، و نیز استعاره‌هایی که به ریشارد ددکیند و کارل وایرشتراس نسبت می‌دهند.

1. grounding metaphors 2. linking metaphors

به دنبال این مطالب، دو فصل درخشان کتاب ظاهر می‌شود که به بیان نظریه و فلسفهٔ چیزی که نویسندگان «ریاضیات جسم‌بنیاد»ش می‌نامند اختصاص دارد. نظریهٔ آنها با موضعی که روبن هرش[1] درکتاب ۱۹۹۷ خود به نام ریاضیات واقعاً چیست؟[2] اتّخاذ کرده است سازگار است ولی پا از آن فراتر می‌گذارد. اجمالاً، لاکُف و نونز معتقدند که ریاضیات محصول انسان است و توسط مغز و نظام مفهوم‌سازی ما، و نیز ارتباطات جامعهٔ انسانی و فرهنگ، شکل می‌گیرد. انسان به گونه‌ای تکامل‌یافته است که نیروی شناختی ما متناسب با جهان است به‌صورتی که آن را می‌شناسیم.

این نظریه هم در تقابل با ریاضیات متعالی[3] [فراتجربی] قرار دارد (که در این کتاب به‌عنوان «رمانتیسم ریاضیات» از آن یاد می‌شود و درواقع نوعی افلاطون مشربی افراطی است که مدّعی است ریاضیات مستقل از هرگونه موجودات ذهن‌دار است)، و هم در تقابل با موضع پسامدرنی که ریاضیات را فقط محصول دلبخواهِ تاریخ و فرهنگ می‌داند. محتوای این دو فصل که با گفتار فصیحی با عنوان «تصویر ریاضیات»[4] خاتمه می‌یابد، کار قابل‌توجهی در فلسفهٔ ریاضی است.

متأسفانه بحثهای ریاضی کتاب در سطح بحثهای فلسفی و شناختیِ آن نیست (با وجود تأییدیه‌های چند ریاضیدان سرشناس که در پشت جلد کتاب آمده است). احکام ریاضی نامفهوم و مشکوکِ بسیار، و حتی اشتباهات مشخص، درکتاب دیده می‌شوند. مؤلفان ادعا می‌کنند که «خمهای به‌اصطلاح فضاپرکن درواقع فضا را پر نمی‌کنند». هرقدر که توضیحشان را خواندم باز متوجه نشدم که مقصودشان چیست. اینکه اعداد اعشاری را به‌عنوان «چندجمله‌ایهای نامتناهی» ارائه کرده‌اند هیجانی در من برنینگیخت. توضیح آنها در مورد اینکه چرا سری تیلر یک تابع را نمایش می‌دهد نادرست است، و مشتقگیری جمله به جمله را توجیه نمی‌کند.

تعدادی احکام نادقیق در کتاب هست که می‌توانست با ویرایش و بازخوانی دقیق اصلاح شود. (ظاهراً بعضی از این اشتباهات پس از ارائه متن به ناشر ایجاد شده است.) مواردی از تصحیحات ــ از جمله تصحیح تعریف نادرست حد در صفحات ۱۸۸ و ۱۸۹ ــ را می‌توان در وب‌گاهِ کتاب (http://www.unifr.ch/perso/nunezr/) یافت.

بعضی اشتباهات دیگر به نظریهٔ مؤلفان ارتباط نزدیک دارد و نیازمند بحث بیشتری است. یکی از چشمگیرترین اینها چیزی است که آن را «پارادکس طول» می‌نامند و مربوط است به دنباله‌ای از «خمهای ناهموار» همه به طول $\pi/2$، که به پاره‌خطی به طول واحد میل می‌کنند. این «پارادکس» نیست بلکه فقط مسألهٔ ناپیوسته بودن طول در توپولوژی مناسب است و حیف است که مؤلفان این موضوع را خاطرنشان نکرده‌اند. بالاخره آنها می‌گویند که این پارادکس نیست ولی من نتوانستم استدلال آنها را بفهمم. (اینکه خمها مشتق‌پذیر نیستند نکتهٔ اصلی نیست، همین مسأله می‌تواند در مورد خمهای «هموارشده» رخ دهد.) یکی از اشتباهات مؤلفان این است که ادعا می‌کنند «حد به‌طور دقیق برای دنباله‌های اعداد تعریف می‌شود نه دنباله‌های خمها».

