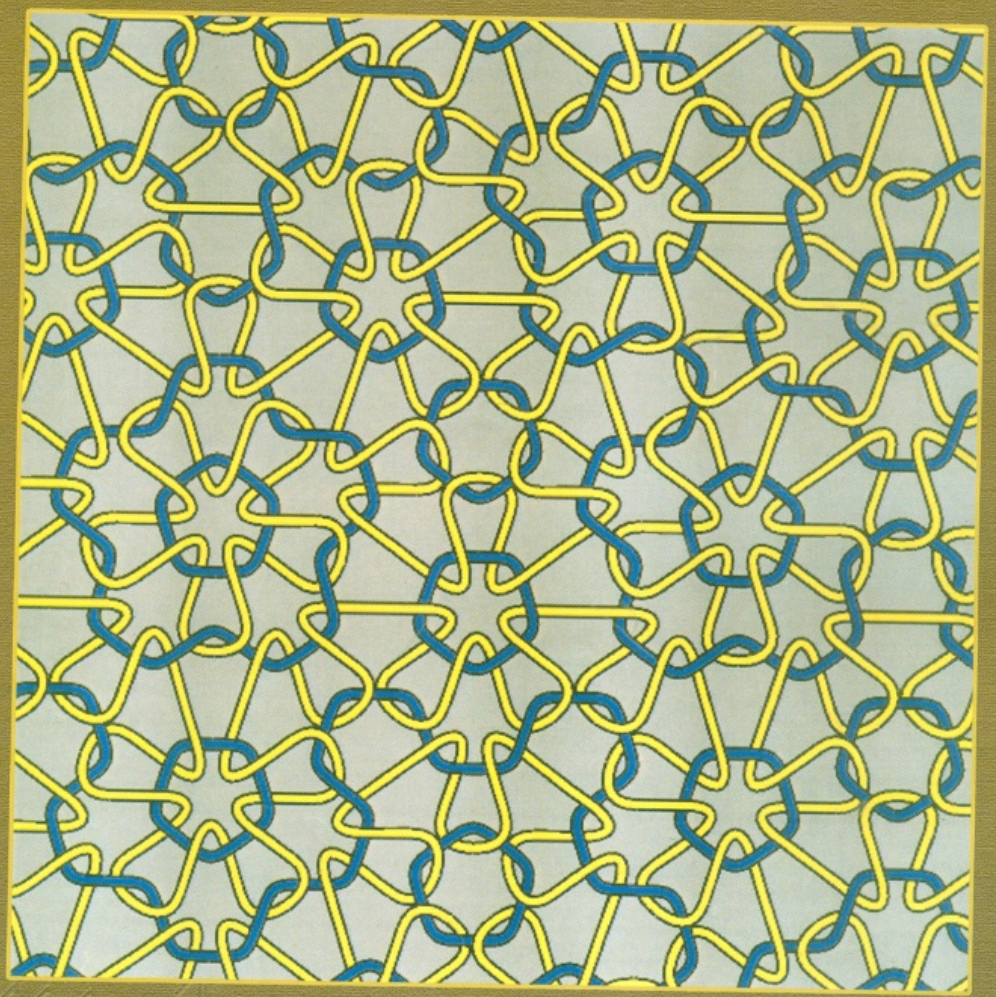
نشریه فنی

سال ۱۶، شمارهٔ ۲
شمارهٔ پیاپی: ۳۰



مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله الرحمن الرحیم





مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

تهران، صندوق پستی ۴۷۴۸ـ۱۵۸۷۵

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

بهای این شماره ۱۲۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۲۴۰۰۰ ریال. (برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۴۰۵۰ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران (کد ۱۸۳) به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

برای اشتراک با تلفن ۸۸۷۱۶۸۳۲ تماس بگیرید

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه‌شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۶، شمارهٔ ۲

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۸۶

شمارهٔ پیاپی: ۳۰

NashrERiyazi@iup.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: محمدقاسم وحیدی‌اصل

- هیأت ویراستاران:

علیرضا جمالی

حسن حقیقی

سیامک کاظمی

محمدقاسم وحیدی‌اصل

- همکاران: فریبرز آذرپناه، محمد اردشیر، شاپور اعتماد، اسماعیل بابلیان، غلامرضا برادران خسروشاهی، ناصر بروجردیان، محمد جلوداری‌ممقانی، روح‌الله جهانی‌پور، رحیم زارع‌نهندی، رشید زارع‌نهندی، سیاوش شهشهانی، سید محمدباقر کاشانی، زهرا گویا، محمدصال مصلحیان، همایون معین
- مدیر داخلی: زهرا دلاوری
- طراح جلد: معصومه انوری
- امور رایانه‌ای: ناهید حاجی‌سلیمی
- حروفچین و صفحه‌آرا: مینا مهرابی‌فرد
- ناظر چاپ: علی صادقی
- لیتوگرافی: طیف‌نگار
- چاپ و صحافی: طیف‌نگار (شادآباد، بلوار هفده شهریور، خیابان پرسی‌گاز، پلاک۲۲)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

گزارش

گوناگون (اتله سلبرگ، وارادان...) ۲

مصاحبه با سه تن از برندگان فیلدز ۲۰۰۶ — ویسنته مونیوس، اولف پرسون ۴

تأملی در جوایز هزارهٔ کلی — آناتولی ورشیک ۹

یادِ استاد — سیامک کاظمی ۱۲

مقاله‌ها

ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره — حسن نجومی ۱۴

رد پای توپولوژی در کارخانه — آرون آبرامز، رابرت گریست ۲۱

ریاضیات خوب چیست؟ — ترنس تائو ۲۸

ریاضیات نظریهٔ ریسمان — روبرت دایگرف ۳۵

تاریخ یا میراث؟ تمایزی مهم... — ایوار گراتن-گینس ۴۶

آموزش و مسأله

رویکردی نظریهٔ گروهی به یک دستور مشهور افراز — مایکل گریدی ۵۴

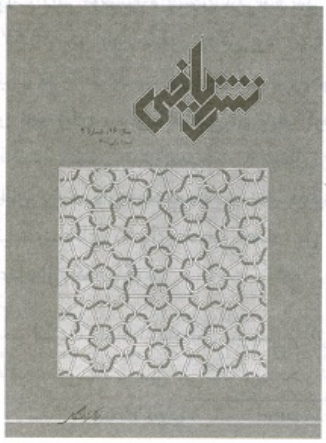
نقد و بررسی

یانوش بویویی، هندسهٔ نااقلیدسی، و ماهیت فضا — رابرت اُسرمن ۵۸

تقارن و هیولا، یکی از بزرگ‌ترین کاوشهای ریاضی — رابرت گریس ۶۲

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم — پال هالموس ۶۸



روی جلد

یک گره؛ به مناسبت درج مقالهٔ «ریاضیات نظریهٔ ریسمان»

یادِ استاد

یکی دو سال بود که دیگر او را مثل سابق نمی‌دیدیم: صورت رنگ پریده، پاهایی که اندکی روی زمین می‌کشید، و خستگی سریع جسمی و ذهنی، حاکی از جفای سالیان بر ذهن و جسم مردی بود که تا گذشته‌ای نه چندان دور سالم و قوی می‌نمود، مردی با قامت استوار که تا هفتادوچند سالگی با اسکی و تقریباً تا آخرکار با شنا مأنوس بود. (در جوانی عرض دریای مانش را شنا کرده بود.) اما بیماری و رنجوری هم نتوانست روحیهٔ قوی، و البته ادب و مهربانی، را از او بگیرد. این سرزندگی و مهربانی و فروتنی صفات بارز دکتر شفیعیها طی بیست‌وچند سالی بود که ما او را در مرکز نشر دانشگاهی می‌دیدیم. دانسته‌هایش را با فروتنی در اختیار دیگران می‌گذاشت بی آنکه خواستار امتیازی یا سهمی در چیزی باشد. اهل گله‌گزاری و ذکر مصیبت دربارهٔ مشکلات شخصی نبود. همه را شاد و امیدوار می‌خواست و سعی می‌کرد به همه امید و روحیه بدهد.

شفیعیها نمونهٔ تیپ خاصی از اهل علم و فرهنگ ایران بود که خمیرهٔ آنها را با «کار» و «احساس مسؤولیت» سرشته‌اند و شمار آنها در میان هم‌نسلان او شاید بیشتر از نسلهای بعدی باشد، افرادی مانند غلامحسین مصاحب، منوچهر وصال و... در جامعهٔ ریاضی، و بسیاری کسان در میان ادبا و دانشمندان رشته‌های دیگر. او در همهٔ این سالها مردی بود منضبط، جدی، و پیگیر در اموری که اجرای صحیح آنها را لازم یا مفید می‌شمرد، اموری که غالباً بازدهٔ مالی نداشت یا خیلی کم داشت: ویرایش کتابی به خواهش یک دوست یا صرف وقت کلان، ارائهٔ مشورتهای وقت‌گیر به این و آن که اغلب مستلزم مراجعه به منابع مختلف در اداره یا منزل بود (گاه ممکن بود برای اطلاع از تلفظ دقیق یک اسم خارجی با سفارتخانهٔ مربوط تماس بگیرد)، و صرف کار در جایی همچون مرکز نشر دانشگاهی که همیشه ویراستاران خود را ایثارگرانی بدون توقع مالی می‌پنداشته یا می‌خواسته است.

گمان می‌کنم که استاد فقید را اولین بار در کمیتهٔ تألیف و ترجمه ــ سلف مرکز نشر دانشگاهی ــ دیدم. به هر حال، او پس از تأسیس مرکز نشر به گروه ریاضی و آمار مرکز پیوست، ویراستاران اولیهٔ مرکز که سنگ بنای خط‌مشی آن را گذاشتند بر دو دسته بودند. دستهٔ اول عمدتاً از سازمان ویرایش و تولید فنی دانشگاه آزاد (سابق) آمده بودند که به‌نحوی جزو باقیات مؤسسهٔ انتشارات فرانکلین محسوب می‌شد. فرانکلین اولین مؤسسهٔ انتشاراتی بود که ویرایش را به مفهوم جدی آن در ایران باب کرد و عده‌ای از اهل علم و ادب سالها به‌عنوان ویراستار در آنجا یا در مؤسسات اقماری آن کارکردند. استادانی چون ابوالحسن نجفی، احمد سمیعی، حسن مرندی، و حسین معصومی همدانی که در شکل‌گیری راه و روش مرکز نشر نقش بسیار مهمی داشتند جزو این گروه بودند. دستهٔ دوم استادانی از دانشگاهها در رشته‌های مختلف بودند که دستی در قلم داشتند. دکتر محمدهادی شفیعیها، استاد دانشکدهٔ فنی، از بهترین نمونه‌های این افراد بود زیرا نه تنها سوابقی در ترجمه و تألیف کتابها و جزوه‌های ریاضی داشت بلکه در ترجمهٔ متون ادبی هم صاحب آثاری بود و سابقهٔ همکاری با پروژه‌های مختلف انتشاراتی (از جمله، دایرةالمعارف فارسی مصاحب) داشت. به‌علاوه، زبانهای روسی، فرانسوی، و انگلیسی را، هر یک در سطحی، می‌دانست و با آلمانی هم قدری آشنا بود. به این ترتیب، شفیعیها از همان اوایل تأسیس مرکز تا بهمن ماه سال گذشته، چند روزی قبل



محمدهادی شفیعیها (۱۲۹۸ـ۱۳۸۵)

از آنکه از دنیا برود، از ارکان اصلی کادر ویرایش گروه ریاضی بود و از سال ۱۳۸۲ پس از کناره‌گیری دکتر منوچهر وصال از سرپرستی گروه، این سمت را نیز به اصرار همکاران به‌عهده داشت. در این مدت، کتابهای زیادی (دهها عنوان) با نظر تیزبین او ویرایش و چاپ شده است. به‌علاوه، ایشان با حضور مستمر خود ــ چهار روز در هفته ــ مشارکت مؤثری در بحثهای کاری گروه، به‌خصوص در زمینهٔ اصطلاحات و نحوهٔ ضبط اسامی، داشت. در این بحثها اگر چیزی می‌گفت که بعداً، حتی سالها بعد، پی می‌برد اشکالی در آن هست، موضوع را با فروتنی و پوزش بسیار با طرفهای بحث در میان می‌گذاشت. همچنین از بدو تأسیس نشر ریاضی مشاور مجله بود و مقاله‌های متعددی هم برای چاپ در مجله ترجمه کرد. گاه نیز در پلمیک‌های مجله شرکت می‌جست (از جمله، مطلبی که در دفاع از شادروان هشترودی نوشته است). در این مدت کتابهایی هم با ترجمهٔ او منتشر شده است که در میان آنها هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی اثر گرینبرگ بیش از همه مورد استقبال قرار گرفته و به‌صورت کتاب درسی مبانی هندسه در آمده است.

آخرین کار قلمی او، ویرایش ترجمهٔ کتاب کوشیار گیلی به قلم خورشید عبدالله‌زاده (از تاجیکستان) با ترجمهٔ پرویز شهریاری است که هنوز به چاپ نرسیده است.

از تواناییهای شفیعیها در ترجمه و ویرایش، داشتن شم قوی و ذوق سرشار در زبان فارسی بود، چیزی که بسیاری از مترجمان ریاضی ندارند یا کم دارند. چنانکه اشاره کردم، در کارنامهٔ فعالیتهای قلمی او ترجمهٔ چند اثر مهم ادبی هم دیده می‌شود که بعضی از آنها مانند هدف ادبیات اثر ماکسیم گورکی، و پدران و فرزندان اثر تورگنیف در زمان خود شهرت بسیار یافت و در میان جوانان و روشنفکران دست‌به‌دست می‌شد. شاید به خاطر همین ممارست در ترجمهٔ آثار ادبی، او صاحب نوعی حس زیبایی‌شناسی در زبان فارسی و جزو عدهٔ انگشت‌شماری از مترجمان ریاضی بود که نسبت به سلامت نثر فارسی در نوشتار ریاضی حساسیت دارند. تبحر او در واژه‌گزینی و واژه‌سازی از همین قریحهٔ زبانی نشأت می‌گرفت. بسیاری از واژه‌های نوساخته در واژه‌نامهٔ انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی حاصل ذوق و اندیشهٔ اوست. در کتابهایی نیز

که پس از انتشار واژه‌نامه ویرایش کرده است، تعدادی واژهٔ نوساخته یا نوگزیده به ابتکار او به‌کار رفته است. نمونه‌ای از این واژه‌ها را در اینجا از حافظه نقل می‌کنم: تاربندی (fibration)، خمیده‌خطی (curvilinear)، مرزپوش (bordant)، یکامتعامد (orthonormal)، متناهی‌مولد (finitely generated؛ قبلاً «متناهیاً تولیدشده» گفته می‌شد که اصطلاح خوبی نبود)، تکین‌زدایی (desingularization)، مانستگی (homology)، همانستگی (cohomology)، مانسته‌جایی (homotopy)، درون‌بری (retraction)، محورسنجی (axonometry)، نمایان‌سازی (trivialization)، درشت‌بافت (coarse)، ریزبافت (fine).

هدف این نوشتهٔ یادکرد کوتاهی از خدمات استاد فقید در زمینهٔ ترجمه و ویرایش و همکاری‌اش با مرکز نشر دانشگاهی و مجلهٔ نشر ریاضی بود. دربارهٔ خدمات آموزشی ایشان، شاگردان و همکاران دانشگاهی‌اش نوشته‌اند و خواهند نوشت. یادش گرامی باد.

سیامک کاظمی

کارنامهٔ قلمی م. ه. شفیعیها

تألیف:

۱. تانسورها و هندسه ریمانی
۲. اصول خطکش محاسبه
۳. مسایل هندسه تحلیلی و محاسبات ماتریسی

ترجمه:

۴. هدف ادبیات	(گورکی)
۵. پدران و فرزندان	(تورگینف)
۶. آنها که وقتی آدمی بودند	(گورکی)
۷. در آستانهٔ فردا	(تورگینف)
۸. رودین	(تورگینف)
۹. آسیه و عشق نخستین	(تورگینف)
۱۰. موسیقی افلاک	(برونفسکی)
۱۱. حساب انتگرال	(ادواردز)
۱۲. تبدیلات هندسی	(یاگلوم)
۱۳. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی	(گرینبرگ)
۱۴. تاریخ هندسه	(ایوز)
۱۵. از ریاضیات چه می‌دانیم؟	(سویر)
۱۶. اصول اقلیدس	(اقلیدس-روایت هیث)
۱۷. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (با تغییرات و اضافات جدید)	(گرینبرگ)

۱۸. مقالاتی برای دایرةالمعارف فارسی (مصاحب)
۱۹. مقالاتی برای زندگینامهٔ علمی دانشوران
۲۰. مقالاتی برای مجلهٔ نشر ریاضی
۲۱. مقالاتی برای فرهنگ دانشنامگی ریاضی

ویرایش:

۲۲. دهها کتاب، عمدتاً برای مرکز نشر و بعضاً برای مراکز انتشاراتی دیگر
۲۲. مقاله‌های بسیار برای نشر ریاضی و مجله‌ها و مجموعه‌های دیگر

نشر ریاضی، سال ۱۶، شمارهٔ ۲، صص ۱۴ـ۲۰

با نهایت تأسف، نویسندهٔ این مقاله که از استادان جوان دانشگاه صنعتی شریف بود قبل از چاپ مقاله درگذشت. یادش گرامی باد.

ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره

حسن نجومی*

۱. مقدمه

این مقاله به مرور مفاهیم پایه‌ای و روشهای ریاضیِ متداول در ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره می‌پردازد که از جدیدترین، جذاب‌ترین، و کاربردی‌ترین شاخه‌های علوم امروز به‌شمار می‌روند.

امروز محصولات مالیِ بسیار متنوع و گوناگونی در بازارهای مالی عرضه و معامله می‌شوند. به دلیل پیچیدگی روزافزون جوامع انسانی و نظامهای اجتماعی، تحلیل و ارزیابی محصولات مالی، و ارزیابی و مدیریت مخاطره در همهٔ زمینه‌های فعالیت انسانی نیازمندِ به‌کارگیری روشهای پیشرفتهٔ ریاضی به‌ویژه آنالیز تصادفی است. تصادفی بودن متغیرها ناشی از آن است که از دنیای اطراف خود اطلاع کامل نداریم.

۲. بهای تنزیل‌شده

با گذشت زمان بهای پول نقد کاهش می‌یابد. برای بررسی این مطلب، مبلغ A_0 را در نظر بگیرید که در حساب پس‌انداز بانک با نرخ سود سالانهٔ r گذاشته شده است. میزان سرمایه در زمان t (برحسب سال) را در صورتی‌که سود n بار در سال محاسبه و به حساب ریخته شود، با $A_n(t)$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت

$$A_1(1) = A_0 + A_0 r = A_0(1+r)$$

$$A_2\left(\frac{1}{2}\right) = A_0 + A_0\frac{r}{2} = A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

$$A_2(1) = A_2\left(\frac{1}{2}\right) + A_2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{r}{2}$$

$$= A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^2.$$

با استدلالی مشابه

$$A_n(t) = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

نتیجه آنکه مبلغ A_0 در زمان حال، در زمان t در آینده دارای ارزش $A_0(1+r/n)^{nt}$ خواهد بود، یا معادل آن، مبلغ K در زمان t در آینده، در زمان حال دارای ارزش $(1+r/n)^{-nt}K$ است. ضریب بسیار مهم $(1+r/n)^{-nt}$ را ضریب تنزیل[1] می‌نامند. اگرچه این ضریب بر اساس مدلی بسیار ساده و بسیار متفاوت با دنیای واقعی به‌دست آمده است، ولی در محاسبات اقتصادی و مالی بسیار به‌کار برده می‌شود.

در دنیای واقعی، n همواره یک عدد متناهی است و ساختار سوددهی گسسته[2] فوق وجود دارد. اما برای فراهم ساختن امکان استفاده از مفاهیم و روشهای ریاضیات پیوسته و آنالیز، در بسیاری از موارد، مفهوم مجرد سوددهی پیوسته[3]، با $n \to \infty$ (سوددهی در هر لحظه از زمان) در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، ضریب تنزیل عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} = e^{-rt}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $r > 0$، تابع $x \mapsto (1+r/x)^x$ تابعی صعودی است، اما حد آن هنگامی که $x \to +\infty$، بینهایت نیست، بلکه e^r است. به عبارت دیگر، حتی با نرخ سود ۱۰۰٪ و حتی با افزوده شدن سود به سرمایه در هر لحظه از زمان، سرمایهٔ اولیه پس از یک سال حدود ۲٫۷۲ برابر می‌شود، و بینهایت نخواهد شد.

در ادامهٔ این مقاله همه جا فرض می‌کنیم که سوددهی پیوسته است. در اکثر موارد، نتایج متناظر در سوددهی گسسته روشن خواهند بود.

1. discount factor 2. discrete compounding
3. continuous compounding

۳. ورق قرضه

ساده‌ترین قرارداد تجاری، ورق قرضه[1] است که بر اساس آن یک طرف قرارداد متعهد می‌شود در زمان از پیش‌تعیین‌شدهٔ T در آینده (زمان سررسید[2]) مبلغ از پیش‌تعیین‌شدهٔ K (ارزش اسمی[3]) را به طرف دیگر بپردازد. مسألهٔ ارزیابی ورق قرضه[4] عبارت است از تعیین مبلغی که برای وارد شدن به این قرارداد باید به طرف متعهد (صادرکنندهٔ ورق قرضه[5]) پرداخت. نشان می‌دهیم که با نرخ سود ثابت، مقدار $B(t)$، ارزش این ورق قرضه در زمان t، برابر است با تنزیل‌شدهٔ ارزش اسمی

$$B(t) = e^{-r(T-t)}K\,.$$

یک راه توجیه این مطلب بر اساس بحث زیر است که نمونه‌ای از بحثهای مطرح در مورد سودآوری بدون تلاش[6] است. بر اساس این بحثها، فرصتهای سودآوری بدون تلاش، در صورت وجود، پس از «مدت کوتاهی» از بین می‌روند و در زمان بسیار کوتاهی (که با توسعهٔ روزافزون نظامهای اطلاع‌رسانی مرتباً کوتاه‌تر می‌شوند)، بازار مالی به حالت تعادل باز می‌گردد. نشان خواهیم داد که هر یک از نابرابریهای اکید $B(t) < e^{-r(T-t)}K$ و $B(t) > e^{-r(T-t)}K$ تنها مدت کوتاهی می‌توانند برقرار باشند:

• حالت اول: $B(t) > e^{-r(T-t)}K$

در این حالت اتخاذ سیاست مالی زیر، سود بدون تلاش $B(t) - e^{-r(T-t)}K$ را در پی خواهد داشت

۱. در لحظهٔ t یکی از این اوراق قرضه را می‌فروشیم و مبلغ $B(t)$ را دریافت می‌کنیم؛

۲. از این مبلغ مقدار $e^{-r(T-t)}K$ را در حساب پس‌انداز بانکی قرار می‌دهیم؛ تفاوت $B(t) - e^{-r(T-t)}K$ سود بدون تلاش ماست؛

۳. فروش این ورق قرضه در زمان t برای ما تعهد پرداخت مبلغ K به دارندهٔ ورق قرضه را در زمان T ایجاد می‌کند؛ اما این مبلغ را در زمان T خواهیم داشت زیرا مبلغ $e^{-r(T-t)}K$ سپرده‌شده به بانک در زمان t، در زمان T برابر با $e^{r(T-t)}(e^{-r(T-t)}K) = K$ خواهد بود.

همهٔ افراد برای به‌دست آوردن سود بدون تلاش به اجرای این سیاست مالی علاقه خواهند داشت. در نتیجه، عرضهٔ این ورق قرضه در زمان t مرتباً افزایش می‌یابد و بنابر اصل کلی عرضه و تقاضا، بهای آن در زمان t مرتباً کاهش می‌یابد تا زمانی که نابرابری اکید فوق به نابرابری در جهت دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر «پس از مدتی کوتاه»، $B(t) \le e^{-r(T-t)}K$.

• حالت دوم: $B(t) < e^{-r(T-t)}K$

در این حالت، سیاست مالی دوگان[7] زیر سود بدون تلاش $e^{-r(T-t)}K - B(t)$ را در پی خواهد داشت

۱. در لحظهٔ t مبلغ $e^{-r(T-t)}K$ را از بانک وام می‌گیریم؛

۲. با مقدار $B(t)$ از این مبلغ، یکی از این اوراق قرضه را خریداری می‌کنیم؛ تفاوت $e^{-r(T-t)}K - B(t)$ سود بدون تلاش ماست.

۳. وام گرفته‌شده در زمان t برای ما تعهد پرداخت مبلغ $e^{r(T-t)}(e^{-r(T-t)}K) = K$ را به بانک در زمان T ایجاد می‌کند؛ اما این مبلغ را در زمان T در اختیار خواهیم داشت زیرا فروشندهٔ ورق قرضه بر اساس قرارداد متعهد به پرداخت مبلغ K در زمان T به ماست.

چون همهٔ افراد به اجرای این سیاست مالی برای به‌دست آوردن سود بدون تلاش علاقه خواهند داشت، تقاضا برای این ورق قرضه در زمان t مرتباً افزایش پیدا می‌کند و بنابر اصل کلی عرضه و تقاضا، بهای آن در زمان t مرتباً افزایش می‌یابد تا زمانی که نابرابری اکید فوق به نابرابری در جهت دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر «پس از مدتی کوتاه»، $B(t) \ge e^{-r(T-t)}K$.

به‌طور خلاصه، «پس از مدتی کوتاه»، هر دو نابرابری $B(t) \le e^{-r(T-t)}K$ و $B(t) \ge e^{-r(T-t)}K$ را خواهیم داشت؛ یا معادل آن، پس از مدتی کوتاه $B(t) = e^{-r(T-t)}K$.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که چگونه این عملیات مالی «مجرد»، که اجرای آنها در دنیای واقعی عموماً امکان‌پذیر نیست، اساس این استدلال و نتیجه‌گیری قرار گرفته‌اند. پاسخ آن است که اعمال مجرد، با وجود واقعی نبودن، مبنای نتایج در همهٔ شاخه‌های علوم هستند. به‌عنوان مثال، مفهوم خط مماس یک مفهوم مجرد است و در دنیای واقعی وجود ندارد؛ با این حال، این مفهوم مبنای بسیاری از قضایا و نتایجی است که در دنیای واقعی کاربردهای وسیع دارند.

سؤال اساسی دیگر آن است که هدف از عرضهٔ اوراق قرضه چیست؛ به نظر می‌رسد که حسابهای پس‌انداز بانکها نیز همان کار را انجام می‌دهند. پاسخ آن است که در دنیای واقعی نرخ سود ثابت نیست و با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ ورق قرضه نرخ سود را برای دارندهٔ آن ثابت نگاه می‌دارد و بنابراین به‌ترتیبی دارنده را در برابر تغییرات نامساعد نرخ سود «بیمه می‌کند».

در حالتی که نرخ بهره تابعی تعیّنی از زمان، مثلاً $r(t)$، باشد، ارزش ورق قرضه جواب مسألهٔ با شرط «پایانی» زیر است

$$\begin{cases} dB = r(t)B\,dt \\ B(T) = K \end{cases}$$

جواب این مسأله عبارت است از $B(t) = \exp(-\int_t^T r(s)\,ds)K$ و در حالت خاص، r ثابت به $B(t) = e^{-r(T-t)}K$، که در بحث سود بدون تلاش به‌دست آمد، تبدیل می‌شود.

عرضه‌کنندگان اوراق قرضه در بسیاری از موارد علاوه بر پرداخت مبلغ K در زمان پایانی T، در مدت عمر ورق قرضه در زمانهای از پیش‌تعیین‌شده مبالغی را که کوپن[1]های ورق قرضه نام دارند، پرداخت می‌کنند. در حالت مجردی که پرداخت کوپن در هر لحظه از زمان با نرخ $c(t)$ باشد، ارزش ورق قرضه جواب مسألهٔ با شرط پایانی زیر است

$$\begin{cases} dB + c(t)\,dt = r(t)B\,dt \\ B(T) = K \end{cases}$$

1. bond 2. maturity date 3. par value 4. bond pricing
5. bond issuer 6. arbitrage 7. dual

1. coupon

جواب این مسأله عبارت است از

$$B(t) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) K + \int_t^T c(u) \exp\left(-\int_t^u r(s)\,ds\right) du\,.$$

جملهٔ اول ارزش ورق قرضه بدون کوپن[1] است. انتظار داریم ارزش ورق قرضهٔ با کوپن[2] بیشتر از ارزش ورق قرضهٔ بدون کوپن باشد و نتیجهٔ به‌دست آمده تأیید این مطلب است: جملهٔ دوم، ارزش افزودهٔ ورق قرضهٔ با کوپن نسبت به ورق قرضهٔ بدون کوپن است.

در عمل، عرضه‌کنندهٔ ورق قرضهٔ کوپن‌دار پرداخت کوپن را به‌صورت گسسته با مبالغ از پیش تعیین‌شدهٔ c_1، c_2، ...، c_n در زمانهای از پیش تعیین‌شدهٔ t_1، t_2، ...، t_n انجام می‌دهد. برای ارزیابی این ورق قرضه می‌توان با استفاده از دلتای دیراک از نتایج دنیای پیوسته، مذکور در بالا، نتایج دنیای گسسته را به‌دست آورد. «نرخ سوددهی پیوسته» برای این نظام گسسته را می‌توان به‌صورت $c(t) = \sum_{j=1}^n c_j \delta(t - t_j)$ نوشت. با قرار دادن این عبارت برای $c(t)$ در بالا، ارزش ورق قرضهٔ گسسته به‌دست می‌آید:

$$B(t) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) K + \sum_{j=1}^n c_j H(t_j - t) \exp\left(-\int_t^{t_j} r(s)\,ds\right)$$

که در آن H تابع هویساید است:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

از رابطهٔ فوق یک ویژگی اساسی ورق قرضهٔ با کوپن، یعنی شرایط پرشی[3] زیر، نتیجه می‌شود

$$B(t_j^+) = B(t_j^-) - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

به عبارت دیگر، در لحظهٔ پرداخت کوپن، ارزش ورق قرضه به اندازهٔ میزان کوپن پرداختی کاهش می‌یابد. از خواننده دعوت می‌شود که سعی کند همین نتیجه را از طریق بحث سودآوری بدون تلاش، مشابه آنچه در بالا انجام گرفت، به‌دست آورد.

۴. ارزیابی ومدیریت مخاطره

ارزیابی میزان مخاطرهٔ موجود در یک فعالیت مورد نظر، و سپس ابداع روشهایی برای کنترل و در صورت امکان کاهش دادن میزان مخاطره از ملزومات همهٔ فعالیتها در جوامع انسانی است. اهمیت ارزیابی و مدیریت مخاطره در آن است که اجرای فعالیت مورد نظر را، همراه با حفاظت در مقابل زیانها و ضررهای احتمالی ناشی از اجرای آن فعالیت، امکان‌پذیر می‌سازد.

1. zero coupon bond 2. coupon paying bond 3. jump conditions

بیمه اولین سیستم اساسی و مهمی است که انسان برای ارزیابی و مدیریت مخاطره ابداع کرده است، و پس از قرنها استفاده از آن، هنوز متداول‌ترین ابزار حفاظت در مقابل زیانها به‌شمار می‌رود. در واقع با گذشت زمان، بیمه بیشتر در زندگی روزمرهٔ انسانها نفوذ کرده است و گذشت زمان تنها روشها و اصول اجرای آن را، به‌عنوان یک روش انتقال مخاطره، پیشرفته‌تر و مؤثرتر کرده است[۱۴].

ارزیابی و مدیریت مخاطره در اقتصاد و تأمین اجتماعی[۳]، فعالیتهای صنعتی ([۴]، [۱۵])، کشاورزی [۱۶]، و سایر فعالیتها در جوامع انسانی یک بخش ضروری و اجتناب‌ناپذیر است؛ اما کاربرد عمدهٔ ارزیابی و مدیریت مخاطره، در بازارهای مالی از جمله در مدیریت سبدهای مالی ([۶]، [۱۱]، [۱۷]) و بانکداری [۷] است. با توجه به پیچیدگی فوق‌العادهٔ سیستمهای مورد استفاده در جوامع امروزی، ارزیابی و مدیریت مخاطره نیازمند به کارگیری مفاهیم و روشهای پیشرفتهٔ ریاضی به‌ویژه آنالیز تصادفی است ([۸]، [۱۳]).

در دنیای واقعی نه تنها نرخ سود با گذشت زمان تغییر می‌کند، بلکه تغییرات آن تصادفی است. مدل این تغییرات تصادفی را می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مانند

$$dr_t = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dW_t$$

در نظر گرفت که در آن $\{W_t : t \geq 0\}$ یک فرایند وینر[۱] است. جملهٔ $a(r_t, t)dt$ مدل تغییرات مورد انتظار و تعیّنی[1] و جملهٔ $b(r_t, t)dW_t$ مدل تغییرات تصادفی پیوسته است. در اینجا برای تأکید بر تصادفی بودن، متغیر به جای اینکه در داخل پرانتز قرار گیرد به‌صورت اندیس پایین قرار گرفته است. ویژگی اساسی فرایند وینر، $dW_t^2 = dt$ [۳]، نتیجه می‌دهد: $dr_t^2 = b^2 dt + o(dt)$

با توجه به نتایج فوق، فرمول ایتو[2] برای ارزش ورق قرضه به‌صورت

$$dB_t = G[B_t]dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r_t}\right) dW_t + o(dt)$$

به‌دست می‌آید که در آن G عملگر دیفرانسیل جزئی

$$G := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2}{\partial r_t^2} + a\frac{\partial}{\partial r_t}$$

است.

حال یک سبد مالی[3] شامل یک واحد از یک ورق قرضه با ارزش اسمی K_1، زمان سر رسید T_1، و فرایند ارزش $\{B_{1t} : t \geq 0\}$، و θ واحد از یک ورق قرضه با ارزش اسمی K_2، زمان سر رسید T_2، و فرایند ارزش $\{B_{2t} : t \geq 0\}$ را در نظر می‌گیریم. فرایند ارزش این سبد مالی

$$\{\Pi_t = B_{1t} + \theta B_{2t} : t \geq 0\}$$

در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$d\Pi_t = G[B_{1t} + \theta B_{2t}]dt + b\left(\frac{\partial B_{1t}}{\partial r_t} + \theta\frac{\partial B_{2t}}{\partial r_t}\right) dW_t\,.$$

1. deterministic 2. Itô formula 3. porfolio

مشاهده می‌کنیم که انتخاب

$$\theta = -\frac{\partial B_{1t}}{\partial r} \Big/ \frac{\partial B_{2t}}{\partial r}$$

ضریب dW_t را صفر، و در نتیجه این سبد مالی را بدون مخاطره می‌کند. بازدهی حساب پس‌انداز برای مبلغ Π_t در بازهٔ زمانی $[t, t+dt]$ برابر است با

$$e^{rdt}\Pi_t - \Pi_t = r\Pi_t dt + o(dt)\,.$$

بنابر بحث سودآوری بدون تلاش (که از خواننده دعوت می‌شود جزئیات آن را انجام دهد)، به دلیل بدون مخاطره بودن، بازدهی این سبد مالی با بازدهی حساب پس‌انداز بانکی برابر است؛ به عبارت دیگر، $d\Pi_t = r\Pi_t dt$. از این برابری، و با مقدار فوق برای θ، معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial B_{1t}}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_{1t}}{\partial r^2} - rB_{1t}\right) \Big/ \frac{\partial B_{1t}}{\partial r}$$

$$= \left(\frac{\partial B_{2t}}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_{2t}}{\partial r^2} - rB_{2t}\right) \Big/ \frac{\partial B_{2t}}{\partial r}\,.$$

طرف راست این رابطه مستقل از T_1 و K_1، و طرف چپ آن مستقل از T_2 و K_2 است. بنابراین، هر دو طرف این رابطه مستقل از T_1، K_1، T_2، و K_2 هستند. نتیجهٔ مهم آن است که برای هر ورق قرضه با بهای B_t، کمیت زیر مستقل از زمان اجرا و ارزش اسمی است؛ از این جهت آن را به‌عنوان تابعی فقط از r و t، مانند γ نام‌گذاری کرده‌ایم:

$$\gamma(r,t) := \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_t}{\partial r^2} - rB_t\right) \Big/ \frac{\partial B_t}{\partial r}\,.$$

با جایگذاری $\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_t}{\partial r^2}$ از فرمول ایتو، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$dB_t = \left[(\gamma + a)\frac{\partial B_t}{\partial r} + rB_t\right]dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r}\right)dW_t\,.$$

این بازدهی ورق قرضه در بازهٔ زمانی $[t, t+dt]$ است. از این مقدار، مبلغ $rB_t dt$ بازدهی «بدون مخاطره» ارزش ورق قرضه است (بازدهی حساب پس‌انداز بانکی برای مبلغ B_t). بقیه جایزه[1]ای است که بازار مالی به دارندهٔ ورق قرضه برای تحمل مخاطرهٔ داشتن ورق قرضه می‌پردازد:

$$dB_t - rB_t dt = (\gamma + a)\frac{\partial B_t}{\partial r}\,dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r}\right)dW_t$$

$$= b\frac{\partial B_t}{\partial r}[(\lambda)dt + (1)dW_t]$$

با

$$\lambda(r,t) := \frac{\gamma(r,t) + a(r,t)}{b(r,t)}\,.$$

از آنجایی که جملهٔ شامل dW_t مدل تغییرات تصادفی است، و مخاطره نیز ناشی از همین تغییرات تصادفی است، ضریب ۱ برای dW_t را می‌توان

1. reward

«یک واحد مخاطره» تلقی کرد. در نتیجه با توجه به آنکه جملهٔ شامل dt مدل تغییرات مورد انتظار است، کمیت λ، ضریب dt، را می‌توان «ارزش یک واحد مخاطره» در بازار مالی تلقی کرد.

تعاریف دیگری نیز برای میزان مخاطره و ارزش آن در منابع گوناگون ارائه شده‌اند؛ از جمله انحراف معیار می‌تواند به‌عنوان معیاری از میزان مخاطره به‌کار رود[۲]. در حالت کلی برای هر کاربرد و زمینهٔ خاص باید معیاری برای میزان مخاطرهٔ متناسب با آن کاربرد و زمینه تعریف شود. هدف در اینجا ارائهٔ نمونه‌ای از روشها و بحثهای ریاضی است که در ارزیابی و مدیریت مخاطره از آنها استفاده می‌شود.

۵. قراردادهای پیش‌فروش و امتیاز

در بازارهای مالی علاوه بر اوراق قرضه انواع بسیار زیادی از محصولات مالی وجود دارند. قراردادهای پیش‌فروش و امتیاز از جمله متداول‌ترین آنها هستند.

قرارداد پیش‌فروش[1] قراردادی است که بر اساس آن یک طرف قرارداد ملزم است در زمان از پیش‌تعیین‌شدهٔ T در آینده، سرمایهٔ از پیش‌تعیین‌شده‌ای را به بهای از پیش‌تعیین‌شدهٔ K از طرف دیگر خریداری کند، و طرف دیگر ملزم است آن سرمایه را بفروشد. این قرارداد نمونه‌ای از قراردادهای مالی است که بر اساس سرمایهٔ فرد دیگر قرار دارند و در نتیجه ارزش آنها وابسته به ارزش این سرمایهٔ زیرین[2] است. از این جهت چنین قراردادهایی را محصولات مالی مشتق[3] می‌نامند.

قرارداد پیش‌فروش یک قرارداد متقارن است از این جهت که اگر S_t ارزش سرمایهٔ زیرین در لحظهٔ t باشد، درصورتی‌که $S_T > K$، طرف خریدار سودی معادل با $S_T - K$، و طرف فروشنده زیانی معادل با $S_T - K$ در زمان T خواهند داشت (در این بحث ساده‌شده، که هدف آن توضیح مفاهیم کلی است، بسیاری از کمیات، از جمله هزینهٔ کارمزد[4] را نادیده گرفته‌ایم. مدلهای پیشرفته‌تر در ریاضیات مالی این کمیات را نیز شامل هستند)؛ اما در صورتی‌که $S_T < K$، طرف خریدار زیانی معادل با $K - S_T$، و طرف فروشنده سودی معادل با $K - S_T$ در زمان T خواهند داشت. به عبارت دیگر، برای هر دو طرف قرارداد، امکان کسب سود قابل‌توجه و زیان قابل‌توجه در زمان T وجود دارد. به دلیل متقارن بودن این قرارداد، ارزش آن در هر لحظه صفر است؛ به عبارت دیگر «از لحاظ نظری» می‌توان بدون هیچ‌گونه پرداختی وارد یک قرارداد پیش‌فروش شد.

در عمل، برای تضمین آنکه طرفین قرارداد تعهدشان را اجرا کنند، این قراردادها به‌صورت رسمی در بازارهای بورس با نام قراردادهای آینده[5] خرید و فروش می‌شوند.

می‌توان با تغییر در متن قرارداد پیش‌فروش، یکی از طرفین قرارداد را در برابر زیان قابل‌توجه بیمه کرد. متداول‌ترین محصولات مالی مشتق با این ویژگی، قراردادهای امتیاز[6] می‌باشند. قرارداد امتیاز خرید[7] توافقی است بین دو طرف که بر اساس آن یک طرف قرارداد، دارندهٔ امتیاز[8] یا طرف در موضع بالا[9]، می‌تواند ــ هر چند موظف نیست ــ در زمان یا زمانهای از

1. forward contract 2. underlying asset 3. financial derivatives
4. transaction cost 5. futures 6. options 7. call option
8. option holder 9. long position

پیش‌تعیین‌شده کالای از پیش‌تعیین‌شده‌ای (از نظر مقدار و کیفیت) را به بهایی از پیش‌تعیین‌شده، بهای اجرا[1]، خریداری کند. اگر وی تصمیم به خرید بگیرد، طرف دیگر قرارداد، نویسندهٔ امتیاز[2] یا طرف در «موضع پایین»[3]، موظف است کالا را بفروشد. قرارداد امتیاز فروش[4] مشابه همین قرارداد است با این تفاوت که خریدار امتیاز حق فروش سرمایه را دارد و در صورتی‌که تصمیم به فروش بگیرد، فروشندهٔ امتیاز موظف است کالا را خریداری کند.

در امتیاز اروپایی[5]، تصمیم به خرید تنها در زمان پایان امتیاز قابل اجراست. در امتیاز آمریکایی[6] تصمیم به خرید در هر زمان تا زمان پایان امتیاز قابل اجراست. اکثر قراردادهای امتیازها در عمل از نوع برمودایی[7] هستند که در آنها تصمیم به خرید تنها در زمانهای از پیش توافق‌شده قابل اجراست. در امتیاز آسیایی[8] بهای اجرا بر اساس نوعی متوسط‌گیری زمانیِ ارزش سرمایه زیرین تعیین می‌شود.

قرارداد امتیاز یک قرارداد متقارن نیست زیرا خریدار امتیاز در موقعیت برتری نسبت به فروشندهٔ امتیاز قرار دارد. این موقعیت برتر دارای ارزشی است که بهای امتیاز محسوب می‌شود و در زمان عقد قرارداد از طرف خریدار امتیاز به فروشندهٔ امتیاز پرداخت می‌شود. مسألهٔ ارزیابی قرارداد امتیاز[9] عبارت است از تعیین بهای این موقعیت برتر و مبلغ عادلانه‌ای که خریدار امتیاز باید به نویسندهٔ امتیاز پرداخت کند.

ارزیابی امتیاز اروپایی ساده‌تر از انواع دیگر است و فرمولهایی تحلیلی برای آن در دست است. اگرچه قراردادهای امتیاز موجود در بازارهای مالی به‌ندرت از نوع اروپایی هستند، نتایج تحلیل امتیاز اروپایی ارزشمند است زیرا با تعمیم آنها می‌توان نتایجی برای ارزش انواع دیگر امتیاز به‌دست آورد ([۲]، [۹]، [۱۰]).

سرمایهٔ زیرین یک قرارداد امتیاز می‌تواند هر چیزی باشد ([۲]، [۵])؛ اوراق قرضه، سهام کارخانجات، نرخ سود بانکها، نرخهای تبدیل ارزهای خارجی، محصولات کشاورزی مانند گندم، فلزات گرانبها مانند طلا و نقره، نتایج مسابقات ورزشی، میزان باران سالانه در یک ناحیهٔ جغرافیایی از پیش‌تعیین‌شده، و غیره. ویژگی مهم ارزش سرمایه، تصادفی بودن آن است، که به‌نوبهٔ خود تصادفی بودن ارزش امتیاز را باعث می‌شود. ارزشهای برخی سرمایه‌ها حتی رفتار برخالی از خود نشان می‌دهند [۹].

۶. ارزش بلک-شولز امتیاز

تغییرات ارزش سرمایه دو نوع هستند: مورد انتظار و تصادفی [۹]. تحلیل بلک-شولز[10] یک توزیع نرمال لگاریتمی پیوستهٔ تصادفی را برای ارزش سرمایه در نظر می‌گیرد که با معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

توصیف می‌شود. در اینجا $\{W_t : t \geq 0\}$ یک فرایند ویتر است. یک محدودیت اساسی این مدل فقدان مدل‌سازی پرشهای تصادفی است. یک فرایند تصادفی مناسب برای این منظور فرایند پواسون [۵] است. با فرض اینکه $\{U_t : t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد، که می‌توان آن را با مشاهدهٔ تغییرات ارزشهای سرمایه‌ها در بازارهای مالی تخمین زد، معادلهٔ

$$dS_t = a\,dt + \sigma dW_t + \gamma dU_t$$

که در آن a، σ، و γ به‌طور کلی توابعی از t و S_tاند، پرشهای تصادفی را نیز مدلسازی می‌کند. مدلهای پیچیده‌تر و مؤثرتر به‌صورت

$$dS_t = a\,dt + b\,dX_t$$

هستند که در آن $\{X_t : t \geq 0\}$ یک فرایند لوی[1] [۱] است که مدل تغییرات پیوسته و پرشی تصادفی است.

با مدل نرمال لگاریتمی بلک-شولز خواهیم داشت

$$\begin{aligned} dS_t^2 &= a^2 dt^2 + \sigma^2 dW_t^2 + 2a\sigma\, dt\, dW_t \\ &= \sigma^2 dt + o(dt)\,. \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب، فرمول ایتو برای $V_t = V(S_t, t)$، ارزش قرارداد امتیاز در لحظهٔ t، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + a\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\right) dt + \sigma \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\, dW_t\,.$$

سبد مالی بلک-شولز ترکیبی است از قرارداد امتیاز و سرمایهٔ زیرین به‌طوری که سبد مالی بدون مخاطره باشد. با یک واحد قرارداد امتیاز و Δ واحد سرمایهٔ زیرین، ارزش سبد مالی عبارت است از $\Pi_t = V_t - \Delta S_t$، و دیفرانسیل این ارزش برابر است با

$$\begin{aligned} d\Pi_t = &\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + a\frac{\partial V_t}{\partial S_t} - a\Delta\right) dt \\ &+ \sigma\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t} - \Delta\right) dW_t\,. \end{aligned}$$

انتخاب

$$\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$$

این سبد مالی را بدون مخاطره می‌کند. در حالات تثبیت‌شدهٔ بازار، فرصت سودآوری بدون تلاش وجود ندارد و سودآوری این سبد مالی برابر است با سودآوری سرمایه‌گذاری بدون مخاطره با نرخ سود r_t، که برابر با $r_t \Pi_t dt$ است. در نتیجه معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برای ارزش قرارداد امتیاز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{L}_{BS} V_t := \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} - r V_t = 0\,.$$

این همان معادلهٔ کلاسیک بلک-شولز در ریاضیات مالی، و $\mathcal{L}_{BS}$ عملگر دیفرانسیل جزئی بلک-شولز است. این معادله را می‌توان به‌صورت تحلیلی با تبدیل آن به معادلهٔ گرما حل کرد. دقت کنید که تفاوت اساسی این معادله با معادلهٔ گرما، تفاوت علامت مشتق اول جزئی نسبت به زمان است. معادلهٔ گرما

1. strike price 2. option writer 3. short position 4. put option
5. European option 6. American option 7. Bermudan option
8. Asian option 9. option pricing 10. Black-Scholes

1. Lévy process

را تنها می‌توان «رو به جلو در زمان» با در دست داشتن شرایط اولیه و مرزی حل کرد؛ معادلهٔ بلک-شولز را تنها می‌توان «رو به عقب در زمان» با در دست داشتن شرایط پایانی و مرزی حل کرد. شرط پایانی برای قرارداد امتیاز خرید اروپایی $V_T = \max(S_T - K, ۰)$ و برای قرارداد امتیاز فروش اروپایی $V_T = \max(K - S_T, ۰)$ است. به این ترتیب، فرمولهای بلک-شولز برای ارزش امتیازهای خرید و فروش اروپایی به‌دست می‌آیند ([۲]، [۴]):

$$C(S_t,t) = e^{-q(T-t)}S_t N(d_۱) - e^{-r(T-t)}K\,N(d_۲)$$

$$P(S_t,t) = e^{-r(T-t)}K\,N(-d_۲) - e^{-q(T-t)}S_t N(-d_۱)$$

با

$$d_۱ := \frac{۱}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)\right]$$

$$d_۲ := \frac{۱}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)\right]$$

$$= d_۱ - \sigma\sqrt{T-t}$$

در اینجا T زمان انقضای امتیاز، K بهای اجرا، q سود سرمایهٔ زیرین[1]، و N تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است:

$$N(d) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-s^۲/۲}ds\,.$$

در حالت r ثابت، رابطهٔ مهمی بین ارزشهای امتیازهای خرید و فروش اروپایی روی سرمایهٔ زیرین مشابه و با زمان انقضای مشابه T و بهای اجرای مشابه K وجود دارد که می‌توان آن را با فرض داشتن سبد مالی زیر به‌دست آورد

- موضع بالا در یک امتیاز فروش
- موضع پایین در یک امتیاز خرید
- یک واحد سرمایهٔ زیرین

• **حالت اول:** $S_T > K$

در این حالت ما امتیاز فروش را اجرا نمی‌کنیم اما طرفِ دارای موضع بالا در امتیاز خرید، آن را اجرا خواهد کرد که بر اساس آن ملزم خواهیم بود سرمایهٔ زیرین موجود در این سبد مالی را به او به بهای K بفروشیم. بنابراین در این حالت ارزش این سبد مالی در زمان T برابر با K است.

• **حالت دوم:** $S_T < K$

در این حالت طرفِ دارای موضع بالا در امتیاز خرید، آن را اجرا نخواهد کرد اما ما امتیاز فروش را اجرا می‌کنیم که بر اساس آن طرف دیگر ملزم خواهد بود سرمایهٔ زیرین موجود در این سبد مالی را از ما به بهای K خریداری کند. پس در این حالت نیز ارزش این سبد مالی در زمان T برابر با K است.

بنابراین ارزش این سبد مالی در زمان انقضای T برابر با K است صرف‌نظر از آنکه ارزش سرمایهٔ زیرین در زمان انقضای T بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از K باشد. در نتیجه بنابر بحث سودآوری بدون تلاش، ارزش این سبد مالی در هر لحظهٔ $۰ \le t \le T$ برابر با تنزیل‌شدهٔ مبلغ K است. به عبارت دیگر به‌ازای هر $۰ \le t \le T$

$$P(S_t,t) - C(S_t,t) + S_t = e^{-r(T-t)}K\,.$$

این رابطه را توازن امتیازهای فروش و خرید[1] می‌نامند. با در دست داشتن این رابطه، تنها حل مسألهٔ با مقدار پایانی و مرزیِ مربوط به $C(S_t,t)$ لازم خواهد بود، و بدون نیاز به حل مجدد یک مسألهٔ با مقدار پایانی و مرزی دیگر مربوط به $P(S_t,t)$، با داشتن $C(S_t,t)$ می‌توان $P(S_t,t)$ را از رابطهٔ توازن تعیین کرد.

۷. ارزیابی امتیاز آمریکایی

ارزیابی امتیاز آمریکایی، که در آن دارندهٔ امتیاز می‌تواند امتیاز را هر لحظه اجرا کند، بسیار مشکل‌تر از ارزیابی امتیاز اروپایی است و منجر به یک مسأله با مرز آزاد[2] می‌شود [۹]. آنچه می‌توان در نگاه اول به تعاریف بیان کرد آن است که امتیاز آمریکایی گران‌تر از امتیاز اروپایی است زیرا «امتیازات» بیشتری به دارنده می‌دهد. با توجه به شرایط پایانی امتیازهای اروپایی (رجوع کنید به بخش قبل)، اگر $C_A(S_t,t)$ و $P_A(S_t,t)$ به‌ترتیب ارزشهای امتیازهای خرید و فروش آمریکایی باشند، نابرابریهای زیر در هر لحظهٔ $۰ \le t \le T$ برقرارند

$$C_A(S_t,t) \ge \max(S_t - K, ۰) \ge S_t - K$$

و

$$P_A(S_t,t) \ge \max(K - S_t, ۰) \ge K - S_t$$

بنابراین

$$C_A(S_t,t) + K \ge S_t$$

و

$$P_A(S_t,t) + S_t \ge K\,.$$

سبدهای مالی زیر را در نظر بگیرید:

سبد مالی ۱
۱. موضع بالا در یک امتیاز خرید آمریکایی
۲. پول نقد برابر با K

سبد مالی ۲
۱. موضع بالا در یک امتیاز فروش آمریکایی
۲. یک واحد سرمایهٔ زیرین

ارزش سبد مالی ۱ در لحظهٔ t در صورتی که امتیاز خرید در لحظهٔ t اجرا شود، برابر با S_t است. اگر به سرمایهٔ زیرینْ سود سرمایه تعلق نگیرد، ارزش این سبد مالی در لحظهٔ t، در صورتی‌که امتیاز خرید در لحظهٔ t اجرا نشود بنابر نابرابری $C_A(S_t,t) + K \ge S_t$ ناکوچک‌تر از S_t است. بنابراین اجرای امتیاز خرید آمریکایی هیچ‌گاه بهینه نیست. به عبارت دیگر:

اجرای امتیاز خرید آمریکایی روی سرمایهٔ زیرینی که سود سرمایه به آن تعلق نگیرد، هیچ‌گاه بهینه نیست و بنابراین معادل با یک امتیاز خرید اروپایی است.

1. dividend

1. put-call parity 2. free boundary value problem

در حالتی که به سرمایه زیربن با نرخ q سود سرمایه تعلق گیرد، استدلال فوق دیگر برقرار نیست زیرا ارزش سرمایه با گذشت زمان به دلیل پرداخت سود سرمایه بیش از S_t و مطابق با $e^{qt}S_t$ افزایش می‌یابد.

ارزش سبد مالی۲ در لحظهٔ t در صورتی که امتیاز فروش در لحظهٔ t اجرا شود، برابر با K است. اگر نرخ سود حسابهای پس‌انداز صفر باشد، ارزش این سبد مالی در لحظهٔ t، در صورتی‌که امتیاز فروش در لحظه t اجرا نشود طبق نابرابری $P_A(S_t,t)+S_t \geq K$ ناکوچک‌تر از K است. بنابراین اجرای امتیاز فروش آمریکایی هیچ‌گاه بهینه نیست. به عبارت دیگر

اجرای امتیاز فروش آمریکایی در حالتی که نرخ سود حسابهای پس‌انداز صفر باشد، هیچ‌گاه بهینه نیست و بنابراین معادل با یک امتیاز فروش اروپایی است.

در حالتی که نرخ بهرهٔ حسابهای پس‌انداز r باشد، استدلال فوق دیگر برقرار نیست زیرا مبلغ K باگذشت زمان ثابت نخواهد بود و مطابق با $e^{rt}K$ افزایش می‌یابد.

بنابراین، به‌عنوان مثال در اقتصادهای با نرخ سود بسیار پایین، مانند اقتصاد ژاپن، امتیازهای فروش آمریکایی کاربرد ندارند زیرا عملاً معادل با امتیازهای فروش اروپایی هستند.

مطالب فوق حاکی از این نکتهٔ مهم هستند که تعدادی از بندهای یک قرارداد مالی ممکن است بی‌اثر باشند و عمداً یا سهواً به متن قرارداد اضافه‌شده باشند. به‌عنوان مثال، در حالتی که سود سرمایه به سرمایهٔ زیربن تعلق نگیرد، اضافه کردن شرط «آمریکایی» بودن امتیاز خرید به قرارداد تنها جنبهٔ نمایشی خواهد داشت و چیزی به ارزش قرارداد مالی اضافه نمی‌کند.

سخن پایانی و قدردانی

این مقاله سعی در ترسیم چشم‌اندازی از مفاهیم و روشهای متداول در ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره داشته است. خوانندهٔ علاقه‌مند به این شاخه‌های جذاب و فعال دانش امروز می‌تواند مطالعه در این زمینه‌ها را با رجوع به منابع بسیار موجود، از جمله منابع اشاره‌شده در فهرست مراجع، دنبال کند.

نگارنده از دست‌اندرکاران نشر ریاضی که از او برای تهیهٔ این مقاله دعوت کردند سپاسگزار است.

مراجع

1. Cont, R., and Tankov, P., *Financial Modeling With Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC (2004).
2. Hull, J. C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, third edition, Prentice Hall (1997).
3. Jonkman, S., van Gelder, P., and Vrijling, J., "An overview of quantitative risk measures for loss of life and economic damage", *Journal of Hazardous Materials*, A99 (2003) 1-30.
4. Kang, C., Feng, C., and Khan, H., "Risk assessment for buildoperate-transfer projects: A dynamic multi-objective programming approach", *Computers and Operations Research*, **32** (2005) 1633-1654.

5. Kohlmann, M. and Tang, S., Eds., *Mathematical Finance, Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance Research Project*, Konstanz, Germany, October 5-7, 2000, Birkhäuser Verlag (2001).
6. Korn, R., and Korn, E., *Option Pricing and Portfolio Optimization, Modern Methods of Financial Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics, AMS (2001).
7. Mari, C., and Reno, R., "Credit risk analysis of morgage loans: An application to the Italian market", *European Journal of Operational Research*, **163** (2005) 83-93.
8. Medina, P., and Merino S., *Mathematical Finance and Probability: A Discrete Introduction*, Birkhauser (2003).
9. Neftci, S., *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press (1996).
10. Peter, E. E , *Fractal Market Analysis: Applying Chaos to the Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons (1994).
11. Rasmussen, M., *Quantitative Portfolio Optimization, Asset Allocation and Risk Management*, Palgrave MacMillan (2003).
12. Ross, S., *Introduction to Probability Models*, eighth edition, Academic Press (2003).
13. Schoutens, W., and Struder, M., "Short-term risk management using stochastic Taylor expansions under Levy models", *Insurance: Mathematics and Economics*, **33** (2003) 173-188.
14. Trieschmann, J., Gustavson, S., and Hoyt, R., *Risk Management and Insurance*, eleventh edition, South-Western College Publishing (2001).
15. Vehvilainen, I., and Keppo, J., "Managing electricity market pricerisk", *European Journal of Operational Research*, **145** (2003) 136-147.
16. Wang, J., Hansen, P., Christensen, S., and Qi, G., "The mathematical method of studying the reproducion structure of weeds and its application to Bromus Sterilis", *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, (4)3 (2004) 777-788.
17. Watsham, T., *Futures and Options in Risk Management*, second edition, International Thomson Publishing (1998).
18. Wilmott, P., Howison, S., and Dewynne, J., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1995).

