نشریه

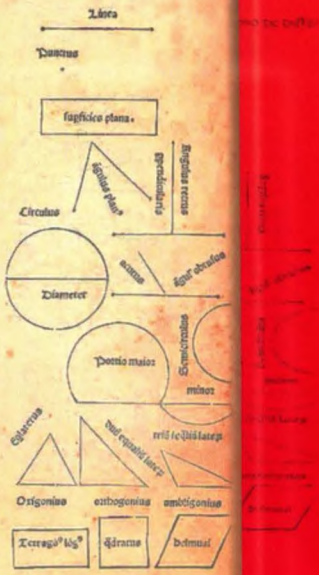
سال ۱۸، شمارهٔ ۱

شمارهٔ پیاپی: ۳۳



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quasfoelicissime:

De principijs p se notis: e primo de diffinitionibus earundem.



PUnctus est cuius ps nō est. ¶ Linea est lōgitudo sine latitudine cui⁹ quidē extremitates sūt duo pūcta. ¶ Linea recta ē ab vno pūcto ad aliū breuissima extēsio i extremitates suas vtrūq; eox recipiens. ¶ Superficies ē q̄ lōgitudinē ⁊ latitudinē tm̄ hz: cui⁹ termi quidē sūt linee. ¶ Superficies plana ē ab vna linea ad aliā extēlio i extremitates suas recipiēs ¶ Angulus planus ē duarū linearū alternus ⁊actus: quar expālio ē sup superficiē applicatioq; nō directa. ¶ Quādo aūt angulum ⁊tinēt due linee recte rectilin⁹ angulus noiaf. ¶ Sī recta linea sup rectā steterit duoq; anguli vtrobiq; fuerit eqles: eox vterq; rect⁹ erit ¶ Linea q; linee sup̄stās ei cui sup̄stat ꝑpendicularis vocaf. ¶ Angulus vō qui recto maior ē obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vo minor recto acut⁹ appellaf. ¶ Termin⁹ ē qd vnūlcuiusq; finis ē. ¶ Figura ē q̄ tmino vl termis ⁊tinet. ¶ Circul⁹ ē figura plana vna q̄dam linea ⁊tēta: q̄ circūferentia noiaf: in cui⁹ medio pūct⁹ ē: a quo oēs linee recte ad circūferētiā exeūtes sibiinuicez sūt equales. Et hic quidē pūct⁹ cētrū circuli dr. ¶ Diameter circuli ē linea recta que sup ei⁹ centr⁹ trāsiens extremitatesq; suas circūferēie applicans circulū i duo media diuidit. ¶ Semicirculus ē figura plana dia/metro circuli ⁊ medietate circūferentie ⁊tenta. ¶ Portio circuli ē figura plana recta linea ⁊ parte circūferēie ⁊tera: semicirculo quidē aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sūt q̄ rectis lineis cōtinent quarū quedā trilatere q̄ trib⁹ rectis lineis: quedā quadrilatere q̄ q̄tor rectis lineis. q̄dā mltilatere que pluribus q̄z quatuor rectis lineis continent. ¶ Figurarū trilaterarū: alia est triangulus hīs tria latera equalia. Alia triangulus duo hīs eqlia latera. Alia triangulus tnū inequalium laterū. ¶ Rar iterū alia est orthogoniū: vnū. l. rectum angulum habens. Alia ē ambligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigonium: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarū ante quadrilaterar Alia est q̄dratum quod est equilaterū atq; rectangulū. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̄ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est belmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

مرکز نشر دانشگاهی
www.iup.ir

بسم‌الله الرحمن الرحیم





مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

تهران، صندوق پستی ۴۷۴۸ـ۱۵۸۷۵

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

بهای این شماره ۱۵۰۰۰ ریال

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۴۰۵۰ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران (کد ۱۸۳) به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

برای اشتراک با تلفن ۸۸۷۱۶۸۳۲ تماس بگیرید

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه‌شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۸، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: فروردین ۱۳۸۹

شمارهٔ پیاپی: ۳۳

nashreriyazi@iup.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: محمدقاسم وحیدی‌اصل

- هیأت ویراستاران:

علیرضا جمالی
حسن حقیقی
سیامک کاظمی
محمدقاسم وحیدی‌اصل

- همکاران: فریبرز آذرپناه، محمد اردشیر، شاپور اعتماد، اسماعیل بابلیان، غلامرضا برادران خسروشاهی، ناصر بروجردیان، محمد جلوداری‌ممقانی، روح‌الله جهانی‌پور، رحیم زارع‌نهندی، رشید زارع‌نهندی، سیاوش شهشهانی، سید محمدباقر کاشانی، زهرا گویا، محمد صال مصلحیان، همایون معین

- مدیر داخلی: زهرا دلاوری
- طراح جلد: سمیه عابدینی
- حروفچین و صفحه‌آرا: شهلا تقوی
- ناظر چاپ: خشایار نصیری‌منش
- چاپ: وسمه (۸۸۸۱۱۸۷۰)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

گزارش ۲

مقاله‌ها

مفهوم گونا در توپولوژی و آنالیز مختلط	فریدریش هیرتسه‌بروخ، ماتیاس کرک	۸
رهیافتی مقدماتی به گروه هیولا	کریستوفر سیمونز	۱۵
امی‌نوتر و پیدایش جبر مجرد	ایزراییل کلاینر	۲۰
آمار بسامدگرا به مثابهٔ نظریهٔ استنباط استقرایی	دیبورا جی. مایو، دی. آر. کاکس	۲۷
آشنایی مقدماتی با نظریهٔ K	مکس کروبی	۴۰

آموزش و مسأله

نگاهی به مسابقات ریاضی دانشجویی کشور	بامداد ر. یاحقی	۵۰

نقد و بررسی

اصول اقلیدس		۵۹
سیر اصول در زبانها و تمدنها	جان مُرداک	۶۱
حل مسائل ریاضی: دیدگاهی شخصی	لورن لارسن	۷۴

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم (فصل چهارم)	پال هالموس	۷۷



روی جلد

برگرفته از اولین چاپ اصول اقلیدس (۱۴۸۲) به‌مناسبت درج مقالهٔ «اصول اقلیدس»

تصحیح: طراح روی جلد دو شمارهٔ پیشین مجله خانم سمیه عابدینی بوده است که اشتباهاً نام دیگری به جای نام ایشان ذکر شده است.

گزارش



پرویز شهریاری

اهدای جایزهٔ ابوالقاسم قربانی به پرویز شهریاری

هیأت امنای «جایزهٔ ابوالقاسم قربانی» امسال آقای پرویز شهریاری را به‌خاطر فعالیتهای ارزشمند ایشان در زمینهٔ تاریخ ریاضیات شایستهٔ دریافت این جایزه دانست. جایزه در آذرماه ۱۳۸۸ در «همایش تاریخ فرهنگ و تمدن اسلام و ایران با موضوع ریاضی و نجوم» به برنده اهدا شد. این جایزه را انجمن ریاضی ایران با حمایت خانوادهٔ شادروان ابوالقاسم قربانی برای جلب توجه به اهمیت تاریخ ریاضیات، تجلیل از مقام علمی استاد قربانی، و تقدیر از صاحبان مقالات برتر در زمینهٔ تاریخ ریاضیات برقرار کرده و به این منظور، هیأت امنایی متشکل از صاحبنظران تاریخ ریاضی درنظر گرفته که توسط شورای اجرایی انجمن انتخاب می‌شوند.

پرویز شهریاری (متولد ۱۳۰۵ درکرمان) طی دهها سال خدمت در مقام معلم، مترجم، مؤلف، و سردبیر مجله‌های علمی، کمک شایانی به ترویج ریاضیات درکشورکرده است و چند نسل از محصلان ایرانی از آموزش و آثار او بهره برده‌اند. در میان آثار قلمی او که افزون بر ۲۰۰ کتاب است، کتابهای (ترجمه‌ای یا تألیفی) ارزشمندی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات نیز دیده می‌شود که از آن جمله‌اند: ریاضیات در شرق (ترجمه، ۱۳۵۲)، غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی (تألیف، ۱۳۷۸)، نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران (تألیف، ۱۳۸۵)، و کوشیار گیلانی (ترجمه، ۱۳۸۸).



شینگ‌ـتونگ یائو

جایزهٔ ۲۰۱۰ ولف

کمیتهٔ جایزهٔ ریاضیات بنیاد ولف[1]، به‌اتفاق آرا تصمیم گرفت جایزهٔ ولف سال ۲۰۱۰ را به‌طور مشترک به شینگ‌ـتونگ یائو[2] از دانشگاه هاروارد به‌خاطر دستاوردهایش در آنالیز هندسی، که تأثیری چشمگیر و عمیق بر بسیاری از شاخه‌های هندسه و فیزیک داشته است، و به دنیس سالیوان[3] از دانشگاه استونی بروک به‌خاطر مشارکت خلاقانه‌اش در پیشبرد توپولوژی جبری و دینامیک همدیس اهدا کند.

شینگ‌ـتونگ یائو (متولد ۱۹۴۹ در چین)، معادلات دیفرانسیل جزئی، هندسه، و فیزیک ریاضی را به‌طور اساسی به یکدیگر پیوند زده و حوزهٔ آنالیز هندسی را به‌طور قطعی شکل داده است. وی ابزارهای تحلیلی جدیدی برای حل چندین معادلهٔ دیفرانسیل جزئی غیرخطی دشوار، به‌خصوص از نوع مونژ‌ـآمپر، به‌وجود آورده است که در پیشرفت هندسهٔ ریمانی، کیلر[4] ی، و جبری، و همچنین توپولوژی جبری اهمیت اساسی داشته و این مباحث را دگرگون ساخته‌اند. خمینه‌های موسوم به کالابی‌ـیائو، که ردهٔ خاصی از خمینه‌های کیلری هستند، به‌صورت ستون اصلی نظریهٔ ریسمان درآمده‌اند، نظریه‌ای با هدف فهم این موضوع که کنش نیروهای فیزیکی در فضایی با ابعاد بالاتر چگونه ممکن است به جهان چهاربعدی فضازمان ما منجر شود. کارِ یائو در زمینهٔ T‌ـدوگانی جزء مهمی از مفهوم تقارن آینه‌ای شده است، که خود مسأله‌ای در فصل مشترک نظریهٔ ریسمان و هندسهٔ همتافته و هندسهٔ جبری است. یائو در حالی که درگیر حل و فصل حدسیه‌های جرم مثبت و انرژی در نسبیت عمومی بود ابزارهای تحلیلی نیرومندی پدید آورد که کاربردهای گسترده‌ای در بررسی هندسهٔ سراسری فضازمان داشته‌اند. براوردهای یائو از ویژه‌مقدار و هستهٔ گرما[5] روی خمینه‌های ریمانی، در زمرهٔ عمیق‌ترین دستاوردهای آنالیز خمینه‌ها به‌حساب می‌آید. وی رویه‌های مینیمال را بررسی کرد، چندین مسألهٔ کلاسیک را حل کرد و سپس با استفاده از نتایج حاصل، رهیافت جدیدی به توپولوژی هندسی ابداع نمود.

یائو طی چندین دهه به‌طرز خارق‌العاده‌ای پرکار و پربازده بوده است و حاصل این فعالیتها، نتایجی است که بر بسیاری از حوزه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی و فیزیک نظری پرتو افکنده‌اند. وی علاوه بر دستاوردهای ریاضی اساسی و متنوعش، که الهام‌بخش نسلهای متعددی از ریاضیدانان بوده است، از طریق تربیت عدهٔ زیادی دانشجوی دکتری و همچنین تأسیس چندین مرکز تحقیقاتی فعال، تأثیر چشمگیری در تحقیقات ریاضی در سطح جهانی داشته است.

1. Wolf
2. Shing-Tung Yau
3. Dennis Sullivan
4. Kahler
5. heat kernel



دنیس سالیوان

دنیس سالیوان (متولد ۱۹۴۱ در آمریکا)، سهم اساسی در پیشبرد بسیاری از حوزه‌ها، به‌خصوص توپولوژی جبری و دستگاههای دینامیکی داشته است. تحقیقات اولیهٔ او و به پی‌ریزی رهیافت نظریهٔ جراحی[1] برای رده‌بندی خمینه‌های از بعد بالا کمک کرد، به‌خصوص، رده‌بندی کاملی از خمینه‌هایِ سادهٔ‌همبند در یک نوعِ هوموتوپی مفروض ارائه کرد. وی مفاهیم موضعی‌سازی و کامل‌سازی در نظریهٔ هوموتوپی را عرضه کرد و با استفاده از این نظریه، حدسیهٔ ادمز[2] را ثابت نمود (کوئیلن[3] هم این حدسیه را به‌طور مستقل ثابت کرد). سالیوان و کوئیلن، نوع هوموتوپی گویایِ فضا را معرفی کردند.

سالیوان نشان داد نوع هوموتوپی گویای فضا را می‌توان با استفاده از مدل مینیمال یک جبر دیفرانسیل مدرّج وابسته محاسبه نمود. ایده‌های سالیوان تأثیرات وکاربردهایی گسترده در توپولوژی جبری داشته است. یکی از مهم‌ترین کارهای سالیوان پدیدآوردن تکنیکهای ریاضی جدیدِ مورد نیاز برای اثبات دقیق پیش‌بینی‌های باز بهنجارش فایگن‌باوم[4]، به‌عنوان تبیینی از پدیدهٔ حضور همه‌جاییِ اعداد و رفتارهای خاص در دستگاههای دینامیکی بوده است. سالیوان با قضیهٔ قلمروهای ناسرگردان خود، حدسیه‌ای ۶۰ ساله را که فاتو[5] و جولیا[6] مطرح کرده بودند، یعنی رده‌بندی دینامیک نگاشتهای گویای مکرر کرهٔ ریمان را حل و فصل کرد. وی با معرفی روشهای شبه‌همدیس در این حوزه و برقراری یک تناظر مفهومیِ الهام‌بخش بین نگاشتهای گویا و گروههای کلاینی موجی از تحقیقات را پدید آورد. قضیهٔ صلبیت[7] او برای گروههای کلاینی کاربردهای مهمی در نظریهٔ تایک‌مولر[8] و برنامهٔ هندسی‌سازی ترستن برای خمینه‌های ۳بعدی داشته است. کارهای اخیر او در نظریهٔ میدان توپولوژیک و ریاضیاتِ نظریهٔ ریسمان محصول فرعی جستجو و کاوشهای اوست برای فهم غایی طبیعت فضا و اینکه چگونه می‌توان آن را برحسب ساختارهای جبری بیان کرد. کارهای سالیوان همواره خلاقانه و الهام‌بخش بوده است. تحقیقات او علاوه‌بر حل مسائل مشهور و مشکل، حوزه‌های تحقیقی مهم و فعالی به‌وجود آورده است که ریاضیدانانِ زیادی آنها را دنبال می‌کنند.

ح. ح.

منبع: وبگاه جایزهٔ ولف

1. surgery theory 2. Adams conjecture 3. Quillen
4. Feigenbaum renormalization 5. Fatou 6. Julia
7. rigidity theorem 8. Teichmuller theory

اثبات «لم اساسی»

یک رویداد مهم تازه در ریاضیات، اثبات لم اساسی در برنامهٔ لنگ‌لندز است. در سال ۱۹۶۸، رابرت لنگ‌لندز[1] ریاضیدان کانادایی-آمریکایی نظریه‌ای انقلابی و بلندپروازانه ــ در قالب حدسیه‌هایی شگفت‌انگیز و سرشار از بصیرت ــ مطرح کرد که تحقق آن، دو مبحث نظریهٔ اعداد و نظریهٔ گروهها را به هم پیوند می‌زند. این برنامه معطوف به تقارنهای عمیقی است که وابسته به معادلات حاکم بر اعداد صحیح‌اند. در رویکرد اصلی به برنامهٔ لنگ‌لندز از تعمیمهایی از فرمول اثر سلبرگ[2] استفاده می‌شود، ولی تاکنون مانعی در برابر پیشروی در این مسیر وجود داشت و آن، فقدان برهانی برای قضیهٔ معروف به «لم اساسی» بود. این لم مجموعه‌ای از اتحادهای ترکیبیاتی برای بیان مسائلی در نظریهٔ اعداد برحسب گروههایی خاص است. بسیاری از تحقیقات سی سال اخیر در این زمینه براساس این فرض بوده است که لم اساسی درست است و روزی ثابت خواهد شد. در سال ۲۰۰۴، ژرار لومون[3] از دانشگاه پاریس جنوب و نگو بائو چائو[4] ریاضیدان ویتنامیِ شاغل در آن دانشگاه و مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن، لم اساسی را برای گروههای یکانی ثابت کردند و بعداً چائو اثبات لم را در حالت کلی، یعنی گروههای تحویلی، به‌دست داد. پس از تأیید درستی این اثبات در سال ۲۰۰۹، مجلهٔ آمریکایی تایم آن را یکی از ده دستاورد علمی مهم سال ۲۰۰۹ اعلام کرد.

ح. ح.

ایزرائیل مئیسِییویچ گلفاند (۱۹۱۳ـ۲۰۰۹)

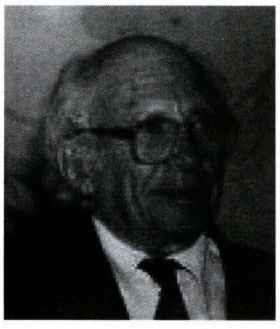
ایزرائیل مئیسییویچ گلفاند[5]، یکی از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن بیستم، در ۵ اکتبر سال ۲۰۰۹ در ۹۶ سالگی درگذشت. گلفاند در ۲ سپتامبر ۱۹۱۳ در اوکراین به‌دنیا آمد. وی در دانشگاه مسکو مدرک نامزدی دکتری ریاضی (معادل Ph.D در غرب) را تحت راهنمایی آندره‌یی کولموگوروف در ۱۹۳۵ دریافت کرد و پنج سال بعد به دریافت مدرک دکتری (D.Sc) نائل شد و سپس نزدیک به ۵۰ سال به‌عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه مسکو خدمت کرد. در سالهای ۱۹۸۹ و ۱۹۹۰ مدتی استاد مدعو دانشگاههای هاروارد و ام‌آی‌تی بود و از سال ۱۹۹۰ استاد دانشگاه راتگرز شد.

گلفاند نویسندهٔ بیش از ۸۰۰ مقاله و ۳۰ کتاب در ریاضیات، ریاضیات کاربردی و زیست‌شناسی نظری است. پژوهشهای او عمدتاً در حوزه‌های آنالیز تابعی و نظریهٔ نمایشها بوده اما دستاوردهای مهمی نیز در بسیاری از حوزه‌های دیگر ریاضیات داشته است.

شرح تأثیرات گسترده و ماندگار پژوهشهای ریاضی گلفاند در این نوشتهٔ کوتاه امکان‌پذیر نیست. او از طریق پژوهشهایش و همچنین از طریق تعامل با سایر ریاضیدانان، به‌خصوص دانشجویانش، تأثیرات عمیقی بر بسیاری از شاخه‌های ریاضیات گذاشته است.

اولین دستاورد مهم گلفاند، نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی نرم‌دار بوده است که وی آن را در رسالهٔ خود در اواخر دههٔ ۱۹۳۰ عرضه کرد. استفادهٔ او از ایده‌آل‌های ماکسیمال نه تنها در آنالیز همساز حائز اهمیت فراوان است،

1. Robert Langlands 2. Selberg trace formula
3. Gerard Laumon 4. Ngo Bao Chao
5. Israil Moiseevich Gelfand



ایزرائیل مئیسیویچ گلفاند

بلکه در پیشرفتهای بعدی هندسهٔ جبری نقش اساسی داشته است. پس از آن، با همکاریِ نایمارک[1] ثابت کرد حلقه‌های نرم‌دار ناجابه‌جایی با برگشت[2] را می‌توان به‌صورت عملگرهایی در فضای هیلبرت نمایش داد، که این خود یک قضیهٔ اساسی در نظریهٔ نوین C^*ـجبرهاست. وی طی دههٔ ۱۹۴۰ به تحقیق در نظریهٔ نمایشها و نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته پرداخت. به‌علاوه، در این دوره مقالاتی اساسی درباره هندسهٔ انتگرالی، شارشهای ژئودزیک بر رویه‌هایِ با خمیدگی منفی و فرایندهای تصادفی تعمیم‌یافته منتشر کرد.

از نیمهٔ دههٔ ۱۹۴۰، گلفاند پژوهشهای گسترده‌ای را دربارهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی آغاز کرد و در مقالهٔ مشهوری که در سال ۱۹۶۰ انتشار یافت مسألهٔ رده‌بندی توپولوژیک عملگرهای بیضوی را مطرح نمود. این امر منجر به صورت‌بندی و اثبات قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر شد که تبعاتی عمیق و کاربردهای فراوانی داشته است. به‌علاوه باید از تحقیقات مشترک او با لویتان[3] و دیکی[4] دربارهٔ مسائل طیفی وارون و نظریهٔ پراکنش[5] یاد کرد.

گلفاند در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ با همکاری فوکس[6] به تحقیق در کوهومولوژی [همانستگی] جبرهای بینهایت بعدی، به‌خصوص آنهایی که به یک خمینه وابسته‌اند، پرداخت. حتی برای جبر میدانهای برداری روی یک دایره، کوهومولوژی نابدیهی و جالبی وجود دارد. این تحقیقات به مطالعهٔ رده‌های مشخصهٔ برگ‌بندی‌ها انجامید.

شرح بسیاری از نتایج اساسی گلفاند، مانند تحلیل نمایشهای برنشتاین-گلفاند-گلفاند، دستاوردهای وی در هندسهٔ انتگرالی و تبدیل رادون، رده‌های مشخصهٔ ترکیبیاتی، و همچنین تحقیقات اخیر وی در موضوعاتی همچون دترمینانها، چندجمله‌ای‌های ناجابه‌جایی و غیره، در این نوشتهٔ کوتاه نمی‌گنجد. گلفاند به‌موازات پژوهشهای فوق، در حوزهٔ وسیعی از مسائل کاربردی، از مسائل محاسباتی تا زیست‌شناسی، فعال بوده است.

تأثیرگذاری گلفاند بر ریاضیات نه‌تنها از طریق مقالات تحقیقیِ بسیارش، بلکه همچنین از طریق کتابها، سخنرانیها، و سمینارهایش بوده است. مجموعهٔ پنج‌جلدی کتابهای وی (با همکاری مؤلفان دیگر) دربارهٔ توابع تعمیم‌یافته که در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ منتشر شد به مدت ۵۰ سال یک اثر کلاسیک در این حوزه به‌شمار می‌آمده است. کتاب تازه‌ای نیز که با همکاری کاپرانوف[7] و زِلوینسکی[8] با عنوان مبین‌ها، منتجه‌ها، و دترمینانهای چندبعدی نوشته است، کتاب بسیار مهمی است. در این بین، تک‌نگاری‌های بسیاری نیز در موضوعات دیگر از وی منتشر شده است. سمینارهای گلفاند، که در دانشگاه مسکو پایه‌ریزی شد و اکنون در دانشگاه راتگرز آمریکا ادامه دارد، همواره برای شرکت‌کنندگان و سخنرانانش بسیار آموزنده بوده است. دامنهٔ فعالیتهای آموزشی وی ریاضی‌خوانان جوان را نیز دربر می‌گرفت. از جملهٔ آنها، می‌توان تأسیس مدرسهٔ مکاتبه‌ای در روسیه و آمریکا و تألیف کتابهای بسیاری در ریاضیات مقدماتی را ذکر کرد.

گلفاند جوایز و نشانهای افتخار بسیاری دریافت کرد، از جمله جایزهٔ دولتی اتحاد جماهیر شوروی (۱۹۵۳)، جایزهٔ لنین (۱۹۵۶)، جایزهٔ بنیاد ولف (۱۹۷۸)، جایزهٔ کیوتو (۱۹۸۹)، و جایزهٔ استیل (۲۰۰۵). او به عضویت آکادمی آمریکایی علوم و هنرها (۱۹۶۴)، آکادمی علوم فرانسه (۱۹۷۶)، آکادمی علوم ایتالیا (۱۹۸۸)، آکادمی علوم ژاپن (۱۹۸۹)، انجمن سلطنتی بریتانیا (۱۹۷۷)، و آکادمی علوم اروپا (۲۰۰۴) انتخاب شده بود. از سال ۱۹۵۳ نیز عضو وابستهٔ آکادمی علوم شوروی بود و در ۱۹۸۴ به عضویت کامل آن در آمد.

ح. ح.

منبع: وبگاه انجمن ریاضی آمریکا (AMS) و مجلهٔ نوتیسز این انجمن، شمارهٔ آوریل ۲۰۰۵

اریک لئو لِیمن (۱۹۱۷ـ۲۰۰۹)

اریک لیمن[1]، از چهره‌های برجستهٔ آمار، در ۱۲ سپتامبر ۲۰۰۹ در ۹۱ سالگی درگذشت. لیمن، که در گروه آمار دانشگاه برکلی تدریس می‌کرد، بر زندگی افراد زیادی در آمار و فراتر از آن اثر گذاشت. او چهره‌ای پیشتاز در میان نسل دوم آماردانان، پس از تأسیس این حوزهٔ جدید به دست نیمن، فیشر، و والد، پیش و کمی بعد از جنگ جهانی دوم، بود. طبق معمول، پس از دوره‌ای سرشار از نوآوری‌ها، سردرگمی حکمفرما شد؛ و لیمن بود که با استعداد فوق‌العاده‌اش غبارها را روبید و ساختار نظری منسجمی بنا کرد. این تلاش و استعداد در آثار بزرگ او، آزمون فرضهای آماری (۱۹۵۹)، و نظریهٔ براورد آماری (۱۹۸۳) انعکاس یافته است، که ارکان اصلی آموزش آمار تحصیلات تکمیلی در بخش عمدهٔ نیمه دوم سدهٔ بیستم محسوب می‌شدند و به بسیاری از زبانها ترجمه شده‌اند. ساختارهایی که او بنیان گذاشت، بخش عمدهٔ تحقیقات خود او را در قالب مسائل نظریهٔ تصمیم، نظریهٔ براورد آماری، روشهای مبتنی بر رتبه‌ها مشتمل بر نظریهٔ مجانبی آنها و بسیاری از دیگر حوزه‌های آمار و از جمله مفاهیم وابستگی، شیوه‌های مقایسهٔ چندگانه، تاریخ آمار، و مطالب بسیار زیاد دیگری درآورد.

لیمن به همهٔ افتخارات ممکن در این رشته و فراتر از آن دست یافت. استادیِ کرسیهای درسی پراعتبار والد و فیشر، ریاست «مؤسسهٔ آمار ریاضی» و عضویت هیأت تحریریهٔ مجلهٔ علمی عمدهٔ آن، آنالز آو متمتیکال استاتیستیکس[2]، سه بار دریافت پژوهانهٔ گوگنهایم[3] در سالهای ۱۹۵۵، ۱۹۶۶، و ۱۹۸۰، عضویت در «فرهنگستان آمریکایی هنرها و علوم» در ۱۹۷۵ و «فرهنگستان ملی علوم [آمریکا]»، و دکتری افتخاری دانشگاههای لیدن و شیکاگو از سمتها و افتخاراتی است که طی زندگی علمی‌اش به دست آورد. در برکلی، دوبار کرسی استادی میلر[4] را اشغال کرد و با اکراه ولی با کارامدی بسیار به عنوان مدیر گروه خدمت کرد.

1. Naimark 2. involution 3. Levitan 4. Dickii
5. scattering theory 6. Fuks 7. Kapranov 8. Zelevinski

1. Erich L. Lehman 2. *The Annals of Mathematical Statistics*
3. Guggenheim Fellowship 4. Miller Professorship



اریک لئو لیمن

وی در استراسبورگ فرانسه، در ۱۹۱۷ به دنیا آمد ولی در فرانکفورت بزرگ شد که خانواده‌اش ریشه‌ای عمیق در آن شهر داشتند. خانواده‌اش در ۱۹۳۳ از دست نازیها گریختند و او در سویس از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد و بعد وارد کالجی در کیمبریج انگلیس شد. در ۱۹۴۰ به عنوان دانشجوی تحصیلات تکمیلی در برکلی ثبت نام کرد و بجز در دورهٔ خدمت در نیروی هوایی طی جنگ جهانی دوم و فرصتهای مطالعاتی در کلمبیا، پرینستن، و استنفرد، هرگز آنجا را ترک نکرد. پس از گرفتن درجهٔ دکتری در ۱۹۴۶، زندگی علمی‌اش را آغاز کرد و طی آن راهنمایی بیش از ۴۰ دانشجوی دکتری را به‌عهده گرفت که اغلب آنها به پیشگامان نسل بعدی آماردانان بدل شدند. این موفقیت او نه تنها به دلیل جایگاه رفیع علمی‌اش بلکه همچنین به‌خاطر خصیصه‌های شخصی برجسته‌اش بود. مهربان و بلندنظر بود و حساسیت فوق‌العاده‌ای نسبت به احساسات دیگران و درک فوق‌العاده‌ای از اوضاع دنیا، آنچه دست‌یافتنی است، و چگونه دستیابی به آن، داشت. در نتیجه، تأثیر او بر دانشجویان و همکارانش از حدود مسائل علمی فراتر می‌رفت. آنها جشن‌نامه‌ای به افتخار ۶۵ سالگی‌اش (در ۱۹۸۳)، سه سمپوزیم لیمن (۲۰۰۲، ۲۰۰۴، ۲۰۰۷)، و مجلد گزیدهٔ آثارش را، که بعداً منتشر می‌شود، فراهم کردند.

لیمن، علاوه بر شاهکارهایش، سه کتاب درسی نسبتاً مقدماتی ولی مهم منتشر کرده است. مفاهیم اساسی آمار (با همکاری دوست دیرینش هاجز جونیور[1])، مباحث ناپارامتری: آمار مبتنی بر رتبه‌ها، و اصول نظریهٔ بزرگ نمونه‌ای. پس از چاپ ویراست دوم اثر کلاسیکش آزمون فرضهای آماری در ۱۹۸۶ بعضی همکاران جوان را به ویرایش آثار مهمش ترغیب کرد تا آن آثار را با تحقیقات روز هماهنگ سازند. در دههٔ آخر زندگی‌اش، انرژی خود را مصروف تاریخ این رشته کرد که در بنای آن چنان نقش مهمی ایفا کرده بود، و زندگینامهٔ حرفه‌ای خود را با عنوان خاطرات یک آماردان: معاشرانی که داشتم[2] منتشر کرد و نیز شرحی از رقابت پرثمر بین فیشر و نیمن نوشت که کمی قبل از فوت او کامل شد و به وسیلهٔ انتشارات اشپرینگر چاپ خواهد شد. او ضمناً علاقهٔ زیادی به ادبیات داشت و در دوران بازنشستگی داستانهایی را از نویسندگان مورد علاقه‌اش ترجمه کرد. در زمان مرگش با فریتس شولتس[3]، از دانشجویان سابقش، روی ویراست جدیدی از مباحث ناپارامتری خود کار می‌کرد که قرار بود همراه با زبان آماری رایج «R» به کار گرفته شود.

م. ق. و.

منبع: وبگاه دانشگاه برکلی

1. J. L. Hodges, Jr.
2. *Reminiscences of a Statistician: The Company I Kept*
3. Fritz Scholz



کای لای چانگ

کای لای چانگ (۱۹۱۷ـ۲۰۰۹)

کای لای چانگ[1]، یکی از احتمال‌دان‌های برجستهٔ نیمهٔ دوم سدهٔ بیستم در اول ژوئن ۲۰۰۹ در ۹۱ سالگی درگذشت. کای لای چانگ در ۱۹۱۷ در شانگهای به دنیا آمد. وی در سال ۱۹۴۰ از دانشگاه تسینگ‌هوا[2] در رشتهٔ ریاضی فارغ‌التحصیل شد. در طول جنگ با ژاپن، دانشگاههای اصلی منطقه پکن-تیان‌جین[3] به شهر جنوب غربی کونمینگ[4] انتقال یافتند و در قالب دانشگاه متحد ملی جنوب غربی[5] درهم ادغام شدند و چانگ در همانجا با سمتی شبیه به استادیاری شروع به کار کرد. در این دوره ابتدا به مطالعهٔ نظریهٔ اعداد زیر نظر لوکنگ هوا[6] و سپس نظریهٔ احتمال زیر نظر پائولو هسو[7] پرداخت. در ۱۹۴۴ بورس بسیار رقابتیِ باکسر ربلیون ایندمنیتی[8] را برای تحصیل در ایالات متحده دریافت کرد و در دسامبر ۱۹۴۵ وارد دانشگاه پرینستن شد. او در سال ۱۹۴۷ درجهٔ دکتری خود را به سرپرستی هارالت کرامر[9] از پرینستن دریافت کرد (در آن زمان کرامر از سوئد به عنوان استاد میهمان به پرینستن آمده بود ــ ساموئل ویلکس[10] و جان توکی[11] اعضای دیگر کمیتهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ او بودند). عنوان پایان‌نامهٔ چانگ «دربارهٔ ماکسیمم مجموع جزئی دنباله‌هایی از متغیرهای تصادفی» بود. پس از آن در دانشگاههای شیکاگو، کلمبیا، کالیفرنیا در برکلی، کورنل، سیراکیوز سمتهای دانشگاهی داشت. در ۱۹۶۱ به دانشگاه استنفرد رفت و تا زمان بازنشستگی در ۱۹۸۸ همانجا ماند. طی سالهای مختلف، در چندین مؤسسه از جمله در دانشگاه استراسبورگ (فرانسه)، دانشگاه پیزا (ایتالیا)، و مؤسسهٔ عالی فنی فدرال سویس سمت استاد میهمان داشت و عضو ممتاز «موسسهٔ آمار ریاضی» بود.

کای لای چانگ از مبدعان بزرگ بود و پژوهشهای او تأثیری عمده در چندین حوزهٔ احتمال داشت: مجموع متغیرهای تصادفی، زنجیرهای مارکوف زمان‌پیوسته، فرایندهای مارکوف زمان‌معکوس، نظریهٔ پتانسیل احتمالاتی، برون‌گشت‌های براونی، و قضیه‌های پیمانه‌ای برای معادلهٔ شرودینگر. وی طی ۷۰ سال ۱۳۳ مقالهٔ تحقیقی نوشت. گزیده‌ای از آثار او اخیراً در بزرگداشت ۹۰ سالگی‌اش توسط انتشارات وورلد ساینتیفیک به چاپ رسیده است.

1. Kai Lai Chung 2. Tsinghua 3. Beijin-Tianjin 4. Kunming
5. National Southwestern Associated University 6. Lo-Keng Hua
7. Pao-Lu Hsu
۸. Boxer Rebellion Indemnity [غرامت شورش بوکسرها]، بورس معروفی که از زمان تئودور روزولت به دانشجویان چینی برای ادامهٔ تحصیل در آمریکا داده می‌شود و منبع هزینهٔ آن، اضافه پرداخت چین به آمریکا از بابت غرامت شورش بوکسرهاست.
9. Harald Cramér 10. Samuel Wilks 11. John Tukey

علاوه بر مقاله‌های پژوهشی او، یازده جلد کتابش تأثیر زیادی بر نسلهایی از دانشجویان احتمال، چه در دورهٔ کارشناسی و چه پس از آن، داشته‌اند. وی به‌خاطر سبک زیبا، بیان روشن و دقیق، و نثر جاندارش شهرت دارد. کتاب درسی در نظریهٔ احتمال او برای دانشجویان پس ازکارشناسی به ویرایش سوم رسیده است و کتاب احتمال و فرایندهای تصادفی مقدماتی او (با همکاری فرید آیت سهلیه در ویراست چهارم) کتابی همگان‌پسند در دورهٔ کارشناسی است که به زبانهای انگلیسی، چینی، آلمانی، فارسی، روسی، و اسپانیایی نیز درآمده است .

کای لای چانگ نزدیک به ۴۰ سال احتمال درس داد و راهنمایی پایان‌نامهٔ ۱۴ دانشجوی دکتری را به‌عهده داشت. اشتیاق او به ریاضیات در تدریس پرشور و شوق و در سخنرانیهای پژوهشی و در مباحثات با روح و پرهیجان او آشکار بود. همکاران دانشگاهی و پژوهشی او به‌ویژه به‌خاطر پرسشهای انگیزه‌بخش و تأمل برانگیزش که به‌طور حضوری، یا با تلفن و نامه و بعدها با فاکس مطرح می‌کرد، او را در یاد خواهند داشت.

در سال ۱۹۸۱، کای لای چانگ، همراه با ارهان چینلار[1] و رانلد گِتور[2] «سمینارهای فرایندهای تصادفی» را راه‌اندازی کردند. این سمینارها، با ساختار مبتکرانه‌ای که تنها چند سخنرانی رسمی را دربردارد و وقت فراوانی برای بحثهای غیررسمی و جلسات مربوط به مسائل تحقیقاتی باقی می‌گذارد، تا به امروز با موفقیت فوق‌العاده‌ای ادامه دارد. سمینار سال ۲۰۱۰، که به میزبانی دانشگاه مرکزی فلوریدا برگزار خواهد شد، بخش ویژه‌ای برای یادآوری سهم کای لای چانگ در نظریهٔ احتمال خواهد داشت.

کای لای چانگ نقش مؤثری در توسعه و ترویج نظریهٔ احتمال در کشور زادگاهش پس از سالهای پرآشوب انقلاب فرهنگی (۱۹۶۶ـ۱۹۷۶) داشت. دیدار او از چین در سال ۱۹۷۸ نقطهٔ آغاز تماس احتمال‌دانان چینی با غرب بود. پس از آن او طی چند دیدار از چین، سخنرانیهای متعدد و درسهای فشرده‌ای ارائه کرد و فرصتهایی برای ادامهٔ تحصیل دانشجویان چینی در ایالات متحده فراهم کرد. او همچنین به‌عنوان ممتحن خارجی در چندین دانشگاه آسیایی، از جمله دانشگاه ملی سنگاپور، به‌خدمت اشتغال داشت. کنفرانسی با عنوان «از فرایندهای مارکوف تا حرکت براونی و فراتر از آن» در دانشگاه پکن در ژوئن ۲۰۱۰ به افتخار او برگزار خواهد شد.

وی علاوه بر دنبال کردن ریاضیات، دلبستگیهای فرهنگی گسترده‌ای نیز داشت. او که طبق سنت کلاسیک چینی درس آموخته بود، با سنتهای ادبی و اشکال زبان چینی آشنا بود. اطلاعات متنوع و عمیق او در ادبیات و موسیقی و به‌ویژه اپرا خیلیها را به تعجب وامی‌داشت. به چندین زبان سخن می‌گفت و به‌ویژه از تمرین زبان ایتالیایی که در دورهٔ بازنشستگی آن را فراگرفته بود، لذت می‌برد.

م. ق. و.

منبع: وبگاه دانشگاه استنفرد

1. Erhan Cinlar 2. Ronald Getoor

ریاضیات و ارتباطهای آن با علم، فناوری، و جامعه

نگاهی به چالشهای پیشبرد ریاضیات در اروپا

اری لاپتف

روند فعلی به سوی اقتصاد جهانی و جامعهٔ دانش‌محور، اطلاعات و فناوریهای بدیع را به طور فزاینده‌ای وابسته به تحقیقاتی ساخته است که توسط ریاضیات هدایت می‌شوند. امروزه علوم ریاضی، شامل آمار و محاسبات، بخشی جدایی‌ناپذیر از پیشرفت فناوری قلمداد می‌شوند. ریاضیات زمینه را برای ارتباط و اکتشاف در بسیاری از رشته‌های علمی و صنعت نوین فراهم می‌آورد.

درست است که بسیاری از نتایج جدید ریاضی کاربرد فوری ندارند، اما در نهایت، بیشتر آنها کاربردپذیر می‌شوند. در اینجا به چند نمونهٔ جدید اشاره می‌کنم که ثابت شده است کاربرد ریاضیات در آنها بسیار اساسی است:

- هندسهٔ انتگرالی، که با به اصطلاح مسائل وارون سروکار دارد، روشی فراهم آورده است که در تصویربرداری پزشکی برای تشخیص غدد، رادارهای هوایی، جستجو برای میدانهای نفتی، نجوم، و غیره به کار می‌رود.
- اختراع کابلهای فیبر نوری جدید که بدون کشف جوابهای خاص معادلات غیرخطی موسوم به سولیتون ممکن نبود.
- ورود اینترنت به صحنه، مردم را از اینکه دنیا در انبوه عظیمی از اطلاعات غرق شود ترسانده است. این مشکل را گوگل با موفقیت حل کرده است زیرا همواره اطلاعات خواسته شده را فوراً ارائه می‌دهد. گرچه سحرآمیز به‌نظر می‌رسد، اما الگوریتم جستجوی گوگل را ابتدا ریاضیدانان ارائه کردند.
- نظریهٔ موجکها در ارتباطات الکترونیک فوق‌العاده اهمیت یافته است زیرا امکان می‌دهد اطلاعات را به فشرده‌ترین طریق انتقال دهیم و در نهایت امکان انواع ارتباطات بی‌سیم را برای ما فراهم می‌سازد.
- امنیت کارتهای اعتباری فقط با یاری رمزنگاری ممکن است که شاخه‌ای از نظریهٔ اعداد در آن به کار می‌رود.
- ریاضیدانان در تلاش برای درک بهترِ مشکلات بنیادین تحقیقات ژنی، علامت‌دهی سلولی، فیزیولوژی سیستمها، عفونت و ایمنی، زیست‌شناسی تکوینی، گسترش بیماری، و بوم‌شناسی مشارکت دارند.
- ریاضیدانان همراه با فیزیکدانان نظری در حال کار روی نظریهٔ فیزیکی وحدت میدانها هستند که آخرین پیشرفتهای هندسهٔ جبری در آن به کار می‌رود.

نظریه‌های ریاضی به‌کار رفته در این مثالها در اصل با تصور کاربرد خاصی به وجود نیامده‌اند بلکه صرفاً محصول کنجکاوی دانشمندان بوده‌اند. در حال حاضر، بنگاههای تأمین بودجه در تعریفِ (از بالا به پایین) زمینه‌های پژوهشی اولویت‌دار در ریاضیات مبناهای متفاوتی را در نظر می‌گیرند. این حوزه‌ها اغلب ماهیت بین‌رشته‌ای دارند و معمولاً حمایت مالی از چنین حوزه‌هایی با کاهش بودجهٔ فعالیتهای اصلی در علوم ریاضی فراهم می‌شود.

از آنجا که ماهیت تحقیق ریاضی چنان است که غالباً کاربرد مستقیم و فوری ندارد، ریاضیدانان همیشه به عنوان مشارکت‌کنندگان اصلی چنین پروژه‌هایی در نظر گرفته نمی‌شوند. به عنوان مثال، در برنامهٔ FP7 اتحادیهٔ اروپا[1]، پروژه‌های شبکه‌ای باید با صنعت ارتباط داشته باشند. در نتیجه، FP7 تقریباً هیچ پروژهٔ شبکه‌ای را در ریاضیات در طول چند سال گذشته تصویب نکرده است.

گرچه وظایفی که کاربردها پیش روی ریاضیدانان قرار می‌دهند در پیشرفت تحقیقات ریاضی تأثیر داشته است، این پیشرفت با تکامل طبیعی خود ریاضیات نیز که کنجکاوی ریاضیدانان انگیزهٔ آن بوده است، سنجیده می‌شود. ولی سازمانهای مالی در بسیاری از کشورهای اروپایی روز به‌روز کمتر به این واقعیت توجه می‌کنند، تا جایی که بودجهٔ پژوهشهای اساسی به‌طور چشمگیری کاهش یافته است. به عنوان مثال، در طی پنج سال گذشته شورای تحقیقات مهندسی و علوم فیزیکی (EPSRC) در بریتانیا کمک مالی خود به ریاضیات را از ۲۱ میلیون پوند به ۱۲ میلیون پوند کاهش داده است. نقش مهمی که پژوهشهای ریاضی در پیشرفت کلی فناوری ایفا می‌کند به اندازهٔ کافی شناخته شده نیست.

آمریکای شمالی هنوز هم محل بسیار جذابی برای ریاضیدانان بسیاری از کشورهای اروپایی باقی مانده است زیرا به یمن اقدامات بنیاد ملی علوم آمریکا (NSF) علوم ریاضی در آن کشور موقعیت کاملاً تثبیت‌شده‌ای دارد.

ریاضیدانان اروپایی نظر مثبتی در مورد ایجاد شورای پژوهشی اروپا (ERC) برای حمایت از علوم بنیادین دارند.

به طور سنتی، بیشتر تحقیقات ریاضی در گروههای ریاضی دانشگاهها صورت می‌گیرد. ریاضیدانان علاوه بر «اثبات قضایا»، معمولاً درگیر آموزش هستند. در طول دهه‌های اخیر تعداد دانشجویان در دانشگاههای اروپایی به مراتب افزایش یافته است در حالی که تعداد اعضای هیأت علمی تقریباً ثابت مانده است. وقت اعضای هیأت علمی با آموزش دروس پایه پر می‌شود و بنابراین زمان بسیار کمی برای تحقیق باقی می‌ماند. در واقع، در بسیاری از دانشگاهها، تحقیق یک سرگرمی شخصی تلقی می‌شود.

اما تنها تعداد زیاد دانشجویان نیست که تدریس ریاضی را مشکل کرده است. اکثریت دانشجویان سال اول دانشگاههایمان برای یادگیری ریاضیات آمادگی ندارند. توجه مدارس نوین اغلب معطوف به دانش‌آموزان ضعیف‌تر است و روی آنهایی که استعداد بیشتر دارند سرمایه‌گذاری کافی نمی‌کنند. به عنوان مثال، یکی از دانشجویان دکتری سابقم می‌گفت که واقعاً در مدرسه رنج می‌برده است. کلاسهای ریاضی برای وی خسته‌کننده بوده‌اند، عمدتاً به دلیل اینکه معلم به او اجازه نمی‌داده تا مسائل ریاضی را به همان سرعتی که می‌توانسته حل کند زیرا اعتقاد داشته که کار او از نظر روانی به بعضی از همکلاسی‌های او که نمی‌توانند به همان سرعت مسأله حل کنند آسیب می‌زند.

چنین نظام آموزشی از عواملی است که باعث می‌شود دانشجویان در دانشگاههای ما آمادگی نداشته باشند و مدرسان دانشگاه مجبور به پایین آوردن استانداردهای تدریس خود باشند. در نهایت، این موضوع بر توسعهٔ فناوری کشورهایمان تأثیر می‌گذارد زیرا صنعت اروپا قادر به پیدا کردن تعداد کافی مهندس که به اندازهٔ کافی در دانشگاههایمان تعلیم دیده باشند نیست. اخیراً، در ۲ اکتبر ۲۰۰۸، انجمن موسوم به میزگرد صنعتگران اروپا (ERT) همایشی در بروکسل در مورد نحوهٔ بهره‌برداری از توانایی بالقوهٔ ریاضیات، علم و فناوری در برانگیختن نوآوری و رقابت در اروپا برگزار کرد. نگرانی اصلی در این همایش سطح پایین آموزش ریاضی و عواقب آن در ارتباط با اقتصاد و جامعهٔ اروپا بود. هدف از این ابتکار مهم این بود که اقدامات بخشِ صنعت را با یک رویکرد نظام‌مند در مقیاس بزرگ در حمایت از آموزش و پژوهش هماهنگ سازد. در این همایش نیاز به یک همکاری قوی بین مدارس، دانشگاهها، دنیای کسب و کار، و دولتها، در ارتباط با ارتقای ریاضیات، علوم و فناوری، به اتفاق آرا مورد تأیید قرار گرفت. دلیل اصلی برای چنین ابتکاری نارضایتی صنعت اروپا از کیفیت متخصصان فارغ‌التحصیل دانشگاههای اروپایی بود.

حدود دو سال پیش جامعهٔ ریاضی اروپا در همایش بروکسل به هنگام تعریف زیرساخت‌های پژوهش در اروپا تصمیم گرفت ریاضیات را به‌عنوان یک زیرساخت جداگانه در نظر نگیرد بلکه آن را ذیل عنوان «رایانه و بررسی داده‌ها» قرار دهد. خوشبختانه، این خطای ناراحت‌کننده بعداً تصحیح شد و در حال حاضر منتظر فراخوان بروکسل در مورد پروژه‌ای دربارهٔ «زیرساخت‌هایی برای ریاضیات و ارتباطهای آن با علم، فناوری و به طور کلی جامعه» هستیم. این گامی کوچک در مسیری صحیح است.

سطح شایستگی ریاضیدانان اروپایی هنوز بالاست اما به‌شدت به پشتیبانی از طرق مناسب و تأیید رسمیِ اهمیت پژوهشهایشان نیاز دارند.

در پایان، می‌خواهم اشاره کنم که ریاضیات یکی از موضوعات اصلی در آموزشِ تقریباً همهٔ شاخه‌های علوم و مهندسی است. ریاضیدانان پژوهشگر فرهنگ تفکر منطقی را فراهم می‌کنند، زبانی را توسعه می‌دهند که بسیاری از فرایندهای پیچیدهٔ اطرافمان را توضیح می‌دهد، و از شالودهٔ توسعهٔ فناوری محافظت می‌کنند. اینکه ریاضیات، یعنی موضوعی که در طول بیش از ۲۰۰۰ سال تا حد زیادی مسبب پیشرفت بشر بوده است هنوز مجبور به مبارزه برای بقا و نیازمند قدرشناسی واقعی است، به نظر من عجیب، مایهٔ نگرانی، و عمیقاً تأسف‌آور است.

ترجمه با تلخیص: محمدصال مصلحیان

منبع:

The Newsletter of the European Math. Soc., NO. 73, September 2009, pp. 5-6.

* اری لاپتف (Ary Laptev)، رئیس انجمن ریاضی اروپا

1. EU Frame Programme7

مفهوم گونا در توپولوژی و آنالیز مختلط•

فریدریش هیرتسه‌بروخ*، ماتیاس کرک**
ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

نام مفهوم مورد بحث این مقاله در زبان انگلیسی [genus] از زیست‌شناسی می‌آید که در آنجا برای رده‌بندی موجودات زنده‌ای که مشخصات مشترکی دارند به‌کار می‌رود. در ریاضیات نیز این کلمه برای دسته‌بندی اشیایی که ویژگیهای مشترک دارند مورد استفاده قرار می‌گیرد. مفهوم گونا در شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند نظریهٔ اعداد، توپولوژی، و آنالیز مختلط مطرح می‌شود که در این مقاله به جایگاه آن در دو زمینهٔ اخیر می‌پردازیم. حتی در این دو شاخه هم تعبیرهای مختلفی از گونا وجود دارند که سرآغاز آنها از دید تاریخی، گونای یک رویهٔ جهتدار است. ما با شروع از این ریشه‌ها به بررسی تعمیمها و اصلاحاتی که در این مفهوم صورت گرفته می‌پردازیم. در این مقاله به ریزه‌کاری تعاریف و برهانها کاری نداریم بلکه هدف ما این است که خواننده شناختی شهودی از مفهوم گونا به‌دست آورد.