اشتباه جدی دیگری در آخرین بخش کتاب در مورد تساوی $e^{i\pi}+1=0$ رخ می‌دهد. همان‌طورکه مؤلفان خاطرنشان می‌کنند، لازم است توضیح داده

1. Reuben Hersh 2. What is Mathematics, Really?

3. transcendental mathematics 4. Portrait of Mathematics

ریاضیات در ۳۷ درجه•

جان الن پاولوس*

ترجمهٔ حسین خسروی

کتابهای فلسفهٔ ریاضی و آموزش ریاضی معمولاً تا حدی ملال‌آورند زیرا عموماً به بازگویی مواضع متعارف می‌پردازند و اگر خواننده شانس بیاورد یکی دو نکتهٔ ظریف در آنها می‌بیند. کتاب *ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد* در این میان استثناست، هم از نظر رهیافتِ روشنگرانه، و هم از نظر نتیجه‌گیریهای جذّاب و بعضاً سنت‌شکنانهٔ آن. جورج لاکف زبانشناس و رافائل نونز روانشناس مفاهیم مجرد را تا سرچشمهٔ مادی و انسانی آنها دنبال کرده و ادّعا می‌کنند که ریاضیات از فرایندهای شناختی عادی نشأت می‌گیرد. به این ترتیب آنها یک ضربهٔ کاری به بدنهٔ دیدگاه افلاطونی دربارهٔ ریاضیات وارد کرده به‌طور غیرمستقیم راههای وسیع نوینی را در تحقیقات آموزشی می‌گشایند.

انسان با اتکاء اولیهٔ به یک توانایی ذاتی نسبتاً محدود ــ یعنی تشخیص اشیاء، آنی شماری (تشخیص آنی اعداد کوچک)، جمع و تفریق اعداد صحیح تا عدد سه، از طریق دستگاهی از مفاهیم مربوط به روابط فضایی، شماهای تصویری[1]، و به‌خصوص استعاره‌های شناختی، که همه پایهٔ عصبی دارند، قدرت ریاضیاتی خود را توسعه می‌دهد. تجربیات غریزی اولیه از جهت ایستاده، نیروی فیزیکی، و حرکات بدن ما را به شکل دادن دستگاههای پیچیده‌تری از ایده‌ها و درونی‌سازی آنچه از آنها حاصل می‌شود سوق می‌دهد. با مفهوم استعارهٔ مفهومی در کارهای پیشین لاکُف آشنا شده‌ایم، به خصوص در کتاب *Metaphors We Live by* که در آن بر فراگیر بودن استعاره در زندگی روزمره تأکید می‌شود. برای درک مفاهیم مجرد، ما تعابیر جسمانی یا حسی-حرکتی را به آنها نسبت می‌دهیم. مثلاً محبت بسیاری اوقات برحسب گرمای بدن درک می‌شود: «نسبت به فلانی سرد بود»؛ «تدریجاً نسبت به او گرمتر شد».

به بیان ریاضی، لاکُف و نونز استعاره را نگاشتی از دامنهٔ مبدأ، که آشناست، به دامنهٔ مقصد، که کمتر آشناست تعریف می‌کنند. مثلاً اندازهٔ یک تودهٔ آجر عددی را تداعی می‌کند و تودهٔ بزرگتر عددی بزرگتر را. این تناظر استنتاجها را نیز حفظ می‌کند: درک ما از اینکه ترکیب دو توده آجر همیشه یک توده آجر تولید می‌کند مبنای بسته بودن عمل جمع در حساب است. دامنهٔ مبدا یعنی تودهٔ آجر، یک گردایهٔ اشیاء است، و دامنهٔ مقصد، حساب است. این اولین استعارهٔ مبنایی از چهار استعارهٔ مبنایی اساسی حساب است. نمونهٔ دیگر، چوب اندازه‌گیری است. طول یک پاره‌خط فیزیکی به یک عدد منسوب می‌شود، پاره‌خط بزرگتر به عدد بزرگتر، و غیره. تناظرهای استعاره‌ای مشابهی میان حساب و حرکت و ساختن وجود دارند.