******

* حسن نجومی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

nojumi@sina.sharif.edu

رد پای توپولوژی در کارخانه*

آرون آبرامز**، رابرت گریست**

ترجمهٔ حسن حقیقی

اگر بخواهیم برای یافتن نمونه‌هایی از اشیای توپولوژیک جالب در جهان پیرامون جستجوکنیم شاید به نظر نرسد که محلی استثنایی برای این کار، داخل محوطهٔ یک انبار خودکار[1] یا کارخانه است.

در این نوشته رده‌ای از فضاهای توپولوژیک را که به‌طور طبیعی از چنین محیطی برگرفته می‌شوند شرح می‌دهیم. مثالهایی که می‌آوریم به‌طور همزمان از دو حوزهٔ به ظاهر متفاوت برخاسته‌اند. نویسندهٔ اول این مقاله، در تحقیق برای تهیهٔ پایان‌نامه خود [۱]، پس از همکاری با پومرشایم و زاسلو[۲]، اچ. لانداتو و زد. لانداتو در مسائلی دربارهٔ قدم زدن تصادفی روی گرافها، این فضاها را کشف کرد. نویسندهٔ دوم، همین‌فضاها را، با همکاری کودیت‌شک در آزمایشگاه هوش مصنوعیِ دانشگاه میشیگان ([۷]، [۸]) کشف کرد.

دربخشهای ۱ و ۲، علاوه بر بحث مختصر و مقدماتی دربارهٔ فضاهای پیکربندی، به طرح مسائلی دربارهٔ روباتها می‌پردازیم تا زمینهٔ بحث فراهم شود. در بقیهٔ مقاله توجه خود را به ردهٔ جالبی از فضاهای توپولوژیک، که مرتبط با برنامه‌ریزی حرکت روی گرافها هستند، معطوف می‌کنیم.

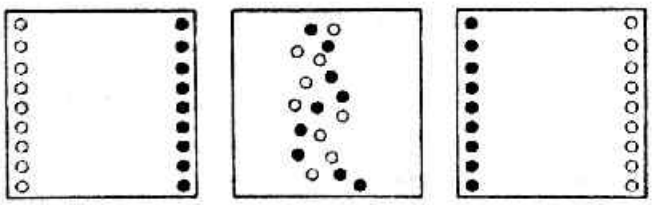
۱. روباتها، و برنامه‌ریزی حرکت به‌صورت توپولوژیک. یک کارخانهٔ خودکار را در نظر بگیرید که مجهز به تعدادی خودرو با هدایت خودکار[2] (AGV) یا روبات متحرک است که محمولاتی را از جایی به جایی دیگر منتقل می‌کنند. معمولاً هدف این است که تعدادی از این روباتها، مثلاً Nتا از آنها را همزمان به حرکت در آوریم و مطابق با الگوریتمی کنترل کنیم که روباتها طبق آن از مبادی به مقصدهای مورد نظر بروند (در کاربردهای انبارداری) یا یک فرایند چرخه‌ای را اجرا کنند (در کاربردهای تولید صنعتی). این روباتها گران‌قیمت هستند و در تصادم (با موانع یا با یکدیگر) کارایی خود را از دست می‌دهند.

هر کس که از یک فروشگاه بزرگ مواد غذایی، که راهروهای پهنی بین قفسه‌ها دارد، خرید کرده باشد با این مسأله و راه‌حل آن آشناست. اگر دو چرخ به سمت یکدیگر در حرکت باشند به هنگام رویارویی کمی تغییر جهت کافی است تا از برخورد اجتناب شود، بااین‌فرض که چرخ دیگر در همان جهت تغییر مسیر ندهد. پرهیز از برخورد در $\mathbb{R}^2$ کاری موضعی است.

این گفته بدان معنی نیست که برنامه‌ریزی حالتهای هماهنگ، کار ساده‌ای است، بلکه به‌عنوان مثال، تلاش فوق‌العاده‌ای لازم است تا بتوان رفت‌وآمدهای هوایی را در فرودگاههای شلوغ هماهنگ کرد. در برنامه‌ریزی برای این کار باید از تصادم، به هر قیمتی که شده، جلوگیری کرد. در شکل ۱، مثالی نابدیهی از این موضوع در صفحه ارائه شده است: مسأله این است که چگونه می‌توان حرکت این روباتها را هماهنگ کرد به‌طوری که در حین تعویض جای دو ردیف از آنها تصادمی روی ندهد.

یکی از روشهایی که در روبات‌شناسی برای حل مسائل هماهنگ‌سازی به‌کار می‌رود روشی اساساً توپولوژیک است. به تسامح می‌توان گفت در این روش فضای تمام آرایشهای ممکن از روباتها را می‌سازند و سپس همهٔ آرایشهایی راکه نشان‌دهندهٔ موقعیت تصادم و یا موقعیت نزدیک تصادم هستند حذف می‌کنند. آنچه باقی می‌ماند، فضایی است که تمام پیکربندیهای ایمن روباتها را دربر می‌گیرد. مسیرهای این فضا مسیر حرکتهای ایمن هستند.

۲. فضای پیکربندی. در ابتدا مثالی صوری ارائه می‌کنیم، که یک شیء توپولوژیک کلاسیک، به نام فضای پیکربندی N نقطهٔ متمایز برچسب‌گذاری شده از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$، است. یعنی تمام Nتاییهای مرتب از نقاط $\mathbb{R}^2$ با این خاصیت که هیچ دو نقطه‌ای برهم منطبق نباشند. به هر Nتایی با این ویژگی، نقطه‌ای را از فضای پیکربندی نسبت می‌دهیم. دو نقطه در فضای پیکربندی نزدیک یکدیگرند اگر فاصلهٔ Nتاییها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{2N}$ کم باشد.



شکل ۱ هماهنگ کردن انتقال ایمن و بهینهٔ روباتها در تعویض جای دو ردیف از آنها یک مسألهٔ نابدیهی برنامه‌ریزی است.

1. automated warehouse 2. Automated Guided Vehicles

به‌طور صوری فضای پیکربندی عبارت است از

$$C^N(\mathbb{R}^2) := (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2) - \Delta$$

که Δ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ دوبه‌دو قطری (که به اختصار آن را قطر می‌نامیم)، یعنی

$$\Delta := \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in (\mathbb{R}^2)^N : x_i = x_j, i \neq j\}$$

است.

تجسم این فضای پیکربندی، حتی تجسم قسمت کوچکی از آن، آسان نیست زیرا بُعد فضا برابر $2N$ است.

تمرین. نشان دهید $C^2(\mathbb{R}^2)$ با $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 - (0,0))$ یا با معادل آن $\mathbb{R}^2 \times S^1$، که S^1 نشان‌دهندهٔ دایرهٔ یکه در $\mathbb{R}^2$ است، همسانریخت است.
راهنمایی: هر نقطه را همچون سکه‌ای در نظر بگیرید و به نحوهٔ یکی‌یکی قرار دادن سکه‌ها روی میز فکر کنید. آیا روش اثبات شما نمایشی ساده برای $C^3(\mathbb{R}^2)$ به‌دست می‌دهد؟

به این ترتیب با مدل قرار دادن $\mathbb{R}^2$ برای کف کارخانه و نقاط روی $\mathbb{R}^2$ برای روباتهای متحرک می‌خواهیم مسیرها یا چرخه‌هایی را در $C^N(\mathbb{R}^2)$ بیابیم که رفتارهای معینی را نمایش دهند. موانع را به آسانی می‌توان در این مدلها گنجاند. آثار مکتوب زیادی دربارهٔ این موضوع وجود دارد[۱۲]. نمایش حرکتهای چرخه‌ای پیچیده‌تر است اما در ابتدا می‌توان آنها را با ترکیب حرکتهای نقطه به نقطه تقریب زد. لازم است چندین فرض برای چنین طرح ساده‌ای که ارائه می‌دهیم در نظر گرفته شود و به‌طور کلی جنبه‌های متفاوت سینماتیک (مثلاً هندسهٔ راهبری[1]) باید مورد توجه قرارگیرند. البته چون روباتها واقعاً نقطه نیستند و چون به‌کارگیری الگوریتمهای کنترلی با دقت بینهایت ممکن نیست فقط لازم است که مسیر طرح‌شده در خارج یک همسایگی قطر Δ در $C^N(\mathbb{R}^2)$ قرار گیرد.

با استفاده از فضاهای پیکربندی، ارائهٔ طرحهای کنترلی ایمن امکان‌پذیر می‌شود. درکار کودیت‌شک و ریمن [۱۱] نمونه‌ای از یک راه‌حل مشخص دیده می‌شود. آنها میدانهای برداری روی این فضاهای پیکربندی را که می‌توانند برای حرکت از مبدأ به مقصد، در صورت وجود بعضی از موانع، مورد استفاده قرار گیرند به‌صراحت مشخص می‌کنند. بردارهای این میدانهای برداری را می‌توان چنان آراست که به نقاط مشترک قطر Δ و مرز $C^N(\mathbb{R}^2)$ نزدیک نشوند. در این‌صورت ایمنی طرح کنترلی از لحاظ تصادم قطعی است و هیچ مسیری قطر را قطع نمی‌کند (مفهوم ایمنی قطعی در مقابل مفهوم ایمنی آماری است که در طرحهای کنترلی حاصل از شبیه‌سازیهای رایانه‌ای مطرح می‌شود). به‌علاوه چون یک همسایگی قطر حذف می‌شود، طرح کنترلی نسبت به اختلالات سیستم پایدار خواهد بود. این موضوع خیلی مهم است، زیرا متأسفانه احتمال خرابی گاه‌به‌گاه دستگاههای مکانیکی وجود دارد. ترسیم یک میدان برداری مناسب در فضای پیکربندی روشی عالی برای اصلاح طرح است.

کاربرد مذکور کاربرد مستقیم و زیبای ایده‌های توپولوژیک و دینامیک در مسأله‌ای با اهمیت عملی زیاد است، و هم‌اکنون در شرایط صنعتی گوناگون متداول است.

1. steering

۳. گراف. روبات‌شناسان، تا حد زیادی مستقل از توپولوژیدانها، موفقیت بزرگی در شناسایی فضاهای پیکربندی و کار با آنها در جهت مقاصد خودشان در مسائل کنترل به‌دست آورده‌اند. اما رده‌ای از ساختارهای سادهٔ فیزیکی مناسب وجود دارند که هنوز فضاهای پیکربندی آنها مورد استفاده قرار نگرفته‌اند. فضاهای پیکربندی روی گراف، یا روی شبکه‌ای از یالها و رأسها از جملهٔ این فضاها هستند.

فرض کنیم روباتها باید روی ریلهایی که در کف کارخانه نصب شده‌اند و یا از طریق مسیرهایی که با سیمهای برق‌دار آویخته از سقف مشخص شده‌اند حرکت کنند. برای مثال مرجع[۶] را ببینید. شبکه‌هایی با این محدودیت کاملاً رایج‌اند. علت اصلی آن این است که کم‌هزینه‌تر از یک سیستم راهبری AGVها، با دو درجهٔ آزادی کامل هستند. در این شرایط، حالت سیستم در هر لحظه از زمان یک نقطه از فضای پیکربندی گراف Γ، یعنی نقطه‌ای از فضای

$$C^N(\Gamma) := (\Gamma \times \cdots \times \Gamma) - \Delta$$

است. در اینجا نیز همانند مسألهٔ قبل برای اینکه بتوان با ایمنی روی گراف حرکت کرد، باید مسیرهایی مناسب ساخت که اکیداً درون $C^N(\Gamma)$ بمانند و از هر نقطهٔ نزدیک Δ دور باشند. اما مشکلاتی در اینجا هست که شاید مانع از به‌کارگیری راه‌حلی مشابه راه‌حل مسألهٔ قبل شود. از جمله، مشکلاتی که با سؤالات زیر رخ می‌نمایند.

۱. این فضاها به چه چیزی شبیه‌اند؟

۲. چگونه می‌توان یک تصادم قریب‌الوقع را برطرف کرد؟

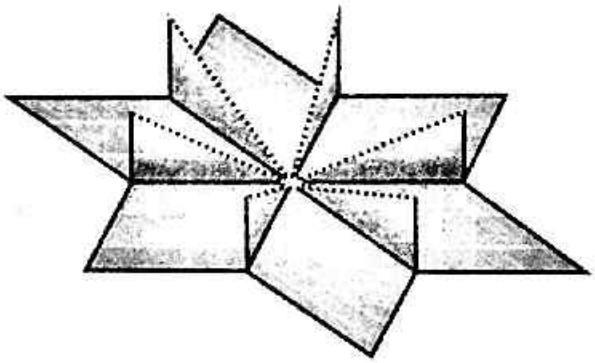
اولین تفاوت بین این مسأله و مسألهٔ $C^N(\mathbb{R}^2)$ این است که $C^N(\Gamma)$ خمینه نیست، یعنی نمی‌توان انتظار داشت که هر نقطه دارای یک همسایگی باشد که با یک فضای اقلیدسی همسانریخت باشد. در واقع اگر گرافهای بدیهی را که با پاره‌خط یا دایره همسانریخت هستند نادیده بگیریم، آنگاه گراف موضعاً اقلیدسی نیست و حاصلضربهای آن نیز چنین نیستند. تفاوت دوم این است که تصادم در درون هر یال دیگر به‌طور موضعی قابل اجتناب نیست. فرض کنید پهنای راهروهای بین قفسه‌های یک فروشگاه مواد غذایی فقط به اندازهٔ پهنای یک چرخ خرید است، و در نتیجه عبور فرد دیگر از آن غیرممکن است. در یک چنین فروشگاه پر از خریداری (که مشتریانش از چرخهای خرید استفاده می‌کنند)، مسألهٔ کنترل هماهنگ دشوار است. چگونه چرخها می‌توانند از تصادم در درون یک راهرو پرهیز کنند؟ روشن است که لااقل یکی از افراد درگیر باید تغییری در مقیاس بزرگ در مسیر حرکت بدهد و به انتهای راهرو برود. پرهیز از تصادم در گراف کاری غیرموضعی است.

در ادامهٔ این مقاله، دربارهٔ ویژگیهای توپولوژیک این فضاهای جالب بحث می‌کنیم. برای ملاحظهٔ کاربردهای عمیق‌تر فضاهای پیکربندی در مسائل برنامه‌ریزی حرکت، مرجع[۱۲] و مراجع ذکر شده در آن را ببینید.

۴. مثالهایی شامل دو روبات. چون گراف شیئی یک‌بعدی است، فضای پیکربندی $C^N(\Gamma)$، Nبعدی است. بنابراین فضاهای پیکربندی دو روبات، اشیایی دوبعدی هستند، که باید بتوان آنها را در ذهن مجسم کرد (حداقل در حالتهای ساده). در زیر سه مثال می‌آوریم.

مثال ۱. $C^2(\mathbb{T})$

فرض کنیم $\mathbb{T}$ نشان‌دهندهٔ گرافی باشد که سه یال دارد و یالهایش در یک رأس مرکزی به یکدیگر متصل شده‌اند. تعیین ساختار حجره‌ای $C^2(\mathbb{T})$ ساده است. گراف حاصلضرب $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ متشکل از ۹ مربع یا حجرهٔ دوبعدی است که به یکدیگر چسبانده شده‌اند (حجرهٔ ۲بعدی را ۲ـحجره می‌نامیم). شش حجره از این حجره‌ها با پیکربندیهایی متناظرند که در آنها دو روبات روی یالهای مجزای $\mathbb{T}$ قرار دارند. چون سه یال در $\mathbb{T}$ قرار دارند، پیکربندیهای باقیمانده، که در آن هر دو روبات روی یک یال هستند، سه حجرهٔ مربعی را به‌دست می‌دهند، که هر یک از آنها به‌وسیلهٔ قطر Δ به‌یک زوج از حجره‌های مثلثی تقسیم می‌شود. بنابراین تعداد ۲ـحجره‌های مثلثیِ متناظر با پیکربندیهایی که در آنها هر دو روبات روی یک یال ولی در مکانهای متفاوت هستند، شش تاست. با در نظر گرفتن ویژگیهای هر یک از این ۲ـحجره‌ها، می‌توان شناساییهای لازم را برای رسیدن به فضای داده‌شده در شکل ۲ انجام داد. همچنین، می‌توان از استدلالی نسبتاً قوی‌تر که در مرجع[۹] آمده است، استفاده کرد.

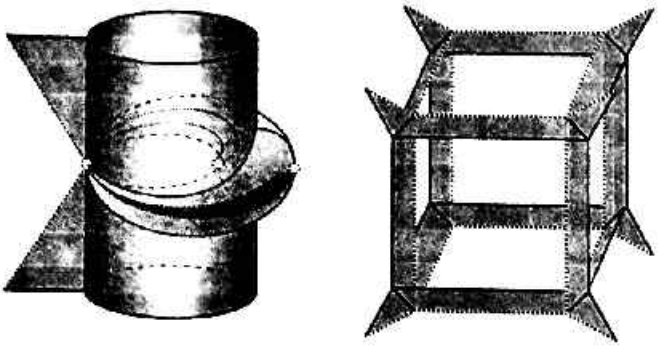


شکل ۲ فضای پیکربندی $C^2(\mathbb{T})$ که در $\mathbb{R}^3$ نشانده شده است. خطوط نقطه‌چین حاکی از یالهایی است که روی قطر Δ قرار می‌گیرند. توجه کنید که رأس مرکزی حذف می‌شود.

تمرین. دو سکه را روی یک قطعه کاغذ، که یک گراف بزرگ به شکل $\mathbb{T}$ روی آن کشیده شده است، قرار دهید به‌طوری که هر دو سکه روی یک یال گراف قرار گیرند. با استفاده از دو انگشت سکه‌ها را چنان حرکت دهید که بدون برخورد با هم جایشان عوض شود. مسیر این حرکت را روی شکل ۲ مشخص کنید.

مثال ۲. $C^2(\Theta)$

فرض کنیم Θ نشان‌دهندهٔ گرافی با سه یال باشد که از گراف $\mathbb{T}$ با چسباندن دو رأس مرزی به یکدیگر به‌دست آمده است. یک روش ساختن $C^2(\Theta)$ این است که فضای $C^2(\mathbb{T})$ را برگزینیم و از آن پیکربندیهایی را برداریم که در آنها هر دو روبات روی رأسهایی قرار دارند که باید به هم چسبانده شوند. سپس آن بخشهایی از مرز $C^2(\mathbb{T})$ را مشخص کنیم که در رأسهایی از آنها که در Θ باید به یکدیگر چسبانده شوند، یک روبات قرار دارد، و این بخشهای $C^2(\mathbb{T})$ را به یکدیگر بچسبانیم. حاصل اگر چه فضای پیکربندی خیلی ساده‌ای است تجسم آن کمی مشکل است؛ ما این فضا را به‌صورتی که در $\mathbb{R}^3$ نشانده شده، در شکل ۳ رسم کرده‌ایم [چپ]. هر یک از سه «سوراخ» متناظر با تصادم روباتها در یکی از این سه رأس است. شش یال نقطه‌چین تصاویر پاره‌خطهای قطری شکل ۲ هستند.



شکل ۳ فضاهای پیکربندی $C^2(\Theta)$ [چپ] و $C^2(\times)$ [راست]. خطوط نقطه‌چین نشان‌دهندهٔ نقاطی از قطر Δ است که بر مرز C^2 قرار دارند.

مثال ۳. $C^2(\times)$

افزایش تعداد یالهای متصل به رأس مرکزی فضای پیکربندی را پیچیده‌تر می‌کند. گراف $\times$ را، که درختی شعاعی است با چهار یال که از یک رأس خارج می‌شوند، در نظر بگیرید. تجسم $C^2(\times)$ کمی مشکل‌تر است و قدری کار لازم است تا این تجسم حاصل آید. به‌منظور برانگیختن حس کنجکاوی خواننده، این فضای پیکربندی را در شکل ۳ آورده‌ایم [سمت راست].

۵. ساده‌سازی با استفاده از گسسته‌سازی. برای مجسم کردن فضاهای پیکربندی پیچیده‌تر گرافها، کمی ساده‌سازی برای ساده‌تر کردن شکل فضا ضروری است. ما از دو روش اصلی استفاده می‌کنیم: روش اول روشی است که در آن حجره‌های «ناایمن» فضا را، که نزدیک قطر Δ قرار دارند، برمی‌داریم. روش دوم روش «درون‌بری دگردیسی»[1] یعنی خرد کردن اساسی‌تر فضا و تبدیل آن به «کالبد»ی با بُعد پایین‌تر است که در بخش ۶ دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد.

هر گراف Γ به یک ساختار حجره‌ای مجهز است: ۰ـحجره‌ها (یا رأسها) و ۱ـحجره‌ها (یا یالها). حاصلضرب Nـگانهٔ Γ در خودش از یک ساختار حجره‌ای برخوردار می‌شود، به این‌صورت که هر حجره حاصلضرب N حجرهٔ Γ است (که این حجره‌ها ممکن است متمایز نباشند). اما همانند مثال ۱، فضای پیکربندی یک ساختار حجره‌ای کاملاً طبیعی ندارد. زیرا قطر Δ تمام حجره‌هایی از حجره‌های حاصلضرب را که عواملی مکرر دارند می‌شکافد. ولی توجه داشته باشید که در بعضی از مثالهای قبل، این پاره حجره‌ها در حالت تعلیقی قرار دارند که ضروری و اساسی نیست و می‌توان آنها را در کالبد اساسی‌تری از فضای پیکربندی خواباند.

این کالبد را می‌توان به‌صورت زیر مشخص کرد[۱]. فضای پیکربندی گسسته را، که با $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت $(\Gamma \times \cdots \times \Gamma) - \tilde{\Delta}$ تعریف می‌کنیم در نظر بگیرید. در اینجا $\tilde{\Delta}$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام حجره‌هایی از حجره‌های حاصلضرب $\Gamma \times \cdots \times \Gamma$ است که بستار آنها قطر Δ را قطع می‌کند. به‌عبارت دیگر می‌توان گفت $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ مجموعهٔ پیکربندیهایی است که در آن به‌ازای هر جفت روبات مفروضی روی Γ، هر مسیری از Γ که آنها را به یکدیگر وصل کند، شامل لااقل یک یال کامل

1. deformation retraction

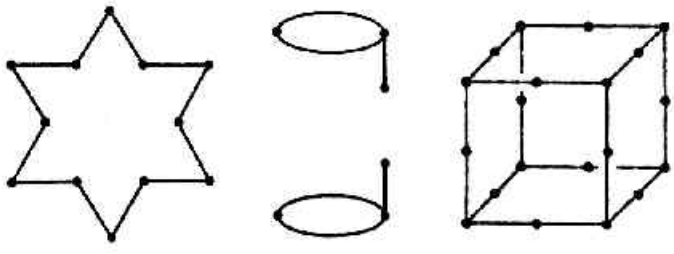
باشد. بنابراین به جای اینکه روباتها را محدود کنیم که به اندازهٔ حداقل ε از یکدیگر فاصله داشته باشند (یعنی یک ε-همسایگی Δ را بردارم)، می‌توانیم روباتها را روی Γ به این‌صورت محدود کنیم که «حداقل به اندازهٔ یک یال کامل از یکدیگر فاصله داشته باشند». فضای حاصل نوعی فضای پیکربندی طبیعی در حوزهٔ قدم زدن تصادفی روی گرافهاست [۲]. توجه داشته باشید که $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ زیرمجتمع $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ است (زیرا «پاره حجره»هایی را که از برش در طول قطر حاصل می‌شوند دربر ندارد) و در واقع بزرگ‌ترین زیرمجتمعی از $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ است که Δ را قطع نمی‌کند.

با این ساختار حجره‌ای طبیعی می‌توان رأسهای $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ (یا ۰-حجره‌ها) را پیکربندیهایی «گسسته» یا آرایشهایی از سکه‌های برچسب‌گذاری‌شده در رأسهای گراف تلقی کرد. یالهای $\mathcal{D}^N(\Gamma)$، یا ۱-حجره‌ها به ما می‌گوید چه پیکربندیهای گسسته‌ای را می‌توان با حرکت دادن یک سکه در طول یک یال Γ به یکدیگر متصل کرد. هر ۲-حجره‌ای از $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ دو یال مستقل (یا «جابه‌جاشونده») را نمایش می‌دهد، به‌این معنی که می‌توان یک زوج سکه را مستقل از یکدیگر در طول یالهای مجزا حرکت داد. همچنین هر k-حجرهٔ $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ نمایش‌دهندهٔ امکان حرکت k سکه در طول k یال مجزای Γ است.

به شکل ۲ برمی‌گردیم؛ با گسسته‌سازی $\mathcal{C}^2(\Gamma)$ قسمت بزرگی از فضا حذف می‌شود. برای مثال حجره‌های دوبعدی مثلثی پیکربندیهایی را نمایش می‌دهند که در آنها هر دو روبات در درون یک یال قرار دارند. چون این دو به اندازهٔ یک یال کامل از یکدیگر فاصله ندارند، این حجره‌ها حذف می‌شوند. همین حکم برای تمامی حجره‌های دوبعدی دیگر نیز که نمایش‌دهندهٔ پیکربندیهایی هستند که در آنها روباتها در درون یالهای مجزا قرار دارند درست است. در چه پیکربندیهایی فاصلهٔ بین روباتهای روی ✕ به اندازهٔ یک یال کامل است؟

تمرین. نشان دهید با گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی مثالهای ۱ تا ۳، فضاهای شکل ۴ به‌دست می‌آید. تقریب فضاهای پیکربندی به توسط این فضاها تا چه حد دقیق است؟

می‌توان گسسته‌سازی مثال ۱ را به شیوهٔ دیگری انجام داد که هر چند نسبت به شیوهٔ پیش‌گفته چندان مستقیم نیست اما می‌توان آن را به چند مثال زیبا که بعداً عرضه می‌کنیم تعمیم داد. یادآوری می‌کنیم که فضاهای پیکربندی گسسته از ساختاری حجره‌ای برخوردارند که از Γ به آنها می‌رسد. تمام حجره‌هایی از حاصلضرب Γ^N که به‌طور کامل در $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ نیستند با گسسته‌سازی برداشته می‌شوند. به این ترتیب در مثال ۱، شمارشی ساده نشان می‌دهد که فضای $\mathcal{D}^2$() دوازده ۰-حجره (که در آنها هر دو روبات در



شکل ۴ گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی مثالهای ۱ تا ۳ (از چپ به راست).

رأسهای متمایز قرار دارند)، دوازده ۱-حجره (که در آنها یک روبات در یک رأس و روبات دیگر روی یالی است که بستار آن شامل آن رأس نیست)، و صفر تا ۲-حجره دارد (زیرا هر دو یالی یکدیگر را در رأس مرکزی قطع می‌کنند). با کمی تعمق، می‌توان دریافت که $\mathcal{D}^2$() خمینه‌ای همبند است که در آن هر ۰-حجره دقیقاً به دو ۱-حجره متصل است و تمامی ۱-حجره‌ها انتها به انتها، به‌طور دوری به یکدیگر وصل شده‌اند. بنابراین $\mathcal{D}^2$() دایره‌ای توپولوژیک است که دقیقاً با حذف تمامی حجره‌های نزدیک قطر از $\mathcal{C}^2$()، که تصویر آن در شکل ۲ آمده است، به‌دست می‌آید. عمل گسسته‌سازی زیرمجتمعی از $\mathcal{C}^2$() را به‌دست می‌دهد که به نظر می‌آید تمام توپولوژی «اساسی» فضا را دربر دارد. (به عبارت دقیق‌تر نوع هوموتوپی فضاهای $\mathcal{C}^N$() و $\mathcal{D}^N$() یکی است؛ تعریف این مفهوم را در بخش ۶ می‌توانید ببینید). اما این حکم یقیناً در مورد گسسته‌سازی $\mathcal{C}^2$()، که بر اثر آن خمینه‌ای ناهمبند حاصل می‌شود، درست نخواهد بود. در بخش ۶ معیارهایی را بیان خواهیم کرد که تحت آنها فضای حاصل از گسسته‌سازی از لحاظ توپولوژیک مطابق با اصل خواهد بود.

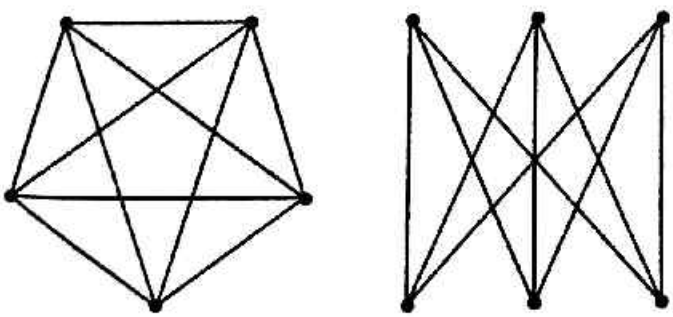
با استفاده از استدلالهای شمارشی غالباً می‌توان فضاهای پیکربندی گسسته را معین کرد، حتی وقتی که فضای پیکربندی کاملاً نامعلوم است. مثالهای شگفت‌انگیز از فضاهای جالب با گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی گرافهای ناهامنی به‌دست می‌آیند [۱].

مثال ۴. $\mathcal{D}^2(K_5)$

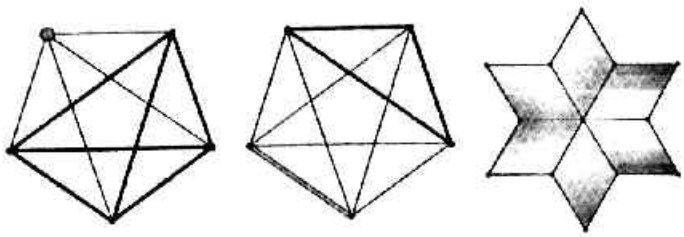
گراف کامل K_5 را، که نمودار آن در شکل ۵ [چپ] آمده است، در نظر بگیرید. فضای پیکربندی گسستهٔ دو روبات روی این گراف مجتمعی دوبعدی است. با یک استدلال شمارشی ساده ساختار حجره‌ای آن معلوم می‌شود:

۰-حجره‌ها. هر ۰-حجره با پیکربندیهایی متناظر است که در آن دو روبات در رأسهای متفاوت هستند. (چون K_5 دارای پنج رأس است، تعداد این ۰-حجره‌ها دقیقاً برابر است با $۲۰ = (۱ - ۵) \times ۵$. توجه کنید هیچ رأسی از K_5 در محلهایی که دو یال یکدیگر را در تصویر قطع می‌کنند وجود ندارد و رأسهای گراف فقط در رأسهای پنج‌ضلعی قرار دارند.)

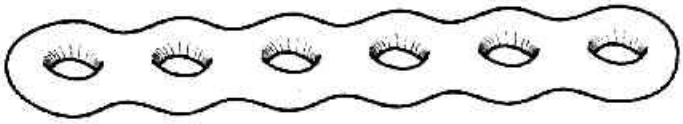
۱-حجره‌ها. هر ۱-حجره با پیکربندی‌ای متناظر است که در آن یک روبات در یک رأس و روبات دیگر روی یالی قرار دارد که نقاط انتهایی آن شامل



شکل ۵ گرافهای ناهامنی K_5 [چپ] و $K_{۳,۳}$ [راست]. این نمادگذاری مأخوذ از نظریهٔ گراف است که در آنجا این دو گراف مثالهایی اساسی از گرافهای ناهامنی هستند.



شکل ۶ [چپ] به‌ازای هر رأس از فضای K_5، شش یال جدا از آن رأس وجود دارد. همچنین [وسط] به‌ازای هر یال، سه یال کاملاً جدا از آن یال وجود دارد. در $\mathcal{D}^2(K_5)$، این حجره‌ها در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و یک مجتمع دوبعدی موضعاً اقلیدسی را می‌سازد [راست].



شکل ۷ فضای $\mathcal{D}^2(K_5)$ با رویهٔ جهت‌پذیر بسته‌ای با گونای شش همسانریخت است.

رأس مذکور نیست. با استفاده از نمودار K_5 می‌توان دریافت که تعداد این ۱ـحجره‌ها برابر است با $۶۰ = ۶ \times ۵ \times ۲$، چنانکه شکل ۶ [چپ] حاکی از آن است. حضور عامل ۲ در حاصلضرب اخیر به این دلیل است که دو روبات را روی K_5 برچسب‌گذاری کرده‌ایم.

۲ـحجره‌ها. هر ۲ـحجره با پیکربندی‌ای متناظر است که در آن دو روبات بر یالهایی قرار دارند که بستار آنها جدا از هم هستند. دو باره از روی نمودار (و شکل ۶ [وسط]) می‌توان دریافت که تعداد این ۲ـحجره‌ها برابر است با $۳۰ = ۳ \times ۱۰$.

سپس می‌توان نشان داد که هر یال، مرز یک زوج ۲ـحجره است و جهت آن در هر دو حجره یکی است، و هر رأس محل تلاقی شش یال است، همان‌طورکه در شکل ۶ [راست] نشان داده شده است. به‌علاوه فضای $\mathcal{D}^2(K_5)$ همبند است، یعنی می‌توان از هر پیکربندی به پیکربندی دیگری رفت. بنابراین $\mathcal{D}^2(K_5)$ یک رویهٔ جهت‌پذیر همبند است، و بنابه قضیهٔ رده‌بندی رویه‌ها، این فضا، در صورت یکی گرفتن فضای‌های همسانریخت، به‌طور یکتایی توسط مشخصهٔ اویلر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{D}^2(K_5)) &:= (\text{تعداد وجوه}) + (\text{تعداد یالها}) - (\text{تعداد رأسها}) \\ &= ۳۰ - ۶۰ + ۲۰ = -۱۰.\end{aligned} \qquad (۱.۵)$$

بنابراین، $\mathcal{D}^2(K_5)$ رویهٔ جهت‌پذیر بسته‌ای با گونای $g := ۱ - ۱/۲\chi = ۶$ است (شکل ۷). اینکه تمام حرکتهای ممکن دو روبات روی این گراف رویه‌ای با گونای شش به‌دست می‌دهد به هیچ‌وجه بدیهی نیست. حصول خمینه کمابیش تعجب‌آور است. اما حصول خمینه‌ای با گونای بزرگ‌تر از یک با این تصور شهودی که کل توپولوژی فضا «به‌طور موضعی» در پیکربندیهای حول هر رأس دیده می‌شود، در تضاد است.

مثال ۵. $\mathcal{D}^2(K_{۳,۳})$

تحلیلی تقریباً مشابه در مورد گراف $K_{۳,۳}$، که نمودار آن در شکل ۵ [راست] آمده است، نشان می‌دهد که $\mathcal{D}^2(K_{۳,۳})$ نیز رویهٔ جهت‌پذیر بستهٔ همبند است. ساختار حجره‌ای طبیعی $\mathcal{D}^2(K_{۳,۳})$ دقیقاً دارای ۳۶ وجه، ۷۲ یال، و ۳۰ رأس است. بنابراین

$$\chi(\mathcal{D}^2(K_5) = ۳۶ - ۷۲ + ۳۰ = -۶ \qquad (۲.۵)$$

و در نتیجه گونای این رویه چهار است.

به‌منظور شناخت فضاهای حاصل از گسسته‌سازیِ فضاهای پیکربندی با ابعاد بالاتر، می‌توان صورت مناسبی از استدلال دوگانی [۱] را به‌کار برد، یعنی به جای اینکه ببینیم چگونه روباتهای متمایز روی Γ به اطراف حرکت می‌کنند، پیکربندیهای سوراخها، یعنی ناحیه‌هایی از Γ را که هیچ روباتی روی آنها نیست، در نظر می‌گیریم. چون سوراخها برچسب‌گذاری طبیعی ندارند، می‌توان استدلال دوگانی را مستقیماً در فضای پیکربندیِ فاقد برچسب‌گذاری به‌کار برد. این استدلال دوگانی رابطه‌ای را بین $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ و $\mathcal{D}^{V-N}(\Gamma)$، که V تعداد رأسهای Γ است، نتیجه می‌دهد. با این استدلالها، ادعاهای مطروحه در مثالهای زیر به اثبات می‌رسد.

مثال ۶.

فضای $\mathcal{D}^2(K_5)$ با رویهٔ جهت‌پذیر بسته و همبندی از گونای ۱۶ همسانریخت است.

مثال ۷.

همچنین فضای $\mathcal{D}^2(K_{۳,۳})$ با رویهٔ جهت‌پذیر بسته و همبندی با گونای ۳۷ همسانریخت است.

۶. ساده‌سازی با استفاده از دگردیسی. به‌طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که فضاهای حاصل از گسسته‌سازیِ فضاهای پیکربندی تا چه حد تقریب خوبی از فضاهای پیکربندی اصلی هستند. فضاهای $\mathcal{C}^N$ و $\mathcal{D}^N$ مشابه به نظر می‌رسند، زیرا $\mathcal{D}^N$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}^N$ است که از خواباندن آن حجره‌هایی که با قطر همجوار هستند در کالبد اساسی‌تری از فضای پیکربندی به‌دست می‌آید. اما فضای حاصل از گسسته‌سازی ممکن است از لحاظ توپولوژیک مطابق با اصل نباشد؛ به‌عنوان مثال، $\mathcal{C}^2$(●—●) همبند است در حالی که $\mathcal{D}^2$(●—●) همبند نیست. در واقع، بنابر تعریف، $\mathcal{D}^N(\Gamma)$، وقتی N بزرگ‌تر از تعداد رأسهای Γ است، یعنی وقتی که گسسته‌سازی Γ خیلی «زمخت»[1] است، مجموعه‌ای تهی است.

مفهوم مناسب برای «همسانی» در اینجا، مفهوم درون‌برد دگردیسی است. می‌گوییم زیرفضای A از فضای X درون‌برد دگردیسی (قوی) X است اگر یک خانوادهٔ پیوسته از نگاشتهای پیوستهٔ $f_t : X \to X$ وجود داشته باشد، به‌طوری که f_0 نگاشت همانی روی X باشد و f_1 نگاشتی باشد که X را به

1. coarse

روی A بنگارد و به‌ازای همهٔ tها، $0 \le t \le 1$، f_t هر نقطهٔ A را ثابت نگاه دارد. تصویرهای f_t را می‌توان به‌عنوان تک‌تصویرهای یک فیلم در نظر گرفت که انقباض پیوستهٔ X و تبدیل نهایی آن به A را نشان می‌دهد. استفاده از درون‌بریهای دگردیسی راهی عالی برای ساده‌سازی فضا، بدون تغییر هیچ‌یک از خواص توپولوژیک اساسی فضاست (شاید به‌استثنای بُعد، اما برای کاربرد فعلی، کاهش بُعد فضای پیکربندی موهبت است). مهم‌ترین مفهوم اساسی در هم‌ارزی توپولوژیک، یعنی نوع هوموتوپی، را می‌توان برحسب درون‌برد دگردیسی تعریف کرد: می‌گوییم دو فضای X و Y یک نوع هوموتوپی دارند اگر و تنها اگر هر دو فضا درون‌برد دگردیسی یک فضای «بزرگ‌تر» Z باشند.

نکتهٔ اساسی این است که $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ تا زمانی‌که گسسته‌سازی گراف Γ خیلی «زمخت» نباشد درون‌برد دگردیسی $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ است. به عبارت دقیق‌تر

قضیهٔ ۱ [۱]. به‌ازای هر $N > 1$ و هر گراف Γ با حداقل N رأس، $\mathcal{D}^N(\Gamma)$ درون‌برد دگردیسی $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ است اگر و تنها اگر

۱. هر مسیر واصل بین رأسهای متفاوت با درجه‌هایی مخالف دو از حداقل $N-1$ یال بگذرد؛ و

۲. هر مسیر از یک رأس به خودش که ممکن نباشد با انقباض پیوسته در Γ به یک نقطه تبدیل شود از حداقل $N+1$ یال عبور کند.

(درجهٔ هر رأس برابر است با تعداد یالهایی که به آن رأس متصل‌اند.)

به این ترتیب نتیجه می‌شود فضاهای $\mathcal{C}^2(K_5)$ و $\mathcal{C}^2(K_{3,3})$ با درون‌بری، دگردیسی می‌یابند و به فضاهای پیکربندی گسستهٔ مثالهای ۴ و ۵ تبدیل می‌شوند. این اطلاعات بی‌اندازه مفید است زیرا به‌دست آوردن فضای پیکربندی $\mathcal{C}^2(K_5)$ به‌طور مستقیم آن‌قدر پیچیده است که تلاش برای آن بیهوده به نظر می‌آید. توجه داشته باشید که شرط دوم قضیهٔ ۱ برای گسسته‌سازی $\mathcal{C}^2(\Theta_n)$ برقرار نیست. اما با اضافه کردن یک رأس، فضای پیکربندی گسسته‌ای که از لحاظ توپولوژیک مانند فضای اصلی است به‌دست می‌آید. گسسته‌سازی در مثالهای ۶ و ۷ آن‌قدر ظریف نیست که فضای حاصل از آن با فضای اصلی هم‌ارز باشد.

در عمل، بُعد کوچک‌ترین زیرمجتمعی که درون‌برد دگردیسی فضای پیکربندی است کمیتی مهم است، زیرا ابعاد بزرگ، پیچیدگی کار محاسباتی لازم برای کنترل سیستم را بسیار افزایش می‌دهد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که بُعد ذاتی فضای پیکربندی مستقل از تعداد روباتهای روی گراف است، و فقط به خواص گراف بستگی دارد.

قضیهٔ ۲ [۷]. فرض کنیم Γ گرافی است با V رأس که درجهٔ هر رأس آن بزرگ‌تر از ۲ است. درون‌برد دگردیسی فضای $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ زیرمجتمعی از $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ با بُعد حداکثر V است.

مثال ۸. $\mathcal{C}^N(\Upsilon_k)$

درخت شعاعی k شاخهٔ Υ_k را که k یال، $k > 2$، و $k+1$ رأس دارد، و همهٔ یالهای آن به یک رأس مرکزی وصل شده‌اند در نظر بگیرید. برای مثال $\Upsilon_1 = \top$ و $\Upsilon_2 = \times$. طبق قضیهٔ ۲، درون‌برد دگردیسی $\mathcal{C}^N(\Upsilon_k)$ یقیناً زیرمجتمعی یک‌بعدی، یعنی گراف است. چون ویژگیهای اساسی توپولوژیک گراف به‌وسیلهٔ مشخصهٔ اویلر آن تعیین می‌شود، می‌توان این فضاها را فقط با شمارش رأسها و یالهای آن رده‌بندی کرد. با استفاده از استقرای دوگانه روی N و k [۷]، می‌توان یک رابطهٔ بازگشتی دومتغیره برای مشخصهٔ اویلر به‌دست آورد. با حل این معادله می‌توان ثابت کرد که $\mathcal{C}^N(\Upsilon_k)$ نوع هوموتوپی‌گرافی را دارد که به مانند دسته‌گلی با P حلقه (یا به‌اصطلاح P طوقه) متمایز است که مثل گلبرگهای گل مینا به یکدیگر وصل شده‌اند، و برای آن رابطهٔ

$$P = 1 + (Nk - 2N - k + 1)\frac{(N+k-2)!}{(k-1)!} \qquad (1.6)$$

برقرار است. برای مثال توجه داشته باشید که $\mathcal{C}^2(\Upsilon_2)$ دقیقاً از یک طوقه تشکیل شده است، چنانکه شکلهای ۲ و ۴ [چپ] نیز مؤید آن است. شکل ۴ [راست] شاهد دیگری است بر صحت این رابطه، که درستی آن را در این حالت خوانده باید نشان دهد. با برچسب‌گذاری مجدد روباتها تقارنی از $\mathcal{C}^N$ (یعنی فضایی متقارن با $\mathcal{C}^N$) به‌دست می‌آید. وجود این تقارنها علت رشد فاکتوریلی P برحسب N است. اگر فضاهای پیکربندی بدون برچسب‌گذاری در نظر گرفته شوند، آنگاه جملهٔ دوم سمت راست رابطهٔ (۱.۶) بر $N!$ تقسیم می‌شود.

شایان توجه است که مسألهٔ کنترل روباتها روی گراف برای ۲ روبات نسبتاً شهودی است اما با افزایش تعداد روباتها، مسأله بیش از پیش پیچیده می‌شود، زیرا افزایش بُعد به تنهایی سبب می‌شود تجسم بیشتر فضاهای پیکربندی تقریباً ناممکن شود. قضیهٔ ۲، که طبق آن بعد ذاتی فضای پیکربندی مستقل از تعداد روباتهای روی گراف است، قضیهٔ سودمندی است. در مورد گراف Υ_k، از قضیهٔ ۲ نتیجه گرفته می‌شود که نقشه‌ای از مسیرهای یک‌بعدی وجود دارد که نمایش کاملی از فضای پیکربندی را به‌دست می‌دهد، یعنی تمام اطلاعات توپولوژیک را دربر دارد. چون اثبات قضیهٔ ۲ اثباتی ساختنی است، می‌توان از الگوریتمهای متعارف تعیین کوتاه‌ترین مسیرها روی گراف استفاده کرد و برنامه‌ای کارا برای تعیین مسیر چند روبات روی Υ_k از طریق نقشهٔ مذکور طرح کرد.

۷. نتیجه. کاربردهای فضاهای پیکربندی در مورد روباتها به هیچ‌وجه جدید نیستند. ایده‌های مربوط به این کاربردها را دانشمندان علوم رایانه، مهندسان و ریاضیدانان از دههٔ ۱۹۶۰ به بعد مطرح کرده‌اند. در مرجع [۵] شرح مقدماتی این موضوع آمده است. به‌علاوه، انواع گوناگونی از فضاهای پیکربندی به کرات در توپولوژی و فیزیک مطرح می‌شوند، مثلاً در مطالعهٔ گروههای تافته[1] [۳] یا پیوندهای مجرد[2] ([۱۳]، [۱۵]) یا ناورداهای خمینه‌ها [۴].

در کاربردهایی که در آنها با چند روبات مستقل مواجهیم، جنبهٔ سراسری (یا غیرموضعی) مسألهٔ کنترل روباتهایی که مقید به حرکت روی یک شبکه‌اند مشکل اصلی است. این طبیعت سراسری است که ما را به سودمندی نگاه از منظر توپولوژیک رهنمون می‌شود. در واقع تعیین فضاهای پیکربندی گراقها و

1. braid 2. abstract linkages

ساده‌سازی آنها می‌تواند برای ارائهٔ طرحهای کنترلی عملی مورد استفاده قرار گیرد. برای ملاحظهٔ چند مثال ساده مراجع[۸] و [۹] را ببینید.

از طرف دیگر، قابل توجه است که ردهٔ غنی فضاهای توپولوژیکی که در این مقاله معرفی کردیم عملاً مورد توجه واقع نشده بود تا اینکه مسائلی از دیگر حوزه‌ها باعث طرح این فضاها شد. این فضاها خواص عمیق‌تر زیادی دارند:

۱. به‌ازای هر گراف Γ، فضای $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ فضای آیلنبرگ‌مک‌لین از نوع $K(\pi, 1)$ است. یعنی تصویر هر نگاشت پیوسته‌ای را که نگاشتی از یک کرهٔ kبعدی S^k، $k > 1$، به فضای $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ باشد می‌توان در $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ به‌طور پیوسته منقبض کرد تا به یک نقطه تبدیل شود. چنین فضایی راگاه «ناکُروی»[1] می‌نامند.

۲. فضای پیکربندی گسسته ساختاری طبیعی دارد که ساختار مجتمع حجره‌مکعبی است (مجتمعی مرکب از حجره‌های مکعب‌گون)، زیرا تمام حجره‌های آن حاصلضرب بازه‌ها هستند. در نتیجه می‌توان از الگوریتمهای سریعی که اخیراً در مباحث مانستگی محاسباتی پیدا شده‌اند برای تعیین گروههای مانستگی و مولدهای آنها، در مسائل عملی استفاده کرد.

۳. با استفاده از اینکه ساختار $\mathcal{D}^N(\Gamma)$، ساختار مجتمع حجره‌مکعبی است، می‌توان نشان داد $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ فضایی با خمیدگی نامثبت است، به این معنا که یک تابع متریک وجود دارد (با تعریف مناسب در نقاط غیرخمینه‌ای) که خمیدگی آن در هیچ نقطه‌ای مثبت نیست.

۴. گروه بنیادی $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ همواره بدون عنصر تاب است. به عبارت دیگر، اگر ممکن نباشد که طوقهٔ مفروضی در $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ با انقباض به یک نقطه تبدیل شود، آنگاه هیچ مضربی از آن طوقه نیز ممکن نیست با انقباض به یک نقطه تبدیل شود. این خاصیت برای فضاهای پیکربندی $\mathbb{R}^2$ نیز درست است، اما برای $\mathcal{C}^N(S^2)$، یعنی فضای حرکات روباتها روی یک کرهٔ دوبعدی، درست نیست.

۵. «مسألهٔ وارُه» درگروه بنیادی $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ همیشه حل‌پذیر است، به این معنا که الگوریتمی وجود دارد که با استفاده از آن می‌توان تعیین کرد که آیا ممکن است طوقهٔ مفروضی در $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ با انقباض به یک نقطه از $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ تبدیل شود یا نه.

۶. گروه بنیادی $\mathcal{C}^N(\Gamma)$ مجهز به ساختار جبری گراف گروهها روی گراف Γ است. این ساختار را می‌توان با «درهم آمیختن» (یا به‌طور جبری به هم چسباندن) اعضای یک خانواده از گروههای ساده‌تر، طبق الگویی که توسط Γ معین می‌شود، به‌دست آورد.

مثالهای ارائه‌شده در اینجا بسیاری از ویژگیهای نامشهود فضاهای توپولوژیک و گروههای بنیادی آنها را به روشنی نشان می‌دهند. حتی با استفاده از آنها می‌توان برای دانش‌آموزان دبیرستانی به آسانی توضیح داد که فضای پیکربندی روباتها چیست (هر دو نویسندهٔ این مقاله این کار را چندین بار با موفقیت انجام داده‌اند). با کمی اطلاعات مقدماتی، می‌توان اثبات این موضوع راکه فضای پیکربندی دو روبات روی K_5 رویه‌ای با گونای شش است، به آسانی دریافت. این‌مثال نمونهٔ بسیار خوبی است از توپولوژی نابدیهی نهفته در دل بسیاری از محیطهای جهان واقعی.

1. aspheircal

مراجع

1. A. Abrams, *Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs*. Ph. D. thesis, UC Berkeley, 2000.
2. A. Abrams, H. Landau, Z. Landau, J. Pommersheim, and E. Zaslow. Evasive random walks and the clairvoyand demon. to appear in *Random Structures & Algorithms*.
3. J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
4. R. Bott and C. Taubes, On the self-linking of knots: topology and physics, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 5247-5287.
5. J. Canny, *The Complexity of Robot Motion Planning*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
6. G. Castleberry, *The AGV Handbook*, Braun-Brumfield, Ann Arbor, MI, 1991.
7. R. Ghrist, Configuration spaces of graphs in robotics, in *Bruids, Links, and Mapping Class Groups: the Proceedings of Joan Birman's 70th Birthday*, AMS/IP Studies in Mathematics, vol. 19, 2000, pp. 31-41: ArXiv preprint math. GT/9905023.
8. R. Christ and D. Koditschek, Safe cooperative robot dynamics via dynamics on graphs, in *Proceedings of the Eighth International Symposium on Robotics Research*, Y. Nakayama, ed., Springer-Verlag, New York, 1998, pp. 81-92.
9. R. Ghrist and D. Koditschek, Safe, cooperative robot dynamics on graphs, ArXiv preprint cs.RO/0002014.
10. M. Kapovich and J. J. Millson, The symplectic geometry of polygons in Euclidean space, *J. Differential Geom.* **44** (1996) 479-513.
11. D. Koditschek and E. Rimon, Robot navigation functions on manifolds with boundary, *Adv. in Appl. Math.* **11** (1990) 412-442.
12. J. C. Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Press, Boston, 1991.
13. K. Walker, *Configuration Spaces of Linkages*, Undergraduate thesis, Princeton University, 1985.

******

• Aaron Abrams and Robert Ghrist, "Finding topology in a factory: Configuration spaces", *Amer. Math. Monthly*, (2) **109** (2002) 140-150.

* آرون آبرامز، دانشگاه جورجیا، آمریکا

abrams@math.uga.edu

** رابرت گریست، مؤسسهٔ فناوری جورجیا، آمریکا

ghrist@math.gatech.edu

ریاضیات خوب چیست؟*

ترنس تائو*

۱. جنبه‌های گوناگون کیفیت ریاضی

همهٔ ما بر این باوریم که ریاضیدانها باید تلاش کنند ریاضیات خوبی به‌وجود آورند. اما «ریاضیات خوب» به چه معنی است؟ آیا اصلاً باید برای تعریف آن اقدام کرد؟ اجازه دهید برگردیم به سؤال اولمان. به محض اینکه این سؤال مطرح می‌شود، هر کسی تشخیص می‌دهد که گونه‌های مختلفی از ریاضیات وجود دارد که می‌توان آنها را «خوب» به‌شمار آورد. برای نمونه، عنوان «ریاضیات خوب» را می‌توان بدون در نظر گرفتن هیچ اولویتی به موارد زیر اطلاق کرد:

(i) حل مسألهٔ خوب ریاضی (مثلاً پیشرفت عمده‌ای در حل یک مسألهٔ مهم ریاضی)؛

(ii) تکنیک خوب ریاضی (مثلاً استفادهٔ ماهرانه از روشهای موجود یا ابداع راهکارهای جدید)؛

(iii) نظریهٔ خوب ریاضی (مثلاً یک چارچوب مفهومی یا انتخاب دستگاهی از نمادها که مجموعه‌ای از نتایج را به‌صورت نظام‌مند یکپارچه سازد و تعمیم دهد)؛

(iv) بصیرت عمیق ریاضی (مثلاً یک ساده‌سازی مفهومی مهم یا تشخیص یک اصل، روش اکتشافی، شباهت، یا موضوع وحدت‌بخش)؛

(v) کشف خوب در ریاضیات (مثلاً کشف یک پدیده، رابطه، یا مثال ناقض جدید، چشمگیر، و غیرمنتظره)؛

(vi) کاربرد خوب ریاضیات (مثلاً کاربرد ریاضیات در فیزیک، مهندسی، علوم رایانه، آمار و غیره یا کاربرد یک شاخهٔ ریاضیات در شاخهٔ دیگر)؛

(vii) شرح و توصیف خوب ریاضیات (مثلاً بررسی مبسوط و آموزندهٔ یک مبحث ریاضی، یا بحثی مستدل و روشن همراه با زمینه‌چینی مناسب در مورد یک موضوع ریاضی)؛

(viii) تعلیم خوب ریاضیات (مثلاً سبکی در سخنرانی یا نوشتن که زمینهٔ یادگیری مؤثرتر ریاضیات را برای دیگران فراهم کند، یا مشارکت در آموزش ریاضیات)؛

(ix) بینش خوب در ریاضیات (مثلاً برنامه‌ای ثمربخش و درازمدت یا مجموعه‌ای از حدسهای پربار)؛

(x) شم و ذائقهٔ قوی در ریاضیات (مثلاً یک هدف تحقیقاتی که ذاتاً جالب است و بر مباحث و مسائل مهم ریاضیات تأثیر دارد)؛

(xi) روابط عمومی خوب (مثلاً خوب ارائه کردن یک دستاورد ریاضی به غیر ریاضیدانها، یا دستاوردی از یک شاخه به دست‌اندرکاران شاخه‌های دیگر)؛

(xii) فاریاضیات خوب (مثلاً پیشرفتهایی در مبانی، فلسفه، تاریخ، و شیوه‌های استفاده از ریاضیات)؛

(xiii) ریاضیات دقیق و مشروح (ذکر تمام جزئیات به‌طور صحیح و دقیق و کامل)؛

(xiv) ریاضیات زیبا (مثلاً اتحادهای شگفت‌انگیز رامانوجان؛ حکمهایی که آسان (و زیبا) بیان می‌شوند ولی اثباتشان آسان نیست)؛

(xv) ریاضیات شسته‌رُفته (مثلاً اثبات ناب یه مفهومی که پل اردوش در کتاب اثبات بیان کرده و رسیدن به نتیجه‌ای مشکل با حداقل تلاش)؛

(xvi) ریاضیات خلاق (مثلاً تکنیک، دیدگاه، یا نوعی از نتیجه که اساساً جدید و بدیع باشد)؛

(xvii) ریاضیات مفید (مثلاً لم یا روشی که در تحقیقات آینده بر روی موضوع مورد نظر نیز مکرراً به‌کار روند)؛

(xviii) ریاضیات قوی (مثلاً نتیجهٔ دقیقی که با مثالهای ناقض شناخته شده همسوست، یا رسیدن به نتیجه‌ای که به طرز غیرمنتظره‌ای قوی است از یک فرضیهٔ به ظاهر ضعیف)؛

(xix) ریاضیات عمیق (مثلاً رسیدن به نتیجه‌ای که آشکارا نابدیهی است مانند پی بردن به پدیده‌ای ظریف در ورای قلمرو و ابزارهای مقدماتی)؛

(xx) ریاضیات شهودی (مثلاً استدلالی که طبیعی و به آسانی قابل تصور است)؛

(xxi) ریاضیات فیصله‌بخش (مثلاً رده‌بندی همهٔ اشیا از یک نوع خاص، بیان نظر قطعی و نهایی در مورد یک موضوع ریاضی)؛

(xxii) و غیره و غیره[1].

همان‌طور که فهرست بالا نشان می‌دهد مفهوم کیفیت در ریاضیات، یک مفهوم چندبعدی و فاقد یک ترتیب کلی استاندارد و واضح است[۲].