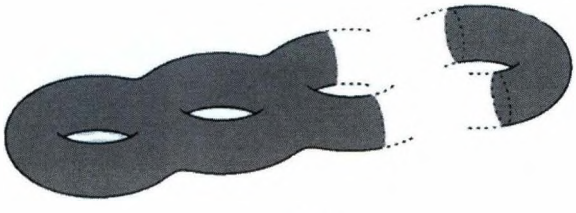
گونای یک رویه

ریمان در مقاله‌ای با عنوان «نظریهٔ توابع آبلی» توپولوژی رویه‌ها را بررسی کرد [۲۰]. وی رویه‌ها را با استفاده از خمهای بستهٔ ساده که با برش رویه در امتداد آنها نمایش ساده‌ای از رویه به‌دست می‌آید، رده‌بندی کرد. او تعداد مینیمال این خمها را $2p$ نامید و نشان داد که این ناوردا رویه را معین می‌کند. چند سال بعد از آن، زمانی که کلبش[1] رویه‌ها را با دید عمیق‌تر هندسهٔ جبری مطالعه کرد، عدد p را das Geschecht «گونا»ی رویه نامید.

دیدگاه ریمان را به‌زبان امروزی می‌توان به‌صورت زیر فرمولبندی کرد: هر رویهٔ همبند، بسته (یعنی فشردهٔ بدون مرز) و جهتدار F، از جمع همبند[2] کرهٔ دوبعدی S^2 و چند چنبرهٔ $T = S^1 \times S^1$ به‌دست می‌آید. تعداد چنبره‌های اضافه‌شده یک ناوردای توپولوژیک است که گونای F نامیده و با $g(F)$ نمایش داده می‌شود. این عدد با عدد pی کلبش برابر است.

1. Clebsch

۲. مجموع همبند دو خمینهٔ m بعدی خمینه‌ای است که با حذف یک گوی در هر یک از خمینه‌ها و به‌هم چسبانیدن خمینه‌های باقی‌مانده در امتداد مرز دو گوی به‌دست می‌آید. ـ م.



شکل ۱

بیان موجز مفهوم رویه از دیدگاه ریمان به‌آسانی ممکن نیست. چیزی است مشابه پوشش منشعب[1] صفحه، و ریمان به‌طور ضمنی فرض می‌کند که رویه دارای نوعی ساختار دیفرانسیل‌پذیر است که از نظر محاسبات فنی بسیار مفید است. لیکن در واقع گونا یک ناوردای توپولوژیک است. این موضوع را می‌توان با به‌کارگیری گروه بنیادی یا اولین گروه مانستگی[2] $H_1(F)$ ثابت کرد. به‌ویژه داریم $H_1(S^2) = 0$، و فرمول

$$H_1(F\#T) \cong H_1(F) \oplus \mathbb{Z}^2$$

که در آن نماد $\#$ برای جمع همبند به‌کار رفته، نتیجه می‌دهد که برای رویهٔ $F = F_n$ که از جمع همبند S^2 و n چنبره به‌دست آمده است داریم

$$H_1(F_n) \cong \mathbb{Z}^{2n}.$$

برای هر خمینهٔ X، رتبهٔ kامین گروه مانستگی، kامین عدد بتی نامیده می‌شود، یعنی

$$b_k(X) := \operatorname{rank}(H_k(X))$$

و بنابراین، فرمول زیر حاصل می‌شود

$$g(F) = \frac{b_1(F)}{2}.$$

1. ramified covering 2. homology group



شکل ۲

برای تعیین گونای F به‌جای عدد بتی می‌توان از مشخصهٔ اویلر استفاده کرد:

$$e(X) := \sum_i (-1)^i b_i(X)$$

به این معنی که، $b_0(F) = b_2(F) = 1$، و لذا

$$e(F) = 2 - b_1(F) = 2 - 2g(F)$$

در نتیجه

$$g(F) = 1 - \frac{e(F)}{2}.$$

عدد (مشخّصهٔ) اویلر را می‌توان بدون ارجاع به مانستگی، به‌روش ترکیبیاتی محاسبه کرد. هر رویه دارای یک مثلث‌بندی است (بخش بعد را ببینید)، که می‌توان آن را با قراردادن شبکه‌ای از مثلثها روی F تجسم کرد و داریم:

$$e(F) = \text{تعداد مثلثها} + \text{تعداد یالها} - \text{تعداد رأسها}$$

با این حال، اینکه مشخصهٔ اویلر با تعریف ترکیبیاتی یک ناوردای توپولوژیک است، نیاز به برهان دارد.

اهمیت توپولوژیک گونا در چیست؟

تا اینجا به رویه یک ناوردای توپولوژیک نسبت داده‌ایم: گونای رویه. این ناوردا چقدر قوی است؟ اهمیت توپولوژیک آن در چیست؟ دیدگاه ریمان را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر رویهٔ دیفرانسیل‌پذیر با گونای خود معیّن می‌شود. یک برهان جدید برای این مطلب با استفاده از نظریهٔ مقدماتی مورس به‌دست می‌آید ([۶]، [۷]). لیکن حتی حکمی قوی‌تر برقرار است: گونا نوع همسانریختی را نیز معین می‌کند. این حکم سالها بعد از کار ریمان توسط رادو ثابت شد.

قضیه [۱۹]. هر دو رویهٔ جهتدارِ بستهٔ همبند F و F' همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر

$$g(F) = g(F').$$

این یک نتیجهٔ ساده نیست. گام اساسی در برهان رادو این است که نشان دهد هر رویهٔ توپولوژیک با پایهٔ شمارا دارای مثلث‌بندی است؛ آنگاه ادامهٔ برهان در مقولهٔ ترکیبیات چندان دشوار نیست. ▪

اهمیت آنالیزیِ گونا در چیست؟

هدف اصلی بررسیهای توپولوژیک ریمان، مطالعهٔ رویه‌ها به‌عنوان اشیایی در آنالیز مختلط یا به زبان امروزی، به‌عنوان خمینه‌های مختلط از بعد مختلط ۱، یعنی خمهای مختلط بود. هر خمینهٔ مختلط عبارت است از یک خمینهٔ توپولوژیک (یعنی یک فضای توپولوژیک هاوسدورف با پایهٔ شمارا که به‌طور موضعی با $\mathbb{R}^n$ همسانریخت باشد) همراه با یک اطلس که تعویضهای مختصات آن نگاشتهای تمامریخت‌اند. اشاره می‌کنیم که در بعد مختلط ۱، پایهٔ شمارا از وجود ساختار مختلط نتیجه می‌شود [۱۹]. روی یک چنین خم مختلط، ریمان بخشیابهایی[1] مانند D را در نظر می‌گیرد، که ترکیبهای خطی صوریِ متناهیِ نقاطی روی رویه هستند با ضرایب متعلق به $\mathbb{Z}$. هر تابع برخه‌ریخت روی یک رویهٔ بسته (در ادامه فرض خواهیم کرد رویه‌ها بسته‌اند) یک بخشیاب D را معین می‌کند که ترکیب خطی صفرها و قطبهای آن تابع (با احتساب چندگانگی) است. به هر بخشیاب، مجموع ضرایب آن را که درجهٔ D نامیده می‌شود، مربوط می‌کنیم. برای بخشیاب داده شدهٔ D، فضای برداریِ توابع برخه‌ریخت را با این ویژگی که مجموع بخشیاب هر تابع با بخشیاب داده‌شده چندگانگی منفی نداشته باشد، در نظر می‌گیریم. این فضای برداری متناهی‌بعد است و بعد آن با $l(D)$ نمایش داده می‌شود.

ریمان برای هر بخشیاب D، نابرابری خود را ثابت کرد [۲۰]:

$$l(D) \geq deg(D) + 1 - g.$$

این سرآغاز قضیهٔ معروف ریمان-روخ است [۲۱]، که با به‌کارگیری بخشیاب متعارف K برابری زیر را به‌دست می‌دهد

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

چرا این نتیجه مهم است؟ اگر به‌طرف راست برابری توجه کنیم مجموع یک ناوردای سادهٔ یک بخشیاب، درجهٔ آن، و ناوردای توپولوژیک $g - 1$ را می‌بینیم. در صورتی که طرف چپ، ناوردای آنالیزی پیچیده‌ای است: تفاضل بعدهای دوفضای توابع، یا به بیان دقیق‌تر، فضاهای توابع برخه‌ریخت با شرایطی روی صفرها و قطبهای آنها.

گونای حسابی واریته‌های جبری

باید توجه داشت که گذار از ساختارهای دیفرانسیل‌پذیر به ساختارهای مختلط تغییری عمده است، زیرا در حالت کلّی، ساختارهای مختلط متفاوت متعددی روی یک رویهٔ داده‌شده وجود دارد. در واقع یک فضای پیمانه‌ای از ساختارهای مختلط مطرح است که به‌ازای $g \geq 2$ خودش خمینهٔ مختلطی است از بعد $3g - 3$. به‌ازای $g = 0$، فضای پیمانه‌ای یک نقطه است، و به‌ازای $g = 1$، از بعد مختلط ۱ است.

می‌توان گامی فراتر برداشت و ساختارهای حتی ظریف‌تری روی یک رویه وضع کرد، مثل ساختار جبری مختلط. در حالی که مطالعات گسترده‌ای در زمینهٔ خمینه‌های توپولوژیک و هموار در نیمهٔ اول سدهٔ گذشته انجام شد، خمینه‌های مختلط از بعد بیش از ۱ با روشهای آنالیز مختلط چندان مورد بررسی قرار نگرفتند (البته نظریهٔ توابع چند متغیرهٔ مختلط در دامنه‌های

1. divisors

باز در $\mathbb{C}^n$ بسیار مورد توجه بود). در مقابل، واریته‌های جبری، مجموعهٔ صفرهای خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌ها، موضوع بررسیهای ریاضی مستمر بودند، دست‌کم در حدِ ساختن مثالهای جالب و مطالعهٔ هندسهٔ آنها. فرمولهای زیادی به‌دست آمد که به سؤالها و حدسیه‌های جالبی منتهی شد.

در این زمینه گونای دیگری، گونای حسابی، نقش مهمی ایفا کرد. در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ چهار تعریف از گونای حسابی روی یک واریتهٔ جبری هموار تصویری V، با بعد مختلط n، شناخته شده بودند. دوتای اول با $P_a(V)$ و $p_a(V)$ نمایش داده می‌شوند. سِوِری[1] حدس زد که این دو عدد یکسان هستند و برحسب $g_i(V)$، بعد فضای برداریِ صورتهای دیفرانسیل تمام‌ریخت از درجهٔ i، قابل محاسبه‌اند:

$$p_a(V) = P_a(V) = g_n(V) - g_{n-1}(V) + \ldots + (-1)^{n-1} g_1(V).$$

عبارت طرف راست، تعریف سوم است که ما آن را به خواننده توصیه می‌کنیم (در واقع به شکلِ اندکی اصلاح‌شده که در ادامه توصیف می‌شود). کودایرا و اسپِنسِر [۱۴] با استفاده از نظریهٔ بافه‌ها ثابت کردند که هر سه عبارت یکسان‌اند.

عبارت طرف راست، مشابه مشخصهٔ اویلر است، لیکن با شکلی متفاوت. عدد اویلر «واقعی» عدد اویلر تمام‌ریخت است،

$$\chi(V) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_i(V)$$

که گونای حسابی خوانده می‌شود. تعداد مؤلفه‌های V همان $g_0(V)$ است. بنابراین برای یک واریتهٔ همبند، $\chi(V) = (-1)^n p_a(V) + 1$. اغلب $g_n(V)$ گونای هندسی V خوانده می‌شود. برای حالت یک خم (رویهٔ ریمانی) داریم

$$g_1(V) = g(V)$$

و لذا گونای هندسی و گونایِ ریمانی یکسان‌اند.

هر دو گونای حسابی و هندسی ضربی هستند:

$$\chi(V \times V') = \chi(V)\chi(V')$$

و

$$g_{n+m}(V \times V') = g_n(V) g_m(V')$$

که $n = \dim V$ و $m = \dim V'$.

اعداد $g_i(V)$ ناورداهای دوسوگویا هستند [۲۵]، بنابراین، گونای حسابی، یک ناوردایِ دوسوگویاست.

گونای تاد

تعریف چهارم گونای حسابی را تاد [۲۴] به‌دست داد. هر بخشیاب متعارف یک واریتهٔ جبریِ تصویریِ هموار با بعد n، بخشیاب یک nـصورت برخه‌ریخت است. چنین بخشیابی یک دور جبری با متمم‌بعد توپولوژیک ۲ است. تاد دورهای متعارف هندسی برای همهٔ متمم‌بعدها تعریف کرد. وی چندجمله‌ای‌هایی از این دورها را تعریف کرد، که در آنها حاصلضرب توسط اشتراکها مشخص می‌شود. چندجمله‌ای تادِ nام دارای متمم‌بعد $2n$ است و برای یک واریتهٔ nبعدی، عددی را که گونای تاد خوانده می‌شود عرضه می‌کند. تاد معتقد بود که این گونا همان گونای حسابی است، لیکن توجیه دقیق این واقعیت خیلی بعد به‌دست آمد.

رده‌های هم‌ارزی متعارف تاد رده‌های مانستگی را نمایش می‌دهند، که با تقریب علامت، دوگان پوانکارهٔ رده‌های چرن[1] کلاف مماس یک واریته هستند [۱۸]. به‌طورکلی، رده‌های چرن برای کلافهای برداری مختلط تعریف می‌شوند. برخلاف خمینه‌های مختلط که در آنها نگاشتهای تمام‌ریخت نقش تعیین‌کننده دارند، کلافهای برداری مختلط اشیایی کاملاً توپولوژیک هستند؛ به اجمال می‌توان گفت که آنها خانواده‌ای از فضاهای برداریِ مختلطِ kبعدی هستند که توسط نقاط یک فضای توپولوژیک X پارامتری شده‌اند. همچنین یک توپولوژی روی اجتماع مجزای این فضاهای برداری وجود دارد، و نکتهٔ اساسی این است که این خانوادهٔ فضاهای برداری به‌طور موضعی با یک حاصلضرب $U \times \mathbb{C}^k$ همسانریخت است که U یک زیرمجموعهٔ باز X است. تعریف رسمی رده‌های چرن پیچیده‌تر از آن است که در چنین مقاله‌ای مطرح شود، لیکن ایدهٔ اصلی نهفته در پسِ آنها را می‌توان با در نظرگرفتن مورد یک کلاف برداری مختلط دیفرانسیل‌پذیر E روی یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر و بستهٔ X توضیح داد. در این حالت، ردهٔ چرن $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ اولین مانع برای وجود $k - i + 1$ مقطع مستقل خطی روی E است. اگر، برای مثال، یک مقطع تنها در E انتخاب شود و این انتخاب نوعی[2] باشد، آنگاه مجموعهٔ صفرها یک زیرخمینهٔ X از بعد $\dim X - 2\dim E$ خواهد بود. لذا یک ردهٔ مانستگی به‌دست می‌آید که دوگان پوانکارهٔ آن در $H^{2k}(X)$ می‌نشیند و همان ردهٔ چرن kامِ E، $c_k(E)$ است. اگر X یک خمینهٔ kبعدی مختلط و بسته باشد و E کلاف مماس مختلط آن فرض شود، آنگاه $c_k(E)$ به‌ازای دور اساسی، طبق قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف، مشخصهٔ اویلر X است.

گونای تاد برحسب رده‌های چرنِ کلاف مماس، مقدار یک چندجمله‌ای گویای مشخص از رده‌های چرن $T(c_1, c_2, \ldots)$ روی ردهٔ اساسی است. در توضیح نحوهٔ ساختن این چندجمله‌ای‌ها (که عبارات نسبتاً پیچیده‌ای هستند)، خاطر نشان می‌کنیم که اگر قرار است گونای تاد با گونای حسابی برابر باشد، این دو گونا برای فضای تصویری مختلط (که گونای حسابی آن ۱ است) نیز یکسان خواهند بود. به‌علاوه، گونای تاد باید ضربی باشد، تا به‌نوعی ضربی بودن گونای حسابی را منعکس کند، لذا باید یک دنبالهٔ ضربی به تعبیر [۸] باشد. این استدلال، انگیزهٔ مؤلّف اوّل برای معرّفی مفهوم عمومی دنباله‌های ضربی از چندجمله‌ای‌ها بوده است. وی دنبالهٔ تاد را توسط دنبالهٔ ضربی ویژه‌ای با مقدار ۱ برای هر فضای تصویری مختلط مشخص می‌کند.

چهار چندجمله‌ای اول عبارت‌اند از:

$$T_1 := \frac{1}{2} c_1$$

$$T_2 := \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

$$T_3 := \frac{1}{24} c_1 c_2$$

$$T_4 := \frac{1}{720}(-c_4 + c_3 c_1 + 3c_2^2 + 4c_2 c_1^2 - c_1^4).$$

1. Severi

1. Chern classes 2. generic

قضیه [۸]. فرض کنید V یک واریتهٔ جبریِ مختلطِ فشردهٔ ناتکین از بعد n است. آنگاه

$$\chi(V) = \langle T_n(V), [V] \rangle$$

مقدار چندجمله‌ای تادِ T_n به‌ازای ردهٔ اساسی است.

مشاهده می‌کنیم که این نتیجه حال و هوایی مشابه قضیهٔ ریمان-روخ دارد، زیرا اطلاع آنالیزی، عدد اویلر تمام‌ریخت، را با ناوردای گونای تاد که به زبان توپولوژیک تعریف شده، مرتبط می‌سازد.

اگر بعد مختلط V یک باشد، که در مورد رویهٔ ریمانی چنین است، قضیهٔ بالا حالت خاص فرمول ریمان-روخ، یعنی حالت $D = ۰$ خواهد بود. با همین تعبیر، قضیهٔ بالا حالت خاص فرمول هیرتسه‌بروخ-ریمان-روخ برای $D = ۰$ است [۸]. در سال ۱۹۵۷، گروتندیک[1] این فرمول را با در نظر گرفتن شکل پارامتری فرمول ریمان-روخ تعمیم داد [۲]. همهٔ اینها داستانی طولانی دارد، و هر چند به مفهوم گونا مربوط می‌شود، پرداختن به آنها ما را از موضوع اصلی منحرف می‌کند.

بوردیسم[2] و گوناهای تعمیم‌یافته

گفتیم که گونای تاد به شیوهٔ توپولوژیک تعریف می‌شود، ولی این توصیف بیش از حد موجز است. علاوه‌بر خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر زمینه، یک ساختار مختلط به مفهوم ضعیف‌تر مورد نیاز است: یک ساختار مختلط روی مجموع کلاف مماس و کلاف بدیهی. این ساختار یک ساختار تقریباً مختلط پایدار خوانده می‌شود. هر خمینه با یک ساختار تقریباً مختلط پایدار، یک خمینهٔ تقریباً مختلط پایدار نامیده می‌شود. توجه می‌کنیم که با این تعریف، حتی خمینه‌ای از بعد فرد می‌تواند ساختار تقریباً مختلط پایدار داشته باشد.

چون رده‌های چرن ناوردا‌های پایدار هستند، به این معنی که با افزودن یک کلافِ (مختلط) بدیهی تغییر نمی‌کنند، ساختاری که برای تعریف گونای تاد لازم است یک ساختار تقریباً مختلط پایدار است. برای چنین خمینه‌هایی، گونای تاد ویژگیهای اساسی زیر را داراست:

- جمعی است (یعنی گونای تاد یک اجتماع مجزا، مجموع گوناهای تاد آنهاست).
- ضربی است (یعنی گونای تاد حاصلضرب، حاصلضرب گوناهای تاد است).

این ویژگیهای گونای تاد، نویسندهٔ اول این مقاله را به معرفی مفهوم عمومی گونا برانگیخت. این گونا ناوردایی است مانند Φ برای رده‌هایی از خمینه‌ها، برحسب رده‌های مشخصهٔ کلاف مماس (شاید مجهز به یک ساختار تقریباً مختلط پایدار) با مقادیر متعلق به یک حلقهٔ Λ، که در ویژگیهای بالا نیز صدق کند. توجه داریم که برای رویهٔ ریمانی F، گونای تاد برابر $\frac{c_1(F)}{2}$ است که نصف مشخصهٔ اویلر F یعنی $1 - g(F)$ می‌باشد. لذا در این حالت، گونای تاد اساساً گونای رویهٔ ریمانی است.

یکی از ناورداهای مهم خمینه‌های جهتدار، نشانک [یا امضا[1]ی] آنها $(b_+ - b_-)$ است، که نشانک صورت تقاطعی یک خمینهٔ $4k$ بعدی جهتدار و بستهٔ M از دیدگاه جبر خطی است (اگر بعد مضرب ۴ نباشد نشانک برابر صفر تعریف می‌شود). نشانک M با

$$sign(M) \in \mathbb{Z}$$

نمایش داده می‌شود.

نویسندهٔ اوّل این مقاله در پی فرمولی بوده است که مشابه فرمول گونای حسابی، نشانک را برحسب رده‌های مشخصه محاسبه کند. این کار زمانی انجام شد که هنوز فرمول ریمان-روخ تنها یک حدسیه بود. در واقع، قضیهٔ نشانک به جزء مهمی از برهان فرمول ریمان-روخ تبدیل شد. چون روی کلاف مماس هیچ ساختار مختلط وجود ندارد، می‌بایست به‌جای رده‌های چرن، از رده‌های پونتریاگین $p_i(M) \in H^{4i}(M)$ استفاده کرد. این رده‌ها (با تقریب علامت) رده‌های چرن مختلط‌شدهٔ کلاف مماس هستند. مشابه با گونای تاد، نویسندهٔ اول صورتبندی خود در مورد دنباله‌های ضربی را به‌کار گرفت تا چندجمله‌ای‌هایی از رده‌های پونتریاگین بسازد که برای هر فضای تصویری مختلط از بعد زوج، مقدار ۱ یعنی نشانک M را می‌گیرد. اینها L-چندجمله‌ای‌ها هستند. سه L-چندجمله‌ای اول چنین‌اند

$$L_1 = \frac{1}{3} p_1$$

$$L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$$

$$L_3 = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3).$$

اگر می‌دانستیم که، مانند موردِ گونای حسابی، مقادیر در فضاهای تصویری از بعد زوج، نشانک را معین می‌کنند، فرمول مورد انتظار به‌دست می‌آمد. این وضع پیش می‌آمد اگر، پس از گذار به مضربی از خمینه در صورت نیاز، هر خمینه بوردانتِ ترکیبی خطی از حاصلضربهای فضاهای تصویری بود. دلیل این امر این است که هم نشانک و هم L-چندجمله‌ای‌ها، ناورداهای بوردیسم هستند. در اینجا دو خمینهٔ M و N بوردانت هستند اگر خمینهٔ جهتدار و فشردهٔ W وجود داشته باشد به‌طوری که مرز W اجتماع مجّزای M و $-N$ باشد، که $-N$ همان خمینهٔ N است با جهت مخالف جهت N.

رده‌های بوردیسمِ خمینه‌های nبعدی جهتدار و بسته، تحت عمل اجتماع مجزا یک گروه تشکیل می‌دهند که با Ω_n نمایش داده می‌شود. مجموع $\Omega_* := \sum_n \Omega_n$ نسبت به ضرب دوخمینه یک حلقه است. تام [۲۳]، $\Omega_* \otimes \mathbb{Q}$ را محاسبه کرد. این حلقهٔ چندجمله‌ای‌هاست که مولدهای آن فضاهای تصویری از بعد زوج هستند. این ملاحظات ما را به نتیجهٔ زیر رهنمون می‌شود:

قضیه (قضیهٔ نشانک) [۸]. فرض کنید M یک خمینهٔ جهتدارِ هموار و بسته است. در این‌صورت

$$sign(M) = \langle L(M), [M] \rangle.$$

1. Grothendieck

۲. بوردیسم (bordism) واژهٔ جدیدی است که جانشین کوبوردیسم (cobordism) شده است. دو خمینهٔ n بعدی را بوردانت (bordant) گویند هرگاه اجتماع مجزای آنها مرز یک خمینهٔ $n+1$ بعدی باشد. بوردیسم به مفاهیم و مباحث وابسته به بوردانت اطلاق می‌شود. این دو واژه معادلهای تثبیت‌شده‌ای در فارسی ندارند. شاید بتوان bordant را «مرزوَند» یا «مرزبند» و یا «مرزپوش» و bordism را «مرزوَندی» یا «مرزبندی» و یا «مرزپوشی» ترجمه کرد. ولی فعلاً تا بررسیهای بیشتر، اصل انگلیسی این اصطلاحات را، هر چند در متن فارسی جالب و مناسب نیستند، به کار می‌بریم.-م.

1. signature

در مورد گونای تاد اشاره کردیم که این گونا برای خمینه‌های بسته با ساختار تقریباً مختلط پایدار تعریف می‌شود. میلنر [۱۶] متناظر با گروههای بوردیسم خمینه‌های جهتدار، گروههای بوردیسم خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار را تعریف و محاسبه کرد. پاسخ ساده‌تر از موردِ گروههای بوردیسم جهتدار است: حلقهٔ بوردیسمِ خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار، حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}$ است با متغیرهای χ_i متناظر با خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار از بعد حقیقی $2i$، که میلنر آنها را به‌طور صریح توصیف می‌کند. با ضرب تانسوری در $\mathbb{Q}$، مولّدها توسط فضاهای تصویری $\mathbb{CP}^i$ مشخص می‌شوند.

ارتباط با نشانک

در این بخش ما فقط می‌توانیم به بعضی از جنبه‌های این ارتباط اشاره کنیم (با ترتیبی غیر از ترتیب تاریخی). گونای کلاسیک یک رویهٔ ریمانی نوع همسانریختی آن را به‌طور کامل معین می‌سازد (که برای رویه‌ها با نوع دیفرانسیل‌ریختی یکسان است). به تعبیری، نتیجه‌ای مشابه برای ۴ـ خمینه‌های همبند سادهِ هموار و بسته وجود دارد.

قضیه ([۵]، [۳]). دو ۴ـ خمینهٔ همبند سادهٔ دیفرانسیل‌پذیر بسته همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر مشخصهٔ اویلر، نشانک و نوع آنها (زوج یا فردبودن) یکسان باشند.

در اینجا نوع زوج است اگر و تنها اگر همهٔ عددهای خودتقاطعی، زوج باشند، این قضیه نتیجهٔ بسیار عمیقی است که بر پایهٔ قضایای دشواری که فریدمن و دانلدسن آنها را مستقلاً ثابت کرده‌اند، استوار است. فریدمن ۴ـ خمینه‌های توپولوژیک همبند ساده را برحسب صورت تقاطعی و یک ناوردا با مقادیر متعلق به $\mathbb{Z}/2$، که ناوردای کربی‌ـ سیینمان[1] نام دارد، رده‌بندی کرد. این ناوردا برای خمینه‌های هموار و خمینه‌هایی که با S^4 هم‌ارز هوموتوپیک هستند، صفر است. بنابراین، فریدمن حالت توپولوژیک ۴ بعدی حدسیهٔ پوانکاره را ثابت می‌کند: هر خمینهٔ ۴ بعدی هوموتوپیک با S^4، با S^4 همسانریخت است. هر صورت دوخطی متقارن تک‌پیمانه‌ای[2] صورت تقاطعی یک ۴ـ خمینهٔ توپولوژیک همبند ساده و بسته است، و رده‌بندی چنین صورتهایی شناخته‌شده نیست. لیکن برای خمینه‌های هموار، دانلدسن نظریهٔ پیمانه‌ای[3] را به‌کار می‌برد و نشان می‌دهد صورتهای تقاطعی بسیار خاص‌اند، و بر پایهٔ نتایجی کلاسیک، برحسب رتبه (معادل با مشخصهٔ اویلر)، نشانک، و نوع رده‌بندی می‌شوند.

برخلاف رویه‌های ریمانی، مشابه نتیجهٔ رده‌بندی با تقریب دیفرانسیل‌ریختی، در بعد ۴ کاملاً متفاوت است. ۴ـ خمینه‌های همبند سادهٔ متعدد M وجود دارند که ساختار هموار غریب[4] دارند، یعنی خمینهٔ دیگری وجود دارد که با M همسانریخت است لیکن با M دیفرانسیل‌ریخت نیست. اولین مثال توسط دانلدسن پیدا شد [۴]. بعداً، با به‌کارگیری شیوه‌های وی، نشان داده شد که ۴ـ خمینه‌های همبند سادهٔ زیادی وجود دارند که تعداد ساختارهای هموار روی آنها نامتناهی است، مانند رویهٔ $K3$ $\{\chi \in \mathbb{CP}^3 | \sum \chi_i^4 = 0\}$ (که رویه‌ای مختلط است، لذا بعد حقیقی آن ۴ است).

مسألهٔ ذیل یکی از مسائل حل‌نشدهٔ مهم در توپولوژی دیفرانسیل است: آیا ۴ـ خمینهٔ بسته‌ای بدون ساختار غریب وجود دارد؟ جالب‌ترین مثالها صفحهٔ تصویری مختلط $\mathbb{CP}^2$ یا ۴ـ کرهٔ S^4 است. اگر S^4 ساختار هموار یکتا داشته باشد، این حدسیهٔ پوانکاره در حالت ۴ بعدی و هموار است، که می‌توان آن را به‌صورت ذیل فرمول‌بندی کرد: هر ۴ـ خمینهٔ همبند سادهٔ هموار و بسته با مشخصهٔ اویلر ۲ دیفرانسیل‌ریخت است با S^4 (عدد بتی دوم آن خودبه‌خود صفر است لذا نشانک صفر است؛ در نتیجه طبق قضیهٔ بالا با S^4 همسانریخت است).

وجود تعدادی نامتناهی ساختار هموار روی خمینهٔ بسته چیزی است که منحصراً در بعد ۴ اتفاق می‌افتد. در همهٔ ابعادِ دیگر این عدد متناهی است. این نتیجه ارتباط نزدیکی با Hauptvermutung [حدسیهٔ اصلی] (در توپولوژی هندسی) دارد، که می‌گوید اگر یک خمینهٔ توپولوژیک مثلث‌بندی داشته باشد این مثلث‌بندی با تقریب تظریف، یکتاست. این مطلب درست نیست (اولین مثالهای نقض را میلنر به‌دست داد [۱۷])، ولی در بعد بزرگ‌تر از ۴ کار کربی و سیینمان در مورد حدسیهٔ اصلی [۱۳] نشان می‌دهد که هر خمینهٔ توپولوژیک از بعد بیشتر از ۴ حداکثر تعداد متناهی ساختار تکه‌ای‌ـ خطی دارد. با استفاده از نظریهٔ جراحی، می‌توان نشان داد که هر خمینهٔ تکه‌ای‌ـ خطی از بعد بیش از ۴ حداکثر تعدادی متناهی ساختار هموار دارد. با ترکیب این دو نتیجه، می‌توان دید که هر خمینهٔ توپولوژیک از بعد بیش از ۴ حداکثر تعدادی متناهی ساختار هموار دارد.

در همین نتیجهٔ اخیر، رده‌بندی ساختارهای هموار روی کره‌ها نقشی اساسی ایفا می‌کند (در مورد اولین مثالهای میلنر، ر.ک. [۱۵]؛ در مورد رده‌بندی کلی در بعد بزرگ‌تر از ۴ توسط کرور و میلنر، ر.ک. [۱۲]). مفهوم نشانک و به‌ویژه قضیهٔ نشانک همان‌قدر که ابزارهای اساسی برای وجود ساختارهای غریب روی کره‌ها هستند، ابزارهایی برای رده‌بندی این ساختارها نیز می‌باشند. ما این را در مورد وجود نشان می‌دهیم. میلنر خمینه‌های هموار فشرده‌ای مانند W می‌سازد که مرز آنها با S^{4n-1} همسانریخت باشد. وی سپس اجتماع W را با مخروط رویِ مرز آن در نظر می‌گیرد. اگر این مرز با S^{4n-1} همسانریخت باشد، آنگاه این یک خمینهٔ هموار است و لذا می‌توان نشانک آن را به کمک قضیهٔ نشانک برحسب Lـ چندجمله‌ای‌ها محاسبه کرد. به‌استثنای عبارت ردهٔ بالای پونتریاگین یعنی ردهٔ p_n، بقیه عبارت Lـ چندجمله‌ای‌ها را می‌توان برحسب رده‌های پونتریاگین W محاسبه کرد. بنابراین می‌توان فرمول نشانک را برای محاسبهٔ عبارات در p_n در Lـ چندجمله‌ای به‌کار برد. ضریب p_n در Lـ چندجمله‌ای عددی است گویا،

$$\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}(-1)^{n-1}b_{2n}$$

که در آن b_{2n} عدد برنولی است. اگر مرز W با S^{4n-1} دیفرانسیل‌ریخت باشد، این واقعیت که p_n عددی صحیح است، نوعی همنهشتی بین تفاضل نشانک اجتماع W با مخروط روی مرز و عبارتهای دیگر در Lـ چندجمله‌ای، نتیجه می‌دهد (ما به مثال ویژهٔ ساده‌ای خواهیم پرداخت). اگر این همنهشتی برقرار نباشد، مرز W با کره دیفرانسیل‌ریخت نیست. با این روال، می‌توان مثالهایی از ساختارهای غریب روی کره‌هایی از بعد $4n-1$، $n > 1$ تولید کرد (همچنین ر.ک. [۱۷]).

1. Kirby-Siebenman invariant

۲. صورت دوخطی را تک‌پیمانه‌ای گویند هرگاه دترمینان آن ± 1 باشد.ـ م.

3. gauge theory 4. exotic smooth structure

حال می‌خواهیم فرایند «لوله‌کشی» [۹] را مشابه شیوهٔ ساخت مورد استفادهٔ میلنر به‌کار ببریم تا مثالهایی صریح از کره‌های با ساختار غریب و هم‌زمان، شیوهٔ ساخت یک خمینهٔ توپولوژیک بدون ساختار هموار ارائه کنیم (وجود چنین خمینه‌هایی را اولین بار کِرور ثابت کرد [۱۱]). گراف E_8 را در نظر می‌گیریم:

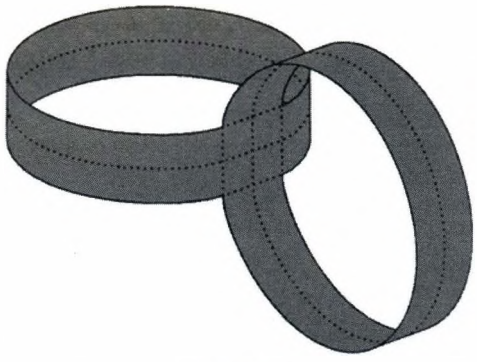


با به‌کاربردن E_8، خمینه‌ای می‌سازیم با مرزِ ۱۲ بعدی، به این ترتیب که برای هر یال یک نسخهٔ کلاف قرصِ کلاف مماس S^6 را در نظر گرفته و طبق دستور زیر آنها را به‌هم می‌چسبانیم. اگر دو رأس توسط یالی به‌هم وصل شده باشند، شکل بدیهی‌شدهٔ کلاف قرص روی قرص D^6 از S^6 را در نظر می‌گیریم تا نشانندهٔ $D^6 \times D^6$ در کلاف قرص حاصل شود که در آن مؤلفه اول به S^6 و مؤلفهٔ دوم به تارها نگاشته می‌شوند. سپس (x, y) در حاصلضرب اول را با (y, x) در حاصلضرب دوم یکی می‌کنیم، نتیجه یک خمینهٔ ۱۲ بعدی فشردهٔ $W(E_8)$ است با مرز و گوشه‌ها، که می‌توان آن را هموار کرد. این خمینه بنا به ساخت خود با حاصلضرب گوه‌ای هشت نسخهٔ S^6 هم‌ارز هوموتوپیک است. با ملاحظهٔ وضعیت عمومی، گروه بنیادی آن بدیهی است. با استفاده از ویژگی تک‌پیمانه‌ای‌بودن (به این معنی که صورت تقاطعی، دترمینانی برابر ± 1 دارد) در مورد صورت E_8، از رشتهٔ میِر-ویتوریس[1] نتیجه می‌شود که مرز $W(E_8)$ یک هوموتوپیِ کره است. با استفاده از بخشی از حدسیهٔ پوانکاره که توسط اسمیل ثابت شده است [۲۲]، نتیجه می‌گیریم که این مرز با S^{11} همسانریخت است. حال قضیهٔ نشانک را به‌کار می‌بریم تا نشان دهیم مرز فوق با S^{11} دیفرانسیل‌ریخت نیست. اگر دیفرانسیل‌ریختی $f : \partial W(E_8) \to S^{11}$ وجود داشت، می‌توانستیم $M := W(E_8) \cup_f D^{12}$ را در نظر بگیریم و خمینهٔ همواری به‌دست آوریم که مانستگی آن بدیهی است مگر در درجه‌های ۰، ۶، و ۱۲. صورت تقاطعی این خمینه بنا به شیوهٔ ساخت آن همان صورت E_8 است، که نشانک آن برابر ۸ است. حال قضیهٔ نشانک را به‌کار می‌بریم تا نتیجه بگیریم

$$8 = \frac{62}{945}\langle p_3(M), [M]\rangle$$

که تناقض است (توجه کنید که تنها ردهٔ پونتریاگین که می‌تواند نابدیهی باشد $p_3(M)$ است، که یک ردهٔ همانستگی انتگرال[2] است). لذا $\partial W(E_8)$ یک کرهٔ غریب است. اگر به‌جای دیفرانسیل‌ریختی، همسانریختی به‌کار ببریم، یک خمینهٔ توپولوژیک M به‌دست می‌آید که با همان استدلال بالا نمی‌تواند ساختار هموار داشته باشد.

1. Mayer-Vietoris 2. integral cohmology class



شکل ۳

استفاده از گراف E_8 از این واقعیت الهام گرفته شده که حاصل از تکین‌زدایی $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ در نقطهٔ $(0, 0, 0)$ هشت خم گویای ناتکین با عدد خودتقاطعی -2 که رفتار تقاطعی آن توسط E_8 مشخص می‌شود تشکیل یافته است.

قضیهٔ اندیس اتیا-سینگر و گوناهای دیگر

به استثنای نشانک، طرفهای چپ فرمولهای مربوط به‌گونا طبیعت آنالیزی دارند که به‌وسیلهٔ بعدهای بعضی از فضاهای برداری توابع یا صورتهای دیفرانسیل مشخص می‌شوند. در واقع نشانک را نیز می‌توان از طریق نظریهٔ هاج[1] به‌صورت یک ناوردای آنالیزی تعبیر کرد که اندیس یک عملگر دیفرانسیل، به‌نام عملگر نشانک است. بنابراین، قضیهٔ نشانک یک قضیهٔ اندیس است که اندیس یک عملگر دیفرانسیل بیضوی را با عبارتهای توپولوژیک بیان می‌کند.

طی دههٔ ۱۹۶۰، اتیا و سینگر [۱] یک قضیهٔ کلی اندیس برای عملگرهای دیفرانسیل بیضوی روی خمینه‌های هموار ثابت کردند که مثلاً قضیهٔ نشانک را تعمیم می‌دهد. علاوه‌بر نشانک، مهم‌ترین عملگرها عبارت‌اند از عملگر لاپلاس که اندیس آن مشخصهٔ اویلر است، و عملگر دیراک روی خمینه‌ای با ساختار اسپین. جنبهٔ توپولوژیک فرمول اندیس برای عملگر دیراک، $\hat{A}$-گونا، در [۸] بررسی شد. در دههٔ ۱۹۸۰ اُشانین[2] و ویتن گوناهایی بسیار جالب برای خمینه‌های اسپین و خمینه‌های ریسمان، به‌ترتیب به‌نامهای گونای اوشانین و گونای ویتن تعریف کردند. ویژگی برجستهٔ این گوناها این است که مقادیر خود را در حلقهٔ صورتهای پیمانه‌ای می‌گیرند (برای مثال، مقایسه کنید با [۱۰]). می‌توان حدس زد که این گوناها فقط سایه‌ای از نظریه‌های مانستگی (همانستگی) جدیدی هستند که به همانستگی بیضوی مربوط می‌شوند. و بالاخره، انتظار می‌رود همانستگی بیضوی نقشی اساسی در نظریهٔ اندیس فضای طوقهٔ یک خمینه ایفا کند، همانند نقشی که نظریهٔ K در نظریهٔ اندیس خمینه‌های هموار داشته است.

مراجع

1. Michael F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators. I, *Ann. of Math.* (2) **87** (1968), 484-530; The index of elliptic operators. III, *Ann. Math.* (2) **87** (1968), 546-604.
2. Armand Borel and Jean-Pierre Serre, Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), 97-136.

1. Hodge theory 2. Ochanine

3. S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four-dimensional topology, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 279-315.

4. _____, Irrationality and the h-cobordism conjecture, *J. Differential Geom.* **26** (1987), 141-168.

5. Michael Hartley Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357-453.

6. André Gramain. *Topologie des surfaces*, Collection SUP: "Le Mathématicien", 7, Presses Universitaires de France, Paris, 1971.

7. Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

8. F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 9, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

9. _____, *Gesammelte Abhandlugen. Band I, Zur Theorie der Mannigfaltigkeiten*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

10. Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger, and Rainer Jung, *Manifolds and modular forms* (translated by Peter S. Landweber), Aspects of Mathematics, E 20, Vieweg, Wiesbaden, 1992.

11. M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.* **34** (1960), 257-270.

12. Michel A. Kervaire and John W. Milnor, Groups of homotopy spheres. I, *Ann. of Math.* (2) **77** (1963), 504-537.

13. Robion C. Kirby and Laurence C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Annals of Mathematics Studies, 88, Princeton University Press, Princetion, NJ, and University of Tokyo Press, 1977.

14. K. Kodaira and D. C. Spencer, On arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 641-649.

15. John W. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.* (2) **64** (1956), 399-405.

16. _____, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 505-521.

17. _____, *Collected papers of John Milnor. III. Differential topology*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

18. I. R. Porteous, Todd's canonical classes, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I*, (1969/70), pp. 308-312. Lecture Notes in Math., Vol. 192, Springer, Berlin, 1971.

19. T. Rado. Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Szeged* **2** (1925), 101-121.

20. B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 101-155.

21. G. Roch. Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), 372-376.

22. Stephen Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.* (2) **74** (1961), 391-406.

23. René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 17-86.

24. J. A. Todd, The arithmetical invariants of algebraic loci, *Proc. London Math. Soc.* (2), Ser. 43, 1937, 190-225.

25. Bartel. L. van der Waerden, Birational invariants of algebraic manifolds, *Acta Salmanticentsia. Ciencias: Sec. Mat.*, no. 2 (1947); Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* **51** (1948), 502-523.

******

• Friedrich E. P. Hirzebruch and Matthias Kreck, "On the concept of genus in topology and complex analysis", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **56** (2009) 713-719.

* فریدریش هیرتسه‌بروخ، استاد بازنشستهٔ مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک، بن، آلمان
hirzebruch@mpin-bonn.mpg.de

** ماتیاس کرک، استاد مؤسسهٔ پژوهشی ریاضیات هاوسدورف در دانشگاه بن، آلمان
kreck@him.uni-bonn.de

رهیافتی مقدماتی به گروه هیولا•

کریستوفر سیمونز*

ترجمهٔ محمدرضا درفشه

۱. مقدمه

یافتن گروه سادهٔ متناهی هیولای فیشر-گریس $\mathbb{M}$ از مرتبهٔ
۸۰۸۰۱۷۴۲۴۷۹۴۵۱۲۸۷۵۸۸۶۴۵۹۹۰۴۹۶۱۷۱۰۷۵۷۰۰۵۷۵۴۳۶۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰
یکی از کشفیات چشمگیر و پررمز و راز پنجاه سال گذشته است. متأسفانه یادگیری رهیافتهای موجود به این موضوع بسیار مشکل است. در این مقاله رهیافتی نسبتاً مقدماتی عرضه می‌شود. ما با تشریح طرز ساخت کوچک‌ترین گروه سادهٔ متناهی ناآبلی (از مرتبهٔ ۶۰)، نشان می‌دهیم که این طرز ساخت خیلی شبیه ساختن گروه $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ است.

در بخش ۲، قبل از اینکه بحث اصلی خود را شروع کنیم، به بحث مختصری دربارهٔ هیولا، هم به عنوان یک گروه سادهٔ متناهی و هم از لحاظ خواص شگفت‌انگیزش می‌پردازیم. حسن انجام چنین کاری این است که خوانندگانی که فقط آشنایی اندکی با هیولا دارند درک بهتری از نقش آن در ریاضیات به‌دست می‌آورند. این بخش، علی‌رغم کوتاه بودنش، قلمرو وسیعی را در بر می‌گیرد؛ بنابراین خواننده را به منابع دیگری برای مطالعات بیشتر ارجاع می‌دهیم (ر.ک. [۱]، [۲]، یا [۶]). در بخش ۳ با گراف چهاروجهی شروع می‌کنیم و از گروههای کاکستر و روابط اضافی معینی استفاده می‌کنیم تا یک نمایش گروهی برای گروه سادهٔ متناهی A_5 به‌دست آوریم. سپس در بخش ۴ می‌بینیم که این روش، وقتی دربارهٔ گرافهای متفاوتی اعمال می‌شود نه تنها ما را به گروه $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ بلکه به گروههای سادهٔ متناهی دیگری نیز، هدایت می‌کند.

۲. نظری اجمالی به هیولا

نخستین اشارات به وجود هیولا ضمن جستجوی فشردهٔ ریاضیدانان برای یافتن گروههای سادهٔ متناهی در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ مطرح شد و این همزمان با تلاشهایی بود که برای رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی صورت می‌گرفت. در واقع، تنها پس از اینکه این رده‌بندی اساساً به انجام رسید، رابرت گریس وجود هیولا را ثابت کرد. طبق این رده‌بندی، هر گروه سادهٔ متناهی متعلق به یکی از پنج خانوادهٔ زیر است:

(۱) گروههای دوری C_p که p یک عدد اول است؛

(۲) گروههای متناوب A_n که $n \geq 5$ (A_n گروه تمام جایگشتهای زوج روی n حرف است؛ A_5 که مرتبه‌اش ۶۰ است، کوچک‌ترین این گروههاست)؛

(۳) گروههای ماتریسی $L_n(q)$، $O_n^{\pm}(q)$، $U_n(q)$ و $Sp_n(q)$ (اینها گروههای ساده‌ای هستند که از گروههای ماتریسی nبعدی خطی، متعامد، یکانی، و همتافته روی میدانهای متناهی مرتبهٔ q حاصل می‌شوند)؛

(۴) گروههای استثنایی نوع لی؛

(۵) بیست‌وشش گروه «پراکنده» (شامل هیولا).

وجود اولین چهار خانوادهٔ نامتناهی بالا با استفاده از نظریهٔ اعداد، نظریهٔ مقدماتی گروههای جایگشتی، جبرخطی، و هندسهٔ لی کاملاً قابل فهم است. خانوادهٔ پنجم شامل ۲۶ گروه سادهٔ متناهی است که به هیچ‌کدام از خانواده‌های دیگر تعلق ندارند. هیولا بزرگ‌ترین گروه در میان این گروههای پراکنده است، و نوزده گروه پراکندهٔ دیگر به عنوان تصویرهای همریخت زیرگروههای هیولا ظاهر می‌شوند. علی‌رغم پژوهشهای بسیار گسترده، گروههای پراکنده هنوز هم اسرارآمیزند، بنابراین، بهتر شناختن هیولا باعث می‌شود شناخت ما از گروههای متناهی در حالت کلی بهتر شود. اثباتی از رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی که حصول آن در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ اعلام شد طولانی‌تر از برهانهای سنتی در ریاضیات است. این اثبات شامل هزاران صفحه ریاضیات مشکل و تخصصی است، که همهٔ آن چاپ نشده است. برای رفع این نقصان، ریچارد لیونز[1] و رانلد سالومن[2] رهبری یک برنامهٔ بلندپروازانه و فعال را به‌عهده گرفته‌اند تا برهان تجدیدنظرشده و کاملی از رده‌بندی ارائه دهند. در زمان نوشته شدن این مقاله، مایکل اشباخر[3] و استیون اسمیت در حالت تجدید نظر در یک پیش‌چاپ ۱۱۹۶ صفحه‌ای دربارهٔ حالت به اصطلاح شبه‌نازک[4] هستند تا شکافی را که

1. Richard Lyons 2. Ronald Solomon 3. Michael Aschbacher
4. quasi-thin

در اثبات اولیه وجود دارد پرکنند. با وجود آنکه درستیِ رده‌بندی چندان محل تردید نیست، علاقهٔ شدیدی وجود دارد که اثبات جدید و کاراتری به‌دست آید.

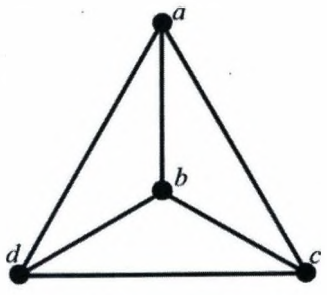
اما، توجه بیش از حد به هیولا به علت نقش آن در نظریهٔ گروهها نیست بلکه بیشتر به خاطر پدیدهٔ معجزه‌آسای «مون‌شاین»[1] در مورد آن است. در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، جان مکای[2] ارتباط عجیبی بین جدول سرشت هیولا و توابع پیمانه‌ای یافت. جدول سرشت هیولا یک جدول ۱۹۴ × ۱۹۴ متشکل از اعداد مختط است که اثرهای نمایشهای تحویل‌ناپذیر آن روی رده‌های مزدوجی هیولا هستند. سه عدد اول در اولین ستون (متناظر با ردهٔ مزدوجی همانی) جدول عبارت‌اند از: ۱، ۱۹۶۸۸۳، و ۲۱۲۹۶۸۷۶. مکای این پرسش را مطرح کرد که آیا برابری ۱۹۶۸۸۴ = ۱۹۶۸۸۳ + ۱ ارتباط واقعی بین جدول سرشت هیولا و تابع پیمانه‌ای بیضوی زیر برقرار می‌کند یا نه:

$$j(z) = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

(که $q = e^{2\pi iz}$). اگرچه در وهلهٔ اول باورکردنی نبود، جان کانوی[3]، سایمن نورتن[4]، و جان تامپسن[5] نشان دادند که چنین ارتباطی وجود دارد. اصطلاح «مون‌شاین» هم به جنبهٔ رمزآمیز، یا تاریک و روشن این مفهوم، و هم منشأ «قاچاقی» آن در عددشناسی[6] اشاره دارد.[7] نه تنها به‌خاطر ارتباط بین اولین ستون جدول سرشت و تابع پیمانه‌ای بیضوی (توجه کنید که داریم ۲۱۴۹۳۷۶۰ = ۲۱۲۹۶۸۷۶ + ۱۹۶۸۸۳ + ۱ و روابط مشابه برای ضرایب مرتبهٔ بالاتر j وجود دارد)، بلکه همچنین با بررسی ستونهای دیگر، ارتباطی فوق‌العاده و قوی بین رده‌های مزدوجی هیولا و رده‌ای جالب از توابع پیمانه‌ای آشکار می‌شود. پدیدهٔ به‌اصطلاح مون‌شاین دو زمینهٔ ریاضی را که ظاهراً ارتباطی با هم ندارند به یکدیگر مربوط می‌کند. در سال ۱۹۹۸، ریچارد بورچردز به‌خاطر تحقیقاتش دربارهٔ اثبات حدسهای مربوط به مون‌شاین موفق به دریافت نشان فیلدز شد. به علاوه، وی ارتباط بین هیولا و توابع پیمانه‌ای را با استفاده از اطلاعاتی دربارهٔ جبرهای عملگرهای رأسی[8] در مبحث نظریهٔ میدانهای همدیس ثابت کرد. بورچردز به‌جای ساده‌تر کردن موضوع، با نشان دادن پیوندهای مخفی بین سه زمینهٔ جداگانهٔ ریاضیات: گروههای سادهٔ متناهی، توابع پیمانه‌ای، و جبرهای عملگرهای رأسی باعث شد که توجه به هیولا بسیار افزایش یابد.