در سراسر کتاب مؤلفان سعی می‌کنند اندیشهٔ ریاضی را از قید ابهامات رمزآمیز برهانند و تأکید بر این دارند که منشأ ایده‌های ریاضیاتی تفاوتی شود که مقصود از اینکه یک عدد حقیقی به توان مختلط رسانده شود چیست. مؤلفان پس از یک سیر سریع در هندسهٔ تحلیلی و مثلثات و نیز بحث دربارهٔ عدد e، واحد موهومی i (که ضرب کردن در آن به‌صورت دوران مفهوم‌سازی می‌شود)، و مبادی حساب دیفرانسیل، به رابطهٔ مهم $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ می‌رسند. این تساوی را به این صورت «ثابت می‌کنند» که نشان می‌دهند مشتقات دو طرف از همهٔ مراتب در ۰ یکی است (و بنابراین سری تیلر آنها یکی است). اما این استدلال یک دور باطل است زیرا e^{yi} تعریف نشده است. راه صحیح این است که e^{yi} را از طریق سری تیلر تابع نمایی تعریف کنند (که در این صورت، رابطه فوراً از مقایسهٔ ضرایب سریهای تیلر نتیجه می‌شود). این نمونه‌ای است از اصلی (که جان کلی[1] بیان کرده) دایر بر اینکه قضیهٔ خوب تبدیل به تعریف می‌شود.

این بحث تقریباً ۷۰ صفحهٔ کتاب را اشغال کرده و زیرعنوان «یک موردپژوهیِ ساختارِ شناختیِ ریاضیات کلاسیک» آمده است. اما هدف فقط این نبود که برقراربودن این رابطه ثابت شود بلکه قرار بود تشریح شود که این رابطه «چه معنی دارد». به نظر می‌آید مؤلفان در تبیین نقش استعاره در درک این رابطه موفق نبوده‌اند.

احتمال دارد که استعاره در صورتبندی مفاهیم پیشرفته‌تر نقش اساسی نداشته باشد، یا اگر هم داشته باشد، ماهیتی متفاوت با آنچه در ریاضیات مقدماتیتر دارد، داشته باشد. مفاهیم ریاضی، وقتی شکل می‌گیرند، نوعی حیات مستقل کسب می‌کنند و آنگاه می‌توان با آنها به‌طور مستقیم برخورد کرد. برای من دشوار است که استعاره‌ای برای به توانِ مختلط رساندن یک عدد حقیقی تصور کنم؛ اگر چنین استعاره‌ای وجود دارد، قطعاً مشتاق شنیدن آن هستم.

******

• Joseph Auslander, "Embodied mathematics", *American Scientist*, (4) **89** (2001) 366-367.

* جوزف اوسلاندر، دانشگاه مریلند، آمریکا

> ... به حکم انتخاب طبیعی، ذهن ما خود را با شرایط دنیای بیرونی تطبیق داده و هندسه‌ای را برگزیده که مفیدترین، یا به عبارتی مناسبترین، هندسه برای نوع بشر باشد. [پس] هندسه واقعی نیست، مفید است.
>
> **هانری پونکاره**

1. image-schemas

1. John Kelley

ریشه‌ای با منشأ مفاهیم عادیتر ندارد. مثلاً خاطرنشان می‌کنند که درک ما از متغیّر جبری مشابه درک ما از ضمیر است. به عنوان نمونه «هر که این کار را کرده است حالش خراب است» را در قیاس با «اگر $x + ۲ = ۷$، آنگاه $x = ۵$» قرار می‌دهند. بالعکس نشان می‌دهند که این مفاهیم پیش‌پا افتاده ممکن است ایجاد سوءتفاهم نیز بکنند. بالاخص ریشهٔ بخشی از این مرموزسازی مفاهیم ریاضیات همین استعارهٔ عدد/شئ است که منجر به افلاطون‌مشربی می‌شود و این باور ضمنی که اعداد هویتی در جایی «آن بالاها» دارند. لاکُف و نونز بر ردّ آنچه «رمانتیسم ریاضی» می‌نامند اصرار دارند: اینکه ریاضیات مجرّد و عاری از منشأ جسمانی است، و در عین حال مستقل از ما وجود دارد؛ اینکه اشیاء و حقایق ریاضی هویتی متعالی دارند؛ اینکه اثبات ما را به کشف این حقایق متعالی قادر می‌سازد؛ و اینکه یادگرفتن ریاضیات، یادگرفتن زبان طبیعت است.