به عقیدهٔ من علت این امر آن است که خود ریاضیات پیچیده و چندبعدی است و به شیوه‌ای انعطاف‌پذیر و پیش‌بینی‌ناپذیر رشد می‌کند. کیفیات فوق نمایانگر شیوه‌های مختلفی هستند که جامعهٔ ما از آن طرق ریاضیات را بهتر درک می‌کند و به‌کار می‌برد. به نظر نمی‌رسد اتفاق‌نظر عمومی در مورد اهمیت و ارزش این کیفیات در مقایسه با هم وجود داشته باشد. بخشی از این امر ناشی از ملاحظات تاکتیکی است: ممکن است رشتهٔ خاصی از ریاضیات در مرحله‌ای خاص از رشد خود یک رویکرد خاص را بهتر از رویکردی دیگر بپذیرد. بخشی از آن هم به ملاحظات فرهنگی برمی‌گردد: هر رشته یا مکتب خاصی از ریاضیات معمولاً ریاضیدانان همفکری را به خود جلب می‌کند که رویکردهای مشابهی به یک موضوع دارند. این تنوع همچنین نمایانگر تنوع قابلیتهای ریاضی است؛ ریاضیدانان مختلف در سبکهای ریاضی مختلفی استعداد پیشرفت دارند و برای انواع مختلفی از فعالیت ریاضی مناسب‌اند. (برای ملاحظهٔ بحثی در این مورد، رجوع کنید به[۱۲].)

به عقیدهٔ من این چندچهرگی و تنوع «ریاضیات خوب» برای کل ریاضیات مفید است، زیرا این امکان را فراهم می‌کند که رویکردهای مختلف به ریاضیات را بررسی کنیم و بتوانیم از انواع استعدادهای متفاوت در جهت هدف مشترک خود یعنی پیشبرد ریاضیات استفاده کنیم. هر چند عموماً می‌پذیرند که هر یک از صفات پیشگفته خصلت خوبی برای ریاضیات است ولی برای یک مبحث خاص، توجه به یکی دو تا از آن صفات به قیمت نادیده گرفتن بقیه ممکن است زیانبار باشد. به‌عنوان مثال وضعیتهای فرضی زیر را (که کمی هم اغراق‌آمیزند) در نظر بگیرید:

- مبحثی که دائماً بر نقش و نگار و ریزه‌کاریهای زیبای آن افزوده می‌شود یعنی نتایج به‌طور انفرادی و به خاطر خودشان تعمیم و پالایش می‌یابند اما کل موضوع بی‌هدف و بدون جهت مشخص رشد می‌کند.
- مبحثی که مملو از حدسهای حیرت‌انگیز است ولی هیچ امیدی به پیشرفت جدی در اثبات آنها نیست.
- مبحثی که در آن عمدتاً از روشهای موردی برای حل گردایه‌ای از مسائلی نامرتبط استفاده می‌شود که هیچ مضمون، رابطه، یا منظوری که آنها را زیر لوای واحدی در آورد، در کار نیست.
- مبحثی که بیش از حد خشک و نظری شده است و دائماً نتایج قبلی را تغییر شکل می‌دهد و در قالبهای صوری که مرتباً تکنیکی‌تر می‌شوند وحدت می‌بخشد بدون آنکه دستاورد جدید مهیجی به دنبال داشته باشد.
- مبحثی که نتایج کلاسیک را واژگونه می‌سازد و به اثبات همان نتایج به شیوه‌ای ساده‌تر و کوتاه‌تر می‌پردازد، اما به هیچ نوآوری اصیل یا نتیجه‌گیری تازه‌ای در ورای آنچه در نوشته‌های کلاسیک هست، راه نمی‌برد.

در هر یک از این موارد، مبحث مورد نظر ممکن است در کوتاه‌مدت فعالیت و پیشرفت زیادی داشته باشد ولی با این خطر روبه‌روست که اهمیت و مناسبت خود را در ریاضیات از دست بدهد و نتواند ریاضیدانان جوان را به سوی خود جلب کند. خوشبختانه بعید است یک مبحث ریاضی در چنین حالت ایستا و راکدی بماند زیرا به خاطر ارتباطش با سایر حوزه‌های ریاضیات (یا علوم مرتبط با آن) و مواجهه با (و احترام به) انواع گوناگون «ریاضیات خوب» دائماً مورد چالش قرار می‌گیرد و جان تازه می‌یابد. این سازوکار خودّاصلاح‌کننده کمک می‌کند که ریاضیات به‌صورت متعادل، یکنواخت، یکپارچه، زایا و پرشور باقی بماند.

حال به سؤال دیگری که در بالا مطرح شد برمی‌گردیم: آیا اصلاً لازم است «ریاضیات خوب» را تعریف کنیم یا خیر؟ در این کار با خطر غرور و نخوت مواجه هستیم و ممکن است نتوانیم نمونه‌های نامتعارف پیشرفتهای اصیل ریاضی را تشخیص دهیم چرا که آنها خارج از قلمرو تعریفهای اصلی «ریاضیات خوب» قرار دارند[۳]. از طرف دیگر، خطری هم در جبههٔ مقابل وجود دارد و آن این است که فکر کنیم همهٔ رویکردها به ریاضیات به‌طور یکسان مناسب، و در مورد هر حوزهٔ ریاضی به یک اندازه مستحق تخصیص منابع‌اند[۴]، یا همهٔ دستاوردهای ریاضی به یک اندازه مهم‌اند. این موضع‌گیری‌ها ممکن است به خاطر اینکه حاکی از آرمان‌گرایی‌اند، تحسین‌برانگیز باشند، اما حس جهت‌یابی و هدف‌یابی را در ریاضیات تضعیف می‌کنند و یا حتی ممکن است منجر به تخصیص نابهینهٔ منابع شوند[۵]. واقعیت امر را باید جایی بین همهٔ اینها جستجو کرد. برای هر زمینهٔ ریاضیات، مجموعهٔ نتایج، باورهای عام، شهود و تجربیات (و یا فقدان آنها) نشان می‌دهد چه رویکردی ثمربخش‌تر است و ارزش آن را دارد که اکثر منابع به آن تخصیص یابد، کدام‌یک حدسی و نامطمئن است و فقط اقتضا می‌کند که معدودی ریاضیدان که مستقلاً می‌اندیشند آن را بررسی کنند تا همهٔ مبانی موضوع در نظر گرفته شود. به‌عنوان مثال، در حوزه‌های جا افتاده و رشدیافته پیگیری برنامه‌های نظام‌مند و ارائهٔ نظریه‌های کلی به شیوهٔ دقیق، با پیروی محتاطانه از روشهای مطمئن و برداشتهای شهودی تثبیت شده، معقول است، در حالی‌که در زمینه‌های جدید که هنوز کاملاً تثبیت نشده‌اند، بهتر است بر ارائهٔ حدسها و حل‌وفصل آنها، آزمودن رویکردهای گوناگون و تا حدی اتکا به قیاسها و روشهای اکتشافی نادقیق تأکید شود. بدین‌ترتیب از نظر تاکتیکی، معقول این است که حداقل یک اجماع نسبی در هر مبحث ریاضی در این‌باره وجود داشته باشد که چه کیفیاتی مهم‌تر است تا بدین‌ترتیب بتوان تدابیر هر چه مؤثرتری برای پیشرفت آن مبحث در هر مرحله از تکاملش اندیشید. کمبودهای حوزه‌های مختلف با یکدیگر متفاوت است: مثلاً ممکن است حوزهٔ خاصی بسیار نیازمند حل بعضی مسائل باشد و یا در حوزهٔ دیگر نیاز به چارچوبی نظری برای نظم بخشیدن به مجموعهٔ درهم‌ریختهٔ نتایج موجود یا برنامه‌ای گسترده یا رشته‌ای از حدسها باشد که به نتایج جدیدی بینجامد. حوزه‌های دیگر ممکن است از برهانهای جدید، ساده‌تر و مفهومی‌تر برای قضایای اساسی فایدهٔ بسیار ببرند، یا ممکن است در مورد حوزه‌ای لازم باشد برای جلب نظر و فعالیت بیشتر در آن حوزه، تبلیغات صحیح و معرفی شفاف صورت گیرد. بدین‌ترتیب، تعریف «ریاضیات خوب» برای هر حوزه از ریاضیات می‌تواند و باید بستگی زیادی به وضعیت خود آن مبحث داشته باشد. چنین تعریفی باید دائماً روزآمد شود و در معرض بحث و گفتگوی افراد داخل حوزه و ناظران خارجی باشد. همان‌طور که اشاره شد، می‌توان در مورد اینکه چگونه هر حوزهٔ ریاضی باید پیشرفت کند و متحول شود تا به تعادل داخل حوزه منجر شود، به اجماع و تفاهم رسید.

با توجه به مباحث فوق به نظر می‌رسد که مسألهٔ ارزیابی کیفیت ریاضی با وجود اهمیتش، در حد نومیدکننده‌ای پیچیده است، مخصوصاً به خاطر

اینکه بسیاری از دستاوردهای خوب ریاضی از برخی ویژگیهایی که در بالا برشمردیم در حد اعلا برخوردارند ولی ویژگیهای دیگر را ندارند. بسیاری از این کیفیات ذهنی هستند و ارزیابی دقیق آنها، مگر با نگاه به گذشته، دشوار است با این حال، پدیدهٔ قابل‌توجهی در این میان به چشم می‌خورد[۶] و آن این است که ریاضیات خوب به هر یک از معانی فوق، باعث ایجاد ریاضیاتی می‌شود که به بسیاری از معانی دیگر هم خوب است و این حدس را به میان می‌آورد که شاید علی‌رغم همهٔ این حرفها، یک مفهوم عام از ریاضیات خوب وجود داشته باشد و همهٔ معیارهای خاصی که در این مقاله به آنها اشاره شد، نمایانگر راههای متفاوتی برای کشف ریاضیات جدید یا مراحل و جنبه‌های گوناگون سیر رشد یک موضوع ریاضی باشند.

۲. بررسی موردی: قضیهٔ سمردی

حال از بحث کلی به سراغ یک مورد خاص می‌رویم و پدیده‌ای را که در پاراگراف پیشین ذکر شد با بررسی تاریخچه و زمینهٔ قضیهٔ سمردی [۳۲] روشن می‌سازیم. این قضیه بیانگر این حکم زیبا و مشهور است که هر زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح با چگالی (بالایی) مثبت لزوماً شامل تصاعدهای حسابی با طول دلخواه است من در اینجا از همهٔ جزئیات فنی صرف‌نظر می‌کنم و خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۳۳] و مراجع ذکر شده در آنجا ارجاع می‌دهم.

چندین نقطهٔ شروع طبیعی برای این ماجرا وجود دارد. من با قضیهٔ رمزی [۲۳] آغاز می‌کنم: هر گراف کامل به‌قدر کافی بزرگ و رنگ‌آمیزی شده با تعداد متناهی از رنگها، شامل زیرگرافهای کامل بزرگ تکفام است. (مثلاً در میان شش فردِ مفروض، یا سه نفر از آنها یکدیگر را می‌شناسند و یا سه نفر نسبت به هم غریبه‌اند. البته با فرض اینکه «شناختن یکدیگر» رابطه‌ای خوش‌تعریف و متقارن باشد.) این حکم، هر چند اثبات آن آسان است (به هیچ چیزی بیش از یک اصل لانهٔ کبوتر مکرر نیاز ندارد) ولی حاکی از کشف پدیدهٔ جدیدی بود و نوع جدیدی از حکمهای ریاضی را پدید آورد: قضیه‌های نوع رمزی، که هر یک از آنها، به‌صورتی، بیانگر این بینش تازه به‌دست آمده در ریاضیات است که بی‌نظمی کامل غیرممکن است.

یکی از نخستین قضیه‌های نوع رمزی (که در واقع چند سالی قبل از قضیهٔ رمزی عرضه شد) قضیهٔ وان در واردن [۳۷] است به این مضمون که به‌ازای هر رنگ‌آمیزی متناهیِ مفروضِ عددهای صحیح، یکی از رده‌های رنگی باید شامل تصاعدهای حسابیِ با طول دلخواه باشد. اثبات بازگشتی وان درواردن بسیار زیبا بود ولی عیبش این بود که کرانهای کمّی نامناسبی برای ظهور اولین تصاعد حسابیِ با طول مفروض به‌دست می‌داد؛ این کرانها در واقع متضمن یک تابع آکرمن با این طول و تعداد رنگ بود. اردوش و توران [۴] این شَم قوی ریاضی را داشتند که این مسألهٔ کمّی را بیشتر تعقیب کنند[۷] و یکی از انگیزه‌های آنها هم تمایل به پیشروی در زمینهٔ اثبات این حدس بود که عددهای اول شامل تصاعدهایی به طول دلخواه‌اند. آنها سپس چند حدس قوی در پیش نهادند که یکی از آنها به قضیهٔ سمردی تبدیل شد و دیگری گزاره‌ای زیبا ولی قوی‌تر (و هنوز ثابت نشده) بود حاکی از آنکه هر مجموعه از عددهای صحیح مثبتی که عکسهای آنها مطلقاً مجموع‌پذیر نباشد شامل تصاعدهایی حسابی با طول دلخواه است.

نخستین پیشرفت در زمینهٔ این حدسها به‌دست آمدن یک رشته مثال ناقض بود که نقطهٔ اوج آن ساختمان زیبایی از یک مجموعهٔ نسبتاً تُنُک بود که برند عرضه کرد[۱] و تصاعد حسابی به طول ۳ نداشت (خصوصیت این مجموعه این است که چگالی‌اش در $\{1,\dots,N\}$ به‌ازای هر N مشخص به‌طور مجانبی بزرگ‌تر از $N^{-\varepsilon}$ است.) با ارائهٔ این ساختمان، بلند پروازانه‌ترین حدس از حدسهای اردوش-توران (مبنی بر اینکه مجموعه‌هایی که به‌طور چندجمله‌ای تُنُک هستند تصاعدهای بسیار دارند) از میدان خارج شد و در نتیجه، دستهٔ مهمی از رویکردهای مقدماتی به این مسائل (مثلاً روشهای مبتنی بر نابرابریهایی از قبیل نابرابریهای کوشی-شوارتس یا هُلدر) موضوعیت خود را از دست دادند. هر چند این مثالها مسألهٔ مورد نظر را کاملاً حل و فصل نکردند، مسلماً نشان دادند که حدسهای اردوش-توران، اگر درست باشند، لزوماً اثباتی نابدیهی (و احتمالاً جالب) خواهند داشت.

پیشرفت مهم بعدی به‌دست روت [۲۷] حاصل شد که روش دایرهٔ هاردی-لیتلوود[۸] را همراه با روشی جدید (استدلال نمو چگالی) به‌نحوی بسیار ظریف برای اثبات قضیهٔ روث به‌کار برد: هر مجموعه از عددهای صحیح با چگالی مثبت شامل بینهایت تصاعد به طول سه است. پس از آن طبیعی بود که سعی کنند روشهای روث را در مورد تصاعدهای طویل‌تر تعمیم دهند. روث و دیگران سالها کوشیدند این کار را انجام دهند ولی موفقیت کامل به‌دست نیاوردند؛ تا مدتها بعد که گاورز دستاورد خود را عرضه کرد دلیل این ناکامی کاملاً شناخته نشد. اندره سمردی بود ([۳۱]، [۳۲]) که با نبوغ خیره‌کننده‌اش به روشهای ترکیبیاتی محض بازگشت (به‌خصوص، استدلال نمو چگالی را به سطوح جدیدی از پیچیدگی فنی ارتقا داد) تا قضیهٔ روث را نخست به تصاعدهای با طول چهار[۹]، و سپس به تصاعدهای با طول دلخواه تعمیم دهد و از این طریق قضیهٔ معروفش را ثابت کند. اثبات سمردی یک شاهکار تکنیکی بود و ایده‌ها و فنون تازهٔ متعددی را مطرح کرد که مهم‌ترین آنها راه جدیدی برای بررسی گرافهای فوق‌العاده بزرگ یعنی تقریب زدن آنها با مدلهای پیچیدگی کراندار بود. این نتیجهٔ مشهور و بسیار مفید که به لم نظم سمردی موسوم است در بسیاری سطوح قابل ملاحظه است. چنانکه در بالا اشاره شد، این قضیه دیدگاهی در مورد ساختار گرافهای بزرگ به‌دست می‌دهد که اساساً تازه است (به زبان امروزی، یک قضیهٔ ساختاری و نیز یک قضیهٔ کمال در مورد چنین گرافهایی است) و روش جدیدی برای اثبات (روش نمو انرژی) به‌دست می‌دهد که بعداً در این ماجرا نقشی حیاتی ایفا کرد. نتیجهٔ مزبور همچنین کاربردهای غیرمنتظرهٔ فوق‌العاده زیادی، از نظریهٔ گرافها تا آزمودن خاصیت در مورد ترکیبیات جمعی، دارد. ماجرای کامل این لم نظم متأسفانه طولانی‌تر از آن است که در اینجا شرح داده شود.

هر چند دستاورد سمردی بی‌تردید نقطهٔ اوجی در این ماجرای خاص است، به هیچ‌وجه آخرین حرف در این زمینه نیست. اثبات سمردی برای این قضیه هر چند مقدماتی است ولی خیلی ظریف و پیچیده است و درک آن آسان نیست. این اثبات مسأله‌های اولیه‌ای را هم که انگیزهٔ اردوش و توران در کار آنها در این زمینه بود کاملاً حل و فصل نمی‌کرد زیرا در خود اثبات، قضیهٔ وان درواردن در دو مرحلهٔ اساسی به‌کار رفته و بنابراین، کران کمّی بهتری برای آن قضیه به‌دست نمی‌دهد. بعداً، فورستنبرگ این شَم ریاضی را داشت که در جستجوی اثباتی اساساً متفاوت (و بسیار فراتر از سطح مقدماتی[۱۰]) برآید که مبتنی بر شباهتی روشنگر بین نظریهٔ ترکیبیاتی اعداد و نظریهٔ ارگودیک بود و پس از چندی، آن را به‌صورت اصلی بسیار مفید صورت‌بندی کرد که به اصل تناظر فورستنبرگ معروف شد. از این اصل[۱۱] می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که قضیهٔ سمردی

معادل با قضیهٔ بازگشتی چندگانه برای دستگاههای اندازه‌نگهدار است. سپس طبیعی به نظر رسید که این قضیه (که اکنون قضیهٔ بازگشتی فورستنبرگ نامیده می‌شود) مستقیماً با روشهایی از نظریهٔ ارگودیک و به‌خصوص با بهره‌گیری از رده‌بندیها و تجزیه‌های ساختاری متعددی (مثلاً تجزیهٔ ارگودیک) که برای چنین دستگاههایی موجود است، ثابت شود. فورستنبرگ پس از چندی قضیهٔ ساختاری فورستنبرگ را ثابت کرد که هر دستگاه اندازه‌نگهداری را به‌صورت گسترشی ضعیف-آمیزنده از برجی از گسترشهای فشردهٔ یک دستگاه بدیهی توصیف می‌کرد، و بر اساس این قضیه و چند استدلال اضافی (از جمله، گونه‌ای از استدلال وان دروردن) توانست قضیهٔ بازگشتی چندگانه را ثابت کند و به این ترتیب، اثبات جدیدی از قضیهٔ سمردی به‌دست دهد. شایان ذکر است که فورستنبرگ کتابی عالی[۶] در این زمینه و مباحث وابسته نوشت که نظریهٔ اساسی مربوط را به‌طور نظام‌مند صورت‌بندی می‌کند و سهم بزرگی در رشد و پیشرفتهای بعدی در این زمینه داشته است.

فورستنبرگ و همکارانش بعداً تشخیص دادند که این روش جدیدْ بالقوه بسیار نیرومند است، و می‌توان آن را برای اثبات انواع بسیار بیشتری از قضیه‌های بازگشتی به‌کار برد که سپس (از طریق اصل تناظر) به چند قضیهٔ ترکیبیاتی بسیار غیربدیهی می‌انجامد. فورستنبرگ، کاتسنلسون و دیگران با تعقیب این ایده بسیاری از گونه‌ها و تعمیمهای قضیهٔ سمردی را یافتند و مثلاً گونه‌هایی از آن را در ابعاد بالاتر به‌دست آوردند وحتی نوعی از قضیهٔ هیلز-پوت[۱۸] در مورد چگالی را ثابت کردند (که تعمیمی بسیار نیرومند و انتزاعی از قضیهٔ وان دروردن است). حتی امروز معلوم نیست که بسیاری از نتایج حاصل از این تکنیکهای نامتناهی‌وار نظریهٔ ارگودیکْ اثبات «مقدماتی» داشته باشند و این نشان‌دهندهٔ توان این روش است. به‌علاوه، درک بسیار عمیق‌تری از رده‌بندی ساختاری دستگاههای اندازه‌نگهدار به‌دست آمد که پیامد جانبی پر ارزش این تلاشهاست. به‌خصوص، معلوم شد که برای بسیاری از رده‌های مسألهٔ بازگشتی، ویژگیهای بازگشتی مجانبی یک دستگاه دلخواه تقریباً به‌طور کامل به یک عامل خاص آن دستگاه وابسته است که عامل مشخصهٔ (مینیمال) آن دستگاه نامیده می‌شود[۱۲]. آنگاه تعیین دقیق این عامل مشخصه برای انواع مختلف بازگشت به یک موضوع اصلی مطالعه تبدیل شد زیرا تشخیص داده شد که این کار به کسب اطلاعات دقیق‌تری دربارهٔ رفتار حدی می‌انجامد (و به‌خصوص نشان می‌دهد که بعضی از عبارتهای مجانبی وابسته به بازگشت چندگانه واقعاً همگرا به یک حدند و این مسأله در استدلالهای فورستنبرگ حل‌وفصل نشده بود). مثالهای ناقضی که فورستنبرگ و وایس آوردند، و نیز نتایج کونتس و لزینی، سرانجام به این نتیجه‌گیری منتهی شد که این عاملهای مشخصه باید به‌وسیلهٔ یک نوع خیلی خاص (و جبری) دستگاه اندازه‌نگهدار، یعنی یک پوچ‌دستگاه وابسته به گروههای پوچ‌توان، قابل توصیف باشند؛ نقطهٔ اوج این نتایج، توصیفهای دقیق و موشکافانهٔ این عوامل در مقاله‌ای فوق‌العاده فنی از هوست و کرا[۲۰] (و بعداً درمقاله‌ای از زیگلر[۳۹]) بود که، علاوه بر چیزهای دیگر، مسألهٔ پیشگفته دربارهٔ همگرایی متوسطهای بازگشت چندگانهٔ مجانبی را حل‌وفصل کرد. نقش اصلی که این عوامل دارند نشان‌دهندهٔ حضور آشکار یک وضعیت دوحالتی یعنی ساختار داشتن (به‌صورتی که پوچ‌دستگاهها معرفی می‌کنند)، و تصادفی بودن (که یک نوع فنی از ویژگی «آمیختن»، آن را متجلی می‌سازد) بود، و این بینش را به‌دست داد که در واقع، همین دوحالتی‌بودن زیربنای قضیهٔ سمردی و حکمهای وابسته به آن و منشأ قدرت آن است. جنبهٔ شایان ذکر دیگر از تحلیل هوست-کرا ظهور چشمگیر متوسطهای وابسته به «مکعبها» یا «متوازی‌السطوح‌ها»ست که معلوم شده تحلیل آنها به دلایلی راحت‌تر از تحلیل متوسطهای بازگشت چندگانهٔ منسوب به تصاعدهای حسابی است.

به‌موازات این پیشرفتهای مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک، سایر ریاضیدانان درصدد فهمیدن، اثبات مجدد، و اصلاح قضیهٔ سمردی از راههای دیگر بودند. یک پیشرفت مفهومی مهم به‌دست روسا و سمردی[۲۹] حاصل شد که از لم پیشگفتهٔ نظم سمردی برای اثبات چند حکم در نظریهٔ گرافها استفاده کردند، از جمله حکمی که امروز به لم برداشتن مثلث معروف است و اجمالاً حاکی از آن است که در گرافی که شامل تعداد کمی مثلث است می‌توان با برداشتن تعداد کمی یال همان تعداد مثلث را حفظ کرد. آنها سپس ملاحظه کردند که مثال برند که در بالا ذکر شد حدهایی در مورد گرانهای کتی در این لم به‌دست می‌دهد و به‌خصوص دسته‌های متعددی از رویکردهای مقدماتی به این لم را از گود خارج می‌کند (زیرا چنین رویکردهایی نوعاً گرانهای چندجمله‌ای به‌دست می‌دهند)؛ در واقع تا به امروز همهٔ اثباتهای شناخته شدهٔ لم برداشتن از گونه‌ای از لم نظم نتیجه می‌شود. با استفاده از عکس نقیض این استنتاج، مشاهده شد که لم برداشتن مثلث قضیهٔ روث را در مورد تصاعدهای با طول سه نتیجه می‌دهد. این کشف برای نخستین بار راه را بر اثبات قضیه‌های نوع سمردی از طریق تکنیکهای نظریهٔ گرافی صرف و تقریباً با نادیده گرفتن ساختار جمعی مسأله گشود. (توجه کنید که رهیافت مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک هم این ساختار را، درکسوت کنش عملگر انتقال بر این دستگاه، حفظ می‌کند؛ همچنین، اثبات اولیهٔ سمردی فقط تا حدی مبتنی بر نظریهٔ گرافهاست زیرا از ساختار جمعی تصاعدها در بسیاری جاهای متفاوت بهره می‌گیرد.) با این حال مدتی طول کشید تا پی ببرند که روش نظریهٔ گرافی، مانند روش آنالیز فوریه‌ای قبل از آن، تا حد زیادی محدود به کشف الگوهای «با پیچیدگی کم» از قبیل مثلثها یا تصاعدهای به طول سه، بود وکشف تصاعدهایی با طول بیشتر نیاز به استفاده از نظریهٔ بسیار دشوارتر ابرگرافها داشت. به‌خصوص، این امر انگیزه‌ای شد که برنامه‌ای (با هدایت فرنکل و رودی) برای به‌دست آوردن حکمی مشابه لم نظم در مورد ابرگرافها اجرا شود، حکمی آنقدر قوی که نتایجی از قبیل قضیهٔ سمردی (و نیز تعدادی از گونه‌ها و تعمیمهای آن را به‌دست می‌دهد). این کار به طُرز غیرمنتظره‌ای ظریف و پیچیده از آب درآمد، به‌خصوص، آرایش دقیقِ سلسله‌مراتب[۱۳] پارامترها در چنین تنظیمی به‌گونه‌ای که به‌ترتیب صحیح بر یکدیگر غلبه داشته باشند. در واقع، روایتهای نهایی لم نظم، و «لمهای شمارش» همراه آن، که قضیهٔ سمردی از آنها قابل استنتاج بود، در همین اواخر پیدا شده است ([۲۲]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۱۴]، ...). همچنین مثال ناقضِ بسیار آموزنده‌ای از گاورز[۱۰] شایان ذکر است که نشان می‌دهد گرانهای کتی در لم نظم اولیه باید دست‌کم ماهیت برجی-نمایی داشته باشند و بنابراین، بار دیگر ماهیت غیربدیهی (و توان) این لم را نشان می‌دهد.

رویکرد آنالیز فوریه‌ای به قضیهٔ سمردی که از زمان تحقیقات روث پیشرفت قابل‌ملاحظه‌ای نکرده بود، سرانجام با تجدید نظری که گاورز ([۱۱]، [۱۳]) در آن کار کرد وارد مرحلهٔ جدیدی شد. رویکرد آنالیز فوریه‌ای، مانند رویکردهای دیگر به این قضیه، مبتنی است بر در نظر گرفتن دو حالت برای مجموعه‌های

اعداد صحیح به این معنی که این مجموعه‌ها، به مفهومی، یا ساختاریافته‌اند یا شبه‌تصادفی. مفهوم ذی‌ربط ساختار در این مورد ساخته و پرداختهٔ روت است ــ مجموعه‌های ساختاریافته باید یک نمو چگالی روی تصاعدهای حسابی با طول متوسط داشته باشند ــ اما مفهوم صحیح شبه‌تصادفی بودن یا «یکنواختی» کمتر واضح بود. گاورز مثالی عرضه کرد (که در واقع ارتباط نزدیکی با مثالهای پیشگفتهٔ فورستنبرگ و وایس دارد) که نشان می‌دهد مفاهیم شبه‌تصادفی بودن بر اساس آنالیز فوریه برای کنترل تصاعدهای به طول چهار و بالاتر ناکافی است، و سپس به معرفی مفهوم جدیدی از یکنواختی (بسیار مرتبط با متوسطهای مکعبی هوست و کرا و همچنین مفاهیم خاصی از نظم ابرگراف) پرداخت که کفایت می‌کرد. کار باقیمانده، برقراری صورتی کمّی و دقیق از افراز دو حالتی بود. این کار فوق‌العاده دشوار از آب درآمد (عمدتاً به خاطر کم‌فایدگی تبدیل فوریه در این حالت)، و از بسیاری لحاظ مشابه کارهای هوست-کرا و زیگلر برای مجهز کردن عوامل مشخصه به ساختار جبری پوچ‌دستگاهها بود. ولی گاورز توانست با ترکیب ابزارهای آنالیز فوریه با نتایج مهمی از ترکیبیات جمعی از قبیل قضیهٔ فریمن و قضیهٔ بالوگ-سمردی (که تاریخچهٔ آنها هم به‌خودی خود جالب است. مثلاً مراجعه کنید به [۳۵]) همراه با چند روش جدید ترکیبیاتی و احتمالاتی جدید به این هدف دست یابد که شاهکاری چشمگیر به‌شمار می‌آید، و به‌خصوص کرانهای کمّی بسیار قوی برای قضیهٔ سمردی و قضیهٔ وان دروواردن به‌دست آورد[۱۴].

خلاصه اینکه، چهار اثبات از قضیهٔ سمردی به‌دست آمده است، یکی با استفادهٔ مستقیم از ترکیبیات، یکی از طریق نظریهٔ ارگودیک، یکی به کمک نظریهٔ ابرگرافها، و یکی هم بر اساس آنالیز فوریه و ترکیبیات جمعی. با وجود این همه اثبات، باز هم احساس می‌شد که شناخت ما از این قضیه ناقص است؛ مثلاً هیچ‌یک از این رویکردها آنقدر نیرومند نبود که تصاعدهایی از عددهای اول را کشف کند و دلیل آن، عمدتاً، پراکندگی اعداد اول بود. (ولی با استفاده از روش فوریه، یا دقیق‌تر، روش دایرهٔ هاردی-لیتلوود-وینوگرادوف، می‌توان وجود بینهایت تصاعد به طول سه از اعداد اول [۳۶] را ثابت کرد، و با تلاش بسیار بیشتری می‌توان حکمی در مورد تصاعدهای به طول چهار داد [۱۹]). اما گرین [۱۵] با استفاده از ایده‌هایی از نظریهٔ تحدید در آنالیز همساز (که موضوع جذاب دیگری است که در اینجا دربارهٔ آن بحث نمی‌کنم) توانست عددهای اول را «چنانکه گویی» چگال هستند در نظر بگیرد و به‌خصوص صورت مشابهی از قضیهٔ روث را برای زیرمجموعه‌های چگال اعداد اول به‌دست آورد. به این ترتیب، راه بر نتیجه‌ای چشمگیر یعنی قضیهٔ سمردی نسبی گشوده شد که تصاعدهای حسابی را در زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌هایی بجز مجموعهٔ اعداد صحیح، مثلاً زیرمجموعه‌های چگال اعداد اول آشکار کرد. در واقع، نمونهٔ اولیه‌ای از قضیهٔ روث نسبی برای زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های تصادفی کاملاً تنک قبلاً در متون نظریهٔ گرافها [۲۱] ظاهر شده بود.

من و بن گرین در تحقیقات مشترک خود[۱۵] شروع به آزمودن استدلالهای آنالیز فوریه‌ای و ترکیبیاتی نسبی گاورز در مورد چیزهایی از قبیل زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های تصادفی یا «شبه‌تصادفی» تنک کردیم. پس از تلاش زیادی (تا حدی با الهام از صورتی از نظریهٔ ابرگرافها که برای شمارش الگوها در مجموعه‌های تنک مناسب است، و نیز تا حدی با الهام از «لم نظم حسابی» گرین [۱۶] که مفاهیم لم نظم از نظریهٔ گرافها را با مباحث جمعی وفق می‌داد) سرانجام توانستیم (در یک اثر انتشارنیافته) وجود تصاعدهای با طول چهار را در چنین مجموعه‌هایی کشف کنیم. در این مرحله به تشابه بین رویکرد لم نظم که ما از آن استفاده می‌کردیم و ساختمانهای عامل مشخصه در کار هوست-کرا پی بردیم و با جانشانی[۱۶] در آن ساختمانها (به‌خصوص اتکای هوست-کرا پی بردیم و با جانشانی[۱۶] در آن ساختمانها (به‌خصوص اتکای زیاد به متوسطهای مکعبی) توانستیم یک قضیهٔ سمردی نسبی را ثابت کنیم که رضایت‌بخش و متکی بر یک اصل انتقال خاص بود. مضمون این قضیه، به تسامح، چنین است که زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های شبه‌تصادفی تنک چنان رفتار می‌کنند که «گویی» در فضای اولیه چگال‌اند. برای کاربرد این قضیه در مورد عددهای اول، لازم بود این عددها را در مجموعه‌ای که به طرز مناسبی شبه‌تصادفی باشد (یا دقیق‌تر، یک اندازه) قرار دهیم؛ ولی از بخت خوب ما، دستاوردهای اخیر[۱۷] گُلدستن و ییلدیریم [۸] در مورد شکافهای بین عددهای اول[۱۸]، آنچه را برای این منظور لازم داشتیم تقریباً به‌طور دقیق فراهم کرده بود و به ما امکان داد بالاخره این حدس قدیمی را ثابت کنیم که سلسلهٔ اعداد اول شامل تصاعدهای حسابی با طول دلخواه است.

ماجرا به همین‌جا ختم نمی‌شود بلکه در چندین جهت ادامه دارد. از طرفی اکنون تعدادی کاربرد دیگر از اصل انتقال پیدا شده است، مانند به‌دست آوردن خوشه‌هایی از اعداد اول گاوسی یا تصاعدهای چندجمله‌ای از اعداد اول گویا. مسیر نویدبخش دیگری از تحقیق، همگرایی روشهای فوریه، ابرگراف، و نظریهٔ ارگودیک به یکدیگر است، مثلاً همگرایی در پروراندن روایتهای نامتناهی‌وار از نظریهٔ گرافها و ابرگرافها (که کاربردهایی در سایر مباحث ریاضیات از قبیل آزمودن خاصیت دارد) یا روایتهای متناهی‌وار از نظریهٔ ارگودیک. یک مسیر دیگر، ساختن پوچ‌دستگاههایی است که بازگشت را در وضعیت نظریهٔ ارگودیک کنترل کنند، و همچنین متوسطهای متناهی‌وار مختلفِ مربوط به تصاعدهای حسابی را کنترل کنند، به‌خصوص، گرین و من سخت روی محاسبهٔ همبستگیها بین عددهای اول و دنباله‌های تولیدشده به‌وسیلهٔ پوچ‌دستگاهها (با استفاده از روشهایی که سابقهٔ آنها به وینوگرادوف می‌رسد) کار می‌کنیم تا روابط مجانبی دقیق‌تری را در مورد الگوهای گوناگونی که می‌توان در اعداد اول یافت ثابت کنیم. آخرین نکته، که کم‌اهمیت‌تر از بقیه نیست، موضوع حدس اردوش-توران است که علی‌رغم همهٔ این پیشرفتها حل‌وفصل نشده است هر چند بورگن ([۲]، [۳]) به دستاوردهای بسیار نویدبخشی در این مورد نایل شده که به احتمال قوی به پیشرفتهای دیگری خواهد انجامید.

۳. نتیجه‌گیری

چنانکه از بررسیِ موردیِ فوق مشهود است، بهترین نمونه‌های ریاضیات خوب آنهایی نیستند که صرفاً در یک یا چند تا از معیارهای کیفیت ریاضی که در فهرست صدر این مقاله آمد صدق می‌کنند، بلکه آنهایی هستند که جزئی از یک ماجرای ریاضی مهم‌ترند که ادامه می‌یابد و نمونه‌های متعدد دیگری از انواع ریاضیات خوب پدید می‌آورد. در واقع، تاریخچهٔ حوزه‌های کاملی از ریاضیات را می‌توان چنین تصویر کرد که آن حوزه‌ها عمدتاً از دلِ چند تا از این ماجراهای بزرگ، تحول و تکامل آنها طی زمان، و تأثیرات آنها بر یکدیگر به‌وجود آمده‌اند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که ریاضیات خوب فقط با یک یا چند تا از کیفیات «موضعی» پیشگفته (هر چند البته مهم و شایستهٔ بحث و بررسی‌اند) محک زده نمی‌شود بلکه همچنین به‌این پرسش «کلی»‌تر وابسته

است که آن جزء مورد بحث از ریاضیات تا چه حدی با اجزای دیگر ریاضیات خوب توافق دارد، خواه از این لحاظ که در تشکیل دستاوردهای قبلی نقش داشته یا مشوق پیشرفتهای آتی است. البته، بدون استفاده از شیوهٔ نگرش به گذشته مشکل بتوان با قطعیت پیش‌بینی کرد که چه انواعی از ریاضیات چنین خاصیتی دارند. ولی به نظر می‌رسد احساس تعریف‌ناپذیری وجود داشته باشد مبنی بر اینکه فلان جزء از ریاضیات، «دلالت به چیزی دارد»، یعنی جزئی از یک معمای بزرگ‌تر است که باید در مورد آن کندوکاو بیشتری شود، و به نظر من پیگیری چنین نویدهای ملموسی دربارهٔ امکانات آتی حداقل همان‌قدر در پیشرفت ریاضی اهمیت دارد که جنبه‌های مشخص و واضحی از کیفیت ریاضی که در بالا ذکر شد. بنابراین، به عقیدهٔ من، ریاضیات خوب صرفاً فرایند حل مسأله، ساختن نظریه، کوتاه‌تر کردن، قوی‌تر کردن، واضح‌تر کردن، زیباتر کردن، یا دقیق‌تر کردن استدلالها نیست هر چند همهٔ اینها البته هدفهای تحسین‌برانگیزی هستند؛ در حین انجام دادن همهٔ این کارها (و بحث دربارهٔ اینکه کدام‌یک در هر مبحث مفروضی اولویت بیشتری دارد)، همچنین باید به هر چارچوب و زمینهٔ بزرگ‌تری که نتایج حاصل را بتوان در آن قرار داد، توجه داشت زیرا چنین‌کاری [قرار دادن نتایج در قالب وسیع‌تر] ممکن است بیشترین فایده را برای آن نتیجه، آن مبحث، و کل ریاضیات در پی داشته باشد.

یادداشتها

۱. منظور من در اینجا ارائهٔ یک فهرست جامع و کامل نبوده است. به‌خصوص، در این فهرست عمدتاً نوعی از ریاضیات مد نظر است که در مقالات تحقیقاتی ریاضی دیده می‌شود نه ریاضیاتی که در کتابهای درسی می‌آید یا مقالاتی که در رشته‌های نزدیک ریاضیات، مانند علوم طبیعی، نوشته می‌شود.

۲. به‌خصوص، باید یادآور شد که دقت ریاضی هر چند بسیار مهم است، تنها بخشی از ویژگی ریاضیات خوب است.

۳. یک مشکل مرتبط با این مسأله این است که صرف‌نظر از دقت ریاضی، که یک استثنای مهم است، بیشتر کیفیتهای فوق تا حدی ذهنی هستند و شامل نوعی عدم دقت و عدم قطعیت ذاتی. از گیل کالای (Gil Kalai) به خاطر تذکرش در این زمینه سپاسگزاریم.

۴. نمونه‌هایی از این منابع کمیاب اینها هستند. پول، دقت، توجه و تمرکز، شم و قریحه، و صفحات مجله‌های سطح بالا.

۵. یک راه‌حل دیگر مسأله استفاده از این امر است که منابع ریاضی خود چندبعدی هستند. مثلاً می‌توان جوایز جداگانه‌ای برای شرح و توصیف، برای خلاقیت، و غیره، تخصیص داد، و یا مجلات و نشریات مختلفی برای دستاوردهای مختلف داشت. در این مورد نیز از «گیل کالای» تشکر می‌کنیم.

۶. این پدیده تا حدی هم به «کارایی نامعقول ریاضیات» مربوط می‌شود که ویگنر به آن اشاره کرده است[۳۸].

۷. اردوش همچنین مسألهٔ کرانهای کتی برای قضیهٔ اصلی رمزی را پیگیری کرد و این امر، علاوه‌بر چیزهای دیگر، به پایه‌ریزی روش فوق‌العاده مهمی به نام روش احتمالاتی در ترکیبیات انجامید، ولی این خودش ماجرای کاملی است که در اینجا فرصت پرداختن به آن را نداریم.

۸. تاریخچهٔ روش دایره هم ماجرای بزرگ دیگری است که در اینجا به جزئیات آن نمی‌پردازیم. کافی است بگوییم که این روش، به زبان امروزی، بخشی از یک دیدگاه متعارف است حاکی از اینکه آنالیز فوریه ابزار مهمی برای پرداختن به مسائلی در ترکیبیات جمعی است.

۹. مدت کوتاهی بعد، روث[۲۸] توانست با ترکیب بعضی از ایده‌های سمردی با روش تحلیلی خودش، برهان آمیخته‌ای برای قضیهٔ سمردی در مورد تصاعدهای با طول چهار به‌دست آورد.

۱۰. برای نمونه، بعضی از گونه‌های استدلال فورستنبرگ وابستگی زیادی به اصل موضوع انتخاب دارد هر چند این استدلال را می‌توان به شکلی عرضه کرد که فارغ از این اصل موضوع باشد.

۱۱. همچنین اصل تناظر مشابهی وجود دارد که قضیهٔ وان دروردن را با یک قضیهٔ بازگشت چندگانه برای دستگاههای دینامیکی توپولوژیک یگانه می‌سازد. این تناظر به موضوع جالب دینامیک توپولوژیک می‌انجامد که متأسفانه امکان بحث آن در اینجا نیست.

۱۲. یکی از نمونه‌های اولیهٔ آن، قضیهٔ ارگودیک میانگین فون نویمان است که در آن عامل توابع انتقال‌ـناوردا رفتار حدی متوسطهای سادهٔ انتقالها را کنترل می‌کند.

۱۳. این سلسله‌مراتب با برجهای گسترشهایی که فورستنبرگ در تلاش مشابه برای «منظم‌سازی» یک دستگاه اندازه‌نگهدار با آنها روبه‌رو شد مرتبط به نظر می‌رسد هر چند این ارتباط تاکنون کاملاً شناخته نشده است.

۱۴. همچنین اثبات بسیار خلاقانهٔ شلاه از قضیهٔ وان دروردن[۳۰] شایان ذکر است که رکورد قبلی بهترین ثابتها را برای این قضیه حفظ کرد؛ ایده‌های موجود در اثبات شلاه هنوز به‌طرز موفقیت‌آمیزی در بقیهٔ موضوع جا نگرفته‌اند ولی من انتظار دارم که این کار در آینده عملی شود.

۱۵. ضمناً من در ابتدا به خاطر ارتباط این مسائل با یک ماجرای ریاضی مهم دیگر یعنی حدس کاکیا مجذوب این مسأله‌ها شدم که در اینجا امکانی برای بحث دربارهٔ آن ندارم. ولی این حدس به‌نحو شگفت‌انگیزی با نظریهٔ تحدید که قبلاً ذکر شد ارتباط دارد.

۱۶. این کار به دلایلی پر دردسر بود و بیشتر از همه به این دلیل که ساختمانهای مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک ماهیتاً نامتناهی‌وار بودند در حالی‌که وقتی با اعداد اول سروکار داریم لازم است در یک چارچوب متناهی کار کنیم. خوشبختانه، من قبلاً سعی در متناهی‌سازی رویکرد ارگودیک به قضیهٔ سمردی کرده بودم[۳۴]؛ هر چند آن کار در آن زمان ناقص بود، معلوم شد مایهٔ کافی دارد تا در مورد اعداد اول به‌کار رود.

۱۷. در زمانی که ما مقالهٔ خود را می‌نوشتیم، ساختمانی را که به‌کار می‌بردیم از یک مقالهٔ گولدستن و پیلدیم گرفته بودیم. این مقاله به خاطر خطایی نامربوط به‌این موضوع پس گرفته شده بود و بالاخره با بهره‌گیری از ایده‌های جدید هوشمندانه‌ای از پینتس[۹]، مقاله تصحیح شد. این موضوع مؤید نکته‌ای است که قبلاً خاطر نشان شد و آن اینکه یک دستاورد ریاضی لازم نیست از لحاظ همهٔ جزئیات دقیق باشد تا برای کارهای (دقیق) آتی ارزشمند باشد.

۱۸. موضوع شکافهای بین اعداد اول هم موضوع جالبی است که باز در اینجا جایی برای پرداختن به آن نداریم.

مراجع

1. F. A. Behrend, *On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression*, Proc. Nat. Acad. Sci. **32** (1946), 331-332.

2. J. Bourgain, *On triples in arithmetic progression*, Geom. Func. Anal. **9** (1999), 968-984.

3. J. Bourgain, *Roth's theorem on arithmetic progressions revisted*, preprint.

4. P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 261-264.

5. H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204-256.

6. H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton NJ 1981.

7. H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 527-552.

8. D. Goldston, C. Yildirim, *Small gaps between primes I*, preprint.

9. D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim, *Small gaps between primes II*, preprint.

10. T. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma*, Geom. Func. Anal. **7** (1997), 322-337.

11. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four*, Geom. Func. Anal. **8** (1998), 529-551.

12. T. Gowers, *The two cultures of mathematics*, in: Mathematics: Frontiers and Perspectives, International Mathematical Union. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, Editors. American Mathematical Society, 2000.

13. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Func. Anal. **11** (2001), 465-588.

14. T. Gowers, *Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs*, Combin. Probab. Comput. **15** (2006), no. 1-2, 143-184.

15. B. J. Green, *Roth's theorem in the primes*, Math. **161** (2005), 1609-1636.

16. B. J. Green, *A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups*, Geom. Func. Anal. **15** (2005), no. 2, 340-376.

17. B. J. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, to appear, Ann. Math.

18. A. W. Hales, R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 222-229.

19. D. R. Heath-Brown, *Three primes and an almost prime in arithmetic progression*, J. London Math. Soc. (2) **23** (1981), 396-414.

20. B. Host, B. Kra, *Non-conventional ergodic averages and nilmanifolds*, Annals of Math. **161** (2005), 397-488.

21. Y. Kohayakawa, T. Luczak, V. Rödl, *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arith. **75** (1996), no. 2, 133-163.

22. B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, *The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs*, preprint.

23. F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264-285.

24. V. Rödl, M. Schacht, *Regular partitions of hypergraphs*, preprint.

25. V. Rödl, J. Skokan, *Regularity lemma for k-uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms, **25** (2004), no. 1, 1-42.

26. V. Rödl, J. Skokan, *Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms, **28** (2006), no. 2, 180-194.

27. K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 245-253.

28. K. F. Roth, *Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions*, IV. Period. Math. Hungar. **2** (1972), 301-326.

29. I. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **18** (1978), 939-945.

30. S. Shelah, *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 683-697.

31. E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969), 89-104.

32. E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 299-345.

33. T. Tao, *The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes*, to appear, ICM 2006 proceedings.

34. T. Tao, *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem*, preprint.

35. T. Tao and V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, 2006.

36. J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. **116** (1939), 1-50.

37. B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212- 216.

38. E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960).

* * * * * *

• Terence Tao, "What is good mathematics?", arXiv: math. HO/ 0702396v1

اصل این مقاله قرار است در بولتن انجمن ریاضی آمریکا (AMS) به چاپ برسد.

• ترنس تائو، دانشگاه کالیفرنیا در لوس‌آنجلس، آمریکا

ترجمهٔ فائزه محبی، سیامک کاظمی

ریاضیات نظریهٔ ریسمان*

روبرت دایگرَف*
ترجمهٔ ویدا میلانی

۱. مقدمه

نظریهٔ ریسمان [۱] طی سالها توانسته است شاخه‌های مختلفی از ریاضیات را غنی‌تر سازد. موضوعاتی از قبیل هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی، نظریهٔ نمایش، آنالیز نامتناهی‌بعد و بسیاری موضوعات دیگر تحت تأثیر مفاهیم جدیدی همچون تقارن آینه‌ای ([۲] و [۳])، کوهومولوژی کوانتومی ([۴] و [۵]) و نظریهٔ میدان همدیس [۶] رونق و تحرک یافته‌اند. در واقع می‌توان گفت که صرف‌نظر از نقش نهایی این نظریه در فیزیک بنیادی، تأثیر نظریهٔ ریسمان در ریاضیات اثر پایدار و پرارزش آن در علوم خواهد بود. به نظر می‌رسد که نظریهٔ ریسمان پیچیده‌ترین و غنی‌ترین مبحث ریاضی است که تاکنون در فیزیک ظاهر شده است و ارتباط الهام‌بخشی که بین ریاضی و فیزیک پدید آورده است در حال تأثیرگذاریِ فزاینده در حوزه‌های وسیع و وسیع‌تری از ریاضیات است.

۱.۱ فیزیک و ریاضیات

همیاری فیزیک و ریاضیات قطعاً پدیدهٔ نوی نیست. ریاضیات سوابقی طولانی در تأثیرپذیری از علم فیزیک دارد که به علم نجوم، معماری، و اندازه‌گیری زمین در عهد بابلیان و مصریان باستان برمی‌گردد و در قرنهای ۱۶ و ۱۷ میلادی با پیدایش آنچه امروزه مکانیک کلاسیک نامیده می‌شود به اوج خود رسید. یکی از بانیان برجستهٔ این همکاری، گالیله، تصویر مشهور «کتاب طبیعت» را به ما ارزانی داشته است، که در انتظار رمزگشایی توسط دانشمندان است:

> فلسفه در این کتاب بزرگ، جهان هستی، که دائماً در برابر چشمان ماست، نوشته شده است. اما تا وقتی که زبان این کتاب و علائمی را که با آنها نوشته شده است نیاموزیم قادر به درک آن نخواهیم بود. این کتاب به زبان ریاضی نوشته شده است و علائم آن مثلثها، دایره‌ها و اشکال هندسی دیگر هستند.

این احترام عمیق به ریاضیات بعد از قرن هفدهم هم از میان نرفت. در اوایل قرن بیستم با پیدایش نظریه‌های عظیم نسبیت عام و مکانیک کوانتومی دوباره شاهد وحدت فکری خارق‌العاده بین ریاضیات و فیزیک بوده‌ایم. این امر در تمام مراکز جهان ریاضیات کاملاً مشهود بوده و ریاضیدانان در آن شرکت فعالانه داشته‌اند. به‌خصوص در گوتینگن، مکانی که هیلبرت، مینکوفسکی، وایل، فون نویمان و بسیاری دیگر از ریاضیدانان خدمات مهمی به فیزیک کرده‌اند، وضع به همین منوال بوده است.

فیزیک نظری همواره مجذوب زیبایی معادلاتش بوده است. در اینجا به بیان قولی از فاینمن، که مسلماً اشتهاری به داشتن تبحر در ریاضیات مجرد ندارد، می‌پردازیم:

> برای آنان که ریاضیات را نمی‌شناسند مشکل است که زیبایی را، عمیق‌ترین زیبایی طبیعت را، واقعاً درک کنند.... اگر بخواهید طبیعت را بهتر بشناسید و آن را تحسین کنید، لازم است زبانی را که با آن سخن می‌گوید درک کنید.

ولی پس از آن فاینمن همچنین اظهار داشت: «اگر امروز کل ریاضیات ناپدید شود، فیزیک دقیقاً یک هفته به عقبرا می‌رود.» (پاسخ یک ریاضیدان به این گفته چنین بود: «این همان یک هفته‌ای است که خداوند جهان را خلق کرد.»)

اما علی‌رغم احساسات گرم فاینمن، در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ مسیرهای فیزیک بنیادی و ریاضیات شروع به دور شدن از یکدیگر کرد. در تقلا برای تبیین ذرات زیراتمی، فیزیکدانان امید خود را به اینکه ساختار

ریاضی زیبایی برای آن بیابند از دست می‌دادند. از طرف دیگر، ریاضیدانان در این سالها خیلی درونگرا بودند. به دلیل اینکه این دو شاخه پشت به پشت قرار گرفته بودند، دایسن جملات مشهور زیر را در سخنرانی گیبس خود در ۱۹۷۲ بیان داشت:

> من از این واقعیت آگاهم که وحدت بین ریاضی و فیزیک، که در قرون گذشته فوق‌العاده مفید بوده است، اخیراً به جدایی انجامیده است.

اما این اظهارنظر ناپخته بوده است، زیرا درست در همان زمان مدل استاندارد داشت متولد می‌شد، و به این ترتیب هندسه در هیأت میدان پیمانه‌ای غیرآبلی، اسپینورها و توپولوژی به خط مقدم برگشت. نکتهٔ شایان توجه این است که تمام عناصر مدل استاندارد، به‌طور کاملاً طبیعی، تعبیری ریاضی برحسب هموستار[1]ها، کلافهای برداری و جبرهای کلیفورد دارند. طولی نکشید که ریاضیدانان و فیزیکدانان شروع به فراهم کردن این مجموعه از تعابیر کردند و به‌واسطهٔ کارهای آتیا، سینگر، توفت[2]، پولیاکوف و بسیاری افراد دیگر، دوران جدیدی از تأثیرات متقابل مفید میان ریاضی و فیزیک آغاز شد.

۲.۱ ریسمانها و ریاضیات

به نظر من منصفانه است که بگوییم پیوند مجدد ریاضی و فیزیک با ظهور نظریهٔ ریسمان به‌عنوان نیروی محرکهٔ مسلط در فیزیک ذرات بنیادی، بیش از پیش تقویت شده است. ابداع و کاربرد مفاهیم جدید ریاضی در «دورهٔ اولیهٔ» نظریهٔ ریسمان هم سابقه داشته و از جمله منجر به نمایشهای کاتس مودی[3] و جبرهای ویرازورو[4]، عملگرهای رأس و ابرتقارن شده است. ولی از زمان شروع کار مهم گرین و شوارتس در ۱۹۸۴ در زمینهٔ حذف بی‌هنجاری، این تأثیرات متقابل روبه فزونی نهاد. به‌ویژه با کشف خمینه‌های کالابی-یائو به‌عنوان [حاصل] فشرده‌سازی ریسمانهای مختلف و چشم‌اندازهای نویدبخش پدیده‌شناختی که بر اثر کارهای اولیهٔ ویتن هویدا شد، بسیاری از روشهای هندسهٔ جبری وارد میدان شد.

بیشتر این پیشرفتها بر پایهٔ صورتبندی اختلالی نظریهٔ ریسمان، خواه در صورتبندی لاگرانژی‌اش برحسب نگاشتهایی از رویه‌های ریمانی به توی خمینه‌ها و یا برحسب کوانتش فضاهای حلقه[5] بوده است. ولی این رویکرد اختلالی تنها یک توصیف تقریبی است از آنچه به‌ازای مقادیر کوچک پارامتر کوانتش رخ می‌دهد.

اخیراً پیشرفت زیادی در توصیف بنیادی‌تری از نظریهٔ ریسمان که گاه نظریهٔ M نامیده می‌شود، به‌دست آمده است. چنین می‌نماید که این نظریه، سه نظریهٔ بزرگ فیزیک نظری قرن بیستم و شاخه‌های ریاضی مرتبط با آن را با هم متحد می‌کند:

- نسبیت عام، نظریه‌ای که طبق آن گرانش را می‌توان با هندسهٔ ریمانی فضا-زمان توصیف کرد. شاخه‌های ریاضی مربوط به آن عبارت‌اند از توپولوژی، هندسهٔ دیفرانسیل، هندسهٔ جبری و آنالیز سراسری.
- نظریهٔ پیمانه‌ای، که توصیف‌کنندهٔ نیروهای بین ذرات بنیادی با به‌کار بردن هموستارهای روی کلافهای برداری است. این موضوع در ریاضیات با نظریهٔ K، فضایای شاخص [اندیس] و به‌طور کلی با جبرهای ناجابه‌جایی، سروکار دارد.
- ریسمانها یا به‌طور کلی اشیای گسترده (شامه[1]ها) به‌عنوان تعمیم طبیعی ذرات تک‌نقطه‌ای. این از لحاظ ریاضی به این معنی است که فضاها عمدتاً از طریق فضاهای حلقهٔ کوانتیده‌شان بررسی می‌شوند. این موضوع به‌طور طبیعی با آنالیز نامتناهی‌بعد و نظریهٔ نمایش ارتباط دارد.

در حال حاضر به نظر می‌رسد که این سه نظریهٔ مستقل خیلی به یکدیگر مربوط‌اند و شاید در اساس با هم معادل باشند. فیزیک تا حدی سعی می‌کند فرهنگی از اصطلاحات و تعابیر بین هندسه، نظریهٔ پیمانه‌ای و ریسمانها بنا کند. از دیدگاه ریاضی، اینکه چنین شاخه‌های گوناگونی این‌قدر به‌هم مربوط‌اند بسیار جالب است. این موضوع انسان را به فکر می‌اندازد که ساختار فراگیری که آنها را در بردارد چیست.

باید گفت که در تمام این پیشرفتها دو عنصر دیگر هم وجود دارند که فوق‌العاده مهم‌اند. اولین آنها مکانیک کوانتومی است، یعنی شرح واقعیت فیزیکی بر مبنای جبر عملگرهای روی فضای هیلبرت. در اکثر تلاشها برای درک نظریهٔ ریسمان، مکانیک کوانتومی مبنای کار بوده است و تغییر این وضع بعید به نظر می‌رسد.

عنصر دیگر ابرتقارن است—وحدت ماده و نیروها. به بیان ریاضی، ابرتقارن ارتباط تنگاتنگی با مجتمعهای دُرام[2] و توپولوژی جبری دارد. از لحاظی، بیشتر پیوندهای شگفت‌انگیز در نظریهٔ ریسمان تنها در صورت حضور ابرتقارن امکان‌پذیر است. از آنجا که اساساً با یک مجتمع سروکار داریم، برای ریاضیدانان عجیب نیست که شاخصهای مختلف توپولوژیکی وجود دارند که تحت اختلال، پایدار می‌مانند و می‌توان آنها را در حد مناسبی به‌طور دقیق محاسبه کرد. در واقع وجود چنین کمیتهای توپولوژیک، که نسبت به تغییر کل نظریه حساس نیستند، پیشگوییهای ریاضی دقیق را امکان‌پذیر می‌سازد، هر چند تا کامل شدن نظریهٔ نهایی راه طولانی در پیش است.