هیولا هم به‌خاطر نقشی که درگروههای متناهی دارد و هم به دلیل ارتباط آن با حدسهای مربوط به مون‌شاین، امروز جایگاه رفیعی در ریاضیات دارد. در بقیهٔ این مقاله یک راه مقدماتی برای دسترسی به این مفهوم که به هیچ‌وجه مقدماتی نیست، ارائه می‌دهیم. امیدواریم که این راه، یا روشهای سادهٔ دیگر، سرانجام به توصیف رضایت‌بخش‌تری از موضوع مورد بحث ما منجر شود.

1. moonshine 2. John McKay 3. John H. Conway
4. Simon Norton 5. John Thompson
۶. numerology؛ مبحثی مبتنی بر اعتقاد به اسرارآمیز بودن اعداد. ـ م.
۷. کلمهٔ moonshine در زبان انگلیسی هم به‌معنای «مهتاب» و هم به‌معنای «مشروب یا به‌طور کلی جنس قاچاق» است. پدیدهٔ مون‌شاین نخست به‌صورت رابطه‌های اسرارآمیز عددی به‌نظر می‌رسید. ـ م.
8. vertex operator algebras



شکل ۱ نمودار چهار رأسی K_4

۳. از گراف چهاروجهی تا A_5

گروه چهار وجهی کاکستر. بحث خود دربارهٔ گروههای سادهٔ ناآبلی را با مطالعهٔ گراف چهاروجهی K_4 آغاز می‌کنیم. این گراف، گرافی کامل با چهار رأس است که آن را نمودار چهار رأسی می‌نامیم (شکل ۱).

اکنون می‌خواهیم گروهی به نمودار چهار رأسی نسبت دهیم. اگر گروه تقارنی[1] این گراف را در نظر بگیریم، در می‌یابیم که این گروه با گروه متقارن S_4 مرتبهٔ ۲۴ = !۴ یکریخت است، که البته آنقدر کوچک است که نمی‌تواند هیچ گروه سادهٔ متناهی ناآبلی را در بر بگیرد. برای اینکه چیزی به‌دست آوریم باید روش دیگری برای نسبت دادن یک گروه به نمودار چهار رأسی پیدا کنیم. این عمل را با در نظر گرفتن گروه کاکستر گراف انجام می‌دهیم. ابداع نظریهٔ گروههای کاکستر به اوایل دههٔ ۱۹۳۰ برمی‌گردد (یک مرجع عالی دربارهٔ گروههای کاکستر، [۴] است). گروه کاکستر یک گراف عبارت است از گروهی که با عناصر (نابدیهی) r_i که به رأسهای گراف نسبت داده می‌شود پدید می‌آید و این عناصر در روابط زیر صدق می‌کنند:

(i) $r_i^2 = 1$ به‌ازای هر رأس i؛

(ii) $(r_ir_j)^2 = 1$ وقتی که رئوس i و j توسط یالی به هم متصل نباشند؛

(iii) $(r_ir_j)^3 = 1$ وقتی که رئوس i و j توسط یالی به هم متصل باشند.

می‌توانیم گروه کاکستر یک گراف nرأسی را بزرگ‌ترین گروهی در نظر بگیریم که با n برگردان[2] (عضو مرتبهٔ ۲) متمایز تولید می‌شود به طوری که حاصلضرب دو برگردان متناظر با دو رأس نامتصل به‌هم از مرتبهٔ ۲ و حاصلضرب دو برگردان متناظر با دو رأس متصل از مرتبهٔ ۳ است.

هر گروه G، مانند یک گروه کاکستر، که طول روابط آن عددی زوج باشد (بنا به تعریف طول یک رابطه عبارت است از تعداد مولدهایی ــ با احتساب تکرارهاــ که در آن رابطه موجود است.) دارای زیرگروهی نرمال با شاخص ۲ می‌باشد که شامل عناصری است که بتوان آنها را به‌صورت حاصلضرب تعداد زوجی از مولدها نوشت. این زیرگروه را زیرگروه زوج G می‌نامیم و با $\frac{1}{2}G$ نمایش می‌دهیم.

اکنون فرض کنید G گروه کاکستر متناظر با نمودار ۴ رأسی است، گروهی که به علل روشن به گروه کاکستر چهاروجهی مشهور است. بنابراین، G با چهار برگردان تولید می‌شود، که در آن حاصلضرب هر دو مولد متمایز از مرتبهٔ ۳ است. متأسفانه، G یک گروه نامتناهی است. در واقع، این گروه حتی شامل عناصری از مرتبهٔ نامتناهی است. با یافتن برخی از این عناصر به کار خود ادامه می‌دهیم. برای انجام چنین کاری ابتدا زیرگروههای نامتناهی معین از G را در نظر می‌گیریم.

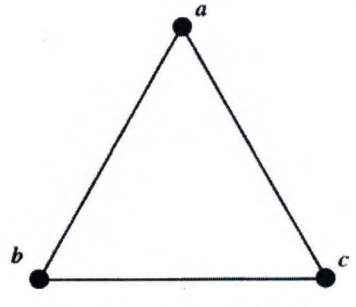
1. symmetry group 2. involution

در گراف Γ، nبر آزاد[1] در Γ را به‌صورت یک دور به طول n تعریف می‌کنیم به‌طوری که هر رأس در این دور فقط یک‌بار ظاهر شود و دقیقاً به دو رأس دیگر در این دور متصل باشد. nبر آزاد ماکسیمال در Γ عبارت است از یک nبر آزاد به‌طوری که Γ شامل mبر آزادی با شرط $m > n$ نباشد.

برای نمودار ۴ رأسی، nبرهای آزاد ماکسیمال عبارت‌اند از وجوه مثلثی چهاروجهی. تذکر می‌دهیم که این ۳برها تحت گروه تقارنی نمودار ۴ رأسی با همدیگر هم‌ارزند. اکنون یک ۳بر دلخواه را انتخاب می‌کنیم، مثلاً وجهی که رئوس آن a، b، و cاند (شکل ۲) و گروه کاکستر H را که توسط برگردانهای r_a، r_b، و r_c، متناظر با رئوس این ۳بر ماکسیمال پدید می‌آید در نظر می‌گیریم. خوشبختانه درک ساختار H مشکل نیست. در واقع در نظریهٔ کاکستر ثابت می‌شود که همهٔ گروههای کاکستر با گروههایی که توسط تقارنهای محوری تولید می‌شوند یکریخت‌اند، بنابراین کافی است ببینیم H به عنوان یک گروه تقارنی محوری چگونه عمل می‌کند. نحوهٔ عمل این گروه در صفحهٔ دوبعدی بسیار زیباست.

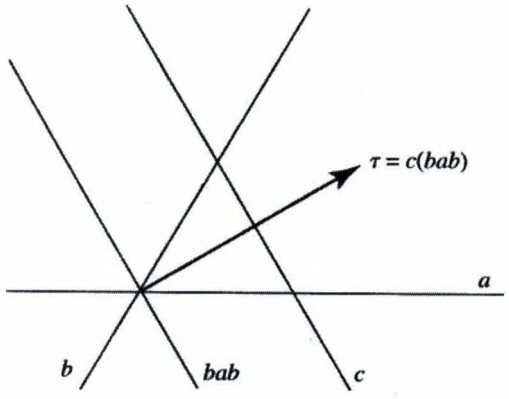
در اینجا برای سهولت در نوشتن، عناصر r_a، r_b، و r_c را به ترتیب با صورتهای اختصاری a، b، و c نمایش می‌دهیم. در این صورت، این عناصر متناظرند با تقارنهای محوری (در یک صفحهٔ ۲بعدی) نسبت به محورهای نشان داده‌شده در شکل ۳. (توجه داشته باشید که ما از یک حرف برای نشان دادن رأس، مولد گروه کاکستر، یک خط در صفحهٔ دوبعدی، و تقارن در صفحه نسبت به آن خط، استفاده می‌کنیم.) می‌دانیم که این تقارنها روابط داده‌شدهٔ کاکستر را برآورده می‌سازند. تقارنها به‌طور طبیعی از مرتبهٔ ۲ هستند، و چون زاویهٔ بین هر دو تا از خطوط a، b، و c مساوی ۶۰ درجه است، حاصلضرب هر دو تقارن محوری دلخواه یک دوران با زاویهٔ ۱۲۰° حول نقطهٔ برخورد محورهای تقارن است، و در نتیجه از مرتبهٔ ۳ می‌باشد.

اکنون با در نظرگرفتن مزدوج تقارن a با b عضو جدیدی از H می‌سازیم. این عنصر عبارت است از bab^{-1}، که می‌توان آن را به صورت bab نوشت زیرا $b = b^{-1}$. اگر تصویر a تحت تقارن b را در نظر بگیریم آنگاه خط جدیدی حاصل می‌شود که آن را در شکل۳ با bab نمایش می‌دهیم. عنصر bab از گروه به‌عنوان تقارن نسبت به همین محور عمل می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم τ عنصری حاصل از ترکیب تقارنهای bab و c است. یعنی $\tau = c(bab) = cbab$. با آزمایش عمل τ بر صفحه، در می‌یابیم که این عنصر تمام نقاط صفحه را در جهتی که در شکل۳ نمایش داده‌ایم منتقل می‌کند. از خواننده می‌خواهیم که درستی ادعاهای فوق را با دنبال کردن اثر نقاط تحت تقارنهای یادشده بررسی کند.



شکل ۲ یک ۳بر ماکسیمال در K_4

1. free n-gon



شکل ۳ گروه تقارنی محوری H

انتقالها در صفحه از مرتبهٔ نامتناهی‌اند، پس $o(\tau) = \infty$. چون ما با گروههای متناهی سروکار داریم، باید کاری در مورد τ انجام دهیم. یادآور می‌شویم که تعداد نامتناهی انتقال در H وجود دارد و این انتقالها یک شبکهٔ یکریخت با $\mathbb{Z}^2$ تشکیل می‌دهند. انتقال در H انتقال اولیه نامیده می‌شود (نسبت به H) اگر مساوی توانی بزرگ‌تر از ۱ از انتقال دیگری در H نباشد.

یک گروه بسیار متناهی. برای رسیدن به گروهی از مرتبهٔ متناهی، ساده‌ترین راه برخورد با عنصر τ که مرتبه‌اش نامتناهی است این است که اصرار ورزیم مرتبهٔ آن مساوی یک است! هرچند این موضوع در وهلهٔ اول ممکن است نامعقول به‌نظر برسد، اما چیزی که در ذهن ما وجود دارد این است که یک رابطهٔ جدید یعنی $\tau = 1$ را به H بیفزاییم. این عمل را تورم‌کاهی[1] انتقال می‌نامیم. چون تمام انتقالهای اولیه در H مزدوج‌اند، با این عمل تمامی انتقالها در H مورد تورم‌کاهی قرار می‌گیرند؛ بنابراین مهم نیست که چه τی خاصی انتخاب کنیم.

ضمناً یادآور می‌شویم که رابطهٔ $\tau = 1$ معادل $c = bab$ است. بنابراین با افزودن این رابطه به گروه $H = \langle a, b, c\rangle$ که توسط a، b، و c تولید می‌شود گروهی یکریخت با گروه متناهی کاکستر $\langle a, b\rangle$ حاصل می‌شود که توسط a و b تولید می‌گردد. گروه $\langle a, b\rangle$ مرکب از تقارنهای a، b، و bab و دورانهای ۰، ۱۲۰ و ۲۴۰ درجه حول نقطهٔ برخورد خطوطی است که a و b را تعیین می‌کنند. چنین گروهی با گروه دووجهی مرتبهٔ ۶، و در نتیجه با S_3 یکریخت است. در زمینه‌ای وسیع‌تر، چیز بسیار متفاوتی حاصل می‌شود.

می‌توانیم گروه جدید G_1 را گروهی تعریف کنیم که توسط مولدهای گروه کاکستر چهاروجهی G تولید می‌شود، و روابط حاکم بر آن عبارت‌اند از روابط کاکستر همراه با روابط تورم‌کاهی به این مضمون که انتقالهای τ حاصل از همهٔ چهار ۳بر آزاد ماکسیمال در K_4 از مرتبهٔ ۱ هستند. این تورم‌کاهی‌ها قدری شدیدتر از آن هستند که چیز جالبی از آنها به بار آید. گروه G_1 فقط دو عنصر دارد و زیرگروه زوج آن، $\frac{1}{2}G_1$، گروه بدیهی از مرتبهٔ ۱ است. برای ملاحظهٔ این مطلب توجه کنید که حاصل تورم‌کاهی عبارت است از $c = bab$ و $d = bab$ و از این رو $c = d$. همین طور تمام چهار برگردان تولیدکنندهٔ G_1 با هم مساوی‌اند.

1. deflating

کوچک‌ترین گروه سادهٔ ناآبلی. البته در فرایند تورم‌کاهی مجبور نبودیم اصرار کنیم که مرتبهٔ τ مساوی ۱ باشد. می‌توانستیم فقط لازم بدانیم که مرتبه‌اش یک عدد متناهی باشد. به عنوان مثال، می‌توانیم رابطهٔ $\tau^۲ = ۱$ را در نظر بگیریم. این عمل را تورم‌افزایی انتقال می‌نامیم. و باز، به علت اینکه تمام انتقالهای اولیه در H مزدوج‌اند، اثر این عمل این است که تمام انتقالهای H مورد تورم‌افزایی قرار می‌گیرند.

اکنون $G_۲$ را گروهی تعریف می‌کنیم که توسط مولدهای G تولید شود به‌طوری که روابط حاکم بر آن هم روابط کاکستر باشند و هم روابط تورم‌افزایی که ایجاب می‌کنند تمام انتقالهای τ که از ۳برهای آزاد ماکسیمال در $K_۴$ ناشی می‌شوند از مرتبهٔ ۲ باشند. این بار درمی‌یابیم که $G_۲$ دارای مرتبهٔ ۱۲۰ و با گروه متقارن روی ۵ حرف، $S_۵$، یکریخت است. زیرگروه زوج، $\frac{۱}{۲}G_۲$، با گروه متناوب روی ۵ حرف، $A_۵$، یکریخت است. البته $A_۵$ کوچک‌ترین گروه سادهٔ ناآبلی است.

ساختار $G_۲$ را می‌توان چنین دریافت که اگر a را به جایگشت (۱۵)، b را به (۲۵)، c را به (۳۵)، و d را به (۴۵) بنگاریم، آنگاه تصاویر a، b، c، و d گروه $S_۵$ را پدید می‌آورند و در تمام روابط خواسته‌شده در $G_۲$ صدق می‌کنند. به عنوان مثال،

$$\tau = cbab = (۳۵)(۲۵)(۱۵)(۲۵) = (۱۲)(۳۵)$$

در واقع از مرتبهٔ ۲ است. نتیجه می‌گیریم که $S_۵$ تصویر همریخت گروه $G_۲$ است. برای نشان دادن اینکه $G_۲$ با $S_۵$ یکریخت است، کافی است بررسی کنیم که $G_۲$ بزرگ‌تر از $S_۵$ نیست. به بیان دیگر ($|S_۵| = ۵! = ۱۲۰$) $|G_۲| \leq ۱۲۰$. اثبات این مطلب در بخش بعدی با استفاده از شمارش هم‌مجموعه‌ها انجام می‌شود. خواننده‌ای که علاقه‌ای به این نوع جزئیات فنی ندارد می‌تواند از اینجا به بخش ۴ برود.

شمارش هم‌مجموعه‌ها. بحث را از این مطلب شروع می‌کنیم که زیرگروه $\langle a, b\rangle$ از $G_۲$ مرتبه‌اش حداکثر ۶ است. اکنون زیرگروه $\langle a, b, c\rangle$ را در نظر می‌گیریم. از رابطهٔ $\tau^۲ = (cbab)^۲ = ۱$ نتیجه می‌گیریم

$$cbab = (cbab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}b^{-۱}c^{-۱} = babc.$$

با ضرب تساوی فوق از سمت چپ در b به‌دست می‌آوریم $cba = babcb$، و به‌نحو مشابه به‌دست می‌آوریم $cab = abaca$. با استفاده از این تساویها و روابط کاکستر، نتیجه می‌گیریم که هر واژه برحسب a، b، و c را می‌توان طوری بازنویسی کرد که اگر c در واژه ظاهر شود آنگاه فقط در یکی از دو مکان منتهی‌الیه سمت راست واژه قرار گیرد. بنابراین، تعداد هم‌مجموعه‌های راست $\langle a, b\rangle$ در $\langle a, b, c\rangle$ حداکثر چهار است: $\langle a, b\rangle ۱$، $\langle a, b\rangle c$، $\langle a, b\rangle ca$، و $\langle a, b\rangle cb$. پس ثابت می‌شود که $|\langle a, b, c\rangle| \leq ۴|\langle a, b\rangle| \leq ۲۴$.

اکنون گروه $G_۲ = \langle a, b, c, d\rangle$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روابط مشابه (با شروع از ۳برهای دیگر $K_۴$)، درمی‌یابیم که هر واژه برحسب a، b، c، و d را می‌توان طوری بازنویسی کرد که اگر d در آن ظاهر شود آنگاه فقط در مکان اول یا دوم از سمت راست واژه ظاهر گردد. در نتیجه $\langle a, b, c, d\rangle$ به حداکثر پنج هم‌مجموعهٔ راست $\langle a, b, c\rangle$ تجزیه می‌شود: $\langle a, b, c\rangle ۱$، $\langle a, b, c\rangle da$، $\langle a, b, c\rangle db$، $\langle a, b, c\rangle d$، و $\langle a, b, c\rangle dc$. بنابراین $|G_۲| \leq ۵|\langle a, b, c\rangle| \leq ۱۲۰$ و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

خانوادهٔ گروههای سادهٔ متناوب. در واقع، اگر $n \geq ۴$ و با K_n، یعنی گراف کامل با n رأس $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، شروع کنیم، آنگاه گروه تورم‌فزودهٔ $G_۲^{(n)}$ با $S_{n+۱}$ و زیرگروه زوج $\frac{۱}{۲}G_۲^{(n)}$ با گروه متناوب سادهٔ $A_{n+۱}$ یکریخت است. این مطلب را می‌توان با بسط استدلال پیشین ثابت کرد. با نسبت دادن جایگشتهای $(۱, n+۱)$، $(۲, n+۱)$، ...، $(n, n+۱)$ به رئوس K_n، به‌سادگی در می‌یابیم که $S_{n+۱}$ تصویر همریخت $G_۲^{(n)}$ است. سپس لازم است ثابت کنیم که $|G_۲^{(n)}| \leq (n+۱)! (= |S_{n+۱}|)$. اثبات این مطلب نیز با استقرا روی n انجام می‌شود. قبلاً حالت $n = ۴$ را بررسی کرده‌ایم. با فرض $|G_۲^{(n)}| \leq (n+۱)!$، گراف K_n را با افزودن رأس جدید $a_{n+۱}$ به $K_{n+۱}$ بسط می‌دهیم، وبا استدلالی مشابه استدلال فوق ثابت می‌کنیم که هر واژهٔ برحسب $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n+۱}$ را که شامل $a_{n+۱}$ باشد می‌توان چنان بازنویسی کرد که $a_{n+۱}$ فقط در یکی از دو مکان اول از سمت راست واژه ظاهر شود، که این‌هم بدان معناست که $G_۲^{(n+۱)}$ به حداکثر $n+۲$ هم‌مجموعهٔ راست نسبت به $G_۲^{(n)}$ تجزیه می‌شود. بنابراین

$$|G_۲^{(n+۱)}| \leq (n+۲)|G_۲^{(n)}| \leq (n+۲)(n+۱)! = (n+۲)!$$

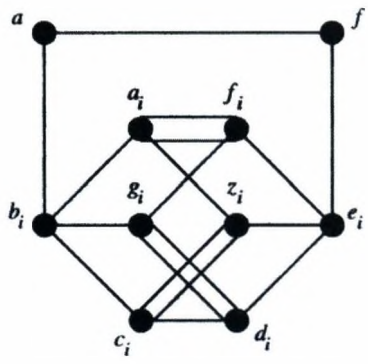
و ادعا ثابت می‌شود.

۴. هیولا

نمودار ۲۶رأسی. به‌جای شروع با نمودار چهاروجهی ۴رأسی اکنون با گرافی شروع می‌کنیم که آن را نمودار ۲۶رأسی نامیده و به عللی که به‌زودی روشن می‌شود با $I_۳$ نمایش می‌دهیم. نمودار ۴رأسی $K_۴$ یک گراف بسیار متقارن با ۴ رأس و درجهٔ سه است (منظور از درجه، تعداد یالهای گذرنده از هر رأس است.). نمودار ۲۶رأسی $I_۳$ یک گراف بسیار متقارن با ۲۶ رأس و درجهٔ چهار است. جزئیات دقیق نمودار ۲۶رأسی تا حدی پیچیده است و در ادامهٔ این بحث به آن نیاز نداریم. ولی به‌خاطر کامل بودن بحث به آن می‌پردازیم.

نمودار ۲۶رأسی عبارت است از گراف وقوع $\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_۳)$ از صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_۳$ مرتبهٔ ۳. صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_۳$ را می‌توان یک هندسهٔ متناهی متشکل از ۱۳ نقطه و ۱۳ خط تصور کرد که روی هر خط چهار نقطه قرار دارد و از هر نقطه چهار خط می‌گذرد. هر زوج از نقاط، یک خط یکتا را معین می‌سازد و هر دو خط متمایز در یک نقطهٔ یکتا یکدیگر را قطع می‌کنند. گراف وقوع $\mathbb{P}_۳$ دارای ۲۶ رأس است (یک رأس برای هر یک از سیزده نقطه و یکی دیگر برای هر یک از سیزده خط). دو رأس دقیقاً وقتی به‌هم متصل‌اند که یکی از آنها متناظر با یک خط و دیگری متناظر با یک نقطه باشند به‌طوری که این نقطه روی آن خط واقع شود.

نمودار ۲۶رأسی در شکل ۴ نمایش داده شده است. اندیسهای i روی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ تغییر می‌کنند. بنابراین، بعضی از رئوسی که در شکل ظاهر می‌شوند متناظرند با ۳ رأس متفاوت در نمودار ۲۶رأسی. رئوس a و f به یکدیگر و همین‌طور به ترتیب به $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ و $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$ متصل‌اند.



شکل ۴ نمایش نمودار ۲۶رأسی

یالهای منفرد بین رئوس نمایانگر این واقعیت‌اند که رئوس متناظر در نمودار ۲۶رأسی تنها وقتی به‌هم متصل‌اند که اندیسهای مساوی داشته باشند. به عنوان مثال، b_1 به g_1 وصل است، b_2 به g_2، و b_3 به g_3. یالهای مضاعف بین رئوس نمایانگر این واقعیت‌اند که رئوس متناظر در نمودار ۲۶رأسی فقط وقتی به‌هم وصل‌اند که اندیسهایشان متفاوت باشند. به عنوان مثال، a_1 به f_2 و f_3 وصل است، a_2 به f_1 و f_3، و a_3 به f_1 و f_2.

اَبَر هیولا. اکنون همان فرایندی را که در مورد نمودار ۴رأسی به‌کار بردیم دربارهٔ نمودار ۲۶رأسی اعمال می‌کنیم. جزئیات بیشتر را می‌توانید در [۳] ببینید. فرض کنید G گروه کاکستر وابسته به I_3 باشد. این گروه توسط ۲۶ برگردان و تحت روابط مناسب کاکستر تولید می‌شود. بازگروه G نامتناهی است.

nبرهای آزاد ماکسیمال در I_3 عبارت‌اند از: ۱۲برها. این ۱۲برهای آزاد در واقع همگی تحت گروه تقارن نمودار ۲۶رأسی هم‌ارزند. به هر کدام از این ۱۲برها می‌توانیم عناصری نسبت دهیم که به عنوان انتقال روی فضای اقلیدسی ۱۱ بعدی عمل کنند. فرض کنید τ یک انتقال (اولیه) از این نوع است. در این صورت مرتبهٔ τ نامتناهی است، پس با اِعمال رابطهٔ $\tau = 1$ از تورم آن می‌کاهیم.

سپس G_1 را گروهی تعریف می‌کنیم که با مولدهای G تولید می‌شود و روابط آن هم روابط کاکستر هستند و هم روابط تورم‌کاهی که ایجاب می‌کنند همهٔ انتقالهایی که وابسته به ۱۲برهای آزاد ماکسیمال در I_3 هستند از مرتبهٔ ۱ باشند. ثابت می‌شود که G_1 یک گروه متناهی عظیم از مرتبهٔ تقریبی 10^{10^8} است. این گروه با گروه ابرهیولای $\mathbb{M}^{2}2$ (حاصلضرب حلقوی گروه هیولا با یک گروه مرتبهٔ ۲) یکریخت است. زیرگروه زوج $\frac{1}{2}G_1$ با حاصلضرب مستقیم هیولا در خودش (یعنی $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$) یکریخت است. عناصر ابرهیولای $\mathbb{M}^{2}2$ یا عناصر (x,y) از $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ هستند یا به شکل $(x,y)\sigma$اند، که در آن σ (عضو مرتبهٔ ۲ در حاصلضرب حلقوی) برگردانی است که در روابط $(x,y)\sigma = \sigma(y,x)$ صدق می‌کند. اثبات این امر در مورد این گروه به مراتب مشکل‌تر است تا در مورد نمودار ۴رأسی. اثباتی از این موضوع را می‌توان در [۳] دید. این اثبات مبتنی بر چند نتیجهٔ عمیق از نوشتگان «هیولایی» شامل قضیهٔ ایوانوف‌ـنورتن است. ارتباط بین گروه کاکستر نمودار ۲۶رأسی و ابرهیولا ابتدا توسط سایمن نورتن کشف شد. برابری $\frac{1}{2}G_1$ و $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ یک راه مقدماتی برای بررسی (مربع) گروه معروف هیولاست.

جدول ۱ ازگرافها تا گروههای ساده

زیرگروه زوج	عمل	nبَر	گراف	تعداد رأسها $\neq$
A_{n+1}	تورم‌افزایی	۳بَر	K_n	$n(\geq 4)$
$O_5(3)\cong O_6^-(2)$	تورم‌کاهی	۶بَر	مکعب	۸
$O_6^-(2)\cong O_5(3)$	تورم‌کاهی	۶بَر	پیترسون	۱۰
$O_8^-(2)$	تورم‌کاهی	۸بَر	$\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_2)$	۱۴
$\mathbb{M}\times\mathbb{M}$	تورم‌کاهی	۱۲بَر	$\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_3)$	۲۶

آینده. البته ممکن است این فرایند را دربارهٔ گرافهای زیبای دیگری نیز به‌کار ببریم (منظورمان از گراف «زیبا» گرافی است که ما را به سمت یک گروه جالب رهنمون شود). به‌خصوص حالت گرافِ وقوع ۱۴رأسی $I_2 = \mathrm{Inc}(\mathbb{P}_2)$ متعلق به صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_2$ از مرتبهٔ ۲ بسیار آموزنده است [۵]. فهرست مختصری از این گونه ساختارها را در جدول ۱ می‌آوریم. گروهها با استفاده از نمادهای اطلس گروههای ساده [۲] فهرست شده‌اند.

مراجع

1. R. E. Borcherds, What is the Monster?, *Notices Amer. Math. Soc.* **49** (2002) 1076-1077.
2. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Oxford University Press, Eynsham, U. K., 1985.
3. J. H. Conway and C. S. Simons, 26 implies the bimonster, *J. Algebra* **235** (2001) 805-814.
4. H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.
5. C. S. Simons, Deflating infinite Coxeter groups to finite groups, in *Proceeding on Moonshine and Related Topics*, J. McKay and A. Sebbar, eds., CRM Proc. Lecture Notes, no. 30, American Mathematical Society, Providence, 2001, pp. 223-229.
6. R. Solomon, The Shape of the classification of the finite simple groups, in *Groups and Combinatorics–in Memory of Michio Suzuki*, E. Bannai, H. Suzuki, H. Yamaki and T. Yoshida, eds., Adv. Stud. Pure Math., no. 32, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2001, pp. 379-390.

* * * * * *

- Christopher S. Simons, "An elementary approach to the monster", *Amer. Math. Monthly*, (4) **112** (2005) 334-341.

* کریستوفر سیمونز، دانشگاه روان، گلاسبورو

simons@rowan.edu

امی نوتر و پیدایش جبر مجرد•

ایزراییل کلاینر*
ترجمهٔ علیرضا جمالی

اروینگ کاپلانسکی، جبردان برجسته، امی‌نوتر را «مادر جبر نوین» نامید. همتای او ساندرز مک‌لین اظهار داشت که تاریخ «جبر مجرد»، به‌عنوان موضوعی با هویت مستقل، با مقالهٔ ۱۹۲۱ نوتر «نظریهٔ ایده‌آلها در حلقه‌ها» شروع می‌شود. هرمان وایل مدعی شد که «وی چهرهٔ جبر را با تحقیقات خود دگرگون کرد.» در زیر کوشش می‌کنیم دربارهٔ این اظهارات منصفانه قضاوت کنیم.

طبق نظر وان دِر واردن، شالودهٔ مکتب ریاضی امی نوتر در شعار زیر مستتر است:

> همهٔ روابط بین اعداد، تابعها، و عملها پس از انتزاع از مثالهای خاص و رجوع به ارتباطهای مفهومی، روشن، قابل تعمیم، و به راستی پرثمر می‌شوند.

در نظر ما، این ایده‌ها حاکی از رهیافت مجرد اصل موضوعی در ریاضیات است. اینها برای ما پیش‌پا افتاده به‌نظر می‌رسد ولی در عصر نوتر چنین نبود. در واقع، به‌سبب کارهای اوست که در حال حاضر این ایده‌ها تا حد زیادی عادی به‌نظر می‌رسند. با معیارهای ما، جبر در سدهٔ نوزدهم غیرمجرد بود و از این یا آن طریق به اعداد حقیقی یا مختلط مربوط می‌شد. به عنوان مثال، برخی از جبردانان بزرگ سدهٔ نوزدهم، ریاضیدانانی که آثارشان جبر سدهٔ بیستم را شکل داد، عبارت بودند از گاوس، گالوا، ژوردان، کرونکر، دِدِکیند، و هیلبرت. تحقیقات جبری آنان در حوزهٔ فرمهای درجهٔ دوم، دایره بُری، توسیعهای میدان، گروههای جایگشتی، و ایده‌آلها در حلقه‌های اعداد صحیحِ میدانهای اعداد جبری و نظریهٔ ناورداها بود. همهٔ این تحقیقات از طریقی به اعداد حقیقی یا مختلط مربوط می‌شدند.

به علاوه در سدهٔ نوزدهم حتی این کارهای مهم جبری، در برنامهٔ کلی ریاضیات، فرعی تلقی می‌شدند. حوزه‌های اصلی ریاضیات در آن سده عبارت بودند از آنالیز (آنالیز مختلط، معادله‌های دیفرانسیل، و آنالیز حقیقی)، و هندسه (تصویری، نااقلیدسی، و جبری). اما بعد از کارهای نوتر و دیگران در دههٔ ۱۹۲۰، جبر جزو موضوعات اصلیِ ریاضیات شد.



باید تذکر داد که نوتر تنها فرد، یا حتی یگانه فرد شاخصِ مؤثر در رهیافت اصل موضوعی مجرد به جبر نبود. از اسلاف او که در این مقوله تشریک مساعی کردند، کیلی و فروبنیوس در نظریهٔ گروهها، دِدِکیند در نظریهٔ شبکه‌ها، وِبر[1] و اشتاینیتس[2] در نظریهٔ میدانها بودند. از میان معاصران او، آلبرت[3] در آمریکا و آرتین در آلمان ممتازترند.

در بحث راجع به منشأ مفاهیم ریاضی، نظریهٔ «مهبانگ»[4] چندان صادق نیست. در مورد کارهای نوتر نیز چنین است. به مفاهیمی که او معرفی کرد و نتایجی که به‌دست آورد باید با توجه به دستاوردهای جبر در اواخر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم نگریست. وی به ویژه از تحقیقات ددکیند تأثیر پذیرفت. در بحث مربوط به دستاوردهایش غالباً با فروتنی خاصی می‌گفت: «اینها از قبل در آثار دِدِکیند بوده است» (Es steht schon bei Dedekind). بنابراین در توضیح دستاوردهای نوتر، به ریشه‌های آنها در آثار ددکیند و دیگران که وی از آنان الهام گرفته و کار خود را بر کار آنان بنا کرده است اشاره خواهم کرد.

نوتر در حوزه‌های جبری مهم زیردستاوردهایی داشته است: نظریهٔ ناورداها (۱۹۰۷ـ۱۹۱۹)، جبر جابه‌جایی (۱۹۲۰ـ۱۹۲۹)، جبر ناجابه‌جایی و نظریهٔ

1. Weber 2. Steinitz 3. Albert

۴. big bang، در اینجا، کنایه از اینکه چیزی به یکباره و ناگهان پدید آید.ـم.

نمایشها (۱۹۲۷ـ۱۹۳۳)، و کاربردهای جبر ناجابه‌جایی در مسائل جبر جابه‌جایی (۱۹۳۲ـ۱۹۳۵). بدین ترتیب، او تقریباً به همهٔ موضوعات مطرح در جبر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم (احتمالاً بجز نظریهٔ گروهها به معنی واقعی آن) پرداخت. نکتهٔ مهم این است که وی این موضوعات را دگرگون کرد، و از این رهگذر سنت نوینی در جبر پدید آورد ــ موضوعی که به جبر نوین یا جبر مجرد معروف شده است.

اینک به دستاوردهای نوتر در هر یک از حوزه‌های بالا می‌پردازم.

۱. نظریهٔ ناورداها

این گفتهٔ نوتر که ایده‌های او از قبل در کارهای ددکیند موجود بوده است، می‌توانسته به این صورت باشد که «همهٔ این ایده‌ها با گاوس شروع شده است». در واقع، پیشینهٔ نظریهٔ ناورداها به مطالعات گاوس دربارهٔ فرمهای درجهٔ دوم دوتایی در کتاب تحقیقات حسابی[1] او برمی‌گردد. گاوس رابطه‌ای هم‌ارزی بر چنین فرمهایی تعریف و ثابت کرد که مبینْ یک ناوردای فرم تحت هم‌ارزی است.

منبع دیگر نظریهٔ ناورداها هندسهٔ تصویری است، که در دههٔ ۱۸۲۰ ابداع شد. یک مسألهٔ مهم، متمایز کردن ویژگیهای اقلیدسی اشکال هندسی از خواص تصویری آنها بود. معلوم شد ویژگیهای تصویری، ویژگیهایی هستند که تحت «تبدیلات تصویری» ناوردا می‌باشند.

نظریهٔ ناورداها رسماً به‌وسیلهٔ کِیلی[2] و سیلوستر[3] در اواخر دههٔ ۱۸۴۰ عرضه شد. کیلی این نظریه را برای روشن کردن ارتباطهای عمیق بین هندسهٔ سنجه‌ای [متری] و هندسهٔ تصویری به‌کار بست. گرچه ارتباطهای مهم با هندسه در سراسر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم ادامه یافت، نظریهٔ ناورداها پس از مدت کوتاهی به حوزه‌ای از تحقیقات، مستقل از ارتباط آن با هندسه، تبدیل شد. در واقع این نظریه به شاخهٔ مهمی از جبر در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم بدل گشت.

خطاب به سیلوستر:

> همهٔ تحقیقات جبری، دیر یا زود، به «کاپیتولِ» جبر مدرن، که سر درِ آن با «نظریهٔ ناورداها» تزیین شده است، ختم می‌شود.

یکی از مسائل مهم نظریهٔ مجرد ناورداها یافتن ناورداهای «فرمها»ی گوناگون بود. بسیاری از ریاضیدانان بزرگ نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم به محاسبهٔ ناورداهای فرمهای خاص پرداختند. این کار به موضوع مهم نظریهٔ ناورداها، یعنی تعیین دستگاه کاملی از ناورداها ــ پایه‌ای ــ برای فرم مفروضی منجر شد. به عبارت دیگر، یافتن ناورداهایی از فرم مفروض به‌طوری که هر ناوردای دیگر را بتوان به‌صورت ترکیبی از آنها بیان کرد ــ حدس زده شد که تعدادی متناهی از آنها موجود است.

کیلی در ۱۸۵۶ ثابت کرد که تعدادی متناهی ناوردا که پیش‌تر برای فرمهای درجهٔ چهارم دوتایی (یعنی، فرمهای درجهٔ چهارم با دو متغیر) یافته بود، یک دستگاه کامل است. در حدود ده سال بعد ژوردان ثابت کرد که هر فرم دوتایی، از هر درجه، یک پایهٔ متناهی دارد. برهان ژوردان برای این نتیجهٔ مهم، محاسباتی بود ــ او دستگاه کاملی از ناورداها را ارائه داد.

در ۱۸۸۸، هیلبرت دنیای ریاضیات را با اعلام یک رهیافت مفهومی جدید به مسألهٔ ناورداها شگفت‌زده کرد. ایدهٔ او در نظر گرفتن عبارتهایی برحسب تعدادی متناهی متغیر، یا به‌اختصار، حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها برحسب این متغیرها، به‌جای ناورداها بود. هیلبرت سپس قضیه‌ای را که به قضیهٔ پایه معروف شد ثابت کرد، یعنی این قضیه را که هر ایده‌آل حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با تعدادی متناهی متغیر که ضرایبشان به میدانی متعلق باشند، یک پایهٔ متناهی دارد. یک نتیجهٔ قضیه این بود که هر فرم، از هر درجه، با هر تعداد متغیر، دارای یک دستگاه کامل متناهی از ناورداهاست.

واکنش ژوردان به اثبات هیلبرت که دستگاه کامل ناورداها را به‌طورِ صریح به‌دست نمی‌داد، این بود که «این ریاضیات نیست، الهیات است.» بعدها وقتی هیلبرت یک برهانِ ساختی برای این قضیه ارائه داد (و آن را چندان مهم تلقی نکرد)، ژوردان وادار به پاسخ شد: «من متقاعد شدم که الهیات نیز فوایدی دارد.»

عنوان رسالهٔ نوتر، که آن را به راهنمایی ژوردان در ۱۹۰۷ نگاشت، عبارت بود از: «در باب دستگاههای کامل ناورداها برای فرمهای دو مجذوری سه‌تایی». این رساله به سبکِ کار ژوردان، محاسباتی بود. رساله با جدولی مشتمل بر دستگاه کامل ۳۳۱ ناوردا برای چنین فرمی به پایان می‌رسید. او بعدها از رسالهٔ خود به‌عنوان «جنگلی از فرمولها» یاد می‌کرد.

ولی وی در طول دههٔ ۱۹۱۰ نتایج چشمگیر متعددی در ناورداها به‌دست آورد. نخست، با استفاده از روشهایی که در دو مقاله (در ۱۹۱۵ و ۱۹۱۶) دربارهٔ این موضوع ابداع کرده بود، به حل مسألهٔ یافتن توسیع گالوای یک میدان اعداد مفروض با گروه گالوای معینی، که نخستین بار به‌وسیلهٔ ددکیند مطرح شده بود، کمک شایانی کرد. سپس طی تحقیقاتش در گوتینگن دربارهٔ ناورداهای دیفرانسیلی، حساب وردشها را برای به‌دست آوردن قضیهٔ معروف به قضیهٔ نوتر، که هنوز هم در فیزیک ریاضی اهمیت دارد، به‌کار بست. فتس گورسِی[1] فیزیکدان دربارهٔ این دستاورد می‌گوید:

> کلید رابطهٔ بین قانونهای تقارن با قانونهای پایستگی در فیزیک، قضیهٔ مشهور نوتر است که به موجب آن، دستگاهی دینامیکی که با کنشی تحت یک گروه لی با n پارامتر تعریف شده است، دارای n ناوردا (کمیت پایسته) است که طی تحول دستگاه، با تغییر زمان ثابت می‌ماند[۱۵].

الکساندروف دستاورد او را دربارهٔ ناورداها در این جمله خلاصه کرد که همین تحقیقات «کافی است که ... برای او شهرت یک ریاضیدان تراز اول را به ارمغان آورد».

راهی که امی نوتر را از نظریهٔ محاسباتی ناورداها به نظریهٔ مجرد حلقه‌ها و مدولها رساند چه بود؟ وایل متذکر می‌شود: «تضادی فاحش‌تر از تضاد بین نخستین مقالهٔ او، یعنی رساله‌اش، و تحقیقات پختهٔ بعدی‌اش به سختی قابل تصور است».

ژوردان در ۱۹۱۰ از دانشگاه ارلانگن بازنشسته شد و جای او را ارنست فیشر[2] گرفت. او نیز متخصصی در نظریهٔ ناورداها بود، اما نظریهٔ ناورداها به سبک هیلبرت. نوتر تحت تأثیر او قرار گرفت و به‌تدریج از رهیافت الگوریتمی ژوردان در نظریهٔ ناورداها به رهیافت مفهومی هیلبرت گرایید.

تحقیقات بعدی در ناورداها توجه او را به مقالهٔ مشترک مشهور ددکیند و وبر در نظریهٔ حسابی تابعهای جبری جلب کرد. وی «شیفتهٔ» رهیافت و ایده‌های ددکیند شد، و همین شیفتگی جهت کارهای بعدی او را مشخص کرد.

1. *Disquisitiones Arithmeticae* 2. Cayley 3. Sylvester

1. Fez Gursey 2. Ernst Fischer

۲. جبر جابه‌جایی

دو منشأ اصلیِ جبر جابه‌جایی، هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد جبری است. دو مقالهٔ تأثیرگذار ۱۹۲۱ و ۱۹۲۷ امی نوتر در موضوع جبر جابه‌جایی، به ترتیب، از این دو موضوع سرچشمه گرفته‌اند. او در این مقالات، به‌ترتیب با عنوانهای «نظریهٔ ایده‌آلها در حلقه‌ها» و «بسط مجرد نظریهٔ ایده‌آلها در میدانهای اعداد جبری» اساساً زمینهٔ جدیدی را گشود، و خالق «سبکی نو و دوران‌ساز در تفکر جبری» شد [۳۱].

سرچشمه‌های هندسهٔ جبری در مطالعهٔ تابعهای آبلی و انتگرالهای آنها بود، که تحقیق دربارهٔ آنها از اوایل سدهٔ نوزدهم آغاز شده بود. این رهیافت تحلیلی به موضوع به‌تدریج جای خود را به ابزارهای هندسی، جبری، و حسابی داد. به بیان جبری، شیء اصلی مورد مطالعه، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ است که در آن k یک میدان است (در سدهٔ نوزدهم، k میدان اعداد حقیقی یا مختلط بود). هیلبرت در سدهٔ نوزدهم، و لاسکر[1] و مکولی[2] در اوایل سدهٔ بیستم، ثابت کرده بودند که در چنین حلقه‌ای هر ایده‌آلْ اشتراکی متناهی از ایده‌آلهای اولیه، با ویژگیهایِ یکتاییِ معینی، است. (از لحاظ هندسی، این نتیجه حاکی از آن است که هر واریته اجتماع متناهی یکتایی از واریته‌های تحویل‌ناپذیر است.)

نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود این نتیجه را به حلقه‌های جابه‌جایی دلخواه که در شرط زنجیر افزایشی صدق کنند تعمیم داد. نتیجهٔ اصلی او این بود که در چنین حلقه‌ای هر ایده‌آلْ اشتراکی متناهی از ایده‌آلهای اولیه است، که با ویژگیهای یکتایی همراه‌اند.

چه چیز مهمی در این مقاله بود که (چنانکه گفتیم) مک‌لین آن را نشانهٔ آغاز جبر مجرد، به‌عنوان موضوعی مستقل دانست؟

نخستین نکته، متمایزکردن شرط زنجیر افزایشی به‌عنوان مفهومِ اساسیِ مورد نیاز در اثبات نتیجهٔ اصلی بود. در واقع، برهان «به کلی بر نتایج مقدماتی شرط زنجیر... استوار و... از فرط سادگی، عجیب بود» [۱۵]. برهانهای پیشینِ نتیجهٔ متناظر برای حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها متضمن محاسبات فراوان، مانند نظریهٔ حذف و هندسهٔ مجموعه‌های جبری بود.

ابداع شرط زنجیر افزایشی کار نوتر نبود. ددکیند (در ۱۸۹۴) و لاسکر (در ۱۹۰۵) آن را، به‌ترتیب، در حالتهای ملموسِ حلقه‌های اعداد صحیح جبری و چندجمله‌ای‌ها به‌کار بسته بودند. ولی این شرط برای آنها فرعی بود نه اصلی. متمایز کردن شرط زنجیر افزایشی به‌وسیلهٔ نوتر به‌عنوان مفهومی مهم، نقطهٔ عطفی به‌شمار می‌رود. به یمن تحقیقات او، حلقه‌هایی که در شرط زنجیر افزایشی صدق می‌کنند، و امروز حلقه‌های نوتری نامیده می‌شوند، از توجه ویژه‌ای برخوردار شده‌اند. در واقع، جبر جابه‌جایی به مطالعهٔ حلقه‌های نوتری جابه‌جایی تعبیر شده است. جبر جابه‌جایی به معنی دقیق کلمه، رسماً با مقالهٔ ۱۹۲۱ نوتر وارد صحنه می‌شود.

مفهوم اساسی دیگری که او در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود آن را به‌نحو بارزی مطرح کرد، مفهوم حلقه بود. ابتکار این مفهوم نیز از او نیست. ددکیند (در ۱۸۷۱) این مفهوم را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط که تحت عملهای جمع، تفریق، و ضرب بسته است معرفی کرد و آن را «ترتیب»[1] نامید. هیلبرت در «گزارش نظریهٔ اعداد» (Zahlbericht) مشهور خود در ۱۸۹۷، اصطلاح «حلقه» را وضع کرد، ولی صرفاً در مبحث حلقه‌های اعداد صحیح میدانهای اعداد جبری. فرنکل[2] (در ۱۹۱۴) اساساً تعریف نوین حلقه را به‌دست داد، اما دو شرط اضافی را به‌عنوان اصل موضوع در نظر گرفت. نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود تعریف حلقه را به‌صورتی که امروز معمول است به‌دست داد (تعریف حلقه را سونو[3] نیز در ۱۹۱۷ ارائه داد ولی مورد توجه قرار نگرفت).

اما صرفاً تعریف مفهوم حلقه به‌وسیلهٔ نوتر نبود که اهمیت پیدا کرد. او از طریق مقالات بدیع خود که در آنها این مفهوم نقشی اساسی داشت، و در بین آنها مقالهٔ ۱۹۲۱ مهم‌تر از همه بود، مفهوم حلقه را به‌صورت مفهومی اصلی در جبر در آورد. بلافاصله این مفهوم به نقطهٔ آغازِ بیشتر مباحث جبر مجرد تبدیل شد، و جایگاه شایستهٔ خود را در کنار مفاهیم گروه و میدان، که پیش‌تر کاملاً تثبیت شده بودند، به‌دست آورد.

همچنین نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود شروع به تأسیس یک نظریهٔ کلی ایده‌آلها برای حلقه‌های جابه‌جایی کرد. مفاهیم ایده‌آل اول، اولیه، و تحویل‌ناپذیر، مفاهیم اشتراک و حاصلضرب ایده‌آلها، هم‌ارزی به پیمانهٔ یک ایده‌آل ــ خلاصه، اغلب ابزارهای نظریهٔ ایده‌آلها ــ در اینجا پدیدار شد.

نوتر در اواخر این مقاله مفهوم مدول رویِ یک حلقهٔ ناجابه‌جایی را تعریف و ثابت کرد که برخی از قضیه‌های تجزیه که قبلاً برای ایده‌آلها ارائه شده بودند در مورد زیرمدولها هم صادق‌اند. در اینجا دربارهٔ مدولها در ارتباط با تحقیقات او در جبر ناجابه‌جایی بحث خواهیم کرد.

خلاصه، نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود چندین مفهوم اساسی جبر مجرد مانند حلقه، مدول، ایده‌آل، و شرط زنجیر افزایشی را معرفی کرد و به آنها تشخص و اهمیت بخشید. علاوه بر آن، این مقاله شیوهٔ جدید پرداختن به جبر ــ شیوهٔ مجرد، اصل موضوعی، و مفهومی ــ را معرفی کرد و فایدهٔ آن را نشان داد. دستاورد بزرگی برای یک تک مقاله!

ریشه‌های مقالهٔ ۱۹۲۷ نوتر در نظریهٔ اعداد جبری و، تا حد کمتری، در هندسهٔ جبری است. سرچشمه‌های نظریهٔ اعداد جبری عبارت‌اند از: نظریهٔ فرمهای درجهٔ دوم گاوس در ۱۸۰۱، و تحقیقات سال ۱۸۳۲ او دربارهٔ تقابل دومجذوری (که در آن اعداد صحیح گاوسی را معرفی کرد)، و کوششهایی که در اوایل سدهٔ نوزدهم برای اثبات آخرین قضیهٔ فرما به‌عمل آمد. در همهٔ موارد، اساس کار به قضیهٔ یکتایی تجزیه در حلقه‌های اعداد صحیح در میدانهای اعداد جبری برمی‌گردد. وقتی که مثالهایی از چنین حلقه‌هایی پیدا شدند که در آنها تجزیهٔ یکتا برقرار نبود مسأله، به تعبیری، به سعی در «احیا»ی «بهشت گمشده» تبدیل شد. این کار را ددکیند در ۱۸۷۱ (و، به طریقی دیگر کرونکر در ۱۸۸۲) انجام داد که نشان داد تجزیهٔ یکتا را می‌توان با در نظر گرفتن تجزیهٔ ایده‌آلها (که برای این منظور معرفی کرده بود) به‌جای اعضا ثابت کرد. نتیجهٔ اصلی او این بود که هرگاه R حلقهٔ اعداد صحیح یک میدان اعداد

1. Lasker 2. Macauley

1. order 2. Fraenkel 3. Sono

جبری باشد، آنگاه هر ایده‌آل R حاصلضرب یکتایی از ایده‌آلهای اول است.