معلومات ریاضی که این کتاب می‌طلبد کمی بیش از آن است که معمولاً یک خوانندهٔ عمومی داراست، ولی یکی از نکات دلپذیر کتاب این است که گوشه‌های متعددی از ریاضیات را بررسی می‌کند و از جزئیات سرسری رد نمی‌شود. در نیمه دوم کتاب که فنّی‌تر است مؤلفان به بینهایت و کاربردهای متعدّد «استعارهٔ بنیادی بینهایت» می‌پردازند، و مدّعی می‌شوند که ایدهٔ بینهایت بالفعل (نه فقط بینهایت بالقوه) به‌طور استعاره‌ای از مفهوم نتیجهٔ یک فرایند مشتق می‌شود. انسان نتیجهٔ یک فرایند بی‌پایان را در قیاس با یک فرایند مختوم، یعنی فرایندی که انتها دارد، مفهوم‌سازی می‌کند. مؤلفان معتقدند که همهٔ موارد بینهایت بالفعل در ریاضیات از کاربردهای گوناگون و بسیاری اوقات غیربدیهی «استعارهٔ بنیادی بینهایت» حاصل می‌شود. به‌عنوان مثال، حساب ترامتناهی اعداد کاردینال و اردینال از مفاهیم کاملاً متمایز بینهایت سرچشمه می‌گیرند، که یکی مربوط به گردایه‌های نامتناهی است و دیگری مربوط به فهرستهای نامتناهی.

در یکی از جالبترین و قانع‌کننده‌ترین بخشهای کتاب، مؤلفان مبنایِ شناختی اعداد بینهایت کوچک را برحسب استعاره‌های مفهومی توصیف می‌کنند. بسیاری از ریاضیدانان ایدهٔ اعداد بینهایت کوچک را، یعنی اعدادی که به‌ازای هر n از $۱/n$ کوچکتر باشند، در بهترین حالت «نادقیق» تلقی می‌کنند، اما این ایده بسیار طبیعی است و متناظر با ایدهٔ روزمرهٔ یک ذرهٔ فاقد ابعاد قابل تشخیص است. لایب‌نیتس و ریاضیدانان پس از او به مدت دو قرن از استعارهٔ بینهایت کوچک برای پیشبرد حساب دیفرانسیل و انتگرال و شاخه‌های جانبی آن استفاده کردند. در مقابل، نیوتن متوسل به فرایند مرموز حدگیری برای پیش بردن این موضوع شد. برای به‌کارگیری این فرایند باید به حرکاتی نسبتاً ضد شهودی دست زد. اگر بخواهیم بدانیم سرعت حرکت ما در دقیقاً ساعت سه چیست باید سرعت متوسط (فاصلهٔ طی شده تقسیم بر زمان) را در بازه‌های زمانی کوچکتر و کوچکتر حول ساعت ۳ در نظر بگیریم و «در حد» به سرعت لحظه‌ای می‌رسیم. ایدهٔ حد نیوتن به حق مورد انتقاد بارکلی و دیگران قرار گرفت که خاطرنشان می‌کردند یک بازهٔ زمانی یا طول صفر دارد، که در آن صورت تقسیم غیرممکن است، و یا طول صفر ندارد که در آن صورت به سرعت لحظه‌ای دست نیافته‌ایم. این خلأ منطقی تا قرن نوزدهم پرنشد و حتی امروز هم تعریف سنتی حد دانشجویان را گیج می‌کند.

بینهایت کوچکها عملکردی طبیعیتر دارند زیرا که درواقع می‌توان بر این ذرات ناصفر تقسیم کرد و حدگیری تبدیل به نوعی حساب می‌شود.

با اینکه لاکُف و نونز بر منشأ تصادفی و بعضاً فرهنگی ایده‌ها و رشته‌های ریاضیات تأکید دارند، این دیدگاه پسامدرن را که ریاضیات صرفاً نوعی محصول فرهنگی است نمی‌پذیرند، شاید از آنجا که می‌خواهند خود را از افراطهایی که معمولاً به پسامدرنیسم منسوب است دور نگاه دارند. سبک نوشتار آنها با وجود آنکه حول محور استعاره است، عاری از آرایشهای لفظی است. آنها سرسختانه از دقت، عمومیت، و تجرید ریاضی دفاع می‌کنند و می‌پذیرند که چیزی به نام کشف ریاضی (در مقابل اختراع ریاضی) امکان‌پذیر است پس از آنکه مفاهیم ریاضی در میان یک جماعت ریشه بگیرد. اما آیا آنها موفق می‌شوند که همهٔ مفاهیم افلاطونی را، که به ایده‌های مذهبی تشبیه می‌کنند، طرد کنند؟ هرچند کسانی که به یک جهان افلاطونی ناب معتقدند که اعداد، توابع، خمها، احتمالها و سایر بازیگران ریاضی ابدالدهر در آن گشت می‌زنند بسیار معدودند، ولی نوعی افلاطون‌مشربی پالایش‌یافته، قابل دفاع است، به خصوص در رابطه با اعداد صحیح و نظریه‌های وابسته به آن.