۳.۱ ناورداهای کوانتومی

ریاضیات به مطالعهٔ الگوها و ساختارهای مجرد می‌پردازد و یک دیدگاه سلسله‌مراتبی دارد، یعنی اشیا در ابتدا در رسته‌های وسیعی قرار می‌گیرند و سپس ظریف و ظریف‌تر می‌شوند و تمایز بیشتری می‌یابند. مثلاً در توپولوژی، فضاها به‌طور خیلی کلی مطالعه می‌شوند، در حالی‌که در هندسه، شکل واقعی فضاست که اهمیت دارد. رویه‌های (بسته و جهت‌دار) دوبعدی از نظر توپولوژی به‌طور کامل بر اساس گونا[3] یا تعداد دستواره[4]هایشان، $g = 0, 1, 2, \ldots$، طبقه‌بندی می‌شوند. لذا با یک ناوردای توپولوژیکی g سروکار داریم که به هر رویه یک عدد به‌صورت

$$g : \{\text{رویه‌ها}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

نسبت می‌دهد.

در حالت کلی، چنین ناورداهایی به‌سختی به‌دست می‌آیند، و فیزیک کوانتومی به‌ویژه نظریهٔ ذرات و ریسمان، منبع الهام مفیدی برای به‌دست آوردن ناورداهای جدید است. البته این موضوع چندان جای تعجب ندارد.

1. connection 2. 't Hooft 3. Kac-Moody 4. Virasoro 5. loop spaces

1. brane 2. De Rham complexes 3. genus 4. handle

اجمالاً می‌توان گفت که نظریهٔ کوانتومی به یک شئ هندسی (خمینه، گره، نگاشت) عددی، اغلب یک عدد مختلط، وابسته می‌کند که نشان‌دهندهٔ دامنهٔ احتمالاتی است که قوانین مکانیک کوانتومی به یک فرایند فیزیکی معین که با آن شئ هندسی نمایش داده می‌شود، نسبت می‌دهند. به‌عنوان مثال، یک گروه در $\mathbb{R}^3$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ جهان‌خطِ یک ذرهٔ خاص، و خمینه‌ای برای یک فضا-زمان خاص باشد. به محض اینکه اعداد مشخص به اشیای هندسی وابسته می‌شوند، می‌توان عملهای مختلف جبری را روی آنها انجام داد. در نظریهٔ گرهها مفهومی برای مربوط ساختن گرهها به یکدیگر از طریق روابط بازگشتی (روابط اسکین) و یا حتی مشتق‌گیری (ناورداهای واسیلیف) وجود دارد. به این‌ترتیب کوانتش می‌تواند به‌عنوان نگاشت

$$\text{جبر} \longrightarrow \text{هندسه}$$

تلقی شود که هندسه را به قلمرو جبر می‌برد. این امر همان‌گونه که در مثالهای بعدی خواهیم‌دید، چشم‌اندازهای جدیدی در برابر ما می‌گشاید.

۴.۱ نظریهٔ ریسمان به‌عنوان دگردیسی هندسهٔ کلاسیک

در این سخنرانی، به خاطر اهداف آموزشی، نظریهٔ ریسمان در ریاضیات را به‌صورت خانواده‌ای دوپارامتری از دگردیسیهای هندسهٔ ریمانی کلاسیک در نظر می‌گیریم. بگذارید این دو پارامتر را فعلاً به‌صورت نادقیق معرفی کنیم (بعداً راجع به آنها توضیح دقیق‌تری خواهیم داد).

ابتدا، در نظریهٔ ریسمانِ اختلالی، حلقه‌ها را در خمینهٔ فضا-زمان مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض بر این است که این حلقه‌ها دارای طول ذاتی l_s، یعنی طول ریسمان هستند. به‌دلیل متناهی بودن اندازهٔ ریسمان، هندسهٔ به‌کار برده شده لزوماً هندسهٔ فازی است. حداقل از لحاظ شهودی واضح است که در حد $l_s \to 0$ ریسمان به یک نقطه، حلقه‌ای ثابت، تقلیل می‌یابد و به هندسهٔ کلاسیک می‌رسیم. پارامتر l_s میزان «ریسمانی بودن» مدل را معین می‌کند. خواهیم دید که کمیت $l_s^2 = \alpha'$ نقش ثابت پلانک را در جهان‌صفحهٔ ریسمان دارد؛ به عبارت دیگر، تصحیح کوانتومی نظریهٔ میدان دوبعدی را در جهان‌صفحهٔ ریسمان کنترل می‌کند.

دگردیسی دیگر هندسهٔ کلاسیک با این واقعیت سروکار دارد که ریسمانها می‌توانند پاره شوند و به هم متصل شوند و رویهٔ $\sum$ با توپولوژی معمولی را در فضا-زمان بروبند. طبق قوانین عمومی مکانیک کوانتومی باید یک عمل جمع روی تمام توپولوژیها انجام دهیم. چنین جمعی روی توپولوژیها را هنگامی می‌توان تحت کنترل داشت که یک پارامتر صوری g_s را به‌عنوان جفت‌شدگی ریسمان معرفی کنیم به‌طوری که رویه‌ای از گونای h وزنی برابر g_s^{2h-2} داشته باشد. توپولوژیهای با گونای بالا را به‌عنوان فرایندهای مجازی که در آنها ریسمانها پاره و به هم متصل می‌شوند ــ یک نوع پدیدهٔ کوانتومی ــ تلقی می‌کنیم. بنابراین، پارامتر g_s تصحیحات کوانتومی را کنترل می‌کند. می‌توان g_s^2 را با ثابت پلانک در فضا-زمان یکسان گرفت. تنها به‌ازای مقادیر کوچک g_s، نظریهٔ ریسمان می‌تواند برحسب فضاهای حلقه و جمع روی رویه‌ها بیان شود.

در واقع، در مورد ذرات می‌دانیم که به‌ازای مقادیر بزرگ g_s، بهتر است مسأله را از دیدگاه موج، یا به‌طور دقیق‌تر میدانهای کوانتومی، بررسی کنیم. در این‌صورت می‌توان انتظار داشت که به‌ازای α' و g_sهای بزرگ، نظریهٔ میدان ریسمان بهترین چارچوب باشد [۷]. این فرضیه تا حدودی درست است، اما به‌طور کلی، تحلیل مستقیم نظریهٔ میدان ریسمان کاری دشوار است. به‌ویژه ظهور شامه‌ها، اشیای گسترده از بعد بالاتر، که در ادامهٔ بحث نقش مهمی خواهند داشت، اغلب کم‌رنگ است.

به‌طور خلاصه، می‌توان دو نوع دگردیسی را از هم تمیز داد: اثرات ریسمانی پارامتربندی شده توسط α' و اثرات کوانتومی پارامتربندی‌شده توسط g_s. این وضعیت را می‌توان با نمودار زیر نشان داد:

α' بزرگ	نظریهٔ میدان همدیس ریسمانها	نظریهٔ M میدانهای ریسمان، شامه‌ها
$\alpha' \approx 0$	مکانیک کوانتومی ذرات	نظریهٔ میدانهای کوانتومی میدانها
	$g_s \approx 0$	g_s بزرگ

شاید بی‌مناسبت نباشد که بعضی شاخه‌های ریاضی مربوطه و ریاضیدانان پیشرو در آنها را در جدولی مشابه بیاوریم

α' بزرگ	کوهومولوژی کوانتومی (گروموف، ویتن)	هندسهٔ ناجابه‌جایی (کُن)
$\alpha' \approx 0$	ناورداهای ترکیبیاتی گره (واسیلیف، کونتسویچ)	خمینهٔ ۴بعدی، خمینه‌های ۳بعدی، گرهها (دانلدسن، ویتن، جونز)
	$g_s \approx 0$	g_s بزرگ

۲. مکانیک کوانتومی و ذرات

برای زمینه‌سازی، بحث را با مرور مختصر مکانیک کوانتومی ذرات نقطه‌ای به زبان مجردتر ریاضی شروع می‌کنیم.

در مکانیک کلاسیک، ذرات نقطه‌ای روی یک خمینهٔ ریمانی X که به‌عنوان فضا-زمان اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود، توصیف می‌شوند. به بیان دقیق‌تر، X از طریق نگاشتهای $x : pt \to X$ از یک نقطهٔ مجرد به توی X بررسی می‌شود. مکانیک کوانتومی به فضای پیکربندی کلاسیک X، فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^2(X)$ از توابع موج مربع‌انتگرال‌پذیر را نظیر می‌کند. می‌خواهیم این فضای هیلبرت را فضای وابسته به یک نقطهٔ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pt}$ در نظر بگیریم. برای یک ذرهٔ نقطه‌ای ابرمتقارن، می‌خواهیم متغیرهای جابه‌جایی و پادجابه‌جایی را به همراه یک عملگر پوچ‌توان که این دو را به هم مربوط می‌سازد، داشته باشیم. این ساختار، به شکل مجتمع دُرامِ توپولوژی جبری، در ریاضیات کاملاً شناخته شده است. به بیان دقیق‌تر، مختصات بوزونی x^μ و متغیرهای فرمیونی θ^μ را داریم که در رابطهٔ $\theta^\mu\theta^\nu = -\theta^\nu\theta^\mu$ صدق می‌کنند. ابربار d که بیان‌کنندهٔ ابرتقارن است به‌صورت

$$d(x^\mu) = \theta^\mu, \qquad d(\theta^\mu) = 0$$

عمل می‌کند. از نظر هندسی، متغیرهای فرمیونی به‌عنوان ۱-فرمهای $\theta^\mu = dx^\mu$ در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، تابع موج ابرمتقارن $\Psi(x, \theta)$

به‌صورت یک برهم‌نهی خطیِ فرمهای دیفرانسیل روی X تعبیر می‌شود:

$$\Psi(x,\theta)=\sum_n \Psi_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}$$

لذا، در این حالت فضای هیلبرت توسط فضای فرمهای دیفرانسیل دُرام (مربع‌انتگرال‌پذیر) $\mathcal{H}=\Omega^*(X)$ مشخص می‌شود.

از دیدگاه کلاسیک، ذره می‌تواند در لحظهٔ t از یک نقطهٔ x در طول مسیر مشخصی، معمولاً یک مسیر ژئودزیک، به سمت یک نقطهٔ y حرکت کند. از دیدگاه مکانیک کوانتومی، یک عملگر تحول خطی

$$\Phi_t:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$$

وجود دارد که این تحول زمانی را نشان می‌دهد. این عملگر از طریق انتگرال مسیری فاینمن، با نگاشتهایی از بازهٔ به طول t به توی X نظیر می‌شود. به بیان دقیق‌تر، هستهٔ $\Phi_t(x,y)$ عملگر Φ_t را ارائه می‌دهد که دامنهٔ احتمال ذرهٔ واقع در مکان x را که در زمان t به مکان y برسد، نشان می‌دهد و توسط انتگرال مسیری

$$\Phi_t(x,y)=\int_{x(\tau)}\mathcal{D}_x\exp\left[-\int_0^t d\tau|\dot{x}|^2\right]$$

بیان می‌شود، که در آن $\mathcal{D}_x$ اندازهٔ مناسب روی فضای تمام مسیرهای $x(\tau)$ با شرط $x(0)=x$ و $x(\tau)=y$، است. Φ_t یک شئ مشهور ریاضی یعنی هستهٔ انتگرال معادلهٔ گرماست:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t=\Delta\Phi_t,\qquad \Phi_0=\delta(x-y).$$

این چنین انتگرالهای مسیری دارای خاصیت طبیعیِ «به‌هم چسبیدن» هستند، به این معنی که اگر تحول ابتدا در یک زمان t_1 و سپس در زمان t_2 صورت گیرد، هم‌ارز است با تحول در زمان t_1+t_2، یعنی نگاشتهایِ خطی وابسته به آن دارای ویژگی ترکیب هستند:

$$\Phi_{t_1}\circ\Phi_{t_2}=\Phi_{t_1+t_2}. \qquad (1)$$

این خاصیت وجود رابطهٔ $\Phi_t=e^{-tH}$ را که در آن H عملگر همیلتنی است امکان‌پذیر می‌سازد. برای ذرهٔ واقع در X، عملگر همیلتنی به‌سادگی توسط منهای لاپلاسی $H=-\Delta$ مشخص می‌شود. خاصیت (۱) یک خاصیت عمومی نظریه‌های میدان کوانتومی است. این رابطه به دیدگاه تابعگونی زیگل [۹] دربارهٔ نظریهٔ میدان کوانتومی می‌انجامد که آن را تابعگونی بین رسته‌های خمینه‌ها (با بوردیسم‌ها) و فضاهای برداری (با نگاشتهای خطی)، در نظر می‌گیرد.

در حالت ابرمتقارن، همیلتنی به‌صورت

$$H=-\Delta=-(dd^*+d^*d)$$

نوشته می‌شود، که در آن دیفرانسیلهای d و d^* نقش ابربارهای

$$d=\psi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu},\qquad d^*=g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial\psi^\mu\partial x^\nu}$$

را ایفا می‌کنند. حالات پایه در مکانیک کوانتومی ابرمتقارن در معادلهٔ $H\Psi=0$ صدق می‌کنند و لذا فرمهای همساز

$$d\Psi=0,\qquad d^*\Psi=0$$

هستند و به همین علت در تناظر یک به یک با گروه کوهومولوژی دُرام خمینهٔ فضا-زمان قرار می‌گیرند:

$$\Psi\in\mathrm{Harm}^*(X)\cong H^*(X).$$

در اینجا تذکر دو نکته را لازم می‌دانیم. اول اینکه می‌توانیم یک خمینهٔ یک‌بعدی بسته، یعنی دایره‌ای چون S^1 با طول t را نیز در نظر بگیریم. از آنجا که دایره با یکی کردن دو سر یک بازه حاصل می‌شود می‌توان نوشت

$$Z_{S^1}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Phi_t$$

که در اینجا تابع افراز [پارش] Z_{S^1} عددی است وابسته به دایرهٔ S^1 که طیف عملگر Δ را کدگذاری می‌کند. همچنین می‌توان تابع افراز ابرمتقارن را با استفاده از عدد فرمیونی F (که به‌صورت درجهٔ فرم دیفرانسیل وابسته تعریف می‌شود) محاسبه کرد. به این ترتیب عدد اویلر

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-1)^F\Phi_t=\dim H^{\mathrm{even}}(X)-\dim H^{\mathrm{odd}}(X)=\chi(X)$$

محاسبه می‌شود.

دوم اینکه، به این ترتیب تمام جهان‌خطهای ذرات مجهز به یک متریک، یعنی یک طول مسیر t، می‌شوند. برای حرکت از مکانیک کوانتومی به سمت انتشار یک ذره در نظریهٔ میدان کوانتومی، باید روی این متریک انتگرال گرفت. در مورد یک بازه، به این طریق، انتشاردهندهٔ یک ذرهٔ بدون جرم، یعنی تابع گرین لاپلاسیِ Δ

$$G=\int_0^\infty dt\,e^{t\Delta}=\frac{1}{\Delta}$$

حاصل می‌شود. در اینجا $G(x,y)$ یک انتگرال هسته در نظر گرفته می‌شود که در معادلهٔ

$$\Delta_x G(x,y)=\delta(x,y)$$

صدق می‌کند و دامنهٔ احتمال حرکت یک ذره را از x به y توصیف می‌کند. پس از اِعمال تبدیل فوریه، می‌توان آن را با بیانی بسیار نزدیک‌تر به فیزیک برحسب متغیر تکانهٔ p به‌صورت $G=1/p^2$ نوشت.

۳. ریسمانها و نظریهٔ میدان همدیس

اکنون اولین پارامتر دگردیسی یعنی α' را معرفی می‌کنیم و ذرات نقطه‌ای و مکانیک کوانتومی را به ریسمانها و نظریهٔ میدان همدیس تعمیم می‌دهیم.

۱.۳ مدلهای سیگما

ریسمان را می‌توان یک حلقهٔ پارامتری‌شده در نظر گرفت. پس در این حالت، خمینهٔ X از طریق نگاشتهای $x : S^1 \to X$ و به عبارت دیگر از طریق فضای حلقه‌های آزاد $\mathcal{L}X$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کوانتش، یک فضای هیلبرت را به این فضای حلقه وابسته می‌سازد. به‌طور کلی می‌توان این فضای هیلبرت را به‌صورت $L^2(\mathcal{L}X)$ در نظر گرفت، اما بهتر است آن را به‌عنوان کوانتش یک ضخامت بی‌اندازه کوچک مکان هندسی حلقه‌های ثابت $X \subset \mathcal{L}X$ در نظر بگیریم. این حلقه‌های ثابت نقاط ثابت تحت عمل بدیهی S^1 روی فضای حلقه هستند. کلاف قائم بر X در $\mathcal{L}X$ تحت این عمل S^1 به‌ویژه‌فضاها تجزیه می‌شود و این (برای بخش بزرگی از X) توصیفی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{S^1}$ وابسته به دایره، به‌عنوان برشهای بهنجارشدنی کلاف فضای فاک[1] نامتناهی روی X است:

$$\mathcal{H}_{S^1} = L^2(X, \mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_-)$$

که در آن کلاف فاک به‌صورت

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n\geq 1} S_{q^n}(TX) = \mathbb{C} \oplus qTX \oplus \cdots$$

تعریف می‌شود. در اینجا متغیر صوری q برای مشخص کردن $\mathbb{Z}$ـدرجه‌بندی $\mathcal{F}$ به‌کار می‌رود و از نمادگذاری استاندارد

$$S_q V = \bigoplus_{N\geq 0} q^N S^N V$$

برای تابع مولد ضربهای متقاون فضای برداری V استفاده می‌شود.

وقتی یک ریسمان در زمان حرکت می‌کند، یک رویهٔ $\sum$ را می‌روبد. برای یک ریسمان آزاد، $\sum$ توپولوژی $S^1 \times I$ را دارد، ولی بدون از دست رفتن کلیت موضوع می‌توان ریسمانهایی را در نظر گرفت که پاره و به هم متصل می‌شوند. در این حالت $\sum$ رویهٔ جهت‌داری با توپولوژی دلخواه است. لذا در صورتبندی لاگرانژی می‌توان نگاشتهای $x : \sum \to X$ را در نظر گرفت. همان‌گونه که در سخنرانیهای دیگر توضیح داده شده است، اگر یک ساختار همدیس و یا ستارهٔ هاج[2] روی $\sum$ (به همراه یک متریک ریمانی g روی X) را در نظر بگیریم:

$$S(x) = \int_\Sigma g_{\mu\nu} dx^\mu \wedge *dx^\nu$$

نقاط بحرانی $S(x)$ نگاشتهای همساز هستند.

در صورتبندی کوانتش لاگرانژی می‌توان روی تمام نگاشتهای $x : \sum \to X$ انتگرال مسیری صوری

$$\Phi_\Sigma = \int_{x:\Sigma\to X} e^{-S/\alpha'}$$

را در نظر گرفت. α' در اینجا نقش ثابت پلانک را روی جهان‌صفحهٔ ریسمان یعنی $\sum$ دارد. α' می‌تواند با مقیاس‌بندی مجدد متریک به‌صورت $g \to \alpha' g$ در حجم خمینهٔ هدف[3] X ادغام شود. لذا حد نیمه کلاسیک $\alpha' \to 0$ معادل است با حد $vol(X) \to \infty$.

1. Fock 2. Hodge star 3. target manifold

۲.۳ توصیف تابعگونی

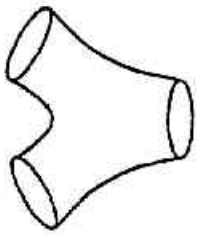
در توصیف تابعگونی نظریهٔ میدان کوانتومی، نگاشتهای Φ_Σ از تعریف مدل سیگما حذف می‌شوند.

نقطهٔ شروع کار در اینجا یک رویهٔ ریمانی مرزدار دلخواه (بسته و جهت‌دار) Σ است. مرز آن مرکب از مجموعه‌ای از دایره‌های جهت‌دار است. می‌توان برحسب اینکه جهت دایره‌ها با جهت Σ سازگار باشد یا نباشد، آنها را رو به درون یا رو به بیرون در نظر گرفت. به رویهٔ Σ با m مرز رو به درون و n مرز رو به بیرون می‌توان یک نگاشت خطی $\Phi_\Sigma : \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes m} \to \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes n}$ نظیر کرد. این نگاشتهای خطی از هم مستقل نیستند، اما در اصول به هم چسباندن

$$\Phi_{\Sigma_1} \circ \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_\Sigma$$

صدق می‌کنند که تعمیم قانون سادهٔ ترکیب (۱) است. Σ از به هم چسباندن Σ_1 و Σ_2 در طول مرزهای، به‌ترتیب، برونسو و درونسوی آنها حاصل می‌شود.

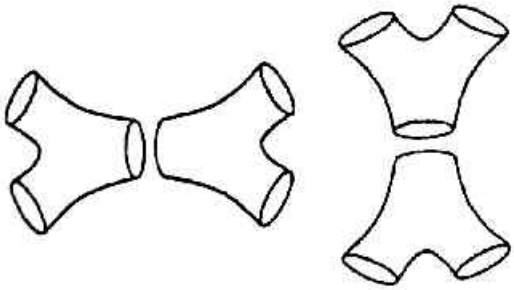
به این ترتیب، تابعگون مدولی [پیمانه‌ای] به‌دست می‌آید. این تابعگون دارای ساختار غنی جبری است. مثلاً کرهٔ با سه سوراخ



به حاصلضرب

$$\Phi : \mathcal{H}_{S^1} \otimes \mathcal{H}_{S^1} \to \mathcal{H}_{S^1}$$

منجر می‌شود. با توجه به این واقعیت که می‌توان کره‌ای چهار سوراخه از چسباندن دو نسخه از کرهٔ سه سوراخه به‌دست آورد، می‌توان نشان داد که این حاصلضرب اساساً جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است.



بیان این رابطه برحسب دامنه‌های انتقال، به معادلات دیفرانسیل نابدیهی و سلسله‌مراتب انتگرال‌پذیر منجر می‌شود. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به ([۴]، [۸]) رجوع کنید.

۳.۳ هندسهٔ ریسمانی و T-دوگانی

مدلهای سیگمای دوبعدی یک دگردیسی یک پارامتری طبیعی برای هندسهٔ کلاسیک فراهم می‌آورند. پارامتر دگردیسی ثابت پلانک α' است. در حد

$\alpha' \to 0$ توجه خود را به حلقه‌های ثابت معطوف می‌کنیم و به مکانیک کوانتومی یا نظریهٔ ذرات نقطه‌ای برمی‌گردیم. برای α' ناصفر حلقه‌های غیرثابت ظاهر می‌شوند.

در حقیقت می‌توان فضای مدولی [مدولهای[1]] نظریهٔ میدان کوانتومی را به‌صورت زیر به تصویر کشید. این فضا دارای مؤلفه‌هایی است که می‌توانند برحسب فضای هدف X بیان شوند. برای این مدلها، این طبقه‌بندی، متریکهای ریچی‌ـتخت و یک انتخاب از میدان B را پارامتری می‌کند.[2] این مؤلفه‌ها یک مرز «در بینهایت» دارند که بزرگی حجم خمینه را نشان می‌دهد. می‌توان پارامتر α' را به‌عنوان مختصات عمودی موضعی روی یقهٔ اطراف این مرز در نظر گرفت. لذا، مرز در مکان $\alpha' = 0$ واقع است که می‌توان آن را حد کلاسیک نظریهٔ میدان کوانتومی دوبعدی در نظر گرفت. با عبور از این مرز، اصلاحات ریمانی شروع می‌شوند. در میانهٔ فضای مدولی ممکن است پدیده‌های غریبی رخ دهند. به‌طور مثال، گروه خودریختی نظریهٔ میدان کوانتومی ممکن است از دست برود و این منجر به پدید آمدن تکینگیهای اُربیفُلد در نقاط تقارن خواهد شد.

نکتهٔ بسیار جالب توجه این است که فضای مدولی می‌تواند مرز دیگری داشته باشد، یعنی در $\alpha' \to \infty$، که تعبیر نیمه‌کلاسیک دیگری برحسب هندسهٔ کلاسیک دیگری مثلاً $\hat{X}$ است. در اینجا پارامتر کوچک $1/\alpha'$ است. این نقاط مشابه حجم کوچک یا کوانتومی برحسب متغیرهای اصلی روی X هستند و لذا تحلیل آنها بسیار مشکل است، زیرا در این حالت تا آنجا که ممکن است از حد کلاسیک دور هستیم. اما همچنین می‌توانند به‌عنوان حجم بزرگ برحسب مجموعه‌ای از متغیرهای دوگان روی خمینهٔ آینه یا دوگان $\hat{X}$ بیان شوند. در این حالت، بحث T‌ـدوگانی مطرح می‌شود. به این ترتیب دو خمینهٔ X و $\hat{X}$ که هر دو به یک نظریهٔ میدان کوانتومی منجر می‌شوند، به هم مربوط‌اند.

ساده‌ترین مثال از چنین T‌ـدوگانی در فشرده‌ـسازی چنبره‌ای رخ می‌دهد. اگر $X = T$ یک چنبره باشد، نظریهٔ میدان کوانتومی روی T و روی دوگان آن T^* یکریخت‌اند. ما اکنون با تفصیل بیشتری به این مطلب می‌پردازیم. این نوع T‌ـدوگانیها منجر به کاربرد ریاضی جالب توجهی در تقارن آینه‌ای شده است، که ما مروری بر آن خواهیم داشت.

۴.۳ ذرات و ریسمانهای روی چنبره

یک ذره یا ریسمانی در یک فضاـزمان را که توسط یک چنبرهٔ nبعدی به‌صورت خارج‌قسمت $T = \mathbb{R}^n/L$ داده شده است، در نظر بگیرید. L یک مشبکه با رتبهٔ n است.

حالتهای ذرهٔ نقطه‌ای مکانیک کوانتومی روی چنبره توسط تکانهٔ آنها، $p \in L^*$، به طرز مناسبی برچسب‌گذاری می‌شوند. توابع موج $\Psi(x) = e^{ipx}$

۱. moduli space؛ برای این اصطلاح، برابر نهادهٔ «فضای پیمانه‌ها» یا «فضای پیمانه‌ای» در زبان ریاضی فارسی مناسب‌تر است. ولی چون واژهٔ «پیمانه» در فیزیک منحصراً برای gauge یا gage بکار می‌رود و احتمال خلط معنا برای خوانندگان اهل فیزیک می‌رفت، اصطلاح «فضای مدولی» را ترجیح دادیم. ضمناً صفت «مدولی» را در موارد دیگر مانند «رستهٔ مدولی» یا «هندسهٔ مدولی» هم بکار برده‌ایم که واژهٔ مناسب‌تر در ریاضی، «پیمانه‌ای» است ـ م.

۲. توضیح اینکه میدان B یک ۲ـفرم است که dB پیچش (torsion) فضای هدف است ـ م.

پایه‌ای برای $\mathcal{H} = L^2(T)$ تشکیل می‌دهند که همیلتنی $H = -\Delta = p^2$ را قطری می‌کند. لذا می‌توان فضای هیلبرت را به‌صورت

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{p \in L^*} \mathcal{H}_p$$

تجزیه کرد که قطعه‌های $\mathcal{H}_p$ همگی یک‌بعدی‌اند. یک عمل طبیعی گروه تقارن

$$G = SL(n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\ L$$

روی مشبکهٔ $\Gamma = L$ و فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ قابل تعریف است. (در حالت کلی این تبدیلاتْ متریک را ناوردا نگاه نمی‌دارند، ولی در عوض با پساوری[1] متریک تخت دیگری روی T به‌دست می‌دهند.)

در حالتی که یک ریسمان روی چنبرهٔ T حرکت می‌کند، حالتها توسط یک عدد کوانتومی دیگر، یعنی عدد پیچ[2] آنها $w \in L$، برچسب‌گذاری می‌شوند. این عدد در واقع ردهٔ پیکربندی کلاسیک متناظر در $\pi_1 T$ است. چون $\pi_0 \mathcal{L}T = \pi_1 T \cong L$، عدد پیچ مؤلفه‌های مختلف همبند فضای حلقهٔ $\mathcal{L}T$ را متمایز می‌سازد. لذا شاهد رخداد طبیعی مشبکه‌ای به نام مشبکهٔ نارین[3]، که مجموعهٔ تکانه‌های $p \in L^*$ و اعداد پیچ $w \in L$ است هستیم:

$$\Gamma^{n,n} = L \oplus L^* .$$

این مشبکه، یک مشبکهٔ خوددوگان زوج و دارای نشان[4] (n, n) است با ضرب داخلی

$$p = (w, k), \qquad q^2 = 2w \cdot k .$$

معلوم می‌شود که همهٔ تقارنهای مشبکهٔ $\Gamma^{n,n}$، به تقارنهای نظریهٔ میدان همدیس کامل که با کوانتش فضای حلقه ساخته می‌شود، ارتقا می‌یابند. عناصر گروه تقارن مشبکهٔ نارین

$$SO(n, n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\ \Gamma^{n,n}$$

مثالهایی از T‌ـدوگانیها هستند. یک مثال خاص، تعویض چنبره با دوگان آن است: $T \leftrightarrow T^*$.

T‌ـدوگانیهایی را که چنبره را با دوگانش عوض می‌کنند می‌توان تار به تار هم به‌کار برد. اگر یک تاربندی $X \to B$ برای خمینهٔ X داشته باشیم، که در آن تارها چنبره‌اند، می‌توانیم تاربندی دوگان را با دوگان کردن تمام تارها به‌دست آوریم. این کار منجر به پدید آمدن خمینهٔ جدید $\hat{X} \to B$ خواهد شد و تحت شرایط مناسب، یک مدل سیگمای ابرمتقارنِ هم‌ارز حاصل خواهد شد. تقارنی که این دو خمینه را به یکدیگر تبدیل می‌کند، $X \leftrightarrow \hat{X}$، تقارن آینه‌ای نام دارد ([۲]، [۳]).

۵.۳ ریسمانهای توپولوژیک، کوهومولوژی کوانتومی، و تقارن آینه‌ای

در حالت ذرات نقطه‌ای، از آنجا که فرمهای دیفرانسیل را به‌طور طبیعی روی فضای هدف بنا می‌کنیم، در نظر گرفتن تعمیم ابرمتقارن آموزنده است.

1. pull-back 2. winding number 3. Narain lattice 4. signature

این فرمهای دیفرانسیل، که از طریق مجتمع دَرام به‌دست می‌آیند، می‌توانند توپولوژی خمینه را کنترل کنند. در واقع، با تقلیل نظریه به حالات پایه، فرمهای همساز که نمایشهای منحصر به‌فرد گروههای کوهومولوژی هستند، حاصل می‌شوند. و این قدمی است از آنالیز تابعی و نظریهٔ عملگرها به سوی توپولوژی.

همین‌طور، صورتبندی‌ای از نظریهٔ ریسمان وجود دارد که توپولوژی پیکربندی ریسمان را دربر دارد و آن را نظریهٔ توپولوژیک ریسمان می‌نامیم. این موضوع بسیار فنی و پیچیده است و از محدودهٔ این سخنرانی فراتر می‌رود، ولی من شرح مختصری از جنبه‌های اساسی آن خواهم داد. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه کنید. (یک ویژگی بسیار مهم نظریهٔ توپولوژیک ریسمان که آن را هم نمی‌توانیم به‌طور کامل در اینجا شرح دهیم، این است که علاوه‌بر داشتن ساختار غنی و زیبای ریاضی، قادر است برخی دامنه‌های «توپولوژیک» خیلی خاص را در ابرریسمان کاملاً آزاد محاسبه کند و لذا اطلاعات فیزیکی را نیز به‌دست بدهد.)

ایدهٔ کلی مستتر در این نظریه چنین است. ابتدا، همانند حالت ذرهٔ نقطه‌ای، میدانهای فرمیونی θ^μ معرفی می‌شوند. حال اینها به‌عنوان اسپینورهای با دو مؤلفهٔ θ^μ_L و θ^μ_R در جهان‌صفحهٔ دوبعدی در نظر گرفته می‌شوند. عمل موضعی برای این فرمیونها عبارت است از

$$\int_\Sigma d^2z\, g_{\mu\nu}(x)\left(\theta^\mu_L \frac{D\theta^\nu_L}{\partial\,\overline{z}} + \theta^\mu_R \frac{D\theta^\nu_R}{\partial z}\right).$$

به‌علاوه فرض می‌کنیم که فضای هدف X (تقریباً) مختلط است و لذا می‌توان مختصات موضعی تمامریخت x^i و $\overline{x}^{\,\overline{i}}$ را با تجزیه‌ای مشابه فرمیونها به‌کار برد. اگر این با جملات مراتب بالاتر مناسب تکمیل شود به یک مدل سیگما با ابرتقارن $\mathcal{N}=(2,2)$ دست می‌یابیم.

اکنون می‌توان با تغییر اسپینهای میدانهای فرمیونی ریسمان توپولوژیک را به‌دست آورد. این کار با دو روش معادل به نام مدل A و مدل B صورت می‌گیرد. بنابر ماهیت این تاب توپولوژیک، انتگرال مسیری مدل سیگما در یک فضای متناهی‌بعد متمرکز می‌شود.

مدل A به نگاشتهای تمامریخت

$$\frac{\partial x^i}{\partial\,\overline{z}} = 0$$

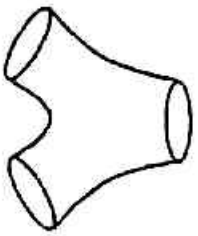
تحدید می‌شود. این عمل، انتگرال مسیری روی تمام نگاشتهای از Σ به توی X را به یک انتگرال متناهی‌بعد روی فضای مدولی $\mathcal{M}$ از نگاشتهای تمامریخت تقلیل می‌دهد. به بیان دقیق‌تر، $\mathcal{M}$ فضای مدولی جفتهای (Σ, f) است که در آن Σ یک رویهٔ ریمانی و f یک نگاشت تمامریخت $f:\Sigma\to X$ می‌باشد. مدل A تنها به ردهٔ کیلر[1] $[\omega]\in H^2(X)$ خمینهٔ X بستگی دارد.

ریسمانهای توپولوژیکِ مدل A، نمونهٔ مهمی از تعمیم ریسمانی ساختار هندسی کلاسیک‌اند. کوهومولوژی کوانتومی ([۴]، [۵]) یک دگردیسیِ حلقهٔ[2] کوهومولوژی دَرام $H^*(X)$ یک خمینه است. از دیدگاه کلاسیک این حلقه خواص تقاطعی زیرخمینه‌ها را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، اگر سه ردهٔ کوهومولوژی $\alpha,\beta,\gamma\in H^*(X)$ داشته باشیم که دوگان پوانکارهٔ زیرواریته‌های $A,B,C\subset X$ باشند، کمیت

$$I(\alpha,\beta,\gamma)=\int_X \alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

تقاطع سه ردهٔ A، B، و C را به‌دست می‌دهد. به عبارت دیگر، تعداد نقاط (با احتساب علامتها) در $A\cap B\cap C$ را می‌شمارد.

در حالت مدل A باید فرض کنیم که X یک خمینهٔ کیلری یا حداقل یک خمینهٔ همتافته[1] با فرم همتافتهٔ ω است. اکنون حاصلضرب تقاطعی «ریسمانی» به سه رأس ریسمانی مربوط می‌شود:



از دیدگاه ریاضی تعریف زیر را داریم

$$I_{qu}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_d q^d\int_{Map^*d}\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

که در آن انتگرال‌گیری فرمهای دیفرانسیل روی فضای مدولی نگاشتهای شبه تمامریخت با درجهٔ d از یک کره به توی خمینهٔ X، صورت می‌گیرد. به این نگاشتها توسط عمل اینستانتونیِ کلاسیکِ

$$q^d=\exp\left[-\frac{1}{\alpha'}\int_{S^2}\omega\right]=e^{-(d\cdot[\omega])/\alpha'}$$

وزن داده می‌شود. در حد $\alpha'\to 0$ تنها نگاشتهای درجهٔ صفر حضور دارند، اما این نگاشتها لزوماً ثابت‌اند و لذا تعریف کلاسیک حاصلضرب تقاطعی را به توسط انتگرال روی فضای X باز می‌یابیم. از نظر هندسی، می‌توان حاصلضرب تقاطعی کوانتومی را چنین توجیه کرد: این حاصلضرب کره‌های شبه‌تمامریخت درون X را که هر یک از دورهای A و B و C را قطع می‌کنند، می‌شمارد. لذا در حالت کوانتومی دیگر لازم نیست این دورها یکدیگر را قطع کنند. کافی است یک کرهٔ شبه‌تمامریخت با نقاط a، b، c که $a\in A$ و $b\in B$ و $c\in C$، وجود داشته باشد، یعنی یک جهان‌صفحهٔ ریسمان باشد که از هر سه عبور کند.

در مدل B می‌توانیم توجه خود را به نگاشتهای (تقریباً) ثابت محدود کنیم. این مدل تنها به ساختار مختلط مدولی X بستگی دارد. مهم‌ترین جنبهٔ آن این است که تقارن آینه‌ای مدل A را با مدل B تعویض می‌کند. مثال مشهوری از قدرت تقارن آینه‌ای محاسبهٔ اولیهٔ خمینهٔ کالابی-یائو به‌دست کاندلاس و همکارانش [۱۰] است که در $\mathbb{P}^4$ با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$X: x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5=0.$$

در این حالت، محاسبهٔ مدل A منجر به رابطهٔ

$$F(q)=\sum_d n_d q^d$$

می‌شود که در آن n_d معرف تعداد خمهای گویای از درجهٔ d در X است. (به بیان دقیق‌تر، این کمیتها چیزی را نمی‌شمارند بلکه به‌طور تقریبی به‌عنوان اعداد

1. Kähler 2. ring

1. symplectic

اویلر فضاهای محتملاً تکین معرفی می‌شوند و لذا در حالت کلی اعدادی گویا هستند.) محاسبهٔ این اعداد بسیار دشوار است. عدد $n_1 = ۲۸۷۵$ برای $d = ۱$ (خطها) نتیجهٔ کلاسیک به‌دست آمده در قرن ۱۹ است. عدد بعدی $n_2 = ۶۰۹۲۵۰$ تعداد مقطعهای مخروطی مختلف در چهار بعد است و در حدود سال ۱۹۸۰ محاسبه شد، و سرانجام تعداد مکعبهای تابدار، $n_3 = ۳۱۷۲۰۶۳۷۵$، با اجرای یک برنامهٔ پیچیدهٔ رایانه‌ای به‌دست آمده است. ولی اکنون به یمن نظریهٔ ریسمان تمام این اعداد را می‌شناسیم. در جدول زیر اولین ده عدد آورده شده‌اند

d	n_d
۱	۲۸۷۵
۲	۶ ۰۹۲۵۰
۳	۳۱۷۲ ۰۶۳۷۵
۴	۲۴ ۲۴۶۷۵ ۳۰۰۰۰
۵	۲۲۹۳۰ ۵۹۹۹۹ ۸۷۶۲۵
۶	۲۴۸ ۲۴۹۷۴ ۲۱۱۸۰ ۲۲۰۰۰
۷	۲ ۹۵۰۹۱ ۰۵۰۵۷ ۰۸۴۵۶ ۵۹۲۵۰
۸	۳۷۵۶ ۳۲۱۶۰ ۹۳۷۴۷ ۶۶۰۳۵ ۵۰۰۰۰
۹	۵۰ ۳۸۴۰۵ ۱۰۴۱۶ ۹۸۵۲۴ ۳۶۴۵۱ ۰۶۲۵۰
۱۰	۷۰۴۲۸ ۸۱۶۴۹ ۷۸۴۵۴ ۶۸۶۱۱ ۳۴۸۸۲ ۴۹۷۵۰

چگونه فیزیکدانان می‌توانند این اعداد را محاسبه کنند؟ تقارن آینه‌ای این کار را انجام می‌دهد. این تقارن ناورداهای «ریسمانی» را که از مدل A روی خمینهٔ X می‌آیند به ناورداهای کلاسیک مدل B روی خمینهٔ آینه‌ای $\check{X}$ مربوط می‌کند. به‌ویژه این عمل منجر به معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی تابع $F(q)$ می‌شود. با حل این معادله، اعداد صحیح n_d به‌دست می‌آیند.

۴. نظریهٔ ریسمان غیراختلالی و شامه‌ها

دیدیم که چگونه نظریهٔ میدان کوانتومی منجر به ساختاری غنی در قالب هندسهٔ مدولی می‌شود که برحسب نگاشتهای Φ_Σ صورتبندی شد. برای حرکت از نظریهٔ میدان کوانتومی به سوی نظریهٔ ریسمان باید دو قدم دیگر نیز برداریم.

۱.۴ جمع‌بندی روی توپولوژیهای ریسمان

ابتدا می‌خواهیم موضوع را به حالتی تعمیم دهیم که نگاشتهای Φ_Σ تنها توابعی روی فضای مدولی $\mathcal{M}_{g,n}$ رویه‌های ریمانی نیستند، بلکه فرمهای دیفرانسیل کلی‌تری هستند. در واقع به حالتی که اینها فرمهای حجمی باشند علاقه‌مندیم، زیرا در این‌صورت می‌توان دامنه‌های ریسمان را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$A_g : \int_{\mathcal{M}_g} \Phi_\Sigma$$

همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، این همان تعریف ناورداهای گروموف-ویتن نیز هست ([۵]، [۴]). گرچه ما قائل به استقلال از مدولهای نظریهٔ میدان کوانتومی هستیم، باید این را در نظر داشته باشیم که A_g (که اکنون به یک رویهٔ توپولوژیک با گونای g وابسته است) همچنان (در میان بقیه پارامترها) به α' وابسته است.

دوم اینکه، در نظر گرفتن دامنهٔ ریسمان با یک توپولوژی مفروض به تنهایی کافی نیست. همان‌طور که در نظریهٔ میدان جمع‌بندی روی تمام نمودارهای فاینمن ممکن انجام می‌شود، در نظریهٔ ریسمان باید روی تمام توپولوژیهای جهان‌صفحهٔ ریسمان جمع بندیم. در واقع، باید این دامنه‌ها را به‌صورت $A(g_s) \approx \sum_{g\geq ۰} g_s^{۲g-۲} A_g$، که یک تابع مولد است، جمع ببندیم. در اینجا ما ثابت جفت‌شدگی ریسمان یعنی g_s را به‌کار برده‌ایم. متأسفانه، در حالت کلی این تابع مولد در بهترین وضعیت خود یک بسط سری مجانبی از تابع تحلیلی $A(g_s)$ است. برآورد غیردقیقی از حجم $\mathcal{M}_g$ نشان می‌دهد که نوعاً $A_g \sim ۲g!$، و لذا جمع روی توپولوژیهای ریسمان همگرا نیست. در واقع، از استدلالهای فیزیکی عمومی چنین برمی‌آید که دامنه‌های احتمال غیراختلالی $A(g_s)$ تصحیحاتی به شکل زیر دارند

$$A(g_s) = \sum_{g\geq ۰} g_s^{۲g-۲} A_g + \mathcal{O}(e^{-۱/g_s}).$$

واضح است که برای دستیابی به تعریف صحیح دامنه‌های احتمال ریسمان، این اصلاحات غیراختلالی باید درک شوند.

۲.۴ نظریهٔ ریسمان غیراختلالی

چنانکه در سخنرانیهای دیگر با تفصیل بیشتری بررسی خواهد شد، در سالهای اخیر شاهد پیشرفت قابل توجهی در جهت توسعهٔ چنین صورتبندی غیراختلالی بوده‌ایم. جالب توجه اینکه، انواع مختلف ریاضیدانان نیز وارد بازی شده‌اند. این موضوع دو ایدهٔ جدید و جالب را در بردارد.

۱. نظریهٔ ریسمان نظریه‌ای دربارهٔ ریسمانها نیست. در نظر گرفتن فضاهای حلقه و کوانتش آنها به تنهایی کفایت نمی‌کند بلکه باید اشیای گسترده‌تر دیگری همچون شامه‌ها را نیز در نظر داشت. می‌توان گفت این اشیا وابسته به نگاشتهای کلی‌تر $Y \to X$ هستند که Y فضایی از بعد بالاتر است. اما مسأله این است که کوانتش سازگاری وجود ندارد که از شامه‌های «کوچک» در راستای خطوط نظریهٔ ریسمان شروع شود، به این معنی که بسطی که توسط آن بتوان اندازهٔ Y را (از طریق α') و توپولوژی را (از طریق g_s) کنترل کرد موجود نیست. ولی از طریق صورتبندی D-شامه‌ها [۱۱] این مطلب را می‌توان به‌طور دقیق در نظریهٔ اختلالی ریسمان تحلیل کرد. D-شامه‌ها سهمی از مرتبهٔ $e^{-۱/g_s}$ دارند و لذا مکمل سری اختلالی مجانبی ریسمان هستند.

۲. همان‌گونه که تأکید کردیم، دامنه‌های A به پارامترها و یا مدولهای بسیاری بستگی دارند. بجز جفت‌شدگی ریسمان یعنی g_s، تمام مدولهای دیگر تعبیری هندسی برحسب متریک و میدان B روی X دارند. نکتهٔ جدید دیگر این است که نظریهٔ ریسمان روی X با جفت‌شدگی ریسمان g_s، می‌تواند تعبیری کاملاً هندسی برحسب نظریه‌ای جدید به نام نظریهٔ M روی خمینهٔ $X \times S^۱$ داشته باشد که در آن طول دایرهٔ $S^۱$ برابر با g_s است [۱۲].

۳.۴ شامه‌های روی چنبره

اگر به سراغ نظریهٔ ریسمان کاملاً غیراختلالی روی چنبره برویم، ماجرا نسبت به آنچه در بخش ۴.۳ دیدیم پیچیده‌تر می‌شود. مشبکهٔ اعداد کوانتومی اشیای

مختلف و همین‌طور تقارنها بزرگ‌تر می‌شود. به‌ازای مقادیر کوچک n، بعد چنبرهٔ T ($n \geq 4$)، مشاهده می‌شود که مشبکهٔ بار غیراختلالی M را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیم مشبکهٔ نارین (اعداد پیچ و تکانهٔ ریسمانها) با مشبکه‌ای که رده‌های هومولوژی شامه‌ها را تغییر نمی‌دهد، نوشت:

$$M = \Gamma^{n,n} \oplus H^{\text{زوج/فرد}}(T).$$

در اینجا توجه داریم که مشبکهٔ شامه‌ها (که بسته به نوع نظریهٔ ریسمان مورد بحث زوج یا فردند)، یعنی

$$H^{\text{زوج/فرد}}(T) \cong \wedge^{\text{زوج/فرد}} L^*$$

به‌عنوان نمایشهای نیم‌اسپینوری تحت گروه T-دوگانی $SO(n,n,\mathbb{Z})$ تبدیل می‌شوند. معلوم می‌شود که گروه کامل دوگانی، گروه استثنایی اعداد صحیح یعنی $E_{n+1}(\mathbb{Z})$ است. مشبکهٔ M نمایشی تحویل‌ناپذیر برای این گروه تقارن است. لذا این U-دوگانیها ریسمانها را با شامه‌ها جابه‌جا می‌کنند.

لذا ملاحظه می‌کنیم که سلسله‌مراتب

$$\{\text{شامه‌ها}\} \subset \{\text{ریسمانها}\} \subset \{\text{ذرات}\}$$

در دنبالهٔ (زیر) گروههای تقارن ذیل که به‌ترتیب دارای رتبه‌های $n-1$، n و $n+1$ هستند، متعکس است

$$SL(n,\mathbb{Z}) \subset SO(n,n,\mathbb{Z}) \subset E_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

پرسشی عمیق (و در حالت کلی، بدون جواب) این است که چه ساختار ریاضی «صحیحی» به یک چنبرهٔ nبعدی وابسته می‌شود به‌طوری که منجر به پدید آمدن گروه استثنایی $E_{n+1}(\mathbb{Z})$ می‌گردد.

۵. D-شامه‌ها

ابزار مهم برای گسترش نظریهٔ ریسمان در ورای نظریهٔ اختلال، شامه‌ها هستند [۱۱]. از دیدگاه ریاضی، D-شامه‌ها متناظر نسبی نظریهٔ گروموف-ویتن هستند. اکنون نقطهٔ شروع ما یک جفت خمینهٔ نسبی (X,Y) است که در آن X یک خمینهٔ dبعدی و $Y \subset X$ بسته است. جهان‌صفحه‌های ریسمان به‌صورت رویه‌های ریمانی Σ با مرز $\partial\Sigma$ تعریف می‌شوند و ردهٔ نگاشتهای $x : \Sigma \to X$ در رابطهٔ $x(\partial\Sigma) \subset Y$ صدق می‌کنند، یعنی مرز رویه‌های ریمانی باید به زیر فضای Y نگاشته شود. حرف "D" در D-شامه‌ها معرف شرایط مرزی دیریکله است که روی مؤلفه‌های نگاشت x که بر Y عمودند اعمال می‌شود.

توجه دارید که در توصیف تابعگونی اکنون دو نوع مرز برای رویه‌ها داریم. ابتدا مرزهای زمان‌گونه هستند که هم‌اکنون آنها را وصف کردیم. در اینجا یک شرط مرزی مشخص، یعنی این شرط را که ریسمان روی D-شامهٔ Y قرار گیرد، انتخاب می‌کنیم و دیگر، مرزهای فضاگونه هستند که قبلاً دربارهٔ آنها توضیح داده‌ایم. اینها یک جزء اساسی در هر توصیف همیلتنی هستند. روی این مرزها شرایط مقدار اولیه‌ای را در نظر می‌گیریم که در زمان دوباره تولید شوند. در نظریهٔ ریسمان بسته، این مرزها بسته و لذا مجموع دایره‌ها هستند. با وجود D-شامه‌ها، نوع دوم مرز نیز وجود دارد: ریسمان باز با بازهٔ $I = [0,1]$.

پدید آمدن دو نوع مرز فضاگونه به این دلیل است که راههای مختلفی برای انتخاب مختص «زمانی» روی رویهٔ ریمانی مرزدار وجود دارد. چنین رویه‌ای همواره به‌طور موضعی شبیه $\mathbb{R} \times S^1$ یا $\mathbb{R} \times I$ است. این ابهام در چگونگی برش رویه، ابزار جدید و قدرتمندی در نظریهٔ ریسمان باز است.

به نظریهٔ میدان کوانتومی که توسط زوج (X,Y) بیان می‌شود، یک رستهٔ مدولی تعمیم‌یافته وابسته می‌کنیم. این رسته دو نوع شیٔ یا خمینهٔ یک‌بعدی دارد: دایرهٔ S^1 (ریسمان بسته) و بازهٔ $I = [0,1]$ (ریسمان باز). مورفیسم [ریختار]های بین خمینه‌های یک‌بعدی، باز بوردیسمها یا رویه‌های ریمانی Σ و اکنون با امکان وجود مرز می‌باشند. اکنون دو نوع فضای هیلبرت داریم: ریسمانهای بستهٔ $\mathcal{H}_{S^1}$ و ریسمانهای باز $\mathcal{H}_I$.

از دیدگاه نیمه‌کلاسیک، فضای هیلبرت ریسمان باز عبارت است از

$$\mathcal{H}_I = L^2(Y,\mathcal{F})$$

با کلاف فضای فاک

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n\geq 1} S_{q^n}(TX)$$

توجه کنید که ما تنها یک نسخه از فضای فاک $\mathcal{F}$ داریم، و شرایط مرزی در انتهای بازه، حرکت‌دهنده‌های راست و چپ را به هم مربوط می‌سازد. همچنین میدانها، برشهای کلاف فضای فاک روی D-شامهٔ Y هستند نه روی کل خمینهٔ فضا-زمان X. به این معنی، حالتهای ریسمان باز روی شامه قرار می‌گیرند.

۱.۵ شامه‌ها و ماتریسها

یکی از واقعیتهای جالب توجه این است که D-شامه‌ها را می‌توان با چندگانگی N مشخص کرد، که به‌طور طبیعی منجر به یک ساختار ناجابه‌جایی می‌شود [۱۳].

با در دست داشتن یک رستهٔ مدولی، آن‌گونه که در بالا شرح داده شد، راه ساده‌ای برای ضرب تانسوری آن روی ماتریسهای ارمیتی $N \times N$ وجود دارد. کافی است به جای فضای هیلبرت $\mathcal{H}_I$ وابسته به بازهٔ I، $\mathcal{H}_I \otimes Mat_{N\times N}$ را با شرط ارمیتی بودن

$$(\psi \otimes M_{ij})^* = \psi^* \otimes M_{ji}$$

در نظر بگیریم. نگاشتهای Φ_Σ به طریق زیر تعمیم می‌یابند. ابتدا برای سادگی یک رویهٔ Σ با تک مرز C را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم C شامل n فضای هیلبرت ریسمان باز «ورودی» با حالتهای $\psi_1 \otimes M_1, \ldots, \psi_n \otimes M_n$ باشد. این حالتها اکنون دارای مقادیر ماتریسی هستند. مورفیسم جدید به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_\Sigma(\psi_1 \otimes M_1, \ldots, \psi_n \otimes M_n) = \Phi_\Sigma(\psi_1, \ldots, \psi_n)\mathrm{Tr}(M_1 \cdots M_n)$$

در حالتی که بیش از یک مؤلفهٔ مرزی داریم، برای هر مؤلفه یک اثر اضافی خواهیم داشت.

به‌ویژه، می‌توانیم نمودار فرص با سه تقاطع ریسمانی باز را در نظر بگیریم.

با در نظر گرفتن آن به‌صورت یک نگاشت

$$\Phi_\Sigma : \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_I \longrightarrow \mathcal{H}_I$$

ملاحظه می‌کنیم که رأس تقاطع این ریسمان باز اکنون با عبارت زیر مشخص می‌شود

$$\Phi_\Sigma(\psi_1 \otimes M_1, \psi_2 \otimes M_2) = (\psi_1 * \psi_2) \otimes (M_1 M_2)\,.$$

لذا ما حاصلضرب ریسمان وابسته را با حاصلضرب ماتریسی ضرب تانسوری کرده‌ایم.

با در نظر گرفتن حد هندسی، که در آن نظریهٔ میدان کوانتومی به‌عنوان مدل سیگمای نیمه‌کلاسیک روی X در نظر گرفته می‌شود، میدانهای ریسمانی متناظر با حالات $\mathcal{H}_I$، یعنی فضای هیلبرت ریسمان باز، میدانهایی با مقادیر ماتریسی D-شامهٔ Y خواهند بود، یعنی، می‌توان آنها را به‌عنوان برشهای $\mathrm{End}(E)$ در نظر گرفت که در آن E یک کلاف برداری (بدیهی) روی Y است.

همین ساختار ماتریسی زمانی هم که N تا D-شامهٔ متمایز $Y_1, \ldots, Y_N$ را در نظر بگیریم، به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. در چنین حالتی ماتریسی از ریسمانهای باز داریم که از شامهٔ Y_i تا شامهٔ Y_j کشیده شده است. در چنین حالتی هیچ توجیه واضحی برحسب کلاف برداری وجود ندارد. اما اگر تمام D-شامه‌ها برهم منطبق شوند یعنی $Y_1 = \cdots = Y_N$، آنگاه یک تقارن $U(N)$ پدید می‌آید.

۲.۵ D-شامه‌ها و نظریهٔ K

ارتباط با کلافهای برداری بسیار مفید از آب درآمده است. قدم بعدی، در نظر گرفتن D-شامه‌ها با کلافهای برداری نابدیهی است. معلوم شده است که این پیکربندیها را می‌توان به‌عنوان ترکیب شامه‌های با ابعاد مختلف در نظر گرفت[۱۴]. فرمول دقیقی وجود دارد که توپولوژی کلاف برداری E را به بار شامه، $\mu(E)$، مربوط می‌سازد که می‌توان آن را به‌صورت رده‌ای در $H^*(X)$ در نظر گرفت. (ما برای سادگی اولین شامه‌های ماکسیمال $Y = X$ را در نظر می‌گیریم.) ملاحظه می‌شود[۱۵]:

$$\mu(E) = \mathrm{ch}(E)\hat{A}^{1/2} \in H^*(X) \qquad (۲)$$

که در اینجا $\mathrm{ch}(E)$ مشخصهٔ چرن (تعمیم‌یافتهٔ)

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{Tr}\,\exp(F/2\pi i)$$

و $\hat{A}$ گونایی است که در قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر ظاهر می‌شود. توجه کنید که بار D-شامه می‌تواند کسری باشد.

برای توصیف شامه‌های با بعد کمتر می‌توان از دو شامهٔ با بعد زیاد، با کلافهای برداری E_1 و E_2 که بار مخالف دارند، شروع کرد. از نظر فیزیکی، دو تا از این‌گونه شامه‌ها پس از حذف شدن، گردایه‌ای از شامه‌های با بعد کمتر را باقی می‌گذارند. از نظر ریاضی، شئ حاصل را باید یک کلاف مجازی $E_1 \ominus E_2$ که نشان‌دهندهٔ رده‌ای در $K^*(X)$، گروه نظریهٔ Kای X، می‌باشد، در نظر گرفت[۱۶]. در واقع، نگاشت μ در (۲) تناظر مشهور

$$\mu : K^*(X) \longrightarrow H^{\mathrm{ev}}(X)$$

است که زمانی که با اعداد حقیقی ضرب تانسوری شود، یک یکریختی خواهد بود. به این معنا، تناظری یک‌به‌یک بین D-شامه‌ها و رده‌های نظریهٔ K وجود دارد[۱۶]. ثابت شده است که این ارتباط با نظریهٔ K بسیار مفید است.

۳.۵ مثال: قضیهٔ شاخص

یک مثال خوب از کارایی نقل‌وانتقال بین ریسمانهای باز و بسته دستیابی طبیعی به قضیهٔ شاخص است. استوانهٔ $\Sigma = S^1 \times I$ را بین دوتا D-شامه که توسط کلافهای برداری (مجازی) E_1 و E_2 مشخص می‌شوند، در نظر بگیرید. می‌توان آن را به‌صورت نمودار ریسمانی بسته با حالت درونی $\langle E_1|$ و حالت بیرونی $\langle E_2|$ به شکل زیر در نظر گرفت

$$\Phi_\Sigma = \langle E_2, E_1 \rangle$$

با تبدیل حالت مرزی D-شامه به حالتهای پایهٔ ریسمان بسته (که به توسط رده‌های کوهومولوژی داده می‌شوند) خواهیم داشت

$$|E\rangle = \mu(E) \in H^*(X)$$

و لذا

$$\Phi_\Sigma = \int_X \mathrm{ch}(E_1)\mathrm{ch}(E_2^*)\hat{A}\,.$$

از طرف دیگر، همچنین می‌توان استوانه را به‌عنوان یک اثر روی حالتهای ریسمان باز، با شرایط مرزی که با E_1 و E_2 کدگذاری می‌شوند، تلقی کرد. حالتهای پایه در $\mathcal{H}_I$، برشهایی از کلاف اسپینور دیراک هستند که با $E_1 \otimes E_2^*$ تابدار شده‌اند. خواهیم داشت

$$\Phi_\Sigma = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_I}(-1)^F = (D_{E_1 \otimes E_2^*})\ \text{اندیس}$$

و لذا قضیهٔ شاخص [اندیس] خیلی ساده نتیجه می‌شود.