ریمان در دههٔ ۱۸۵۰ «رویه‌های ریمانی» را برای سهولتِ مطالعهٔ تابعهای جبری (چندمقداری) معرفی کرد. اما، روشهای او عاری از دقت و وابسته به ملاحظات فیزیکی بود. ددکیند و وبر در ۱۸۸۲ مقالهٔ بسیار مهمی نوشتند که هدف آن بیان جبریِ دقیقِ برخی از ایده‌های ریمان دربارهٔ نظریهٔ تابعهای مختلط، به‌ویژه مفهوم رویهٔ ریمانی او بود. ایدهٔ آنان برقرارکردن تشابهی بین میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع جبری، و انتقال روشها و نتیجه‌های اولی به دومی بود. آنان موفقیت قابل تحسینی در این کار به‌دست آوردند، و (علاوه بر چیزهای دیگر) یک تعریف جبری محض از رویهٔ ریمانی و برهانی جبری برای قضیهٔ اساسی ریمان-روخ[1] به‌دست دادند. نکته‌ای که دستِ‌کم همان قدر اهمیت دارد، اشارهٔ آنها به ایده‌ای است که بسیار پرثمر از آب درآمد، یعنی تأثیر متقابل نظریهٔ جبری اعداد و هندسهٔ جبری.

به بیان دقیق‌تر، درست همان‌طورکه در نظریهٔ اعداد جبری عمل می‌شود، به عدد جبری مفروضِ u یک میدان اعداد جبری مانند $Q(u)$ نظیر می‌شود، بنابراین در هندسهٔ جبری به یک تابع جبری مفروض یک میدانِ توابع جبری مانند $\mathbf{C}(x,y)$ نظیر می‌شود. $\mathbf{C}(x,y)$ متشکل از چندجمله‌ای‌هایی برحسب x و y است که ضریبهای آنها مختلط‌اند، و در آن y در یک معادلهٔ چندجمله‌ای با ضریبهای متعلق به $\mathbf{C}(x)$ صدق می‌کند (یعنی y روی $\mathbf{C}(x)$ جبری است).

اگر A «حلقهٔ اعداد صحیحِ» $\mathbf{C}(x,y)$ باشد، یعنی، A متشکل از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های یکین با ضریبهای متعلق به $\mathbf{C}[x]$ که در $\mathbf{C}(x,y)$اند باشد، آنگاه نتیجه‌ای مهم از مقالهٔ ددکیند-وبر این است که هر ایده‌آل در A حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است.

نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۷ خود نتیجه‌های پیشگفته دربارهٔ تجزیه برای میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع را به حلقه‌های جابه‌جایی تعمیم داد. در واقع، او حلقه‌های جابه‌جایی را که در آنها هر ایده‌آل حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است مشخص می‌سازد. امروز این نوع حلقه‌ها را، حوزه‌های ددکیند می‌نامند. او ثابت کرد R حوزهٔ ددکیند است اگر و تنها اگر

(۱) R در شرط زنجیر افزایشی صدق کند،

(۲) به ازای هر ایده‌آل ناصفرِ I، R/I در شرط زنجیرکاهشی صدق کند،

(۳) R حوزهٔ صحیح باشد، و

(۴) R در میدان خارج‌قسمت‌ها صحیح‌بسته باشد.

شرط (۴) اهمیت خاصی یافت، زیرا مفهوم اساسیِ وابستگی صحیح (مربوط به وابستگی بستار صحیح) را در معرض توجه قرار داد. این مفهوم که پیش‌تر در آثار ددکیند دربارهٔ اعداد جبری موجود بود، اهمیتی اساسی در جبر جابه‌جایی پیدا کرد. همان‌طور که گیلمر اشاره می‌کند، «مفهوم وابستگی صحیح در $Aufbau$ [مقالهٔ ۱۹۲۷ نوتر] و مفهوم شرط زنجیر افزایشی در $Idealtheorie$ [مقالهٔ ۱۹۲۱ وی] آمده است» [۱۲].

از میان سایر نتیجه‌های اساسی که او در این مقاله ثابت کرد نتیجه‌های زیر شایان ذکرند:

1. Roch

(الف) (به‌بیان امروزی) قضیه‌های یکریختی و همریختی برای حلقه‌ها و مدولها،

(ب) این حکم که مدول M دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر در هر دو شرط زنجیر افزایشی و کاهشی صدق کند، و

(پ) این حکم که اگر R-مدول M متناهیْ‌مولد باشد و R در شرط زنجیر افزایشی (کاهشی) صدق کند آنگاه M نیز در این شرط صدق می‌کند.

خلاصهٔ دستاوردهای نوتر در جبر جابه‌جایی به شرح زیر است: او علاوه بر اثبات نتایج مهم، مفاهیمی را معرفی و روشهایی را ابداع کرد که به‌صورت ابزارهای استاندارد جبر جابه‌جایی درآمده‌اند. در واقع، می‌توان گفت که موضوع جبر جابه‌جایی با مقالات ۱۹۲۱ و ۱۹۲۷ نوتر و مقالات دههٔ ۱۹۲۰ کرول[1] پدید آمده است.

۳. جبر ناجابه‌جایی و نظریهٔ نمایشها

پیش از آنکه معاصران نوتر ایده‌های او را در جبر جابه‌جایی به‌طور کامل درک کنند، او توجه خود را به سایر موضوعات مهم جبر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم معطوف داشت، یعنی به دستگاههای اعداد ابرمختلط (دستگاههایی که در حال حاضر آنها را جبرهای شرکت‌پذیر می‌نامیم) و گروهها (به‌ویژه، نمایشهای گروهها). او این دو موضوع را با رهیافت مجرد و مفهومی خود گسترش داد و یکپارچه کرد، رهیافتی که در آن، ایده‌های نظریهٔ مدولی که در حالت جابه‌جایی به‌کار برده بود نقشی اساسی داشت.

نظریهٔ دستگاههای ابرمختلط با معرفی چهارگان‌ها به وسیلهٔ همیلتن در سال ۱۸۴۳، پدید آمد. در اواخر سدهٔ نوزدهم، الی کارتان، فروبینوس، و مولین[2] قضیه‌هایی ساختاری برای چنین دستگاههایی روی اعداد حقیقی و مختلط به‌دست دادند، و در ۱۹۰۷ ودربرن[3] این قضیه‌ها را برای دستگاههای ابرمختلط روی میدانهای دلخواه تعمیم داد. در پرتو تحقیقات نوتر در جبر جابه‌جایی، آرتین نتایج ودربرن را به حلقه‌های ناجابه‌جاییِ نیمْ‌ساده که در شرط زنجیر کاهشی صدق کنند، تعمیم داد.

گروهها نخستین دستگاههای جبری بودند که مورد مطالعهٔ گسترده قرار گرفتند. مطالعهٔ مجرد آنها در اواخر سدهٔ نوزدهم آغاز شد. یک ابزار مهم در این مطالعه، نظریهٔ نمایشها بود که به‌وسیلهٔ برنساید[4]، فروبینوس، و مولین در دههٔ ۱۸۹۰ ابداع شد. ایدهٔ این نظریه، بررسی نمایشهای ملموس گروه برحسب ماتریسها به‌جای مطالعهٔ مجرد آنها بود. (نمایش یک گروه یک همریختی از گروه به گروه ماتریسهای وارون‌پذیر از مرتبهٔ مفروضی است.)

نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۹ خود با عنوان «اعداد ابرمختلط و نظریهٔ نمایشها»، نظریهٔ نمایشهای گروهی را برحسب نظریهٔ ساختاری دستگاههای ابرمختلط بنا کرد. ابزار اصلی در این رهیافت مدول بود. ایده این بود که به هر نمایش φ از G که با ماتریسهای وارون‌پذیر با درایه‌های متعلق به میدانی مانند k مشخص شده است، یک $k(G)$-مدول V موسوم به نمایش مدولی φ نظیر شود ($k(G)$ را جبر گروهی G روی k می‌نامند).

برعکس، از هر $k(G)$-مدولِ M یک نمایش G مانند ψ به‌دست

1. Krull 2. Molien 3. Wedderburn 4. Burnside

می‌آید که تناظری یک‌به‌یک بین نمایشهای G روی k و $k(G)$ـمدولها برقرار می‌کند. اینک می‌توان مفاهیم استاندارد نظریهٔ نمایشها را برحسب مدولها بیان کرد. برای مثال، دو نمایش هم‌ارزند اگر و تنها اگر مدولهای متناظر آنها یکریخت باشند؛ یک نمایش تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر مدول متناظر آن ساده باشد. اینک روشهای نظریهٔ مدولها، و نظریهٔ ساختاری دستگاههای ابرمختلط (اِعمال‌شده بر دستگاه ابرمختلط $k(G)$) را می‌توان برای بازسازی مبانی نظریهٔ نمایشهای گروهی به‌کار بست. برای تفصیل، ر.ک. [۸] و [۱۸].

کار نوتر در این زمینه چارچوب مفهومی بسیار کارآمدی را برای مطالعهٔ نظریهٔ نمایشها پدید آورد. به‌عنوان مثال، در حالی که رهیافت کلاسیک (محاسباتی) به نظریهٔ نمایشها تنها روی میدان اعداد مختلط، یا در بهترین حالت روی یک میدانِ جبریْ‌بسته با مشخصهٔ صفر برقرار است، رهیافت نوتر برای هر میدان، با هر مشخصه، بامعنی است.

در دههٔ ۱۹۳۰ در آغاز مطالعات پیشگامانهٔ براوئر[1] در زمینهٔ نمایشهای مدولی، یعنی، نمایشهایی که در آنها مشخصهٔ میدان مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند، استفاده از میدانهای دلخواه در نظریهٔ نمایشها اهمیت پیدا کرد. همچنین ایده‌های نوتر «بذر نظریهٔ نمایشهای صحیح را پاشید» [۱۸]؛ یعنی، نظریهٔ نمایشها روی حلقه‌های جابه‌جایی به‌جای میدانها. خود او نظریهٔ نمایشهای گروهی را به حالت حلقه‌های آرتینی نیم‌ساده گسترش داد؛ در اینجا او به مفهوم دو-مدول[2] نیاز داشت.

توضیحی دربارهٔ مدولها می‌آوریم که در تحقیقات نوتر هم در جبر جابه‌جایی و هم در جبر ناجابه‌جایی نقشی عمده داشتند. ددکیند، در ارتباط با تحقیقات ۱۸۷۱ خود در نظریهٔ اعداد جبری، نخستین کسی بود که اصطلاح «مدول» را به‌کار برد، اما منظور او زیرگروهی از گروه جمعی اعداد مختلط (یعنی، یک Zـمدول) بود. در ۱۸۹۴ وی نظریه‌ای وسیع دربارهٔ این گونه مدولها پدید آورد. لاسکر، در تحقیقات ۱۹۰۵ خود دربارهٔ تجزیهٔ حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها، اصطلاحهای «مدول» و «ایده‌آل» را به یک معنی به‌کار برد (اولی را برای حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbf{C}$، و دومی را برای این نوع حلقه‌ها روی $\mathbf{Z}$).

نوتر نخستین کسی بود که مفهوم مدول را، همراه با حلقه‌ای به‌عنوان حوزهٔ عملها، به‌طور مجرد به‌کار بست، و به توانایی آن پی برد. در واقع، از طریق کارهای او بود که مفهوم مدول اهمیت فعلی‌اش را یافت. مدولها نه تنها به دلیل توانایی وحدت‌بخشیِ خود مهم‌اند بلکه به سبب توانایی خطی‌سازی‌شان نیز اهمیت دارند. و بالاخره، مدولها تعمیم‌های فضاهای برداری هستند و بسیاری از ساختارهای استاندارد فضاهای برداری، مانند زیرفضا، فضای خارج قسمتی، مجموع مستقیم، و ضرب تانسوری در مورد مدولها هم برقرارند. (از توانایی خطی‌سازی در آنالیز آگاهیم. می‌توان گفت که مدولها توانایی مشابهی را در جبر فراهم می‌کنند.)

اهمیت ابداع جبر همولوژیک در این بود که فرایند خطی‌سازی را با ایجاد ابزارهایی برای اجرای آن بسیار به پیش برد. به‌عنوان مثال، تابعگونهای «Ext» و «Tor» شاخصهایی از «بدرفتاری» مدولها روی حلقه‌های دلخواه در مقایسه با مدولها روی میدانها، یعنی فضاهای برداری، به‌دست می‌دهند.

۱. Brauer؛ با Brouwer، توپولوژیدان و شهودگرای معروف، اشتباه نشود ـ م.

2. bimodule

۴. کاربردهای جبر ناجابه‌جایی در جبر جابه‌جایی

نوتر بر این باور بود که بر نظریهٔ جبر ناجابه‌جایی قانونهای ساده‌تری نسبت به جبر جابه‌جایی حاکم است. وی در خطابهٔ ۱۹۳۲ خود در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در زوریخ، با عنوان دستگاههای ابرمختلط و ارتباط آنها با جبر جابه‌جایی و نظریهٔ اعداد، به ذکر رئوس برنامه‌ای پرداخت که این باور را عملی می‌کرد. برنامهٔ او به «طلیعهٔ نظریهٔ نوین کوهمولوژی» موسوم شده است [۲۵]. ایده‌های مربوط به مجموعه‌های عاملی که در این برنامه آمده بود پس از مدت کوتاهی به وسیلهٔ هاسه[1] و شواله[2] «برای یافتن بعضی نتایج اصلی دربارهٔ نظریهٔ میدانهای رده‌ایِ موضعی و سراسری» به‌کار رفت. هدف فوری خودِ نوتر این بود که نظریهٔ جبرهای سادهٔ مرکزی را، به‌صورتی که به‌وسیلهٔ او، براوئر، و دیگران عرضه شده بود، در مسائل مربوط به‌نظریهٔ میدانهای رده‌ای به‌کار گیرد.

برخی از ایده‌های نوتر (و دیگران) در مورد تأثیر متقابل جبر جابه‌جایی و ناجابه‌جایی با اثبات قضیهٔ مشهور آلبرت-براوئر-هاسه-نوتر به‌بار نشست. این قضیه که جیکبسن آن را «یکی از نقاط اوج نظریهٔ جبرها» نامید، توصیف کاملی از جبرهای تقسیمی متناهیْ‌بعد روی میدانهای اعداد جبری به‌دست می‌دهد. این قضیه در مطالعهٔ جبرهای متناهیْ‌بُعد و نمایشهای گروهی اهمیت دارد.

برای روشن شدن زمینهٔ این قضیه، باید تذکر داد که قضیه‌های ساختاریِ ۱۹۰۷ ودربرن برای جبرهای متناهیْ‌بعد مطالعهٔ آنها را به مطالعهٔ جبرهای پوچتوان و جبرهای تقسیمی فروکاست. چون امیدی به روشن ساختن ساختار اول نمی‌رفت (و هنوز، با وجود پیشرفتهای قابل ملاحظه چنین است)، توجه به ساختار دوم معطوف شد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ و اوایل دههٔ ۱۹۳۰ پیشرفتهای چشمگیری در زمینهٔ ساختار جبرهای تقسیمی به‌دست آمد. قضیهٔ آلبرت-براوئر-هاسه-نوتر اوج این تحقیقات بود. اما، باید تأکید کرد که حتی امروزه سؤالات زیادی در مورد جبرهای تقسیمی باقی است.

۵. میراث نوتر

مفاهیمی که نوتر معرفی کرد، نتایجی که او به‌دست آورد، و شیوهٔ تفکری که وی پدید آورد، به بخشی از فرهنگ ریاضی ما تبدیل شده است. چنان که الکساندروف می‌گوید:

> نوتر بود که به ما یاد داد به‌جای محاسبات دست‌وپاگیر جبری به مفاهیم ساده و کلی جبری ــ نگاشتهای همریخت، گروهها و حلقه‌ها با عملگرها، و ایده‌آلها ــ فکر کنیم، و بدین وسیله راهی برای یافتن اصول جبری در مواردی که این گونه اصول به‌خاطر پیچیدگیِ وضعیتهای خاص پنهان مانده بودند گشود... [۱].

همچنین، همان‌گونه که وایل می‌گوید:

> نمی‌توان اهمیت او در جبر را صرفاً از مقالاتش فهمید؛ او از توان زیادی برای ایجاد انگیزه برخوردار بود و بسیاری از پیشنهادهای او تنها در کارهای شاگردان و همکارانش شکل گرفت [۳۱].

1. Hasse 2. Chevalley

در واقع، وایل به دین خود نسبت به او، به‌خاطر تحقیقاتش در گروهها و مکانیک کوانتومی، اذعان می‌کند. از میان کسان دیگری که صریحاً تأثیر او را در تحقیقات جبری خود متذکر شده‌اند می‌توان از جبردانان برجسته‌ای مانند آرتین، دیورینگ[1]، هاسه، جیکبسن، کرول، و کوروش[2] نام برد.

وسیلهٔ مهم دیگری در انتشار ایده‌های نوتر، رسالهٔ وان دِر واردن با عنوان جبر نوین بود که نخستین بار در ۱۹۳۰ منتشر شد و امروز اثری کلاسیک به‌شمار می‌آید. این رساله مبتنی بر درسهای نوتر و آرتین بود. گنجینهٔ غنی ایده‌های زیبا و توانای آن، که به‌طرز بسیار عالی به‌وسیلهٔ وان در واردن عرضه شده است، نسلی از ریاضیدانان را پرورش داد. تأثیر مستقیم این کتاب را دیودونه و برکاف به‌خوبی توصیف کرده‌اند.

دیودونه:

> در آن ایام روی رساله‌ام کار می‌کردم؛ سال ۱۹۳۰ بود و من در برلین بودم. هنوز روزی را که کتاب وان در واردن به بازار آمد به‌یاد دارم. بی‌اطلاعی من از جبر طوری بود که با معیارهای امروزی از پذیرش در دانشگاه محروم می‌شدم. با شتاب به مجلدات آن مراجعه کردم و از دیدن دنیایی جدید که در برابرم گشوده شد متحیر شدم. در آن زمان اطلاعات من از حدود [کتاب] ریاضیات ویژه[3] ، دترمینانها، و قدری معلومات دربارهٔ حل‌پذیری معادله‌ها و خمهای گویا فراتر نمی‌رفت. من دانش‌آموختهٔ اِکول نرمال[4] بودم و نمی‌دانستم ایده‌آل چیست، و تنها از [مفهوم] گروه باخبر بودم؛ از اینجا می‌توانید دریابید که اطلاعاتِ یک ریاضیدان جوان فرانسوی در ۱۹۳۰ در چه حدی بوده است[۱۰].

برکاف:

> حتی در ۱۹۲۹، مفاهیم و روشهای آن [یعنی، مفاهیم و روشهای «جبر نوین»] در مقایسه با مفاهیم و روشهای آنالیز در بیشتر دانشگاهها، از جمله دانشگاه هاروارد، هنوز از اهمیت کمتری برخودار بود. وان در واردن با تشریح انسجام ریاضی و فلسفی آنها و با نشان دادن توان آنها که به‌وسیلهٔ امی نوتر و همکاران جوان‌تر او (به‌خصوص، آرتین، براوئر، و هاسه) گسترش یافته بود، «جبر نوین» را ناگهان به‌صورت یک موضوع بسیار مهم ریاضی درآورد. اغراق نیست بگوییم که تازگی و شور و حال توصیف او دنیای ریاضیات را به هیجان آورد ــ به ویژه ریاضیدانانِ زیر سی سال همچو مرا [۳].

عده‌ای از ریاضیدانان و مورخان ریاضی از «جبری‌سازی ریاضیات» در سدهٔ بیستم گفته‌اند. شاهد این مدّعا، ورود اصطلاحات جبر به حوزه‌هایی مانند هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری، نظریهٔ اعداد جبری، منطق جبری، جبر توپولوژیک، جبرهای باناخ، جبرهای فون نویمان، گروههای لی، و حلقه‌های هنگ‌دار [نرمدار] است. تأثیر نوتر در بعضی از این حوزه‌ها مستقیم و در بعضی دیگر غیرمستقیم است. به‌نظر می‌رسد که خود او از این امر آگاه بوده است، چنانکه در نامه‌ای به هاسه در ۱۹۳۱ می‌گوید:

> روشهای من در واقع روشهای تحقیق و تفکر است؛ به همین دلیل است که این روشها به همه‌جا بدون ذکر نام راه یافته‌اند[۹].

الکساندروف و هوپف[1] این موضوع را در پیشگفتار کتاب خودشان در توپولوژی تأیید می‌کنند:

> دیدگاههای عمومی ریاضیِ امی‌نوتر به رشتهٔ تخصصی او ــ جبر ــ محدود نماند بلکه هرکه با او در ارتباط بود از آنها تأثیر پذیرفت [۹].

درواقع، خود آنها، و مهم‌تر از آن توپولوژی جبری، بیشترین سود را از دیدگاههای او بردند. جیکبسن این مطلب را تأیید می‌کند:

> همان گونه که معروف است، امی نوتر بود که الکساندروف و . . . هوپف را متقاعد کرد که نظریهٔ گروهها را در توپولوژی ترکیبیاتی وارد کنند و نظریهٔ سادکی همولوژیِ موجود را برحسب اصطلاحات نظریهٔ گروهها به‌جای ماتریسهای وقوع که ملموس‌تر بودند فرمولبندی کنند [۱۵].

هندسهٔ جبری حوزهٔ دیگری است که شاهد جبری‌سازی بسیار گسترده در اوایل دههٔ ۱۹۲۰ و اوایل دههٔ ۱۹۳۰ بود. اظهارات زاریسکی[2] و وان درواردن دو تن از سرشناسان هندسهٔ جبری که عمیقاً درگیر فرایند جبری‌سازی بودند روشنگر این موضوع است.

زاریسکی:

> جای تأسف بود که استادان ایتالیایی من هرگز مرا از چنین پیشرفت عظیمی در جبر که مرتبط با هندسهٔ جبری است آگاه نکرده بودند. من خیلی بعد، وقتی به آمریکا آمدم، این موضوع را کشف کردم [۲۳].

وان در واردن:

> وقتی در ۱۹۲۴ به گوتینگن آمدم، دنیای جدیدی به روی من گشوده شد. از طریق امی نوتر آگاه شدم که ابزاری که به‌وسیلهٔ آنها می‌توانستم از عهدهٔ پاسخگویی سؤالاتم [در هندسهٔ جبری] برآیم، قبلاً به وجود آمده‌اند. [۲۴].

نوتر در سالهای ۱۹۲۸ـ۱۹۲۹ استاد میهمان در مسکو بود. الکساندروف تأثیر نوتر بر کار پونتریاگین[3] را در نظریهٔ گروههای پیوسته (جبر توپولوژیک) چنین توصیف می‌کند:

> پی‌بردن به تأثیر امی نوتر بر رشد استعداد ریاضی پونتریاگین دشوار نیست؛ بی‌گمان رنگ‌وبوی تند جبری در آثار پونتریاگین از ارتباط او با امی نوتر ناشی شده است [۱].

آخرین کلام را به گرت برکاف می‌سپارم، که در مقاله‌ای به سال ۱۹۷۶ در تشریح خیزش جبر مجرد در فاصلهٔ سالهای ۱۹۳۶ تا ۱۹۵۰ چنین می‌گوید:

> اگر امی نوتر می‌توانست در کنگرهٔ [بین‌المللی ریاضیدانان در]

1. Deuring 2. Kurosh 3. *mathematiques spéciales*
4. École Normale

1. Hopf 2. Zariski 3. Pontryagin

۱۹۵۰ حضور داشته باشد، بسیار به‌خود می‌بالید. مفاهیم جبری او در ریاضیات معاصر اهمیت اساسی یافته‌اند و جبردانان از آن زمان تا کنون مدام از آن الهام گرفته‌اند [۴].

مراجع

1. P. S. Alexandrov, In memory of Emmy Noether, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 153-179.
2. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, 1969.
3. G. Birkhoff, Current trends in algebra, *Amer. Math. Monthly* 1973, **80**: 760-782.
4. G. Birkhoff. (a) The rise of modern algebra to 1936 and (b) The rise of modern algebra, 1936 to 1950, in *Men and Institutions in American Mathematics*. ed. by D. Tarwater et al, Texas Tech Press. 1976, pp. 41-63 and 65-85.
5. N. Bourbaki, Historical note, in his *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1972, pp. 579-606.
6. J. W. Brewer and M. K. Smith (eds), *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, Marcel Dekker, 1981.
7. T. Crilly, (a) The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862), and (b) The decline of Cayley's invariant theory (1863-1895), *Hist. Math.* 1986 **13**: 241-254, and 1988, **15**: 332-347.
8. C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, 1962.
9. A. Dick, *Emmy Noether, 1882-1935*, Birkhäuser, 1981.
10. J. Dieudonné, The work of Nicolas Bourbaki, *Amer. Math. Monthly* 1970, **77**: 134-145.
11. P. Dubreil, Emmy Noether, *Cahiers du Sém, d' Hist. des Math.* 1986, **7**: 15-27.
12. R. Gilmer, Commutative ring theory, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 131-143.
13. T. Hawkins, Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 1976/77 **16**: 17-36.
14. N. Jacobson, *Basic Algebra*, 2 vols., Freeman, 1974 and 1980.
15. N. Jacobson (ed.), *Emmy Noether: Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983. Contains and introduction by Jacobson to Noether's works.
16. I. Kaplansky, Commutative rings, in *Proc. of Conf. on Commutative Algebra*, ed. by J. W. Brewer and E. A. Rutter, Springer-Verlag, 1973, pp. 153-166.
17. C. H. Kimberling, Emmy Noether and her influence, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp.3-61.
18. T. Y. Lam, Representation theory, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 145-156.
19. S. MacLane, History of abstract algebra, in *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, ed. by D. Tarwater et al, Texas Tech Press, 1981, pp. 3-35.
20. S. MacLane, Mathematics at the University of Göttingen (1931-1933), in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 65-78.
21. U. Merzbach, Historical contexts, in *Emmy Noether in Bryn Mawr*, ed. by B. Srinivasan and J. Sally, Springer-Verlag, 1983, pp. 161-171.
22. A. F. Monna, L'algébrisation de la mathématique, réflexions historiques, *Comm. Math. Inst., Rijksuniversiteit*, Utrecht, 1977.
23. C. Parikh, *The Unreal Life of Oscar Zariski*, Academic Press, 1991.
24. H. Pollard and H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers*, Math. Assoc. of America, 1975.
25. M. K. Smith, Emmy Noether's contributions to mathematics, Unpublished notes (13 pp. ca 1976).
26. B. Srinivasan and J. Sally (eds.), *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer-Verlag, 1983.
27. B. L. van der Waerden, Obituary of Emmy Noether, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 100-111.
28. B. L. van der Waerden, The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 1970-71, **7**: 171-180.
29. B. L. van der Waerden, On the sources of my book *Moderne Algebra*, *Hist. Math.* 1975, **2**: 31-40.
30. B. L. van der Waerden, The school of Hilbert and Emmy Noether, *Bull. Lond. Math. Soc.* 1983, **15**: 1-7.
31. H. Weyl, Memorial address, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 112-152.

******

- I. Kleiner, "Emmy Noether and the advent of abstract algebra", in *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser (2007) 91-102.

* ایزرایل کلاینر، دانشگاه یورک، کانادا

آمار بسامدگرا به مثابهٔ نظریهٔ استنباط استقرایی*

دیبورا جی. مایو*، دی. آر. کاکس**
ترجمهٔ محمدرضا مشکانی

۱. آمار و فلسفهٔ استقرایی

۱.۱ فلسفهٔ آمار چیست؟

مبانی فلسفی آمار را می‌توان به مثابهٔ بررسی مسأله‌های شناخت‌شناسانه، مفهومی، و منطقی دربارهٔ کاربست و تفسیر روشهای آماری، به‌معنای کلی، تلقی کرد. همچون دیگر حوزه‌های فلسفهٔ علم، پژوهش در علم آمار تا حد زیادی بدون دغدغه دربارهٔ «مبانی فلسفی» به‌پیش می‌رود. با وجود این، حتی در کار حرفه‌ای آمار، بحث و جدلها دربارهٔ رویکردهای متفاوت به تحلیل آماری ممکن است بر مسائل کلّیِ ماهیتِ استنباط آماری-استقرایی اثر بگذارند و از آنها متأثر شوند، و بدین ترتیب با مباحث بنیادی و فلسفی سروکار داشته باشند. حتی کسانی که عمدتاً با کاربردها سروکار دارند اغلب علاقه‌مند به شناسایی آن اصلهای کلی‌اند که زیربنای شیوه‌های مورد استفاده و توجیه‌کنندهٔ آنها هستند و کاربران به‌دلایل کمابیش عملی به ارزش آنها واقف شده‌اند. دست‌کم در یک سطح از تحلیل، آمارشناسان و فیلسوفانِ علم بسیاری پرسشهای مشابه را مطرح می‌کنند.

- چه چیزی باید مشاهده شود و از داده‌های حاصل چه چیزهایی را به‌طور موجه می‌توان استنباط کرد؟
- داده‌ها تا چه حدّ مدلی را تأیید می‌کنند یا به آن می‌برازند؟
- آزمون خوب چیست؟
- آیا شکست در ردّ فرض H شاهدی بر «تأیید» H است؟
- چگونه می‌توان تعیین کرد که یک بی‌هنجاری ظاهری، واقعی است یا نه؟ چگونه می‌توان تقصیر یک بی‌هنجاری را به‌درستی به‌عامل آن نسبت داد؟
- اگر نگاه‌کردن به داده‌ها بر فرضی که باید امتحان شود تأثیر بگذارد، آیا این امر به‌رابطهٔ بین داده‌ها و فرض ربطی دارد؟
- چگونه می‌توان رابطه‌های کاذب را از نظمهای واقعی متمایز ساخت؟
- چگونه می‌توان یک تبیین علّی و یک فرض را توجیه و آزمون کرد؟
- چگونه می‌توان اختلاف بین داده‌های موجود و ادعاهای نظری را به‌شیوهٔ قابل اعتمادی رفع کرد؟

این پرسشهای بسیار عام که با مجادلات دیرپای فلسفهٔ علم درهم تنیده‌اند به تبیین این موضوع که چرا رشتهٔ آمار، خواه به تصریح یا به تلویح، گرایش به ورود به حیطهٔ فلسفه دارد، کمک می‌کند. برخی حتی ممکن است آمار را به نوعی «فلسفهٔ علم کاربردی» (فیشر [۱۰]، کمپتورن [۱۳])، و نظریهٔ آمار را نوعی «فلسفهٔ استنباط استقرایی کاربردی» تلقی کنند. چنانکه لیمن [۱۵] تأکید کرده است، نیمن کار خود را نه تنها کاری در آمار بلکه کاری در فلسفهٔ استقرایی نیز تلقی می‌کرد. پرسشی اساسی که در «فلسفهٔ استقرایی» هم در آمار و هم در فلسفه مطرح است این است که: ماهیت و نقش مفهومهای احتمالاتی، روشها، و مدلها در انجام استنباط، هنگامی که با داده‌های محدود، عدم حتمیت و خطا سروکار داریم، چیست؟

در این فرصتی که برای شرکت در جلسهٔ راجع به فلسفهٔ آمار در «دومین سمپوزیوم لیمن» به‌دست آورده‌ایم، توصیهٔ نیمن ([۲۲]، ص ۱۷) را به‌عنوان مبنای بحث خود برمی‌گزینیم و نظریهٔ آمار را اساساً «نظریهٔ بسامدگرای استنباط استقرایی» تلقی می‌کنیم. آنگاه این پرسش پیش می‌آید که چه تصور (یا تصوراتی) از استنباط استقرایی این گزینش را مجاز می‌سازد. برای بررسی اینکه آیا این روایت، تنها یا حتی رضایت‌بخش‌ترین روایت از استنباط استقرایی است یا نه، جالب است بررسی شود که چه مقدار پیشرفت به‌سوی روایتی از استنباط استقرایی، در مقابل رفتار استقرایی، ممکن است از آمار بسامدگرا (با عطف توجه به آزمون‌کردن و روشهای مربوط) عاید شود. این روشها اغلب برای هدفهای استنباطی، یعنی کسب آگاهی از جنبه‌های سازوکار زیربنایی مولد داده‌ها، به‌کار می‌روند، و در صورتی که شفافیت بیشتری در مورد نقشهای احتمال خطاهای فرضی در استنباط وجود داشته باشد، می‌توان از بسیاری از سردرگمی‌ها و انتقادها (مثلاً، در این مورد که آیا باید نرخ خطاها تعدیل شوند یا نه و چرا باید تعدیل شوند) جلوگیری کرد.

با پذیرش نظرات فیشر [۱۰]، دیدگاه لیمن [۱۵] دربارهٔ نیمن، و پویر [۲۶] راجع به استقرا به‌عنوان پیشینهٔ موضوع، نقش آزمونهای معنی‌داری را در پرکردن شکافهای استقرایی موجود در استنباط استقراییِ فرضیِ سنتی

مورد بحث قرار می‌دهیم. هدف ما شناسایی یک اصل اساسی دربارهٔ شواهد است که به‌وسیلهٔ آن بتوان احتمال خطاهای فرضی را برای انجام استنباط استقرایی از داده‌های خاص به‌کار بست، و نیز بررسی این نکته که این اصل چگونه می‌تواند موارد زیر را هدایت و توجیه کند: (الف) کاربردها و تفسیرهای متفاوت از سطحهای استنباط آماری در آزمون انواع مختلف فرضهای صفر، و (ب) چه موقع و چرا «اثرهای گزینش» باید در آزمون آماریِ داده‌وابسته به‌حساب آورده شوند.

۲.۱ نقش احتمال در استقرای بسامدگرا

ویژگی تعریف‌کنندهٔ استنباط استقرایی آن است که مقدمات گزاره‌های مبتنی‌بر شواهد ممکن است درست باشند ولی نتیجهٔ استنباط‌شده بدون تناقضی منطقی نادرست باشد: یعنی نتیجه «فراتر از شواهد است». احتمال در به‌دست آوردن این گونه استنباطهای فراتر از شواهد به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. اما بیش از یک راه برای استفاده از احتمال وجود دارد. پیرسون ([۲۴]، ص ۲۲۸) دو سنّت فلسفی متمایز برای به‌کار بستن احتمال در استنباط را جمع‌بندی کرده است:

«در نظر یکی از دو مکتب، درجهٔ اطمینان به یک گزاره، یعنی کمیتی که با ماهیت و میزان شواهد تغییر می‌کند، مفهومی پایه‌ای است که باید به آن مقیاس عددی نسبت داد.» مکتب دیگر به ارتباط بین آگاهی از بسامد نسبی رخ‌دادن رده‌ای خاص از پیشامدها در سلسله‌ای از تکرارها با زندگی عادی و با بسیاری از شاخه‌های علوم توجه دارد، و بر آن است که «از طریق پیوند احتمال با بسامد نسبی است که احتمال صریح‌ترین معنا را در ذهن انسان پیدا می‌کند.»

در استقرای بسامدی، به‌هر صورتی که باشد، احتمال به روال دوم به‌کار گرفته می‌شود. مثلاً، در آزمون معنی‌داری به احتمال متوسل می‌شویم تا نسبت مواردی را که در آنها فرض صفری مانند H_0 در یک نمونه‌گیری مکرر درازمدتِ مفروض رد خواهد شد، یعنی احتمال خطا، را مشخص سازیم. این تفاوت در نقش احتمال، متناظر با تفاوت در شکل استنباطی است که مقتضی انگاشته می‌شود: کاربرد قبلی احتمال معمولاً با این دیدگاه که توصیف احتمالاتی استقرا شامل کمّی‌سازیِ درجهٔ پشتیبانی یا تأیید موجود در ادعاها یا فرضهاست، رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

برخی طرفداران رویکرد بسامدگرا، که ترجیح می‌دهند اصطلاح «رفتار استقرایی» را به‌کار برند، با این نظر موافق‌اند که نقش احتمال را در آمار بسامدی توصیف کنند. در این حال، استدلال‌کنندهٔ استقرایی «تصمیم می‌گیرد که نتیجه را استنباط کند»، و احتمال مخاطرهٔ خطای مربوط را کمّی می‌سازد. این اندیشه که یک نقش احتمال در علم عبارت است از مشخص‌کردن «مخاطره‌آمیزی» یا تأمین شواهد یا شدت آزمونهایی که فرضها در معرض آنها قرار داده می‌شوند، یادآور فلسفهٔ کارل پوپر [۲۶] است. به‌ویژه، لیمن ([۱۶]، ص ۳۲) شباهت زمانی و مفهومی اندیشه‌های پوپر و نیمن را دربارهٔ «ظرافت بخشی» به موضوع استقرا با درنظرگرفتن یک فرایند آزمون فرض به‌جای استدلال استقرایی، خاطر نشان کرده است.

این مطلب درست است که پوپر و نیمن رویکردهایی مشابه مبتنی بر این اندیشه داشته‌اند که می‌توانیم از فرضی سخن بگوییم که به یک معنا خوب آزمون شده است، و این کاملاً متمایز است با اینکه درجه‌ای از احتمال، باور، یا تأیید به آن اعطا شده باشد؛ این همان «ظرافت‌بخشی به استقرا» ست. آن دو همچنین کلاً این دیدگاه مشترک را داشتند که برای آنکه داده‌ها فرضی مانند H را «تأیید» یا «پشتیبانی» کنند، آن فرض باید در معرض آزمونی قرار گیرد و در صورت نادرست‌بودن با احتمال یا توان زیاد رد شود. اما برخلاف ارتباط نزدیک اندیشه‌ها، به‌ظاهر هیچ ارجاعی به پوپر در نوشته‌های نیمن وجود ندارد (لیمن [۱۶]، ص ۳) و ارجاعهای پوپر به نیمن اندک و به‌ندرت ذی‌ربط‌اند. افزون بر آن، چون پوپر انکار می‌کرد که هیچ‌گونه ادعای استقرایی قابل‌توجیه باشد، فلسفه‌اش وی را مجبور ساخت انکار کند که حتی روشی که از آن پشتیبانی می‌کرد (حدس و ابطال) قابل اعتماد است. پوپر روشن ساخت که اگرچه H ممکن است درست باشد، وی پشتیبانی را حداکثر به‌عنوان گزارشی از عملکرد گذشتهٔ H تلقی می‌کند: این امر هیچ ادعایی را دربارهٔ قابلیت اعتماد آن در کاربردهای آینده ایجاب نمی‌کند. برعکس، ویژگی بارز آمار بسامدی آن است که بتوان احتمال آن را که اگر فرضی نادرست باشد آزمون آن را رد کند، ارزیابی و کنترل کرد. این احتمالها از فرمول‌بندی فرایند مولد داده‌ها برحسب یک مدل آماری ناشی می‌شوند.

نیمن در سراسر تحقیقات خود براهمیت یک مدل احتمالاتی برای سامانهٔ تحت بررسی تأکید می‌کند و آمار بسامدی را به مثابهٔ مدل‌بندی پدیدهٔ پایداری بسامدهای نسبیِ نتایج «آزمایه‌های» مکرر توصیف می‌کند، در عین حال که می‌پذیرد امکانات دیگری برای مدل‌بندی پدیده‌هایِ روان‌شناختیِ مرتبط با شدتهای باور، یا مرتبط با آمادگی برای شرط‌بندی روی مبلغهای مشخص، و غیره وجود دارند، در این موارد از کارناپ [۲]، دوفینتی [۸]، و سه‌ویج [۲۷] نقل قول می‌کند. به‌ویژه نیمن از دیدگاه استنباط «بسامدی» مورد قبول کارناپ به‌خاطر نادیده گرفتن نقش اساسی مدل تصادفی پدیدهٔ مورد بررسی انتقاد می‌کند. دستاورد آماری کارناپ [۲] در ارتباط با فلسفهٔ استقرایی همان دستاورد کینز [۱۴]، و دارای تأثیری مستقیم‌تر بر کاربردهای آماری است (جفریز [۱۲]).

۳.۱ استقرا و استنباط فرضی-قیاسی

هر چند ممکن است گمان کنیم که «استنباط فرضی-قیاسی» استقرا را «ظرافت می‌بخشد»، در واقع استنباطهای استقرایی‌اند که در سراسر آزمونهای تجربی انجام می‌شوند. می‌توان ملاحظه کرد که ایده‌های آزمون آماری این شکافهای استقرایی را پر می‌کنند: اگر فرض قطعی باشد می‌توانیم تابعی ذی‌ربط از داده‌ها بیابیم که مقدارش: (i) ویژگیِ ذی‌ربطِ تحت آزمون را نمایش دهد و (ii) بتوان آن را با آن فرض پیشگویی کرد. مقدار تابع را حساب می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که داده‌ها با پیشگویی موافق‌اند یا نیستند. اگر داده‌ها با پیشگویی در تعارض باشند، آنگاه یا فرض در معرض خطاست یا نوعی عامل کمکی یا پس‌زمینه‌ای دیگر را می‌توان در این بی‌هنجاری مقصر شناخت (مسألهٔ دوئم[1]).

ملاحظات آماری به دو طریق وارد بحث می‌شوند. اگر H یک فرض آماری باشد، آنگاه معمولاً هیچ برامدی اکیداً آن را نقض نمی‌کند. درنظرگرفتن داده‌ها به‌صورت ناسازگار با H صرفاً به این دلیل که آنها بسیار نامحتمل‌اند، مشکلات عمده‌ای در بردارد؛ تک‌تک برامدها در صورتی که به تفصیل تشریح

1. Duhem's problem

شوند ممکن است احتمال وقوع خیلی کمی داشته باشند. اما اساساً طبق نظر پوپر ([۲۶]، صص ۸۶، ۲۰۳) موضوع این است که آیا برامدی که امکاناً بی‌هنجار باشد نمایشگر اثری نظام‌مند و بازآفریدنی است یا نه.

تمرکز نظریهٔ پوپر بر ابطال به‌عنوان هدف آزمونها، و ابطال به‌مثابهٔ ملاک تعریف‌کننده برای یک نظریه یا فرض علمی، به روشنی و قویاً یادآور تفکر فیشر است. در حالی که شواهدی با تأثیر مستقیم عملاً غایب باشد، دیدگاههای پوپر با این بیان فیشر ([۹]، ص ۱۶) موافق است که می‌توان گفت هر آزمایش تنها برای آن است که شانس ردکردن فرض صفر را به واقعیات اعطا کند. اما، چون موضع پویر این است که هیچ‌گاه دلیلی برای استنباط دربارهٔ قابلیت اعتماد نخواهیم داشت، وی قبول ندارد که هرگز بتوانیم دلایلی برای استنباط راجع به انحرافهای بازآفریدنی داشته باشیم.

مزیت چارچوب آماری نوین آن است که احتمالها از تعریف مدل احتمال برای نمایش پدیدهٔ مورد نظر ناشی می‌شوند. اگر پوپر از ایده‌های آزمون آماری که تقریباً در همان زمانها ارائه شدند بهره گرفته بود، امکان داشت بتواند توصیف خود از ابطال را مستدل سازد.

موضوع دوم مربوط به این مسأله است که وقتی داده‌ها با پیشگویی «توافق» دارند چگونه باید استدلال کرد. استدلال بر این اساس که H مستلزم داده‌های y است، و اینکه y مشاهده شده است، برای رسیدن به این استنباط که H درست است، البته از لحاظ قیاسی نامعتبر است. مسأله‌ای اساسی در توصیف استقرایی عبارت است از اینکه بتوان این استنباط H را به معنایی تضمین کرد. امّا، مسألهٔ کلاسیک، حتی در حالتهای قطعی، آن است که بسیاری فرضهای رقیب (برخی خواهند گفت به تعداد بینهایت از آنها) نیز y را پیشگویی خواهند کرد، و ازاین‌رو مانند H قابل قبول خواهند بود. برای آنکه آزمونی گواه‌آور [فراهم‌آورندهٔ شواهد] باشد، پیشگویی از روی H باید چیزی باشد که اگر H نادرست و رقیبان مهم H درست باشند، در همان حال این پیشگویی به معنایی بسیار شگفت‌انگیز باشد و به‌آسانی قابل توجیه نباشد. اینک بحث می‌کنیم که چگونه شکافهای موجود در آزمون استقرایی را می‌توان با یک نوع شیوهٔ آماری خاص، یعنی آزمون معنی‌داری، پر کرد.

۲. آزمونهای معنی‌داری آماری

اگرچه آزمون معنی‌داری آماری طی بیش از ۵۰ سال با مباحثاتی همراه بوده و در باتلاق سوءتفاهم‌های موجود در نوشتگان آماری فرو رفته است، شماری از ویژگیهای اساسی دیدگاه استقرای بسامدی را که ما درنظر داریم، به شکل ساده‌ای نشان می‌دهد. برای مثال، ر.ک. [۲۱] و [۱۱]. ما بحث را تا حد امکان با عناصر اصلی آزمون معنی‌داری آغاز می‌کنیم: روایت ما از این موضوع قویاً مرتبط، امّا از جهاتی متفاوت، با هر دو رویکرد فیشری و نیمن-پیرسونی، دست‌کم در فرمول‌بندی معمولی آنهاست.

۱.۲ تذکرات کلی و تعریف

فرض می‌کنیم داده‌هایی تجربی دردست داریم که به‌طور دسته جمعی با y نمایانده شده‌اند و آنها را مقدارهای مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی Y درنظر می‌گیریم. داده‌های y را تنها تا آنجا مدّ نظر داریم که اطلاعاتی دربارهٔ توزیع احتمال Y به‌گونه‌ای که با مدل آماری ذی‌ربط تعریف شده، فراهم می‌سازند. این توزیع احتمال را باید نمایشی غالباً انتزاعی و یقیناً آرمانی‌شده از فرایند زیربنایی مولد داده‌ها تلقی کرد. سپس فرضی دربارهٔ توزیع احتمال داریم، که گاهی به آن فرض تحت آزمون می‌گویند اما اغلب آن را فرض صفر می‌نامند و با H_0 نشان می‌دهند. بعداً شماری از انواع کاملاً متفاوت فرضهای صفر را بیان خواهیم کرد، اما فعلاً بین آنهایی که گاهی ساده خوانده می‌شوند، به این معنی که توزیع Y را به‌طور کامل (اصولاً به‌طور عددی) مشخص می‌سازند و آنهایی که گاهی مرکب نامیده می‌شوند، به این معنی که برخی جنبه‌های معین را کاملاً مشخص می‌کنند و دیگر جنبه‌ها را نامشخص باقی می‌گذارند، تمایز قایل می‌شویم.

مثالی که از بسیاری جهات ابتدایی‌ترین مثال، هر چند مثالی تکراری، است آن است که Y متشکل از n مؤلفهٔ مستقل و هم‌توزیع است که به‌طور نرمال با میانگین μ و انحراف معیار امکاناً مجهول σ توزیع شده‌اند. اگر مقدار σ معلوم و برابر با، مثلاً، σ_0، باشد و فرض صفر آن باشد که μ برابر با μ_0، یعنی ثابتی مفروض است، فرضی ساده حاصل می‌شود. یک فرض مرکب در همان چارچوب بالا ممکن است شامل σی مجهول باشد و باز هم مقدار μ را مشخص کند.

توجه کنید که در این فرمول‌بندی لازم است جنبه‌ای مجهول از توزیع، نوعاً یک یا چند پارامتر مجهول، دقیقاً مشخص شود. فرض اینکه، مثلاً، $\mu \leq \mu_0$، یک فرمول‌بندی پذیرفتنی برای فرض صفر در آزمون فیشری نیست؛ در حالی که این صورت کلی‌ترِ فرض صفر در فرمول‌بندی‌های نیمن-پیرسون مجاز است.

هدف فوری عبارت است از آزمودن سازگاری داده‌های خاصِ تحت تحلیل با H_0، از جنبه‌ای که قرار است مشخص شود. برای انجام این کار تابعی مانند $t = t(y)$ از داده‌ها می‌یابیم، که آمارهٔ آزمون نامیده می‌شود، به‌گونه‌ای که

- هر چه مقدار t بزرگ‌تر باشد داده‌ها با H_0 ناسازگارترند؛
- وقتی H_0 درست باشد، متغیر تصادفی متناظر $T = t(Y)$ دارای یک توزیع احتمالِ (به‌طور عددی) معلوم است.

این دو شرط با شرطهای قطعی متناظر هم‌ترازند. برای ارزیابی اینکه یک ناهمخوانی واقعی با H_0 (یا انحراف بازآفریدنی از H_0) وجود دارد یا نه، به‌اصطلاح p-مقدار متناظر با هر t را به‌صورت

$$p = p(t) = P(T \geq t; H_0)$$

تعریف می‌کنیم، که شاخصی از ناهمخوانی با H_0 از جنبهٔ مورد آزمون تلقی می‌شود. دست‌کم در فرمول‌بندی آغازین، فرضهای مقابل در لایه‌های زیرین پنهان‌اند اما از جنبهٔ احتمالاتی به‌طور صریح فرمول‌بندی نمی‌شوند؛ همچنین پیشاپیش هیچ پرسشی دربارهٔ تعیین یک مقدار آستانه‌ایِ از پیش تعیین شده و «رد» H_0 اگر و تنها اگر $p \leq \alpha$، مطرح نیست. افزون بر آن، برای توجیه آزمونها صرفاً به رفتار درازمدت متوسل نخواهیم شد بلکه یک ملاک عقلی استنباطی یا مبتنی‌بر شواهد را شناسایی خواهیم کرد. اینک در این باره بیشتر توضیح می‌دهیم.

۲.۲ رفتار استقرایی در برابر استنباط استقرایی

این استدلال را می‌توان روایتی آماری از استدلالِ موسوم به برهان خلف درنظر گرفت که در منطق قیاسی معتبر است. در این روش، انکار یک فرض H از ترکیب گزارهٔ H مستلزم E است با این اطلاع که E نادرست است، استنباط می‌شود. چون اگر $H_{\circ}$ درست می‌بود احتمال زیادِ $(p-1)$ وجود می‌داشت که نتیجه‌ای کمتر معنی‌دار رخ دهد، می‌توانیم انتخاب pـ مقدارهای کوچک را که درست حساب شده باشند، به‌عنوان شواهدی علیه $H_{\circ}$ توجیه کنیم. چرا؟ به دو دلیل عمده:

اولاً چنین قاعده‌ای باعث می‌شود که در درازمدت، وقتی $H_{\circ}$ درست باشد، نرخهای خطا (یعنی، ردکردن‌های نادرست) کوچک باشند، که استدلالی رفتارگرایانه است. هماهنگ با نگرش مبتنی‌بر ارزیابی خطا به آمار، می‌توانیم به هر مقدار خاص مثلاً p، تفسیر فرضی زیر را نسبت دهیم: فرض کنید که قرار است داده‌ها را تنها شواهد قاطع علیه $H_{\circ}$ قلمداد کنیم. دراین‌صورت، در تکرارهای فرضی، $H_{\circ}$ به‌نسبت درازمدت p از مواردی که در آنها واقعاً درست است، رد خواهد شد. اما، آگاهی از این احتمالهای خطای فرضی را می‌توان برای حمایت از توجیهی متمایز درنظر گرفت.

بدین‌گونه است که چنین قاعده‌ای راهی را برای تعیین اینکه مجموعه‌ای از داده‌های خاص شواهدی از ناهمخوانی با $H_{\circ}$ است یا نه، پیش پای، می‌گذارد.