بی‌جهت نیست که لئوپولد کرونکر، ریاضیدان قرن نوزدهمی همعصر گئورگ کانتور از یک بیان مذهبی/ریاضی برای توصیف آنچه که ابدی است و آنچه که نیست استفاده کرد. گفتهٔ معروف او این است که خداوند اعداد صحیح را آفرید و مابقی کار انسان است. صِرفِ تنوع نظریه‌های مجموعه‌ها، مفاهیم مختلف اعداد حقیقی، دانه‌دار[1]، و ابرحقیقی، هندسه‌ها، جبرها و منطقهای مختلف، حاکی از طبیعت غیرمتعالی آنهاست و بی‌اعتقادی نویسندگان به وجود افلاطونی آنها را معقول جلوه می‌دهد. اما اعتقاد به وجود مستقل اعداد صحیح ظاهراً موضع «لاادری»تری را می‌طلبد. مثلاً می‌توان حساب را متعالی قلمداد کرد به این معنی که هر وجود صاحب ادراکی نهایتاً استعاره‌هایی برای پایه‌گذاری آن ایجاد خواهد کرد و از آن طریق به حقایق حسابی دست خواهد یافت. به این مفهوم می‌توان گفت که حساب نوعی وجود ذاتی در جهان دارد. ترمیمهای مشابه دیگری نیز برای شبه افلاطون‌مشربی میسّر است.

دیدگاه ما دربارهٔ طبیعیت اشیاء و حقایق ریاضی هرچه باشد، از کتاب ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد می‌توانیم به‌عنوان اثری که بر منشأ انسانی مفاهیم ریاضی تأکید دارد استقبال کنیم. بررسی دقیق استعاره‌های مفهومی که به مفاهیم ریاضی معنی می‌بخشند قاعدتاً باید از نظر آموزشی بسیار مفید واقع شوند، و در این حوزه است، نه در فلسفهٔ ریاضی، که این کتاب بیشترین تأثیر را خواهد داشت. آگاهی بهتر نسبت به سرچشمه‌های معمولاً پیش‌پاافتاده و گاهی ناخودآگاه ایده‌های پیچیده ضرورتاً به تعلیم و تعلم ما کمک خواهد کرد. در مجموع این کتاب گرمایی جسمانی به انتزاع سرد و زیبایِ ریاضیات می‌افزاید.

******

• John Allen Paulos, "Math at 98.6°", *The American Scholar*, (1) **70** (Winter 2001) 151-152.

* جان‌الن پاولوس، دانشگاه تمپل، آمریکا

1. granular

NASHR-E RIYĀZI

Volume 14, Numbers 1, October 2003

Editorial Board

H. HAGHIGHI, S. KĀZEMI,
P. SAFARI, S. SHAHSHAHĀNI (chairman)

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz@acnet.ir⟩.

CONTENTS

Notes & News

Articles

Jean-Pierre Serre and number theory, F. SHAHIDI

Primeness is P, H. HAGHIGHI

e-Publishing in mathematics, P. SAFARI

* Abel's legacy in algebraic geometry, P. GRIFFITHS

* Statistical science: Evolution, motivation and direction, P. HALL

* Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension, H. WEYL.

* Two views on the future of mathematics, M. GROMOV and F. BROWDER

Teaching/Problems

The story of a problem, K. ALISHĀHI and R. MOGHADDASI

Reviews

* Where mathematics comes from: How the embodied mind bring mathematics into being, by G. Lakoff and R. Núñez (excerpt from the book and reviews by J. AUSLANDER and J. A. PAULOS)

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شماره‌های آینده می‌خوانید

مسأله‌های حل‌نشدهٔ کلاسیک در نظریهٔ اعداد	میشل والدشمیت
الگوریتمهای کوانتومی	پیتر شور
فلسفهٔ آمار	دنیس لیندلی
عصب‌شناسی محاسباتی	اریک دی‌شوتر
دستگاههای قوانین بقا	دنیس سر