۴.۵ دیدگاه

در سالهای اخیر، پیشرفتهای جدید جالبی در این رشته صورت گرفته است. این مرور مختصر نمی‌تواند حق مطلب را ادا کند، ولی خواننده می‌تواند با مطالعهٔ مقالات مروری ([۱۷] و [۱۸]) و متونی که در این مقالات از آنها نام برده شده، تصویر روشنی از این موضوع به‌دست آورد.

مراجع

1. J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge University Press, 1998.
2. D. A. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry* (Mathematical Surveys and Monographs, No. 68), AMS, 1999.
3. K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, AMS, 2003 .
4. Yu. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, AMS, 1999.

5. D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, AMS, 1994.

6. Ph. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory* (Graduate Texts in Contemporary Physics), Springer, 1996.

7. B. Zwiebach, Closed string field theory: quantum action and the B-V master equation, *Nucl. Phys.* **B390**, 33-152 (1993) hep-th/9206084.

8. R. Dijkgraaf, *Les Houches Lectures on Fields, Strings and Duality, in Quantum Symmetries*, les Houches Session LXIV, Eds. A. Connes, K. Gawedzki, and J. Zinn-Justin, North-Holland, 1998, hep-th/9703136.

9. G. segal, *The definition of conformal field theory*, preprint; *Two dimensional conformal field theories and modular functors, in IXth International Conference on Mathematical Physics*, B. Simon, A. Truman and I. M. Davies Eds. (Adam Hilger, Bristol, 1989).

10. P. Candelas, P. Green, L. Parke, and X. de la Ossa, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory, *Nucl. Phys.* **B359**, 21 (1991) and in [2].

11. J. Polchinski, Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724-4727 (1995) hep-th/9510017.

12. E. Witten, String theory in various dimensions, , *Nucl. Phys.* **B443**, 85 (1995) hep-th/9503124.

13. E. Witten, Bound states of strings and p-branes, *Nucl. Phys.* **B460**, 335 (1996) hep-th/9510135.

14. M. Douglas, *Branes within branes*, hep-th/9512077.

15. M. Green, J. Harvey, and G. Moore, I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes, *Class. Quant. Grav.* **14**, 47-52 (1997) hep-th/9605033.

16. E. Witten, *D-branes and K-theory*, *JHEP* 9812, 019 (1998) hep-th/9810188.

17. A. Neitzke and C. Vafa, *Topological strings and their physical applications*, arXiv: hep-th/0410178.

18. M. Marino, *Chern-Simons theory and topological strings*, Rev. Mod. Phys. **77** (2005) 675 [arXiv:hep-th/0406005].

Les Houches lectures on matrix models and topological strings, arXiv: hep-th/0410165.

******

• Robbert H. Dijkgraaf, "The mathematics of string theory", *Gaz. Math.*, (106) suppl (2005) 45-64.

• روبرت دایگرف، دانشگاه آمستردام، هلند

سپاسگزاری. از آقای محمدمهدی شیخ‌جباری به خاطر مساعدت در ویرایش ترجمهٔ این مقاله سپاسگزاریم.

اثبات کوتاهی از قضیهٔ کیلی-همیلتن•

فرض کنید M_n نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های مختلط، و $\widehat{M}_n \subset M_n$ زیرمجموعهٔ ماتریسهایی باشد که n مقدار ویژه متمایز دارند. چون استدلال اصلی ما ماهیت توپولوژیک دارد، مجموعهٔ M_n را با فضای $\mathbb{C}^{n^2}$ همراه با توپولوژی معمولی‌اش یکی می‌گیریم. اگر $A \in M_n$، فرض می‌کنیم $\varphi(A;\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ آن باشد. باید ثابت کنیم که $\varphi(A;A)$ به‌ازای هر $A \in M_n$، ماتریس صفر است. چون این موضوع به‌ازای $A \in \widehat{M}_n$ بدیهی است، اثبات را به M_n تعمیم می‌دهیم؛ به این منظور، توجه کنید که تابع $A \mapsto \varphi(A;A)$ پیوسته است و $\widehat{M}_n$ در M_n چگال است. چون $\varphi(A;\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ضرایب $\varphi(A;\lambda)$ چندجمله‌ایهایی برحسب درایه‌های A هستند و در نتیجه ماتریس $\varphi(A;A)$ به‌طور پیوسته نسبت به A تغییر می‌کند. چگال‌بودن $\widehat{M}_n$ در M_n از آنجا نتیجه می‌شود که $D(A)$، مبین $\varphi(A;\lambda)$، صفر است اگر و تنها اگر $A \notin \widehat{M}_n$، و نیز $D(A)$ یک چندجمله‌ای برحسب ضرایب $\varphi(A;\lambda)$ است و بنابراین، یک چندجمله‌ای برحسب درایه‌های A نیز هست.

لودویک یانوش، کالیفرنیا، آمریکا

• نقل از مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ آوریل ۲۰۰۷، ص ۲۱۶.

تاریخ یا میراث؟

تمایزی مهم در ریاضیات و برای آموزش ریاضی•

ایوار گراتن-گینس*

به یادِ جان فاول[1] دوست داشتنی (۱۹۴۷-۲۰۰۱)

۱. جلب توجه و بروز اختلاف

تحقیق در تاریخ ریاضیات و از جمله ارتباط آن با آموزش ریاضی، در چند دههٔ گذشته رشد چشمگیری داشته است. اما گهگاه اختلاف‌نظرهای قابل توجهی نه تنها در مورد اهمیت بلکه حتی دربارهٔ مشروعیت آن پیش می‌آید ــ یعنی در این‌باره که اصلاً یک تعبیر تاریخی از مقولهٔ تاریخ به حساب می‌آید یا نه. در این مقاله به بررسی موضوع دوم می‌پردازم و برخی از پیامدهای آن برای آموزش را نیز یادآور می‌شوم.

اختلاف‌نظرها عمومیت دارند به این معنی که ممکن است در مورد هر شاخهٔ ریاضیات در هر دوره یا فرهنگی پیش بیایند؛ بنابراین نیاز به یک راه حل کلی دارند. من راه حلی پیشنهاد می‌کنم که مبتنی بر تمایزگذاری بین راههای تعبیر ریاضیات گذشته است. شیٔ یا مفهوم ریاضی مورد بحث را N بنامید، N می‌تواند هر چیزی از یک نماد گرفته تا یک تعریف، اثبات، روش اثبات یا الگوریتمی برای یک قضیه، نظریه‌ای گسترده یا یک شاخهٔ کامل ریاضی، و راههای آموزش آن باشد. منظور از «تاریخ» آن، که در این مقاله به‌صورت واژه‌ای فنی به‌کار می‌رود، سیر تحول N در دوره‌ای خاص است: پیدایش و شکلهای ابتدایی آن، تأثیر و کاربردهایش در درون و/یا بیرون ریاضیات، و نظایر اینها. تاریخ به این پرسش می‌پردازد که «چه اتفاقی در گذشته افتاده است؟» و شرح و توصیفهایی در پاسخ می‌آورد. شاید توضیحاتی هم در پاسخ این پرسش که «چرا آن اتفاق افتاده است؟» بیاورد.

دو پرسش دیگر نیز که ملازم هم‌اند، برای تاریخ مهم است، یکی اینکه «چه اتفاقی در گذشته نیفتاده است؟» و دیگر اینکه «چرا نیفتاده است؟» دلایل آن ممکن است به طرف دیگر این تمایز، که من آن را «میراث» می‌نامم، مربوط باشد. در بررسی میراث توجه ما بیشتر معطوف به تأثیر N بر کارهای بعدی، در طول دوره‌ای ذی‌ربط از جمله دورهٔ پیدایش آن است. بعضی از صورتهای امروزین N هم ممکن است در نظر گرفته شوند، زیرا میراث تا حد زیادی با این پرسش سروکار دارد که «چگونه به اینجا رسیده‌ایم؟» یعنی به وضعیت فعلیِ موضوع مورد نظر.

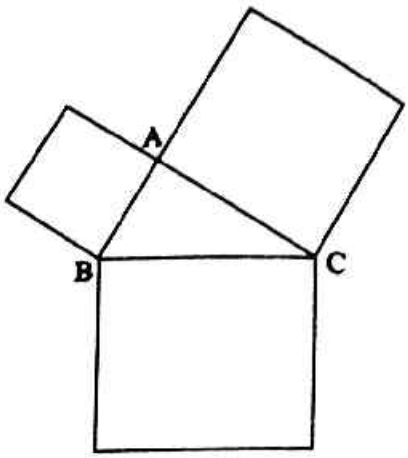
کسانی که به بررسیِ بخشی از ریاضیات گذشته می‌پردازند، تمایز بین تاریخ و میراث را اغلب درک می‌کنند و به این عقیده می‌رسند که راههای اساساً متفاوتی برای این بررسی وجود دارد. از اینجاست که اختلافها رخ می‌نماید، برداشتی که یک نفر دارد از نظر دیگری اشتباه تاریخی است و برداشت دومی از نظر اولی بی‌ربط است. اختلاف‌نظرها اغلب نشان‌دهندهٔ تفاوت بین رویکرد مورخان و ریاضیدانان است.

ادعای این مقاله این است که هم مطالعهٔ تاریخی و هم مطالعهٔ میراث‌نگرانه، راههایی مشروع برای بررسی ریاضیات گذشته‌اند ولی اشتباه گرفتن آنها با یکدیگر، یا ادعای اینکه یکی تابع دیگری است، کار درستی نیست. این موضع پیامدهای بسیاری دارد که در بخشهای ۳ و ۴ به آنها خواهیم پرداخت ولی نخست مثال ساده و معروفی از گذشتهٔ دور می‌آوریم.

۲. قضیهٔ فیثاغورس به سبک اقلیدس

یکی از معروف‌ترین قضیه‌ها در اصول اقلیدس (قرن چهارم پیش از میلاد) دربارهٔ ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای چون ABC است (شکل ۱).

1. Fauvel



شکل ۱

صورت آشنای این قضیه برای ما این است که ضلعهای AB، AC، و BC در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$AB^2 + AC^2 = BC^2; \qquad (1)$$

ولی اقلیدس در واقع حرف دیگری زده است [۱۱، مقالهٔ ۱، قضیهٔ ۴۷]: «در مثلثهای قائم‌الزاویه، مربع [بنا شده] بر ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه برابر است با مربعهای [بنا شده] بر ضلعهای زاویهٔ قائمه». شکلی با این قضیه همراه است که شکل (۱) بخشی از آن است، و چیزی که از آن برمی‌آید تفاوتهای اساسی با (۱) دارد. رابطهٔ (۱) جبری است در حالی‌که شکل هندسی است؛ این شکل نشان‌دهندهٔ مربعهایی در خارج از مثلث است ولی رابطهٔ (۱) چنین چیزی را نمی‌رساند. اگر هر یک از مربعها روی مثلث قرار گیرند، باز هم (۱) و قضیه صادق‌اند ولی اثبات پیچیدهٔ آن، که در شکل نشان داده نشده، به همان صورت عملی نیست. خصلت جبری (۱) وقتی بیش از پیش نمایان می‌شود که، چنانکه معمول بوده و هست، حروف «a»، «b»، و «c» را برای نشان دادن ضلعها به‌کار بریم، زیرا جبرْ شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن، در حد چشمگیری، از حروف و نمادها برای نمایش ثابتها، مجهولها، متغیرها، و عملها استفاده می‌شود.

تفاوت مهم دیگر به کلمهٔ «بر» مربوط می‌شود. اقلیدس هرگز عبارت «مربع ضلع» را به‌کار نبرده زیرا او در مقاله‌های هندسی اصول، نه در صورت قضیه‌ها و (مهم‌تر از آن) نه در اثبات آنها، کمیتهای هندسی را در هم ضرب نکرده است؛ مثلاً در اثبات قضیهٔ فیثاغورس، چه در اثبات پیچیده‌ای که به آن اشاره شد و مبتنی بر قابلیت انطباق [همنهشتی] است و چه در اثبات ظریف‌تری برای قضیهٔ کلی‌تر دربارهٔ مستطیلهایی با نسبت اضلاع برابر که بر ضلعهای مثلث بنا می‌شوند، متوسل به مربع‌سازی ضلع نشده است؛ وی در مورد دوم از مثلثهای متشابه و نظریهٔ تناسب [۱۱، مقالهٔ ۶، قضیهٔ ۳۱] استفاده کرده است. بنابراین، «BC^2» تخطی و انحرافی از هندسهٔ اوست (و کاربرد متداول حروف کوچک مانند «a^2» از آن هم بیشتر). اقلیدس مربعی بر یک خط مفروض بنا کرده است ــ در واقع در گزاره‌ای که درست پیش از قضیهٔ فیثاغورس آمده است [۱۱، مقالهٔ ۱، قضیهٔ ۴۶].

این موضوع عمیق‌تر از آن است که به ظاهر می‌نماید. چه در این مورد و چه در هر جای دیگر اصول، اقلیدس با پاره‌خط سروکار دارد نه با طول؛ طول در نظر او پاره‌خطی است که اندازه‌ای حسابی برای آن در نظر گرفته شده است. اقلیدس هندسه را بدون حساب، به مفهومی که گفته شد، عرضه کرده است؛ البته عددها هم در بحث او حضور دارند ولی برای مقاصد دیگری، مثلاً برای گفتن اینکه این پاره‌خط دو برابر آن پاره‌خط است، یا نسبت دو پاره‌خط، ۷ : ۵ است. همین‌طور او از نواحی مسطح و نه مساحتها(ی اندازه‌گیری‌شده)، جسم نه حجم، زاویه اما نه برحسب درجه صحبت کرده است. ولی در مقاله‌های راجع به حساب (مقاله‌های ۷ـ۹) ضرب خودِ اعداد صحیح به شیوهٔ معمولی آمده است، و این موضوع گاهی نادیده می‌ماند [۱۵].

این ملاحظات به تاریخ اثر اقلیدس مربوط می‌شود. وقتی به میراث آن می‌پردازیم با وضعیت کاملاً متفاوتی روبه‌رو می‌شویم که در آن (۱) و بسیاری دیگر از این‌گونه روابط شایان توجه‌اند زیرا اصول نقش مهمی در تکوین جبر متعارف داشته است؛ این نقش هم در کار برخی از بنیانگذاران مسلمان جبر مشهود است و هم بیشتر از آن، در کار جبردانان اروپایی بعد از بیداری اروپا در قرن دوازدهم، که با استفاده از نمادها برای نمایاندن کمیتهای مجهول و عملها، جبر را توسعه دادند. هم (۱) و هم قضیهٔ فیثاغورس به‌صورتی که با شکل نشان داده شده، برداشتهای مشروعی از کار اقلیدس‌اند ولی کاملاً از یکدیگر متمایز هستند.

اصول اقلیدس نمونهٔ تاریخی فوق‌العاده جالبی است زیرا برداشت جبری متعارف، مانند آنچه از (۱) مشهود است، به‌صورت برداشت غالب از کار اقلیدس (از جمله در آموزش ریاضی) درآمد و تا اندازه‌ای شایع شد که در قرن نوزدهم تبدیل به تعبیر تاریخی متعارف گردید چنانکه گویی اقلیدس یک «هندسه‌دان جبری» بوده است که ظاهراً از هندسه حرف می‌زده ولی در واقع جبری عمل می‌کرده است. یکی از حامیان این برداشت، هیث بود که ویراست و ترجمهٔ انگلیسی او از اصول که اول بار در سال ۱۹۰۸ انتشار یافت، هنوز هم پراستفاده‌ترین متن انگلیسی اصول است که، البته امروز معمولاً به ویراست دوم آن [۱۱] مراجعه می‌شود. متخصصان زبان یونانی به من گفته‌اند که ترجمهٔ او هم از لحاظ زبانی و هم از نظر ریاضی بسیار قابل اعتماد است؛ به‌خصوص، در قضیهٔ فیثاغورس و در همهٔ مباحث دیگر، بر خلاف بسیاری از ترجمه‌های قبلی، از «مربع بر ضلع» صحبت می‌کند نه «مربع ضلع» که از آن مفهومی جبری مستفاد می‌شود (کلمهٔ «apo» یونانی هم معادل «بر» یا «روی» و هم معادل کسرهٔ اضافه است) با این حال، هیث صورتهای جبری بسیاری از گزاره‌ها را به ترجمهٔ خود افزوده است، ظاهراً بدون اینکه متوجه تفاوتها باشد.

هر چند بعضی از مورخانِ آن زمان اثر اقلیدس را تعبیر جبری نمی‌کردند ــ نمونهٔ آنها دایکسترهوییس هلندی [۲۶، فصل ۵] است ــ دیدگاه استاندارد [مبتنی بر تعبیر جبری] از دههٔ ۱۹۶۰ به بعد بود که با چالش جدی روبه‌رو شد. به‌ویژه در اواسط دههٔ ۱۹۷۰، مورخی به نام ساباتی آنگورو[1]، برخلاف نظر بعضی از ریاضیدانان علاقه‌مند به تاریخ، به شدت از آن انتقاد کرد. درستی اتهاماتی که آنگورو در مورد اشتباهات تاریخی و اتکا به نگرشِ روز به جای نگرش تاریخی به آنها وارد کرد تا حد زیادی معلوم شده است. حریفانِ ریاضیدانِ او، میراث‌نگر بودند [۲۰].

در بخش ۸ مثال دیگری از اقلیدس خواهیم آورد، ولی اول به بررسی بعضی از نتایج کلی این تمایز می‌پردازیم.

1. Sabetai Unguru

۳. بعضی از تفاوتهای اصلی میان تاریخ و میراث

واضح است که تمایز بین تاریخ شئ N و میراث آن به پیشینه و پیامدهای آن مربوط است؛ اما موضوع به اینجا ختم نمی‌شود زیرا تاریخ هم با پیامدهای N سروکار دارد. برای روشن شدن موضوع به اندرزی توجه کنید که در مورد هر نوع تاریخ‌نگاری داده می‌شود و آن اینکه در مورد N (مثلاً قضیهٔ فیثاغورس در اصول) تاریخی‌اندیش باشید یعنی با فراموش کردن آنچه بعد از N روی داده است اصول را با همان دیدگاهی بخوانید که اقلیدس آن را نوشته است. ولی این اندرز، به نوعی، مصادره به مطلوب است زیرا برای فراموش کردن هر چیز E که پس از N رخ داده است باید قبلاً بدانیم که E چیست؛ ولی به این منظور باید بتوانیم E را از تاریخ N و پیشینهٔ آن جدا کنیم، یعنی تاریخ N را تشخیص دهیم.

بنابراین، تمایز بین تاریخ و میراث تا حدی به راههای بکار بردن مفاهیم پس از N بستگی دارد. نظری که ما بر آن اصرار داریم این است: وقتی معلوم شد که آن مفاهیم، مفاهیم بعدی هستند، از تمام آنها استفاده کنید؛ آنها را برای شناخت میراث ناشی از N بکار بگیرید ولی از آنها در ارزیابی تاریخ N (اینکه فلان و بهمان واقعه روی نداده) استفاده نکنید. به‌علاوه، وقتی دوره‌های بین N و دوره‌های بعدی، مثلاً حالا، را در نظر می‌گیرید، این تمایز را به دقت بکار ببرید به‌عنوان نمونه، رابطهٔ (۱) در مثال ما فقط جزئی از تاریخ دستاورد رنه‌دکارت و میراث دستاورد اقلیدس نیست بلکه میراثِ کارهای فرانسوا ویت جبردان قرن شانزدهم نیز هست که کارهای او هم جزو تاریخ دستاورد دکارت است. همچنین باید توجه کرد که تاریخ معمولاً تاریخ میراثها هم هست؛ حکایت کار ریاضیدانهاست که مفاهیمی را از گذشته (اغلب، گذشتهٔ نزدیک) می‌گیرند و آن را جرح و تعدیل می‌کنند بدون آنکه سؤالی دربارهٔ تاریخ آن مفاهیم داشته باشند.

در این زمینه، موضوعهای متعدد دیگری هم شایان بررسی است، بحث مفصل‌تری که تا حد زیادی معطوف به تاریخ است در مقالهٔ مشابهِ دیگری [۱۶] آمده است. در جدول صفحهٔ بعد، جنبه‌های اصلیِ بررسی مفاهیم گذشتهٔ N به دو شیوهٔ متفاوت پیشگفته خلاصه‌وار ذکر شده است. تناقض ظاهری بین ردیفهای سوم و چهارم نیاز به توضیح دارد. وقتی مورخْ مطالب آشفتهٔ گذشته را بازسازی می‌کند، مفاهیمی را که امروز می‌دانیم با هم متفاوت‌اند، و میراث‌نگر روی این جنبه تأکید دارد، درهم می‌آمیزد. اما تفاوتی که این بازسازی برملا می‌کند، تفاوت بین جهل گذشته نسبت به این تمایز و علم کنونی ما (و میراث‌نگر) به آن است.

۴. تغییر عادتها

مسألهٔ دیگری که نمی‌توان جوانب و موارد آن را با جدولبندی بیان کرد، مربوط به استفاده از مفاهیمی است که به‌صورت استاندارد درآمده‌اند و امروز طبق عادت بکار می‌روند. چنین عاداتی ممکن است در تعیین میراث ناشی از N خیلی مفید باشند ولی ممکن است منشأ اشتباهاتی تاریخی هم باشند که باید مراقب آنها بود. در اینجا سه مثال مهم را ذکر می‌کنم.

مثال اول: نظریهٔ مجموعه‌های گئورگ کانتور پس از پشت سر گذاشتن تاریخ جالبی که از دههٔ ۱۸۷۰ آغاز می‌شود [۹]، بیش از یک‌صد سال است که جزو ابزارهای ریاضی ماست؛ بنابراین استفاده از آن برای ریاضیات این دوره کار درستی است. هر چند مفهوم گردایه‌های اشیا، دستکم از زمان یونان باستان، در ریاضیات مورد توجه قرار داشته ولی نظریهٔ اولیه در باب آنها نظریهٔ جزء و کل بوده است که در آن (مثلاً) زنان انگلیسی بخشی از قشر زنان را تشکیل می‌دهند، عضویت از مشمولیت متمایز نمی‌شود، و یک شئ با مجموعه‌ای که فقط شامل آن شئ است فرقی ندارد. نظریهٔ جزء و کل و نظریهٔ مجموعه‌ها، چه از لحاظ فنی و چه از لحاظ فلسفی تفاوتهای بسیار دارند که مورخ باید آنها را به دقت مشخص کند. ولی میراث‌بر می‌تواند از نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده کند بدون آنکه احتمال فریبکاری در کار باشد.

مثال دوم: هر چند تأثیر اقلیدس بر ریاضیات غربی زیاد بوده است، پافشاری او در بنا کردن نظریه بر اصول موضوع و متعارفی به‌ندرت مورد تقلید اروپاییان قرار می‌گرفت (از نمونه‌های نادر، پرینکیپیای نیوتن است که تا اندازه‌ای این روش را مراعات کرده است). در اواخر قرن نوزدهم بود که اصل موضوعی‌سازی نظریه‌های ریاضی، به‌خصوص در ارتباط با هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و ظهور جبرهای مجرد، رواج یافت [۸]. هر دو پیشرفت توجه داوید هیلبرت را به خود جلب کرد و او را به استفادهٔ گسترده از روش اصل موضوعی در خلال نیمهٔ اول قرن بیستم برانگیخت؛ این رهیافت امروز کاملاً استاندارد شده است. در این مورد می‌توان مسیر روشنِ میراث‌بری را تا زمان حاضر ترسیم کرد، اما مورخ هنگام بررسی ساختار نظریه‌های قدیمی باید احتیاط به خرج دهد زیرا کاملاً ممکن است که اصل موضوعی‌سازی در آن نظریه‌ها از حد مشخص کردنِ بعضی از قواعد یا اصول پایه فراتر نرفته باشد. نظریهٔ مجموعه‌های کانتور نمونهٔ خوبی است؛ هر چند این نظریه نیز در اواخر قرن نوزدهم عرضه شد ولی کانتور علاقهٔ چندانی به اصل موضوعی‌سازی نظریه‌اش نشان نداد.

مثال سوم: نظریهٔ بردار و ماتریس به‌صورت موضوعی استاندارد در ریاضیات در آمده است هر چند این موقعیت (به‌خصوص در مورد دومی) پس از دههٔ ۱۹۳۰ به دنبال پیشرفتهای پراکندهٔ تاریخی که در زمینه‌های مختلف طی قرن نوزدهم به‌دست آمده بود حاصل شده است. در این مورد هم باید در بکار بردن این نظریه‌ها در مورد دستاوردهای قبلی دقت کرد. مثلاً می‌توان بسیاری از فنون و روشهایی را که ریاضیدانانی چون اویلر، لاگرانژ، و لاپلاس ابداع کردند به شکل برداری و ماتریسی نوشت ولی این کار به شناخت ما از تاریخ کمکی نمی‌کند چون هیچ‌یک از این چهره‌ها نمی‌دانستند که نظریه‌های آنها قابل ارائه به شکل رشته‌ها یا آرایه‌هایی از عناصر اسکالر است بلکه آنها با گردایه‌هایی از دستگاههای معادلات خطی یا دیفرانسیل یا فرمهای مربعی و دو خطی سروکار داشتند [۱۴، فصلهای ۵ـ۶]. وارد کردن بردارها یا ماتریسها به صحنه، صرفاً از مقولهٔ تغییر نمادگذاری نیست، بلکه نظریه‌های جدیدی وارد کار می‌شوند. از طرفی، البته، داشتن چنین امکاناتی خوب است؛ ولی اگر مورخ از این نظریه‌ها استفاده می‌کند باید تذکری در مورد ترتیب صحیح وقایع از لحاظ تاریخی بدهد.

برخلاف تاریخدانان که باید همهٔ این احتیاطها را به عمل آورند، میراث‌بران کاملاً حق دارند همهٔ این‌گونه تغییرات را در صورتبندی نظریه انجام دهند، و ممکن است ریاضیات میراث‌گونهٔ زیبایی از این رهگذر پدید آید. به‌علاوه، ممکن است تاریخی از ریاضیاتِ تولیدشده پس از دورهٔ اولیهٔ مورد مطالعه خلق شود زیرا چنانکه در بخش ۱ گفتیم، ریاضیدانها آثار گذشته را معمولاً با دید میراث‌نگرانه می‌خوانند.

به‌عنوان مثال، کارهای لاگرانژ و دیگران را در مکانیک در نظر بگیرید. مسألهٔ مهمی که او در دههٔ ۱۷۷۰ صورتبندی کرد، اثبات ریاضیِ پایداریِ

جنبهٔ مورد بررسی	تاریخ	میراث
خاستگاه و زمینه(های) N	موضوعی مهم که شاید تعیین آن دشوار باشد (مثلاً در مورد اصول اقلیدس)	احتمالاً دارای اهمیت جزئی
انواع تأثیر	ممکن است منفی یا مثبت باشد؛ هر دو باید مدنظر قرار گیرند	احتمالاً فقط تأثیرات مثبت مورد نظر قرار می‌گیرد
روابط N با مفهومهای قبلی و بعدی	موضوعی مهم، بر تفاوتها به اندازهٔ تشابهات، و شاید بیشتر، تأکید می‌شود	موضوعی مهم، به تشابهات بیشتر از تفاوتها توجه می‌شود
برخورد با ابهامات مشهود در N	بازسازی آنها با حداکثر وضوح ممکن	تشخیص دادن و سپس از میان برداشتن آنها
تحولات موفقیت‌آمیز	بسیار مهم، ولی بررسی شکستها، تأخیرها، فرصتهای از دست‌رفته، و دستیابیهای دیر هنگام هم مهم است	احتمالاً مهم‌ترین نکته است
نقش ترتیب تاریخی	معمولاً مهم، ممکن است اثبات آن دشوار باشد	صرف‌نظر از کلیات، احتمالاً چندان مهم نیست
پیامدهای تاریخی	ممکن است آینده‌نگریهای (امیدها، انتظارات) شخصیتهای تاریخی در مورد N بازسازی شود	ممکن است گذشته‌نگریها و چشم‌انداز تاریخی تحولات پس از N بازسازی شود
جبر تاریخ	ترجیحاً ادعا نمی‌شود؛ تحولات واقعی چنین و چنان بوده است ولی نه الزاماً چنین و چنان	ممکن است حکمی با رنگ و بوی جبرگرایانه داده شود. ما باید به اینجا می‌رسیدیم (ستون تاریخ را نگاه کنید!)
مبانی یک نظریه	کندوکاو برای رسیدن به آنها، و بناسازی روی زمین باتلاقی	عرضهٔ مبانی به‌طور دقیق، و بناسازی روی زمین سفت
میزان اهمیت یا وجاهت N	ممکن است مستقل از مضمون آن در طول زمان تغییر کند؛ باید مدنظر قرار گیرد (و شاید توضیح داده شود)	معمولاً مورد نظر نیست؛ به وضعیت فعلی آن توجه می‌شود

منظومهٔ سیارات بود (دانشمندان قبلی مانند نیوتن و اویلر با اعتقاد به اینکه خداوند منظومه را از خطر حفظ می‌کند از کنار این مسأله می‌گذشتند؛ آنها در این مورد متأثر از مذهب بودند). هدف نظریهٔ درخشان لاگرانژ اگر به زبان نظریهٔ ماتریسها و با اصطلاحات امروزی بیان شود، یافتن اثباتی برای حقیقی بودن همهٔ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس خاصی بود. اما او نظریهٔ ماتریسها را در اختیار نداشت و سروکارش با فرمهای درجهٔ دوم متناظر بود. همین موضوع دربارهٔ لاپلاس، که نتایج او را تا حدی تعدیل کرد، صدق می‌کند. هیچ‌یک از آن دو نفر اثبات دقیقی نیافت. کار مهم بعدی در سال ۱۸۲۹ و (عجیب اینکه) به‌دست کوشی انجام شد. وی در تحقیقات خود دربارهٔ این مسأله، «جدول» درایه‌های اسکالر را تدوین و تنظیم کرد[۱۷]. بنابراین، نظریهٔ ماتریسها شاید ــ در واقع، باید ــ برای توصیف کار کوشی به‌کار رود، و از این طریق می‌توانیم بخش مهمی از میراثی را که از پیشینیانش به او رسید بشناسیم، و این مثال خوبی است از پرسش «چه اتفاقی نیفتاد؟» زیرا کوشی هرگز اهمیت دستاورد خود را درک نکرد و بعداً به‌ندرت آن را به‌کار برد و به این علت، متأسفانه، نتوانست بنیانگذار نظریهٔ طیفی ماتریسها باشد.

۵. زمینهٔ فلسفی

واضح است که این صحبتها دربارهٔ مفاهیم جدید و قدیم، پیدایش و تکامل نظریه‌ها، و نظایر اینها، منحصر به‌ریاضیات نیست بلکه دربارهٔ تاریخ هر یک از علوم دیگر (به انضمام فناوری، مهندسی، و پزشکی) و در واقع هر رشتهٔ دیگر نیز مطرح است (یک مثال خوب، روشهایی است که در اجرای مطابق اصل موسیقی قدیم باید به‌کار برد یا از آنها اجتناب کرد). اصول کلی عمده‌ای که زیربنای بحث بالا هستند، از این قرارند.

اول اینکه، تأثیر تاریخ، چه آن را دوست داشته باشید و چه نداشته باشید، اجتناب‌ناپذیر است. ریاضیدانی که نظریه‌اش را بی‌توجه به تاریخ می‌پروراند نمی‌تواند با این کار از تاریخ برکنار باشد. مثلاً کسی که شیفتهٔ روش اصل موضوعی (بخش ۳) است ممکن است نظریه‌اش را به شکل بسیار صوری بدون اشاره به پیشینیان خود یا پیشینهٔ موضوع تدوین کند، اما آن پیشینه و پیشینیان در واقع وجود دارند، مثلاً نظریه‌های صوری قبلی که به‌دست اصل موضوع‌گرایان قبلی بدون اشاره به پیشینیان خودشان یا سوابق موضوع عرضه شده است. پس این سؤال که آیا تاریخ را می‌توان در ریاضیات به‌کار برد یا نه،

پرسش مناسبی نیست. مسأله این است که آیا این کار آگاهانه صورت می‌گیرد یا خیر. در واقع، مستقل از مضمون این مقاله، داشتن یک تصور تاریخی کلی از موضوع مورد نظر، هر چه باشد، مفید است.

دوم اینکه، دانش و نادانی ملازم هم‌اند. این همزیستی در حدی که سزاوار آن است مورد توجه عمومی فلسفی قرار نگرفته است. به‌خصوص، و مهم‌تر آنکه، در ریاضیات دانش دربارهٔ نادانی وجود دارد و این امر به‌ویژه وقتی مسأله‌ای صورتبندی می‌شود مشهود است. مثلاً هنگامی که دیریکله مسألهٔ همگرایی سریهای فوریه را در اواخر دههٔ ۱۸۲۰ بررسی می‌کرد، می‌دانست از شرایطی که کافی است یک تابع داشته باشد تا همگرایی به آن برقرار باشد، بی‌اطلاع است؛ مسألهٔ او دقیقاً یافتن این شرایط بود. وقتی موفق به این کار شد، می‌دانست که نمی‌داند آیا می‌توان آنها را ضعیف‌تر کرد یا نه، و به این ترتیب، مسألهٔ بعدی در این زنجیره مطرح شد (که ضمناً اولین پاسخ آن، شرط لیپ‌شیتس بود). همچنین جهل مرکب هم ممکن است، یعنی اینکه مردم ندانند که چیزی را نمی‌دانند به علت اینکه روابط بین مفاهیم مربوط هنوز معلوم نشده است. مثلاً دیریکله نمی‌دانست که نمی‌داند اثبات او چگونه بر مشخص‌سازی فضاهای توابع اثر می‌گذارد زیرا این مفهوم تا اواخر قرن نوزدهم مطرح نشده بود [۲۱].

سوم اینکه، بر اساس طرز فکر پیشگفته، همهٔ انواع معرفت را به نظریه، فرانظریه، فرافرانظریه،... تقسیم و طبقه‌بندی می‌کنند. فرانظریه در مورد ریاضیات نه تنها فراریاضیاتی از نوع فنی آن است که هیلبرت بنیانگذارش بود بلکه شامل انواعی غیررسمی هم می‌شود. به‌خصوص، تاریخ شیٔ N یک نوع آن است، میراث آن نوعی دیگر، شیوه‌های ممکن برای تدریس آن نوع سوم، راهبردهای اکتشافی برای توضیح مفهوم آن نوع چهارم، و همین‌طور ممکن است انواع دیگری هم وجود داشته باشند. رابطهٔ بین دانش و نادانی که در بالا بیان شد در فرانظریهٔ مفاهیم مربوط قرار دارد. همین‌طور، فرانظریه نیازمند فرافرانظریه‌ای است که جایگاه بحث دربارهٔ آن باشد، و به همین ترتیب، تا آنجا که نیاز باشد، می‌توان بالا رفت. مثالی از فرافرانظریه، تاریخ تاریخ ریاضیات است، و این موضوع جالبی است که اخیراً به تفصیل در [۱۰] شرح داده شده است؛ اظهارنظرهای راجع به هیث در بخش ۲ نمونه‌ای از آن است، و خود این مقالهٔ نمونه‌ای خودارجاع، که باید چشم به راه میراث آن (اگر میراثی داشته باشد) بود!

چه مورخان و چه میراث‌نگرها اگر تاریخ و میراث را متعلق به فرانظریه بدانند، لازم نیست آنچه را در مطالعهٔ گذشته می‌یابند دوست بدارند. چرا باید دوست بدارند؟ هر چه باشد، آنها (قاعدتاً) در آنجا نبوده‌اند. موضوع به اندازهٔ کافی واضح به نظر می‌رسد. به هر حال می‌توان مثلاً در مورد تاریخ نظامی، مورخ یا میراث‌نگر خوبی بود بدون آنکه هوادار نظامی‌گری بود. با این حال، کم نیستند مورخان و میراث‌نگرهایی که به موضوعها و چهره‌های مورد مطالعهٔ خود در هر نوع تاریخی دلبستگی زیادی پیدا می‌کنند، و گمان می‌کنند باید از آنچه یافته‌اند دفاع کنند. البته چنین تعلق‌خاطری اگر به‌طور طبیعی پیش آید قابل فهم است و نباید مایهٔ عذاب وجدان باشد.

ایدهٔ کلی طبقه‌بندی معرفت از منطق نمادین، و عمدتاً از کارهای کورت گودل و آلفرد تارسکی، در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ نشأت گرفته است. در منطق تمایز بین خود منطق (در سطح شیٔ) و فرامنطق بسیار ظریف و بغرنج و در نتیجه بسیار مهم است؛ از دوران یونان باستان معلوم شده بود که ناتوانی در قائل شدن نوعی تمایز موجب تعارضاتی ناخوشایند می‌شود. طبقه‌بندی به‌تدریج از منطق به رشته‌های دیگر به‌خصوص به ریاضیات و انواعی از فلسفه، سرایت کرد. یکی از طرفداران این ایده کارل پوپر بود که در اواسط دههٔ ۱۹۳۰ از کارهای تارسکی الهام گرفت. قسمتهای متعددی از فلسفهٔ ابطال‌پذیری او جنبهٔ فرافلسفی دارد، مثلاً اینکه حتمیت‌ناگرایی را بر حتمیت‌گرایی ترجیح می‌دهد [۱۹]. یکی از مقالات او که ارتباط خاصی با این مقاله دارد، «دربارهٔ منابع دانش و نادانی» [۱۸، مقدمه] است زیرا حاوی نکته‌ای است که در اغلب انواع دیگر فلسفه دیده نمی‌شود و آن اینکه، نادانی خوب است زیرا جایگاه مسائل ما (در فرانظریه) است اگر به‌صورت دانش دربارهٔ نادانی تدوین شود. در بیشترِ انواع دیگر فلسفه، نادانی یک نوع بیماری است که باید با کسب دانش درمان شود، هر چند ادعا می‌شود که این کسب دانش انجام خواهد شد (برای ملاحظهٔ صورتهای گوناگون این دیدگاه که در سنت شک‌گرایی فلسفه به آن قائل‌اند، مراجعه کنید به [۲۵، فصلهای ۱ـ۶]). تاکنون، استفادهٔ صریح از طبقه‌بندی در میان غالب فلسفه‌های رایج تاریخ (که در [۲۳] به تفصیل بررسی شده‌اند) شناخته و معمول نشده است ولی به نظر می‌رسد شایستهٔ توجه و بررسی بیشتری است.

۶. نکاتی کلی دربارهٔ استفاده از تاریخ در آموزش ریاضی

در چند دههٔ اخیر، استفاده از تاریخ در آموزش ریاضی افزایشی قابل ملاحظه و جهانی یافته است و هدف از آن، تعدیل و به چالش کشیدن تصویر رایج از ریاضیات است، تصویری که ریاضیات را منطقه‌ای خالی از انسان، مملو از پاسخ و عاری از پرسش، سرشار از جواب و عاری از مسأله نشان می‌دهد. مجموعه‌های مقالات و کتابهای بسیار و شماره‌های متعدد مخصوصی از مجلات انتشار یافته‌اند که حاوی مطالبی متنوع در این زمینه‌اند: کتابهایی درسی که اطلاعات تاریخی زیادی در آنها آمده است، تاریخهای خلاصه‌وار دستاوردهای خاص، بررسی زندگی و آثار چهره‌های تاریخی، مقایسهٔ سیر پیشرفت نظریه‌ها(ی کمابیش مشابه) در فرهنگها و ملل گوناگون، ترجمه‌هایی از متون اصلی قدیمی با توضیحات، و راهبردهای پیشنهادی برای استفاده از تاریخ در آموزش، هم در زمینه‌های خاص و هم به‌طور کلی. توجه این نوشته‌ها اغلب معطوف به انگیزه و زمینهٔ تکوین مفاهیم و نشان دادن این موضوع است که ریاضیات برخلاف ظاهر آن فعالیتی انسانی است و به‌علاوه، بخش اعظم آن منشأ غربی ندارد. طیف این مسائل به‌خوبی در جلد اخیر[۱۲] منعکس شده است.

ظاهراً بیشتر توجهات معطوف به تدریس در سطح مدرسه و کالج است، ولی آموزش در سطح دانشگاهی نیز بی‌نصیب نمانده است. در زمینهٔ ریاضیات محض کار بسیار بیشتری انجام شده است تا در زمینهٔ ریاضیات کاربردی یا قابل کاربرد، و یا احتمال و آمار؛ بسیار مناسب است که تعادلی برقرار شود. من در اینجا قصد مرور این نوشتگان را ندارم ولی به جایگاه و فایدهٔ تمایز بین تاریخ و میراث در آموزش ریاضی به‌طور کلی اشاره می‌کنم.

همان‌طور که در مورد پژوهشگران تاریخ در بخش ۱ اشاره کردیم، در متون آموزشی هم آشکارا ادراکی اجمالی از وجود تمایز [بین تاریخ و میراث] یا دست‌کم احساسی شهودی وجود دارد که ریاضیات گذشته را می‌توان به روشهای متفاوتی به‌کار برد. آموزش ریاضی بین تاریخ و میراث در کجا قرار

دارد؟ پاسخ این است: در همان جایی که باید باشد یعنی می‌تواند از هر دو طرف بهره بگیرد. اگر قرار است مفهوم N آموزش داده شود، هم تاریخ و هم میراث آن را می‌توان به‌کار برد. اصول اقلیدس نمونهٔ خوبی است که در شرح آن شیوه و بیان جبری که «میراث» اثر اقلیدس است به‌کرات به‌کار رفته و می‌رود. در عین حال «تاریخ» این اثر نیز، با هندسه‌ای که بدون حساب عرضه می‌شود، با در نظر گرفتن خط به جای طول، و با نظریهٔ زیبای نسبتها که هم در هندسه و هم در حساب او به‌کار می‌رود، شایستهٔ توجه و مطالعه است.

۷. هجو تاریخ، و حسابان

من مدتها قبل در مقاله‌ای[۱۳] اصطلاح «هجو تاریخ»[1] را برای مشخص کردن روشی که طبق آن می‌توان تاریخ و نیز میراث را در آموزش ریاضی به‌کار برد، وضع کردم. با این روش، ویژگیهای کلی سیر وقایع تاریخی مدنظر قرار می‌گیرد و به‌کار می‌رود، ولی معمولاً مسیرهای انحرافی و پیچیدگیهایی در سیر تاریخی دیده می‌شود که هر چند برای تاریخ‌نگار جالب است، در تدریس مشکل ایجاد می‌کند و از این‌رو باید کنار گذاشته شود یا حداکثر به‌طور گذرا از آنها یاد شود. «روش تکوینی» اُتو تونپلیتس، که وی آن را در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ در ارتباط با تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال معرفی کرد، به‌منظور مشابهی ارائه شده است[۲۴]. اخیراً جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) کتاب درسی بدیع و مهمی به قلم دیوید برسود دربارهٔ آنالیز ریاضی متغیر حقیقی انتشار داده است که در آن جایگاه برجسته‌ای به دستاوردهای مهم به‌خصوص در قرن نوزدهم، مانند سریهای فوریه، تخصیص یافته است[۵].

چنانکه برسود بحق می‌گوید، یک نوآوری مهم آن قرنْ بنیانگذاری آنالیز در دههٔ ۱۸۲۰ به‌دست کوشی بود. رهیافت او مبتنی بر نظریهٔ پیچیدهٔ جدیدی دربارهٔ حد بود که در آن مفهوم حد به‌عنوان اینکه یک مفهوم شهودی است به حال خود رها نمی‌شد. این نظریه از لحاظ سازماندهی موضوع و صورت و اثبات قضایا بی‌شک بسیار برتر از نظریه‌های پیشین بود؛ اما فقدان روشهای اکتشافی در آن مشهود بود و هم همکاران و هم دانشجویان او به شدت از آن خرده می‌گرفتند [۱۴، فصلهای ۱۰-۱۱، و ۸.۲۰].

در اینجا مثال صریحی از هجو تاریخ می‌آورم که آن را در تدریس خودم مفید دیدم. کوشی قیاس جالب‌توجهی به‌کار برد و آنالیز حقیقی خود را با متغیرهای مختلط و توابع آنها وفق داد و از این طریق مبحث جدید مهمی را وارد ریاضیات کرد ولی این نظریه در اولین برخورد عجیب به نظر می‌رسد زیرا در آن از عباراتی متناظر با عبارتهای موجود در آنالیز حقیقی استفاده می‌شود ولی اثری از خمها، مماسهای وارد بر آنها و مساحت سطوح زیر آنها دیده نمی‌شود. در میان قضایای بسیاری که کوشی ثابت کرد، امروز یک قضیهٔ مهم نام او را بر خود دارد یعنی این قضیه که انتگرال یک تابع تک‌مقداری و مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته روی، و در درون، هر مسیر بستهٔ C صفر است. این قضیه در نظر دانشجویان، و از جمله در نظر خود من در سالها پیش، قضیهٔ عربیی به نظر می‌رسید و اثبات سریع و بی‌شک درستِ آن با استفاده از معادلات کوشی-ریمان و قضیهٔ گرین، از غرابت آن نمی‌کاست.

کوشی از دههٔ ۱۸۱۰ تا دههٔ ۱۸۴۰ گهگاه به پروراندن نظریه‌اش می‌پرداخت[۲۲]، و این صورت از قضیه‌اش آخرین صورت آن است که صفحهٔ مختلط را جایگاه خم C در نظر می‌گیرد. من دریافته‌ام که یکی از مراحل قبلی نظریهٔ او به فهم این قضیه کمک می‌کند. وی در بررسی انتگرال $f(x)$ با متغیر حقیقی x روی دامنهٔ $x_0 \le x \le X$ (در اینجا نمادهای خود او را به‌کار می‌بریم)، مجموع مساحات S را به‌ازای افرازی از مقادیر x روی دامنه تشکیل داد، زیرافرازهای متوالی را در نظر گرفت و مجموعهای متناظر را تشکیل داد، و انتگرال را به‌صورت مقدار حدی این دنباله، در صورت وجود این حد، تعریف کرد. این شیوه برای تعریف این انتگرال مدتهاست به‌صورت شیوهٔ متعارف در آمده است و روایت او از موضوع هنوز هم ارزش خواندن و آموختن دارد[۶، درس ۲۱].

کوشی مدت کوتاهی بعد قیاس خود را به‌کار گرفت. وی انتگرال یک تابع پیوسته و متناهیْ‌مقدار از متغیر مختلط، چون «$f(x+y\sqrt{-1})$»، را به این طریق تعریف کرد که عبارت متناظر با S را برای $f(x)$ تشکیل داد در حالی‌که $x+y\sqrt{-1}$ دنباله‌ای از مقادیر بین حدهای «$x_0+y_0\sqrt{-1}$» $=A$ و «$X+Y\sqrt{-1}$» $=B$ را اختیار می‌کرد که به‌ازای آنها هر دوی x و y توابعی پیوسته از یک متغیر پارامتری t بودند. سپس با استفاده از انتگرال‌گیری جزءجزء و حساب وردشها ثابت کرد که مقدار این انتگرال بین A و B «مستقل از ماهیت توابع» مربوط است[۷، بخش ۳]. آنگاه قضیهٔ مسیر بسته با انتگرال‌گیری روی دنباله‌ای از مقادیر بین A و B و سپس در جهت عکس روی دنبالهٔ دیگری که شرایط لازم تحت آن به‌دست آیند نتیجه می‌شود؛ این دو انتگرال به‌ازای آن دو دنباله با هم حذف می‌شوند، بنابراین مقدار انتگرال روی C صفر است.

اثبات این قضیه به این شیوه مسلماً چیزی نبود که در چند سطر بگنجد، اما شناخت بسیار بیشتری حاصل شد، به‌خصوص که تعریف انتگرال با متغیر حقیقی قبلاً در جای دیگر آموخته شده بود. شرح من از ماجرا، کار کوشی را از لحاظ تاریخی تا جایی تعقیب می‌کند که او عمداً از رسم شکل برای هر دو نوع انتگرال اجتناب می‌کند. کوشی در آن مرحله از زندگی علمی‌اش مفاهیم هندسی را نادقیق می‌دانست و دوست داشت از آنها پرهیز کند. وضعیت هندسه موضوع جالبی برای بحث در کلاس درس است، و در واقع من دامنهٔ هجو تاریخ را با رسم نمودارهایی به ابتکار خودم گسترش دادم. همین‌طور، بعضی موارد و جزئیات دیگری را که کوشی در نظریهٔ خود آورده بود کنار گذاشتم. اما پرسشهایی مطرح کردم از قبیل اینکه آیا کوشی مشتق f را پیوسته فرض می‌کرد یا نه (او این کار را می‌کرد، ولی به‌طور ضمنی)؛ و همچنین روایت سال ۱۸۲۵ او را از قضیهٔ مانده‌ها در درس آوردم با تذکر این نکته که، برخلاف آنچه بعداً معمول شد، او فرض می‌کرد $x+y\sqrt{-1}$ دقیقاً از قطبی از $f(x+y\sqrt{-1})$ بگذرد نه از اطراف آن[۶، بخش ۸].

مثالهای مورد بحث در این بخش به حسابان و آنالیز ریاضی مربوط می‌شد چون این مطالعات موردی تصادفاً در آن مبحث صورت گرفته است. ولی روشهای تکوینی و هجو تاریخ شیوه‌هایی هستند که می‌توان آنها را در مورد هر مفهوم ریاضی یا در هر سطحی از تدریس به‌کار برد.

۸. پیشنهادهای باشماکووا

روابط بین دانش و نادانی که در بخش ۵ به آن اشاره شد نیازمند بررسی جدی است، از جملهٔ حسنِ نادانی به‌عنوان منشأ مسأله‌هایی (کوچک یا بزرگ) که باید با آنها دست‌وپنجه نرم کرد. یک حوزهٔ مهم پژوهش که این روابط در آن چشمگیر است، طراحی سرفصلهای دروس و شیوه و ترتیب تدریسِ مباحث

1. history-satire

پیشنهادی است، به‌خصوص وقتی که طراح به بررسی مرحله‌ای می‌پردازد که باید جهل دانش‌آموز یا دانشجو در مورد مفاهیم مشخصی از میان برود.

به‌عنوان مثال، به بررسی شیوه‌ای در تاریخ‌نگاری می‌پردازیم که در سالهای اخیر، باشماکووا مورخ روسی آن را پیشنهاد کرده است؛ اخیراً دو تا از کتابهای او به انگلیسی ترجمه شده و جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) آنها را به خاطر سودمندی‌شان در آموزش ریاضی انتشار داده است. در بحث راجع به تاریخ جبر متعارف موضع او به‌صورت کلی و بسیار صریح در مقالهٔ مشترکی از او و واندالوکیس[۴] بیان شده است. از نظر آنها، دو مرحلهٔ اصلی در پرداختن به یک متن تاریخی وجود دارد. «اول باید متن به زبان ریاضی معاصر 'ترجمه شود' یعنی مدل مناسبی برای آن ساخته شود. این کار برای فهم متن و دریافتِ محتوای ریاضی آن ضروری است» (ص ۲۵۱). در مرحلهٔ دوم «لازم است اثر مورد نظر در چارچوب علوم زمان خودش نشانده شود» (ص ۲۵۲).

نویسندگان مقاله می‌گویند که مرحلهٔ دوم «مشکل‌تر» از اولی است؛ ولی به نظر من این کار ممکن است غیرممکن باشد زیرا در مرحلهٔ اول آنقدر مطلب میراث‌گونه گفته می‌شود که ممکن است زمینهٔ تاریخی در پس آنها پنهان شود. آنها هدف از میراث را خیلی روشن بیان می‌کنند: «ریاضیدانان در هر عصری مطالب قبلی را بازبینی و به زبان جدیدی بیان می‌کنند تا به آسانی برای دانشمندان معاصرشان قابل فهم و کاربرد باشد.» (ص ۲۵۰).

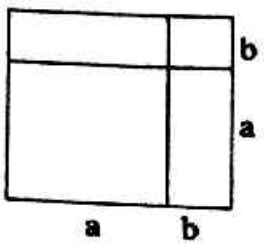
مثالهایی که در نوشته‌های باشماکووا آمده است ظاهراً نشان‌دهندهٔ درهم‌آمیزیِ تاریخ و میراث بدون تأکید بر تمایز بین آنهاست که در بخش ۷ مورد بحث قرار گرفت. مثلاً در مورد قضیهٔ ۴ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس، اتحاد درجهٔ دوم

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (2)$$

را قرائت مشروعی از این قضیه می‌داند [۱، ص ۸۸]، [۳، ص ۱۶۵].

در تاریخ مختصر جدیدتری از جبر که وی با همکاری اسمیرنووا نوشته است، رابطهٔ (۲) «معادل» با شکل ۲ قلمداد شده است [۳، فصل ۲]؛ و در سرتاسر این کتاب نمادهای نوین غلبه دارند، هر چند اصطلاحات و نمادهای قدیمی‌تر هم تا حدی به تفصیل عرضه شده‌اند [۳، فصلهای ۴ـ۵]. غلبهٔ میراث بر تاریخ در یک پیوست تاریخ‌نگاشتی عمومی، آنجا که مؤلفان به توضیح اصطلاح «جبر هندسی» می‌پردازند آشکار است زیرا جبر را مقوله‌ای تاریخی به‌شمار می‌آورند که از «ردهٔ مسائل وابسته به جبر امروزی» برآمده است (ص ۱۶۴). بنابراین، در نظر آنها، مقالهٔ دوم اقلیدس راجع به اتحادهایی جبری نظیر (۲) است (به‌خصوص به مقالهٔ باشماکووا در[۲] نگاه کنید): در واقع، جدیدترین موضع او تحمیل قرائتهای جبری بر حساب و هندسهٔ باستانی در همهٔ فرهنگهاست (نگاه کنید به[۳، صص ۱۶۳ـ۱۷۲]) و در این موضع، باشماکووا و اسمیرنووا به نفع ریاضیدانان و علیه آنگورو (که عدم توافق آنها پیشتر در بخش ۲ شرح داده شد) رأی می‌دهند.

ترجیح نمادهای جدید در این کتاب با هدف آن که عمدتاً آموزشی است سازگار است و زنجیرهٔ مهمی از تأثیرات میراث‌بری را نشان می‌دهد. ولی در حکمهای کلی نقل شده دربارهٔ تعبیر تاریخی به نظر می‌رسد میراث را اشتباهاً به جای تاریخ گرفته‌اند. از نظر من، اقلیدس در مقالهٔ دوم قضایایی راجع به زیرناحیه‌هایی از شکلهای مسطح راست‌خط مانند مربع، مستطیل، و مثلث ارائه می‌دهد (مانند مثال ذکر شده که در آن، مکانهای زیرمربعها



شکل ۲

و زیرمستطیلها نسبت به هم در علامت «+» گم شده است)، آن مقاله و همین‌طور همهٔ مقاله‌های هندسی دیگر اصول فاقد محتوای جبری است. ولی جبر در میراث پسایوناني هندسهٔ اقلیدس به‌وضوح پدیدار می‌شود. هر دو قرائت برای آموزش ریاضی ارزشمندند هر چند بهتر است تمایز آنها روشن شود. در واقع، تاریخ معادلات جبری، مانند خودِ اثر اقلیدس، موضوع جالبی برای هجو تاریخ است.

۹. کلام آخر

من در این مقاله، و با تفصیل بیشتر در مقالهٔ دیگری در همین زمینه [۱۶]، این نظر را مطرح کرده‌ام که تاریخ ریاضیات با مطالعات میراث‌نگرانه‌ای که برای استفاده از ریاضیات گذشته می‌شود تفاوت اساسی دارد. هر دو نوع مطالعه در آموزش ریاضی، آنجا که صحبت از ریاضیات گذشته در میان است، مفیدند. بیشتر مثالهای ارائه‌شده در این مقاله از دوره‌های نسبتاً متأخر گرفته شده‌اند و این امر تصادفی نیست زیرا حوزه‌های تخصصی من مربوط به این دوره‌هاست. ولی این مثالها به‌خودی خود اهمیتی ندارند. در واقع، چون تمایز بین تاریخ و میراث را موضوعی عام می‌دانیم، بینهایت مثال دیگر هم می‌توان آورد؛ از خواننده دعوت می‌شود مثالهایی از خودش بیاورد. یک منبع غنیِ مثالها با در نظر گرفتن شیوه‌های متعددِ تغییر مفاهیم و حکمها به‌دست می‌آید به‌خصوص وقتی که آن حکمها قضیه‌ها یا نظریه‌های مهمی باشند. این تغییرات از جمله شامل تغییر نتایج شناخته‌شده به‌وسیلهٔ گسترش، تعمیم، و یا تجرید است، همچنین واکنش در برابر مثال ناقض، نمایش مفروضاتی که قبلاً بدیهی در نظر گرفته می‌شدند به‌صورت اصول موضوع، جرح و تعدیل الگوریتمها، برقراری یا شاید حذف روابط بین شاخه‌ها (مانند هندسه با یا بدون حساب)، رده‌بندی اشیای یک نظریه به انواع گوناگون، تغییر حالت بین اصل موضوع، قضیه، و تعریف، و کاربردهای جدید در درون ریاضیات و در رشته‌های دیگر.

در این مقاله به موضوعات مربوط به تاریخ و تاریخ‌نگاری توجه بیشتری شده است تا موضوعات مربوط میراث؛ ولی هیچ‌گونه قضاوت ارزشی به عمل نیامده است زیرا همان‌طور که در بخش ۱ گفته شد، هیچ‌یک از این دو نوع فعالیت تابع دیگری نیست. می‌توان مقاله‌ای نوشت که تمرکز آن بر کارهای خوب و بد در مطالعات میراثی باشد. این دو فعالیت متمایز از هم‌اند ولی تأثیرات مفیدی برهم دارند و هریک پرسشهایی در پیش می‌گذارد که دیگری باید به آن بپردازد.

مراجع

1. I. G. Bashmakova, Diophantine equations and the evolution of algebra, *Transl. Amer. Math. Soc.* **147** (2) (1990) 85-100.