به‌ویژه، یک pـ مقدارکوچک، به شرط آنکه درست حساب شود، شواهدی از اختلاف با $H_{\circ}$ را از حیث جنبهٔ مورد امتحان به دست می‌دهد، در حالی که pـ مقداری که کوچک نباشد شواهدی از همخوانی یا سازگاری با $H_{\circ}$ را در اختیار می‌گذارد (که در اینجا بین این حالت و شواهد مثبت به نفع $H_{\circ}$ آن‌گونه که در زیر در بخش ۲ـ۳ بررسی می‌شود، باید فرق گذاشت). در کاربردها توجه ما نوعاً به این است که آیا p در دامنه‌ای مانند $p \geq ۰٫۱$ واقع است یا نه، که می‌توان آن را به مثابهٔ همخوانی معقول با $H_{\circ}$ از جنبهٔ مورد آزمون تلقی کرد، یا اینکه p نزدیک به عددهای قراردادی از قبیل ۰٫۰۵، ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۱ است یا نه. شیوهٔ معمول در اکثر کاربردها آن است که مقدار مشاهده شدهٔ p را به‌صورت تقریبی اعلام کنند. مقدارکوچک p بیانگر یکی از موارد زیر است: (i) $H_{\circ}$ نادرست است (اختلافی با $H_{\circ}$ وجود دارد) یا (ii) اساس آزمون آماری معیوب است، اغلب از این نظر که خطاهای واقعی کم‌براورد شده‌اند، مثلاً به‌دلیل مفروضات نامعتبر استقلال، یا (iii) نقش شانس فوق‌العاده بوده است.

بخشی از هدف طرح پژوهشی خوب و انتخاب مناسب روش تحلیل این است که با کسب اطمینان از اینکه ارزیابیهای خطا مناسب‌اند، از شقّ (ii)ی بالا پرهیز شود.

به هیچ وجه قصد آن نیست که بگوییم آزمون معنی‌داری نوعاً تنها تحلیلی خواهد بود که گزارش می‌شود. در واقع، یک اصل بنیادی مفهوم یادگیری استقرایی که بیشترین سازگاری را با فلسفهٔ بسامدگرا دارد آن است که استنباط استقرایی لازم می‌نماید که استدلالها و استنباطهای قاطع از طریق به‌هم پیوستن چند خرده نتیجهٔ متفاوت انجام شود. هر چند به‌خاطر پیچیدگی داستان، توصیف شسته رفته‌ای از آن، مثلاً چنانکه گویی تک‌الگوریتمی یگانه می‌تواند کل استنباط استقرایی را نمایش دهد، بسیار مشکل است، حاصل کار گزارشی است که به نوع استدلالهای نابی که دانشمندان به قصد کسب دانش قابل اعتماد و درک یک رشتهٔ علمی بنا می‌نهند نزدیک می‌شود.

در میان این پیچیدگی، استدلال آزمون معنی‌داری مفهومی نسبتاً سرراست از ارزیابی شواهد ناهمخوان با $H_{\circ}$ را در زمینه‌ای آماری بازمی‌تاباند، مفهومی که شاید پوپر در ذهن خود داشت اما فاقد ابزارهایی برای تحقق بخشیدن به آن بود. ایدهٔ اساسی در اینجا آن است که احتمالهای خطا را می‌توان برای ارزیابی «مخاطره‌آمیز بودن» پیشگوییهایی که لازم است $H_{\circ}$ در آنها صدق کند به‌کار بست، این کار با سنجش قابلیت اعتماد آزمون در تمایز قائل شدن بین اینکه فرایند واقعی مولد داده‌ها با فرایند توصیف شده در $H_{\circ}$ همخوان است یا نه، انجام می‌شود. آگاهی از این ظرفیتِ گواه‌آوری امکان می‌دهد که تعیین کنیم آیا شواهد قوی مبنی‌بر ناهمخوانی وجود دارند یا نه. برای تعیین اینکه شواهدی علیه $H_{\circ}$ وجود دارند یا نه، استدلال برپایهٔ اصل بسامدگرایانهٔ زیر بنا نهاده می‌شود.

شواهد بسامدگرا (ش‌ب) (i). داده‌های y شواهدی (قوی) علیه $H_{\circ}$اند، یعنی شواهدی (قوی) مبنی بر وجود اختلاف با $H_{\circ}$اند اگر و تنها اگر هنگامی که $H_{\circ}$ توصیفی درست از سازوکار مولد y باشد، آنگاه با احتمال زیاد، این سازوکار نتیجه‌ای بدهد که کمتر از آنچه به‌وسیلهٔ y نشان داده می‌شود، ناهمخوان باشد.

یک فرع **ش‌ب** آن است که y شواهدی (قوی) علیه $H_{\circ}$ نیست اگر احتمال نتیجه‌ای ناهمخوان‌تر خیلی کم نباشد، حتی اگر $H_{\circ}$ درست باشد. یعنی، اگر احتمالی نسبتاً زیاد برای نتیجه‌ای ناهمخوان‌تر وجود داشته باشد، حتی اگر $H_{\circ}$ درست باشد، آنگاه $H_{\circ}$ از جنبهٔ مورد آزمون با y همخوانی دارد.

مطلبی که قدری بحث‌انگیزتر است تفسیر شکست در یافتن pـ مقداری کوچک است؛ امّا برپایهٔ صورت فوق از **ش‌ب** می‌توان شرح و تفسیری رسا برای آن عرضه کرد.

۳.۲ شکست و تأیید

مشکل درنظرگرفتن مقداری متوسط از p به مثابهٔ شاهدی به نفع $H_{\circ}$، آن است که حتی اگر رقیبان $H_{\circ}$ که جداً با $H_{\circ}$ تفاوت دارند درست باشند، همخوانی بین $H_{\circ}$ و y ممکن است رخ دهد. این موضوع به‌ویژه وقتی حاد است که اندازهٔ داده‌ها محدود باشد. اما، گاهی می‌توانیم شواهدی به‌نفع $H_{\circ}$ بیابیم، که به‌مثابهٔ ادعایی درک می‌شود مبنی براینکه اختلافی، عیبی، یا خطایی در بین نیست، و این کار را می‌توانیم به‌وسیلهٔ آزمونهایی انجام دهیم که با احتمال زیاد، در صورت وجود اختلاف، آن را نشان می‌دادند. همان‌قدرکه نام نیمن با فنون تصمیم‌گونهٔ خودکار همراه است، دست‌کم در عمل، هم او و هم پیرسون، انتخاب مقتضی احتمال خطاها را بازتاب‌دهندهٔ بافتار ویژهٔ مورد نظر تلقی می‌کردند. (نیمن [۲۳]، پیرسون [۲۴]).

در اینجا دو موضوع متفاوت مطرح است. یکی اینکه آیا مقداری خاص از p باید به مثابهٔ آستانه‌ای در هرکاربرد به کار رود یا نه. این همان شیوه‌ای است که اگر نه در همه ولی در اکثر شرحهای رسمی از نظریهٔ نیمن‌ـ پیرسون بیان می‌شود. موضوع دوم آن است که آیا کنترل نرخ خطاهای درازمدت، توجیهی برای آزمونهای بسامدگراست یا آیا توجیه نهایی آزمونها در نقش آنها

در تفسیر شواهد موجود در موارد خاص نهفته است یا نه. در شرحی که در اینجا عرضه می‌شود، مقدار تحقق‌یافتهٔ p، دست کم به تقریب، گزارش می‌شود، و شرحِ مبتنی‌بر «بپذیر-ردکن» صرفاً شرحی فرضی است که به p تفسیری عملیاتی ببخشد. مشهور است که پیرسون [۲۴] از تفسیر رفتارگرای تنگ‌نظرانه پشتیبانی نمی‌کرد (مایو [۱۷]). نیمن نیز، دست‌کم در بحث خود با کارناپ (نیمن [۲۳])، به‌نظر می‌رسد که به تمایزی بین تفسیرهای رفتاری و استنباطی اشاره دارد.

در این بحث، نیمن درکوششی برای روشن ساختن ماهیت آمار بسامدگرا، نگران اصطلاح «درجهٔ تایید» بود که کارناپ به‌کار برده است. نیمن در چارچوب مثالی که در آن یک آزمون بهینه نتوانسته بود H_0 را «رد کند»، به بررسی این مطلب پرداخت که آیا این آزمون H_0 را «تایید» کرده است یا نه. وی تذکر داد که این امر بستگی به‌معنای واژه‌هایی نظیر «تأیید» و «اطمینان» دارد و در بافتاری که در آن H_0 «ردنشده» بوده است تلقی آن به مثابهٔ تأیید H_0 در صورتی که این آزمون در واقع شانس اندکی برای کشف اختلافی مهم با H_0 داشته باشد، حتی اگر آن اختلاف وجود داشته باشد، «خطرناک» است. از سوی دیگر، اگر این آزمون توان قابل توجهی می‌داشت که آن اختلاف را کشف کند وضعیت «از بیخ و بن متفاوت» می‌بود.

نیمن بر مغلطه‌ای مرتبط با «نتایج منفی» تأکید می‌کند به این مضمون که اگر داده‌های y یک نتیجهٔ آزمونی به‌دست دهند که از لحاظ آماری تفاوت معنی‌داری با H_0 (مثلاً، فرض صفر «بی‌اثر» بودن) نداشته باشد، و با این حال آزمون مذکور احتمال کوچکی برای رد H_0، حتی زمانی که اختلاف جدی در بین است، داشته باشد آنگاه y شواهد خوبی برای استنباط اینکه H_0 از سوی y تایید می‌شود، نیست. طبق این استدلال، تنها اگر شانس آنکه آزمون به‌درستی توانسته باشد اختلافی را کشف کند زیاد باشد، می‌توان از نبودِ اختلاف مطمئن بود.

نیمن این وضعیت را با تفسیرهای مقتضی برای رفتار استقرایی مقایسه می‌کند. در اینجا تأیید و اطمینان را می‌توان برای توصیف انتخاب عمل به‌کار بست، مثلاً در خودداری از اعلام یک کشف یا تصمیمی مبنی بر اینکه H_0 را رضایت‌بخش درنظر بگیریم، منطق کار، منطق رفتارگرای عملگرایانه دربارهٔ کنترل خطاها در درازمدت است. این تمایز بدان معنی است که حتی درنظر نیمن، برای شواهد مربوط به تصمیم‌گیری ممکن است ملاکی متمایز از شواهد مربوط به باورداشتن لازم باشد، اما متاسفانه نیمن شق دوم را به صراحت تشریح نکرد. ما این نظر را در پیش می‌نهیم که اصل شواهدیِ مورد نیاز اقتباسی از **ش ب (i)** برای حالتی است که p-مقدار کوچک نیست:

ش ب (ii). مقدار متوسطی از p-مقدار شاهدی از نبودِ اختلاف بین δ و H_0 است تنها اگر احتمال زیادی وجود داشته باشد که آزمون، برازشی بدتر به H_0 (یعنی، p-مقدار کوچک‌تری) به‌دست می‌داد در صورتی که اختلافی مانند δ وجود می‌داشت. **ش ب (ii)** مخصوصاً در بافتار فرضهای «نشانده‌شدهٔ» (زیر) پیش می‌آید.

آنچه نوع استدلال فرضی را به حالت مورد نظر مربوط می‌سازد صرفاً یا عمدتاً مقدار پایین نرخ خطاهای درازمدتِ وابسته به استفاده از این ابزار (یا آزمون) با این روال نیست؛ بلکه چیزی است که آن نرخهای خطا دربارهٔ منبع یا پدیدهٔ مولد داده‌ها آشکار می‌سازند. محاسبات مبتنی‌بر خطا اطمینان خاطری می‌بخشند که از تفسیرهای نادرست شواهد در حالت خاص پرهیز می‌شود. برای تشخیص تفاوت بین این توجیه «شواهدیِ» استدلال آزمونهای معنی‌داری، و توجیه «رفتارگرا»، ممکن است بررسی یک مثال غیررسمی از کاربرد این استدلال در «حالت خاص» سودمند باشد. مثلاً، فرض کنید که افزایش وزن به‌وسیلهٔ روشهای کاملاً کالیبده[1] و پایدار، در صورت امکان با استفاده از چند ابزار اندازه‌گیری و مشاهده‌گر، اندازه گرفته می‌شوند و نتایج طی دورهٔ زمانی موردنظر آزمون، تغییر ناچیزی را نشان می‌دهند. این امر را می‌توان به مثابهٔ دلیلی برای این استنباط تلقی کرد که افزایش وزن افراد در محدوده‌ای که توسط حساسیت ترازوها تعیین می‌شود چشم پوشیدنی است. چرا؟

هر چند شخص با پیروی از چنین شیوه‌ای در درازمدت به‌ندرت افزایش وزنها را نادرست گزارش خواهد کرد، این تنها دلیل منطقی برای این استنباط خاص نیست. بلکه توجیه آن است که خواص احتمالاتیِ خطایِ شیوهٔ توزین، آنچه را که واقعاً در این مورد خاص مطرح است نشان می‌دهد. (باید بین این تفسیر و تفسیر شواهدیِ نظریهٔ نیمن-پیرسون که برنباوم [۱] آن را پیشنهاد کرده، و داده‌وابسته است، فرق گذاشت.)

آزمون معنی‌داری یک ابزار اندازه‌گیری برای همخوانی با فرضی ویژه است که، همچون ابزارهای اندازه‌گیری به‌طور عام، با عملکردش درکاربردهای مکرر، در این مورد نوعاً به‌طور نظری یا با شبیه‌سازی، کالیبده می‌شود. درست همانند کاربست ابزارهای اندازه‌گیری، که در موردی خاص به‌کار برده می‌شوند، ویژگیهای عملکرد را برای انجام استنباط دربارهٔ جنبه‌های چیز خاصی که اندازه‌گیری می‌شود، جنبه‌هایی که ابزار اندازه‌گیری به‌طور مقتضی قادر به آشکارسازی آنهاست، به‌کار می‌گیریم.

البته برای آنکه این وضع برقرار باشد، محاسبات درازمدت احتمالاتی باید برای مورد تحت بررسی مناسب و عملی باشند. اجرای این موضوع در نظریهٔ آمار در بحثهای استنباط شرطی، انتخاب توزیع مقتضی برای تعیین مقدار p، ظاهر می‌شود. به‌نظر می‌رسد مشکلاتی که این امر به همراه دارد بیشتر فنی‌اند تا مفهومی، و در اینجا به آنها نمی‌پردازیم جز آنکه تذکر دهیم که اقدام به‌کاربست (یا کوشش برای به‌کار بستن) **ش ب** می‌تواند به مشخص‌کردن آزمون مناسب کمک کند.

۳. انواع فرض صفر و استنباطهای استقرایی متناظر آنها

در تحلیلِ آماری داده‌های علمی و فن‌شناختی، تقریباً همیشه اطلاعاتی بیرونی وجود دارند که باید وارد بحث شوند تا از آنچه داده‌ها دربارهٔ پرسش اولیهٔ مورد نظر نشان می‌دهند، نتیجه‌گیری شود. معمولاً این ملاحظاتِ پس‌زمینه‌ای نه از طریق تخصیص احتمال بلکه از راه شناسایی پرسشی که باید مطرح شود، طراحی بررسی، تفسیر نتایج آماری، و ربط‌دادن آن استنباطها به استنباطهای علمی اولیه و کاربست آنها برای گسترش و پشتیبانی نظریهٔ زیربنایی وارد بحث می‌شوند. برای آنکه ابزارها به‌گونه‌ای عاری از مغلطه و طبق منظور به‌کار روند باید داوریهایی دربارهٔ اینکه چه چیزی مناسب و آگاهی بخش است در اختیار گذاشته شود. با وجود این، کاربست‌های نظام‌مندی وجود دارند که می‌توان آنها را متناظر با انواع آزمون و انواع فرضهای صفر، تشریح کرد.

1. well-calibrated

۱.۳ انواع فرض صفر

اکنون شماری از انواع فرض صفر را تشریح می‌کنیم. در بحث زیر، بحثی را که کاکس ([۴]، [۵]) و کاکس و هینکلی [۶] عرضه کرده‌اند گسترش می‌دهیم. هدف ما در اینجا آن نیست که راهنمایی برای مجموعهٔ همهٔ بافتارهایی که پژوهشگر ممکن است با آنها روبه‌رو شود، ارائه کنیم، بلکه برخی تفسیرهای متفاوت از نتایج آزمون و pـمقدارهای مربوط را توضیح می‌دهیم. در بخش ۴.۳، تفسیر ژرف‌تر استنباطهای استقرایی متناظر را که، به‌نظر ما، با استدلال pـمقداری مجازند (و مجاز نیستند)، بررسی می‌کنیم.

۱. فرضهای صفر نشانده‌شده. در این مسأله‌ها نه تنها یک مدل احتمال برای فرض صفر فرمول‌بندی می‌شود، بلکه مدلهای دیگری نیز فرمول‌بندی می‌شوند که امکانهای دیگری را نمایش می‌دهند که در آنها فرض صفر نادرست است، و بنابراین، معمولاً امکانهایی را نمایش می‌دهند که اگر وجود داشته باشند مایلیم آنها را کشف کنیم. در بین شماری از وضعیتهای ممکن، در معمول‌ترین آنها خانواده‌ای پارامتری از توزیعها وجود دارد که با پارامتری مجهول مانند θ اندیس‌گذاری می‌شود؛ θ به مؤلفه‌های $\theta = (\phi, \lambda)$ افراز می‌شود به‌گونه‌ای که فرض صفر عبارت باشد از $\phi = \phi_0$، و λ یک پارامتر مزاحم مجهول است و دست‌کم در بحث آغازین، ϕ تک‌بُعدی است. توجه معطوف به فرضهای مقابل $\phi > \phi_0$ است.

فرمول‌بندی بالا این مزیت فنی را دارد که تا حد زیادی آمارهٔ آزمون مناسب $t(y)$ را با این شرط که حساس‌ترین آزمون ممکن با توجه به داده‌هایِ در دست باشد، تعیین می‌کند.

دو روایت متفاوت از فرمول‌بندی بالا وجود دارد. در یکی، خانوادهٔ کامل، یک فرمول‌بندی موقتی است که نه‌چندان به‌عنوان پایه‌ای ممکن برای تفسیر نهایی بلکه بیشتر به‌عنوان ابزاری برای تعیین یک آمارهٔ آزمون مناسب درنظر گرفته می‌شود. یک مثال، استفاده از مدلی درجهٔ دوم برای آزمون‌کردن رسایی یک رابطهٔ خطی است؛ به‌طور کلی رگرسیونهای چندجمله‌ای پایه‌ای ضعیف برای تحلیل‌نهایی‌اند اما برای کشف انحرافهای کوچک از یک صورت مفروض، مناسب و قابل تفسیرند. در حالت دوم، خانوادهٔ مذکور پایه‌ای محکم برای تفسیر است. بازه‌های اطمینان برای ϕ تفسیری معقول دارند.

یک امکان دیگر، که خیلی به‌ندرت پیش می‌آید، آن است که یک فرض صفر ساده و یک فرض مقابل سادهٔ تک وجود دارد، یعنی تنها دو توزیع ممکن تحت بررسی‌اند. اگر این دو فرض برپایه‌ای برابر درنظر گرفته شوند، بهتر است این تحلیل به‌عنوان یک تحلیل تشخیصی فرضی یا واقعی در نظر گرفته شود یعنی تعیین اینکه کدام یک از دو امکان (یا به‌طور کلی‌تر کدام یک از چند امکان محدود) مناسب‌تر است اگر با امکانهای مختلف برپایه‌ای از لحاظ مفهومی برابر رفتار شود.

دراین حالت دو رویکرد کلی وجود دارند. یکی کاربستِ نسبت درستنمایی به‌عنوان شاخصی از برازش نسبی است، که امکان دارد همراه با کاربردی از قضیهٔ بیز باشد. دیگری، که با رویکرد احتمال خطا همخوانی بیشتری دارد، آن است که هر مدل را به‌نوبت به مثابهٔ فرض صفر و دیگری را به‌عنوان فرض مقابل می‌گیرد و منجر به ارزیابی این امر می‌شود که آیا داده‌ها همخوان با هر دو فرض، یکی از آنها، یا هیچ یک از آنهاست. با کاربست **ش ب** در این حالت، وقتی که در چارچوب نیمن-پیرسون درآمده باشد، اساساً یک تفسیر نتیجه می‌شود.

این سه حالت را به‌ترتیب خانواده‌ای صوری از فرضهای مقابل، خانواده‌ای خوش‌بنیاد از فرضهای مقابل، و خانواده‌ای از امکانهای گسسته می‌نامیم.

۲. تقسیم فرضهای صفر. در بسیاری از موارد، مخصوصاً درکاربردهای فن‌شناختی اما نه تنها در آنها، کانون توجه ما مقایسهٔ دو یا چند شرط، فرایند یا تیمار است بدون هیچ دلیل خاصی برای اینکه انتظار داشته باشیم آنها دقیقاً یا تقریباً همانند باشند، مثلاً دارویی جدید در مقایسه با دارویی استاندارد ممکن است نرخهای بقا را افزایش یا کاهش دهد.

در واقع، شخص دو آزمون را ترکیب می‌کند، نخست برای امتحان این امکان که مثلاً $\mu > \mu_0$، دیگری برای $\mu < \mu_0$. در این حالت، این آزمون دوطرفه هر دو آزمون یک طرفه را، هر یک با سطح معنی‌داری خود، ترکیب می‌کند. سطح معنی‌داری به‌دلیل «اثر گزینش»، دوبرابر pی کوچک‌تر است (کاکس و هینکلی [۶]، ص ۱۰۶). در بخش ۴ به این موضوع برمی‌گردیم. در این حال فرض صفرِ مبنی‌بر تفاوتِ صفر، وضعیتهای ممکن را به‌دو ناحیهٔ کیفیتاً متفاوت نسبت به ویژگی مورد آزمون تقسیم می‌کند، وضعیتهایی که در آنها یکی از تیمارها نسبت به دیگری برتر است و وضعیتهایی که در آنها همان تیمار بدتر است.

۳. فرضهای صفرِ مبنی بر نبودِ ساختار. در بسیاری از پژوهشهای کمابیش تجربی در رشته‌هاییِ که پایهٔ نظری محکمی ندارند، داده‌ها به امید یافتن ساختاری، اغلب به‌صورت وابستگیهایی بین ویژگیهای ناشناخته، گردآوری می‌شوند. این کار در همه‌گیرشناسی به‌صورت آزمونهایی از عاملهای خطر بالقوه برای بیماری‌ای که علّت ناشناخته دارد، در می‌آید.

۴. فرضهای صفر مبتنی‌بر رسایی مدل. حتی در حالت کاملاً نشانده شده که در آن خانواده‌ای کامل از توزیعهای تحت بررسی وجود دارند و این خانواده‌ها به‌طور بالقوه آنقدر غنی‌اند که خواه فرض صفر درست یا غلط باشد داده‌ها را تبیین می‌کنند، این امکان وجود دارد که اختلافی مهم با مدل وجود داشته باشد که گسترش، اصلاح، یا جانشین‌کردن کامل مدل به‌کاررفته برای تفسیر را توجیه کند. در بسیاری از رشته‌ها، مدلهای آغازین به‌کار رفته برای تفسیر کاملاً آزمایشی‌اند؛ در دیگر رشته‌ها، به‌خصوص در برخی زمینه‌های فیزیک، مدلها پایه‌ای محکم در نظریه و آزمایشهای گسترده دارند. اما در همهٔ موارد اگرچه به‌صورت غیررسمی، امکان مشخص‌کردن نادرست مدل را باید پذیرفت.

دراین صورت انتخابی نه‌چندان آسان بین یک آمارهٔ آزمون نسبتاً خاص‌نگر که نسبت به انواع خاص نارسایی مدل (جهتهای انحراف خاص) حساس است، و آزمونهای موسوم به کلی‌نگر که دربارهٔ ماهیّت انحرافها مفروضات قوی ندارند، مطرح است. روشن است که آزمونهای اخیر نسبت به فرضهای مقابل خاص ناحساس، و اغلب فوق‌العاده ناحساس، خواهند بود. این دونوع به‌طور کلی با آزمونهای خی‌دو با درجه‌های آزادی کم و زیاد متناظرند. برای آزمون خاص‌نگر می‌توانیم یا آمارهٔ آزمونی مناسب، یا تقریباً به‌طور هم‌ارز، خانواده‌ای تصوری از فرضهای مقابل را برگزینیم. مثلاً برای امتحان توافق n مشاهدهٔ مستقل با یک توزیع پواسون در واقع می‌توانیم توافق واریانس نمونه با میانگین نمونه را به‌وسیلهٔ یک آزمون پراکنش خی‌دو (یا معادل دقیق آن) آزمون کنیم یا توزیع پواسون را مثلاً در یک خانوادهٔ دوجمله‌ای منفی بنشانیم.

۵. فرضهای صفر پرمایه. در برخی بافتارهای خاص، نتایج مبتنی برفرض صفر ممکن است شواهدی جدی برای ادعاهای علمی در بافتارهایی باشند

که شایستهٔ قرارگرفتن در یک رستهٔ پنجم‌اند. در اینجا، نظریه‌ای مانند $\mathcal{T}$ که برای آن شواهد نظری و/یا تجربی قابل ملاحظه‌ای وجود دارند، پیشگویی می‌کند که H_0، دست کم با تقریب بسیار خوبی، وضعیتِ واقعی است.

(الف) در یک روایت، ممکن است نتایجی به‌ظاهر بی‌هنجار برای $\mathcal{T}$ وجود داشته باشند، و آزمونی طراحی می‌شود که مجال کافی برای آشکار ساختن ناهمخوانی با H_0 در صورتی که این نتایج بی‌هنجار، واقعی باشند، داشته باشد.

(ب) در روایت دوم، نظریه‌ای رقیب مانند $\mathcal{T}^*$ ناهمخوانی مشخصی با H_0 را پیشگویی می‌کند و آزمون معنی‌داری برای تشخیص بین $\mathcal{T}$ و آن نظریهٔ $\mathcal{T}^*$ (در قلمرویی که تاکنون آزمون نشده) طراحی می‌شود.

به‌عنوان مثالی از (الف)، نظریهٔ فیزیکی حاکی از آن است که چون کوانتومِ انرژی در میدانهای برقاطیسی غیریونده، مانند انرژیهای حاصل از خطهای انتقال فشارقوی، بسیار کمتر از حد لازم برای شکستن پیوند ملکولی است، نباید واقع شدن در معرض این‌گونه میدانها اثر سرطان‌زایی داشته باشد. بدین‌ترتیب، در یک آزمایش تصادفیده که در آن دو گروه موش تحت شرایط همانند هستند جز آنکه یک گروه در معرض چنین میدانی قرار داده می‌شود، فرض صفر مبنی بر اینکه نرخهای شیوع سرطان در این دو گروه یکسان‌اند ممکن است کاملاً درست باشد و در تحلیل داده‌ها در درجهٔ اول اهمیت و توجه باشد. البته فرض صفری از این نوع کلّی لازم نیست که مدلی با اثر صفر باشد؛ ممکن است اشاره به توافقی با یافته‌های تجربیِ کاملاً اثبات‌شدهٔ قبلی یا نظریه‌ای داشته باشد.

۲.۳ برخی نکته‌های کلی

در بالا اساساً آزمونهای یک‌طرف را توصیف کردیم. گسترش بحث به آزمونهای دوطرفه برخی مسائل را در زمینهٔ تعریف پیش می‌آورد اما در اینجا دربارهٔ آنها بحث نخواهیم کرد.

چند نوع از فرضهای صفر مستلزم مشخص کردن احتمال به‌طور ناقص‌اند. یعنی ممکن است تنها فرض صفر به روشنی مشخص شده باشد. می‌توان استدلال کرد که در فرمول‌بندی کامل احتمال باید همیشه هم فرض صفر و هم امکانات فرضهای مقابلِ شدنی را درنظر گرفت. این امر شاید از لحاظ اصولی معقول به‌نظر برسد اما به‌مثابهٔ راهبردی که مستقیماً به‌کار برده شود، اغلب شدنی نیست؛ در هر حالت، مدلهایی که همهٔ امکانات معقول را دربر خواهند گرفت باز هم ناکامل خواهند بود و با اثرهای جانبی زیان‌بخش خود حتی مسأله‌های ساده را پیچیده‌تر خواهند ساخت.

اما توجه داشته باشید که در همهٔ فرمول‌بندیی‌هایی که در اینجا به‌کار گرفته شده‌اند نوعی مفهوم تبیین داده‌ها به‌صورت بدیلی برای فرض صفر از راه انتخاب آمارهٔ آزمون در بین است؛ موضوع این است که چه هنگام این انتخاب از طریق یک فرمول‌بندی احتمالاتی صریح صورت می‌گیرد. اصل کلّی شواهد **ش ب** کمک می‌کند بفهمیم که در بافتارهایی مشخص، حالت قبلی برای انجام یک ارزیابی شواهدی کفایت می‌کند (ر.ک. بخش ۳.۳).

اما، گاهی استدلال می‌شود که انتخاب آمارهٔ آزمون را می‌توان برپایهٔ توزیع داده‌ها تحت فرض صفر به تنهایی بنا نهاد، در واقع با انتخاب منفیِ لگاریتم احتمال به‌عنوان آمارهٔ آزمون، و بدین‌ترتیب با جمع بستن احتمالها روی همهٔ نقاطی از نمونه که به اندازهٔ مقادیر مشاهده شده یا کمتر از آنها محتمل‌اند. هر چند این کار اغلب به نتایج معقول می‌انجامد در اینجا این مسیر را دنبال نخواهیم کرد.

۳.۳ استنباطهای استقرایی برپایهٔ برامدهای آزمونها

استدلال براساس آزمون معنی‌داری چگونه استنباطهای استقرایی یا ارزیابیهایِ شواهدی را در حالتهای گوناگون تأیید می‌کند؟ تفسیر عملیاتیِ فرضیِ pـمقدار روشن است اما پیامدهای ژرف‌ترِ مربوط به یکی از دومقدار متوسط یا کوچک pـمقدار چیست‌اند؟ این پیامدها به‌شدت به (i) نوع فرض صفر، و (ii) ماهیت انحراف یا فرض مقابل تحت بررسی، وابسته‌اند و همچنین (iii) به اینکه آیا به تفسیر مجموعه‌هایی خاص از داده‌ها علاقه‌مندیم، چنانکه در اکثر کارهای آماری تفصیلی پیش می‌آید، یا اینکه مدلی کلی برای تحلیل و تفسیر در یک رشتهٔ علمی را بررسی می‌کنیم. حالت اخیر به فرمول‌بندی سنتی نیمن-پیرسون مبنی بر تثبیت یک سطح بحرانی و به‌معنایی، پذیرفتن H_0 اگر $p > \alpha$ و ردکردن H_0 در غیر این‌صورت، نزدیک است. برخی نواقص آشنای کاربستِ طبق عادت یا مکانیکیِ pـمقدار را بررسی می‌کنیم.

۴.۳ کاربستِ عادت‌وارِ pـمقدارها

تصورکنید که $\alpha = ۰.۰۵$ گرفته می‌شود و نتایج در صورتی به مقاله‌ای قابل انتشار می‌انجامد که تنها به‌ازای pی ذی‌ربط، داده‌ها $p < ۰.۰۵$ را نتیجه دهند. منطق کار از نوع منطق رفتارگراست که پیش‌تر توضیح داده شد. اما در اکثریت عمدهٔ بحثهای آماری در این زمینه، که سابقه‌اش به‌کار تیتس [۳۲] و قبل از آن برمی‌گردد، چنین رویکردی محکوم می‌شود، هم به‌واسطهٔ این نگرانی که شیوه‌های مکانیکی، خودکار، و بدون تفکر را تشویق می‌کند، و هم به‌خاطر تأکید این رویکرد بر براوردِ اثرهای ذی‌ربط علاوه بر آزمون فرضها. در واقع چند مجلهٔ علمی در برخی رشته‌ها عملاً استفاده از pـمقدار را ممنوع کرده‌اند. در دیگر رشته‌ها، مانند تعدادی از زمینه‌های همه‌گیرشناسی، معمول آن است که بر بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی تأکید شود که با جریان اصلی بحث آماری هماهنگ است. البته، این کار شخص را از نیاز به ارائهٔ توضیح مقتضی بسامدگرایانه دربارهٔ کاربست و تفسیر سطحهای اطمینان، که در اینجا ارائه نمی‌کنیم، نمی‌رهاند (ر.ک. بخش ۶.۳).

با وجود این، کاربستِ نسبتاً مکانیکی pـمقدارها، در عین حال که در معرض ریشخند است، خیلی دور از عمل رایج در برخی رشته‌ها نیست؛ و این روش به‌عنوان یک ابزار غربالگری، با به رسمیت‌شناختن امکان خطا، وکاستن از امکان انتشار نتایج گمراه‌کننده، به‌کارگرفته می‌شود. یک نقش مشابه آزمونها در کار بنگاههای ناظر، به‌ویژه FDA (بنگاه دارویی فدرال آمریکا)، دیده می‌شود. ملزم ساختن بررسیها به نشان دادن مقداری از p که کوچک‌تر از یک سطح تخصیص یافته به‌وسیلهٔ آزمونی از پیش‌تعیین شده باشد، ممکن است باعث انعطاف‌ناپذیری شود، و انتخاب سطح بحرانی دلخواه باشد. با این حال، چنین شیوه‌هایی دارای محاسن بی‌طرفی و استقلال نسبی از دستکاریهای نامعقول‌اند. هر چند پایبندی به یک pـمقدار ثابت ممکن است باعث سوگیری نوشتگان به سمت نتیجه‌گیری‌های مثبت شود، اطمینانی خوشایند از برخی خواص درازمدت معلوم و مطلوب را به‌همراه می‌آورد. ملاحظه خواهد شد که این خواص به‌ویژه برای مثال ۳ی بخش ۲.۴ مناسب‌اند.

۵.۳ کاربستِ شواهدی-استقرایی p-مقدارها

اکنون به کاربست آزمونهای معنی‌داری روی می‌آوریم که هر چند رایج‌ترند، در عین حال، به‌عنوان یک ابزارِ تنها برای کمک به تحلیل مجموعه‌های خاص از داده‌ها، و/یا بنانهادن استنباطهای استقرایی براساس داده‌ها، بحث‌انگیزترند. در این بحث پیشاپیش فرض می‌شود که توزیع احتمال مورد استفاده برای ارزیابی p-مقدار تاحد ممکن برای داده‌های خاصِ تحت تحلیل مناسب است.

اصل بسامدگرای کلی برای استدلال استقرایی، **ش ب**، یا چیزی مانند آن، می‌تواند راهنمایی برای رسیدن به حکم مقتضی دربارهٔ شواهد یا استنباط راجع به هر نوع فرض صفر باشد. تقریباً همان‌گونه که شخص دربارهٔ تغییرات وزن بدن برپایهٔ مشخصات عملکردیِ ترازوهای مختلف استنباطهایی می‌کند، می‌تواند از نتایج آزمون معنی‌داری با استفاده از خواص نرخ خطای آزمونها نیز استنباط به‌عمل آورد. این خواص ظرفیت آزمون خاص را به‌دلیل آنکه توانسته است ناسازگاریها و اختلافهای موجود در جنبه‌های تحت بررسی را آشکار کند، نشان می‌دهند، و این امر به نوبهٔ خود ربط‌دادن p-مقدارها را به فرضهایی دربارهٔ فرایندی که به‌طور آماری مدل‌بندی شده است، مجاز می‌سازد. نتیجه می‌شود که برای ارائهٔ یک شرح بسامدگرای رسا از استنباط باید در تأمین اطلاعات به‌منظور اجرای **ش ب** اهتمام ورزید.

فرضهای صفر نشانده‌شده. در حالت فرضهای صفر نشانده‌شده، استفاده از p-مقدارهای کوچک به‌عنوان شواهدی از اختلاف با فرض صفر در جهت فرض مقابل، سرراست است. اما، فرض کنید که معلوم شود داده‌ها موافق با فرض صفرند (p کوچک نباشد). ممکن است شخص، با استفاده از همان منطق آزمون معنی‌داری، این امر را، به مثابهٔ شاهدی برای اینکه هر اختلاف با فرض صفر کوچک‌تر از δ است تلقی کند. در چنین حالتهایی، همخوانی با فرض صفر ممکن است شواهدی از نبود اختلاف با فرضهای صفرِ دارای اندازه‌های گوناگون فراهم سازد، چنانکه در **ش ب** (**ii**) تصریح شد.

برای استنباطِ نبودِ اختلافی به بزرگی δ با H_0 می‌توانیم $\beta(\delta)$، احتمال مشاهدهٔ برازشی بدتر به H_0 را در صورتی که $\mu = \mu_0 + \delta$، بیازماییم، اگر این احتمال نزدیک به یک باشد، براساس **ش ب** (**ii**) ، داده‌ها شواهد خوبی برای $\mu < \mu_0 + \delta$اند. بدین‌ترتیب، $\beta(\delta)$ را می‌توان به‌عنوان جدّیت یا شدت آزمون در سنجش اختلاف δ در نظر گرفت؛ به‌عبارت دیگر می‌توان گفت که $\mu < \mu_0 + \delta$ آزمون شدیدی را گذرانده است (مایو [۱۷]).

این کار از تفسیر تضمین نشدهٔ سازگاری با H_0 در آزمونهای غیرحساس جلوگیری می‌کند. یک چنین ارزیابی برای داده‌های خاص مناسب‌تر است تا مفهوم توان، که نسبت به یک مقدار بحرانیِ از پیش تعیین‌شده حساب می‌شود که فراتر از آن، آزمونْ فرض صفر را «رد کند». یعنی، توان به یک ناحیهٔ رد از پیش مشخص‌شده مربوط می‌شود، نه به داده‌های خاص تحت تحلیل.

هر چند بیش‌حساسی کمتر محتمل است که مشکلی باشد، اگر آزمونی آنچنان حساس باشد که p-مقداری برابر یا حتی کوچک‌تر از مقدار مشاهده شده، محتمل باشد حتی وقتی $\mu < \mu_0 + \delta$، آنگاه مقداری کوچک از p شاهدی برای انحراف از H_0 به‌اندازهٔ بیش از δ نیست.

اگر خانواده‌ای از فرضهای مقابل صریح وجود داشته باشد، می‌توان مجموعه‌ای از بازه‌های اطمینان برای پارامتر مجهول تعریف‌کنندهٔ H_0 به‌دست داد و با این کار، پایه‌ای گسترده‌تر برای نتیجه‌گیری‌ها دربارهٔ پارامتر تعریف‌کننده به‌دست می‌آید.

فرضهای صفر تقسیم‌کننده و فرضهای مبنی بر نبود ساختار. در حالت فرضهای صفر تقسیم‌کننده، ناهمخوانی با فرض صفر (با به‌کارگیری مقدار دو طرفهٔ p) بیانگر جهت انحراف است (یعنی، اینکه کدام یک از دو تیمار برتر است)؛ همخوانی با H_0 حاکی از آن است که این داده‌ها شواهدی رسا حتی برای جهت اختلاف به‌دست نمی‌دهند. اغلب انتقادهایی شنیده می‌شود که آزمودن فرض صفری که می‌دانیم نادرست است بی‌فایده است، اما حتی اگر انتظار نداشته باشیم که دو میانگین مثلاً برابر باشند، این آزمون برای تقسیم انحرافها به انواعی که از لحاظ کیفی متفاوت‌اند آگاهی بخش است. وقتی فرض صفر مانند فرض صفر نبودِ ساختار است تفسیر مشابهی انجام می‌شود. مقدار متوسط p بیانگر آن است که داده‌ها حساسیت کافی برای کشف ساختار ندارند. اگر داده‌ها محدود باشند این امر ممکن است فقط هشداری علیه تفسیر بیش از حد باشد و نه شاهدی بر اینکه فکر کنیم در واقع ساختاری وجود ندارد. یعنی آزمون ممکن است ظرفیت اندکی برای کشف هرگونه ساختاری داشته بوده باشد. اما مقدار کوچک p شواهدی مبنی بر وجود اثری واقعی را نشان می‌دهد؛ که جستجو برای تفسیر واقعیت‌بنیاد از چنین اثری ذاتاً مستعد خطا نخواهد بود.

هنگامی که ارزیابیهای غیررسمی دربارهٔ گواه‌آوری یا حساسیت آزمونها صورت می‌گیرد، استدلال مشابهی مصداق دارد. اگر داده‌ها آن‌قدر گسترده باشند که همخوانی با فرض صفر دال بر نبود اثری با اهمیت عملی باشد، و یک p-مقدارِ به‌قدر معقول بزرگ به‌دست آمده باشد، آنگاه می‌توان آن را به‌عنوان شواهدی مبنی بر نبود اثری با اهمیت عملی گرفت. همین‌طور، اگر داده‌ها از چنان دامنهٔ محدودی باشند که بتوان فرض کرد که داده‌های همخوان با فرض صفر با انحرافهای واجد اهمیتِ علمی نیز سازگارند، آنگاه بزرگ بودن p-مقدار، استنباطی مبنی بر نبود انحرافهایِ مهم از فرض صفر را تضمین نمی‌کند.

فرضهای صفر مبنی بر رسایی مدل. وقتی فرضهای صفر ادعاهایی مبنی بر رسایی مدل‌اند، تفسیر نتیجه‌های آزمون بستگی به آن خواهند داشت که آیا آمارهٔ آزمون نسبتاً خاص‌نگر داریم که نسبت به انواع خاص نارسایی مدل حساس است، یا آزمونهایی به اصطلاح کلی‌نگر داریم. همخوانی با فرض صفر در حالت اول شواهدی مبنی بر نبود آن نوع انحرافی که آزمون برای کشف آن حساس است به‌دست می‌دهد، درصورتی که، با آزمون کلی‌نگر، این همخوانی کمتر آگاهی بخش است. در هر دو نوع آزمون، p-مقدار کوچک شواهدی از نوعی انحراف است، اما تا آنجا که مدلهای بدیل گوناگون بتوانند تخطی مشاهده‌شده را توجیه کنند (یعنی، تا آنجا که این آزمون توانایی اندکی برای تمیز دادن بین آنها داشته باشد)، این داده‌ها به‌تنهایی، فقط می‌توانند پیشنهادهایی موقتی دربارهٔ مدلهای بدیلی که باید امتحان شوند، فراهم سازند.

فرضهای صفر پرمایه. در حالتهای پیشین، همخوانی با یک فرض صفر حداکثر می‌توانست، برطبق توانایی آزمون در آشکارسازی اختلاف، شواهدی برای کنار گذاشتن اختلافهای با مقدار یا نوع مشخص به دست دهد.

در مورد فرضهای صفر پرمایه [جدی]، چیز بیشتری می‌توان گفت. اگر فرض صفر نشان‌دهندهٔ یک پیش‌بینی از نظریه‌ای باشد که از لحاظ قابلیت کاربرد عام تحت بررسی است، سازگاری با فرض صفر را می‌توان به‌عنوان

شواهدی اضافی برای این نظریه تلقی کرد، به‌ویژه اگر آزمون و داده‌ها به‌قدر کافی حساس باشند که انحرافهای عمده از نظریه را کنار بگذارند. یک جنبهٔ موضوع در اندرز فیشر (کوکران، [۳]) خلاصه شده است که می‌گوید برای کمک به اینکه بررسیهای مشاهداتی ما تفسیر علمی دقیق‌تری داشته باشند، باید نظریه‌هایمان را تفصیلی‌تر سازیم، که منظورش این بود که باید آزمونهای گوناگونی برای پیامدهای متفاوت نظریه طراحی کنیم، تا امتحانی جامع از استلزامهای آن به‌دست آوریم. این نتیجهٔ محدود که مجموعه‌ای از داده‌ها با نظریه همخوان است یک جزء به شواهدی می‌افزاید که اعتبار آنها از روی‌هم انباشتن توانایی ردِ شقوق دیگر ناشی می‌شود.

نخستین نوع مثال تحت این رهنمود، ممکن است چنین باشد که نتیجه‌های آشکارا بی‌هنجار برای نظریه یا فرضی مانند $\mathcal{T}$ وجود داشته باشند، در حالی که $\mathcal{T}$ بازرسی دقیق نظری و/یا تجربی قابل توجهی را با موفقیت پشت سر گذاشته است. اگر نتیجه‌های آشکارا بی‌هنجار برای $\mathcal{T}$ واقعی باشند، انتظار می‌رود که H_0 رد شود، به‌طوری که اگر رد نشود، این نتیجه‌ها شواهد مثبت علیه واقعیت بی‌هنجاری‌اند. در دومین نوع این مورد، باز هم یک نظریهٔ کاملاً آزمون شدهٔ $\mathcal{T}$ داریم، و نظریه‌ای رقیب مانند $\mathcal{T}^*$ تعیین می‌شود که در حوزه‌ای تاکنون آزموده نشده از حیث یک اثر با $\mathcal{T}$ در تضاد است. اگر پیشگویی حاصل از $\mathcal{T}$ را با فرض صفر یکی بگیریم، هرگونه اختلاف در جهت $\mathcal{T}^*$ شانس خوبی دارد که کشف گردد، به‌گونه‌ای که اگر هیچ انحراف معنی‌داری یافت نشود، این امر شاهدی به نفع $\mathcal{T}$ از جنبهٔ مورد آزمون است.

اگرچه نظریهٔ نسبیت عام (GTR) در دههٔ ۱۹۶۰ با بی‌هنجاریهایی مواجه نبود، رقبای GTR شکست اصل هم‌ارزی ضعیف، WEP[1]، را برای اجسام خودگرانشی سنگین، مثل سامانهٔ زمین-ماه پیشگویی می‌کردند: این اثر که اثر نوردوت[2] نامیده می‌شود، برای GTR برابر صفر است (که با فرض صفر یکی گرفته می‌شود) و برای رقبا ناصفر خواهد بود. اندازه‌گیری زمانهای سفر رفت و برگشت بین زمین و ماه (بین سالهای ۱۹۶۹ و ۱۹۷۵) امکان داد که دربارهٔ وجود چنین بی‌هنجاری برای GTR تحقیق شود. پیدانشدن شواهدی علیه فرض صفر، کرانهای بالایی را برای تخطّی ممکن از WEP تعیین کرد، و چون آزمونها به‌قدر کافی حساس بودند، این اندازه‌گیری‌ها شواهد خوبی فراهم ساختند که اثر نوردوت وجود ندارد و بدین‌ترتیب شواهدی به نفع فرض صفر در دست است (ویل، [۳۱]). توجه کنید که یک چنین نتیجهٔ منفی شواهدی به نفع همهٔ GTR (در همهٔ حوزه‌های پیشگویی) فراهم نمی‌سازد، بلکه شواهدی به نفع درستی آن از حیث این اثر به‌دست می‌دهد. منطق کار چنین است: نظریهٔ $\mathcal{T}$ گزارهٔ H_0 را دست‌کم با تقریبی نزدیک به وضعیّت واقعی پیشگویی می‌کند؛ نظریهٔ رقیت $\mathcal{T}^*$ اختلاف مشخصی را با H_0 پیشگویی می‌کند، و احتمال زیاد دارد که اگر $\mathcal{T}^*$ صحیح باشد آزمون چنین اختلافی از $\mathcal{T}$ را کشف کند. پس کشف نشدن هیچ اختلافی، شاهدی بر نبودِ آن است.

۶.۳ بازه‌های اطمینان

چنانکه در بالا اشاره شد، در بسیاری از مسأله‌ها تدارک بازه‌های اطمینان، علی‌الاصول در دامنه‌ای از سطحهای احتمال، ثمربخش‌ترین تحلیل فراوانی‌گرا را به‌دست می‌دهد. اگر چنین باشد، تحلیل بازهٔ اطمینان نیز باید ذیلِ اصل بسامدگرای کلی ما قرار گیرد و قرار می‌گیرد. در آزمون یک‌طرفهٔ $\mu = \mu_0$ در مقابل $\mu > \mu_0$، p-مقدار کوچک متناظر با این است که μ_0 (صرفاً) از بازهٔ اطمینان متناظر $(2p - 1)$ (دوطرفه) (یا $p - 1$ برای بازهٔ اطمینان یک‌طرفه) حذف شود. اگر μ را μ_L یعنی کران اطمینان پایینی، قرار می‌دادیم، آنگاه نتیجه‌ای ناهمخوان‌تر با احتمال زیاد $(p - 1)$ رخ می‌داد. بدین‌ترتیب، **ش‌ب** اجازهٔ قبول این وضع را به مثابهٔ شواهد ناسازگاری با $\mu = \mu_L$ (در جهت مثبت) می‌دهد. افزون بر آن، این استدلال مزیت درنظر گرفتن چند بازهٔ اطمینان را در دامنه‌ای از سطحها، به‌جای آنکه صرفاً گزارش شود که مقدار پارامتری مفروض درون بازه‌ای در یک سطح اطمینانِ ثابت قرار دارد یا خیر، نشان می‌دهد.

نیمن نظریهٔ بازه‌های اطمینان را از ابتدا یعنی تنها با اتکای تلویحی و نه تصریحی بر کار قبلی‌اش با پیرسون در نظریهٔ آزمونها ابداع کرد. این امر تا حدودی بستگی به‌نحوهٔ عرضهٔ مطلب دارد که براورد بازه‌ای را اصولاً آن قدر متفاوت از آزمون فرضها بینگاریم که [فکر کنیم] در بهترین حالت، به‌طور مجزا برای حفظ تمایز مفهومی [بین این دو] پدید آمده است یا نه. از سوی دیگر مزایای قابل‌توجهی برای درنظرگرفتن یک حد اطمینان، بازه یا ناحیه‌ای به‌عنوان مجموعهٔ مقدارهای پارامتر سازگار با داده‌ها در سطحی مشخص، وجود دارد که با آزمودن هر مقدار ممکن به‌وسیلهٔ شیوه‌های متقابلاً همخوان تعیین می‌شود. به‌خصوص، این رویکرد، در سطح معنی‌داریِ مشخصی، به‌راحتی با بازه‌های اطمینانی که تهی هستند یا مرکب از همهٔ مقادیر ممکن پارامترند مواجه می‌شود. چنین ناحیهٔ تهی یا نامتناهی دالّ بر آن است که داده‌ها با همهٔ مقادیر ممکن پارامترها ناسازگارند یا با همهٔ مقادیر ممکن سازگارند. ساختن مثالهایی که در آنها این نتایج کاملاً مناسب به‌نظر برسند، آسان است.

۴. برخی پیچیدگیها: اثرهای گزینش

فرمول‌بندی آرمانی که در تعریف آغازین آزمون معنی‌داری به‌چشم می‌خورد علی‌الاصول با یک فرض و یک آمارهٔ آزمون شروع می‌شود، و مراحل بعدی، کسبِ داده‌ها، به‌کار بستن آزمون و بررسی برامد است. پس شیوهٔ فرضی مستتر در تعریف آزمون درحد قابل قبولی با آنچه انجام شده تطابق دارد؛ براوردهای ممکن، مقدارهای ممکن متفاوت از آمارهٔ آزمونِ مشخص هستند. این امر امکان می‌دهد که ویژگیهای توزیع آمارهٔ آزمون در کسب اطلاع از ویژگیهای متناظر سازوکار مولد داده‌ها به‌کار آید. شیوه‌ای که عملاً از آن پیروی می‌شود به‌دلایل گوناگونی ممکن است متفاوت باشد و اینک یک جنبهٔ عام آن را بررسی می‌کنیم.