2. ———, *Diophantus and Diophantine Equations* (trans. A. Schenitzer), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1997.

3. I. G. Bashmakova, and G. Smirnova, *The Beginning and Evolution of Algebra* (trans. A. Schenitzer), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2000.

4. I. G. Bashmakova and I.M. Vandaloukis, On the justification of the method of historiographical interpretation, in *Trends in the Historiography of Science*, K. Gavroglu et al., eds., Kluwer, Dordrecht, Boston and London, 1994, pp. 249-264.

5. D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1994.

6. A. L. Cauchy, *Résumé des Leçons Données à l'Ecole Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, vol. 1 [and only], de Bure, Paris, 1823; also in *Oeuvres Complètes*, ser. 2, vol. 4, Gauthier-Villars, Paris, 1898; pp. 5-261.

7. ———, *Mémoire sur les intégrales définies, prise entre des limites imaginaires*, de Bure, Paris, 1825; also in *Oeuvres Complètés*, ser. 2, vol. 15, Gauthier-Villars, Paris, 1974, pp. 41-89.

8. J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, 3 vols., Hermann, Paris, 1938.

9. J. W. Dauben, *Georg Cantor*, Harvard University Press. Cambridge, Mass., 1979, reprinted by Princeton University Press, Princeton, 1990.

10. J. W. Dauben and C. J. Scriba, eds., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, Birkhäuser, Basel, 2002.

11. Euclid, *Elements*; edition used: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd ed., 3 vols. (ed. and trans. T. L. Heath), Cambridge University Press, Cambridge, 1926; reprinted by Dover, New York, 1956; 1st ed., 1908.

12. J. Fauvel and J. van Mannen, eds., *History in Mathematics Education. The ICME Study*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

13. I. Grattan-Guinness, Not from nowhere. History and philosophy behind mathematical education, *Int. J. Math. Edu. in Science and Technology* **4** (1973) 421-453.

14. ———, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*. 3 vols., Birkhäuser, Basel, and Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1990.

15. ———, Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica* **23** (1996) 355-375; printing correction in **24** (1997) 213.

16. ———, The mathematics of the past. Distinguishing its history from our heritage, *Historia Mathematica* (to appear).

17. T. W. Hawkins, Cauchy and the spectral theory of matrices, *Historia Mathematica* **2** (1975) 1-29.

18. K. R. Popper, *Conjectures and Refutations*, Routledge and Kegan Paul, London, 1963.

19. ———, *The Open Universe. An Argument for Indeterminism*, Hutchinson, London, 1982.

20. D. Rowe, New trends and old images in the history of mathematics, in *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, R. Calinger, ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1996, pp. 3-16.

21. R. Siegmund-Schulze, Die Anfänge der Functionalanalysis, *Archive for History of Exact Sciences* **26** (1982) 13-71.

22. F. Smithies, *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

23. M. Stanford, *An Introduction to the Philosophy of History*, Blackwells, Oxford, 1997.

24. O. Toeplitz, *The Calculus. A Genetic Approach*, University of Chicago Press, Chicago, 1963.

25. P. Unger, *Ignorance. A Case for Scepticism*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

26. K. van Berkel, *Dijksterhuis. Een biografie*, Bert Bakker, Amsterdam, 1996.

******

• Ivor Grattan-Guinness, "History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education", *Amer. Math. Monthly*, (1) **110** (2004) 1-11.

* ایوار گراتن‌ـگینس، استاد بازنشستهٔ تاریخ ریاضیات و منطق در دانشگاه میدل‌اسکس، انگلستان. وی از ویراستاران مجلهٔ *Annals of Science* (در زمینهٔ تاریخ علم) و بنیانگذار مجلهٔ *History and Philosophy of Logic* و ویراستار چندین مجموعه و نشریهٔ دیگر بوده است.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

آموزش و مسأله

رویکردی نظریهٔ گروهی به یک دستور مشهور افراز*

مایکل گریدی*
ترجمهٔ علیرضا جمالی

نظریهٔ افرازها از سدهٔ هجدهم میلادی مورد توجه برخی از نخبگان ریاضی بوده است. هر چند به نظر می‌رسد این نظریه کاربرد عملی کمی داشته باشد یا اصلاً نداشته باشد، دشواری آن درست به اندازه است به این معنی که مسائل آن به هیچ‌وجه بدیهی نیستند، ولی در عین حال چنان دشوار نیستند که انسان از تلاش برای حل آنها دلسرد شود.

امیل گراسوالد [۸، ص ۱۰۹]

مسألهٔ اساسی نظریهٔ جمعی اعداد عبارت است از نمایش عدد صحیح مثبت دلخواه n به‌صورت مجموع اعداد صحیحی از یک مجموعهٔ مفروض. این مجموعه می‌تواند همهٔ اعداد صحیح مثبت، همهٔ اعداد اول، همهٔ مربعهای کامل، یا هر چیز دلخواه باشد. هر چنین نمایشی را افراز n می‌نامند. مسألهٔ گولدباخ دربارهٔ بیان هر عدد صحیح زوج بزرگتر از ۲ به‌صورت مجموع دو عدد اول نمونهٔ مشهور و جذابی از این مسائل است. نمایش n به‌صورت مجموع مربعها یا توانهای بالاتر نمونهٔ دیگری است.

توابع مولد که به‌وسیلهٔ اویلر برای این منظور ابداع شد، مؤثرترین ابزار را برای حل مسأله‌های نظریهٔ افرازها فراهم آورده است. روشهای ترکیبیاتی، کسرهای جزئی، و روشهای تحلیلی نیز به نتیجه‌های قابل توجهی منجر شده‌اند (مرجع استاندارد عالی [۲] را ملاحظه کنید).

در ادامهٔ بحث با نمایشهایی سروکار داریم که متضمن مجموعهای اعداد صحیح مثبت نامقیدند، و به‌خصوص با نمایشهایی که در آنها ترتیب جمعوندها مطرح نیست. به‌عنوان مثال، ۵ را می‌توان به هفت صورت افراز کرد:

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1$$
$$= 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

با این فرض که $p(n)$ تعداد افرازهای نامقید n باشد، ملاحظه می‌کنیم که $p(5) = 7$.

در صورتی‌که به یک سیستم جبر رایانه‌ای دسترسی داشته باشید، به‌آسانی می‌توانید چند صد مقدار $p(n)$ را به کمک تابع مولد کلاسیک و زیبای اویلر، یعنی تابع

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$$

به‌دست آورید. دو دستور واضح زیر، این کار را در سیستمی که من در رایانهٔ معمولی خانگی خود از آن استفاده می‌کنم انجام می‌دهد:

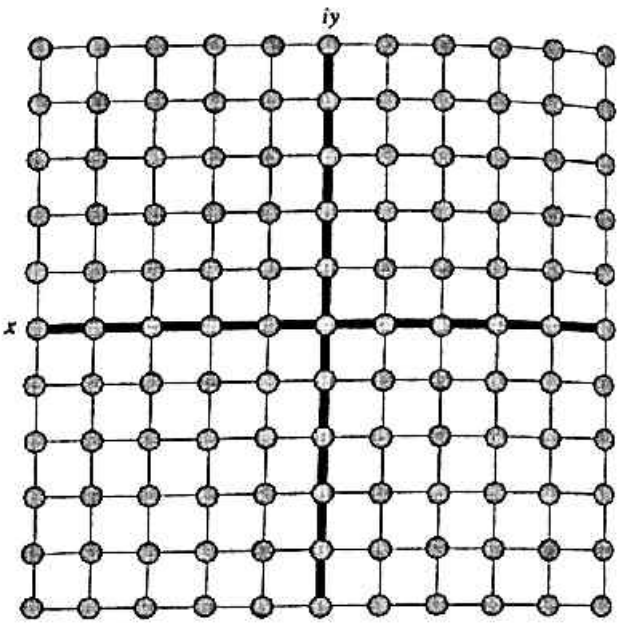
```
p = Product [(1 − x^n)^−1, n, 1, 200];
Series [p, x, 0, 200].
```

خروجی به‌صورت زیر است:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7$$
$$+ 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13}$$
$$+ \cdots + 3972999029388x^{200}.$$

با استفاده از رایانه می‌توان در کمتر از یک ثانیه درستی محاسبهٔ دستی مک‌ماهون[1] را در مورد $p(200)$ که در کتاب هاردی و رایت توصیف شده

1. Macmahon



شکل ۱ اعداد صحیح گاوسی

است نشان داد: $p(۲۰۰) = ۳۹۷۲۹۹۹۰۲۹۳۸۸$ [۱۰، ص۲۹۶]. برای ملاحظهٔ توصیف کلی و جذابی از بخشهایی از تاریخ و ویژگیهای جالب $p(n)$ به مرجع [۱] نگاه کنید.

هدف این مقاله توصیف شیوهٔ تفکر تازه‌ای در باب یک دستور مشهور افراز است. این دستور عبارت است از

$$np(n) = \sum_{i=۰}^{n-۱} \sigma(n-i)p(i) \qquad (۱)$$

که در آن $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های n را نشان می‌دهد. این رابطهٔ بازگشتی در ترکیب کردن توابع در هر دو نظریهٔ جمعی و ضربی اعداد قابل توجه است. همچنین از جنبهٔ تاریخی واجد اهمیت است، زیرا اردوش برهان مقدماتی خود را در مورد دستور مجانبی $p(n)$ بر این نتیجه استوار کرد [۵]. گراسوالد در کتاب نظریهٔ اعداد خود دو برهان کلاسیک زیبا برای دستور (۱) به‌دست می‌دهد [۸، صص۱۰۹ـ۱۳۷]. در یکی از این دو برهان توابع مولد را به‌کار می‌بندد، و برهان دیگر ترکیبیاتی است. در اینجا برهان جذیدی می‌آوریم که مبتنی بر نظریهٔ گروههاست. به جای شمردن افرازها، زیرگروهها و نمایشهای جایگشتی گروه آبلی آزاد $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را می‌شماریم. البته، این گروه با اعداد صحیح گوسی تحت عمل جمع یکریخت است [شکل۱]. خواهیم دید که تابع مجموع مقسوم‌علیه‌ها هنگام شمارش زیرشبکه‌های شبکهٔ اعداد صحیح ظاهر می‌شود، و تابع افراز وقتی که نمایشهای جایگشتی را می‌شماریم وارد کار می‌شود.

خوب، چگونه زیرگروههای یک گروه نامتناهی را بشماریم؟ مارشال هال [۹] و یان دی [۴] دستوری برای این کار به‌دست داده‌اند. برای هر گروه متناهیِ مولد G فرض کنیم M_n نمایشگر تعداد زیرگروههای G با شاخص n، و H_n نمایشگر تعداد نمایشهای جایگشتی G روی n نماد باشد. دستور دی‌ـهال رابطهٔ شمارشی اساسی بین این اعداد را بیان می‌کند: $M_۱ = ۱$، و به‌ازای شاخصهای بزرگ‌تر از ۱ داریم

$$M_n = \frac{H_n}{(n-۱)!} - \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{H_{n-i}M_i}{(n-i)!}. \qquad (۲)$$

برهان بسیار زیبایی از این رابطه را وولفارت در[۱۳] به‌دست داده است. این برهان مثال جذابی از «دستور نمایی» رایج برای شمارش نشاندار[1] است که در کتاب ویلف به روشنی توصیف شده است [۱۲، صص۶۴ـ۹۷]. ساده‌ترین حالتی را در نظر می‌گیریم که پاسخ آن را می‌دانیم: گروه دوری نامتناهی C_∞، یا معادل آن، $\mathbb{Z}$، یعنی اعداد صحیح با عمل جمع. تعداد نمایشهای جایگشتی C_∞ روی n نماد برابر است با $n!$، زیرا مولد [گروه] را می‌توانیم به هر عضو گروه متقارن S_n بنگاریم. از رابطهٔ (۲) معلوم می‌شود که

$$M_n = \frac{n!}{(n-۱)!} - \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{(n-۱)!M_i}{(n-i)!} = n - \sum_{i=۱}^{n-۱} M_i.$$

با توجه به اینکه $M_۱ = ۱$، از این رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n، $M_n = ۱$. به عبارت دیگر، یک زیرگروه با شاخص ۲ (اعداد صحیح زوج)، یک زیرگروه با شاخص ۳ (مضارب ۳)، و غیره، در $\mathbb{Z}$ وجود دارد.

برای به‌کار بستن این دستور لازم است تعداد زیرگروههای $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با هر شاخص مفروض را بدانیم. این مسأله مدتها پیش با کشف صورت نرمال ارمیتی برای ماتریسهای صحیح حل شد [۱۱، صص۱۵ـ۲۳]. ستونهای هر ماتریس صحیح ناتکین ۲×۲ پایه‌ای را برای یک زیرشبکهٔ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به‌دست می‌دهد. هر ماتریس صحیح با یک ماتریس بالا مثلثی که صورت خاصی دارد ستونیْ هم‌ارز است. صورت نرمال ارمیتی برای همهٔ پایه‌هایی که شبکهٔ یکسانی تولید کنند یکسان است، و شبکه‌های متمایزْ متناظر با صورتهای نرمال متمایز هستند. تعداد زیرگروههای $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با شاخص n همان تعداد زیرشبکه‌های متمایز با شاخص n است، و این تعداد برابر است با تعداد ماتریسهای نرمال ارمیتیِ ناهم‌ارز با دترمینانِ n.

به‌عنوان مثال، زیرگروههای با شاخص ۳ را در نظر بگیرید. در جستجوی زیرشبکه‌هایی از شبکهٔ صحیح هستیم که نقطه‌های شبکه‌ای را دو در میان به‌کار می‌برد. شکل۲، زیرگروه تولیدشده با بردارهای پایه‌ای

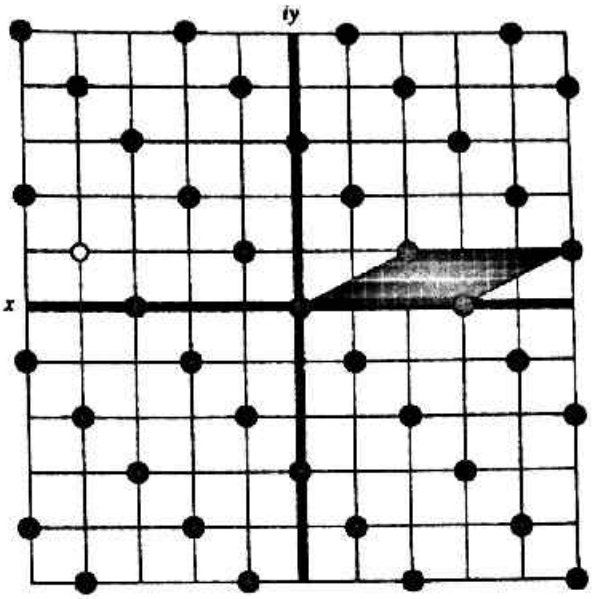
$$\begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

را نشان می‌دهد و شکل۳ نشان‌دهندهٔ زیرگروه تولیدشده با بردارهای پایه‌ای

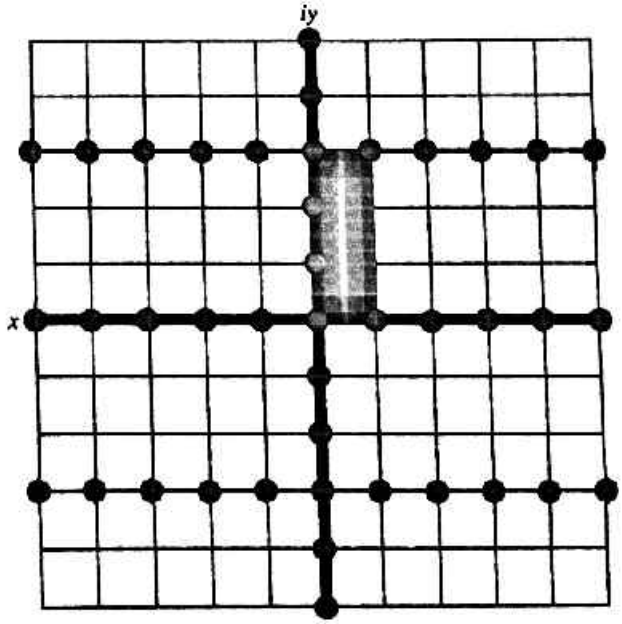
$$\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

است. در هر شکل، خانهٔ پایه‌ای متناظر نشان داده شده است. مساحت این خانه از دترمینان ماتریس بردارهای پایه‌ای به‌دست می‌آید که در هر دو حالت

1. labelled counting



شکل ۲ زیرگروهی با شاخص ۳



شکل ۳ زیرگروه دیگری با شاخص ۳

۳ است. ماتریسهای بردارهای پایه‌ای برای هر چهار زیرگروه با شاخص ۳ به‌صورت زیرند

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}. \quad (۳)$$

توضیح اینکه، تعداد دلخواهی پایهٔ ممکن دیگر برای یک شبکهٔ مفروض موجود است. به‌عنوان مثال

$$\begin{pmatrix} ۳ \\ ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۴ \\ ۵ \end{pmatrix}$$

همان شبکهٔ شکل ۲ را تولید می‌کند. اما ماتریس پایه‌ای متناظر با نخستین ماتریس مذکور در (۳) ستونی‌هم‌ارز است.

هر ماتریسی که به‌صورت نرمال ارمیتی باشد بالا مثلثی و نامنفی است، و همهٔ درایه‌های سمت راستِ یک عضوِ قطری، از آن عضو کوچک‌ترند. در حالت ۲ × ۲، شمردن چنین ماتریسهایی که دترمینان آنها n باشد بسیار آسان است. به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مانند d شکل زیر را داریم

$$\begin{pmatrix} d & * \\ ۰ & n/d \end{pmatrix}.$$

درایه‌های قطری باید d و n/d باشند که در آن d مقسوم‌علیهی از n است. به‌ازای هر d، مقادیر ممکن $*$ عبارت‌اند از d مقدار $(۰, ۱, \dots, d-۱)$، بنابراین تعداد صورتهای ناهم‌ارز برابر است با

$$\sum_{d|n} d = \sigma(n)$$

که در آن $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های n است. بنابراین لم زیر را ثابت کرده‌ایم

لم ۱. تعداد زیرگروههای $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با شاخص n برابر است با $\sigma(n)$.

آخرین کار، محاسبهٔ تعداد نمایشهای جایگشتی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ روی n نماد است. اینک $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ آبلیِ آزاد با دو مولد است:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle x, y; xy = yz \rangle.$$

برای شمردن همهٔ نگاشتهای همریخت [= همریختیها] از این گروه به S_n، فرض می‌کنیم مولد اول به عضو دلخواه α از S_n نگاشته شود. در این‌صورت مولد دوم باید به عضوی نگاشته شود که با α تعویض‌پذیر است، یعنی، به عضوی دلخواه در $C(\alpha)$، مرکزساز α. بنابراین تعداد نمایشهای جایگشتی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ برابر است با

$$\sum_{\alpha \in S_n} |C(\alpha)|.$$

برای محاسبهٔ این مجموع، قضیهٔ مدار برنساید[1] [۳، صص ۲۰۶ـ۲۱۲] را به‌کار خواهیم برد. فرض کنیم S_n با تزویج بر خودش عمل کند. تعداد مدارهای تحت این عمل همان تعداد رده‌های تزویجی است. این تعداد برابر است با $p(n)$، زیرا هر دو عضو با ساختار دوری یکسانْ مزدوج هستند و تناظری یک‌به‌یک بین ساختارهای دوری و افرازهای n برقرار است. چون پایدارساز α با این عمل، مرکزساز α است، از قضیهٔ برنساید معلوم می‌شود که

$$p(n) = \frac{۱}{n!} \sum_{\alpha \in S_n} |C(\alpha)|.$$

بنابراین لم زیر را ثابت کرده‌ایم

1. Burnside

لم ۲. تعداد نمایشهای جایگشتی $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ روی n تعاد برابر است با $n!p(n)$.

اینک برای اثبات رابطهٔ افرازی مشهور آماده‌ایم:

قضیه. فرض کنیم $p(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای نامقید n، و $\sigma(n)$ نمایشگر مجموع مقسوم‌علیه‌های n باشد. در این صورت،

$$np(n) = \sum_{i=1}^{n} p(n-i)\sigma(i)\,.$$

برهان. با بازنویسی (۲) معلوم می‌شود که

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} H_{n-i}(i-1)!M_i\,.$$

طبق لمهای ۱ و ۲، این رابطه به‌صورت زیر در می‌آید

$$n!p(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} (n-i)!p(n-i)(i-1)!\sigma(i)\,.$$

قضیه با تغییر ترتیب جملات ثابت می‌شود.

خوانندگان علاقه‌مند به کاربردهای دیگر قضیهٔ هال-دی می‌توانند به مقالات [۶] و [۷] مراجعه کنند.

مراجع

1. S. Ahlgren and K. Ono, Addition and counting: The arithmetic of partitions, *Notices A.M.S.* **48** (2001) 978-984.
2. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
3. N. Bloch, *Abstract Algebra with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
4. I. M. S. Dey, Schrier systems in free products, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **7** (1965) 61-79.
5. P. Erdős, On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions, *Ann. of Math.* **43** (1942) 437-450.
6. M. Grady and M. Newman, Residue periodicty in subgroup counting functions, *Contemp. Math.* **166** (1994) 265-273.
7. ———, Counting subgroups of given index in Hecke groups, *Contemp. Math.* **143** (1993) 431-436.
8. E. Grosswald, *Topics from the Theory of Numbers*, Birkhäuser, Boston, 1984.
9. M. Hall, Subgroups of finite index in free groups, *Canad. J. Math.* **1** (1949) 187-190.
10. G. H. Hardy and E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., Clarendon, Oxford, 1979.
11. M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, New York, 1972.
12. H. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, San Diego, 1990.
13. K. Wohlfahrt, Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe, *Arch. Math.* **29** (1977) 455-457.

* * * * * *

• Michael J. Grady, "A group theoretic approach to a famous partition formula", *Amer. Math. Monthly*, (7) **112** (2005) 645-651.

• مایکل گریدی، دانشگاه یوتای جنوبی، آمریکا

gradym@suu.edu

نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول•

فرض می‌کنیم که فقط تعدادی متناهی عدد اول $p_1, \ldots, p_k$ وجود داشته باشد. اگر m یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه با هر افراز (مرتب) m به k جزء ($m = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$) که در آن بازای $i = 1, 2, \ldots, k$، $0 \le \alpha_i \le m$، یک عدد طبیعی $n = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}$ به‌دست می‌آید. هر عدد طبیعی n بازای mای به‌این شکل است. بنابراین

$$\sum_n \frac{1}{n} = \sum_m \sum \frac{1}{p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}}\,,$$

که در آن، مجموع داخلی روی همهٔ kتاییهای $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ با ویژگی $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = m$ انجام می‌شود. حداکثر m^k تا از این kتاییها وجود دارد. بنابراین، با توجه به اینکه $p_i \ge 2$، نتیجه می‌گیریم $\sum_n \frac{1}{n} \le \sum_m \frac{m^k}{2^m} < \infty$. این تناقض نشان می‌دهد که مجموعهٔ اعداد اول متناهی نیست.

تذکر. بااستدلال ظریف‌تری آشکار می‌شود که در واقع، $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$، که در آن مجموع روی همهٔ عددهای اول p محاسبه می‌شود

دینش سینگ (Dinesh Singh)، دانشگاه دهلی، هند

• نقل از مجلهٔ ماتلی، شمارهٔ دسامبر ۲۰۰۴، ص ۸۶۳

نقد و بررسی

یانوش بویویی، هندسهٔ نااقلیدسی، و ماهیت فضا*



رابرت اُسرمن*
ترجمهٔ منیره اکبری

***János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space*, Jeremy J. Gray, MIT Press (2004) 256 pp.**

این کتاب جذاب کوچک شامل دو بخش اصلی به همراه چند بخش کوتاه‌تر است. بخشهای اصلی به‌ترتیب «مقدمه» و «پیوست» نامیده شده‌اند که این دو عنوان اطلاع چندانی از محتوای این دو بخش به‌دست نمی‌دهند. «پیوست» شامل رسالهٔ انقلابی بویویی است با عنوان فرعی «علم مطلق فضا مستقل از درستی یا نادرستی اصل یازدهم اقلیدس (که درستی آن را از پیش نمی‌توان تعیین کرد)». در اینجا هم متن اصلی لاتین و هم ترجمهٔ انگلیسی ۱۸۹۶ هلستد به‌صورت چاپ عکسی آمده است. در واقع متن اصلی ابتدا به‌صورت یک پیوست در رسالهٔ دوجلدی پدر یانوش چاپ شد، و از آنجا پیوست نام گرفت. «مقدمه» جرمی گری ــ یا اگر عنوان کامل آن را بنویسیم، «پیوست بویویی: یک مقدمه» ــ در واقع یک بررسی تاریخی ۱۲۲ صفحه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی است که عمدهٔ بحث آن دربارهٔ بویویی و پیوست اوست ولی از آن نیز فراتر می‌رود. این پیوست، علاوه بر مطالب دیگر، شامل توضیحات تاریخی جذابی دربارهٔ بحثهایی است که طی قرنهای متمادی در مورد چگونگی تدریس هندسهٔ اقلیدسی در مدرسه جریان داشته است، بحثی که امروز نیز بسیار مطرح است و شکل امروزی آن متأثر از یک دورنمای تاریخی عمیق‌تر است.

گری در آغاز به این موضوع می‌پردازد که فیلسوفان و دانشمندان، و به‌طور کلی نوع بشر، چه تصوراتی دربارهٔ دنیای فیزیکی که در آن زندگی می‌کنیم، یعنی شکل کل عالم، داشتند و طرق تأثیرگذاری این تصورات بر آن ساختهای ریاضی که به «هندسه» موسوم شد و تأثیرپذیری آن تصورات از این ساختها چه بود. به‌خصوص استفادهٔ نیوتن از صورتبندی هندسهٔ اقلیدسی همراه با موفقیت چشمگیر رویکرد او به فیزیک و نجوم بر اساس الگوی فضای اقلیدسی، هندسهٔ اقلیدسی را محفوظ داشت و چنان اطمینان و قطعیتی در مورد آن پدید آورد که تردید دربارهٔ آن نشانه‌ای از تزلزل ذهنی به حساب می‌آمد، و در واقع، واکنش جامعهٔ ریاضی روس نیز همین بود؛ اعضای این جامعه تنها افرادی بودند که می‌توانستند اولین مقاله‌های لوباچفسکی را دربارهٔ موضوعی که بعداً هندسهٔ نااقلیدسی نام گرفت و چاپ آن مقاله‌ها از سال ۱۸۲۹ در نشریهٔ گمنام روسی پیام‌رسان کازان آغاز شده بود بخوانند. خبر کارهای لوباچفسکی ظاهراً تا سال ۱۸۴۴ به گوش بویویی‌ها نرسید، که به دلایل مختلفی شگفت‌آور است؛ یکی از این دلایل به گاوس مربوط می‌شود که در داستان غم‌انگیز شروع درخشان و پایان تلخ کار یانوش بویویی نقش شرم‌آوری ایفا کرد.

ماجرای گاوس و بویویی‌ها قبل از زمانی که گری در نظر گرفته است، با دوستی نزدیک بین گاوس و پدر یانوش، فورکوش (که با نام آلمانی‌اش

ولفگانگ نیز مشهور است) از زمان دانشجویی آنها در گوتینگن آغاز می‌شود. اشتغال ذهنی خانواده به اصل توازی اقلیدس ظاهراً به آن زمان برمی‌گردد، و در واقع، بویویِ پدر اولین اثرش را در این موضوع، با عنوان نظریه موازیها، در ۱۸۰۴ منتشر کرد. او تنها یکی از افراد متعددی بود که سعی کردند ثابت کنند اصل توازی از سایر اصول اقلیدس نتیجه می‌شود. گری تا حدی به تفصیل ماجرای چنین تلاشهایی را طی قرون هجده و نوزده حکایت می‌کند، تلاشهایی که حتی بعد از اینکه بی‌ثمری آنها کاملاً معلوم شد، ادامه داشت. یکی از ریاضیدانان مشهوری که در این دام افتاد لژاندر بود، که سالهای متمادی اثباتهای غلط منتشر می‌کرد، و دیگری لاگرانژ بود، که تا آنجایی پیش نرفت که اثباتی منتشر کند اما با ارائهٔ اثباتی در «انستیتوی فرانسه» ماجرای ناراحت‌کننده‌ای برای خودش بوجود آورد. در مورد فورکوش بویویی، دوستش گاوس بود که اشتباه استدلال او را گوشزد کرد، اما او ده سال دیگر هم بر اثبات خود پای فشرد تا اینکه سرانجام ناامید شد و از آن دست کشید. پس تعجبی ندارد که وقتی پسرش یانوش، که نابغهٔ ریاضی از آب درآمده بود، به سنین نوجوانی رسید، فورکوش که قبلاً نیشِ اصل توازی را چشیده بود هشداری به پسر داد که مکرراً نقل شده است و در آن از یانوش خواست که از ماجرای او پند گیرد و مقابل این خیال خام مقاومت کند: «من این شب بی‌پایان را که همهٔ روشناییها و لذتهای زندگی من را نابود کرده است، طی کرده‌ام. از تو تمنا می‌کنم که علم موازیها را رها کنی.»

همان‌طور که معلوم شد، بویویِ پدر درست می‌گفت، اما نه به دلایلی که خودش فکر می‌کرد. چندی نگذشت که یانوش نتیجه گرفت تلاش برای اثبات اصل توازی بیهوده است و کم‌کم متقاعد شد که می‌توان یک هندسهٔ کاملاً سازگار ساخت که در آن این اصل برقرار نباشد. در ۱۸۲۵، یانوش در سن ۲۳ سالگی توانست دستاوردش را به پدر نشان دهد اما نمی‌توانست او را متقاعد کند که در آن نقصهای پنهان وجود ندارد. تازه در سال ۱۸۳۲ بود که فورکوش موافقت کرد که کار پسرش را به‌صورت پیوستی در کتاب خودش به چاپ برساند. هنگامی که گاوس نسخه‌ای از پیوست را دریافت نمود، در جواب او نامه‌ای نوشت که عملاً به دوران درخشان فعالیت ریاضی یانوش پایان داد، و همین‌طور چنانکه گری به ما می‌گوید، به رابطهٔ دوستانهٔ بین پدر و پسر، که بعد از آن سالها با هم صحبت نکردند. گاوس در این نامه پیامی می‌دهد که به طرز آزاردهنده‌ای دوپهلوست؛ او می‌گوید که خودش تقریباً همان برنامه را اجرا کرده است اما مقدار بسیار کمی از آن را به روی کاغذ آورده است و حالا چقدر خوشوقت است که می‌بیند پسر دوست قدیمی او آن را نوشته است، و بنابراین او از انجام دادن این کار معاف می‌شود. اگر گاوس علناً کارِ یانوش را تأیید می‌کرد و آن را در معرض توجه عموم قرار می‌داد، مسیر زندگی و کار یانوش تغییر می‌یافت. اما او سکوت کرد[۱] و یانوش نه تنها از هیچ حمایت عمومی برخوردار نشد بلکه متقاعد شد که پدرش به او خیانت کرده و نتایج کارهای او را پنهانی برای گاوس فاش می‌ساخته و حالا گاوس مدعی مالکیت آن شده است. همچنین هنگامی که بعدها گاوس از کار لوباچفسکی آگاهی یافت، در مورد آن اطلاعی به دوست قدیمی‌اش فورکوش نداد.

دستاورد بویویی خیلی دیر شناخته شد. گاوس در سال ۱۸۵۵ درگذشت، فورکوش و لوباچفسکی در سال بعد، و یانوش در سال ۱۸۶۰. هنگامی که مکاتبات گاوس انتشار یافت، عقاید او در مورد هندسهٔ ناقلیدسی سرانجام معلوم شد. پیوست بویویی در سال ۱۸۶۸ به لاتین ترجمه شد، سالی که برای آیندهٔ هندسهٔ جدیدی که او ابداع کرده بود بسیار سرنوشت‌ساز بود.

وقایع مهم در سرنوشت پیوست بویویی بین سالهای ۱۸۳۲ که برای اولین بار چاپ شد و ۱۸۶۸ که در سطح وسیع‌تری شناخته شد، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، عبارت بودند از انتشار مکاتبات سالهای ۱۸۶۰ تا ۱۸۶۵ بین گاوس و شوماخر، مشتمل بر نامه‌ای که گاوس در سال ۱۸۴۶ نوشت و کار لوباچفسکی در زمینهٔ هندسهٔ ناقلیدسی را تحسین کرد و گفت که وی نیز مدت ۵۴ سال است که در این نظرات سهیم است (از ۱۷۹۲ که گاوس ۱۵ سال داشت) و ارائهٔ سخنرانی افتتاحیهٔ[1] ریمان با عنوان «در مورد فرضهایی که مبانی هندسه را تشکیل می‌دهند» در ۱۸۵۴. چنین نیست که ریمان مستقیماً به بویویی یا حتی هندسهٔ ناقلیدسی به مفهوم معمول آن بپردازد بلکه نوعی بازاندیشی بنیادین در کل موضوع هندسه را پیشنهاد می‌کند که بر اساس اصول موضوع به شیوهٔ اقلیدس، بویویی و لوباچفسکی نیست بلکه بر اساس بنیادهای شاید لرزان‌تر اما بسیار انعطاف‌پذیرتر اندازه‌گیری، حسابان، و تمام حوزه هندسهٔ دیفرانسیل است که به‌دست اویلر، گاوس، و مکتب فرانسوی پرورانده شد.

تقریباً ۲۵ صفحه از «مقدمه» گری به «پیوست» بویویی اختصاص دارد و چشم‌انداز بسیار خوبی از رویکرد بویویی به‌دست می‌دهد که بیشتر معطوف به هندسهٔ «مطلق» فضا، به همراه حکمهای مشابه (اگر بتوان این عبارت را به‌کار برد) در دو هندسهٔ اقلیدسی و ناقلیدسی است اما به نتایج خاص مانند امکان «تربیع دایره» در حالت ناقلیدسی هم می‌پردازد؛ موضوع اخیر که ده بخش آخر پیوست بویویی به آن اختصاص دارد، در مقدمهٔ گری به تفصیل شرح داده شده است.

ولی به نظر من، روایت گری از تاریخ این موضوع در آنجایی که به توصیف کارهای ریمان و دنباله‌روهای او، بلترامی و پوانکاره، می‌پردازد نقایصی دارد. وی بعد از اشاره به اینکه ریمان تصمیم گرفت هندسهٔ دیفرانسیلش را، برخلاف همهٔ هندسه‌دانان قبلی، به رویه‌های دوبعدی محدود نکند، می‌گوید (ص۸۵): «او مفهوم فضاهای nبعدی را ــ البته به‌صورت نسبتاً مبهم ــ به‌عنوان فضاهایی معرفی کرد که در آنها n مختص برای مشخص کردن مکان یک نقطه لازم است و می‌توان طولها را در مسیر یک خم اندازه‌گیری کرد. او نشان داد که چگونه می‌توان ایدهٔ گاوسی خمیدگی ذاتی را به این وضعیت جدید تعمیم داد، و تقریباً به‌طور گذرا متذکر شد که سه هندسهٔ دوبعدی با خمیدگیِ ثابت وجود دارد: استوانه (خمیدگیِ صفر)، کره (خمیدگیِ مثبت)، و رویه‌های با خمیدگیِ منفی (که او تنها به آن اشاره می‌کند).»

من متحیرم، به‌خصوص از اشارهٔ گذرایِ گری به بحث مفصل و کاملاً صریح ریمان دربارهٔ رویه‌های با خمیدگیِ ثابت. ریمان در مورد خمیدگیِ صفر به‌طور مشخص از رویه‌های استوانه‌ای و مخروطی یاد می‌کند، و برای خمیدگیِ مثبت هر دو رویهٔ دورانی را که روی کره قرار ندارند و رویه‌های کلی با خمیدگیِ مثبت ثابت را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهد و خاطرنشان می‌کند که همهٔ این رویه‌ها را (بعد از برشهای مناسب، اگر لازم باشد) می‌توان روی یک کره «گستراند» یا با اصطلاحات جدید، به‌وسیلهٔ نگاشتی که یک ایزومتری موضعی است به کره‌ای با همان خمیدگی نگاشت.

1. habilitationsvortrag

درست است که ریمان در مقاله‌اش دربارهٔ بسیاری نکات به ابهام سخن گفته است، و او خود به این موضوع معترف است، ولی این موضوع جای تعجب ندارد زیرا مفاهیم جدیدی که در آنجا معرفی کرده شامل مفاهیم پیچیده‌ای مانند خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر nبعدی می‌شود، که تعریف دقیق آن تا قرن بیستم میسر نشد. اما تصور غلطی وجود دارد که او در مورد مفهوم خمیدگی در بعدهای بالاتر به همان اندازه غیردقیق سخن گفته است، ولی هیچ چیزی نمی‌تواند فراتر از حقیقت باشد. فرض او این است که شاخصی از طول قوس داریم که با یک عبارت دیفرانسیلی که فرم خاصی دارد معین می‌شود. این شاخص امروز به‌عنوان متریک ریمانی شناخته می‌شود، و او دو راه مختلف برای محاسبهٔ خمیدگیِ خمینه در هر نقطه در هر جهت دوبعدی به‌دست می‌دهد، یکی از آنها جبری/تحلیلی و دیگری هندسی. اولی، هر چند صریح است، دنبال کردن آن دشوار است زیرا به‌جای یک فرمول واقعی، یک روند ارائه می‌دهد. ولی تعریف هندسی هم صریح و هم واضح است. ریمان به ما می‌گوید رویه‌ای بسازیم که متشکل از همهٔ ژئودزیکهای گذرنده از یک نقطهٔ خاص باشد که در طول یک مقطع دوبعدی شروع می‌شوند. آن رویه خمیدگی‌ای دارد که مقدار آن به‌طور صریح توسط فرمولی متعلق به گاوس مشخص می‌شود. خمیدگیِ گاوسی رویه در نقطهٔ داده شده، طبق تعریف، خمیدگیِ ریمانی (مقطعی) خمینه در آن نقطه در جهت دوبعدیِ مفروض است. او به‌عنوان مثال، فرمولهای صریحی برای متریک ریمانی با خمیدگیِ ثابت مثبت، منفی و صفر از هر بعد ارائه می‌دهد. البته، حالت خمیدگیِ صفر همان متریک اقلیدسی استاندارد در nبعد است، اما دو حالت دیگر در پیشرفتهای آتی نقشهای اساسی ایفا کردند.

متریک ریمان با خمیدگیِ ثابت مثبت منجر به ایده‌ای می‌شود که ماکس بورن فیزیکدان آن را «یکی از مهم‌ترین ایده‌ها دربارهٔ ماهیت عالم که تاکنون به ذهن خطور کرده است» توصیف کرد، یعنی این ایده که عالم می‌تواند متناهی باشد اما بدون مرز. همان‌طور که ریمان یادآور می‌شود، مقدار خمیدگی می‌تواند به‌قدر دلخواه نزدیک صفر باشد به‌طوری که هیچ راهی برای متمایز کردن آن از فضای اقلیدسی در مقیاسی که ما می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم وجود نداشته باشد، اما مسألهٔ قدیمیِ چگونه انتخاب کردن یک گزینه از بین دو گزینهٔ به یک اندازه ناخوشایند، یعنی این گزینه که عالم در همهٔ جهات تا بینهایت امتداد دارد و اینکه در جایی پایان می‌پذیرد (و چه چیزی در ماورای آن قرار دارد؟) به یکباره حل می‌شود. اینشتین بعدها به این الگوی عالم به‌مثابهٔ یک کرهٔ سه‌بعدی متوسل شد و از آن در اولین اقدام خود برای ارائهٔ یک الگوی کیهان‌شناختی بر اساس نظریهٔ عمومی نسبیت خود استفاده کرد.

متریک ریمان با خمیدگی ثابت منفی به همان اندازه مهم از آب درآمد و حتی در پیشرفتهای آتی تأثیرگذارتر بود. این متریک تنها در حالت دوبعدی الگویی فراهم کرده است که اکنون آن را به نام «صفحهٔ هذلولوی» می‌شناسیم، ولی خود متریک را «متریک هذلولوی» یا «متریک پوانکاره» می‌نامند. موضوع هندسهٔ هذلولوی از دو منشأ کاملاً مستقل برخاسته است، یکی هندسهٔ دیفرانسیل رویه‌ها (یا، به‌طور کلی‌تر، متریکهای ریمانی) با خمیدگی ثابت منفی، و دیگری رویکرد اصل موضوعی بویویی و لوباچفسکی که در آن به‌جای اصل موضوع توازی یکی از معادلهایش قرار می‌گیرد. سرانجام اوجینیو بلترامی، هندسه‌دان ایتالیایی، در سال ۱۸۶۸ رابطهٔ بین این دو موضوع ظاهراً متمایز را به‌طور قطعی مشخص کرد و شاید بتوان گفت او بود که مبحث هندسه هذلولوی را پدید آورد. پوانکاره دو الگوی متفاوت دوبعدی هندسهٔ هذلولوی یعنی «قرص پوانکاره» و «نیمصفحهٔ بالایی پوانکاره» را به تفصیل بررسی کرد. اولی چیزی نیست جز قرص واحد با متریک ریمانی با خمیدگی ثابت ۱ −، و متریک حالت دوم را لیوویل قبلاً ضمن مطالعهٔ رویه‌های با خمیدگی ثابت منفی به‌دست آورده بود. ولی هیچ‌یک از این دو نفر به ارتباط این متریکها با هندسهٔ نااقلیدسی هیچ اشاره‌ای نکردند.

جای تأسف است که گری در اینجا فرصت اصلاح یک اشتباه بزرگ تاریخی را از دست می‌دهد [۲]. همه از اولین مقاله‌ای که بلترامی در سال ۱۸۶۸، با عنوان «بحثی دربارهٔ تعبیر هندسهٔ نااقلیدسی»، انتشار داد، یاد می‌کنند، که در آن او یک متریک ریمانی صریح روی قرصی در صفحه ارائه می‌کند (که متمایز با متریکی است که خود ریمان عرضه کرده بود) و آن را از یک طرف به رویه‌های با خمیدگیِ ثابت منفی و از طرف دیگر به فرمولها و خواصی که لوباچفسکی برای هندسهٔ نااقلیدسی‌اش مطرح کرده بود، مربوط می‌سازد. او نشان می‌دهد که در این الگو، خطوط راست هندسهٔ لوباچفسکی متناظر با وترهای دایره هستند. بنابراین، بلترامی با یک گام، الگویی برای هندسهٔ نااقلیدسی سراسری فراهم می‌کند که در آن می‌توان هر خط را در هر جهتی تا بینهایت ادامه داد و نیز پیوندی بین خواص موضعی هندسهٔ نااقلیدسی بویویی و لوباچفسکی و هندسهٔ رویه‌های با خمیدگیِ ثابت منفی مانند شبه‌کره برقرار می‌سازد.

اما در واقع در مقالهٔ دوم بلترامی در همان سال بود که همهٔ اجزای بحث در جای مناسب خودشان قرار گرفتند. عنوان مقاله، «نظریهٔ اساسی فضاهای با خمیدگیِ ثابت»، و کار بلترامی در این مقاله، همان‌طور که از عنوان آن برمی‌آید، مطالعهٔ کامل فضاهای با خمیدگیِ ثابت در همهٔ ابعاد است. او به تفصیل الگوهای گوناگون فضای هذلولوی nبعدی را بررسی می‌کند که دو تا از آنها در حالت دوبعدی به «متریک قرص پوانکاره» و «متریک نیمصفحهٔ بالایی» معروف تحویل می‌یابند. همان‌طور که جن استیلول[1] متذکر شده است [۳] آنها باید به‌ترتیب «متریک ریمان-بلترامی» و «متریک لیوویل-بلترامی» نامیده شوند. بلترامی با متریک دوم در نیمفضای بالایی $z > 0$ در فضای $n+1$بعدی آغاز می‌کند که در آن جزء طول قوس، $d\sigma s = d\sigma/z$ است که d با جزء طول قوس استاندارد اقلیدسی برابر است. او (با یک استدلال نسبتاً غیرمستقیم) نشان می‌دهد که این متریک ریمانی دارای خمیدگیِ ثابت منفی است، ژئودزیکهای آن نیمدایره‌های عمود بر صفحهٔ $z = 0$اند، متریک القایی روی نیمکره‌های عمود بر صفحهٔ $z = 0$ الگویی از فضای هذلولوی nبعدی ارائه می‌دهد، و تصویر عمودی این نیمکره‌ها به روی صفحهٔ $z = 0$ دقیقاً الگوی فضای هذلولوی را که به تفصیل در مقالهٔ قبلی‌اش بررسی کرده بود به‌دست می‌دهد. سرانجام، او اشاره می‌کند که تصویر گنجنگاشتی نیمکره دقیقاً به فضای هذلولوی با متریک با خمیدگیِ ثابت منفی که در ابتدا بوسیلهٔ ریمان عرضه شده بود منجر می‌شود. به‌علاوه او نشان می‌دهد که این متریک، که ریمان بدون اثبات گفته بود خمیدگیِ ثابت دارد، به‌راستی چنین است. همچنین به‌طور تحلیلی نکتهٔ مهمی را که هم بویویی و هم لوباچفسکی به آن پی برده بودند اثبات می‌کند: برای هندسهٔ هذلولوی سه‌بعدی، زیرفضای دوبعدی که لوباچفسکی آن را کرهٔ ساعتی[2] نامید و بویویی آن را با تنها «F» نشان داد دارای متریک القایی از صفحهٔ اقلیدسی است.

1. Stillwell 2. horosphere

در بخشی که عنوان آن «ارزیابی همه جانبه» است (ص۱۰۲)، گری اشاره می‌کند که وجود دو هندسهٔ به یک اندازه پذیرفتنی، نتایج فلسفی عمیقی داشت. او می‌گوید: «به هر حال، دو روایت ناسازگار از فضای فیزیکی نمی‌تواند وجود داشته باشد که هر دو درست باشند. در نتیجه یکی از هندسه‌ها باید نادرست باشد (و شاید هر دو، اما این نظر رادیکال هیچ‌گاه مورد حمایت قرار نگرفت).» اما در حقیقت همین عقیدهٔ رادیکال بود که ریمان از آن حمایت کرد؛ به دو دلیل. اول اینکه، چنانکه اشاره شد، ریمان به‌خصوص این نظر را مطرح کرد که فضا باید دارای خمیدگیِ ثابت مثبت باشد و بنابراین نه اقلیدسی و نه «نااقلیدسی» است. اما حتی رادیکال‌تر و اساسی‌تر از این، وی عنوان کرد که این فضا «ریمانی» است و این موضوع دو نکته را در مورد اصطلاح مطرح می‌کند که باعث سردرگمی بسیار شده‌اند. اول آنکه شخص ممکن است فکر کند «نااقلیدسی» به هندسه‌ای اطلاق می‌شود که اقلیدسی نیست و بنابراین باید شامل هندسهٔ «ریمانی» به معنایی که امروز عموماً از آن می‌فهمند، باشد یعنی به‌وسیلهٔ یک «متریک ریمانی» معین شده باشد که در آن جزء طول توس به‌وسیلهٔ ریشهٔ دوم یک فرم درجهٔ دو برحسب دیفرانسیلهای مختصات بیان می‌شود (یا به زبان خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر: فضای مماس در هر نقطه به یک ضرب داخلی مثبت معین مجهز شده است). ولی اصطلاح «هندسهٔ نااقلیدسی» حالا تقریباً همه جا با «هندسهٔ هذلولوی» که در آن متریک مورد نظر خمیدگیِ ثابت منفی دارد یکی گرفته می‌شود. قید «تقریباً» به این موضوع اشاره دارد که گاهی می‌بینیم دو شق برای اصل توازی در نظر گرفته می‌شود، در یکی از آنها دو خط متمایز گذرنده از یک نقطه به موازات یک خط مفروض داده شده است و مجموع زوایا در یک مثلث کمتر از ۱۸۰° است، و در دیگری هیچ خطی گذرنده از یک نقطه به موازات یک خط داده شده وجود ندارد و مجموع زوایا بیشتر از ۱۸۰° است. در حالت دوم، اگر شخص مایل باشد هر دو خطی را که در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند در نظر بگیرد، آنگاه می‌تواند به‌عنوان الگو از صفحهٔ تصویری با متریک القایی از کره بعد از یکی کردن نقاط متقاطر استفاده کند. هندسهٔ پدید آمده از این شق دوم برای اصل توازی گاهی «هندسهٔ بیضوی» نامیده می‌شود، در مقابل «هندسهٔ هذلولوی» [۴] و گاهی «هندسهٔ ریمانی نااقلیدسی»، که تنها بر ابهام بین «ریمانی» و «نااقلیدسی» می‌افزاید.

به موضوع اصلی برگردیم؛ بحث دربارهٔ اینکه آیا فضای فیزیکی که ما در آن زندگی می‌کنیم از قوانین اقلیدس تبعیت می‌کند یا از قوانین بویویی/لوباچفسکی، مدت ۱۵۰ سال است که جای خود را به انتخاب این شق بسیار محتمل‌تر داده است که این فضا هیچ‌یک از این دو نیست بلکه ریمانی (یا حتی «ناریمانی») است و تقریباً ۱۰۰ سال است که این احتمال قوی مطرح است که فضای مزبور مؤلفهٔ سه‌بعدی یک فضا-زمان شبه‌ریمانی چهاربعدی است. گری بخش مختصری را با عنوان «ماهیت فضا» (صص۱۱۸-۱۱۹) به این موضوع اختصاص می‌دهد که چگونه می‌توان یک مدل فضا-زمان در مجاورت یک جرم گرانشی را به هندسهٔ یک رویهٔ با خمیدگی منفی (هر چند نه خمیدگیِ ثابت منفی) و بنابراین به چیزی مانند هندسهٔ نااقلیدسی مربوط کرد.

بحث را با ذکر چند نکتهٔ نهایی به پایان می‌آورم.

نخست اینکه این کتاب جزو مجموعه‌ای از انتشارات کتابخانهٔ برندی[1] است که هر یک از آنها دربارهٔ یکی از کتابهای موجود در کتابخانه است. این کتابخانه به تاریخ علوم و فناوری اختصاص دارد و فعلاً در محوطهٔ مؤسسهٔ فناوری ماساچوست واقع است. نسخهٔ عکسی پیوست بویویی مانند تصاویر بسیار دیگر در کتاب متعلق به مجموعهٔ برندی است، و همه با رنگ قهوه‌ای تیره و بسیار زیبا چاپ شده‌اند.

دوم اینکه گری شارح بسیار خوبی است. کتاب او بخش بزرگی از تاریخ هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی را دربرمی‌گیرد اما به‌خصوص شامل بحث نسبتاً عمیقی دربارهٔ کار بویویی و شباهتها و تفاوتهای آن با رویکرد لوباچفسکی است. هرکسی بخواهد ببیند که بویویی دقیقاً چه‌کاری انجام داده است این کتاب را یک مرجع عالی خواهد یافت.

سوم اینکه، چند یادداشت اضافی در کتاب آمده است، از جمله زندگی‌نامهٔ مختصر مترجم پیوست بویویی، جورج بروس هلستد، که آن را بسیار جالب یافتم و اطلاعیه‌ای به تاریخ ۲۰۰۲ که به نظر می‌رسد برای اولین بار شامل یک تصویر قابل اعتماد از بویویی است در اینجا چاپ شده است. چیزی که فقدان آن در این کتاب چشمگیر است، نمایه است؛ قصور در آوردن نمایه، هرگاه با آن مواجه می‌شوم، مرا متعجب می‌سازد. چرا نویسنده‌ای (و همچنین ویراستاری) که وقت و کوشش زیادی صرف افزودن یک اثر جذاب و مفید به نوشتگان موجود می‌کنند، از صرف اندکی وقت و کوشش اضافی برای تهیهٔ نمایه، که فایدهٔ کتاب را برای خواننده بیشتر می‌کند، دریغ می‌ورزند؟

چهارم اینکه، گری این رویکرد بسیار خردمندانه را در پیش می‌گیرد که به‌جای آوردن کتابنامهٔ مفصل، فهرست کتابها و مقالاتی را آورده که در متن به آنها ارجاع داده است. من تنها مایلم به دو مرجع که شخصاً آنها را بسیار سودمند یافته‌ام و در کتابنامه نیامده است اشاره کنم: کتابهای نوشته شده به قلم روزنبرگ و استیلول که در یادداشتها ذکر شده است.

بالاخره اینکه، «مقدمه» گری با دو پاراگراف با عنوان «نتایج» (صص۱۲۰-۱۲۱) پایان می‌یابد. پاراگراف اول مواردی را مرور می‌کند که هندسهٔ اقلیدسی هم در حفظ نقش سنتی خود به‌عنوان مظهر استدلال قیاسی و هم در ایفای نقش به‌عنوان الگویی برای جهان واقعی که در آن زندگی می‌کنیم شکست خورده است. پاراگراف دوم با «و اما» و اما» شروع می‌شود و به جنبه‌هایی می‌پردازد که هندسهٔ اقلیدسی از آن جنبه‌ها همچون گذشته دستاورد قابل توجهی باقی مانده است. من مایلم دو «و اما»ی دیگر اضافه کنم. اول اینکه، هر چند استدلال اقلیدس از نگاه امروزی اصلاً دقیق نیست، ولی او ریاضیات را به سطحی رساند که نوع بشر تا دو هزار سال بعد چیزی نظیر آن را تولید نکرد. به‌خصوص، من حتی یک قضیه نمی‌شناسم که اقلیدس آن را بیان کرده و غلط از آب درآمده باشد. هر بحثی مطرح بوده دربارهٔ اصلاح جزئیات و پر کردن شکافها بوده است. کار او شاهکاری حیرت‌انگیز است.

«و اما»ی دیگر را شاید جان کلی[1] [۵] به بهترین وجه بیان کرده باشد. مایلم کلام آخر را به کلی واگذار کنم. او بعد از توصیف وضعیت خود به‌عنوان یک «پسر روستایی» واقعی در نواحی روستایی آمریکا و یک مواجههٔ ناگوار با جبر دبیرستان، می‌نویسد:

> سال بعد من آخرین درس ریاضیات دبیرستان را گرفتم، هندسه. این درس یک درس سنتی بود، بسیار نزدیک به اثر اقلیدس. و در مورد اصول موضوع و متعارف صحبت می‌کرد، خطوط و نقاط را

1. Burndy

1. J. L. Kelley

به‌صورت گیج‌کننده‌ای تعریف می‌کرد. خانمی که به ما درس می‌داد خلق و خویی غیرقابل پیش‌بینی داشت و معروف بود که به طرف دانش‌آموزان بی‌توجه تخته‌پاک‌کن پرتاب می‌کند. این درس دوست‌داشتنی، زیباترین چیزی بود که تا به حال دیده‌ام. در آن موقع چنین فکر می‌کردم؛ حالا هم همان‌طور فکر می‌کنم.

یادداشتها و مراجع

۱. این اولین بار نبود که سکوت گاوس در مورد موضوع هندسهٔ نااقلیدسی اثری مخرب داشت. یکی دیگر از طرفهای مکاتبهٔ گاوس به نام تورینوس (Taurinus) کتابچه‌ای در ۱۸۲۶ منتشر کرد که در آن تعدادی از همان فرمولهای مثلثاتی بویایی را به‌دست آورده بود. او در مقدمهٔ کتابچه از گاوس خواست تا نظراتش را دربارهٔ این موضوع اظهار دارد، که گاوس پس از آن مکاتباتش را با او قطع کرد. در صفحهٔ ۲۱۹ از کتاب

B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*, English translation, Springer-Verlag (1988)

نویسنده می‌گوید: «عکس‌العمل گاوس، تورینوس را به ناامیدی کشاند، و او همهٔ نسخه‌های کتابچه را که در اختیار داشت سوزاند.»

۲. این ناقد نیز در کتاب خودش دربارهٔ هندسه و کیهان‌شناسی مرتکب همین اشتباه شده است، و بعدها از این موضوع مطلع شده است.

۳. صفحهٔ ۳۵ از

Sources of Hyperbolic Geometry, History of Mathematics, vol. 10. AMS/LMS (1996)

که مرجعی عالی برای بحث ماست.

۴. اصطلاحات هندسهٔ بیضوی، هذلولوی، و سهموی را فلیکس کلاین در مقاله‌ای به تاریخ ۱۸۷۱ و با عنوان «دربارهٔ هندسهٔ به‌اصطلاح نااقلیدسی» معرفی کرد؛ وی در این مقاله، به کمک هندسهٔ تصویری، شرح کلی و مختصری از این مفاهیم را در یک چارچوب واحد عرضه کرد (کتاب استیلول را که قبلاً ذکر شد ببینید.)

۵. در صفحهٔ ۴۷۳ از مقالهٔ

"Once over lightly", *A Century of Mathematics in America*, Part III (Peter Duren, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989) 471-493.

******

• Robert Osserman, *Notices Amer. Math. Soc.*, (9) **52** (2005) 1030-1034.

• رابرت اُسرمن، مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی در برکلی، آمریکا

ro@msri.org

تقارن و هیولا، یکی از بزرگ‌ترین کاوشهای ریاضی•



رابرت گریس•

ترجمهٔ علیرضا جمالی

***Symmetry and the Monster, One of the Greatest Quests of Mathematics*, Mark Ronan, Oxford University Press (2006), 272 pp.**

کتاب جدیدی دربارهٔ گروههای ساده منتشر شده است، کتابی برای مخاطب عام. عنوان کتاب به نقش گستردهٔ گروه در مطالعهٔ تقارنها در ریاضیات و علوم، و همین‌طور به «هیولا»، گروه سادهٔ متناهی بزرگ ویژه‌ای که در سه دههٔ گذشته توجه زیادی را به خود معطوف داشته است، اشاره دارد. مارک رونن، مؤلف کتاب، محققی در گروهها و هندسه است.

این کتاب تاریخ گروههای ساده، عمدتاً گروههای پیوسته (گروههای لی) و گروههای سادهٔ متناهی، را به زبان غیرفنی بازگو می‌کند. (بسیاری از انواع گروهها اعم از ساده و غیرساده که در نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها، حساب، توپولوژی، و غیره ساخته می‌شوند مورد بحث کتاب نیستند.) وصف شخصیتهای تاریخی این مبحث (نیلس آبل، اواریست گالوا، ویلهلم

به‌صورت گیج‌کننده‌ای تعریف می‌کرد. خانمی که به ما درس می‌داد خلق و خویی غیرقابل پیش‌بینی داشت و معروف بود که به طرف دانش‌آموزان بی‌توجه تخته‌پاک‌کن پرتاب می‌کند. این درس دوست‌داشتنی، زیباترین چیزی بود که تا به حال دیده‌ام. در آن موقع چنین فکر می‌کردم؛ حالا هم همان‌طور فکر می‌کنم.

یادداشتها و مراجع

۱. این اولین بار نبود که سکوت گاوس در مورد موضوع هندسهٔ ناقلیدسی اثری مخرب داشت. یکی دیگر از طرفهای مکاتبهٔ گاوس به نام تورینوس (Taurinus) کتابچه‌ای در ۱۸۲۶ منتشر کرد که در آن تعدادی از همان فرمولهای مثلثاتی بویویی را به‌دست آورده بود. او در مقدمهٔ کتابچه از گاوس خواست تا نظراتش را دربارهٔ این موضوع اظهار دارد، که گاوس پس از آن مکاتباتش را با او قطع کرد. در صفحهٔ ۲۱۹ از کتاب

B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*, English translation, Springer-Verlag (1988)

نویسنده می‌گوید: «عکس‌العمل گاوس، تورینوس را به ناامیدی کشاند، و او همهٔ نسخه‌های کتابچه را که در اختیار داشت سوزاند.»

۲. این ناقد نیز در کتاب خودش دربارهٔ هندسه و کیهان‌شناسی مرتکب همین اشتباه شده است، و بعدها از این موضوع مطلع شده است.

۳. صفحهٔ ۳۵ از

Sources of Hyperbolic Geometry, History of Mathematics, vol. 10, AMS-LMS (1996)

که مرجعی عالی برای بحث ماست.

۴. اصطلاحات هندسهٔ بیضوی، هذلولوی، و سهموی را فلیکس کلاین در مقاله‌ای به تاریخ ۱۸۷۱ و با عنوان «دربارهٔ هندسه به‌اصطلاح ناقلیدسی» معرفی کرد؛ وی در این مقاله، به کمک هندسهٔ تصویری، شرح کلی و مختصری از این مفاهیم را در یک چارچوب واحد عرضه کرد (کتاب استیلول را که قبلاً ذکر شد ببینید.)

۵. در صفحهٔ ۴۷۲ از مقالهٔ

"Once over lightly", *A Century of Mathematics in America*, Part III (Peter Duren, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989) 471-493.

******

• Robert Osserman, *Notices Amer. Math. Soc.*, (9) **52** (2005) 1030-1034.

• رابرت آسرمن، مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی در برکلی، آمریکا

ro@msri.org

تقارن و هیولا، یکی از بزرگ‌ترین کاوشهای ریاضی•



رابرت گریس•

ترجمهٔ علیرضا جمالی

***Symmetry and the Monster, One of the Greatest Quests of Mathematics*, Mark Ronan, Oxford University Press (2006), 272 pp.**

کتاب جدیدی دربارهٔ گروههای ساده منتشر شده است، کتابی برای مخاطب عام. عنوان کتاب به نقش گستردهٔ گروه در مطالعهٔ تقارنها در ریاضیات و علوم، و همین‌طور به «هیولا»، گروه سادهٔ متناهیِ بزرگ ویژه‌ای که در سه دههٔ گذشته توجه زیادی را به خود معطوف داشته است، اشاره دارد. مارک رونن، مؤلف کتاب، محققی در گروهها و هندسه است.

این کتاب تاریخ گروههای ساده، عمدتاً گروههای پیوسته (گروههای لی) و گروههای سادهٔ متناهی، را به زبان غیرفنی بازگو می‌کند. (بسیاری از انواع گروهها اعم از ساده و غیرساده که در نظریهٔ ترکیباتی گروهها، حساب، توپولوژی، و غیره ساخته می‌شوند مورد بحث کتاب نیستند.) وصف شخصیتهای تاریخیِ این مبحث (نیلس آبل، اواریست گالوا، ویلهلم

کیلینگ[1]، فلیکس کلاین، فریدریش انگل[2]، ویلیام برنساید،...) و شرح مفصلی از ماجراهای حرفه‌ای و شخصی آنان درکتاب می‌آید. تأثیرات جنگهای جهانی و تغییرات مهم اجتماعی بر ریاضیات مورد بحث قرار می‌گیرد. از متخصصان دهه‌های اخیر نظریهٔ گروهها، که بسیاری از آنان هنوز فعال‌اند، یاد می‌شود. مؤلف شرحی از ارتباط بین گروههای پیوسته و گروههای سادهٔ متناهی و سایر حوزه‌های ریاضیات و فیزیک نظری، به‌ویژه شرحی از نقش مهم نظریهٔ گروهها در فیزیک و پدیدهٔ مون‌شاین[3] به‌دست می‌دهد.

«هیولا»ی مذکور در عنوان کتاب نقش بسیار جالبی را در این ماجرای بزرگ ایفا می‌کند. کتاب مشتمل بر توصیف بسیاری از بیست‌وشش گروه موسوم به «گروههای سادهٔ پراکنده» است، گروههایی سادهٔ متناهی که در خانواده‌های نامتناهیِ گروههای متناوب یا گروههای از نوع لی قرار ندارند. پنج گروه ماتیو در سدهٔ نوزدهم و بیست‌ویک گروه بعدی در حوالی ۱۹۶۵ـ۱۹۷۵ کشف شدند. هیولا بزرگ‌ترین گروه در بین این گروههای سادهٔ پراکنده است که در سال ۱۹۷۳ کشف شد.

تفسیر عنوان کتاب قدری دشوار است. به موضوع هیولا به‌عنوان منزل آخر در سفری طولانی پرداخته می‌شود. گروه هیولا به طرز واقعاً منحصر به‌فردی ارتباطهای مهم و اسرارآمیزی را بین دو حوزهٔ ریاضیات و فیزیک نمایان می‌سازد، و موارد بسیار بیشتری از این ارتباطها ممکن است در آینده کشف شود. دیدگاه محتاطانه‌تر این است که در وضعیت فعلی گروهها در ریاضیات و علوم، هیولا بازیگری (و به‌وضوح مهم) در میان انبوه بازیگران دیگر است. من تعریفی از «کاوش» [مذکور در عنوان کتاب] نیافتم. به گمانم مقصود از آن کندوکاو در خودِ گروههای ساده و تلاش برای درک کامل‌تر گروهها در دنیای علم است.

این کتاب برای عموم خوانندگانی که از آگاهی علمی برخوردارند نوشته شده، و برای مبتدیان مناسب است. مؤلف شرح قانع‌کننده‌ای از سیر تکامل گروههای لی و گروههای سادهٔ متناهی می‌آورد و هر دو موضوع را به‌عنوان تلاشی انسانی برای درک جهان و به‌صورت درآمدی بر نظریه‌های مربوط مطرح می‌کند. هم می‌توان مثال معمولی گروه دووجهیِ مرتبهٔ ۸ (ص۴۸) را درکتاب دید و هم محاسبهٔ خاص و خارق‌العادهٔ تعداد ۲A ـبرگشتها[4]ی «بچه هیولا» را (ص ۲۴۴):

$$۱ + ۳۹۶۸۰۵۵ + ۲۳۱۱۳۷۲۸ + ۲۳۷۰۸۳۰۳۳۶ +$$
$$۱۱۱۷۲۰۴۲۸۸۰ = ۱۳۵۷۱۹۵۵۰۰۰ ;$$

گروه سادهٔ «بچه هیولا» را برند فیشر[1] در سال ۱۹۷۳ کشف کرد.

انتخاب تصاویرکتاب (مثلاً، تقارنهای صلب اجسام افلاطونی در فصل ۱ و خودریختیهای گرافها و هندسه‌ها در فصل ۹) از روی فکر و تأمل انجام شده است. جدولهای مفیدی، نظیر «جدول دوره‌ای» گروههای لی (ص ۶۶) و همهٔ گروههای پراکنده (موسوم به ۲۶ استثنا) در پیوست ۴، ص ۲۴۴، در کتاب آمده است.

سرگذشت ریاضیدانانِ تا اوایل سدهٔ بیستم از دیگرکتابها اقتباس شده است. مؤلف کتاب مطالب جدیدی را هم از نقل‌قولهای منتشرشده و مصاحبه‌های خود با ریاضیدانان اضافه کرده است. این کتاب دویست سال نظریهٔ گروهها، یعنی تقریباً تمام دورهٔ تاریخی مربوط، را دربر دارد. شرح وقایع به‌سرعت پیش می‌رود. خود من کتاب را با بی‌قراری ورق می‌زدم تا از فصلی به فصل دیگر برسم.

خوانندهٔ غیرمتخصص احتمالاً توضیحات جنبی کتاب را مثلاً دربارهٔ جوایز نوبل و آبل، و نشانهای فیلدز و اوبرولفاخ[2] بسیار جالب‌توجه خواهد یافت. مؤلف همچنین حکایتهایی از ریاضیدانانی که شخصاً با آنان آشنایی داشته است بازگو می‌کند.

رده‌بندی گروههای لی و گروههای سادهٔ متناهی، به زبان نسبتاً ساده (بدون جزئیات فنی زیاد)، بررسی می‌شوند. این دو رده‌بندی ویژگیهای بسیار متفاوتی دارند.

مندرجات

نگاه اجمالی

مؤلف مباحث زیادی را مورد بررسی قرار می‌دهد ولی ما در اینجا بیشتر به مباحث جدید خواهیم پرداخت زیرا عموماً به این مباحث کمتر توجه می‌شود.

کتاب با تئایتتوس[3] و داستان اجسام افلاطونی شروع می‌شود. ماجرای شگفت‌انگیز اواریست گالوای جوان و نابغه به تفصیل بحث می‌شود، و شرح مبسوطی دربارهٔ حل معادلات چندجمله‌ای با درجهٔ پایین آورده می‌شود. از درجهٔ ۵ به بالا، نمی‌توان معادلات چندجمله‌ای را با دستوری که تنها متضمن رادیکالها و اعمال گویا باشد، حل کرد. گروههای سادهٔ متناهی درکمین‌اند!

ماجرای سوفوس لی شورانگیز است و داستان روابط او با فلیکس کلاین، ویلهلم کیلینگ، و الی کارتان، بسیار جذاب. جبرهای لی و گروههای لی بیش از یک سده عمیقاً بر ریاضیات تأثیر گذاشته است و باز هم تا مدتها تأثیر خواهد گذاشت.

فصل مربوط به گروههای لی و فیزیک شامل شرح کوتاهی از نسبیت، نسبیت خاص، و ذرات زیراتمی است. تذکر داده می‌شود که الکترونها تنها در حالتهای گسسته قرار می‌گیرند و این حالتها با خواص گروههای لی متناظراند.

1. Killing 2. Engel

۳. واژهٔ moonshine را نخستین بار جان کانوی و سایمن نورتن در سال ۱۹۷۹ در ریاضیات به‌کار بردند. در آن زمان این واژه برای توصیف ارتباطِ به‌کلی غیرمنتظرهٔ بین گروه هیولا و توابع پیمانه‌ای، به‌خصوص تابع پیمانه‌ای بیضوی $j(t)$ که بسط سری توانی آن به‌صورت

$$j(\tau) = q^{-۱} + ۷۴۴ + ۱۹۶۸۸۴q + ۲۱۴q^{۳۷۶۰}q^{۲} + \cdots$$

است به‌کار رفت. جان مکای به ارتباط بسیار عجیب ضرایب q^n با بعد نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه هیولا یعنی اعداد ۱، ۱۹۶۸۸۳، ۲۱۲۹۶۸۷۶، پی برد (ضرایب q^n را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی این بعدها نوشت) و هنگامی که این موضوع را با کانوی در میان نهاد، وی این ارتباط را moonshine (به معنی مهمل، یاوه، چرند) نامید و این کلمه بعداً به‌صورت اصطلاح در آمد. امروز اصطلاح monstrous moonshine برای تعمیمهای گوناگون نتایج مکای، به‌خصوص در مورد ارتباط بین گروههای سادهٔ پراکنده و توابع پیمانه‌ای، به‌کار می‌رود ـ م.

4. involutions

1. Bernd Fischer 2. Oberwolfach 3. Theaetetus

لئرد یوجین دیکسن سهم بزرگی در مبحث گروههای سادهٔ متناهی دارد که چنانکه باید شناخته نشده است. وی گروههای متناظر با گروههای لی استثنایی از نوع G_2، F_4، و E_8 روی میدان متناهی را ابداع کرد. او محققی فوق‌العاده خلاق در جبر و نظریهٔ اعداد بود. کتاب اولیهٔ او[۴] گنجینه‌ای از اطلاعات دربارهٔ بسیاری از گروههای متناهی است.

در دههٔ ۱۹۵۰، کلود شوالّه[1] روش یکسانی را برای تعریف متناظرهای گروههای لی روی میدان دلخواه به‌دست داد، که گسترش زیبا و بسیار مهمی از نظریهٔ لی[۳] است. این «گروههای شوالّه» شامل خانواده‌هایی از گروهها می‌شد که دیکسن آنها را ابداع کرده و در متنی آورده بود.

کتابْ شرحی دربارهٔ گروه بورباکی و چگونگی تأثیرات جنگهای جهانی بر ریاضیات و مهاجرت ریاضیدانان، به‌خصوص یهودیان اروپایی، به آمریکای شمالی می‌آورد.

عنوان فصل «مردی از اُکل[2]» هم به شهر اُکل در بلژیک که موطن ژاک تیتس است، و هم به ایهام به شوی تلویزیونی پرطرفدار دههٔ ۱۹۶۰ اشاره دارد. مؤلف برای تیتس منزلت خاصی به‌عنوان معمار بزرگ نظریه‌های هندسی (شامل گروههای لی، گروههای حسابی، گروههای متناهی، و سایر دستگاههای جبری) و متخصص بصیر نظریهٔ گروهها قائل است. نظریهٔ ساختمانهای تیتس، شامل اقدام مهم او در مشخص‌سازی گروههای از نوع لی به کمک هندسه‌هاست.

فصل بعد، «قضیهٔ بزرگ»، در مورد «قضیهٔ مرتبهٔ فرد» والتر فایت و جان تامسن (مبنی بر اینکه هر گروه با مرتبهٔ فرد حل‌پذیر است) و چارچوب کلی آن، نظرات اولیه در مورد رده‌بندی گروههای ساده است. تامسن راهگشای بزرگی در نظریهٔ جدید گروهها تلقی می‌شود. وی کار پژوهشی خود را در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ شروع کرد و آن را با کسب نتایج عمیقاً تأثیرگذار تا سالها بعد ادامه داد. او در ۱۹۷۰ به خاطر پژوهش در مورد Nـگروهها (گروههایی متناهی که زیرگروههای موضعی آنها حل‌پذیرند) برندهٔ نشان فیلدز شد. نقش مهم ریچارد براوئر و زندگی او به اجمال بیان می‌شود. به سهم میشیو سوزوکی[3] در چند جای کتاب اشاره می‌شود. به نظر من می‌شد در این فصل برکارهای متقدم سوزوکی در رده‌بندی بیشتر تأکید کرد (دربارهٔ کارهای متأخر وی در گروههای ساده به اندازهٔ کافی صحبت شده است). و بالاخره، خواننده با دستاورد شگفت‌انگیز زونیمیر یانکو[4] یعنی گروه سادهٔ متناهی با مرتبهٔ ۱۷۶۵۶۰، نخستین گروه پراکنده‌ای که پس از حدود یک قرن تلاش کشف شد، آشنا می‌شود[۱۳].

فصل «جمعهٔ پاندورا» درآمدی است بر گروهها و هندسه‌های متناهی، گروههای ماتیو، و ایده‌هایی که در اواسط دههٔ ۱۹۶۰ به کشف بسیاری از دیگر گروههای پراکنده منجر شد.

راینهولد بئر[5] جبردان دید وسیعی از ریاضیات داشت و حامی واقعی جوانان با استعداد بود. وی تأثیر ویژه‌ای بر برند فیشر جوان داشت که تا حدودی به دنبال علایق شخصی خود در مورد دستگاههای جبری بود (موفقیت بزرگ او در این زمینه سالها بعد به‌دست آمد). چنین به نظر می‌رسد که تأثیر راینهولد بئر در گروههای متناهی ناشناخته مانده است. دیتر هلد[6]، زونیمیر یانکو، جان تامسن، ژاک تیتس، و دیگران در سمینارهای او حاضر می‌شدند. شرح دیگری از زندگی حرفه‌ای بئر در مرجع[۷] آمده است.

1. Chevalley 2. Uccle 3. Michio Suzuki 4. Zvonimir Janko
5. Reinhold Baer 6. Dieter Held

یانکو، مانند فیشر، ایده‌های شخصی بسیار قوی در مورد اینکه کجا باید گروههای سادهٔ جدید را جستجو کرد داشت، و روی آنها سخت کار می‌کرد. موفق‌ترین ایدهٔ یانکو، فرض موسوم به فرض «خیلی خاص O_7» در مورد مرکزسازهای برگشتها بود. برنامهٔ یانکو بیشتر دارای رنگ و بوی «نظریهٔ گروه داخلی» بود تا «هندسهٔ خارجی». فیشر و یانکو هرکدام گروههای سادهٔ جدید متعددی یافتند ولی با کندوکاو در بخشهای متفاوتی از نظریهٔ گروهها.

فصل مربوط به شبکهٔ لیچ[1] به شرح مفاهیم بسته‌بندی کره‌ای، شبکه‌ها، و بسته‌بندی ۲۴ بعدی استثنایی که به‌وسیلهٔ لیچ کشف شد، می‌پردازد. این فصل گزارشی در مورد نیم‌روزی حیرت‌انگیز از زندگی جان کانوی می‌دهد که در آن نیم‌روز شبکهٔ لیچ و گروه ایزومتری آن را درک کرد و پی برد که چگونه می‌توان خواص قابل توجه آنها را تشریح کرد. (در پیوست ۳، ص ۲۴۲، مؤلف فهرست همهٔ بردارهای مینیمال شبکهٔ لیچ را می‌آورد که یک تمرین زیبای شمارشی است.)

فصل «هیولاهای فیشر» با نظریهٔ بنیادی گروههای دوروجهی، گروههایی متناهی که با جفتهایی از برگشتهای متمایز تولید می‌شوند، شروع می‌شود و اینکه چگونه این برگشتها در فضاهای برداری با بعد بالاتر به‌صورت تبدیلهای خطی ظاهر می‌شوند. برند فیشر یک ردهٔ بسیار طبیعی از گروههایی که با برگشتها تولید می‌شوند کشف کرد و گروههای سادهٔ پراکندهٔ جدیدی را یافت. فرض اصلی به‌آسانی بیان می‌شود: یک ردهٔ مزدوجی برگشتها مفروض است و هر جفت از برگشتهای آن رده یا تعویض‌پذیرند یا یک گروه دو وجهی از مرتبهٔ ۶ را تولید می‌کنند. این ویژگی را ترانهشها در گروههای متقارن و رده‌های مزدوجی خاصی در گروههای ماتریسی کلاسیک با مشخصه‌های ۲ و ۳ دارند. هنوز برای من بسیار حیرت‌آور است که این ویژگی ساده و از جنبهٔ هندسی طبیعی، از مثالهای مأنوس به سه گروه پراکندهٔ Fi_{22}، Fi_{23}، و Fi_{24} کشانده می‌شود (دوگروه نخست ساده و سومی دارای زیرگروه تعویض‌گر سادهٔ Fi'_{24} با شاخص ۲ است.) مایکل اشباخر، فرانتس تیمسفلد[2]، و برند فیشر این شرایط را ملایم‌تر کردند تا تحلیل رده‌های وسیع‌تری از گروهها میسر شود. فیشر با بسط بیشتر این برنامه، شاهدی برای «بچه هیولا» و (اندکی بعد) برای «هیولا» پیدا کرد.

فصل مربوط به اطلس دربارهٔ کوشش گروهی در تدوین، بازبینی، و تظریف داده‌های مربوط به گروههای ساده از قبیل جدولهای سرشتها، زیرگروههای ماکسیمال، و نمایشهاست. این بحث با شرح مختصری از برنامهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی که تأکید آن بر دستاوردهای دههٔ ۱۹۷۰ است، درآمیخته شده است. به نظر این ناقد، رابطهٔ بین این برنامه‌ها چندان در کتاب روشن نشده است. تلاش برای رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی بسیار عظیم‌تر از برنامهٔ تدوین اطلس است و در واقع، رده‌بندی بود که امکان آن برنامه را فراهم آورد.

اقدام گروهی رده‌بندی به رهبری دانیل گورنشتاین فعال و دوراندیش صورت گرفت. فعالیت حیرت‌آور گورنشتاین در این کتابْ صادقانه شرح داده شده است. خوشحالم که ایثار فوق‌العاده و مهارتهای تشکیلاتی او در این کتاب به تفصیل گزارش می‌شوند؛ این خصوصیتها برای تلاش گروهی رده‌بندی و برای بخش ریاضی دانشگاه رانگرس مهم بود. مایکل اشباخر هم به خاطر روشهای جدید جسورانه و نتایج سریع پیاپی‌اش رهبر جوان‌تر تیم بود. این

1. Leech lattice 2. Franz Timmesfeld

عقیده تنها در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ بوجود آمد که رده‌بندی ممکن است سرانجام واقعیت یابد. وصول به چنین هدفی به حل چند مسألهٔ مشخص بستگی داشت، و این در واقع با قضیه‌ای از گورنشتاین و ریچارد لیونز روشن شد. در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ (احتمالاً در گردهمایی انجمن ریاضی آمریکا (AMS) در ژانویهٔ ۱۹۸۱)، گورنشتاین اعلام کرد که رده‌بندی انجام شده است. در ابتدا نظریه‌پردازان رده‌بندی عموماً از این ادعا حمایت کردند. اما، دفاع از آن به‌طور فزاینده‌ای با سپری شدن دههٔ ۱۹۸۰ دشوار شد.

ادعای کامل بودن این رده‌بندی برای خود من وضعیت دشواری ایجاد کرد. از یک طرف، احترام زیادی برای این متخصصان برجستهٔ گروههای متناهی و مجموعهٔ با شکوه روشها و قضایای رده‌بندی قائل بودم. ولی از طرف دیگر، قبول چنین ادعای بزرگی برایم دشوار بود. اگر رده‌بندی واقعاً کامل شده بود، نه تنها طولانی‌ترین برهان در تاریخ ریاضیات محسوب می‌شد بلکه یک برهان استعرایی نیز بود. فهرست مورد انتظار گروههای سادهٔ متناهی هنوز دقیقاً با هیچ چیز دیگری در ریاضیات متناظر نیست، و آگاه بودیم که اشتباهات فنی گذشته به‌طور نادرست گروههایی را که وجودشان بعداً معلوم شد، منتفی کرده بود. همهٔ مقالات دستنوشتهٔ مربوط به این موضوع در آن ایام به‌دست همه نرسیده بود و تلاشهای متعدد جداگانه‌ای در جریان بود.

پس از صدور بیانیهٔ رده‌بندی، شکافهایی پیدا شدند و مورد بررسی قرار گرفتند، و اصلاحاتی به عمل آمد. حاصل چشمگیرترین اقدامات در این زمینه، مرجع اخیر[۱] (در دو جلد) است، که در آن مایکل اشباخر و استیون اسمیت مسألهٔ «شبه تنک» را حل‌وفصل کرده‌اند. در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ ریاضیدان دیگری که نهایتاً دستنوشتهٔ طولانی خود را منتشر نکرد، مدعی حل مسأله شد. نمونهٔ دیگر، مقالهٔ[۱۰] سال ۱۹۸۹ است، که سرانجام یک حکم لازم رده‌بندی را ثابت کرد. کسی که بدواً ادعای اثبات این نتیجه را در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ داشت هرگز برهانی منتشر نکرد.

تجدیدنظر در این اثبات ادامه دارد، و اساساً به‌وسیلهٔ ریچارد لیونز و رانلد سالومن رهبری می‌شود. انتظار برای حل‌وفصل مسأله، با در نظرگرفتن حجم زیاد اثبات و دشواری موضوعات آن (هزاران صفحهٔ مجله) و اهمیت اطلاع از گروههای سادهٔ متناهی، قابل توجیه است. از سال ۱۹۷۵ هیچ گروه سادهٔ متناهی جدیدی پیدا نشده است.

فصل «راز هیولا» به چگونگی کشف ارتباطهای غیرمنتظره («مون‌شاین») بین هیولا و مجموعه‌ای از میدانهای تابعی باگونای ۰ که متناظر باگروه ماتریسهای ۲ در ۲ صحیح با دترمینان ۱ و برخی از گروههای ماتریسی بسیار مرتبط با آنها هستند، می‌پردازد. مبحث اخیر از سدهٔ نوزدهم موضوع تحقیقات فراوانی بوده است. این ارتباطها که جان مکای[1] و جان تامسن (در اواخر دههٔ ۱۹۷۰) کشف کردند و جان کانوی و سایمن نورتن[2] به آنها غنا بخشیدند، واقعاً شگفت‌انگیزند و تا امروز تبیین آنها به‌صورت مسألهٔ بغرنجی باقی مانده است. تامسن وجود یک نمایش مدرج هیولا را حدس زد که اثرهای مدرج آن، توابع پیمانه‌ای اصلی (Hauptmoduln)، سریهای مولد نرمال‌شده برای میدانهای تابعی با گونای ۰ را که در بالا به آن اشاره شد، به‌دست می‌دهد.

فصل «ساختن» دربارهٔ دستاوردهای رابرت گریس (این ناقد) است. در ۱۹۷۳ فیشر و گریس مستقل از هم دلیلی مبتنی بر نظریهٔ

1. McKay 2. Simon Norton

گروهها برای این موضوع پیدا کردند که گروه سادهٔ پراکنده‌ای با مرتبهٔ $2^{46}3^{20}5^{9}7^{6}11^{2}13^{3}17\times19\times23\times29\times31\times41\times47\times59\times71$ (تقریباً برابر با $8{,}08\times10^{53}$) و با ویژگیهای خاص اضافی می‌تواند وجود داشته باشد. دلیل آنها سربلند بیرون آمدن فرضها از بسیاری از آزمونهای موضعی بود، ولی در آن زمان هیچ برهان وجودی در دست نبود. به‌علاوه، چون چنین گروه فرضی خیلی بزرگ و فاقد نمایشی با بعد کوچک‌تر بود، امکان ساختن آن، حتی با رایانه، مشکوک به نظر می‌رسید. در اواخر ۱۹۷۹ گریس به فکر امکان برهان وجودی افتاد. وی چنین گروهی را به‌صورت گروه ماتریسهایی ۱۹۶۸۸۳ بعدی روی اعداد گویا ساخت و نتایج را از طریق نامه در ۱۴ ژانویهٔ ۱۹۸۰ اعلام داشت. بسیار مهم بود که این گروه یک ساختار جبری (یعنی ضرب) را روی یک فضای برداری ۱۹۶۸۸۳ بعدی ناوردا نگه می‌دارد، زیرا چنین قیدی محدودیتهای مفیدی برای تعریفها فراهم می‌کند. (تحقیقات قبلی نورتن نشان داده بود که هرگاه یک نمایش تحویل‌ناپذیر ۱۹۶۸۸۳ بعدی موجود باشد، آنگاه باید ساختار جبری ناوردایی وجود داشته باشد). بالاخره، گریس ضرب خاصی را روی این فضا تعریف کرد و تعدادی کافی از تقارنهای آن را برای تولید یک گروه سادهٔ متناهی بزرگ ساخت. این کار به‌وسیلهٔ نظریه گروههای مجرد «با دست» و با نشانه‌گذاری فضای ۱۹۶۸۸۳ بعدی به کمک داده‌های متعلق به شبکهٔ مشهور لیچ و فضای برداری ۲۴ بعدی زمینهٔ آن انجام شد. از جمله نتایج این ساختمان به‌دست آمدن برهانهای وجودی جدید و آسان برای بسیاری از گروههای پراکنده بود که از قبل شناخته شده بودند. بیست گروه پراکنده، به یک معنی تحت لوای واحدی درآمدند.

فصل آخر مفاهیمی از فیزیک را معرفی می‌کند و ارتباط آنها را با نظریهٔ گروههای ساده به‌اختصار شرح می‌دهد. ریچارد بورچردز[1] دو کار مهم در این زمینه انجام داد. نخست، وی ارتباط جبرهای رأسی و چگونگی کار با آنها را نشان داد. هندسهٔ هذلولوی که در مباحث فضا و زمان حائز اهمیت است برای تشریح شبکه‌ها، جبرهای رأسی، و گروههای پراکنده مفید است. علاوه بر این، بورچردز حدس اساسی تامسن را مبنی بر اینکه جبر عملگرهای رأسی ایگور فرنکل[2]، جیمز لپوسکی[3] و آرن مورمان[4] اثرهای مدرج را به‌دست می‌دهند ثابت کرد؛ این اثرها همان توابع پیمانه‌ای اصلی مربوط هستند. در سال ۱۹۹۸ ریچارد بورچردز نشان فیلدز را به‌خاطر کارهایش دربارهٔ مون‌شاین دریافت کرد.

ارمغان کتاب برای خواننده

دستاوردهای واقعی رونن در این کتاب علمی عامه‌فهم عبارتند از (۱) جمع‌آوری شواهد و مدارکی دربارهٔ پژوهشهای نوین در گروههای سادهٔ متناهی و فراهم آوردن توضیحات دربارهٔ ایده‌های جدیدی که مطرح شده‌اند. (۲) گردآوری بخشهای قدیمی و جدید تاریخ نظریهٔ گروهها در گزارشی واحد. (۳) آشکار ساختن جنبه‌های انسانی ماجرا و نحوهٔ درآمیختگی آنها با جنبه‌های علمی.

افراد جامعهٔ ریاضی عموماً از برخی رویدادهای برجستهٔ نظریهٔ گروههای متناهی نوین مانند پیشنهادهای بنز (اواسط دههٔ ۱۹۵۰) برای شروع برنامهٔ

1. Borcherds 2. Igor Frenkel 3. Lepowsky 4. Arne Meurman

رده‌بندی، ابداعات تامسن، قضیهٔ مرتبهٔ فرد فایت-تامسن، کشف گروههای پراکنده، و برنامهٔ گورنشتاین مبنی بر رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی آگاه‌اند. اما بسیاری از جنبه‌های انسانی ماجرا کاملاً معلوم نیست.

در این کتاب توجه خاصی به تحقیقات دورهٔ اخیر مبذول شده است. تاریخچهٔ این دوره اگر مکتوب نمی‌شد، ممکن بود طی چنددهه از یادها برود.

نمادها و اصطلاحات

مؤلف ظاهراً تعریفی از گروه، چنانکه در کتابهای درسی دانشگاهی یا پیش‌دانشگاهی آورده می‌شود، به‌دست نمی‌دهد. در این کتاب به برخی از مفاهیم استاندارد ریاضی نامهای جدیدی داده می‌شود. مؤلف روی واژهٔ «اتمها» به‌جای گروههای ساده پافشاری می‌کند. وی واژهٔ «مقطع عرضی» را به‌جای مرکزساز برگشتها به‌کار می‌برد (در یک پانوشت تعریفی آمده است که به هیچ وجه خوب نیست.) همچنین از به‌کارگیری اندیسهای پایین اجتناب می‌شود. در کتاب از نمادهای $A2$، $D5$، ... برای گروههای لی مربوط به نوع A_2، D_5، ...، و از نماد $M22$ برای گروه ماتیوی M_{22} استفاده شده است. آیا این نمادگذاریها کار را برای خواننده آسان می‌کند؟ از طرف دیگر، اندیسهای بالا در کتاب به‌کار می‌رود (M^{22}، و غیره. ص۱۷۸).

به نظرم این «آسان‌سازی» نه تنها لازم نیست بلکه احتمالاً نتیجهٔ معکوس دارد. در نوجوانی از خواندن کتابهای علمی و ریاضیِ عامه‌فهم لذت می‌بردم (کتاب یک، دو، سه، ... بینهایت ژرژگاموف نمونهٔ دلچسبی از این کتابهاست). چنین متون آسان‌فهمی امکان آشنایی با نامهای واقعی اشیا و مفاهیم علمی را فراهم می‌آوردند. به نظرم این کتابها با من به‌صورت یک فرد بالغ و دانشمند بالقوه رفتار می‌کردند، هر چند در مقابل ایده‌های بزرگ مرعوب می‌شدم.

توضیحات و تصحیحات

مارشال هال مستقلاً گروه سادهٔ با مرتبهٔ ۶۰۴۸۰۰ را تقریباً همزمان با یانکو[۱۴] کشف کرد، آن را ساخت، و یکتایی‌اش را ثابت کرد[۱۲]؛ هر یک از آنان به اثر دیگری ارجاع می‌دهد. امتیاز این کار متعلق به هر دو نفر است. غالباً من نماد $H.J$ را به‌جای J_2 به‌کار می‌برم؛ از هر دو نماد در جامعهٔ متخصصان نظریهٔ گروهها استفاده می‌شود.

«جان مک‌لافین» باید جک مک‌لافین باشد.

من با بحثهایی از شرح مؤلف در مورد جدول سرشتهای هیولا موافق نیستم (این جدول در[۲] آمده است). جدول مزبور که به‌دست آوردن آن با مشکلات عجیبی همراه بود در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، بر پایهٔ این فرض معقول که یک سرشت تحویل‌ناپذیر از درجهٔ ۱۹۶۸۸۳ موجود است، محاسبه شد[۱۵] (وجود این سرشت را من حدس زدم[۸]). وجود چنین سرشتی در تحقیقات بعدی ([۹] و [۱۰]) معلوم شد. تا جایی‌که اطلاع دارم، برهان وجودی دیگری برای چنین سرشتی در دست نیست، و شیوه‌ای برای تعیین جدول سرشتها که از یک سرشت تحویل‌ناپذیر با درجهٔ ۱۹۶۸۸۳ شروع نشود، وجود ندارد.

بحث «یادداشتها» دلپذیر بود. مؤلف از مقدار زیادی از دستاوردهای جدید بهره برده است.

بعد از چهار پیوست، فرهنگ مختصر اصطلاحات می‌آید. برخی از «تعریفهای» آن مبهم به نظر می‌رسند (مثلاً، زیرگروه و گروه لی)، و واژه‌هایی در آن آمده‌اند که عموماً به‌صورتی که مؤلف به‌کار می‌برد استعمال نمی‌شوند (مانند مقطع عرضی[1]، ساخت‌شکنی[2]، جدول دوره‌ای). مدخل «گروه» بسیار نارساست (به قانون شرکت‌پذیری اشاره نمی‌شود). معنی پیشنهاد شده در تعریف «جدول دوره‌ای» گمراه‌کننده است، زیرا خانواده‌های گروههای سادهٔ متناهی از نوع لی با مشخصهٔ مثبت با خانواده‌های گروههای لی در تناظر یک‌به‌یک نیستند (به [۶]، [۵]، [۱۱]، و [۲]، مراجعه کنید)؛ تقریباً بیست خانواده وجود دارد، و نه هفت خانواده چنانکه مؤلف اظهار می‌کند). فهرست کامل دو صفحه را دربر می‌گیرد.

در کتاب اشارهٔ مختصری به نظریهٔ سرشتهای گروه در ارتباط با برنساید از یک سدهٔ قبل می‌شود، ولی بحثی از نقش مهم آن در رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، به‌خصوص در حوالی دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ (به‌عنوان مثال، مسائل قدیمی مرکزساز برگشت و مشخص‌سازیها با ۲-زیرگروههای سیلو) در میان نیست.

خلاصه

کتاب به‌راحتی قابل فهم است، هنرمندانه نوشته شده، و از لحاظ اشتمال بر مطالب خاص و مهم غنی است، و توجه خاصی به جنبه‌های انسانی ماجرا دارد. هر چند که من هم به مدت طولانی در این ماجرا شرکت داشته‌ام، از هر فصل کتاب مطالب زیادی آموختم و نتوانستم کتاب را تا پایان به زمین گذارم.

کتاب رونن تنها روایت این ماجرا نیست. این کتاب سلیقه‌های او را منعکس می‌کند (مثلاً، تأکید بر ساختمانها). روایت شخصی من [اگر به رشتهٔ تحریر در آید] دربارهٔ روشهایی خواهد بود که به گروههای سادهٔ پراکندهٔ جدید منجر شدند (منظور روشهایی است که مستقیماً از نظریهٔ لی ناشی نمی‌شوند، مثل مرکزسازهای برگشتها و کاوش در گرافهای رتبهٔ ۳). بسیاری از ایده‌هایی که به نظریهٔ گروههای ساده منتج شدند اگر به‌عنوان بخشی از سیر تکامل نظریهٔ کلی گروههای متناهی در نظر گرفته شوند به بهترین وجه درک می‌شوند. همچنین، لازم است من جامعهٔ نظریهٔ گروهها را در شیگاکو و کمپین-اوربانا در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ وصف کنم: جان الپرین[3]، هلموت بندر[4]، نورمن بلکبرن[5]، اورت دید[6]، لن اونز[7]، پال فانگ[8]، جورج گلوبرمن[9]، دیوید گولداشمیت[10]، کریستف هرینگ[11]، مورتن هریس، مارتی آیزاکس[12]، نوبورو ایتو[13]، بیل کنتور[14]، ریچارد لیونز، لن اسکات، گری سیتس[15]، میشیو سوزوکی، جان تامسن، جان والتر، وارن وانگ[16] .... تنظیم برنامه‌های سنگین سمینارها، بازدیدکنندگان زیاد، و جوش‌وخروش فکری از عوامل شتاب‌دهندهٔ بسط نظریهٔ عام گروههای متناهی بودند. این گسترش شامل نظریهٔ نمایش، همانستگی گروهها، نظریهٔ موضعی گروهها، هندسه، و گروههای جایگشتی نیز می‌شود، و نه تنها گروههای ساده که مبحث اصلی این کتاب است. جای خوشوقتی بود که من هم در آنجا حضور داشتم و خیلی چیزها آموختم. دورهٔ بی‌نظیری بود.

---

1 cross section 2. deconstruction 3. Alperin 4. Bender 5. Blackburn 6. Dade 7. Evens 8. Fong 9. Glauberman 10. Goldschmidt 11. Hering 12. Issacs 13. Ito 14. Kantor 15. Seitz 16. Wong

مؤلف شرحی متنوع از فرایند تحقیق می‌دهد و هم محتوای علمی و هم جنبه‌های روانشناختی آن را وصف می‌کند. وی آموختن از استادان، تحقیق خلاقانه به‌تنهایی، تشریک‌مساعی هماهنگ یا پرتنش، و مسیر گاه دشوار تأیید و پذیرش نهایی را توصیف می‌کند. مثالهای زیاد کتاب به‌خصوص برای خوانندگان جوان، آموزنده‌اند. این مثالها می‌توانند به ایجاد مهارتهای لازم برای بقا و موفقیت در عرصهٔ ریاضی کمک کنند. دنیای ریاضیدانان دنیای رقابتی است.

تقارن و هیولا، یکی از بزرگ‌ترین کاوشهای ریاضی، کتابی ارزشمند است و مطالعهٔ آن هم به دانشگاهیان با سابقه و هم به جوانان دانش‌دوست توصیه می‌شود.

مراجع

1. Michael Aschbacher and Stephen D. Smith, *The Classification of Quasithin Groups. I. Structure of Strongly Quasithin K-groups*, Mathematical Surveys and Monographs, 111, AMS, 2004, *The Classification of Quasithin Groups. II. Main Theorems: The Classification of Simple QTKE-groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 112, AMS, Providence, RI, 2004.
2. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
3. C. Chevalley, Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. J.* (2) **7** (1955), 14-66.
4. Leonard Eugene Dickson, *Linear Groups: With an Exposition of the Galois Field Theory*, Dover, New York 1968 (reprint of *Linear Groups*, Teubner, Leipzig, 1901).
5. Daniel Gorenstein, The classification of finite simple groups. I. Simple groups and local analysis, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **1** (1979), no. 1, 43-199.
6. ———, *Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification*, i University Series in Mathematics, Plenum, New York, 1982.
7. Otto Kegel, Reinhold Baer (1902-1979), *Math. Intelligencer* **2** (1979/80), no. 4, 181-182.
8. Robert L. Griess Jr., The structure of the "Monster" simple group, *Proceedings of the Conference on Finite Groups*, Park City, Utah, February 1975, Academic Press, 1976, pp. 113-118.
9. ———, The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1-102.
10. Robert L. Griess Jr., Ulrich Meierfrankenfeld, and Yoav Segev, A uniqueness proof for the monster, *Ann. of Math.* **130** (1989), 567-602.
11. Robert L. Griess Jr., *Twelve Sporadic Groups*, Springer-Verlag, 1998.
12. Marshall Hall Jr. and David Wales, The simple group of order 604, 800, *J. Algebra* **9** (1968), 417-450.
13. Zvonimir Janko, A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, *J. Algebra* **3** (1966), 147-186.
14. ———, Some new simple groups of finite order I, *First Nax Alta Math. Symposia Math* **1** (1986), 25-65.
15. Michael P. Thorne, On Fischer's "Monster", Ph. D. thesis, University of Birmingham, 1979.

******

• Robert L. Griess Jr., "Symmetry and the monster, one of the greatest quests of mathematics", *Notices Amer. Math. Soc.*, (2) **54** (2007) 234-239.

• رابرت گریس، دانشگاه میشیگان، ان اربر، آمریکا

rlg@umich.edu

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم

پال هالموس

ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل

دوست دارم ریاضیدان باشم از آثار مشهور پال هالموس (۱۹۱۶ـ۲۰۰۶)، ریاضیدان آمریکایی مجاری‌تبار و شارح و نویسندهٔ پرآوازهٔ ریاضی است که به زندگی و کار و کردار او به‌مثابهٔ یک ریاضیدان حرفه‌ای می‌پردازد و در این رهگذر چشم‌اندازی به روی یک برههٔ مهم تاریخ ریاضیات آمریکا (از دههٔ چهل تا اواسط دههٔ هشتاد میلادی) می‌گشاید.

هالموس هر چند صاحب آثار پژوهشی شایان‌توجهی در آنالیز تابعی، نظریهٔ ارگودیک، نظریهٔ اندازه، و منطق جبری است، کار پژوهشی خود را در رتبهٔ چهارم (پس از نویسندگی، ویرایش، و تدریس) قرار می‌داد یعنی بیشترین تبحر را به نظر خودش در نوشتن داشت. عمدهٔ شهرت او نیز مدیون همین توانایی در تشریح ریاضیات و حرفهٔ ریاضی و مسائل پیرامون آن است. این تبحر در نثر گیرای او در این کتاب، که گاه آمیخته به طنز است، به‌وضوح دیده می‌شود. دوست دارم ریاضیدان باشم شامل حکایتها و شرح و توصیفهای جذابی است از بسیاری از چهره‌ها، رویدادها، کنش و واکنشها، همایشها، محفلها، و دپارتمانهای ریاضی، و مسائل و مشکلات جامعهٔ ریاضی در دورهٔ مورد نظر.

نشر ریاضی تصمیم گرفته است ترجمهٔ این اثر خواندنی را به‌صورت پاورقی (یک فصل از کتاب در هر شماره) در اختیار خوانندگان قرار دهد. مشخصات کتاب اصلی این است

Paul R. Halmos, *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag (1985).

ترجمهٔ قطعه‌هایی از این کتاب به قلم شیوای آقای حسین معصومی‌همدانی در شمارهٔ ۲ سال ۱ نشر ریاضی با عنوان «می‌خواهم ریاضیدان به حساب آیم» به چاپ رسیده است.

پیش‌درآمد

این کتاب از نوع «خودریاضی‌نگاری»[1] است یعنی زندگینامهٔ ریاضی یک ریاضیدان که خود او آن را نوشته است. این متن قطعاً یک کتاب ریاضی نیست، و با تأکید بیشتری می‌گویم که، داستان منشأ خانوادگی و زندگی من هم نیست. من البته والدینی (دوتا، یکی در هر زمان، همسر فعلی را به مدت چهل سال)، و گربه‌هایی (هشت‌تا، دوتا در هر زمان، و دوتای اخیر را برای سه سال) داشته‌ام. خطاهای بسیاری داشته و دارم، و مطمئنم که چند فضیلتی هم داشته‌ام. هایدن[2]، پیاده‌روی‌های طولانی، نرو ولف[3] را دوست دارم، و چند سالی مراقبهٔ متعالی[4] را تجربه کرده‌ام. همهٔ اینها درست است اما به شما مربوط نمی‌شود ــ اینها موضوع کتاب نیستند.

این کتاب دربارهٔ زندگی کاریِ ریاضیدانی حرفه‌ای از سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۸۰ است. کتاب کم‌وبیش به‌ترتیب زمانی، از دبیرستان تا بازنشستگی تنظیم شده، اما ترتیب مطالب هر بخش برحسب موضوع است و نه زمان. در کتاب از دانشگاه ایلینوی، مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستن، و دانشگاههایی که معمولاً عناوین شیکاگو، میشیگان، و ایندیانا شناخته می‌شوند، سخن می‌رود از پیشداوریها صحبت می‌کند، حکایت می‌گوید، دربارهٔ بعضی مردم غیبت می‌کند، و موعظه می‌کند. دربارهٔ امتحانات جامع، دنبالِ کار گشتن، نوشتن کتاب، مسافرت، درس دادن، و ویراستاری سخن می‌راند.

پنجاه سال قبل آدمی بودم مغرور، سنت‌شکن، مشتاق، بلندپرواز، عجول، جاهل، و فاقد اعتماد به‌نفس. حالا آرامش و پختگی بیشتری یافته‌ام، (واقعاً؟)، و چیزهایی یاد گرفته‌ام. کتاب تا حدی از زبان من امروز دربارهٔ من دیروز است، و برخی رازها را فاش می‌کند که آن وقتها خیلی به‌دنبال دانستن آنها بودم.

---

۱. automathography. این اصطلاح را هالموس وارد زبان انگلیسی کرده است.ـم.

2. Haydn 3. Nero Wolfe 4. TM (transcendental meditation)

فصل اول. خواندن و نوشتن و حساب

کلمات

من کلمه‌ها را بیشتر از اعداد دوست دارم، و همواره بیشتر دوست می‌داشته‌ام.

پس، شاید بپرسید چرا ریاضیدان شده‌ام؟ نمی‌دانم. شاید بخشی از دلایل آن در داستان زندگی‌ام نهفته باشد، و به نظرم شانس نقشی حداقل به‌قدر اختیار داشته است؛ سعی می‌کنم دربارهٔ همهٔ اینها همچنان که پیش می‌رویم، سخن بگویم. می‌دانم که همواره مطمئن نبوده‌ام که می‌خواهم چه‌کاره شوم.

جمله‌ای که با آن آغاز کردم، احساس مرا دربارهٔ خیلی چیزها و اینکه چرا آن احساس را دارم، توضیح می‌دهد. از آن، به‌عنوان نمونه، چنین مراد می‌شود، یا به هر حال من می‌خواهم مراد شود، که من در ریاضیات مفاهیم را بیشتر از محاسبات دوست دارم. در نظر من تعریف گروه به‌مراتب روشن‌تر و زیباتر از فرمول انتگرال کوشی است. اگر می‌گویید مقایسهٔ یک مفهوم با یک حکم ریاضی نامنصفانه است، بسیار خوب، برای من بی‌نهایت مشتقپذیر بودن یک تابع مختلط یک بار مشتقپذیر از لحاظ زیبایی و ژرفا بسیار برتر از فرمول معروف کمبل-بیکر-هاوسدورفِ دربارهٔ تابع نمایی عملگرهای تعویض‌ناپذیر است.

جملهٔ آغازین، این موضوع را نیز شامل می‌شود که من دوست دارم ریاضیات را بفهمم، و آن را برای خودم و جهانیان روشن گردانم و علاقهٔ من به این کار حتی بیشتر از علاقه‌ام به کشف ریاضیات است. لذت ناگهان یاد گرفتن یک راز پیشین و لذت ناگهان کشف کردن حقیقتی پیش از این مجهول، برای من یکی است ــ هر دو جرقه‌هایی از روشنایی، افزایش خارق‌العادهٔ بصیرت، و وجد و رضامندیِ ناشی از رها شدن از اضطراب را در خود دارند. در عین حال، کشف حقیقتی تازه، که از لحاظ لذت ذهنی شبیه به فهم حقیقتی کهنه است، از جهتی کاملاً متفاوت با آن است. تفاوت در بالیدن به خود، احساس پیروزی، و رضایتمندیِ تقریباً بداندیشانه‌ای است که از اول‌بودن ناشی می‌شود. «اول» مستلزم آن است که کسی دوم باشد، خواستِ اول بودن به منزلهٔ تقاضا برای یک نوع درجه‌بندی است. ممکن است این‌طور به نظر برسد که می‌خواهم بگویم روشن ساختنِ ریاضیات موجود از کشف ریاضیات جدید اخلاقی‌تر است، و این حرف آشکارا احمقانه است ــ پس اجازه دهید به‌جای آن بگویم که بصیرتی که با غرور و تحقیر دیگران همراه نباشد بهتر است. شاید هم می‌خواهم بگویم که من در صیقل زدن به مطالب موجود بهتر عمل می‌کنم تا صید کردن ایده‌های تازه، و کاری را که بهتر بتوانم انجام دهم، دوست می‌دارم.

من در شرح و توصیف، و به‌ویژه در توصیف ریاضیات نیز طرفدار «استفاده از کلمات بیش از اعداد» هستم. ابداع نمادگذاری هوشمندانه (برای ضرب، توان، سری، انتگرال، و هر مفهوم محاسباتی) اغلب قدمی بزرگ به پیش است، اما استفاده از آن ممکن است تقریباً به همان اندازهٔ مختصر کردن بر ابهام نیز بیفزاید.

به‌عنوان مثالی از نکته‌ای که سعی دارم خاطرنشان کنم، قضیهٔ مقدماتی مشهوری را با برهان مقدماتی مشهور آن در نظر بگیرید. این قضیه، نابرابری بسل در فضاهای ضرب داخلی است؛ قضیه حاکی از آن است که اگر $\{x_i\}$ مجموعه‌ای یکامتعامد باشد، x یک بردار باشد، و $\alpha_i = (x, x_i)$، آنگاه $\sum_i |\alpha_i|^2 \le \|x\|^2$. یک راه متعارف برای بیان برهان قضیه، این است که بنویسیم $x' = x - \sum_i \alpha_i x_i$ و سپس محاسبه زیر را انجام دهیم

$$\begin{aligned} 0 \le \|x'\|^2 &= (x', x') = (x - \sum_i \alpha_i x_i, x - \sum_j \alpha_j x_j) \\ &= (x, x) - \sum_i \alpha_i (x_i, x) - \sum_j \bar{\alpha}_j (x, x_j) \\ &\quad + \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\alpha}_j (x_i, x_j) \\ &= \|x\|^2 - \sum_i |\alpha_i|^2 - \sum_i |\alpha_i|^2 + \sum_i |\alpha_i|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_i |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

که برهانی دقیق و موجز است اما روشنگر نیست. به نظر من، برهان ایده‌آل همین یک جمله است: «ضرب داخلی $x - \sum_i \alpha_i x_i$ را با خودِ آن تشکیل دهید و ضرب را انجام دهید.» این مطلب کفایت می‌کند تا خوانندهٔ فعال را وادارد که مدادی بردارد و زنجیرهٔ معادله‌های بالا را باز تولید کند، یا، اگر ترجیح می‌دهد، در صندلی خود لم دهد، چشمهایش را ببندد، و این معادله‌ها را در نظر مجسم کند. اگر از این هم تنبل‌تر باشد و بخواهد مقدار بیشتری از کار را برایش انجام دهند، می‌توان به جمله شاخ و برگ داد: «نتیجه مثبت و مرکب از چهار جمله است: اولی $\|x\|^2$ است، یکامتعامد بودن مستلزم آن است که آخرین جمله $\sum_i |\alpha_i|^2$ باشد، و هر دو جملهٔ حاصلضرب برداری برابر $-\sum_i |\alpha_i|^2$ هستند. یکی از آنها را با یکی از جملات مجموع مثبت حذف کنید؛ آنچه می‌ماند، نابرابری مورد بحث است.»

از لحاظ جا، برای کلمات تقریباً همان‌قدر کاغذ مصرف می‌شود که برای علامتها. کلمات روشن‌ترند، و به‌علاوه، این مزیت را دارند که می‌توان آنها را ضمن بازگشتن از کلاس به دفتر کار به دیگری گفت بی‌آنکه تخته و گچی دم‌دست باشد. همچنین احتمال بیشتر می‌رود که کلمات به کشف مفاهیم و مضامین عام مناسب (مانند ربط داشتن تصویرها) رهنمون شوند و از این طریق، دید ما را عمیق‌تر کنند.

من این گرایش را تبلیغ نمی‌کنم ولی خودم تقریباً هر چیزی را در مورد کلمات دوست دارم. دوست دارم با کلمات بازی کنم ــ آناگرامها[1]، اشباح غول‌پیکر جیمز تربر[2]، جوتو[3]، و اسکربل[4] ــ و از ریشه‌شناسی آنها لذت می‌برم ــ از کجا پیدا شده‌اند، چه معنایی داشته‌اند، چگونه تغییر یافته‌اند، و حالا دقیقاً چه معنی می‌دهند. چیزی که دوست دارم، قبلاً فقه‌اللغه [واژه‌شناسی] نامیده می‌شد ــ عشق به کلمات. اصطلاح نوین آن، «زبان‌شناسی» است، و من آن را دوست ندارم. این مبحث خیلی شبیه ریاضیات است، و بدتر از آن، از نوع «اعداد»ی ریاضیات است. به جای سروکله زدن با مفاهیم مجرد و دشوار معناشناختیِ زبانهای طبیعی (مانند «معنی» و «تعبیر») تقریباً به‌طور کامل درگیر محاسبات نمادیِ نحوِ صوری است.

---

۱. anagram، کلمه‌ای که از مقلوب کردن حروف کلمه‌ای دیگر به‌دست می‌آید ــ م.

۲. James Thurber (۱۸۹۴ـ۱۹۶۱)، طنزپرداز و کاریکاتورکار امریکایی ــ م.

۳. Jotto، بازی با کلمات که در آن دو نفر سعی می‌کنند کلمهٔ پنج حرفی طرف مقابل را حدس بزنند ــ م.

۴. Scrable، یک نوع بازی که در آن ۲ تا ۴ بازیکن با تشکیل کلمه‌هایی از حروف بر روی یک صفحهٔ ۱۵ × ۱۵ خانه امتیاز کسب می‌کنند ــ م.

این‌طور نیست که همهٔ ریاضیدانان ازکلمات خوششان بیاید. من حدسهایی در این‌باره می‌زنم اما شواهدی برای وجود همبستگی بین نوع تخصص ریاضی و علاقه به کلمات ندارم: جبرداتان، از قبیل آرتین این‌طورند، آنالیزدانان، از قبیل کورانت، این‌طور نیستند؛ و هندسه‌دانان بسته به اینکه از نوع جبری (زاریسکی[1]) یا تحلیلی (لفشتس[2]) باشند دو گروه‌اند. همبستگی دیگری که دوست داشتم ثابت کنم آن است که آنها که کلمات را دوست دارند به شهرت می‌رسند و به دلیل بیان روشنشان محبوب می‌شوند، در حالی‌که ارواح بقیه همه‌روزه غرغر و نفرین دانشجویان خشمگین را می‌شنوند. نظریهٔ مجموعه‌ها و جبر ظاهراً همان جایگاه را نسبت به حساب و معادلات دیفرانسیل دارند که کلمات نسبت به اعداد دارند.

اگر جرأت تعمیم دادن به خودم بدهم، می‌توانم بگویم که دوست داشتن کلمات بیشتر از تبحر در حسابان نشان‌دهندهٔ استعداد ریاضی است. بسیاری از استادان تحصیلات تکمیلی متوجه شده‌اند که از میان متقاضیان ادامهٔ تحصیل در دوره دکتری ریاضیات آنهایی که نمرهٔ خوبی در قسمت کلامی امتحان جی. آر. ای[3] می‌گیرند شانس بیشتری برای موفقیت در این دوره دارند تا کسانی که در قسمت کمّی نمرهٔ بهتری گرفته‌اند اما در قسمت کلامی ضعیف عمل کرده‌اند.

کتابها

گرایش به ترجیح «کلمات بر اعداد»، یا عکس آن، چگونه پدید می‌آید؟ فکر می‌کنم که این امر یا مادرزادی است، یا، در هر صورت در سنین اولیه کسب می‌شود، و به محض اکتساب، چه این و چه آن، ما را رها نمی‌کند. در مورد خود من این تمایل از چهارسالگی مشهود بود و تا هشت سالگی استحکام پیدا کرد. خیلی زود یاد گرفتم که به آسانی بخوانم و سپس بنویسم؛ حساب سخت نبود، اما بعداً و به‌کندی آن را فرا گرفتم و نه آشکارا برایم ساده بود و نه سرچشمهٔ لذت بسیار.

خانوادهٔ من در یک آپارتمان طبقهٔ سوم در بوداپست زندگی می‌کرد که مشرف به خیابانی شلوغ بود (که امروزه بولوار لنین[4] نامیده می‌شود). خیابانی پرجاذبه بود: پر زرق‌وبرق، پر ازدحام، و پر سروصدا. مغازه‌های زیادی در آن قرار داشت ــ یک مغازهٔ ابزارفروشی چشم‌نواز که در ویترین شیشه‌ای بزرگ آن چاقوهای براقی در معرض تماشا بود، چندین کتابفروشی با کتابهای رنگ‌ووارنگ که دوروبر ریخته بودند، قهوه‌خانه‌هایی با خدمتکارانی که چاپلوسی توأم با بدخلقی نشان می‌دادند و دستمال سفره‌های سفید بر آستینهای چرب سیاه رنگ خود حمل می‌کردند، و فروشگاههای پر از اسباب‌بازی و آب‌نبات و عصا و لباس و کفش و ساعت. پیاده‌رو عریض بود و انبوه جمعیت ویترین مغازه‌ها را از درختان کنار جدول پیاده‌رو و ترازوها (می‌توانستید با یک پنی وزن خود را بسنجید) و کیوسک روزنامه‌فروشیها و ایستگاه تاکسیها جدا می‌کرد. به نظر می‌رسید که جمعیت همواره آنجاست ــ صبح زود که به مدرسه می‌رفتم آنجا بودند و در مواقع نادری که دیروقت شب مرا از گردش یا سینما به خانه باز می‌گرداندند باز آنجا بودند. بعدها، وقتی بزرگ‌تر شدم و به‌عنوان یک جهانگرد آمریکایی به مجارستان رفتم، و واقعاً دیروقت شب بیرون رفتم، جمعیت باز هم آنجا بودند. چراغها می‌درخشیدند و می‌شد موسیقی کولیها را از کافه‌ها شنید.