اغلب اتفاق می‌افتد که یا فرض صفر یا آمارهٔ آزمون از وارسی مقدماتی داده‌ها تأثیر می‌پذیرد، به‌طوری که شیوهٔ واقعی تولید نتیجهٔ آزمون نهایی تغییر می‌یابد. این امر به‌نوبهٔ خود ممکن است توانایی آزمون را در کشف اختلافات با فرض صفر به‌گونه‌ای قابل اعتماد، تغییر دهد، و تعدیلهایی را در احتمالهای خطای آن لازم بنماید.

تا آنجا که p به‌عنوان جنبه‌ای از رابطهٔ منطقی یا ریاضی بین داده‌ها و مدل احتمالی در نظر گرفته شود چنین گزینشهای مقدماتی بی‌ربط‌اند. این امر برای حصول اطمینان از اینکه p-مقدارها آن منظوری را براورده سازند که

1. Weak Equivalence Principle 2. Nordvedt effect

برای آنها در استنباط بسامدگرا، خواه در بافتهای رفتاری یا شواهدی، درنظر گرفته شده است، کفایت نمی‌کند. درحدی که شخص محاسباتی مبتنی بر خطا بخواهد که به آزمون معنایی حاکی از قابلیت کاربرد در کارهای آمار بسامدگرا ببخشد، تحلیل مقدماتی و گزینش ممکن است بسیار مناسب باشد.

نکتهٔ کلی مورد نظر هم در نوشتگان فلسفی و هم نوشتگان آماری بسیار مورد بحث قرار گرفته است؛ در مباحث فلسفی تحت عنوانهایی مانند لزوم نوبودن یا پرهیز از فرضهای مورد ویژه، و در مباحث آماری به‌عنوان قواعدی علیه دزدکی نگاه‌کردن به‌داده‌ها یا جستجوی معنی‌داری، و در نتیجه لزوم به‌حساب آوردن اثرهای گزینش، بحث شده‌اند. موضوع کلّی این است که آیا وقتی فرض صفر $H_\circ$ به‌طریقی برای آزمون‌شدن ساخته یا انتخاب می‌شود که به رابطهٔ مشاهده شدهٔ خاصی بین $H_\circ$ و y، خواه توافق یا عدم توافق، منجر شود، آیا تأثیر شواهدیِ داده‌های y بر استنباط یا فرض $H_\circ$ تغییر می‌یابد یا نه. کسانی که با رویکردهای منطقی به تأیید نظر مساعد دارند می‌گویند نه (مثلاً، میل [۲۰]، کینز [۱۴]، در صورتی که کسانی که به مفهوم آماری خطا عنایت بیشتری دارند می‌گویند آری (ویول [۳۰]، پیرس [۲۵]). به پیروی از این فلسفهٔ اخیر، پوپر خواستار آن بود که دانشمندان پیشاپیش مشخص سازند چه برامدهایی را به‌مثابهٔ ابطال $H_\circ$ درنظر خواهند گرفت، شرطی که حتی خود او وادار به رد آن شد؛ کل موضوع در فلسفه لاینحل باقی مانده است (مایو [۱۷]).

ملاحظات آماری خطا امکان پیشروی را با تدارک ملاکهایی برای زمانی که گزینشهای داده‌وابستهٔ گوناگون اهمیت دارند و نحوهٔ به‌حساب آوردن تأثیر آنها بر احتمالهای خطا، فراهم می‌سازد. به‌ویژه، اگر به‌دلیل آنکه آمارهٔ آزمون بزرگ است فرض صفر برای آزمون انتخاب شود، احتمال یافتن چنین ناهمخوانی یا ناهمخوانیهای دیگر حتی تحت فرض صفر ممکن است بزرگ باشد. بدین‌ترتیب، بنا به **ش ب (i)**، شواهدی واقعی مبنی‌بر ناهمخوانی با فرض صفر نخواهیم داشت، و جز آنکه pـمقدار به‌طرزی مقتضی اصلاح شود، استنباط گمراه‌کننده خواهد بود. در حدی که شخص از محاسبات مبتنی بر خطا انتظار دارد که معنایی به آزمون ببخشد، معنایی حاوی اطمینان‌دهی محدود در این باره که ناسازگاری ظاهری در این حالت خاص واقعی است و صرفاً معلول شانس نیست، تعدیل pـمقدار لازم است.

چنین تعدیلهایی اغلب در مواردی شامل گزینشهای داده‌وابسته یا در مدل گزینی یا در مدل‌سازی پیش می‌آیند؛ مسألهٔ تعدیل p اغلب در مواردی شامل آزمون فرضهای چندگانه رخ می‌نماید، اما مهم است که این حالتها صرفاً به این دلیل که داده‌وابستگی یا آزمون فرض چندگانه وجود دارد با هم اجرا نشوند. اکنون چند حالت خاص را به اجمال شرح می‌دهیم تا نکته‌های اساسی در روایتهای مختلف را آشکار سازیم. سپس بررسی می‌کنیم که در نظرگرفتن گزینش در هر حالت لازم است یا نه.

۱.۴ مثالها

مثال ۱. پژوهشگری مثلاً ۲۰ مجموعهٔ داده‌های مستقل دارد، که هر یک حاکی از اثری متفاوت اما بسیار مرتبط با بقیه است. پژوهشگر همهٔ ۲۰ آزمون را انجام می‌دهد و تنها کوچک‌ترین p را، که در واقع حدود ۰٫۰۵ است، و فرض صفر متناظر آن را گزارش می‌کند. نکته‌های اساسی عبارت‌انداز: استقلال آزمونها و گزارش نکردن نتیجه‌های حاصل از آزمونهای غیرمعنی‌دار.

مثال ۲. روایتی بسیار آرمانی از آزمون مربوط به تطبیق DNA با نمونه‌ای‌مفروض، که شاید از آنِ یک بزهکار باشد، این است که جستجو در سراسر یک پایگاه داده‌های تطبیق‌های ممکن، هر بار با یک فرد، صورت گرفته امتحان می‌شود که فرض توافق با نمونهٔ مفروض رد می‌شود یا نه. فرض کنید که حساسیت و ویژگی هر دو خیلی زیاد هستند. یعنی، احتمالهای منفی‌های کاذب و مثبت‌های کاذب هر دو خیلی کوچک‌اند. نخستین فرد، از پایگاه داده‌ها که فرض در مورد آن رد شود، در صورتی که چنین فردی وجود داشته باشد، تطبیق واقعی اعلام می‌شود و این فرایند همانجا متوقف می‌گردد.

مثال ۳. در یک بررسی ریزآرایه[1] چندهزار ژن از لحاظ تجلی بالقوهٔ، مثلاً، تفاوتی بین وضعیت بیماری نوع ۱ و نوع ۲ آزمون می‌شوند. بنابراین چند هزار فرض وجود دارند که هر یک با فرض صفر مربوط در یک گام تحت بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۴. برای بررسی وابستگی یک متغیر پاسخ یا برامدی مانند y به متغیری تبیینی مانند x، قصد آن است که از تحلیل رگرسیون خطی y برحسب x استفاده شود. وارسی داده‌ها حاکی از آن است که بهتر است از رگرسیون $\log y$ برحسب $\log x$ استفاده شود، مثلاً به این دلیل که رابطه به‌حالت خطی نزدیک‌تر است یا چون مفروضات ثانوی، مانند ثابت‌بودن واریانس خطا، با تقریب بهتری، صادق‌اند.

مثال ۵. برای بررسی وابستگی یک متغیر پاسخ یا برامدی مانند y به تعداد قابل توجهی از متغیرهای تبیینی بالقوهٔ x، شیوهٔ داده‌وابستهٔ گزینش متغیر به‌کار گرفته می‌شود تا نمایشی به‌دست آید که سپس با روشهای استاندارد برازانده شده و فرضهای ذی‌ربط آزمون شوند.

مثال ۶. فرض کنید وارسی مقدماتی داده‌ها نوعی اثر کلاً نامنتظر یا نوعی نظم را نشان دهد که در مرحله‌های آغازین به آن فکر نشده بود. در نتیجهٔ آزمونی رسمی، این اثر «به‌شدت معنی‌دار» است. معقول است چه نتیجه‌ای گرفته شود؟

۲.۴ نیاز به تعدیلهایی به‌خاطر گزینش

برای بحث عمیق دربارهٔ همهٔ این مثالها مجال کافی در این مقاله نیست. یک موضوع اساسی ناظر به این است که کدام یک از این وضعیتها نیاز به تعدیل به‌خاطر آزمون کردن چندگانه یا گزینش داده‌وابسته دارد و آن تعدیل چه باید باشد. تصور کلی از سرشت یک نظریهٔ تحلیل و تفسیر بسامدگرا چگونه کمک می‌کند که به جوابها برسیم؟

پیشنهاد ما این است که این امر به روال زیر صورت گیرد: نخست باید درنظر گرفته شود که آیا بافتار مورد نظر بافتاری است که در آن موضوع اصلی مورد نظر کنترل نرخهای خطا در یک سلسله از کاربردهاست (هدف رفتاری)، یا انجام استنباط استقرایی خاص یا ارزیابی شواهد خاص (هدف استنباطی). احتمالهای خطای مربوط را برای حالت اول می‌توان تغییر داد و برای حالت اخیر نمی‌توان. دوم، لازم است دنبالهٔ تکرارهای ذی‌ربطی را که باید بسامدها را بر پایهٔ

1. microarray

آنها بنا نهاد شناسایی کرد. شرط کلی آن است که ناهمخوانی با یک فرض صفر را به‌کمک شیوه‌ای ارائه نکنیم که ناهمخوانیها را با فراوانی نسبتاً بیشتری مطرح می‌کند حتی اگر فرض صفر درست باشد. تعیین سریهای فرضی ذی‌ربطی که براساس آنها بسامد خطا یابد حساب شود، ایجاب می‌کند که طبیعت مسألهٔ استنباط در نظر گرفته شود. به‌طور مشخص‌تر، موانع ویژه‌ای را که به‌منظور استنباطی قابل‌اعتماد در حالت خاص باید از آنها پرهیز کرد، و ظرفیت آزمون را، به‌عنوان یک ابزار اندازه‌گیری برای آشکارساختن وجود موانع، باید شناسایی کرد.

هنگامی که هدف اصلی ما ارزیابی شواهد خاص است، **ش‌ب** برخی رهنمودها را در اختیار می‌گذارد. به‌طور مشخص‌تر، مشکل وقتی رخ می‌نماید که برای گزینش یک فرض برای آزمون کردن یا تغییر مشخصات یک مدل زیربنایی، داده‌ها به‌طریقی به‌کارگرفته می‌شوند که یا از **ش ب** عدول می‌شود یا نمی‌توان تعیین کرد که آیا **ش ب** صادق است یا خیر (مایو و کروس [۱۸]).

مثال ۱ (جستجوی معنی‌داریِ آماری). شیوهٔ آزمون بسیار متفاوت با حالتی است که در آن تک‌فرض صفری که معلوم‌شده از حیث آماری معنی‌دار است از قبل به‌عنوان فرض برای آزمون تعیین‌شده باشد؛ شاید آن فرض $H_{۰,۱۳}$، سیزدهمین فرض صفر از بین ۲۰ فرض، باشد. در مثال ۱، نتیجه‌های ممکن عبارت‌اند از عاملهایی که ممکن است از لحاظ آماری معنی‌دار باشند و معلوم شود که انحراف معنی‌دار آماری «محاسبه شده»ای از فرض صفر را نشان می‌دهند. بنابراین، احتمال خطای نوع ۱ احتمال یافتن دست‌کم یک چنین تفاوت معنی‌دار در بین ۲۰ تاست، هر چند که فرض صفر فراگیر درست است (یعنی، همهٔ بیست تفاوت مشاهده‌شده به واسطهٔ شانس رخ داده‌اند). احتمال آنکه این شیوه باعث ردکردن خطاآمیز شود متفاوت با، و خیلی بزرگ‌تر از، ۰٫۰۵ (و تقریباً ۰٫۶۴) است. راههای متفاوت، و در واقع راههای بسیار بیشتری، برای اتکاب خطا در این مثال نسبت به زمانی که یک فرض صفر از قبل مشخص شده، وجود دارد و این امر در pـ مقدار تعدیل‌شده بازتاب می‌یابد.

این قدر از مطلب کاملاً معلوم است، اما آیا این امر باید بر تفسیر نتیجه در یک چارچوب استنباط استقرایی تأثیر بگذارد؟ بنابر **ش‌ب** باید تأثیر بگذارد. اما دغدغه این نیست که از اعلامِ اشتباهی و مکرر اثرهای واقعی در یک سری پرهیز شود، نگرانی آن است که این آزمون به‌عنوان ابزاری برای تمیز دادن اثرهای واقعی از اثرهای شانسی در این حالت خاص به‌طور ضعیف عمل می‌کند. زیرا می‌دانیم که دست‌کم یک انحراف چشمگیر از این نوع، حتی اگر همهٔ انحرافها به واسطهٔ شانس باشند، رایج است؛ آزمون به سختی به ما اطمینان داده است که با پرهیز از ارتکاب به‌چنین اشتباهی در این حالت، کار خوبی انجام داده است. حتی اگر دلیلهایی دیگر برای باورداشتن به اصالت اثری که پیدا شده است وجود داشته باشند، انکار می‌کنیم که این آزمون به تنهایی چنین شواهدی را فراهم ساخته است.

گفته‌ایم که محاسبات بسامدگرایانه برای آن به‌کار می‌روند که حالت خاص را بیازمایند؛ و این امر با مشخص‌سازی ظرفیت آزمونها در عیان ساختن اشتباه در استنباط صورت می‌گیرد؛ بر این مبنا «شیوهٔ جستجو» ظرفیت اندکی هشداردادن در این مورد دارد که عملاً از اشتیاق خود بکاهیم حتی وقتی چنین کاهشی ضرورت دارد. از سوی دیگر، اگر شخص pـ مقدار را تعدیل کند تا نرخ خطای کلی را بازتاب دهد، بازهم آزمون ابزاری می‌شود که در خدمت این هدف است.

مثال ۱ را می‌توان با یک آزمایش عاملی استاندارد که برای تحقیق اثرهای چند متغیر تبیینی به‌طور همزمان طراحی شده است، قیاس کرد. در اینجا شماری از پرسشهای متمایز، هر یک با فرض مربوط و هر یک با pـ مقدار مخصوص به‌خود، وجود دارند. اینکه پرسشها را از طریق یک مجموعهٔ داده‌ها مورد بررسی قرار می‌هیم به‌جای آنکه از طریق مجموعه‌های داده‌های جداگانه بررسی کنیم، به یک معنا یک تصادف فنی است. هر p به‌درستی در زمینهٔ پرسش خودش تفسیر می‌شود. مشکلات برای استنباطهای خاص در صورتی پیش می‌آیند که عملاً بسیاری از پرسشها را دور بیندازیم و توجه خود را تنها بر یکی، یا به‌طور کلی‌تر، برشماری اندک، به‌دلیل آنکه دارای کوچک‌ترین pاند، متمرکز کنیم. زیرا در این صورت ظرفیت آزمون را در تغییردادن نظرمان به‌وسیلهٔ pـ مقداری که به‌درستی محاسبه شده، تغییر داده‌ایم، خواه شواهدی بر استنباط مورد نظر داشته باشیم یا نه.

مثال ۲ (تبیین اثری معلوم با استقرای حذفی). مثال ۲ شباهت سطحی با مثال ۱ دارد؛ یافتن یک تطبیق DNA تا حدی مثل یافتن یک انحرافِ از لحاظ آماری معنی‌دار از یک فرض صفر است: شخص درون داده‌ها جستجو می‌کند و بر یک حالت که در آن «تطبیق» با DNAی بزهکار یافت می‌شود تمرکز کرده، عدم تطبیق‌ها را نادیده می‌گیرد. اگر شخص برای «جستجو» در مثال ۱ تعدیل انجام می‌دهد، آیا نباید به‌طور کلی به همان طریق در مثال ۲ تعدیل انجام دهد؟ نه.

در مثال ۱ نگرانی عبارت است از استنباط کردن یک اثر «بازآفریدنی» واقعی، در حالی که چنین اثری وجود ندارد؛ در مثال ۲، اثری معلوم یا پیشامدی خاص، یعنی DNAی بزهکار، وجود دارد و شیوه‌هایی قابل اعتماد به‌کار گرفته می‌شوند تا علت یا منبع خاص (چنانکه با نرخ پایین «تطبیق اشتباه» بیان می‌شود) ردیابی گردد. احتمال زیاد دارد که اگر i بزهکار نباشد تطبیقی با فرد i به‌دست نیاوریم؛ پس بنابر **ش‌ب**، یافتن یک تطبیق در سطحی کیفی، شاهد خوبی بر بزهکاربودن i است. افزون بر آن، هر عدم تطبیق یافت شده، بنا به تصریحات مثال، عملاً آن شخص را حذف می‌کند؛ از این‌رو، هر قدر چنین نتیجه‌های منفی زیادتر یافت شوند، «تطبیق» استنباط‌شده محکم‌تر است؛ در صورتی که در مثال ۱ چنین نیست.

چون حداکثر یک فرض صفرِ مبنی‌بر بی‌گناهی نادرست است، شواهد بی‌گناهی برای یک نفر، اگرچه به‌قدر اندک، شانس مجرم‌بودن دیگری را افزایش می‌دهد. پس از آنکه شیوهٔ نمونه‌گیری برای آزمون‌کردن مشخص شود، ارزیابی نرخهای خطا حتماً میسر است. در اینجا از ارائهٔ جزئیات خودداری می‌کنیم.

موردی که شباهت کلی با این وضعیت دارد به بی‌هنجاری مدار عطارد مربوط می‌شود: چون تلاشهای پرشمار برای ارائهٔ تفسیری نیوتنی از این پدیده بی‌ثمر از آب درآمد، وقتی که نظریهٔ اینیشتین توانست نتیجه‌های بی‌هنجار را با دقّت و بدون هیچگونه تعدیلهای موردی پیشگویی کند، بیش از پیش اعتبار یافت.

مثال ۳ (داده‌های ریزآرایه). در تحلیل داده‌های ریزآرایه، یک فرض آغازی معقول این است که شمار بسیار بزرگی از فرضهای صفر باید آزمون شوند که کسر نسبتاً اندکی از آنها (اکیداً) نادرست‌اند، و فرض صفر فراگیری که حاکی از نبود هیچ اثر حقیقی باشد، اغلب نامعقول است. دراین‌صورت، مسأله از نوع انتخاب جایگاههایی است که در آنها اثری می‌تواند ثابت‌شده تلقی گردد. در اینجا، نیاز به تعدیل به‌خاطر آزمون کردن چندگانه، عمدتاً به واسطهٔ این نگرانی

عملگرایانه که از «نوفهٔ بسیار زیاد در شبکه» پرهیز شود، موجه است. توجه عمده معطوف به این است که چگونه باید نرخهای خطا را به بهترین وجه تعدیل کرد تا به مؤثرترین صورت بیانگر فرضهای ژنیِ قابل پیگیری باشند. در این‌صورت، تحلیل مبتنی‌بر خطا از موضوعها از طریق نرخ کشف نادرست است، یعنی از طریق نسبت درازمدت جایگاههایی که به‌عنوان مثبت برگزیده شده‌اند و در آنها اثری وجود ندارد. یک فرمول‌بندی بدیل از طریق مدل بیزِ تجربی انجام می‌شود و نتیجه‌گیری‌های حاصل از آن را می‌توان به نرخ کشف نادرست ربط داد. روش اخیر ممکن است مرجح باشد زیرا یک نرخ خطای خاص برای هر ژن انتخاب‌شده می‌توان یافت؛ در برخی موارد محتمل است که شواهد بسیار قوی‌تر از سایر موارد باشند و این تمایز در نرخ کشف نادرست سراسری محو می‌شود. برای ملاحظهٔ بررسی نظام‌مندی از این موضوع، ر.ک. شافر [۲۸].

مثال ۴ (بازتعریف آزمون). اگر آزمونها با مشخصات متفاوت اجرا شوند، و آزمونی برگزیده شود که معنی‌داری آماریِ کرانگین را می‌دهد، آنگاه تعدیل به‌خاطر گزینش لازم است، هر چند که تعیین تعدیل دقیق ممکن است مشکل باشد. اگر شخصی تأثیر گذاشتن نتیجه بر انتخاب مشخصات آزمون را مجاز بداند، شیوه‌ای را که منجر به pـمقدارشده تغییر می‌دهد، و این کار ممکن است غیرقابل قبول باشد. در حالی که موضوع اساسی و فرض بی‌تغییر باقی می‌مانند تعیین مشخصات دقیق مدل احتمالی با تحلیل مقدماتی داده‌ها به‌گونه‌ای هدایت شده است که سازوکار تصادفی‌ای را که عملاً مسئول برامد آزمون بوده، تغییر دهد.

این وضع مانند آزمون توانایی یک تک‌تیرانداز است از این طریق که به سوی صفحه‌ای تیراندازی کند و سپس دایرهٔ هدف به دور جایی که بیشترین تعداد اصابت به آن صورت گرفته رسم شود، و به اصطلاح اصل نشانه‌زن تکزاسی به‌کار گرفته شود. مهارتی که شخص به‌ظاهر آزمون می‌کند و دربارهٔ آن استنباط انجام می‌دهد عبارت است از توانایی وی در زدن به‌هدف وقتی هدف داده شده و ثابت است، در حالی که آن همان مهارتی نیست که عملاً باعث به‌دست آمدن امتیاز زیاد شده است.

برعکس، اگر انتخاب مشخصات نه براساس ملاحظات معنی‌داری آماریِ انحراف از فرض صفر، بلکه به آن دلیل صورت گیرد که با توجه به داده‌ها تغییراتی به‌منظور دستیابی به خطی‌بودن یا ثابت بودن واریانس خطا مجاز باشند، به‌نظر می‌رسد که هیچ تعدیلی به‌خاطر گزینش لازم نیست. بلکه دقیقاً خلاف آن: انتخاب مشخصات مناسب‌تر از لحاظ تجربی، اطمینان می‌دهد که pـمقدار حساب‌شده برای تفسیری از شواهد که قابل اعتماد باشد، مناسبت دارد. (مایو و اسپانوس [۱۹]). این کار را می‌توان به‌طور رسمی‌تر با درنظر گرفتن انتخاب مشخصات به‌عنوان یک تحلیل ماکسیمم درستنمایی توجیه کرد، یعنی ماکسیمم‌سازی نسبت به پارامتری متعامد با پارامترهایی که فرض صفر مورد نظر را مشخص می‌کنند.

مثال ۵ (داده‌کاوی). این مثال شبیه مثال ۱ است، اگرچه چگونگی انجام تعدیل به‌خاطر گزینش ممکن است روشن نباشد زیرا شیوهٔ به‌کاررفته در گزینش متغیر ممکن است پر پیچ‌وخم باشد. در اینجا نیز برای اجتناب از مشکلات گزارش گزینشی، به‌جای انتخاب تنها یک مدل، همهٔ مدلهای سازگار با داده‌ها را که در حد معقولی ساده‌اند مشخص می‌کنیم (کاکس و اسنل [۷]). بخشی از مشکلات اجرای یک چنین راهبردی محاسباتی‌اند نه مفهومی. مثالهایی از این نوع در تحلیلهای آماری پیچیده اهمیت دارند از این لحاظ که سلسله‌ای از انتخابها را که به‌طور غیررسمی مشخص شده‌اند دربارهٔ فرمول‌بندی مدلی که بهترین مدل برای تحلیل و تفسیر است می‌توان انجام داد (اسپانوس [۲۹]).

مثال ۶ (اثر کلاً نامنتظر). این وضع مشکلات عمده‌ای را پیش می‌آورد. در علوم آزمایشگاهی که داده‌ها با سرعت معقولی به‌دست می‌آیند، کوشش برای تکرار نتیجه‌گیری‌ها عملاً اجباری خواهد بود. در دیگر زمینه‌ها جستجو برای داده‌های دیگر که بر موضوع تأثیر دارند لازم می‌آید. تفسیر معنی‌داری آماری شدید به‌خودی خود بسیار مشکل خواهد بود، اساساً به این دلیل که گزینش رخ داده است و با هر نوع واقعگرایی، مشخص‌کردن مجموعه‌ای که در آن گزینش رخ داده است نوعاً سخت یا ناممکن است. اما ملاحظاتی که در مثالهای ۱ تا ۵ مورد بحث واقع شدند می‌توانند راهنما باشند. مثلاً، اگر وضعیت مانند وضعیت مثال ۲ (تبیین اثری معلوم) باشد منبع را می‌توان به‌طور قابل اعتماد، به‌شیوه‌ای که شواهد را تقویت کند به‌جای آنکه از ارزش آنها بکاهد، شناسایی کرد. در حالتی شبیه به مثال ۱، یک اثر گزینش وجود دارد، اما در حد قابل‌قبولی روشن است که مجموعهٔ امکاناتی که در آن این گزینش رخ داده چیست، که تصحیح pـمقدار را مجاز می‌نماید. در دیگر مثالها، یک اثر گزینش وجود دارد، اما ممکن است روشن نباشد که تصحیح را چگونه باید انجام داد. کوتاه سخن آنکه، بسیار غیرمعقول خواهد بود که امکان یادگیری چیزی جدید از داده‌ها در جهتی کلاً نامنتظر را انکار کنیم، اما باید بین بافتارهای مختلف به‌منظور کسب راهنمایی دربارهٔ اینکه چه تحلیل دیگری ممکن است لازم باشد، تمایز قائل شد.

۵. تذکرات پایانی

استدلال کردیم که احتمالهای خطا در آزمونهای بسامدگرا را می‌توان برای ارزیابی قابلیت اعتماد یا ظرفیت آزمون در تمیزدادن این موضوع به‌کار برد که آیا فرایند واقعی پدیدآورندهٔ داده‌ها با آنچه در H_0 توصیف شده همخوان است یا نیست. با آگاهی از این ظرفیت «گواه‌آوری» می‌توان مشخص کرد که شواهدی قوی علیه H_0، برپایهٔ اصل بسامدگرای **ش‌ب** که شرح دادیم، وجود دارد یا خیر. چیزی که باعث می‌شود این نوع استدلال فرضی در موردِ دردستِ بررسی به کار آید، نرخهای پایین خطای درازمدت در استفاده از این ابزار (یا آزمون) به این روال نیست؛ بلکه این است که آن نرخهای خطا چه‌چیزی را دربارهٔ منبع یا پدیدهٔ زایندهٔ داده‌ها آشکار می‌سازد. سعی نکرده‌ایم که رابطهٔ بین تحلیلهای بسامدگرا و بیزی از موضوعات بسیار مشابه را مورد بحث قرار دهیم. یک اصلِ بنیادیِ مفهوم استنباط استقرایی که خیلی با فلسفهٔ بسامدگرا سازگار است، آن است که استنباط استقرایی نیاز به اقامهٔ استدلالها و استنباطهای قاطع از طریق کنار هم‌گذاشتن چند خرده نتیجهٔ متفاوت دارد؛ ملاحظاتی را برای هدایت این خرده نتیجه‌ها شرح دادیم. البته پیچیدگی موضوعها شرح شسته‌رفته‌ای از آنها را مشکل می‌سازد، شرحی که شخص می‌توانست ارائه کند اگر الگوریتمی واحد، کل استنباط استقرایی را در بر می‌گرفت. با این حال، حاصل کارگزارشی است که به نوع استدلالهایی که دانشمندان بنا می‌نهند تا دانش و درک قابل اعتمادی از یک رشتهٔ علمی کسب کنند نزدیک می‌شود.

مراجع

1. Birnbaum, A. (1997). The Neyman-Pearson Theory as decision theory, and as inference theory; with a criticism of the Lindley-Savage argument for Bayesian theory. *Synthese* **36**, 19-49. MR0652320
2. Carnap, R. (1962). *Logical Foundations of Probability.* University of Chicago Press. MR0184839
3. Cochran, W. G. (1965). The planning of observational studies in human populations (with discussion). *J. R. Statist. Soc.* A **128**, 234-265.
4. Cox, D. R. (1958). Some problems connected with statistical inference. *Ann. Math. Statist.* **29**, 357-372. MR0094890
5. Cox, D. R. (1977). The role of significance tests (with discussion). *Scand. J. Statist.* **4**, 49-70. MR0448666
6. Cox, D. R. and Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics.* Chapman and Hall, London. MR0370837
7. Cox, D. R. and Snell, E. J. (1974). The choice of variables in observational studies. *J. R. Statist. Soc.* C **23**, 51-59. MR0413333
8. De Finetti, B. (1974). *Theory of Probability*, 2 vols. English translation from Italian. Wiley, New York.
9. Fisher, R. A. (1935a). *Design of Experiments.* Oliver and Boyd, Edinburgh.
10. Fisher, R. A. (1935b). The logic of inductive inference. *J. R. Statist. Soc.* **98** 39-54.
11. Gibbons, J. D. and Pratt, J. W. (1975). *P*-values: Interpretation and methodology. *American Statistician* **29**, 20-25.
12. Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*, Third edition. Oxford University Press. MR0187257
13. Kempthorne, O. (1976). Statistics and the philosophers. In *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science.* Harper and Hooker (eds.) Vol. 2, 273-314. MR0488407
14. Keynes, J. M. [1921] (1952). *A Treatise on Probability.* Reprint. St. Martin's Press, New York. MR1113699
15. Lehmann, E. L. (1993). The Fisher and Neyman-Pearson theories of testing hypotheses: One theory or two? *J. Amer. Statist. Assoc.* **88**, 1242-1249. MR1245356
16. Lehmann, E. L. (1995). Neyman's statistical philosophy. *Probability and Mathematical Statistics* **15**, 29-36. MR1369789
17. Mayo, D. G. (1996). *Error and the Growth of Experimental Knowledge.* University of Chicago Press.
18. Mayo, D. G. and M. Kruse (2001). Principles of inference and their consequences. In *Foundations of Bayesianism*, D. Cornfield and J. Williamson (eds.). Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 381-403. MR1889643
19. MayoAYO, D. G. and Spanos, A. (2006). Severe testing as a basic concept in a Neyman-Pearson philosophy of induction. *British Journal of Philosophy of Science* **57**, 323-357. MR2249183
20. Mill, J. S. (1988). *A System of Logic*, Eighth edition. Harper and Brother, New York.
21. Morrison, D. and Henkel, R. (eds.) (1970). *The Significance Test Controversy.* Aldine, Chicago.
22. Neyman, J. (1955). The problem of inductive inference. *Comm. Pure and Applied Maths* **8**, 13-46. MR0068145
23. Neyman, J. (1957). Inductive behavior as a basic concept of philosophy of science. *Int. Statist. Rev.* **25**, 7-22.
24. Pearson, E. S. (1955). Statistical concepts in their relation to reality. *J. R. Statist. Soc.* B **17**, 204-207. MR0076234
25. Pierce, C. S. [1931-5]. *Collected Papers*, Vols. 1-6, Hartshorne and Wiess, P. (eds.). Harvard University Press, Cambridge. MR0110632
26. Popper, K. (1959). *The Logic of Scientific Discovery.* Basic Books, New York. MR0107593
27. Savage, L. J. (1964). The foundations of statistics reconsidered. In *Studies in Subjective Probability*, Kyburg, H. E. and H. E. Smokler (eds.). Wiley, New York, 173-188. MR0179814
28. Shaffer, J. P. (2005). This volume.
29. Spanos, A. (2000). Revisiting data mining: 'hunting' with or without a license. *Journal of Economic Methodology* **7**, 231-264.
30. Whewell, W. [1874] (1967). *The Philosophy of the Inductive Sciences. Founded Upon Their History*, Second edition, Vols. 1 and 2 Reprint. Johnson Reprint, London.
31. Will, C. (1993). *Theory and Experiment in Gravitational Physics.* Cambridge University Press. MR0778909
32. Yates. F. (1951). The influence of *Statistical Methods for Research Workers* on the development of the science of statistics. *J. Amer. Statist. Assoc.* **46**, 19-34.

* * * * * *

- Deborah G. Mayo and D. R. Cox, "Frequentist statistics as a theory of inductive inference", *2nd Lehmann Symposium-Optimality*, IMS Lecture Notes-Monograph Series, **49** (2006) 77-97.

* دیبورا جی. مایو، بخش فلسفه و اقتصاد، و یرجینیا تک، آمریکا

mayod@vt.edu

** دی. آر. کاکس، کالج نافیلد، آکسفرد، انگلستان

david.cox@nuffield.ox.ac.uk

آشنایی مقدماتی با نظریهٔ K•

مکس کروبی*
ترجمهٔ علی تقوی، مرضیهٔ شیرانی

هدف از این نوشته آشنا کردن خواننده با «نظریهٔ K» است که یک موضوع جدید ریاضی و مرتبط با چندین شاخهٔ ریاضیات است. این نظریه را الکساندر گروتندیک[1] [۲۳] به‌منظور حل بعضی مسائل مشکل هندسهٔ جبری در دههٔ ۵۰ ابداع کرد. (حرف "K" از کلمهٔ "Klassen" [رده] در زبان آلمانی، زبان مادری گروتندیک، گرفته شده است.) ایدهٔ نظریهٔ K به بخشهای دیگر ریاضیات نیز راه یافته است، مثلاً به نظریهٔ اعداد [۲۷]، توپولوژی ([۲۵]، [۱۸]) و آنالیز تابعی [۴]. از میان موفقیتهای بسیار نظریهٔ K، باید به حل مسأله‌های کلاسیک توپولوژی، قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر[2] [۲۰] و تعمیم گسترده‌اش به موضوع جدید «هندسهٔ ناجابجایی» [۴] و کاربردهای جبری فراوان آن ([۳۷]، [۳۳]) اشاره کرد.

این مقاله به هیچ‌وجه جامع و کامل نیست و تقریباً هیچ اثباتی در آن نیامده است، اما ایده‌های اساسی کاملاً ساده‌اند و آموزش ویژه‌ای برای آغاز مطالعهٔ موضوع لازم نیست، هر چند اگر به‌دنبال کاربردهایی از نظریهٔ K در رشتهٔ خاصی باشید، مسلماً دانش کافی از آن رشته (مثلاً هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، آنالیز تابعی، و ...) لازم است.

بحث ما در این مقاله مبتنی بر یکی از زیباترین جنبه‌های موضوع یعنی تناوب بات[3] است. با توجه به توضیحاتی که در اینجا در مورد جوانب مختلف نظریهٔ K داده می‌شود می‌توان مسائل و گمانه‌های اصلی مورد بحث این نظریه را حدس زد.

پیشنیازِ خواندنِ این نوشته قدری آشنایی با توپولوژی و جبر مقدماتی است. برای نمونه، کتاب عالی آلن هچر [۱۲] یا منابع زیر را ببینید، هرچند تعریفهای اساسی در اولین بخش این مقاله داده شده است. در زیر، منابعی برای مطالعهٔ پیشرفته در این نظریه پیشنهاد شده است. منابع کامل‌تر در طول مقاله ذکر شده و در پایان یادآوری شده است.

آشنایی با موضوع و کاربردها: [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۶]، [۳۲]، [۹]، [۱۰]. هنگام مواجهه با جزئیات فنی اجتناب‌ناپذیر نباید دلسرد شد، باید به‌جستجوی مفاهیم و ایده‌های اصلی پرداخت که اغلب در آغاز این کتابها توضیح داده شده‌اند.

چند کتاب مقدماتی توپولوژی جبری: [۱۲]، [۱۱]، [۱۳].

کتابها و مقاله‌های پیشرفته‌تر: [۵]، [۱۰]، [۱۸]، [۲۰]، [۲۳]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۴]، و ...

۱. مقدماتی از نظریهٔ هوموتوپی. قضیهٔ کلاسیک تناوب بات

فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک «ایده‌آل» (برای نمونه فضاهایی متریک) باشند. دو نگاشت پیوستهٔ f_0 و f_1 از Y به X هوموتوپ هستند اگر بتوان نگاشت پیوسته‌ای* چون $F : Y \times [0,1] \to X$ یافت که به‌ازای $F(y,i) = f_i(x), i = 0,1$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است و مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی را با $[Y,X]$ نمایش می‌دهیم. محاسبهٔ صریح این مجموعه به‌طور کلی مشکل است، حتی برای فضاهایی به‌سادگی کره‌ها (محاسبهٔ گروههای هوموتوپی کره‌ها را در زیر ببینید).

دو فضای X و Y به‌طور هوموتوپ هم‌ارز هستند (یا از یک گونهٔ هوموتوپی هستند) اگر دو نگاشت $f : Y \to X$ و $g : X \to Y$ وجود داشته باشند که $f \cdot g$ هوموتوپ با Id_X و $g \cdot f$ هوموتوپ با Id_Y باشند. ایده‌ای که در پس این تعریف نهفته است مفهوم «شکل» یک فضاست که دقیقاً مترادف

1. Alexander Grothendieck
2. Atiyah-Singer index theorem
3. Bott periodicity

* نگاشتهای مورد بحث در این مقاله را پیوسته درنظر می‌گیریم.

با «گونهٔ هوموتوپی» است. صرف‌نظر از جزئیات، دوفضا شکل یکسان دارند اگر بتوان با تغییر شکل، یکی را به‌دیگری تبدیل کرد. مفهوم ریاضی «تغییر شکل» همان «گونهٔ هوموتوپی» است که هم اینک تعریف کردیم.

یک نوع از این ملاحظات، در نظر گرفتن فضای X با «نقطهٔ پایهٔ» x_0، و نگاشتهای حافظ نقطهٔ پایه است. برای مثال، در تعریف بالا از نگاشتهای هوموتوپ، به‌علاوه فرض می‌کنیم $F(y_0, t) = x_0$. انگیزه‌ای برای این نوع تعریف، تعریف گروههای هوموتوپی فضای X (با نقطهٔ پایهٔ ثابت) است. این گروهها دقیقاً رده‌های هم‌ارزی X هستند هنگامی که Y را یک کرهٔ S^p (با نقطهٔ پایهٔ معلوم) بگیریم.* گروههای هوموتوپی نقش مهمی در توپولوژی جبری ایفا می‌کنند.

به زبان دقیق‌تر، رده‌های هوموتوپی نگاشتهای حافظ نقطهٔ پایه از کرهٔ S^p به X، مجموعهٔ مؤلفه‌های مسیری‌همبند است اگر $p = 0$، یک گروه است اگر $p > 0$ و یک گروه آبلی است اگر $p > 1$. این گروه (یا مجموعه، اگر $p = 0$) به‌صورت $\pi_p(X, x_0)$، یا اگر نقطهٔ پایه به‌طور ضمنی منظور شده باشد به‌صورت $\pi_p(X)$ نوشته می‌شود. اگر دو نقطهٔ x_0 و x_1 در یک مؤلفهٔ مسیری‌همبند X باشند، می‌توان نشان داد $\pi_p(X, x_0)$ و $\pi_p(X, x_1)$ یکریخت هستند. به‌سادگی نشان داده می‌شود که دوفضای هم‌ارز هوموتوپ، گروههای هوموتوپی یکریخت دارند.

باید افزود که $\pi_1(X)$ «گروه بنیادی» یا «گروه پوانکارهٔ» یک فضا نامیده می‌شود: پوانکاره این گروه را برای درکِ رفتار جوابهای معادلات دیفرانسیل حول نقطهٔ بحرانی معرفی کرد.

دیگر گروههای هوموتوپی $\pi_i(X)$ به‌ازای $i > 1$، نقشی اساسی در توپولوژی دیفرانسیل دارند، مثلاً در مواردی از قبیل رده‌بندی خمینه‌ها: به‌عنوان نمونه، «حدس پوانکاره» سؤال زیر را مطرح می‌کند: فرض کنید M یک خمینهٔ توپولوژیک از بعد ۳ باشد که همان گونهٔ هوموتوپی S^3 را دارد. آیا M با S^3 همسانریخت است؟ این یکی از مسأله‌هایی است که مؤسسهٔ ریاضیات کلی برای آن جایزه تعیین کرد.[1]

محاسبهٔ گروههای هوموتوپی یک فضا بسیار دشوار است. برای مثال، $\pi_r(S^r)$ به‌ازای $r > 1$ در حالت کلی شناخته نشده است. با این حال، می‌دانیم این گروه اگر $p < r$، صفر و اگر $p = r$، با $\mathbf{Z}$ یکریخت است. به ازای $r < p$، برخی اطلاعات جزئی، که از تحقیقات اساسی سِر به دست می‌آید، به صورت زیر است: اگر r فرد باشد یا r زوج باشد و $p \neq 2r - 1$، $\pi_r(S^r)$ متناهی است. اگر r زوج باشد و $p = 2r - 1$، $\pi_r(S^r)$ مجموع مستقیم $\mathbf{Z}$ و یک گروه متناهی است. برای ملاحظهٔ این نتایج و نتایج کلی‌تر می‌توانید مرجع [۱۳] را که کتابی پایه‌ای در نظریهٔ هوموتوپی است ببینید.

به هر حال، همان‌طور که بات خاطر نشان کرده بود، گروههای هوموتوپیِ «گروههای لی» قاعدتاً باید تحت شرایط مشخصی راحت‌تر تعیین شوند. گروههای لی مورد نظر در اینجا به عنوان مجموعه‌هایی از ماتریسهای $n \times n$ وارون‌پذیر با ضرایبِ متعلق یکی از میدانهای عددی $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، یا $\mathbf{H}$، به ترتیب اعداد حقیقی، اعداد مختلط، یا کواترنیون‌ها تعریف می‌شوند. این گروهها را با نمادهای $G_n = GL_n(\mathbf{R})$, $GL_n(\mathbf{C})$, $GL_n(\mathbf{H})$ نمایش می‌دهیم. توپولوژی (و متریک) این گروهها، حاصل از نشاندن طبیعیِ آنها در فضایی اقلیدسی با بعد مناسب است.

می‌توان دید که $\pi_p(G_n)$ وقتی n افزایش می‌یابد «ثابت و پایدار می‌ماند». به زبان دقیق‌تر، مشمولیت متعارف G_n در G_{n+1} (با اضافه کردن صفرها جز برای عضو گوشهٔ راست پایین که مساوی ۱ باشد) $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ به $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ یکریختی $\pi_p(G_n) \approx \pi_p(G_{n+1})$ را برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ القا می‌کند ([۲۸]، صص ۱۳ـ۱۴). در واقع، باید $n > p + 1$ (به ترتیب، $n > p/2$، $n > p/4 + 1/2$) را برای $GL_n(\mathbf{R})$ (به ترتیب $GL_n(\mathbf{C})$، $GL_n(\mathbf{H})$) در نظر بگیریم. این گروههای هوموتوپی پایدار را به ترتیب با $\pi_p(GL(\mathbf{R}))$، $\pi_p(GL(\mathbf{C}))$، یا $\pi_p(GL(\mathbf{H}))$ نمایش می‌دهیم. نتیجهٔ شایان توجه بات حاکی است که:

قضیه [۲۵]. این گروههای هوموتوپی پایدار، تناوبی هستند. به بیان دقیق‌تر

$$\pi_p(GL(\mathbf{R})) \approx \pi_{p+4}(GL(\mathbf{H})) \approx \pi_{p+8}(GL(\mathbf{R}))$$
$$\pi_p(GL(\mathbf{C})) \approx \pi_{p+2}(GL(\mathbf{C})).$$

توضیح. این قضیه در نگاه اول کاملاً فنی به‌نظر می‌رسد. اما مدت کوتاهی پس از کشف بات مشخص شد که این قضیه نقشی مرکزی در بسیاری از کاربردها دارد. در واقع نظریهٔ Kی توپولوژیک (بخش بعدی مقاله را ببینید) بدون این قضیه به وجود نمی‌آمد.

از چشم‌اندازهای دیگری نیز می‌توان به این قضیه نگریست و آن را تعمیم داد. اگر X فضایی با نقطهٔ پایهٔ x_0 باشد، ΩX را فضای نگاشتهای پیوستهٔ حافظ نقطهٔ پایهٔ σ از دایرهٔ S^1 به X می‌نامیم: این «فضای طوقه‌ای» X نامیده می‌شود. در حالت فضای متریک، توپولوژی ΩX توسط متریک $d(\sigma, \tau) = \operatorname{Sup} d_X(\sigma(t), \tau(t))$ القا می‌شود که t در تمام دایره تغییر می‌کند. گروههای هوموتوپی ΩX، همان گروههای هوموتوپی X هستند با یک انتقال $\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X)$. به‌علاوه، می‌توان ساختن فضای طوقه‌ای را تکرار کرد: مثلاً $\Omega^2(X)$ را به‌صورت $\Omega(\Omega X)$ تعریف می‌کنیم، و همین طور $\Omega^3(X) = \Omega(\Omega^2(X))$ و غیره. به‌سادگی می‌توان نشان داد $\pi_n(\Omega^r X) \approx \pi_{n+r}(X)$. با این تعریف جدید، تناوب بات را می‌توان به شکل کلی‌تری بیان کرد: روابط هوموتوپی*

$$GL(\mathbf{R}) \approx \Omega^4(GL(\mathbf{H})) \approx \Omega^8(GL(\mathbf{R}))$$

* کرهٔ S^p زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^{p+1}$ است که $(x_1)^2 + \dots + (x_{p+1})^2 = 1$.

۱. این مسأله را گریگوری پرلمان ریاضیدان روس حل کرده است.ـم.

* برای تعریف دقیق‌تر $G = GL(\mathbf{R}), GL(\mathbf{C}), GL(\mathbf{H})$، پایان این بخش را ببینید.

و

$$GL(\mathbf{C}) \approx \Omega^{۲}(GL(\mathbf{C}))$$

را داریم. اگر H زیرگروه بستهٔ گروه لی G باشد، فضای همگن G/H خارج‌قسمت G با رابطهٔ هم‌ارزی

$$g_۱ \sim g_۲ \Leftrightarrow (g_۲)^{-۱} g_۱ \in H$$

است. «فضای همگن» $GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R})$ به‌عنوان نوعی حد فضاهای $GL_n(\mathbf{C})/GL_n(\mathbf{R})$ (هر ماتریس حقیقی یک ماتریس مختلط است) تعریف می‌شود؛ به همین طریق $GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C})$ حد $GL_{۲n}(\mathbf{R})/GL_n(\mathbf{C})$ است، که $GL_n(\mathbf{C})$ در $GL_{۲n}(\mathbf{R})$ به وسیلهٔ نگاشت کلاسیک $A+iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ نشانده شده است. در [۲۵] نیز نشان داده شده است که هم‌ارزی‌های هوموتوپی زیر را داریم*

$$\begin{aligned}
&\Omega(\mathbf{Z} \times BGL(\mathbf{R})) \approx GL(\mathbf{R}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{R})) \approx GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C})) \approx GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{H}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{H})) \approx \mathbf{Z} \times BGL(\mathbf{H}) \\
&\Omega(\mathbf{Z} \times BGL(\mathbf{H})) \approx GL(\mathbf{H}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{H})) \approx GL(\mathbf{H})/GL(\mathbf{C}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{H}))/GL(\mathbf{C})) \approx GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R}) \\
&\Omega(GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R})) \approx \mathbf{Z} \times BGL(\mathbf{R}).
\end{aligned}$$

(برای ملاحظهٔ اثبات و تعریف ملموسی از فضاهای همگن G/H در موقعیتهای مختلف، ر.ک. [۶]، ص ۱۴۸).

برای $G = GL(\mathbf{R}), GL(\mathbf{C}),\ GL(\mathbf{H})$، «فضای رده‌بندی» BG را می‌توان (با تقریب هوموتوپی) به‌صورت صریح زیر توصیف کرد. این فضا، فضای متشکل از نگاشتهای پیوستهٔ خطی $Q : H \to H$ است که H یک فضای هیلبرت نامتناهی‌بعد (روی $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، یا $\mathbf{H}$) است به‌طوری که $Q^{۲} = Q$، نگارهٔ[1] Q یک فضای برداری متناهی‌بعد است. به همین طریق، G گونهٔ هوموتوپی فضای توابع پیوستهٔ خطی $\alpha : H \to H$ را دارد به طوری که $۱ - \alpha$ یک عملگر فشرده است (یعنی حد عملگرهای متناهی‌رتبه).

توضیحات و مراجعی برای مطالعهٔ بیشتر

شرح خوبی از کارِ بات در کتابهای درسی و مقاله‌های گوناگون، مناسب با سلایق مختلف، یافت می‌شود:

۱. مقالهٔ اصلی بات [۲۵]، این مقاله برای مبتدی مشکل است (استفادهٔ زیاد از «نظریهٔ مورس»[2]، که موضوعی عمیق در هندسهٔ ریمانی است)، برای یک نگاه اجمالی به موضوع، [۳۲] توصیه می‌شود.

۲. اثباتی مقدماتی (در حالت مختلط) توسط اتیا و بات [۱۷] که در کتاب اساسی اتیا [۱] نیز آمده است.

۳. استفادهٔ اصولی از نظریهٔ Kی مختلط و حقیقی (بخش بعدی را ببینید)، که در آن تناوب بات به عنوان یک نتیجهٔ تناوبی جبرهای کلیفرد[1] ظاهر می‌شود [۶].

دربارهٔ توپولوژی جبری کتابهای خوب زیادی در سطح دورهٔ کارشناسی وجود دارد. ما [۱۲] را به عنوان در دسترس‌ترین منبع توصیه می‌کنیم.

۲. آغاز نظریهٔ K

نقطهٔ آغاز نظریهٔ K، ایدهٔ ساده‌ای از گروتندیک بود [۲۳]. اگر M یک نیمگروه باشد، به همان طریقی که $\mathbf{Z}$ از نیمگروه $\mathbf{N}$ (اعداد طبیعی) ساخته می‌شود، می‌توان M را به نوعی «متقارن» کرد. به بیان دقیق‌تر، گروه جدید $S(M)$ را به M نسبت می‌دهیم که به صورت خارج قسمت $M \times M$ به روی رابطهٔ هم‌ارزی زیر تعریف می‌شود.

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+b+e = b+c+e$ ای وجود داشته باشد که e

نگاشتی از M به $S(M)$ وجود دارد که m را به ردهٔ $(\mathrm{m}, ۰)$ می‌نگارد که در حالت کلی یک‌به‌یک نیست. واقعیت امر این است که محاسبهٔ نیمگروه M، حداقل در مواردی که ما در نظر داریم، کاری است پیچیده (مثال $\phi(A)$ را در زیر ببینید.) در حالی که $S(M)$ به وسیلهٔ تکنیکهای استاندارد جبر و توپولوژی قابل دستیابی است.

در اینجا به یک مثال اساسی اشاره می‌کنیم. فرض کنید A حلقه‌ای یکه‌دار، و $M = \phi(A)$ مجموعهٔ Aـمدولهای (راست) تصویری متناهی‌مولد با تقریب یکریختی باشد. به وضوح، چنین مدول E به عنوان نگارهٔ یک Aـنگاشت خطی Q از A^n به A^n تعریف می‌شود به طوری که $Q = Q^{۲}$. اگر A میدان باشد، E دقیقاً یک فضای برداری متناهی‌بُعد است.

از نمادگذاری‌ها بر می‌آید که M یک نیمگروه با قانون ترکیب زیر است: $\overline{E} + \overline{F} = \overline{E \oplus F}$ که $\overline{E}$ در حالت کلی ردهٔ یکریختی مدول E را نشان می‌دهد. گروه گروتندیک $S(M)$ که از M با متقارن‌سازی به دست می‌آید، نظریهٔ Kی A نامیده و با $K(A)$ نشان داده می‌شود.

توجه کنید که $K(A)$ یک «تابعگون» است: یک همریختی حلقه‌ای $f : A \to B$، نگاشت گروهی $K(A) \to K(B)$ را القا می‌کند. در سطح مدولها، به Aـمدول E، Bـمدول تعریف شده توسط رابطهٔ $F = E \otimes_A B$ نسبت داده می‌شود. اگر E را به صورت نگارهٔ Q مانند بالا بنویسیم، F نگارهٔ عملگر تصویری $\widetilde{f}(Q)$ است که $\widetilde{f}$ همریختی حلقه‌ای مربوط به $M_n(A) \to M_n(B)$ است.

در حالت خاص، نگاشت حلقه‌ای یکتای $\mathbf{Z} \to A$ وجود دارد. هم‌هستهٔ[2] نگاشت طبیعی مربوطهٔ $K(\mathbf{Z}) \to K(A)$ (نشان دادن اینکه $K(\mathbf{Z})$ با $\mathbf{Z}$

* تعریف ملموس BG را در ادامهٔ مقاله ببینید.

1. image 2. Morse theory

1. Clifford algebras 2. cokernel

یکریخت است، نسبتاً ساده است؛ جدول Kـگروه‌ها را در ادامه ببینید.) نظریهٔ Kی فروکاستهٔ A است و با $\widetilde{K}(A)$ نمایش داده می‌شود. اگر A جابه‌جایی باشد، $K(A)$ یکریخت با مجموع مستقیم $\mathbf{Z}\oplus\widetilde{K}(A)$ است (نه به طور طبیعی). بنابراین، $\widetilde{K}(A)$ را بخش نابدیهی نظریهٔ Kی حلقهٔ A در نظر می‌گیریم.

با وجود سادگی ظاهری این تعریف، نظریهٔ K در بخشهایی از ریاضیات بسیار مفید واقع شده است. دو مثال ویژه، تنوع مفهوم را نشان خواهد داد.

اولین مثال از نظریهٔ اعداد است: A حلقهٔ خارج قسمتی $\mathbf{Z}[x]/(1+x+\ldots+x^{p-1})$ است، که در آن p یک عدد اول فرد است. در نتیجه $\widetilde{K}(A)$ یک گروه متناهی است که در قرن نوزدهم کومر آن را (تحت نام دیگری) بررسی کرد، و در واقع این گروه وابسته به آخرین قضیهٔ فرماست: کومر ثابت کرد اگر این گروه عنصری از مرتبهٔ p نداشته باشد معادلهٔ $X^p+Y^p=Z^p$ هیچ جواب صحیحی ندارد (البته مگر وقتی X یا Y برابر صفر باشد). برای مثال [۲۲] و [۸] را ببینید که در آنجا نظریهٔ Kی فروکاسته با ایده‌آلها در میدانهای عددی (یعنی میدانهایی که توسیع متناهی از $\mathbf{Q}$ هستند) مرتبط است.

دومین مثال از توپولوژی است: A حلقهٔ توابع پیوستهٔ (حقیقی یا مختلط) روی فضای فشردهٔ X است. این مثال را با $C_{\mathbf{R}}(X)$ یا $C_{\mathbf{C}}(X)$ به ترتیب در حالت حقیقی یا مختلط نمایش می‌دهیم. در نتیجه یکریختی‌ای بین $K(A)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ و قسمتی از کوهومولوژی [همانستگی] X داریم.* (اثبات را در [۲۸] ببینید). به بیان دقیق‌تر:

$$K(C_{\mathbf{C}}(X))\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}\approx\oplus_k H^{2k}(X;\mathbf{Q})$$
$$K(C_{\mathbf{R}}(X))\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}\approx\oplus_k H^{4k}(X;\mathbf{Q})$$

همچنین باید توجه کرد نظریهٔ Kی این حلقه‌ها یک ناوردای هوموتوپی است: تعویض X با $X\times[0,1]$، نظریهٔ K را تغییر نمی‌دهد.

در جدول زیر چند مثال اساسی (با توضیحات) آمده است. سعی کنید محاسبات را انجام دهید. محاسبهٔ «Kـگروهها» بهترین راه یادگیری «نظریهٔ» نهفته در پس نظریهٔ K است.

مثالهای محاسبه‌ای (با توضیحات)

A	$K(A)$
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
	یعنی هر گروه آبلی که جمعوند مستقیم $\mathbf{Z}^n$ای است، به ازای nای، از نوع $\mathbf{Z}^m$ است.
$\mathbf{Z}(\sqrt{-5})$	$\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}$
	عامل $\mathbf{Z}/2$ وابسته به‌وجود ایده‌آل غیراصلی است [۳۶].
$\mathbf{C}[G]$	$\mathbf{Z}^N$
	در اینجا G یک گروه متناهی است. N تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر است. این محاسبه نقطهٔ آغاز نظریهٔ زیبای نمایش گروههای متناهی است [۳۷].
$C_{\mathbf{C}}(S^1)$	$\mathbf{Z}$
	تعبیر هندسی این نتیجه چنین است: هر کلاف برداری مختلط روی دایره بدیهی است. ([۲۸]، ص ۱۳)
$C_{\mathbf{R}}(S^1)$	$\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}$
	عامل $\mathbf{Z}/2$ ناشی از وجود نوار موبیوس است. ([۶]، ص ۱۳)
$C_{\mathbf{C}}(S^2)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$
	یکی از عاملهای $\mathbf{Z}$ ناشی از وجود یک کلاف خطی مختلط «متعارف» L روی کرهٔ دوبعدی است. ([۶]، ص ۱۳ یا [۷]، ص ۲۲)
$C_{\mathbf{R}}(S^2)$	$\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}$
	کلاف حقیقی متناظر با L ــ که آن را L' می‌نامیم ــ بدیهی نیست و توجیهی است برای عامل $\mathbf{Z}/2$ زیرا $L'\oplus L'$ کلاف حقیقی بدیهی است (دوباره از [۶]، ص ۱۳ استفاده کنید).
$M_n(A)$	$K(A)$
	این بدان معنی است که وقتی به‌جای A، حلقهٔ ماتریس‌های $n\times n$ با ضرایب متعلق به A قرارگیرد، نظریهٔ K تغییر نمی‌کند (ناوردایی موریتا). چند اثبات مقدماتی از این موضوع وجود دارد. مثلاً ر.ک. ([۶]، ص ۱۳۸).
$\mathcal{K}$	$\mathbf{Z}$
	در اینجا $\mathcal{K}$ جبر عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت نامتناهی‌بعد H است. اثبات این موضوع به مطالبی از آنالیز احتیاج دارد. برای مثال، ر.ک. [۲۸]، ص ۱۷۶ (تمرین ۹.۷).
$\mathcal{B}(H)$	۰
	$\mathcal{B}(H)$ جبر همهٔ عملگرهای کراندار در H را نمایش می‌دهد. اثبات کاملاً ابتدایی خواهد بود به شرط اینکه توجه کنیم رستهٔ مدولهای تصویری متناهی مولد روی این جبر هم‌ارز رسته‌ای است که اشیای آن فضاهای هیلبرت (جمعوندهای مستقیم یک H^n) و ریختارهای آن نگاشتهای پیوستهٔ خطی بین آنها هستند.

توضیحات و پیشنهادهایی برای مطالعهٔ بیشتر

کتابهای زیادی دربارهٔ جنبه‌های مقدماتی نظریهٔ K وجود دارد. دانشجویان

* کوهومولوژی، برای مثال، در [۱۲] و [۱۱] تعریف شده است.

علاقه‌مند به عنوان نمونه [۱] یا دو بخش اول [۶] را بخوانند (سعی کنید تمرینهای مربوطهٔ صص ۴۴ـ۵۱ و صص ۱۰۵ـ۱۱۱ را حل کنید).

۳. رابطهٔ بین نظریهٔ K و تناوب بات

برای سادگی بحث، توجه خود را به حالت مختلط محدود می‌کنیم و نگاشتی صریح از $\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C}))$ به $\widetilde{K}(A)$ را توصیف می‌کنیم که A عبارت است از $C_{\mathbf{C}}(S^p)$ یعنی حلقهٔ توابع پیوستهٔ مختلط روی کرهٔ S^p. به این منظور کرهٔ S^p را به دو نیمکرهٔ «فربه» S^p_+ و S^p_- تجزیه می‌کنیم، هر نیمکره با $x_{p+1} > -\frac{1}{2}$ (یا $x_{p+1} < \frac{1}{2}$) تعریف می‌شود.

با استفاده از آخرین مختص x_{p+1} به‌عنوان پارامتر، دو تابع پیوستهٔ α_+ و α_- را از کرهٔ S^p به بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ تعریف می‌کنیم به‌طوری که α_+ (یا α_-) در بیرون S^p_+ (یا S^p_-) صفر است و $\alpha_+ + \alpha_- = 1$.* تعریف می‌کنیم:

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha_+)^2 + (\alpha_-)^2}}$$

که بر این اساس، $\alpha = \alpha_+$ یا $\alpha = \alpha_-$ و $\beta = \beta_+$ یا $\beta = \beta_-$.

بعد از این مقدمات، عضوی از $\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C}))$ را که با نگاشت پیوستهٔ $f : S^{p-1} \to GL_n(\mathbf{C})$ به‌ازای nهای (به‌قدر کافی بزرگ) نمایش داده می‌شود در نظر بگیرید. نگاشت f را توسط تصویر نصف‌النهاری به روی استوا، به $\widetilde{f} : S^p_+ \cap S^p_- \to GL_n(\mathbf{C})$ گسترش می‌دهیم. ماتریس

$$Q = \begin{pmatrix} (\beta_+)^2 & \beta_+\beta_-\widetilde{f} \\ \beta_+\beta_-\widetilde{f}^{-1} & (\beta_-)^2 \end{pmatrix}$$

(که $(\beta_+)^2$، $(\beta_-)^2$ یا $(\beta_+\beta_-)$ به معنی ضرب این عدد در ماتریس همانی از مرتبهٔ n است) یک ماتریس $2n \times 2n$ است که درایه‌هایش توابع پیوسته روی S^p با مقدارهایی در $M_{2n}(\mathbf{C})$ هستند. به‌سادگی می‌توان دید که $Q^2 = Q$. بنابراین، نگارهٔ Q یک مدول تصویری روی حلقهٔ $A = C_{\mathbf{C}}(S^p)$، و از اینجا عضوی از $\widetilde{K}(A)$ را تعریف می‌کند که مستقل از انتخاب افراز یکهٔ (β_+, β_-) است (این استقلال با استدلالی براساس هوموتوپی قابل اثبات است).

قضیه. تناظر $f \mapsto \mathrm{Im}(Q)$ یکریختی

$$\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C}) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^p))$$

را تعریف می‌کند [برای اثبات، به عنوان مثال، ر.ک. [۶]، صص ۳۶ و ۵۵، بخش ۱۸.۱].

قضیهٔ قبل، تناوب بات را برحسب نظریهٔ K بیان می‌کند. باید نشان داد که $\widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^p))$ دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۲ نسبت به p است. به عبارت دیگر، با استفاده از همان ساختار در حالت حقیقی باید نشان داد $\widetilde{K}(C_{\mathbf{R}}(S^p))$ نسبت به p دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۸ است.

* چنین چیزی افراز یکهٔ متناظر پوشش کره با دو نیمکره است ([۱۴]، ر.ک. ص ۲۲).

۴. نظریهٔ K به‌عنوان یک نظریهٔ هومولوژی روی جبرهای باناخ

تا اینجا نظریهٔ K را فقط برای حلقه‌های یکه‌دار تعریف کرده‌ایم. این تعریف را با اندکی اصلاح می‌توانیم به حلقه‌های بدون یکه به‌صورت زیر تعمیم دهیم. A را یک kـجبر در نظر می‌گیریم که k یک حلقهٔ جابه‌جایی یکه‌دار (مثلاً $\mathbf{Z}$) است. حلقهٔ جدید یکه‌دار A^+ را به‌صورت $A \times k$ با جمع بدیهی و ضرب «تابیدهٔ» زیر تعریف می‌کنیم

$$(a,\lambda)(a',\lambda') = (aa' + \lambda a' + \lambda' a, \lambda\lambda')$$

یک نگاشت بدیهی $A^+ \to k$ وجود دارد و نظریهٔ Kی A به عنوان هستهٔ نگاشت القایی $K(A^+) \to K(k)$ تعریف می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که این تعریف در حقیقت مستقل از k است.

یک مثال جالب و انگیزه‌بخش، حلقهٔ توابع پیوستهٔ k مقداری f روی فضای موضعاً فشردهٔ X ($k = \mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$) است به طوری که $f(x)$ وقتی x به سمت ∞ می‌رود به صفر میل کند. پس A^+ حلقهٔ توابع پیوسته روی «فشرده‌شدهٔ تک‌نقطه‌ای» X است. برای مثال، اگر $X = \mathbf{R}^p$، $K(A)$ با $\widetilde{K}(C(S^p))$ یکریخت است.

همچنین توجه کنید که این روش ما را قادر می‌سازد به‌ازای نگاشت حلقه‌ای کلی $f : A \to B$، یک ریختار $K(A) \to K(B)$ تعریف کنیم (اکنون دیگر فرض نمی‌کنیم $f(1) = 1$، حتی اگر A و B حلقه‌های یکه‌دار باشند.)

دنباله‌ای چون $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ از حلقه‌ها و نگاشتها کامل[1] نامیده می‌شود اگر دنبالهٔ گروههای آبلی متناظر کامل باشد. به عبارت دیگر، A' می‌تواند ایده‌آلی دوطرفه از A تعبیر شود، در حالی که A'' می‌تواند حلقهٔ خارج قسمتی A/A' قلمداد شود.

قضیه. دنبالهٔ قبلی دنبالهٔ کامل زیر از Kـگروهها را القا می‌کند:

$$K(A') \xrightarrow{\alpha} K(A) \xrightarrow{\beta} K(A'')$$

یعنی $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ [برای ملاحظهٔ اثبات، به عنوان نمونه [۳۳] یا [۳۰] را ببینید].

طبیعی است بپرسیم $\mathrm{Ker}(\alpha)$ و $\mathrm{Coker}(\beta)$ چه چیزهایی هستند. در صورت آشنایی با جبر هومولوژیک باید بتوانیم «تابعگونهای مشتق‌شده» K_n، $n \in \mathbf{Z}$، را برای Kـ گروه تعریف کنیم تا دنبالهٔ کامل قبلی را به چپ و به راست (گروه $K_0(A)$، $K(A)$ می‌شود) گسترش دهیم. یک راه‌حل جزئی برای گسترش دنبالهٔ کامل فوق به طرف چپ در قضیه‌ای که در چند سطر آینده می‌آید، ارائه می‌شود.

حداقل دو راه برای حل این مسألهٔ تابعگونهای مشتق‌شده وجود دارد. اولی شامل گذاشتن یک توپولوژی روی حلقه‌های مورد نظر است (یعنی جبرهای باناخ را چنان که در زیر توضیح داده می‌شود در نظر بگیریم)، دیگری باقی ماندن در جبر محض است، که به طرز عجیبی بسیار سخت‌تر است. با رویکرد اول آغاز می‌کنیم.

1. exact

یادآوری می‌کنیم جبر باناخ (روی $\mathbf{C}$ یا $k = \mathbf{R}$) یک kـجبر است (نه لزوماً یکه‌دار) با ویژگیهای زیر:

۱. نرم $a \mapsto \| a \|$ روی فضای برداری A تعریف می‌شود به طوری که A با متریک $d(a,b) = \| a - b \|$ کامل است.

۲. نابرابری $\| ab \| \leq \| a \| \cdot \| b \|$ را داریم.

یک مثال نوعی، حلقهٔ توابع پیوستهٔ f روی یک فضای موضعاً فشردهٔ X است که وقتی x به سمت ∞ می‌رود $f(x)$ به صفر میل می‌کند. پس نُرم f، $\| f \|$، بیشینهٔ مقدار $|f(x)|$ است وقتی $x \in X$.

به طور کلی‌تر، اگر A یک جبر باناخ و X یک فضای موضعاً فشرده باشد، جبر باناخ جدید $A(X)$ را به عنوان حلقهٔ توابع پیوستهٔ f از X به A با همان شرطِ در بینهایت تعریف می‌کنیم. برای تعریف نرم، $|f(x)|$ را در مثال قبلی با $\| f(x) \|$ تعویض می‌کنیم. با نمادگذاری بدیهی، یکریختی $A(X)(Y) \approx A(X \times Y)$ را داریم.

قضیه. با تقریب یکریختی، راه یکتایی برای تعریف تابعگونهای $K_n(A)$ برای جبر باناخ A، $n \geq 0$، وجود دارد به طوری که اصول زیر برقرارند:

۱) کامل بودن. با مفروض بودن دنبالهٔ کامل

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

از جبرهای باناخ که A'، نرم القایی دارد و A'' نرم خارج قسمتی، یک دنبالهٔ کامل طویل (از سمت چپ نامتناهی) داریم:

$$\to K_{n+1}(A'') \to K_n(A') \to K_n(A)$$
$$\to K_n(A'') \to K_{n-1}(A') \to$$

۲) ناوردایی هوموتوپی. مشمولیت متعارف A به درون $B = A([0,1])$ یکریختی $K_n(A) \approx K_n(B)$ را القا می‌کند.

۳) بهنجارش[1]. $K_0(A) = K(A)$ [مثلاً ر.ک. [۶] تمرین ۱۴.۶، ص ۱۰۹].

استنتاج یکریختی $K_n(A) \approx K(A(\mathbf{R}^n))$ از اصول بالا چندان مشکل نیست. در حالت خاص،

$$\widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^n)) \approx K_n(\mathbf{C}) \quad \text{و} \quad \widetilde{K}(C_{\mathbf{R}}(S^n)) \approx K_n(\mathbf{R})$$

به علاوه، اگر A یکه‌دار باشد، گروه $K_n(A)$ همچنین می‌تواند به صورت گروه هوموتوپی مناسبی تعریف شود: برای $n > 0$، این گروه دقیقاً گروه هوموتوپی $\pi_{n-1}(GL(A))$ است که یک «حد» گروههای هوموتوپی $\pi_{n-1}(GL_r(A))$ است که r به ∞ میل می‌کند.

قضیهٔ قبل ما را قادر می‌سازد که یک «نظریهٔ کوهومولوژی» روی رستهٔ فضاهای فشرده به مفهوم مورد نظر ایلنبرگ و استینراد [۱۱] تعریف کنیم: اگر X فضایی فشرده باشد و Y یک زیرمجموعهٔ بستهٔ آن، $K^{-n}(X,Y)$ را به‌صورت K_nـگروه جبر باناخ $C(X - Y)$ تعریف می‌کنیم.* درواقع برحسب اینکه توابع پیوسته روی $X - Y$ حقیقی یا مختلط در نظر گرفته شوند دو نظریه وجود دارد. این گروهها در همهٔ اصول یک نظریهٔ کوهومولوژی صدق می‌کنند، بجز در اصل بُعد. این نظریهٔ کوهومولوژی ابتدا توسط اتیا و هیرتسه بروخ [۱۸] تعریف شد، و نقطهٔ آغاز «نظریهٔ Kی توپولوژیک» برای فضاهای پیوسته و بعد از آن برای جبرهای باناخ $[K]$ بود. این نظریه برای جبرهای باناخ (که در ۲۰ سال اخیر پدید آمده است) اهمیت زیادی در یک مبحث جدید ریاضیات به نام «هندسهٔ ناجابه‌جایی» [۴] داشته است. این نشان‌دهندهٔ اهمیت قضیهٔ زیر در این مبحث جدید است.

قضیه. ([۶]، بخش III). فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط (یا حقیقی) باشد. آنگاه یکریختی

$$(K_n(A) \approx K_{n+8}(A) \text{ یا } K_n(A) \approx K_{n+2}(A)$$

را داریم.

توضیح. اگر برای سادگی در حالت مختلط بمانیم و اگر $n \in \mathbf{Z}$، می‌بینیم که به‌طور صوری می‌توانیم $K_n(A)$ را به‌ازای r به‌قدر کافی بزرگ به‌صورت $K_{n+2r}(A)$ تعریف کنیم به‌طوری که $n + 2r > 0$. به عبارت دیگر، می‌توانیم $K_{-1}(A)$ را به عنوان $K_1(A)$، $K_{-2}(A)$ را به عنوان $K_0(A)$ و ... تعریف کنیم. بنابراین، می‌توان به دنبالهٔ کاملی از جبرهای باناخ همچون دنبالهٔ بالا یعنی $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$، یک دنبالهٔ کامل «شش ضلعی»[1]

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A') & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A'') \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A') & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & K_1(A'') \end{array}$$

نسبت داد. به این ترتیب، مسأله‌ای که قبلاً دربارهٔ هستهٔ نگاشت $K_0(A') \to K_0(A)$ و هم‌هستهٔ نگاشت $K_0(A) \to K_0(A'')$ داشتیم حل می‌شود.

تعداد زیادی اثبات برای تناوب بات در متون مربوط به موضوع وجود دارد. همهٔ آنها به مقداری اطلاعات فنی نیاز دارند. یک اثبات مفهومی شامل معرفی «ضرب ناوی»[2] در نظریهٔ K است. به بیان دقیق‌تر، یک زوج‌سازی دوخطی بین سه حلقهٔ یکه‌دار A، B، و C با استفاده از نگاشت $\mathbf{Z}$ـدوخطی $\varphi : A \times C \to B$ داده می‌شود به طوری که

$$\varphi(aa', cc') = \varphi(a,c)\varphi(a',c'), \qquad \varphi(1,1) = 1.$$

به‌سادگی می‌توان دید که یک چنین زوج‌سازی یک همریختی گروهی

$$K(A) \otimes K(C) \to K(A \otimes_{\mathbf{Z}} C) \to K(B)$$

---

1. normalization

2. cup-products

* توجه کنید که تاکنون $K^n(X,Y)$ به ازای $n > 0$ تعریف نشده است.

۱. یا همان six term periodic exact sequence ـم.

را القا می‌کند. این تعریف را می‌توان به راحتی به حلقه‌های غیر یکه‌دار تعمیم داد. به‌علاوه، اگر فرض کنیم که A، B، و C جبرهای باناخ هستند و $\| \varphi(a,c) \| \leq \| a \| \cdot \| c \|$ ، چنین نگاشت دوخطی φ یک نگاشت دو خطی دیگر $A(\mathbf{R}^n) \times C(\mathbf{R}^p) \to B(\mathbf{R}^{n+p})$ و بنابراین یک زوج‌سازی دوخطی (به‌نام «ضرب ناوی») $K_n(A) \times K_p(C) \to K_{n+p}(B)$ را القا می‌کند. با نمادگذاری‌های فوق، صورت دیگری از قضیهٔ تناوبی بات به شرح زیر است:

قضیه. (به‌عنوان نمونه، ر.ک. [۲۹]، فصل ۲).

الف) فرض کنید $C = \mathbf{C}$ و همچنین فرض کنید $A = B$ یک جبر باناخ مختلط باشد. در این صورت، گروه $K_2(\mathbf{C})$ با $\mathbf{Z}$ یکریخت است و ضرب ناوی با یک مولد، یکریختی، $\beta : K_n(A) \to K_{n+2}(A)$ را القا می‌کند.

ب) فرض کنید $C = \mathbf{R}$ و همچنین فرض کنید $A = B$ یک جبر باناخ حقیقی باشد. در این صورت، گروه $K_8(\mathbf{R})$ با $\mathbf{Z}$ یکریخت است و ضرب ناوی با یک مولد، یکریختی $K_n(A) \to K_{n+8}(A)$ را القا می‌کند.

طرح برهان قضیه. الف) اثبات مبتنی بر ساختن یک نظریهٔ کامل $K_n(A)$ است که به ازای هر $n \in \boldsymbol{Z}$ تعریف می‌شود* و خاصیتهای صوری یک ضرب ناوی (برای مثال شرکت‌پذیری) را دارد. پس از آن، عضو v در $K_{-2}(\mathbf{C})$ را می‌سازیم به طوری که $v = vu = 1$ در $K_0(\mathbf{C}) = \mathbf{Z}$. این عضو v برای ساختن یک ریختار «پسرو» $\beta' : K_{n+2}(A) \to K_n(A)$ به‌کار می‌رود و به‌سادگی با $\beta'(x) = x \cdot v$ تعریف می‌شود. این حقیقت که β و β' وارون یکدیگرند یک تمرین صوری است. برای مثال،

$$\beta\beta'(x) = \beta(x \cdot v) = (x \cdot v) \cdot u = x \cdot (v \cdot u) = x \cdot 1 = x.$$

■

کاربردها. گونه‌هایی از کاربردهای تناوب بات و نظریهٔ K را می‌توان در مقالات و کتابهای مختلف یافت ([۱]، [۱۹]، [۲۰]، [۴]) ما فقط دو کاربرد توپولوژیک منسوب به جی. اف. آدامز را بیان می‌کنیم (اثبات آنها را می‌توان در [۲۸]، فصل V یافت).

۱. کرهٔ S^n، یک گروه توپولوژیک است فقط در صورتی که n برابر با ۰، ۱، یا ۳ باشد.

۲. بیشینهٔ تعداد میدانهای مماس مستقل خطی بر کرهٔ S^{t-1} چند تاست؟

الف) طبق قضیه‌ای قدیمی از هوپف، اگر بیشینه را با $\rho(t)$ نشان دهیم و t فرد باشد، $\rho(t) = 0$.

ب) اگر t زوج باشد، می‌توانیم آن را به صورت 2^β. (عدد فرد)، بنویسیم و β را بر ۴ تقسیم کنیم، پس $\beta = \gamma + 4\delta$ که $0 \leq \gamma \leq 3$. بنابراین $\rho(t) = 2\gamma + 8\delta - 1$.

* برای اجتناب از دور و تسلسل، تناوب را برای K_n که $n < 0$، در نظر نمی‌گیریم.

کتابهایی برای مطالعهٔ پیشرفته‌تر

کتابهای [۱۱] و [۲۸]، که قبلاً چند بار به آنها اشاره شده است.

۵. نظریهٔ K به‌عنوان یک نظریهٔ هومولوژی روی حلقه‌های گسسته

به دلایل مختلف، به‌خصوص کاربردهای نظریهٔ K در هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد، تعریف تابعگون K_n که در بالا ارائه کردیم چندان رضایتبخش نیست. ما از توپولوژی حلقهٔ A استفاده نمی‌کنیم. به این منظور، تعریفی توسط کوییلن در ۱۹۷۰ [۳۵] پیشنهاد شده است. متأسفانه تعریف کوییلن به مقداری پیشنیاز توپولوژی جبری نیاز دارد. بنابراین، از تعریف دیگری که کمی قبل از آن به وسیلهٔ ویلامایور و مؤلف [۳۰] ارائه شد و با تعریف کوییلن در بسیاری از حالتهای مطلوب منطبق است استفاده می‌کنیم. این تعریف خیلی ساده‌تر، و در حال و هوای تعریف Kـگروههای مراتب بالاتر برای جبرهای باناخ است.

تذکر. Kـگروههای جبری مذکور اکنون $K_n(A)$ نامیده می‌شوند. برای اجتناب از اشتباه، Kـگروههای توپولوژیک برای جبرهای باناخ که پیش‌تر تعریف شد با $K_n^{\mathrm{top}}(A)$ نشان داده خواهد شد.

چنان‌که قبلاً دیده‌ایم، گروههای هوموتوپی نقش مهمی در تعریف و ویژگیهای Kـگروههای توپولوژیک ایفا می‌کنند. بنابراین طبیعی است در جستجوی یک تعریف «جبری» آنها، به‌خصوص برای فضاهایی شبیه گروههای خطی عام $GL_r(A)$ یا حد آنها $GL(A) = \cup GL_r(A)$، باشیم.

اولین کار، تعریف جبری $\pi_0(GL(A))$ است. به بیان دیگر، باید گفت چه موقع دو ماتریس وارون‌پذیر α_0 و α_1 هوموتوپ‌اند (یا در یک مؤلفهٔ مسیری‌همبند «جبری» هستند).

تعریف. دو ماتریس وارون‌پذیر α_0 و α_1 به‌طور جبری هوموتوپ هستند اگر عضو $\alpha(x)$ از $GL(A[x])$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\alpha(0) = \alpha_0$ و $\alpha(1) = \alpha_1$. این یک رابطهٔ هم‌ارزی است. مؤلفه‌های جبری‌همبند یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که با $K_1(A)$ نمایش داده می‌شود.

مثالها. اگر F یک میدان با یک حلقهٔ اقلیدسی باشد، به سادگی می‌توان نشان داد (به روش کاهش گاوس) که $F^* \approx K_1(F)$، که F گروه اعضای وارون‌پذیر F است (هستهٔ نگاشت دترمینان را در نظر بگیرید). باید توجه کرد که $K_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{C}) = 0$ و $K_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/2$.

یک مثال نابدیهی [۲۱]، حلقهٔ A از اعداد صحیح در یک میدان عددی است: می‌توان دوباره به دست آورد: $K_1(A) = A^*$. توجه کنید که A^* با استفاده از قضیهٔ دیریکله تعیین شده است (برای درآمد خوبی به نظریهٔ اعداد، ر.ک. [۳۶]).

برای نمونه، اگر $A = \mathbf{Z}[x]/(1+x+\cdots+x^{p-1})$، که در آن p یک عدد اول فرد است، مانند بخش ۲، داریم $K_1(A) \approx A^* \approx \mathbf{Z} \oplus^{(p-3)/2} \mathbf{Z}/p$.

مثالی از حلقهٔ A به طوری که $K_1(A) \neq A^*$، به صورت زیر است:

$$A = \mathbf{Z}[x,y]/(x^2 + y^2 - 1)$$

می‌توان نشان داد که ماتریس

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

با ضرایب متعلق به A با یک ماتریس ۱×۱ به طور جبری هوموتوپ نیست، اگرچه دترمینان آن یک است (راهنمایی: A را در حلقهٔ $C_{\mathbf{R}}(S^۱)$ بنشانید).

در اینجا جدولی از $K_۱$ـگروهها می‌آوریم که حلقه‌های فهرست‌شده در بخش ۲ در آن تکرار می‌شوند.

A	$K_۱(A)$
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/۲$
	دترمینان یک ماتریس وارون‌پذیر با ضرایب صحیح ± ۱. به علاوه، ماتریسی با دترمینان ۱، حاصلضرب ماتریسهایی مقدماتی است (الگوریتم اقلیدس را به کار برید).
$\mathbf{Z}(\sqrt{-۵})$	$\mathbf{Z}/۲$
	این از یک قضیهٔ کلی در نظریهٔ اعداد دربارهٔ یکه‌ها در میدانهای درجهٔ دوم موهومی نتیجه می‌شود [۳۶].
$\mathbf{C}[G]$	$(\mathbf{C}^*)^N$
	در اینجا G یک گروه متناهی است. N تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر آن است. این محاسبات از این واقعیت که $\mathbf{C}[G]$ به‌صورت حاصلضربی از جبرهای ماتریسی است نتیجه می‌شود [۳۷].
$C_{\mathbf{C}}(S^۱)$	$\mathrm{Map}(S^۱, \mathbf{C}^*)$
	به‌طور کلی، اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد، آنگاه $K_۱(A)$ با $A^* \otimes \pi_۰(SL(A))$ یکریخت است (اثبات در [۳۲]).
$C_{\mathbf{R}}(S^۱)$	$\mathrm{Map}(S^۱, \mathbf{R}^*)$
	همان توضیح.
$C_{\mathbf{C}}(S^۲)$	$\mathrm{Map}(S^۲, \mathbf{C}^*)$
	همان توضیح.
$C_{\mathbf{R}}(S^۲)$	$\mathrm{Map}(S^۲, \mathbf{R}^*)$
	همان توضیح.
$M_n(A)$	$K_۱(A)$
	به این معنی که وقتی حلقهٔ ماتریسهای $n \times n$ با ضرایب متعلق به A جایگزین A شود (ناوردایی موریتا) نظریهٔ $K_۱$ تغییر نمی‌کند. اثبات اساساً همان اثبات مربوط به حالت $K_۰$ـگروههاست.
$\mathcal{B}(H)$	۰
	همان اثبات $K_۰$ـگروهها

به نظریه باز می‌گردیم، تعمیم این تعریف $K_۱(A)$ برای حلقه‌های بدون یکه ساده است. اگر A یک kـجبر باشد، به پیروی از تعریف قبلی برای $K(A)$، $K_۱(A)$ را به صورت هستهٔ نگاشت طبیعی $K_۱(A^+) \to K_۱(k)$ تعریف می‌کنیم (به آسانی می‌توان نشان داد که این تعریف مستقل از k است).

مثال. یک مثال مهم در آنالیز تابعی، حلقهٔ $\mathcal{K}$ از عملگرهای فشرده در یک فضای هیلبرت نامتناهی‌بعد است. نشان دادن اینکه $K_۱$ـگروه این حلقه گروه بدیهی صفر است یک تمرین مبارزطلب است.

می‌توانیم تشابه با توپولوژی را چند گام جلوتر ببریم و «حلقهٔ طوقه‌ای»[1] ΩAی A را به عنوان حلقهٔ غیر یکه‌دار نابدیهی $x(x-۱)A[x]$ معرفی کنیم، یعنی ایده‌آل دو طرفهٔ $A[x]$ متشکل از چند جمله‌ای‌های $P(x)$ به‌طوری که $P(۰) = P(۱) = ۰$. اگر A یک جبر باناخ باشد، مشابه توپولوژیک ΩA، $A(\mathbf{R}) = A(]۰, ۱[)$ در بخش قبلی است.

تعریف. به ازای $n \geq ۱$، گروههای جبری $K_n(A)$ به صورت استقرایی با استفاده از فرمول

$$K_{n+۱}(A) = K_n(\Omega A) = \cdots = K_۱(\Omega^n A)$$

تعریف می‌شوند.

تذکر. این تعریف با تعریف کوییلن همسان نیست، مگر اینکه حلقهٔ A نوتری منظم باشد، به این معنی که هر مدول متناهی‌مولد یک تحلیل تصویری متناهی بپذیرد. بسیاری از حلقه‌هایی که طبیعتی هندسی دارند، از این گونه‌اند، به عنوان نمونه حلقه‌هایی که به توابع جبری روی چندگوناهای جبری آفینِ بدون تکینه مربوط‌اند.

همانند جبرهای باناخ، یک زوج‌سازی دوخطی $A \times C \to B$، ضرب ناوی

$$K_n(A) \times K_p(C) \to K_{n+p}(B)$$

را القا می‌کند. یک مثال جالب، $A = C = B$، یک میدان جابه‌جایی (با نماد F) است. ضرب ناوی بالا یک «نگاشت نشانه»[2]

$$S : K_۱(F) \otimes_{\mathbf{Z}} K_۱(F) = F^* \otimes_{\mathbf{Z}} F^* \to K_۲(F)$$

به دست می‌دهد.

قضیه (ماتسوموتو[3]). نگاشت نشانه S پوشاست. هسته‌اش با ضرب تانسوری از نوع $x \otimes (۱-x)$ تولید می‌شود که $x \in F - \{۰, ۱\}$ (برای اثبات، ر.ک. [۳۲]).

برای مثال، در حالت گروه $K_۲(\mathbf{Q})$، که $\mathbf{Q}$ میدان اعداد گویاست، به دست می‌آید

$$K_۲(\mathbf{Q}) \approx \mathbf{Z}/۲ \oplus [\oplus_p (\mathbf{Z}/p)^*]$$

که p در مجموعهٔ همهٔ اعداد اول فرد تغییر می‌کند.

اکنون یک حدس شایان توجه را که پیوندی بین گروههای $K_n(\mathbf{Z})$ با اعداد برنولی B_k برقرار می‌کند، بیان می‌کنیم. این اعداد گویای B_k در بسطهای توابع $x/(۱-e^{-x})$ به صورت سری، ظاهر می‌شوند. به زبان دقیق‌تر، داریم

$$\frac{x}{(۱-e^{-x})} = ۱ + \frac{x}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k-۱} \frac{B_k}{(۲k)!} x^{۲k} + \cdots$$

1. loop ring 2. symbol map 3. Matsumoto

اعداد B_k را به صورت کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{c_k}{d_k}$ بیان می‌کنیم. در این صورت، حدس مذکور به صورت زیر است.

$$K_{8n}(\mathbf{Z}) = 0 \qquad (n > 0 \text{ به ازای})$$
$$K_{8n+1}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2 \qquad (n > 0 \text{ به ازای})$$
$$K_{8n+2}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/c_k \qquad (k = 2n+1 \text{ به ازای})$$
$$K_{8n+3}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/8k \cdot d_k \qquad (k = 2n+1 \text{ به ازای})$$
$$K_{8n+4}(\mathbf{Z}) = 0$$
$$K_{8n+5}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$$
$$K_{8n+6}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/c_k \qquad (k = 2n+2 \text{ به ازای})$$
$$K_{8n+7}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/4k \cdot d_k \qquad (k = 2n+2 \text{ به ازای})$$

درستی این حدس به ازای $K_i(\mathbf{Z})$ اگر $i \leqslant 6$ ثابت شده است، و در حالتهای دیگر حداقل می‌دانیم که سمت راست، کران پایین برای گروههای $K_i(\mathbf{Z})$ است.

برای نمونه، این حدس پیش‌بینی می‌کند که $K_{23}(\mathbf{Z})$ یک گروه دوری از مرتبهٔ ۶۵۵۲۰(!) است. نکتهٔ قابل توجه، پدید آمدن چند تناوب خاص در جدول است، درست همانند جبرهای باناخ حقیقی. متأسفانه، هنوز با درک کل ماجرا فاصله داریم. برای یک مرور اجمالی و ارتباط با مسائل (حل‌نشده) کلاسیک در نظریهٔ اعداد، مثل حدس واندیور، مرجع [۲۷] را توصیه می‌کنیم.

در طرف مثبت ماجرا، اولین محاسبهٔ Kـگروه‌های جبری توسط کوییلن انجام شد [۳۴]. او برای میدانی متناهی با اعضای q (که معمولاً $\mathbf{F}_q$ نامیده می‌شود) ثابت کرد که

$$K_{2i}(\mathbf{F}_q) = 0. \quad \text{به‌ازای } i > 0 \text{ و } K_{2i-1}(\mathbf{F}_q) \approx \mathbf{Z}/(q^i - 1)\mathbf{Z}$$

با توجه به این نتیجه، می‌بینیم که تناوب بات به مفهوم ابتدایی آن نمی‌تواند درست باشد. با این حال، اگر نظریهٔ K با ضرایب متناهی $\mathbf{Z}/n$، مانند $K_i(A; \mathbf{Z}/n)$، را در نظر بگیریم شرایط مساعدتر می‌شود. چنین نظریه‌ای را برودر[1] و مؤلف در دههٔ ۷۰ ارائه کرده‌اند ([۲۶]، [۳۸]): این در دنباله‌ای کامل چون

$$K_i(A) \xrightarrow{\cdot n} K_i(A) \to K_i(A; \mathbf{Z}/n)$$
$$\to K_{i-1}(A) \xrightarrow{\cdot n} K_{i-1}(A)$$

می‌گنجد. اگر A میدان F باشد، برای نمونه داریم

$$K_1(F; \mathbf{Z}/n) \approx F^*/(F^*)^n$$

اگر F یک میدان جبریْ‌بسته باشد، گروه nامین ریشه‌های واحد در F را با μ_n نشان می‌دهیم. این با $\mathbf{Z}/n$ یکریخت است، اما نه به طور متعارف. توجه کنید که $K_*(F; \mathbf{Z}/n)$ در این حالت یک ساختار حلقه‌ای خوش‌تعریف دارد [۲۶] که با آنچه قبلاً برای $K_*(F)$ نشان داده شد سازگار است.

قضیه [۳۹]. فرض کنید F یک میدان جبریْ‌بسته باشد با مشخصه‌ای که نسبت به n اول است. آنگاه

$$K_{2i}(F; \mathbf{Z}/n) \approx (\mu_n) \otimes i \qquad K_{2i-1}(F; \mathbf{Z}/n) = 0$$

1. Browder

به علاوه، این یکریختیها با ساختار حلقه سازگارند. به بیان دیگر، ضرب ناوی

$$K_{2i}(F; \mathbf{Z}/n) \otimes K_2(F; \mathbf{Z}/n) \to K_{2i+2}(F; \mathbf{Z}/n)$$

یکریختی است.

این نتیجه مشابه واقعی تناوب بات است، زیرا ایجاب می‌کند Kـگروهها با ضرایب، تناوبی باشند، اگرچه باید توجه کرد که عدم یکریختی متعارف μ_n با $\mathbf{Z}/n$ مانع تشابه کامل این دو می‌شود.

قضیه [۳۹]. نگاشتهای بدیهی

$$K_i(\mathbf{C}; \mathbf{Z}/n) \to K_i^{\text{top}}(\mathbf{C}; \mathbf{Z}/n)$$
$$K_i(\mathbf{R}; \mathbf{Z}/n) \to K_i^{\text{top}}(\mathbf{R}; \mathbf{Z}/n)$$

یکریختی هستند. به‌ویژه، گروههای دستهٔ اول، تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ هستند و گروههای دستهٔ دوم، تناوبی با دورهٔ تناوب ۸.

در اینجا ممکن است بپرسیم چگونه $K_i(F; \mathbf{Z}/n)$ را برای یک میدان دلخواه محاسبه کنیم (گروههای $K_*(F)$ در حال حاضر ممکن است مهارنشدنی به‌نظر برسند) احساس کلی متخصصان (این موضوع هنوز به‌طور کامل درک نشده) این است که باید آنها را با استفاده از گروههای $K_*(\overline{F}; \mathbf{Z}/n)$، که $\overline{F}$ بستار جدایی‌پذیر F است، و با در نظر گرفتن عمل گالوا[1] روی آنها محاسبه کرد که این امر به ابزارهای زیادی از جبر و توپولوژی جبری احتیاج دارد.

کاربردها. بسیاری از کاربردهای نظریهٔ Kی جبری را در مراجع [۳۷] و [۹] می‌توان یافت. ما تنها به دو نمونه اشاره می‌کنیم.

اولی مربوط به توپولوژی دیفرانسیل است. فرض کنید M یک کرهٔ S^n باشد. فضای $\mathcal{P}(M)$ مرکب از شبه‌ایزوتوپ‌های M، فضای وابرریختی‌های $M \times [0,1]$ است که روی $M \times \{0\}$ همانی را القا می‌کند. براساس نتیجه‌ای از والدهاوسن[2] [۳۱]، گروههای هوموتوپی $\pi_i(\mathcal{P}(M)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ با $K_{i+2}(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ یکریخت‌اند. به‌ویژه به عقیدهٔ بورل [۲۲] این گروهها دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۴ و یکریخت با $\mathbf{Q}, 0, 0, \mathbf{Q}, 0, 0, \ldots$ هستند (از $i = 0$ شروع می‌شود).

کاربرد چشمگیر دیگر از آنِ مرکوژف و ساسلین [۳۳] است و با ناوردای جبری شناخته‌شده‌ای به نام گروه براوئر[3] میدان F سروکار دارد. جبرهای سادهٔ مرکزی A روی F را در نظر بگیرید. دو جبرِ این‌چنینی مانند A و A'، هم‌ارز نامیده می‌شوند اگر $M_p(A)$ و $M_{p'}(A')$ به‌ازای p و p' مناسب یکریخت باشند. گروه براوئر دقیقاً خارج‌قسمت مجموعهٔ جبرهای فوق توسط این رابطهٔ هم‌ارزی است و عمل گروه از ضرب تانسوری جبرها ناشی می‌شود. اگر میدان F شامل nامین ریشه‌های واحد باشد، آنگاه گروه nـتابهای براوئر با $K_2(F)/nK_2(F)$ یکریخت است. برای نمونه، اگر $n = 2$، این نتیجه ایجاب می‌کند هر عضو ۲ـتاب گروه براوئر را بتوان با استفاده از ضرب تانسوری تعداد متناهی جبر کواترنیونی نمایش داد.

1. Galois action 2. Waldhausen 3. Brauer group

مراجع

کتابهایی دربارهٔ نظریهٔ K و کاربردهای آن

1. Atiyah M. F., *K-theory*, Benjamin, New-York (1967).
2. Bass H., *Algebraic K-theory*, New York, Benjamin (1968).
3. Berrick J., *An Approach to Algebraic K-theory*, Pitman (1982).
4. Connes A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
5. Friedlander E. and Weibel C., *School on Algebraic K-theory and Applications. An Overview of the Subject*, ICTP Trieste (1997).
6. Karoubi M., *K-theory, an Introduction*, Grundlehren der Math, Wissen. **226**, Springer, Berlin (1978).
7. Karoubi M., *Cyclic Homology and K-theory*, Astérique 149. Société Mathématique de France (1987).
8. Milnor J., *Introduction to Algebraic K-theory*, Ann. of Math. Studies **197**, Princeton, NJ. Princeton University Press (1974).
9. Rosenberg J., *Algebraic K-Theory and its Application*, Graduate Texts N^0 **147**, Springer, Berlin (1994).
10. Srinivas V., *Algebraic K-theory*, Birkhäuser, Boston (1996).

کتابهایی دربارهٔ توپولوژی جبری

11. Eilenberg S. and Steenrod N., *Foundations of Algebraic topology*, Princeton University Press (1952).
12. Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
13. HU S-T., *Homotopy Theory*, Academic Press (1959).
14. Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentic Hall (1975).

کتابها و مقاله‌های دیگر

15. Adams J.F., "Vector fields on the sphere", *Ann. Math.* **75**, 603-632 (1962).
16. Atiyah M.F., "Global theory of elliptic operators", *Proc. Internat. Conf. On functional analysis and related topics*, p. 21-30, Univ. of Tokyo Press (1970).
17. Atiyah M.F. and Bott R., "On the periodicity theorem for complex vector bundles", *Acta Math.* **112**, p. 229-247 (1964).
18. Atiyah M.F. and Hirzebruch F., "Vector bundles and homogeneous spaces", *Proc. Symposium in Pure Maths, Amer. Math.* Soc. **3**, 7-38 (1961).
19. Atiyah M.F. and Hirzebruch F., "Reimann-Roch theorems for differentiable manifolds", *Bull. Amer. Math.* Soc. **65**, 276-281 (1959).
20. Atiyah M.F. and Singer I.M., "The index of elliptic operators", *Ann. of Math.* **87**, 484-530, 564-604 (1968), **93**, 119-138 (1971).
21. Bass H., Milnor J. et Serre J.P., "Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n \geq 3)$ and $Sp_n(n \geq 2)$", *Publ. Math IHES* **33**, p. 59-137 (1967).
22. Borel A., "Stable real cohomology of arithmetic groups", *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* **7**, 235-272 (1974).
23. Borel A. et Serre J.P., "Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)", *Bull. Soc. Math. France* **86**, 97-136 (1958).
24. Borevich Z.I. and Shavarevich I.R., *Number theory*, Academic Press (1966).
25. Bott R., "The stable homotopy of the classical groups", *Ann. of Math.* **70**, 313-337 (1959).
26. Browder W., *Algebraic K-theory with Coefficients* Z/p. Springer Lecture Notes in Math. Nr **657** (1978).
27. Gajda W., *On $K_*(Z)$ and Classical Conjectures in the Arithmetic of Cyclotomic Fields*, Contemporary Math., 346, American Math. Society (2005).
28. Karoubi M., *Les isomorphismes de Chern et de Thom-Gysin en K-théories*, Séminaire Cartan-Schwartz 1963/64. Benjamin (1967).
29. Karoubi M., "Algèbres de Clifford et K-théorie", *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, p. 161-270 (1968).
30. Karoubi M. et Villamayor O., "Foncteurs K^n en algèbre et en topologie", *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t-**269**, p. 416 (1969).
31. Loday J.-L., *Homotopie des espaces de concordance*, Séminaire Bourbaki N^0 **516** (1977/78).
32. Milnor J., *Morse theory*, Annals of Math Studies **51**, Princeton University Press (1963).
33. Merkurjev A.S. and Suslin A.A., "K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism", *Math. USSR Izv.*, **21**, 307-440 (1983).
34. Quillen D., "On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field", *Ann. of Math.* **96**, p. 552-586 (1972).
35. Quillen D., "Higher algebraic K-theory", *Lecture Notes in Maths* **341**, 85-147, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1973).
36. Samuel P., *Théorie algébrique des numbers*, Hermann (1962).
37. Serre J.-P., *Représentations linéaires des groups finis*, Hermann (1978).
38. Soule C., "K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale", *Inventiones Math.* **55**, p. 251-295 (1979).
39. Suslin A., *Algebraic K-theory of Fields*, Proceedings of the International Congress of mathematician 1986, American Math. Society (1987).

* * * * * *

• متن سخنرانی ایرادشده در کنفرانس مؤسسهٔ ریاضیات کلی (Clay Mathematics Institute)، آوریل ۲۰۰۵.

* مکس کروبی، دانشگاه پاریس ۷، فرانسه.

نشر ریاضی، سال ۱۸، شمارهٔ ۱، صص ۵۰ـ۵۸

آموزش و مسأله

با درود و مهر، پیشکش به استاد گرامی پرویز شهریاری

نگاهی به مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

بامداد ر. یاحقی*

بخش سوم: عمومی و هوش

ای صبا! با ساکنانِ شهر یزد از ما بگو
ای سر حق‌ناشناسان گوی چوگانِ شما
حافظ

آخرین بخش از این رشته مقالات خوشبختانه زمانی در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد که چند ماهی است کتاب مسابقات ریاضی دانشجویی کشور (۱۳۵۲ـ۱۳۸۵)، که این مطالب از آن گرفته شده، توسط مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است. ترجمهٔ این کتاب به زبان انگلیسی نیز اخیراً با عنوان

Iranian Mathematics Competitions, 1973-2007

توسط مؤسسهٔ انتشارات

Hindustan Book Agency

در سری

TRIM (Text and Readings in Mathematics)

انتشار یافته است.

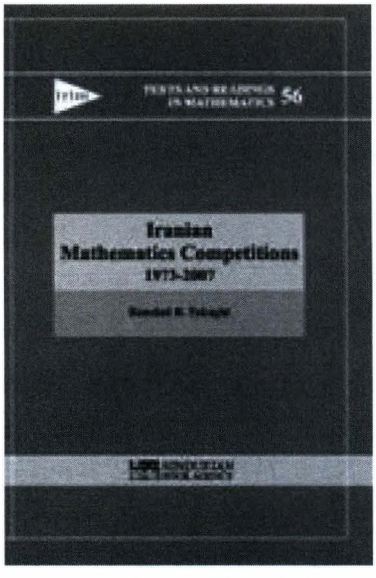
در بخش یکم این رشته مقالات اشاره شد که نسخهٔ انگلیسی کتاب از جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) و انجمن ریاضی کانادا (CMS) پذیرش برای چاپ گرفته و قرار است هر دو انجمن آن را مشترکاً چاپ کنند. ولی بعداً هر دو انجمن به انگیزه‌های غیرعلمی از چاپ آن سر باز زدند. من در فرصت مناسب این موضوع را خواهم شکافت و جریان را در معرض قضاوت جامعهٔ ریاضی ایران و جامعهٔ ریاضی بین‌المللی قرار خواهم داد.