1. Zariski 2. Lefschetz 3. Graduate Record Examination

۲. احتمالاً این نام پس از فروپاشی شوروی یک بار دیگر تغییر یافته است. ـ م.

بولوار بهناوری بود ــ برای دو خط تراموا و دو خط دیگر عبورومرور جا داشت. تراموا‌ها برقی بودند (و چه لذتی داشت که یک پنی را روی ریل قرار می‌دادی و بعداً آن را وقتی که لهولورده می‌شد برمی‌داشتی) و مسافرکشها (که وقتی خیلی جوان بودم درشکه بودند و بعداً موتوری شدند) هرگز از تقلا باز نمی‌ایستادند. تقاطع بلوار لنین و جادهٔ راکوزی[1] را نمی‌شود دقیقاً مانند تقاطع خیابانهای برادوی و هفتم [در شهر نیویورک] دانست، اما شباهتش به آن بیشتر از شباهت آن به مرکز شهر اسکارزدیل[2] [ایالت نیویورک] است وقتی در سیزده‌سالگی به محله‌ای مسکونی در شیکاگو نقل مکان کردم. مدتی طول کشید تا به خیابانهایی که در طول روز آرام و شبها تقریباً عاری از سکنه بود، عادت کنم.

تا قبل از شروع مدرسه خودم را با زُل زدن به بیرون از پنجره، لذت بردن از فعل و انفعالات بیرون، و خیره شدن به حروف بزرگی که اسم مغازه‌ها را نمایش می‌داد، سرگرم می‌کردم. «معنی آن چیست؟» دوست داشتم بدانم؛ «نام آن حرف در آنجا چیست؟»، و سعی می‌کردم پاسخ را بیابم. این روش طبعاً روش نظام‌مندی برای آموزش خواندن نبود و شیوه‌ای است که احتمالاً هم هواداران مکتب بصری و هم هواداران مکتب سمعی را به وحشت می‌اندازد، اما [برای من] مؤثر بود. نتیجهٔ کنجکاوی سماجت‌آمیز من آن بود که پیش از چهارمین سالروز تولدم، نه تنها الفبا را می‌دانستم، بلکه می‌توانستم بخوانم، و شروع به کندوکاو در کتابخانهٔ شخصی پدر بزرگم کردم؛ طولی نکشید که کتابخانهٔ چند خانه پایین‌تر در خیابان هم که کتاب امانت می‌داد، به دردم خورد. کتابهای پدر بزرگم در قفسه‌های شیشه‌دار و مجهز به قفل و کلید بودند و کلیدها در کشویی نگهداری می‌شدند که خود کشو هم به‌وسیلهٔ کلیدی قفل می‌شد که پیرمرد آن را پیش خود نگاه می‌داشت. اما به من اجازه می‌داد هر کتابی را که نشان می‌دادم، بدون سؤال، بدون سانسور، در اختیار داشته باشم، اما خود او باید هنگام بازکردن قفسه‌ها حضور می‌داشت.

من خیلی می‌خواندم. وقتی مدرسه را مانند دیگران در ۶ سالگی شروع کردم، باید تکلیف درسی انجام می‌دادم ــ بله، تکلیف روزانه از ۶ سالگی ــ اما وقت کافی برای خواندن می‌یافتم: ضمن صبحانه، قبل از شام، ضمن حمام کردن در وان، و بهتر از همه، عصرگاه. قبل از خاموشی چراغها، در رختخواب می‌خواندم و با گوشی به موسیقی رادیو که از وین و پاریس پخش می‌شد گوش می‌کردم. من داستانهای گریم[3] و هانس کریستیان آندرسن، ازوپ[4]، و لافونتن را می‌خواندم و لذت می‌بردم ــ و طولی نکشید که اسکارموش[5] و زندانی زندا[6] (همه با ترجمهٔ عالی به زبان مجاری) را خواندم. ادبیات مجاری را هم البته در اختیار داشتم، یوکایی[7] و کارینتی[8]، و هم مطالب خوب و هم خزعبلات هیجان‌انگیز از همه جای دنیا. کاپیتان نمو[9] و نیک کارتر[10]، شرلوک هولمز و آرسن لوپن همه از دوستان من بودند. نمایندهٔ ادبیات آمریکایی جیمز فنیمور کوپر[11] و مارک تواین بودند؛ من احتمالاً دربارهٔ چینگاچگوک[12] و نام سایر همان اندازه می‌دانستم که اغلب بچه‌های کانزاس‌سیتی.

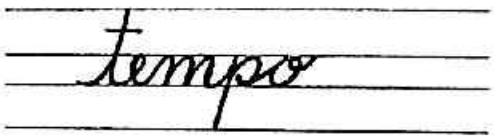
حال که بعد از ۵۰ـ۶۰ سال به آن روزها فکر می‌کنم، قدر آن محیط را می‌دانم و آن را تحسین می‌کنم. فرهنگ در آن محیطْ چیزی مسخره،

1. Rákoczi 2. Scarsdale 3. Grimm 4. Aesop 5. *Scaramouche*
6. *The Prisoner of Zenda* 7. Jókai 8. Karinthy
9. Captain Nemo 10. Nick Carter 11. James Fenimore Cooper
۱۲. Chingachgook، قهرمان داستانهایی از جیمز فنیمور کوپر. ـ م.

غیرعادی یا سوسولی نبود ــ برخورداری از آن مسلم فرض می‌شد. کتاب و موسیقی بخشی از میراث عمومی تلقی می‌شد که هر کسی باید با آن انس می‌داشت. در مدرسه دربارهٔ آخرین اثر نیک کارتر بحث می‌کردیم، ولی دربارهٔ دارتانیان[1] نیز صحبت می‌کردیم، و می‌توانستیم به هم بگوییم که چیزی را در همان اواخر خوانده‌ایم بدون آنکه عجیب به نظر برسد.

نوشتن

وقتی وارد مدرسهٔ ابتدایی شدم خواندن بلد بودم، اما نوشتن را باید فرا می‌گرفتم. فروید [اگر زنده بود] احتمالاً استنتاج می‌کرد که این امر باید برای من تجربه‌ای دردناک بوده باشد: تقریباً هیچ چیز از آن به خاطر ندارم. یا تمرکز فکر می‌توانم تصویری تیره از یک اتاق را، که چندان بزرگ نبود، بزرگ‌تر از اتاق پذیرایی معلی‌ام نبود، با چند کودک با چهرهٔ محو، زنی با چهره محو، معلم، به خاطر بیاورم. به ما می‌گفتند که از کاغذ خط‌دار مخصوصی استفاده کنیم. حروف کوچک، مانند e و o باید بین دو خط میانی نزدیک به هم جا می‌گرفتند؛ حروفی که به طرف بالا و پایین کشیده می‌شوند، مانند t و p، با فاصله به خطهای بالایی و پایینی می‌رسیدند. نتیجه مانند زیر می‌شد:



ین کار برایم دشوار بود و باعث اضطراب من می‌شد. روزی که M بزرگ را درس می‌دادند، غایب بودم و باید روش نوشتن این حرف را خودم ابداع می‌کردم ــ این کار مدتها آزارم داد.

وقتی که به آمریکا آمدم، زود متوجه شدم که خط من «متفاوت» است ــ خوانا بود اما به طرزی عجیب «لهجه» خارجی داشت. بعداً، وقتی درس دادن را شروع کردم، این مسأله به نقطهٔ ضعف جزئی ولی ناجوری در ارتباط من با دیگران بدل شد. من به بازآموزی خود پرداختم به‌طوری که، تا آنجا که به خط مربوط می‌شد، می‌توانستم خود را به جای کسی که در وماها[2] [نبراسکا] به دنیا آمده است، جا بزنم.

دربارهٔ جنبهٔ مکانیکی نوشتن صحبت کردم. جنبهٔ دیگر، یعنی نوشتن به‌عنوان روشی برای بیان چیزی، بسیار مهم‌تر و بسیار مشکل‌تر است و یاد گرفتن آن مدتها بیشتر طول کشید. در نخستین نوشته‌ای از این دست که به خاطر می‌آورم، سعی می‌کردم که میهن‌دوستی خود را بیان کنم.

تیموتاب میهن‌دوستانه در آن روزها عمدتاً علیه پیمان تریانون[3] بود که مجارستان را پس از جنگ جهانی اول پاره‌پاره کرد و تنها یک سوم مساحت قبلی را برای آن گذاشت. «نه، نه، هرگز!» شعار ملی بود. در مدرسه ما همه روزه سوگند وفاداری به پرچم را از بر می‌خواندیم. من عاشق آن بودم؛ از معاهدهٔ تریانون احساس رنجش خاطر می‌کردم و در آرزوی بازگشت امپراتوری بودم. در توصیف موضع سیاسی خود می‌گفتم که سلطنت‌طلب هستم. وقتی در کلاس به ما گفتند که انشای وطن‌پرستانه‌ای بنویسیم، انشای من برندهٔ جایزه شد. من به این آرمان اعتقاد داشتم و همان زمان نخستین نشانه‌های عشق آیندهٔ خود به کلمات را در خود حس کردم. نتیجهٔ آن، نوشتن مطالبی به نثر فاخر و متکلف بود و من از آن به خود می‌بالیدم.

چگونه شد که عاشق نوشتن شدم و نوشتن برایم آسان شد؟ تنها می‌توانم حدس بزنم. سه عامل عمده‌ای که از آنها با خبرم، زیاد خواندن، زیاد نوشتن، و عشق به زبانهای مختلف بود. و تصور می‌کنم که همهٔ آنها از عشق به کلمات نتیجه می‌شوند.

مطمئنم که خواندن آثار ولتر و سروانتس، یا راستش را بخواهید، حتی دوما و اشنیتسلر[1]، بر سبک ریاضی من تأثیر گذاشته و آن را بهبود بخشیده و از من معلم بهتری ساخته است که در غیر این‌صورت چنین نمی‌شدم. خواندنْ شیوهٔ بیان مرا بهتر می‌کند و دیدگاه جهانی و شناخت مرا از مخاطبانی که مایلم با آنها ارتباط برقرار کنم، وسعت می‌بخشد. دوستانی که با سربلندی اعلام می‌کنند که هرگز داستان نمی‌خوانند، مرا به هراس می‌اندازند. برخی از آنها هر نوع داستانی را دروغ، یا به بیان ملایم‌تر، ساختگی و مصنوعی و نه راست و واقعی می‌نامند. داستانهای واقعی در نظر آنها دربارهٔ سنمها، سرکوبها، و جنگها، و دربارهٔ مبارزات و انتخابات و فساد در سطوح بالاست؛ آنها «مهم‌تر» و «ذی‌ربط‌تر» از آثار جین آستین و دیکنز و گالس‌وورثی[2] و سامرست موآم‌اند. نه، نه، نه! من از نظر احساسی مخالف این نوع دیدگاهم و از لحاظ عملی هم با آن مخالفم. من هوادار انزوا از دنیا و عزلت‌نشینی نیستم ــ اما اصرار دارم که بدون خواندن عهد عتیق و عهد جدید (روایت کینگ جیمز)، و آلیس در سرزمین عجایب، و نیز مکبث، اعلامیهٔ استقلال، و مرد و ابرمرد اصولاً نمی‌توان نویسنده شد ــ هر نوع نویسنده‌ای که باشد.

اما در مورد نوشتن، من همه وقت می‌نویسم و تا آنجا که می‌توانم به خاطر بیاورم همیشه می‌نوشته‌ام. من نامه می‌نویسم، گاهگاهی خاطرات خود را ثبت می‌کنم، و برای خودم یادداشت برمی‌دارم، یادداشتهایی صریح و نسبتاً مشروح و نه صرفاً «بسط سری توانی را امتحان کن» یا «برای $p > 1$، اثر دانفورد ــ شوارتس را ببین». من با نوشتن فکر می‌کنم. در دورهٔ دانشگاه یادداشتهای درسی می‌نوشتم، یعنی، مختصرنویسی‌های خط خطی کلاس را به جملات خوانا و مطابق دستور زبان تبدیل می‌کردم. بعدها، وقتی که شروع به اثبات قضیه کردم (اصطلاح محافظه‌کارانهٔ مقبول در مقابل اصطلاح پر طمطراق «تحقیق کردن»)، مستمراً می‌نوشتم، تو گویی که مکالمه‌ای بین من و خود من انجام می‌شد. «چه اتفاقی می‌افتد اگر فقط حالت ارگودیک را در نظر بگیرم؟ خوب، بگذار ببینم. قبلاً بررسی کرده‌ام که وقتی S ارگودیک باشد، چه اتفاقی می‌افتد، اما حالت به درد بخور زمانی است که S و T ارگودیک‌اند....»

وسوسه می‌شوم که موعظه کنم و بگویم: «راه درست همین است، این‌گونه انجامش دهید، راه مرا در پیش بگیرید و گرنه موفق نخواهید شد ــ اما تنها چیزی که از آن مطمئنم این است که روش درست برای من همین است، هیچ راه دیگری نیست که بتوانم کارها را به آن طریق انجام دهم.»

زبانها

خواندن و نوشتن و آشنایی با زبانها سه عاملی بودند که در نویسندگی من سهم داشتند، و من دربارهٔ خواندن و نوشتن توضیح داده‌ام. اما احساس

1. Schnitzler 2. Galsworthy

۱. d'Artagnan، کنت دارتانیان (۱۶۱۱ـ۱۶۷۳) فرمانده تفنگداران لوئی ۱۳ پادشاه فرانسه که در محاصرهٔ ماستریخت به قتل رسید و از طریق داستان سه تفنگدار الکساندر دوما (و رُمانی دیگر) وارد ادبیات فرانسه شده است.ـ م.

2. Omaha 3. Trianon

من دربارهٔ زبانها، یا حداقل بخشی از آن، شاید معلول یاد گرفتن یک زبان خارجی پیش از یاد گرفتن زبان مادری‌ام بوده است. من زبان آلمانی را به کمک پرستار اهل تیرول[1] خود یاد گرفتم که وقتی دو سالم شده بود به خانوادهٔ ما پیوست و من در سرتاسر عمرم آرزو کرده‌ام که ای کاش این زبان در خاطرم مانده بود. آلمانی شنیداری (به‌خصوص اتریشی) را هنوز می‌توانم بفهمم، اما نمی‌توانم به این زبان حرف بزنم؛ بجز در مورد زبان فنی که بعدها آن را یاد گرفتم، واژگان من در این زبان در حد یک کودک چهار ساله، و فعلها و der-die-das[2] فراتر از توان من است.

با زبان لاتین وقتی حدود ۶ سال داشتم کمی آشنا شدم. یکی از برادرانم که پنج سال از من بزرگ‌تر بود، درسهای حفظی خود را دور میز نشیمن ما که اغلب آنجا بازی می‌کردیم و چیز می‌خواندیم، زیر لب زمزمه می‌کرد، و بعضی از آنها در ذهنم حک شدند. هنوز چندتایی از حروف اضافهٔ لاتین را به خاطر دارم (ante، apud، ad، adversis، circum، circa، citra، cis،...) : آیا اینها با مفعول بی‌واسطه بکار می‌روند؟

زبان عبری را کمی بعد فرا گرفتم. تعلیمات مذهبی در مدرسه (که برای کاتولیکها، پروتستانها و کلیمیان جداگانه انجام می‌شد) دو بخش داشت: یکی مفرح و دیگری وحشتناک بود. دربخش مفرح آن، سرودخوان پیر بی‌بو و خاصیتی با اندک موهای آویخته از چانه پشت ارغنونی می‌نشست و به ما یاد می‌داد کلمات عبریِ برخی سرودها را به آواز بخوانیم. گمان می‌کنم که از ما می‌ترسید اما این آهنگهای نشاط‌انگیزِ روز ما را پُر می‌کرد و کم و بیش در انتظار درس هفتگی خود به سر می‌بردیم. هنوز برخی آهنگها و دو بیت از نخستین سرودها را به خاطر می‌آورم. بخش وحشتناک، زبان عبری بود. این زبان را مردی سخت‌گیر، با صورتی گرد و از ته تراشیده، درس می‌داد که خود را بسیار جدی می‌گرفت. او اصلاً به ما عبری نیاموخت، حتی تلاش هم نکرد؛ این کار جزو وظایف او نبود. کاری که او انجام داد این بود که ما را به ماشینهایی تبدیل کرد که می‌توانستیم متون عبری چاپی را تلفظ کنیم. می‌توانستم به صفحه‌ای از عهد عتیق که به عبریِ نقطه‌گذاری شده چاپ شده بود نگاه کنم و بی‌آنکه معنی حتی یک کلمه را بدانم، علامتهایی را که به چشم می‌رسید به صوتی که از لبانم خارج می‌شد، تبدیل کنم.

هم در مدرسه و هم در خانه تأکید بر جهان وطنی بود. زبان فرانسه (که به عللی هرگز فرصت یاد گرفتن آن را پیدا نکردم) از موضوعات درسی نبود اما چیزی زنده بود—زبانی بود که پدرم زمانی که نمی‌خواست بچه‌های فضولش از صحبتهای تلفنی‌اش سر در بیاورند، به آن تکلم می‌کرد.

گمان می‌کنم که حتی همین آلمانی بچگانه، لاتین دست دوم، عبری مکانیکی و فرانسوی سرّی، حوزهٔ دید ادبی مرا گسترش داد—اینها اگر نقش دیگری هم نداشتند، حداقل به من آموختند که شباهتها و تفاوتهای بین راههای گوناگون بیان اندیشه را حس کنم.

امروز برخی دانشجویان تحصیلات تکمیلی از اینکه مجبور می‌شوند برای گرفتن درجهٔ دکتری خواندنِ دو زبان را یاد بگیرند، اعتراض می‌کنند. «چرا باید دربارهٔ گلها و خانواده‌ها و مضاف‌الیه‌ها و فعل ماضی چیز بیاموزیم؟—چیزی که به آن نیاز داریم در حد خواندن گزارش سمینار پاریسِ ماه قبل است.» بعضیها از این هم فراتر می‌روند: «آلمانی را برای چه می‌خواهیم؟—برای من زبان فورترن بسیار مفیدتر است.»

وحشت‌انگیز است! حالم به‌هم می‌خورد، پیش‌بینی می‌کنم که چنین دیدگاههای ضد زبانی، ضد فرهنگی، و ضد روشنفکری به بدتر شدن مبادلهٔ اطلاعات علمی بین‌المللی و انتشار انبوه نوشته‌های ضعیف منجر خواهد شد. هر مطلب کوچکی که من دربارهٔ هر زبانی یاد گرفته‌ام بعداً در نویسندگی به کمکم آمده است. این امر در مورد زبانهای دانمارکی، و پرتقالی، روسی و رومانیایی که بعداً به دلایل ریاضی خاص فرا گرفتم صادق است اما حتی درمورد مقدارکمی یونانی و سانسکریت نیزکه توانستم یاد بگیرم صدق می‌کند. من همواره افسوس خورده‌ام که هرگز یونانی را یاد نگرفتم؛ هر اونس از آن می‌توانست یک پوند بینش زبانشناختی بازده داشته باشد. طی سالها توانایی آن را یافتم که چند کلمهٔ ریشه‌ای یونانی را یاد بگیرم؛ منبع من فرهنگهای لغت، به‌خصوص امریکن هریتیج و ویرایش دوم وبستر بود. احساس می‌کنم پیش از آنکه کلمه‌ای را به‌کار ببرم لازم است به جستجوی ریشه و تبار آن بپردازم، و می‌دانم (مطلبی است کم‌اهمیت اما جایش همین جاست) که دلیل آنکه مشکلی در هجی کردن زبان انگلیسی ندارم این است که حتی آشنایی مختصر با دیگر زبانها مرا از خاستگاه بسیاری از کلمات دشوار با خبر می‌کند.

اما انصاف بدهیم، می‌پذیریم که گذاشتن زبان فورترن به جای زبان آلمانی تنها ۹۰٪ بد است و نه ۱۰۰٪. چیزی را که [اگر فقط فورترن بخوانیم] از لحاظ درک فرهنگ و تبحر در هنر ارتباط از دست می‌دهیم، در توجه بی‌نقص به جزئیات و نزدیک شدن به علم ارتباط به‌دست می‌آوریم. دانش نظریه و به‌کار بردن زبانهای صوری شاید کمکی به نوشتن دقیق، به‌ویژه برای دانشجویانی باشد که استعداد ریاضی ندارند ولی هیچ کمکی به روشن نوشتن نمی‌رساند. این تمایز گاهی مورد غفلت قرار می‌گیرد یا حتی محل مناقشه است اما خطایی غم‌انگیز است—همه اختلافها در جهان بین نوشته‌ای است که امکان سوءفهم آن نیست و نوشته‌ای که می‌توان آن را به‌خوبی فهمید.

اعداد

شمردن را در خانه یاد گرفتم، به این معنی که نام چند تا عدد صحیح مثبت نخستین را فرا گرفتم؛ می‌توانستم آنها را به‌ترتیب از حفظ بگویم و بین پنج و هفت نان شیرینی تمایز قائل شوم. یکی از نخستین تجارب من در حساب مرا با پدر پرجذبه و اسرارآمیزم مرتبط کرد؛ این تجربه به ساعت مربوط می‌شد. او دایره‌ای از مقوا برید، آن را با اعداد رومی از I تا XII علامت‌گذاری کرد، عقربه‌هایی به مرکز آن نصب کرد و به من یاد داد چگونه ساعت را بخوانم. درسها در اتاق بزرگی بود که قلمرو او محسوب می‌شد و ورود به آنجا امتیازی نادر شمرده می‌شد. او از این اتاق به‌عنوان محل کار (وی پزشک بود) و اتاق مطالعه (در زمانهای بسیار نادر فراغتش پشت میزش مسأله‌های شطرنج را حل می‌کرد) و نیز اتاق خواب استفاده می‌کرد. تختخوابش در طول روز کاناپه‌ای عریض و لوکس بود که با یک قالی رنگ و وارنگ پر جلای ایرانی مفروش بود. اتاق آفتابگیر و نشاط‌انگیزی بود که سه پنجره در دیوار یک سمت داشت و قفسه‌های شیشه‌دار کتاب روبه‌روی آنها قرار داشتند. درسِ ساعت، بیش از یک هفته طول کشید. من سرانجام آن را درست یاد گرفتم و وقتی ساعت ۴۵ : ۸ بود از اینکه می‌توانستم بگویم «یک ربع به نه» به خود می‌بالیدم.

من در آن روزها دربارهٔ مثلثات هم چیزهایی می‌شنیدم اما به نظرم درس مهم و ترسناکی می‌آمد. برادرم، همان که حروف اضافهٔ لاتین را از بر می‌کرد، اتحادهای ضلع مقابل به وتر و بقیه را حفظ می‌کرد؛ هرگز نمی‌توانستم هیچ‌یک

۱. Tyrol یا Tirol از ولایتهای غربی اتریش.—م.
۲. حروف تعریف زبان آلمانی.—م.

از آنها را به خاطر بسپارم. حتی اصطلاحات مجاری بسیاری از این مفاهیم را دیگر به یاد ندارم. سالها بعد، وقتی مثلثات را یاد گرفتم لازم بود بر این ترس غلبه کنم تا ببینم که این موضوع بسیار ساده است.

در مدرسهٔ ابتدایی حساب، یعنی چیزهایی از قبیل جدول ضرب ۹ × ۹، را یاد گرفتم. من مهارت زیادی در آن نداشتم و بعضی ضربها مثل ۷ × ۶ و ۸ × ۷ را هرگز نتوانستم به‌طور خودکار انجام دهم ــ هنوز هم باید تأمل کنم و به جزئیات فکر کنم. (آیا اینها را آن روزها مثل نوشتن M بزرگ یاد می‌دادند؟) آنهایی را که می‌دانم (کاملاً مطمئنم که ۲۱ = ۷ × ۳) ظاهراً در حافظهٔ شنیداری من قرار دارند: من بیش از اینکه آنها را «ببینم» یا «بفهمم»، می‌شنوم.

به‌علاوه من آنها را به زبان مادری‌ام، به مجاری، می‌شنوم و این امر گاهی مضطربم می‌کند. گرچه بیش از نیم قرن است که به انگلیسی حرف می‌زنم، می‌نویسم، و خواب می‌بینم، حسابی که می‌شنوم همواره به زبان مجاری است و وقتی حساب و کتاب دسته‌جمعی را می‌کنم و اعداد را زیر لب زمزمه می‌کنم، آنها را به مجاری زمزمه می‌کنم. نمی‌گویم «نه و هشت می‌شود هفده، ده بریک»، بلکه می‌گویم: "kilenc és nyolc az tizenhét, marad egy". چرا؟ شاید به این دلیل که حساب چیزی است که همهٔ ما همه روزه زیر لب زمزمه می‌کنیم ــ اغلب مباحث دیگر را می‌توان یک هفته یا یک ماه به فراموشی سپرد.

آموزش مجاری من در حساب یکی از نقاط ضعف جزئی من در سالهای اولیهٔ تدریسم در امریکا بود. برای اینکه مشکل را ببینید، به دو رشته عملیات زیر نگاه کنید:

۱۹۳۲ × ۴۷۳

۷۷۲۸

۱۳۵۲۴

۵۷۹۶

۹۱۳۸۳۶

و

۱۹۶۳ ÷ ۲۹ = ۶۷٫۶۸

−۱۷۴

۲۲۳

−۲۰۳

۲۰۰

−۱۷۴

۲۶۰

−۲۳۲

۲۸

زیاد طول نمی‌کشد که بفهمیم اینها نشان‌دهندهٔ یک عمل ضرب و یک عمل تقسیم‌اند، اما ظاهراً چیزهایی «متفاوت»اند و شبیه عملیات مشابه در این کشور [امریکا] به نظر نمی‌رسند ــ من آنها را به این صورت یاد گرفته‌ام و دانشجویان تازه وارد من در جبر پیش‌دانشگاهی که به قدر کافی در تقسیم ۱۹۶۳ بر ۲۹ مشکل داشتند، نمی‌توانستند از پس انجام آن به روشی که برای آنها وارونه به نظر می‌رسید، برآیند. در اینجا نیز، مانند املاتویسی، باید چیزی را از نو می‌آموختم. من از عهدهٔ این کار برآمدم و کم و بیش مانند اهالی نیراسکا شدم. با این حال اعتراف می‌کنم که هنوز هم وقتی در ملأ عام می‌خواهم ضرب و تقسیم انجام دهم، باید بکوشم که طبق عادت قدیم عمل نکنم.

ضعف دیگری در حساب که البته هرگز موجب نگرانی من نبوده، آن بود که در مدرسه برخی الگوریتمهای پیچیده‌تر مانند جذرگیری را یاد نگرفتم. سالها پس از اتمام مدرسه، دوستی نحوهٔ جذرگرفتن را به من نشان داد و من این فن را تا چند هفته‌ای در خاطر داشتم.

وقتی که من و پسر عمه‌ام ۸ و ۹ ساله بودیم (او یک سال از من بزرگ‌تر بود)، پدر بزرگ ما عادت داشت که ما را در ضرب اعداد سه رقمی (البته به‌صورت ذهنی و بدون کاغذ و قلم) به رقابت وادار کند. من نه عاشق این بازی بودم و نه از آن نفرت داشتم. دوست داشتم برنده شوم و دوست داشتم سکه‌ای را که به برنده جایزه داده می‌شد، دریافت کنم. (آیا از آن زمان نبود که به فردی حرفه‌ای بدل شدم؟) ما هر دو به یک اندازه در این کار استعداد داشتیم.

یا درس بخوان یا اضطراب داشته باش

آیا همهٔ بچه‌ها از مدرسه می‌ترسند؟ من مطمئناً چنین بودم. البته از مدرسهٔ ابتدایی آن قدر نمی‌ترسیدم که از مدرسهٔ متوسطه که گیمنازیوم[1] نامیده می‌شود. «ترس» واژهٔ ملایمی برای بیان احساس من در این زمینه است؛ بهتر است بگویم که نگرانی اضطراب‌آلود دائمی و وحشت داشتم. من هرگز کتک نخوردم، اما فشار روحی ناشی از ریشخند و نکوهش دیگران، انگیزه‌ای کافی برای «خوب» بودن بود. «بد» بودن صرفاً کثیف بودن، شلوغ بودن، یا مخرب بودن یا بی‌رحم بودن نبود بلکه بیشتر به معنی آماده نبودن برای درس پس دادن بود.

برنامهٔ درسی گیمنازیوم برنامه‌ای هشت ساله مشتمل بر هشت سال درس زبان لاتین، چهارسال درس زبان یونانی، پنج سال ریاضیات، و مقادیر فراوانی از علوم طبیعی، جغرافیا، تاریخ، و ادبیات بود. من به موقع، وقتی ده سالم بود، وارد دوره شدم، اما برای امتحانات نهایی فرساینده‌ای به نام «ماتورا»[2] که در سال هشتم برگزار می‌شد، آنجا نبودم زیرا در ۱۳ سالگی مهاجرت کردم. در گیمنازیوم بیشتر توجه معطوف به چیزی بود که در ایالات متحده آموزش علوم انسانی نامیده می‌شود ــ فرهنگ به‌طور گسترده و عمیق بدون هیچ آموزش فنی یا حرفه‌ای.

کتابهای درسی قطوری داشتیم که باید بین مدرسه و خانه به زور با خودمان می‌کشیدیم و بسیاری از ما عادتی داشتیم که امروز به نظرم تأسف‌برانگیز می‌رسد. صبح روز سه‌شنبه ۴ یا ۵ صفحه را که به کار کلاسی سه‌شنبه مربوط می‌شد، از کتاب می‌کندیم و باقی را در خانه می‌گذاشتیم. بنابراین چیزهای اندکی با خود می‌بردیم اما حتماً باید این کار را می‌کردیم زیرا در کلاس ممکن بود ما را صدا کنند که مثلاً صفحهٔ ۸۷ کتاب لاتین را ترجمه کنیم یا مسألهٔ صفحهٔ ۴۳ از کتاب جبر را حل کنیم. شانس یا خطر فرار گرفتن در بین کسانی که باید روز سه‌شنبه درس پس دهند، همیشه با ما بود. البته ما قمار می‌کردیم. می‌دانستیم که احتمال صدا کردن ما در روز سه‌شنبه اگر دوشنبه از ما درس پرسیده بودند، کم بود و سعی می‌کردیم که رفتار معلمان را در این

۱. Gymnasium، دبیرستانهایی در آلمان و برخی کشورهای دیگر اروپایی که دانش‌آموزان را آمادهٔ ورود به دانشگاه می‌کنند ــ م.

2. matura

مورد حدس بزنیم. یکی الفبایی عمل می‌کرد و دیگری بچه‌های خنگ را که ته کلاس می‌نشستند به‌ستوه می‌آورد.

درس‌پس‌دادن گاهی کوتاه بود و از همانجا که نشسته بودیم، انجام می‌شد. «جانشین ماتیاس[1] شاه که بود؟»، «طولانی‌ترین رودخانهٔ ایتالیا چیست؟»، یا طولانی و پای تخته بود (ترجمهٔ لاتین قطعهٔ تعیین‌شده را روی تخته بنویس، معادلهٔ درجه دوم تعیین‌شده را با کامل کردن مربع حل کن). خوب جواب ندادن درس اغلب با استهزای دیگران و یا ماندن در مدرسه پس از اتمام وقت، یا مشق اضافی، و البته نمرهٔ بد برای آن روز همراه بود که منجر به کارنامهٔ بدی می‌شد که باید در پایان سال آن را به خانه می‌بردیم.

بدترین قسمت بددرس‌پس‌دادن این بود که حس می‌کردی مانند یک احمق ایستاده‌ای و همه به تو نگاه می‌کنند. دانش‌آموزان ما بهتر یا بدتر از دانش‌آموزان معمولی نبودند. آنها مثل بچه‌های نابغه‌ای که آدم کودنی را مسخره کنند نبودند و رفتار آنها در خارج مدرسه تا حد زیادی رفتار رایج غیرعقلایی دانش‌آموزان همه جای دیگر بود ــ شکلات خوردن و سینما رفتن و نشست و برخاست با دخترها بسیار با اهمیت‌تر از درس و مشق و درس‌پس‌دادن در کلاس و نمره بود ــ اما وقتی در حال عذاب کشیدن بودید وضع خرابی داشتید، چه ساکت بودید و چه به لکنت افتاده، احساس می‌کردید که همه دارند تحقیرتان می‌کنند و هرگز نخواهید توانست که سر خود را بالا بگیرید.

درس لاتین من چندان خوب نبود و در جغرافیا از آن هم بدتر بودم. معلمان این درسها برای من ترسناک‌تر از معلمهای ادبیات و ریاضیات بودند؛ نمی‌دانم کدام‌یک از آنها [درس یا معلم] علت و کدام‌یک معلول بود. با این حال، با احساسی از شعف که به همان اندازهٔ ۵۵ سال پیش تروتازه است زمانی را به خاطر می‌آورم که استثناءً یک بار کار درستی انجام دادم. من جمله‌ای را روی تخته به لاتین می‌نوشتم و در پایان یک سطر به کلمه‌ای رسیدم که باید بین دو هجا را بخش می‌کردم. قواعد هجابندی کلمات مجاری مانند قواعد مشابه در زبان لاتین نیستند و من به روش لاتین عمل کردم. عده‌ای از بچه‌های کلاس ــ که این را نمی‌دانستند یا فراموش کرده بودند ــ به این «اشتباه» من پوزخند زدند و من آن‌قدر اعتماد به نفس نداشتم که از این مسأله دغدغه‌ای به خود راه ندهم. معلم، آقای ازترگومی[2] (قسم می‌خورم که اسمش همین بود ــ من هرگز او را فراموش نخواهم کرد)، نگاهی به نوشتهٔ من انداخت و به پوزخند زننده‌ها غرغر کرد. «او کارش درسته» ــ و چراغ آن روز، بلکه قرن مرا، روشن کرد.

در خاطره‌هایم (حسرتهایم نسبت به گذشته؟) معلمان آن روزها را، چه آنهایی که ازشان می‌ترسیدم و چه آنها که دوستشان داشتم، افرادی جدی می‌بینم که حقیقتاً درس خود را بلد بودند و آن را جدی می‌گرفتند. در همان نوجوانی این فکر در من پیدا شد که یاد گرفتن مهم‌تر از صرف درس خواندن و نمرهٔ خوب گرفتن است.

درس فیزیک، درسی «تماشا کردنی» بود؛ چند آزمایش از قبل آماده، مانند نیمکره‌های ماگدبورگ، را به ما نشان می‌دادند، و به ما طرز کار تلمبه‌ها را می‌گفتند. تقریباً دوازده ساله بودم که در شب کریسمس، در ساعات عذاب‌آوری که تا باز کردن هدایا مانده بود با طرحی که خودم ابداع کرده بودم نقشهٔ مهندسی زیبایی از یک تلمبه را به دقت تمام تهیه کردم. اساس این کار را قبلاً در مدرسه آموخته بودم.

1. Matthias 2. Esztergomi

ریاضیاتی که به من درس می‌دادند، جبر مقدماتی بود (پرانتزها، معادلات درجهٔ دوم، دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی) ــ این موضوع برای من نه آسان بود و نه خیلی دشوار. ریاضی‌ام بد نبود، بالاتر از متوسط بودم و به چشم می‌آمدم. یکی از تابستانها، پدر یکی از شاگردان همسن من مرا در یک اردوی تفریحی دید و پولی به من داد (!) تا پسرش را درس بدهم. مشکل پسر این بود که سال قبل در ریاضیات مردود شده بود و لازم بود در امتحان خاصی قبول شود تا پاییز بعد در مدرسه ثبت نام کند. مبلغ پرداختی زیاد نبود (با دستمزد یک ساعت تدریس یک قاچ کلوچه خامه‌ای خریدم)، اما نخستین بار بود که پولی به‌دست آوردم (به جای برنده شدن پول). پسر در امتحان قبول شد.

آموختن زبان انگلیسی

پدرم در زمان مهاجرت به آمریکا مردی بیوه بود و من که کم‌سن‌وسال‌ترین پسرش بودم هشت سال داشتم. پس از آنکه در آنجا استقرار یافت مجدداً ازدواج کرد و من دو ناخواهری پیدا کردم. سپس برای ورود ما به آمریکا اقدام کرد: اول دو برادرم را و تقریباً بلافاصله بعد از اینکه تبعهٔ آمریکا شد، خود مرا. من به خاطر تبعیت پدرم، به محض ورود، در سیزده سالگی شهروند آمریکا شدم.

در تدارک این اقدامات، برنامه‌هایی ترتیب داده شد که ما انگلیسی یاد بگیریم. این کار خوب پیش نرفت. جان فگان[1]، پیرمردی ایرلندی، هفته‌ای یک بار برای درس‌دادن نزد به ما می‌آمد. هیچ نمی‌دانم که چرا او در بوداپست ازدواج کرد و من دو ناخواهری پیدا کردم. سپس برای ورود ما به آمریکا اقدام کرد: اول دو برادرم را و تقریباً بلافاصله بعد از اینکه تبعهٔ آمریکا شد، خود مرا. من به خاطر تبعیت پدرم، به محض ورود، در سیزده سالگی شهروند آمریکا شدم.

در تدارک این اقدامات، برنامه‌هایی ترتیب داده شد که ما انگلیسی یاد بگیریم. این کار خوب پیش نرفت. جان فگان[1]، پیرمردی ایرلندی، هفته‌ای یک بار برای درس‌دادن نزد به ما می‌آمد. هیچ نمی‌دانم که چرا او در بوداپست بود و چگونه در بدو امر با ما در تماس قرار گرفت. حدس می‌زنم که وی به نوعی در کار نقل و انتقال پول بود و با اطمینان می‌دانم که هیچ استعدادی در یاد دادن زبانها، یا راستش را بخواهید حتی در یاد گرفتن آنها نداشت. در همهٔ سالهایی که وی در مجارستان زندگی کرد تنها سه کلمهٔ مجاری یاد گرفت. یکی از آنها «نقلیه» (به معنی تراموا) و دوتای دیگر، «تخم‌مرغ نیمرو» بود.

فن عمدهٔ آموزشی فگان این بود که قطعاتی را که از مجله‌های انگلیسی بریده بود می‌داد و ما را وامی‌داشت که از روی آنها بنویسیم. آنها از نوع مقاله‌هایی بودند که امروزه در مجلهٔ ریدرز دایجست[2] چاپ می‌شود. به‌عنوان نمونه یکی از آنها دربارهٔ غرق شدن کشتی تایتانیک بود؛ من خیلی بیشتر از آنچه می‌خواستم دربارهٔ این موضوع اطلاع کسب کردم. پس از رونویسی یک قطعه، از من خواسته می‌شد که آن را با صدای بلند بخوانم. تلفظ من قدم به قدم تصحیح می‌شد، و به سؤالها پاسخ می‌دادم. این فاجعه کی رخ داد؟ (۱۵ اوریل ۱۹۱۲)، چند مسافر مُردند؟ (۱۵۰۰). به نظرم این شیوه مانند شیوهٔ مدرسه بود اما بدون وجه خوب مدرسه که اختلاط با دوستان باشد. تا می‌شد کم کار کردم و در واقع بسیار کم یاد گرفتم.

پنج دقیقه پس از ورودم به نیویورک (همراه با یکی از دوستان پدرم که مهاجرتش با من همزمان بود)، مأمور گمرک مهربانی حدس زد که من حیران و سرگردانم و پرسید که آیا می‌تواند کمکی به من بکند. من تنها به زحمت کلمهٔ «کمک» را فهمیدم و با تکیر پاسخ دادم که: «ما دنبال یک... هستیم». کلمهٔ «باربر» به یادم نمی‌آمد. تلفظ من خیلی نتراشیده بود، اما او آن را فهمید، لبخندی زد، کلمهٔ گمشده را به یادم آورد. (جمله‌ای که سعی می‌کردم به زبان آورم در یکی از درسهای فگان بود.)

کمتر از یک ماه بعد در اولین کلاس دبیرستانم در والرهای[3] واقع در حومهٔ شمال شیکاگو حضور پیدا کردم. کسی مرا به کلاسی هدایت کرد و

1. John Fegan 2. *Reader's Digest* 3. Waller High

هنوز هم به خاطر دارم که، مرد بسیار نازنینی در آن دربارهٔ فیزیک صحبت می‌کرد. من از سر تکلیف شروع به گوش دادن کردم اما حتی یک کلمه از گفته‌های او را نفهمیدم. در پایان درس همهٔ بچه‌ها بلند شدند و به کلاس دیگری رفتند. من احساس گیجی و خرفتی می‌کردم ــ هیچ‌کس چیزی از ماجرا به من نگفت ــ چه‌کار باید می‌کردم؟ ــ کجا باید می‌رفتم؟ مات و حیران همان‌جا نشستم. معلم، آقای پِیْن[1]، سر میز من آمد و چیزی پرسید. از ناچاری شانه‌هایم را بالا انداختم. زبانهای مختلفی را امتحان کردیم. چند کلمهٔ لاتین، چند کلمهٔ فرانسه، و چند علامت زبان اشاره ــ سرانجام موفق شد به من بگوید که به اتاق ۲۵۲ بروم. به اتاق ۲۵۲ رفتم، و به‌نحوی از عهدهٔ اولین روز یک دبیرستان آمریکایی برآمدم.

آموختن زبان جدید برای آدم سیزده ساله آسان است، حتی اگر از خود راضی و مغرور و خجالتی باشی؛ بله آسان است اما همیشه دلچسب نیست. واقعه‌ای را که چند ماه بعد اتفاق افتاد هنوز به خاطرم دارم و هر وقت آن را به یاد می‌آورم از شرم و خشم به خود می‌لرزم. ما در حال امتحان دادن بودیم و پسر بچهٔ بغل دستی من از پسر بچهٔ جلویی من خواست که مدادپاک‌کنی را به او قرض دهد. وقتی او کارش با آن تمام شد، من هم آن را لازم داشتم و با لبخندی پوزش‌خواهانه به صاحب آن، پاک‌کن را از قرض‌گیرنده امانت گرفتم. صاحب پاک‌کن به من خیره شد و غرولندکنان گفت: «خارجی لعنتی». من هرگز این واقعه را فراموش نخواهم کرد و هر بار که به خاطرم می‌آید، احساس بد و تلخی پیدا می‌کنم و خشم وجودم را می‌گیرد. او همواره در چشم و گوش من است و شاید دلیل یکی از پیشداوریهای غیرمنطقی من تصویر او باشد ــ او شاید عامل اصلی احساس ناخشنودی آنی است که از دیدن آدمهای گردچهره و چهارشانهٔ تیپ «فوتبالیست[2]» به من دست می‌دهد.

سه ماه بعد من انگلیسی را تند، پر اشتباه، خیلی لهجه‌دار، و محاوره‌ای صحبت می‌کردم. خواندن آسان‌تر و سریع‌تر بود. اما زمانی احساس شادی و شعف فراوان به من دست داد که روزی در تعطیلات کریسمس ۱۹۲۹ برای نخستین بار کتابی را به انگلیسی تا آخر خواندم (یک داستان شرلوک هولمز بود) و این کار نه جزو درس بلکه برای تفریح بود. مانند درس، اجباری در کار نبود و مجبور نبودم بایستم و دنبال معنی کلمات بگردم. چه لذتی!

اما لهجه سر جای خود بود. من خارجی بودم؛ صرف‌نظر از آنکه صفات تحقیرآمیزی با این کلمه همراه بشود یا نشود، احساس می‌کردم خارجی هستم و شبیه خارجیها به نظر می‌آمدم. روزی در یک کلاس درس موقتاً خالی درس می‌خواندم که زنی سرش را تو آورد و از من پرسید که اتاق معلمان کجاست. با شنیدن پاسخ من، او آنجا نرفت بلکه به جای آن داخل کلاس شد. او برای وزارت آموزش و پرورش کار می‌کرد و شغلش آن بود که خارجیهایی از قبیل مرا پیدا کند و کمکشان کند. دورهٔ زبانشناسی گذرانده بود و می‌خواست از آن استفاده کند تا لهجهٔ مرا به شکل آمریکاییها در آورد. وی موفق نشد اما کمک زیادی به من کرد و من همواره قدردان او خواهم بود.

آن موقع می‌گفتم VAHT (به جای WHAT)؛ تمایز بین V و W برای من ظریفتر از آن بود که بتوانم تشخیص دهم. لهجه‌زدای من، این اشکال را تا حد زیادی اصلاح کرد. می‌گفت بگو "HOO". می‌گفت بگو "AH". می‌گفت حرف "T" را بگو. حالا آنها را پشت سر هم بگو، خوب و آرام: HOO-AH-T.

1. Payne

۲. البته منظور فوتبال آمریکایی است که بازیکنان قوی‌هیکل می‌خواهد. ــ م.

نندتر، بازهم نندتر. حالا سریع ــ و با خاطرجمعی گفتم WHAT، درست مثل کسی که در خیابان فولرتون[1]، چهار بلوک پایین‌تر به دنیا آمده باشد.

زبان خانواده در خانه تقریباً همه وقت انگلیسی بود و دانش من از زبان مجاری در سطح ۱۳ سالگی متوقف شد. شاید من یک پسر ۱۳ سالهٔ با هوش و اهل مطالعه بودم اما به هر حال ۱۳ ساله بودم. بسیاری از اصطلاحات فلسفه و سیاست (از قبیل بینش، اخلاق، رأی‌دادن، حکومت کردن) در واژگان فعال روزانهٔ من وارد نشده بودند و کلمات رایج در زندگی عملی افراد بالغ (مانند افزایش حقوق و مقاطعه کار ساختمان) هم در این زمره بودند. گرچه هنوز هم می‌توانم مجاری را سریع و تقریباً با لهجهٔ صحیح صحبت کنم، تسلط من بر کلمه‌ها و دستور این زبان ضعیف است و موجب می‌شود که احساس سردرگمی و ناراحتی کنم.

اینکه لهجهٔ خارجی خود را در تلفظ زبان انگلیسی کاملاً از دست نداده‌ام، بلای جای من بوده است. در این مورد تلاش کرده‌ام. خیلی تلاش کرده‌ام. گاهی نامشخص بودن، به چشم نیامدن، ذوب شدن در جمع، به آدم احساس آرامش می‌دهد. دوست داشتم فقط یکی از بچه‌ها باشم و از من نپرسند که «اهل کجا هستی؟»، و «چند وقته که اینجایی؟» دیگر هرگز دوست ندارم که بشنوم، «اوه، چه لهجهٔ جالبی داری». شاید من نسبت به این مسأله بیش از حد حساسم، اما «و اهل کجا هستی؟» را همیشه به‌صورت «تو غریبه هستی و خیلی دوست نداریم که این طرفها باشی» می‌شنوم. تقریباً تمام عمرم را در ایالات متحدهٔ آمریکا گذرانده‌ام، و از هر لحاظ ــ رفتار، زبان، سلیقه، و فرهنگ ــ احساس یک امریکایی را دارم. نمی‌خواهم مرا مجارستانی به حساب آورند. من غریبه نیستم، خودی هستم.

دبیرستان

دورهٔ هشت سالهٔ گیمنازیوم [در مجارستان] بعد از یک دورهٔ چهارسالهٔ ابتدایی بود ــ درست برعکس روش آمریکایی که در آن چهار سال دبیرستان پس از هشت کلاس ابتدایی داریم. این اختلاف، راه را برای کمی حیله‌گری هموار کرد و به معنایی چهار سال از زندگی مرا نجات داد. نامادری من همواره باور داشت که هر چیز زندگی او جواب یک مسألهٔ کرانگینی است: مردم فقیری که او می‌شناخت، فقیرتر از همه بودند و ثروتمندانی که می‌شناخت ثروتمندتر از بقیه؛ دانشگاه او بهترین مدرک در رشتهٔ حقوق را اعطا می‌کرد؛ قصاب او بهترین گوشت را داشت، بچه‌های او (که مرا هم شامل می‌شد) باهوش‌ترین بچه‌های شیکاگو بودند. به کمک آشنای مهربانی در کنسولگری مجارستان ترجمهٔ سوابق گیمنازیوم مرا تهیه کرد (درس به درس، نمره به نمره)، و ترجمهٔ رسمی تصدیق می‌کرد که من سه سال از مدرسهٔ متوسطه را گذرانده‌ام. نتیجه: در سیزده سالگی به دبیرستان پذیرفته شدم و جایگاهی بین دانش‌آموزان سال آخر و ماقبل آخر پیدا کردم. او شرط می‌بست که من به قدر کافی با هوش هستم که چهار کلاس جهش کنم.

این حیله، آموزش مرا به طرز غریبی بی‌نظم کرد (من هیچ نوع درس در زیست‌شناسی نگذراندم، اما حل معادلات درجهٔ دوم را بارها و بارها یاد گرفتم)؛ به غیر از این، این کار لطمه‌ای به من نزد. این حیله مرا در کلاسی جا داد که همه از من بزرگ‌تر بودند، اما برای من اهمیتی نداشت. من بلندقد و جسور بودم و به محض اینکه مشکل زبانم حل شد، هیچ‌یک از مشکلاتی

1. Fullerton

را که اختلاف سن ممکن بود ایجاد کند حس نکردم. طی ده یا پانزده سال بعد معمولاً کم سن‌وسال‌ترین فرد در میهمانیها بودم؛ از مایه‌های دلتنگی من در ده یا پانزده سال اخیر عادت کردن به این موضوع بوده است که پیرترین فرد در میهمانیها باشم.

البته مسألهٔ زبان در ابتدای کار عمده‌ترین مسأله بود و بدبختانه تقریباً در همان زمان باید درسی، یعنی تعلیمات مدنی، را می‌گذراندم که در آن، زبان بیشترین اهمیت را داشت. چیزی که کارها را بدتر می‌کرد این بود که معلم آن، آقای تراک مورتون[1] لهجه‌ای (ویلزی؟) داشت که درک آن برای من دشوار بود ولی خیلی زود به تفاهم دوستانه‌ای رسیدیم. قرار شد درس تعلیمات مدنی را ترم دیگر بگذرانم و در ترم جاری از کلاس به‌عنوان زنگ مطالعه استفاده کنم و هیچ کدام از ما نمی‌بایست کاری به کار هم داشته باشیم. (رسم «حذف و اضافه» در والترهای برقرار نبود.)

تاریخ را ترم بعد با دوشیزه تالبوت[2] گرفتم و هیچ مشکلی با آن نداشتم ــ در واقع از آن خیلی خوشم آمد. این درس دربارهٔ تاریخ آمریکا بود و قانون اساسی بخشی از آن بود. ولی این درس برای من کافی نبود. ترتیب نوشتن عریضه‌ای را دادم که درسی اضافی دربارهٔ قانون اساسی در نیمسال بعد ارائه شود اما به جایی نرسید.

درسهای ریاضی که پیشتر گذرانده بودم، جبر و هندسه نام داشتند. جبر با «جبر دبیرستان» شروع می‌شد، که من آن را دوست داشتم (و قسمت اعظم آن را می‌دانستم). با «جبر پیشرفته» کار را ادامه دادم و چون در آن درس هم موفق بودم (همچنان در دبیرستان) با «جبر کالج» کار را دنبال کردم. با این حال در کالج باید با «جبر سال اول» شروع می‌کردم تا برای درس «جبر عالی‌تر» (ماتریسها) آماده شوم که پس از آن «جبر نوین» (گروههای جایگشتی و چندجمله‌ایها) می‌آمد. این رشته دروس در دورهٔ تحصیلات تکمیلی با درسی به‌نام «آشنایی با جبر» (حلقه‌ها و میدانها، به روایت وان‌دروردن) خاتمه می‌یافت. در مراحل اولیهٔ این فرایند، من در دبیرستان، مطالبی دربارهٔ اعداد مختلط در دو درس مختلف یاد گرفتم. هیچ چیز رمزآمیزی در آنها نبود و برای من مایهٔ تعجب و آزردگی است که این روزها دانش‌آموزان دبیرستانی اعداد مختلط را فرا نمی‌گیرند، شاید به این دلیل که معلمان دبیرستان این چیزها را نمی‌دانند. دانشجویانی که اخیراً در یک درس تحصیلات تکمیلی با آنها برخورد کردم، هرگز قضیه دموآور را نشنیده بودند، حتی قدرمطلق و مزدوج مختلط آنها را دستپاچه می‌کرد.

هندسهٔ اقلیدسی منبع اصلی لذت من بود و ما را به مبارزه می‌طلبید که برهانهای احکام «بدیهی» را کشف کنیم و آنها را بنویسیم: قدم اول، دلیل، قدم دوم، دلیل، و غیره. من این کار را دوست داشتم و فکر می‌کنم در این شیوه از معلم بهتر بودم.

بهترین ریاضیاتی که یاد گرفتم، در کلاس فیزیک بود. آقای پین، به‌عنوان مثال، دربارهٔ آن خرگوشهای مشهوری سخن می‌گفت که با نظم زمانی یکنواخت تولیدمثل می‌کردند. (حتماً همه این را می‌دانند اما محض اطمینان، موضوع از این قرار است: هر جفت خرگوش، یکی نر و یکی ماده، دو ماه پس از تولد به تولید مثل می‌پردازند، و سپس آنها هر ماه به تولید مثل جفتی مانند خود به‌طور منظم ادامه می‌دهند. هیچ خرگوشی در این داستان نمی‌میرد. سؤال: چند جفت خرگوش زنده در پایان سال موجودند؟) ماجرا به آنچه بعداً یاد گرفتم آن را دنبالهٔ فیبوناتچی بنامم، منجر می‌شود. من مسأله را حل نکردم اما تأثیری عمیق در من گذاشت.

آیا بیشتر ریاضیات دبیرستانی من اتلاف وقت بود؟ آیا اگر کسی برنامهٔ درسی‌ای طراحی می‌کرد که هوشمندانه سازمان یافته بود و هیچ حرکت غیرلازمی در آن نبود، وضعیت بهتری پیدا می‌کردم؟ آیا باید در چهارده‌سالگی در معرض محاسبات، قضیه‌ها، و برهانهای نابدیهی قرار می‌گرفتم؟ شاید. مطمئن نیستم ــ اما ارزش فکر کردن را دارد.

کجا باید به کالج می‌رفتم؟ پدرم گفت که از لحاظ مالی امکان فرستادن مرا به یکی از دو دانشگاه شیکاگو یا ایلینوی دارد (بعداً فهمیدم که درآمدش در آن زمان حدود ۶۰۰ دلار در سال بوده) می‌توانستم به دانشگاه شیکاگو در همان شهر خودم بروم یا به دانشگاه ایلینوی، دانشگاه ایالتی اوربانا[1]. حتی دقیقه‌ای هم طول نکشید که تصمیم بگیرم: اوربانا ۱۳۰ مایل از خانهٔ والدینم دورتر بود، اوربانا معنی آزادی می‌داد. آنجا را انتخاب کردم. از آن روز به بعد همواره خود را سرزنش می‌کنم. من از اوربانا، و از آزادی، لذت بردم و ایلینوییایی وفاداری شدم. دانشگاه ایلینوی جای بدی نیست، اما دانشگاه شیکاگو شهرت یک دانشگاه بزرگ را داشت (و الحق هنوز هم دارد). در شیکاگو تحصیلات من می‌توانست کیفیت خیلی بهتری داشته باشد، و قدمهای بعدی به سوی ساختن یک آیندهٔ شغلی (ارتباطها، مشاغل) بسیار آسان‌تر می‌شد. آه، بسیار خوب ــ دفعهٔ بعد بهتر می‌دانم چه کنم.

در بچگی و نوجوانی می‌خواستید چکاره شوید؟ آیا می‌خواستید همان شوید که حالا هستید؟ در مورد من این‌طور نیست. در چهارسالگی می‌خواستم نجار شوم، در چهارده‌سالگی داروساز، در شانزده‌سالگی مهندس شیمی، و در هجده‌سالگی فیلسوف. و در آن بین، و به‌صورت مداوم پس از آن، حقوق قضایی برای من بسیار جالب بوده است. کتابهای کلفت دعاوی حقوقی را خریداری کرده‌ام (اما تنها چند صفحه از آنها را خوانده‌ام)، و به‌صورت مستمع‌آزاد در بعضی درسهای اسناد و شواهد (در دانشگاه میامی)، حقوق جنحه و جنایی (در ایندیانا)، و حقوق رومی (در ادینبورو) شرکت کرده‌ام.

وقتی در ارتباط با مقرارت پذیرش در دانشگاه ایلینوی از من پرسیدند که رشتهٔ پیشنهادی من برای ادامهٔ تحصیل چیست، گفتم مهندسی شیمی. وقتی درس شیمی دبیرستان را انتخاب کردم، مجذوب آن شدم. برخلاف فیزیک و ریاضیات، این درس برای من کاملاً تازگی داشت و من لذت زیادی از آن بردم. معادله‌ها به روال دلچسبی توازن داشتند؛ واقعاً از داستن اینکه

$$۴Zn + ۵H_۲SO_۴ \longrightarrow H_۲S + ۴ZnSO_۴ + ۴H_۲O$$

لذت می‌بردم. جزء مهندسی انتخاب من از آنجا ناشی می‌شد که من ریاضیات را دوست داشتم و نمی‌دانستم که کسی به غیر از مهندسان هم سروکاری با آن دارند. (تصحیح: من آنچه را که آن موقع فکر می‌کردم ریاضیات است، دوست داشتم). پدرم پزشک بود و دو برادرم دانشجوی پزشکی بودند ــ پزشکی با داروسازی سروکار داشت و آن هم با شیمی. ترکیب P.R.H (حروف اول اسمم) و R.Ph (داروساز رسمی) خوراک چند جوک بی‌مزه بود. همهٔ این دلایل تقریباً به اندازهٔ همان دلایلی[*] عمق دارند که موجب شوند یک بچهٔ شش‌ساله بخواهد آتش‌نشان شود. اینها در اعلام اینکه موضوع اصلی رشتهٔ تحصیلی‌ام باید مهندسی شیمی باشد، دخیل بودند، و در سپتامبر ۱۹۳۱، در دانشگاه ایلینوی به این منظور ثبت‌نام کردم.

1. Urbana

1. Trock Morton 2. Talbot

در شماره‌های آینده می‌خوانید

■ دوست دارم ریاضیدان باشم	پال هالموس
■ رمزنگاری	نیل کوبلیتس
■ قضیهٔ هان-باناخ	لاورنس ناریچی، ادوارد بکن‌اشتاین
■ نظریهٔ گالوا برای مبتدیان	جان استیلول
■ سهم کولموگوروف در مبانی احتمال	ولادیمیر ووک، گلن شِیفر
■ پرکولاسیون چیست؟	هری کِستن