******



نخستین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال سوم هوش از مسابقهٔ دوم (فروردین ۱۳۵۳، دانشگاه پهلوی (شیراز فعلی)) است.

۱. اگر یک نقطهٔ مادی فاصلهٔ واحد را در زمان واحد طی کند به‌طوری که در شروع و انتهای حرکت سرعت متحرک صفر باشد، ثابت کنید که قدر مطلق شتاب این متحرک در نقاطی از مسیر بیشتر از ۴ یا مساوی ۴ است.



حل. حکم مسأله حالت خاص حکم کلی‌تر زیر است. (توجه کنید که اگر ذره در طول یک خط راست در حرکت باشد، آنگاه شتاب مماسیِ حرکت برابر با شتاب حرکت در طول خط راست است.)

گیریم متحرکی که بر یک خم هموار حرکت می‌کند فاصلهٔ به طول $s_\circ$ واحد طول را در مدت $t_\circ$ واحد زمان طی کند به‌طوری که در آغاز و در پایان حرکت، سرعت لحظه‌ای متحرک صفر باشد. در این صورت، لحظه‌ای از حرکت وجود دارد که در آن لحظه قدر مطلق شتاب مماسیِ متحرک بیشتر یا مساوی $۴s_\circ/t_\circ^۲$ است.

لحظهٔ آغاز و پایان حرکت را، به ترتیب، $\circ$ و $t_\circ$ بگیرید. اگر معادلهٔ حرکت متحرک به‌وسیلهٔ یک تابع برداریِ $x : [\circ, t_\circ] \to \mathbb{R}^۳$ داده‌شده باشد، نتیجه می‌گیریم که x دوبار مشتق‌پذیر است، $x'(\circ) = x'(t_\circ) = \circ$، $s(\circ) = \circ$، و $s(t_\circ) = s_\circ$، که در آن $x' = dx/dt$ نشانگر بردار تندی لحظه‌ای و $s(t) = \int_\circ^t ||x'(\tau)||d\tau$ طول مسیر طی‌شده در لحظهٔ t است. روشن است که $s'(\circ) = s'(t_\circ) = \circ$. همچنین، یادآور می‌شویم که بنا به تعریف، شتاب مماسیِ حرکت، که آن را با a_t نشان می‌دهیم، برابر است با مشتق سرعت لحظه‌ایِ متحرک نسبت به زمان، یعنی $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^۲s}{dt^۲} = s''(t)$. از آنجا که s پیوسته است، بنا بر قضیهٔ مقدار میانی توابع پیوسته، لحظه‌ای چون c، $\circ < c < t_\circ$، وجود دارد که در آن لحظه، $s(c) = \frac{s(t_\circ)+s(\circ)}{۲} = \frac{s(t_\circ)}{۲}$. حال دو حالت تشخیص می‌دهیم.

(i) $\circ < c < \frac{t_\circ}{۲}$.

در این حالت، بنا به قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات مرتبهٔ دوم، لحظهٔ $t_۱$ وجود دارد به‌طوری که $\circ < t_۱ < c$ و به علاوه

$$s(c) = s(\circ) + s'(\circ)(c-\circ) + s''(t_۱)\frac{(c-\circ)^۲}{۲!} = s''(t_۱)\frac{c^۲}{۲}.$$

در نتیجه $s''(t_۱)\frac{c^۲}{۲} = \frac{s(t_\circ)}{۲}$، و لذا $s''(t_۱) = \frac{s(t_\circ)}{c^۲}$. این به همراه فرض $\circ < c < \frac{t_\circ}{۲}$ ایجاب می‌کند که $s''(t_۱) \geq \frac{۴s(t_\circ)}{t_\circ^۲} > \circ$، و از آنجا $|s''(t_۱)| \geq \frac{۴s(t_\circ)}{t_\circ^۲} = \frac{۴s_\circ}{t_\circ^۲}$، که همان نتیجهٔ مطلوب است.

(ii) $\frac{t_\circ}{۲} \leq c < t_\circ$.

دوباره، بنا به قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات مرتبهٔ دوم، لحظهٔ $t_۱$ که $\frac{t_\circ}{۲} < t_۱ < t_\circ$ موجود است به‌طوری که

$$s(c) = s(t_\circ) + s'(t_\circ)(c-t_\circ) + s''(t_۱)\frac{(c-t_\circ)^۲}{۲!}.$$

در نتیجه $\frac{s(t_\circ)}{۲} = s(t_\circ) + s''(t_۱)\frac{(c-t_\circ)^۲}{۲}$ و لذا $s''(t_۱) = \frac{-s(t_\circ)}{(c-t_\circ)^۲} < \circ$. این به همراه فرض $\frac{t_\circ}{۲} \leq c < t_\circ$ ایجاب می‌کند که

$$|s''(t_۱)| = \frac{s(t_\circ)}{(c-t_\circ)^۲} \geq \frac{۴s(t_\circ)}{t_\circ^۲} = \frac{۴s_\circ}{t_\circ^۲}$$

که همان نتیجه‌ای است که می‌خواهیم. ■

دومین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال سوم هوش از مسابقهٔ پنجم (فروردین ۱۳۵۶، دانشگاه صنعتی آریامهر (شریف فعلی)) است.

۲. مسیر گوی بیلیارد B را که روی میز بیضی شکل ξ حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که زاویهٔ تابش برابر زاویهٔ بازتاب باشد. به فرض اینکه مسیر اولیهٔ گوی از پاره‌خط بین دو کانون نگذرد، نشان دهید که بیضی دیگری مانند η هم‌کانون با بیضی ξ وجود دارد به‌طوری که مسیر گوی همواره بر F مماس است.

راهنمایی: یادآوری می‌شود که اگر PL و PL' دو مماس از نقطهٔ P بر یک بیضی باشند، آنگاه زوایای FPL و $F'PL'$ با هم مساوی هستند. (F و F' کانونهای بیضی می‌باشند.)

حل. توضیح. لم پایین، به همراه برهانی که در ادامهٔ لم می‌آید، نشان می‌دهد که اگر مسیر اولیهٔ گوی، پاره‌خط وصل‌کنندهٔ دو کانون را قطع نماید، آنگاه یک هذلولیِ هم‌کانون با بیضیِ مسأله وجود دارد که مسیر گوی همواره بر آن هذلولی مماس است.

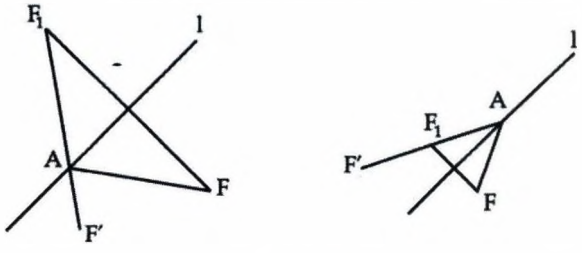
ابتدا به لم زیر نیاز داریم.

لم. (i) فرض کنید F و F' دو نقطه باشند و l خطی در صفحه باشد که پاره خط FF' را قطع نمی‌کند (یا: پاره‌خط $F'F$ را بینِ F و F' قطع می‌کند ولی عمودمنصف $F'F$ نیست). در این صورت، یک بیضیِ (یا: یک هذلولیِ) یکتا با کانونهای F' و F وجود دارد که بر خط l مماس است.

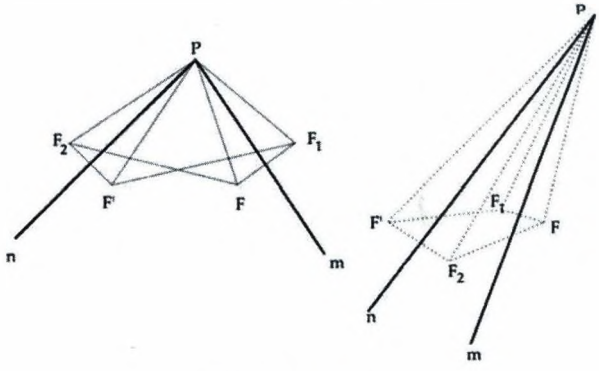
(ii) فرض کنید F و F' دو نقطه و Pm و Pn دو نیم‌خط در صفحه باشند که پاره‌خط $F'F$ را قطع نمی‌کنند (یا: پاره‌خط $F'F$ را بین F و F' قطع می‌کنند). در این صورت، یک بیضی (یا: یک هذلولیِ) یکتا با کانونهای F' و F وجود دارد که بر نیم‌خط‌های Pm و Pn مماس است اگر و تنها اگر $\angle FPm = \angle F'Pn$.

برهان. (i) از آنجا که کانونهای بیضی (یا: هذلولی) مطلوب، یعنی F و F'، ثابت‌اند، کافی است نشان دهیم که مجموع (یا: تفاضل) فواصل کانونی هر نقطه از بیضی (یا: هذلولی) به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ خطِ l تعیین می‌شوند. برای این منظور، فرض کنید که خط l بر یک بیضی (یا: هذلولیِ) با کانونهای F و F' مماس است. بنا بر خاصیت اپتیکی بیضیها (یا: هذلولیها)، نقطهٔ تماس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. ابتدا قرینهٔ کانون F نسبت به خط l را می‌یابیم و آن را $F_۱$ نام می‌نهیم. سپس، نقاط $F_۱$

و F' را به‌هم می‌پیوندیم تا خط l را در نقطهٔ تماس، که آن را A نام می‌نهیم، قطع کند. روشن است که $AF + AF' = F_1F' = F_2F$ (یا: $|AF - AF'| = F_1F' = F_2F$)، که در آن F_2 قرینهٔ F' نسبت به خط l است. به دیگر سخن، مجموع (یا: تفاضل) فواصل کانونیِ نقطهٔ A، لذا هر نقطهٔ بیضیِ (یا: هذلولی) مطلوب برابر است با $F_1F' = F_2F$، که به‌طور یکتا به وسیلهٔ خط l تعیین می‌شود. به این ترتیب، برهان به انجام می‌رسد.



شکل ۱ پاسخ ۲



شکل ۲ پاسخ ۲

(ii) توجه کنید که یکتایی از (i) حاصل می‌شود. گیریم F_1 و F_2 به‌ترتیب قرینه‌های F و F' نسبت به نیم‌خط‌های Pm و Pn باشند. به‌آسانی دیده می‌شود که مجموع (یا: تفاضل) فواصل کانونی هر نقطهٔ بیضی (یا: هذلولی) برابر است با $F_1F' = F_2F$. حال، مثلثهای ΔF_2PF و $\Delta F'PF_1$ همنهشت هستند زیرا $F_2F = F_1F'$، $F_2P = F'P$، و $PF = PF_1$. این، به‌ویژه، ایجاب می‌کند که $\angle F_2PF = \angle F'PF_1$، و لذا

$$\angle F'PF + 2\angle F'Pn = \angle F'PF + 2\angle FPm$$

یا

$$\angle F'PF - 2\angle F'Pn = \angle F'PF - 2\angle FPm.$$

پس، $\angle F'Pn = \angle FPm$، و این به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که

$$\angle FPn = \angle F'PF + \angle F'Pn = \angle F'PF + \angle FPm = \angle F'Pm$$

یا

$$\angle FPn = \angle F'PF - \angle F'Pn = \angle F'PF - \angle FPm = \angle F'Pm.$$

این همان نتیجه‌ای است که می‌خواهیم.

سپس، فرض کنید $\angle FPn = \angle F'Pm$. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\angle F_2PF &= \angle F'PF + 2\angle FPn \\ &= \angle F'PF + 2\angle F'Pm = \angle F_2PF'\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\angle F_2PF &= \angle F'PF - 2\angle FPn \\ &= \angle F'PF - 2\angle F'Pm = F_1PF'.\end{aligned}$$

یعنی، $\angle F_2PF = \angle F_1PF'$. در نتیجه مثلثهای ΔF_2PF و $\Delta F'PF_1$ همنهشت‌اند، زیرا $F_2P = F'P$، $\angle F_2PF = \angle F_1PF'$، $PF = PF_1$. به‌ویژه، داریم $F_2F = F_1F'$. به دیگر سخن، دو بیضی (یا: هذلولی) با کانونهای F و F' بر نیم‌خط‌های Pm و Pn مماس هستند. بخش «اگر» حکم به این ترتیب به اثبات می‌رسد. □

فرض کنید F و F' کانونهای بیضی ξ، و PQ، QR، و RS سه قطعهٔ متوالی مسیرگوی باشد. می‌دانیم که در هر بیضی، خطوط مماس و قائم، زاویه‌های بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس را نصف می‌کنند. در نتیجه اگر یک قطعه از مسیرگوی فاصلهٔ کانونی FF' را بین F و F' قطع کند، آنگاه مسیرگوی همواره فاصلهٔ کانونی FF' را بین F و F' قطع خواهد کرد. همچنین، اگر یک قطعه از مسیرگوی فاصلهٔ کانونی FF' را قطع نکند، آنگاه مسیرگوی هیچ‌گاه فاصلهٔ کانونی $F'F$ را قطع نخواهد کرد. حال، اگر P، Q، R، و S چون بالا باشند، نتیجه می‌گیریم که $\angle F'QP = \angle FQR$ و $\angle F'RQ = \angle FRS$. این نتیجه به همراه لم بالا ایجاب می‌کند که بیضیهایی چون η_Q و η_R هم‌کانون با ξ وجود داشته باشند که بر QR مماس باشند. حال از بخش (i) لم بالا درمی‌یابیم که به‌ازای هر قطعه از مسیر QR داریم $\eta_Q = \eta_R$. یعنی، یک بیضی η هم‌کانون با ξ موجود است به‌طوری که مسیرگوی همواره بر η مماس است. ■

سومین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال دوم هوش از مسابقهٔ سیزدهم (فروردین ۱۳۶۸، دانشگاه تهران) است.

۳. تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب گویا، مانند $f(x)$، را پیدا کنید به قسمی که به‌ازای هر مقدار گنگ x، مقدار $f(x)$ گنگ باشد.

حل. گیریم

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

که در آن $a_n > 0$ و $(0 \le i \le n)a_i \in \mathbb{Q}$، یک چندجمله‌ای با این خاصیت باشد که $f(x)$ عددی گنگ است هرگاه x چنین باشد. گیریم p عددی اول باشد و

$$\begin{aligned}g(x) &= \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_n)f(x) - \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_n)a_0 - p \\ &= g_nx^n + g_{n-1}x^{n-1} + \ldots + g_1x - p\end{aligned}$$

که در آن $g_i = \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_n)a_i$ $(1 \le i \le n)$. از آنجا که ضریب پیشروِ g مثبت است و $g(0) = -p < 0$، از قضیهٔ مقدار میانی نتیجه

می‌گیریم که g دارای ریشه‌ای مثبت است که بنا بر فرض باید گویا باشد زیرا، با توجه به برابری بالا، چندجمله‌ای g نیز دارای این خاصیت است که $g(x)$ عددی گنگ است هرگاه x چنین باشد. حال، بنا بر قضیهٔ ریشهٔ گویا، این ریشهٔ گویای مثبت باید به‌ازای عددی چون d که g_n را می‌شمارد به شکل $\frac{1}{d}$ یا $\frac{p}{d}$ باشد. اگر $n > 1$، روشن است که اگر p را به‌قدرکافی بزرگ اختیارکنیم، هیچ‌کدام از $\frac{1}{d}$ و $\frac{p}{d}$، که در آن g_n ،d را می‌شمارد، نمی‌توانند ریشه‌ای از $g(x) = 0$ باشند. بنابراین، $n \leq 1$، که در نتیجه به‌ازای اعدادی چون $a, b \in \mathbb{Q}$ که $a \neq 0$، به‌دست آوریم $f(x) = ax + b$. ■

چهارمین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال اول هوش از مسابقهٔ چهاردهم (اسفند ۱۳۶۸، دانشگاه اصفهان) است.

۴. مجموعهٔ n عضوی S مفروض است. خانوادهٔ

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

شامل n زیرمجموعهٔ متمایز از S را در نظر می‌گیریم. نشان دهید یک عضو x از S وجود دارد به‌طوری که مجموعه‌های زیر متمایز هستند

$$A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}.$$

حل. روش نخست. گیریم خانوادهٔ $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ در مفروضات مسأله صدق کند. گراف برچسب‌دار G با رأسهای متعلق به A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. به‌ازای $1 \leq i, j \leq n$ که $i \neq j$، رأسهای متمایز A_i و A_j را با برچسب $s \in S$ به‌هم وصل می‌کنیم هرگاه $A_i = A_j \cup \{s\}$ یا $A_j = A_i \cup \{s\}$. حال، رابطهٔ $\sim$ را بر A به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. به‌ازای $1 \leq i, j \leq n$، می‌نویسیم $A_i \sim A_j$ هرگاه $i = j$ یا اینکه مسیری در گراف G موجود باشد که رأسهای A_i و A_j گراف را به‌هم بپیوندد. به‌آسانی می‌توان دید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A تعریف می‌کند و رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ $\sim$ مؤلفه‌های همبندیِ G هستند. گیریم $\{G_i\}_{i=1}^{k}$ $(1 \leq k \leq n)$ نشانگر مؤلفه‌های همبندی G باشند. همچنین، گیریم T_i $(1 \leq i \leq k)$ یک درخت ماکسیمال برای G_i باشد. (به‌یاد آورید که درخت، گرافی همبند است که شاملِ هیچ دوری نیست.) یعنی، T_i زیرگرافی از G_i است که یک درخت است و به عنوانِ یک درخت در G_i ماکسیمال است. (از اینجا سریعاً درمی‌یابیم که T_i یک درخت مولدِ G_i است؛ یعنی، T_i زیرگرافی از G_i است که شامل همهٔ رأسهای G_i و در عین حال خود یک درخت است.) برای یک زیرگراف H از G، گیریم $L(H)$ نشانگر مجموعهٔ برچسبهای یالهای H باشد. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $1 \leq i \leq k$، $L(T_i) = L(G_i)$. به روشنی کافی است نشان دهیم که $L(G_i) \subseteq L(T_i)$. برای این منظور، گیریم $s \in L(G_i)$ عضوی دلخواه باشد. نتیجه می‌شود که $s \in S$ برچسب یالی چون A_iA_j از زیرگراف G_i است. اگر یال A_iA_j یالی از درخت T_i باشد، چیزی برای اثبات نداریم. اگر چنین نباشد، چون T_i یک درخت ماکسیمال G_i است، درمی‌یابیم که گراف به‌دست آمده از افزودن یالِ A_iA_j به درخت T_i یک درخت نیست. پس نتیجه می‌شود که یال A_iA_j در یک دور، که همهٔ یالهایش بجز یالِ A_iA_j از درختِ T_i می‌آیند، شرکت می‌کند. اکنون، چون $s \in S$ برچسب یالِ A_iA_j است، باید داشته باشیم $A_i = A_j \cup \{s\}$ یا $A_j = A_i \cup \{s\}$. بنابه تقارن، بدون آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $A_i = A_j \cup \{s\}$. توجه کنید که $s \notin A_j$ زیرا $i \neq j$. حال، با رفتن از A_j به سوی A_i در طول یالهای دیگرِ دوری که در آن یال A_iA_j شرکت دارد و با در نظر داشتن اینکه $s \notin A_j$ ولی $s \in A_i$، درمی‌یابیم که باید یالی چون $A_kA_l \in T_i$، که در آن $1 \leq k, l \leq n$، با برچسب s موجود باشد زیرا در غیر این صورت $s \notin A_i$، که ناممکن است، در نتیجه، $s \in L(T_i)$، و از آنجا $L(G_i) \subseteq L(T_i)$، که ایجاب می‌کند $L(G_i) = L(T_i)$، و این همان نتیجه‌ای است که می‌خواهیم. روشن است که $L(T_i) \leq \varepsilon(T_i)$، که در آن $\varepsilon(T_i)$ نشانگر تعداد یالهای T_i است. از سوی دیگر، از آنجا که T_i یک درخت است، بنا بر قضیهٔ استانداردی از نظریهٔ گراف، خواهیم داشت

$$\varepsilon(T_i) = \nu(T_i) - 1$$

که در آن $\nu(T_i)$ نشانگرِ تعداد رأسهای T_i است. چون تعداد مؤلفه‌های همبندی G برابر با k است، می‌توان نوشت

$$L(G) = \sum_{i=1}^{k} L(G_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(T_i) = \sum_{i=1}^{k} \nu(T_i) - k$$

که ایجاب می‌کند

$$L(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \nu(T_i) - k = \nu(G) - k$$

که در آن $\nu(G)$ نشانگر تعداد رأسهای G است. بنابراین، $L(G) \leq \nu(G) - k < \nu(G)$. لذا، عضوی چون $s_0 \in S$ موجود است به‌طوری که $s_0 \notin L(G)$. اکنون روشن است که مجموعه‌های

$$A_1 \cup \{s_0\}, \ldots, A_n \cup \{s_0\}$$

متمایز هستند چراکه در غیر این صورت به‌ازای اعدادی مانند $1 \leq i, j \leq n$ با $i \neq j$، باید داشته باشیم $A_i = A_j \cup \{s_0\}$ یا $A_j = A_i \cup \{s_0\}$، در نتیجه $s_0 \in L(G)$، که ناممکن است و بنابراین، برهان به پایان می‌رسد.

روش دیگر. این راه‌حل از

Linear Algebra Methods in Combinatorics by L. Babai and P. Frankl

گرفته شده است. بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود، فرض می‌کنیم $S = \{1, \ldots, n\}$. کافی است نشان دهیم که عضوی چون $x \in S$ موجود است به‌طوری که مجموعه‌های

$$A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$$

همگی مجزایند، زیرا در این صورت مجموعه‌های

$$A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$$

نیز چنین خواهند بود. برای ملاحظهٔ این مطلب، توجه کنید که به‌ازای اعدادی مانند $x \in S$ و $1 \leq i, j \leq n$، داریم $A_i \cup \{x\} = A_j \cup \{x\}$ اگر و تنها اگر $A_i \setminus \{x\} = A_j \setminus \{x\}$.

ماتریس $M = (m_{ij})_{n\times n}$ را با $m_{ij} \in \{0, 1\} (1 \leq i, j \leq n)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in A_i \\ 0 & j \notin A_i \end{cases}$$

بنا به فرض، سطرهای M همگی متمایزند. لازم است نشان دهیم که پس از حذف ستونِ مناسبی از M، سطرهای ماتریس به‌دست آمده همگی متمایز خواهند بود. برای این منظور دو حالت تشخیص می‌دهیم. (i) $\det M = 0$؛ و (ii) $\det M \neq 0$. اگر $\det M = 0$، ستونی از M، مثلاً ستون jاُم به ازای عددی چون $1 \leq j \leq n$، موجود خواهد بود که ترکیبی خطی از دیگر ستونهای ماتریسِ M است. ادعا می‌کنیم که ستونهای باقیماندهٔ M پس از حذف ستون jاُم آن همگی متمایزند. گیریم این‌گونه نباشد و ماتریس حاصل از حذف ستون jاُمِ M دارای دو سطرِ یکسان، چون سطرهای i_1 و i_2، باشد. نتیجه می‌گیریم که سطرهای i_1 و i_2 ماتریس M نیز برابرند زیرا ستون jاُمِ M ترکیبی خطی از دیگر ستونهای ماتریس M است. این تناقض به روشنی حکم را در این حالت به اثبات می‌رساند. اگر $\det M \neq 0$، در صورت لزوم با جابه‌جا کردنِ دو سطرِ M، می‌توان فرض کرد که سطر یکمِ M دارای کمترین تعداد یک بینِ همهٔ سطرهای M است. توجه کنید که M ممکن است دارای چندین سطر باشد که هرکدام دارای کمترین تعدادِ یک است. با بسط $\det M$ برحسب سطرِ یکم، درمی‌یابیم که $m_{1j}\det M_{1j} \neq 0$، که در آن M_{1j}، ماتریس حاصل از حذف سطر یکم و ستونِ jاُمِ ماتریس M است. لذا، $m_{1j} = 1$ و هیچ دو سطر M_{1j} یکسان نیستند، این امر ایجاب می‌کند که ماتریس حاصل از حذف ستون jام ماتریس M دارای هیچ دو سطر یکسانی نباشد. گیریم این گونه نباشد و ماتریس حاصل از حذف ستون jاُمِ M دارای دو سطر یکسان باشد. از آنجا که هیچ دو سطر ماتریس M_{1j} یکسان نیستند، درمی‌یابیم که به‌ازای عددی چون $1 < i < n$، سطر یکم و سطر iاُمِ ماتریس حاصل از حذف ستونِ jاُمِ M یکسان‌اند. از اینجا به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $m_{ij} = 0$ زیرا در غیر این صورت سطرهای یکم و iاُمِ M یکسان خواهند بود، که ناممکن است. در نتیجه، تعداد یکهای سطر iاُمِ M کمتر از تعداد یکهای سطر یکم آن است، که این یک تناقض است. بنابراین، هیچ دو سطر ماتریسِ حاصل از حذف ستونِ jاُمِ ماتریس M یکسان نیستند. این همان نتیجه‌ای است که می‌خواهیم. ■

پنجمین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال ششم از روز اولِ مسابقهٔ بیست‌وچهارم (اردیبهشت ۱۳۷۹، دانشگاه خواجه نصیر طوسی) است.

۵. پادشاه تبهکاری سه ریاضیدان محکوم به مرگ را واداشته است که در بازیِ زیر شرکت کنند.

دو جعبهٔ همانند یکی حاوی دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید و دیگری حاوی دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه، تهیه شده است. هر یک از محکومان مهره‌ای را بدون جایگذاری به تصادف از جعبه‌ای خارج می‌کند. اگر مهرهٔ خارج‌شده سیاه باشد اعدام و در غیر این صورت آزاد می‌شود. اگر هر یک از محکومان شاهد انتخاب نفرات پیش از خود باشد و فرض کنیم که هر کدام از آنها منطقی‌ترین کار ممکن را انجام می‌دهد، احتمال زنده‌ماندن نفر دوم را محاسبه کنید. احتمال زنده ماندن نفر سوم بیشتر است یا نفر دوم؟

حل. پیش از ارائهٔ برهان لم سادهٔ زیر را یادآور می‌شویم.

لم. گیریم دو جعبهٔ همانند به ترتیب حاوی w_1 مهرهٔ سفید و b_1 مهرهٔ سیاه، و w_2 مهرهٔ سفید و b_2 مهرهٔ سیاه باشند. احتمال برداشتن یک مهرهٔ سفید از یکی از دو جعبه برابر است با $\frac{1}{2}(\frac{w_1}{w_1+b_1} + \frac{w_2}{w_2+b_2})$.

برهان. گیریم A نشانگر پیشامد برداشتنِ یک مهره از جعبهٔ حاوی w_1 مهرهٔ سفید و b_1 مهرهٔ سیاه و B نشانگر پیشامد برداشتنِ یک مهره از جعبهٔ دیگر باشد. اگر W نشانگر پیشامد برداشتنِ یک مهرهٔ سفید از یکی از دو جعبه باشد، چون $\{A, B\}$ یک افراز فضای احتمال است، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(W) &= P((A \cap W) \cup (B \cap W)) \\ &= P(A)P(W|A) + P(B)P(W|B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{w_1}{w_1 + b_1} + \frac{1}{2} \times \frac{w_2}{w_2 + b_2} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{w_1}{w_1 + b_1} + \frac{w_2}{w_2 + b_2}) \end{aligned}$$

که لم را ثابت می‌کند. □

فرض کنید که فرد یکم مهره‌ای را از یکی از جعبه‌ها، مثلاً جعبهٔ b، برداشته است. گیریم b' نشانگر جعبهٔ دیگر باشد. به ازای هر $i = 1, 2, 3$، پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم.

W_i (یا: W'_i): پیشامد اینکه فرد iاُم یک مهرهٔ سفید از b (یا: b') بردارد.

B_i (یا: B'_i): پیشامد اینکه فرد iاُم یک مهرهٔ سیاه از b (یا: b') بردارد.

بنا بر لم بالا، داریم

$$P(W_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+2} + \frac{2}{1+2}) = \frac{1}{2}.$$

و همین‌طور، $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

نمادهای B_{011} و B_{001} (یا: B'_{011} و B'_{001}) را به ترتیب برای نشان دادن این پیشامدها که b (یا: b') حاوی یک مهرهٔ سیاه و دو مهرهٔ سفید، و دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید باشند به کار ببرید.

نخست، فرض کنید که فرد یکم یک مهرهٔ سفید از b برداشته است. با استفاده از قضیهٔ بیز می‌توان نوشت

$$P(B_{011}|W_1) = \frac{P(B_{011})P(W_1|B_{011})}{P(W_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(B_{001}|W_1) = \frac{P(B_{001})P(W_1|B_{001})}{P(W_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

و لذا، $P(B'_{011}|W_1) = 1 - P(B_{011}|W_1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ و $P(B'_{001}|W_1) = 1 - P(B_{001}|W_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

گیریم $U = B_{۰۱۱}|W_۱$، $V = B_{۰۰۱}|W_۱$، $U' = B'_{۰۱۱}|W_۱$، و $V' = B'_{۰۰۱}|W_۱$. داریم $P(U) = P(V') = \frac{۲}{۳}$ و $P(V) = P(U') = \frac{۱}{۳}$. با توجه به اینکه $\{U, V\}$ یک افراز فضای احتمال است، داریم

$$P(W_۲) = P(U)P(W_۲|U) + P(V)P(W_۲|V)$$
$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \times ۰ = \frac{۱}{۳}.$$

یعنی، با این فرض که فرد یکم یک مهرهٔ سفید از b برداشته است، احتمال اینکه فرد دوم یک مهرهٔ سفید از b بردارد $\frac{۱}{۳}$ است. همین‌طور، چون $\{U', V'\}$ یک افراز فضای احتمال است، می‌توان نوشت

$$P(W'_۲) = P(U')P(W'_۲|U') + P(V')P(W'_۲|V')$$
$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۹}.$$

به دیگر سخن، با فرض اینکه فرد یکم یک مهرهٔ سفید از b برداشته است، احتمال اینکه فرد دوم یک مهرهٔ سفید از b' بردارد $\frac{۴}{۹}$ است، که از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است. پس، در این حالت، فرد دوم باید از جعبهٔ دیگر، یعنی b'، مهره بردارد.

حال فرض کنید که فرد یکم یک مهرهٔ سیاه از b برداشته است، دوباره با استفاده از قضیهٔ بیز، خواهیم داشت: $P(B_{۰۱۱}|B_۱) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B_{۰۰۱}|B_۱) = \frac{۲}{۳}$، و لذا

$$P(B'_{۰۱۱}|B_۱) = ۱ - P(B_{۰۱۱}|B_۱) = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

و

$$P(B'_{۰۰۱}|B_۱) = ۱ - P(B_{۰۰۱}|B_۱) = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

پس، اگر قرار دهیم $S = B_{۰۱۱}|B_۱$، $T = B_{۰۰۱}|B_۱$، $S' = B'_{۰۱۱}|B_۱$، و $T' = B'_{۰۰۱}|B_۱$، می‌توان نوشت

$$P(W_۲) = P(S)P(W_۲|S) + P(T)P(W_۲|T)$$
$$= \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$$
$$P(W'_۲) = P(S')P(W'_۲|S') + P(T')P(W'_۲|T')$$
$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۹}.$$

از آنجا که $P(W_۲) = \frac{۲}{۳}$ بزرگ‌تر از $P(W'_۲) = \frac{۵}{۹}$ است، فرد دوم باید از جعبهٔ b مهره بردارد. بنابراین، احتمال نجات برای فرد دوم برابر است با

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۹} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۹}$$

زیرا، بنا بر لم بالا، فرد یکم با احتمال $\frac{۱}{۲}$ یک مهرهٔ سفید (یا: سیاه) برمی‌دارد.

برای بررسی احتمال نجاتِ فرد سوم، دو حالت می‌توان تشخیص داد.

(i) فرد یکم نجات می‌یابد.

بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد که شخص یکم یک مهرهٔ سفید از جعبهٔ b برداشته است. مطابق آنچه در بالا نشان دادیم، دو زیرحالت می‌توان تشخیص داد. (الف) فرد دوم یک مهرهٔ سفید از جعبهٔ b' برمی‌دارد؛ و (ب)فرد دوم یک مهرهٔ سیاه از جعبهٔ b' برمی‌دارد. در حالتِ (الف)، از آنجا که فرد یکم و دوم به ترتیب مهره‌های سفید از b و b' برداشته‌اند، دو جعبه برای فرد سوم از نظر برداشتنِ مهره تفاوتی ندارد. لذا، بنا بر لم بالا، فرد سوم با احتمال $\frac{۱}{۲}$ از یکی از دو جعبه یک مهرهٔ سفید برمی‌دارد. پس، اگر $S_۱$ نشانگر پیشامد نجات یافتنِ فرد سوم در این حالت باشد، خواهیم داشت

$$P(S_۱) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۸}.$$

در حالتِ (ب)، اگر قرار دهیم $C = W_۱ \cap B'_۲$، برطبق قضیهٔ بیز می‌توان نوشت

$$P(B_{۰۱۱}|C) = \frac{P(C|B_{۰۱۱})P(B_{۰۱۱})}{P(B_{۰۱۱})P(C|B_{۰۱۱}) + P(B_{۰۰۱})P(C|B_{۰۰۱})}$$
$$= \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۵}.$$

لذا، $P(B_{۰۰۱}|C) = ۱ - P(B_{۰۱۱}|C) = \frac{۱}{۵}$. در نتیجه، احتمال اینکه فرد سوم یک مهرهٔ سفید از b بردارد برابر است با

$$P(B_{۰۰۱}|C)P(W_۳|B_{۰۰۱}|C) + P(B_{۰۱۱}|C)P(W_۳|B_{۰۱۱}|C)$$
$$= \frac{۱}{۵} \times ۰ + \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۵}.$$

به طور مشابه، احتمال اینکه فرد سوم یک مهرهٔ سفید از b' بردارد برابر است با

$$P(B_{۰۰۱}|C)P(W'_۳|B_{۰۰۱}|C) + P(B_{۰۱۱}|C)P(W'_۳|B_{۰۱۱}|C)$$
$$= \frac{۱}{۵} \times ۱ + \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۵}.$$

در نتیجه، فرد سوم باید یک مهره از b' بردارد که همان جعبه‌ای است که فرد دوم از آن یک مهره برداشته است. بنابراین، احتمال نجات یافتنِ فرد سوم در این حالت، که آن را با $P(S_۲)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$P(S_۲) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۹} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۶}.$$

(ii) فرد یکم نجات نمی‌یابد.

دوباره می‌توان فرض کرد که فرد یکم یک مهرهٔ سیاه از جعبهٔ b برداشته است. دو زیرحالت می‌توان تشخیص داد. (الف) فردِ دوم یک مهرهٔ سفید از جعبهٔ b برمی‌دارد؛ و (ب) فردِ دوم یک مهرهٔ سیاه از جعبهٔ b برمی‌دارد. در حالت (الف)، با در نظر گرفتن $C = B_۱ \cap W_۲$، طبق قضیهٔ بیز می‌توان نوشت

$$P(B_{۰۰۱}|C) = \frac{P(C|B_{۰۰۱})P(B_{۰۰۱})}{P(B_{۰۰۱})P(C|B_{۰۰۱}) + P(B_{۰۱۱})P(C|B_{۰۱۱})}$$
$$= \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times ۱} = \frac{۱}{۲}.$$

در نتیجه، جعبه‌ها برای فرد سوم از نظر برداشتن مهره تفاوتی نخواهد داشت. پس احتمال برداشتنِ یک مهرهٔ سفید برابر می‌شود با $\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴}$. و لذا، اگر $S_۳$ نشانگر پیشامد نجاتِ یافتنِ فرد سوم در این حالت باشد، خواهیم داشت

$$P(S_۳) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}.$$

سرانجام، اگر فرد یکم و فرد دوم هر دو مهره‌های سیاه از b بردارند، آنگاه فرد سوم با برداشتن تنها مهرهٔ باقیماندهٔ جعبهٔ b که سفید است می‌تواند نجات یابد. پس احتمال نجات یافتن در این حالت، که با $P(S_۴)$ نشان داده می‌شود، برابر است با

$$P(S_۴) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۱}{۶}.$$

بنابراین، احتمال نجات یافتن این فرد، $P(S)$، برابر است با

$$P(S) = P(S_۱) + \ldots + P(S_۴) = \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۹}.$$

یعنی، احتمال نجات یافتن فردِ سوم با احتمال نجات یافتنِ فرد دوم یکسان است. ■

ششمین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار، سؤال ششم از روز دوم مسابقهٔ بیست و چهارم (اردیبهشت ۱۳۷۹، دانشگاه خواجه نصیر طوسی) است.

۶. دو نفر بازیِ زیر را انجام می‌دهند.

ابتدا نفر اول یک سه‌تایی از $\{۰, ۱\}$ انتخاب می‌کند (به‌عنوان مثال ۱۰۰). نفر دوم ــ که سه‌تاییِ انتخاب‌شده توسط نفر اول را می‌داند ــ یک سه‌تایی متمایز انتخاب می‌کند. سپس یک دستگاه مولد تصادفی که با احتمال $\frac{۱}{۲}$، ۰ و با احتمال $\frac{۱}{۲}$، ۱ را تولید می‌کند روشن می‌شود. ارقام تولیدشده توسط دستگاه را از چپ به‌راست می‌نویسیم و بازیکنی که سه‌تاییِ انتخاب‌شده توسط او زودتر ظاهر شود، بازی را می‌برد.

نشان دهید که برای هر انتخاب نفر اول، انتخابی برای نفر دوم وجود دارد، به‌طوری که احتمال برد نفر دوم بیش از $\frac{۱}{۲}$ است.

حل. مسأله را به بازی پرتابِ سکهٔ زیر تبدیل می‌کنیم که حالت کلی‌تری از مسأله است. سپس اثباتی برای همزاد حکم بازیِ پرتاپ سکهٔ زیر، که از کتاب

Concrete Mathematics, by Ronald, L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik

گرفته‌ایم، ارائه می‌دهیم. همزاد مسأله از قرار زیر است.

دو نفر، A و B، بازی پرتابِ سکهٔ زیر را انجام می‌دهند.

ابتدا، A یک الگو با طولِ l ($l \geq ۳$) از شیرها و خطها (به عنوان مثال، HTH، که در آن H نشانگر خط و T نشانگر شیر است) انتخاب می‌کند. سپس B، که الگوی انتخاب‌شده به‌وسیلهٔ A را می‌داند، یک الگوی متفاوت با طولی برابر با طول الگوی A از شیرها و خطها انتخاب می‌کند. سپس یک سکهٔ سالم مرتب پرتاب می‌شود تا اینکه یکی از الگوهای انتخاب‌شده برای نخستین بار رخ دهد. در این صورت، بازیکنی که الگویش برای نخستین بار رخ می‌دهد برندهٔ بازی خواهد بود. نشان دهید به‌ازای هر انتخاب A، همواره یک انتخاب برای B وجود دارد به‌طوری که احتمال بردِ B بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد.

گیریم S_A و S_B به ترتیب نشانگر مجموع صوریِ وضعیتهای برنده برای A و B باشند. همچنین، گیریم $\mathcal{N}$ نشانگر مجموع صوریِ الگوهایی باشد که هیچ‌یک از آنها شامل الگوهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، که به ترتیب توسطِ A و B انتخاب شده‌اند، نباشد. به عنوان مثال، اگر A الگوی $\mathcal{A} = HTH$ و B الگوی $\mathcal{B} = TTH$ را انتخاب کند، داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_A =& HTH + HHTH + THTH \\
&+ HHHTH + TTHTH + THHTH + \cdots \\
\mathcal{S}_B =& TTH + HTTH + TTTH + HHTTH \\
&+ TTTTH + THTTH + HTTTH + \cdots \\
\mathcal{N} =& ۱ + H + T + HH + TT + TH \\
&+ HT + HHH + HHT + THT + TTT + \cdots .
\end{aligned}$$

روشن است که اگر قرار دهیم $H = T = \frac{۱}{۲}$، مقادیر به‌دست آمده برای $\mathcal{S}_A$ و $\mathcal{S}_B$ به ترتیب احتمال آن خواهد بود که A و B بازی را ببرند. داریم

$$۱ + \mathcal{N}(H + T) = \mathcal{N} + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_B$$

$$\mathcal{N}\mathcal{A} = \mathcal{S}_A \sum_{k=۱}^{l} \mathcal{A}^{(l-k)} \delta_{\mathcal{A}^{(k)}, \mathcal{A}_{(k)}} + \mathcal{S}_B \sum_{k=۱}^{l} \mathcal{A}^{(l-k)} \delta_{\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{A}_{(k)}}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{B} = \mathcal{S}_A \sum_{k=۱}^{l} \mathcal{B}^{(l-k)} \delta_{\mathcal{A}^{(k)}, \mathcal{B}_{(k)}} + \mathcal{S}_B \sum_{k=۱}^{l} \mathcal{B}^{(k-l)} \delta_{\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{B}_{(k)}}$$

که در آن $\delta_{\alpha,\beta}$ نشانگرِ دلتای کرونکر است، $\mathcal{A}^{(k)}$ و $\mathcal{A}_{(k)}$ (یا: $\mathcal{B}^{(k)}$ و $\mathcal{B}_{(k)}$) نشانگر آخرین و نخستین k حرفِ $\mathcal{A}$ (یا: $\mathcal{B}$) هستند. برای دیدن نخستین برابری، ملاحظه نمایید که هر تک‌جملهٔ متعلق به سمت چپ برابری یا به $\mathcal{A}$ ختم می‌شود، یا به $\mathcal{B}$، یا به هیچ یک از $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ ختم نمی‌شود که بدین معنی است که آن جمله به $\mathcal{N}$ تعلق دارد؛ برعکس، هر جملهٔ متعلق به سمت راستِ نخستین برابری، یا جملهٔ تهی (فاقد حرف) است یا به $\mathcal{N}H$ یا $\mathcal{N}T$ تعلق دارد. برابری دوم برقرار است زیرا هر جملهٔ متعلق به سمت چپ جمله‌ای از $\mathcal{S}_A$ را تکمیل می‌کند به این صورت که به‌ازای یک $۱ \leq k \leq l$، آخرین k حرف $\mathcal{A}$ با نخستین k حرف $\mathcal{A}$ یکسان می‌گردند، یا کلمه‌ای از $\mathcal{S}_B$ را تکمیل می‌کند به این صورت که به‌ازای یک $۱ \leq k \leq l$، آخرین k حرف $\mathcal{B}$ با نخستین k حرف $\mathcal{A}$ یکسان می‌شوند؛ و برعکس، زیرا هر جملهٔ متعلق به سمت راست به سمت چپ تعلق دارد. به طور مشابه، برابری سوم اثبات می‌شود. همان‌گونه که در بالا اشاره شد، با قرار دادن $H = T = \frac{۱}{۲}$، احتمال بردِ A و B، که، به‌ترتیب، با $P(A)$ و $P(B)$ نشان داده می‌شوند، به‌دست می‌آید. از نخستین برابریِ بالا نتیجه می‌شود که $P(A) + P(B) = ۱$. گیریم

$$\mathcal{A} : \mathcal{A} = \sum_{k=۱}^{l} ۲^{k-۱} \delta_{\mathcal{A}^{(k)}, \mathcal{A}_{(k)}}, \quad \mathcal{B} : \mathcal{A} = \sum_{k=۱}^{l} ۲^{k-۱} \delta_{\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{A}_{(k)}}$$

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \sum_{k=۱}^{l} ۲^{k-۱} \delta_{\mathcal{A}^{(k)}, \mathcal{B}_{(k)}}, \quad \mathcal{B} : \mathcal{B} = \sum_{k=۱}^{l} ۲^{k-۱} \delta_{\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{B}_{(k)}}.$$

با استفاده از برابریهای دوم و سوم بالا می‌توان نوشت

$$\mathcal{N} = ۲\left(P(A)(\mathcal{A}:\mathcal{A}) + P(B)(\mathcal{B}:\mathcal{A})\right)$$
$$\mathcal{N} = ۲\left(P(A)(\mathcal{A}:\mathcal{B}) + P(B)(\mathcal{B}:\mathcal{B})\right)$$

که از آن به دست می‌آید

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A}}{\mathcal{A}:\mathcal{A}-\mathcal{A}:\mathcal{B}}.$$

اکنون، ادعا می‌کنیم که اگر A الگوی $\mathcal{A} = \tau_۱\tau_۲\dots\tau_l$ را انتخاب کند، آنگاه B با انتخاب الگوی $\mathcal{B} = \tau'_۲\tau_۱\dots\tau_{l-۱}$، که در آن $\tau'_۲$ شیر/خطِ مقابل $\tau_۲$ است، شانس بیشتری برای بردن بازی دارد. کافی است نشان دهیم که $P(A) < P(B)$. گیریم این‌گونه نباشد. در این صورت

$$\mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A} \geq \mathcal{A}:\mathcal{A}-\mathcal{A}:\mathcal{B}. \qquad (*)$$

ملاحظه کنید که $\mathcal{A}:\mathcal{A} \geq ۲^{l-۱}$ و $\mathcal{B}:\mathcal{B} < ۲^{l-۱}+۲^{l-۳}$، و $\mathcal{B}:\mathcal{A} \geq ۲^{l-۲}$، زیرا $\mathcal{A}^{(l)} = \mathcal{A}_{(l)}$، $\mathcal{B}^{(l)} = \mathcal{B}_{(l)}$ ولی $\mathcal{B}^{(l-۲)} \neq \mathcal{B}_{(l-۲)}$، و $\mathcal{B}^{(l)} \neq \mathcal{A}_{(l)}$ ولی $\mathcal{B}^{(l-۱)} = \mathcal{B}_{(l-۱)}$. نتیجه می‌شود که $\mathcal{A}^{(l)} \neq \mathcal{B}_{(l)}$. چون $\mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A} < ۲^{l-۱}+۲^{l-۳}-۲^{l-۲}$ و $\mathcal{A}^{(l-۱)} \neq \mathcal{B}_{(l-۱)}$، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{A}^{(l-۲)} = \mathcal{B}_{(l-۲)}$، زیرا در غیر این صورت $\mathcal{A}:\mathcal{B} \leq ۲^{l-۳}$، که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{A}:\mathcal{A}-\mathcal{A}:\mathcal{B} \geq ۲^{l-۱}-۲^{l-۳} \geq ۲^{l-۱}+۲^{l-۳}-۲^{l-۲}$$
$$> \mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A}$$

که ناممکن است. در نتیجه $\mathcal{A}^{(l-۲)} = \mathcal{B}_{(l-۲)}$، که از آن به‌دست می‌آید

$$\tau'_۲ = \tau_۳, \tau_۱ = \tau_۴, \tau_۲ = \tau_۵, \tau_۳ = \tau_۶, \dots, \tau_{l-۳} = \tau_l.$$

ولی در این صورت خواهیم داشت $\mathcal{A}:\mathcal{A} \geq ۲^{l-۱}+۲^{l-۴}+\dots$، $\mathcal{A}:\mathcal{B} \leq ۲^{l-۳}+۲^{l-۶}+\dots$، و $\mathcal{B}:\mathcal{A} \geq ۲^{l-۲}+۲^{l-۵}+\dots$، $\mathcal{B}:\mathcal{B} < ۲^{l-۱}+۲^{l-۴}+\dots$، که ایجاب می‌کند

$$\mathcal{A}:\mathcal{A}-\mathcal{A}:\mathcal{B} \geq (۲^{l-۱}-۲^{l-۳})+(۲^{l-۴}-۲^{l-۶})+\dots$$
$$> (۲^{l-۱}-۲^{l-۲})+(۲^{l-۴}-۲^{l-۵})+\dots$$
$$> \mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A}.$$

به دیگر سخن، $\mathcal{A}:\mathcal{A}-\mathcal{A}:\mathcal{B} > \mathcal{B}:\mathcal{B}-\mathcal{B}:\mathcal{A}$، که با $(*)$ در تناقض است. بنابراین، $P(A) < P(B)$، و حکم ثابت می‌شود. ■

هفتمین، و آخرین مسألهٔ برگزیدهٔ این نوشتار سؤال ششم از جلسهٔ اول مسابقهٔ بیست‌وهشتم (اردیبهشت ۱۳۸۳، دانشگاه صنعتی شریف) است.

۷. فرض کنید $(P,\leq)$ یک مجموعهٔ n عضویِ به‌طور جزئی‌مرتب (بازتابی، پادمتقارن، و متعدی) باشد. برای هر عضو $i \in P$، قرار دهید $U_i = \{j : j \in P,\ j > i\}$ و $L_i = \{j : j \in P,\ j < i\}$. فرض کنید به هر عضو P مانند i عدد حقیقی X_i با شرط زیر نسبت داده شده باشد

$$X_i = \begin{cases} \frac{۱-\Sigma_{j\in L_i} X_j}{n-|U_i|} & L_i \neq ۰ \\ \frac{۱}{n-|U_i|} & L_i = ۰ \end{cases}$$

ثابت کنید که به‌ازای هر $i \in P$، داریم $۰ \leq X_i < ۱$.

حل[۱]. گیریم $P = \{p_۱,\dots,p_n\}$. همان‌گونه که معمول است، فرض می‌کنیم $\mathrm{Sym}(P)$ نشانگر مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای (مجموعهٔ جزئی‌مرتب) P باشد. مجموعهٔ $\mathrm{Sym}(P)$ را یک فضای احتمال در نظر بگیرید. یک جایگشت σ بر $\{۱,\dots,n\}$ به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم که به‌نوبهٔ خود، به‌طور تصادفی یک جایگشت $s_\sigma \in \mathrm{Sym}(P)$ به‌دست می‌دهد به‌طوری که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $s_\sigma(p_i) = p_{\sigma i}$. برای هر $۱ \leq i \leq n$، یک $۱ \leq j \leq n$ موجود است به‌طوری که $\sigma j = i$، که با $p_i = s_\sigma(p_j) = p_{\sigma j}$ هم‌ارز است. با در نظر گرفتن همهٔ این مطالب، برای عضوی چون $p_i \in P$ که به‌ازای یک $۱ \leq j \leq n$، $p_i = s_\sigma(p_j) = p_{\sigma j}$. گیریم F_{p_i} این پیشامد باشد که جایگشت $s_\sigma \in \mathrm{Sym}(P)$ در شرط زیر صدق کند

$$\forall p \in P \setminus U_{p_i} : p = s_\sigma(p_k) = p_{\sigma k} \Rightarrow \sigma j \leq \sigma k.$$

به دیگر سخن، اگر

$$s_\sigma = \begin{pmatrix} p_۱ & p_۲ & \dots & p_n \\ p_{\sigma ۱} & p_{\sigma ۲} & \dots & p_{\sigma n} \end{pmatrix}$$

آنگاه $s_\sigma \in F_{p_i}$ اگر و تنها اگر در ردیف دوم نمایشِ بالای s_σ، عضو p_i پیش از همهٔ عضوهای $P \setminus U_{p_i}$ غیر از p_i بیاید. قرار می‌دهیم $E_{p_i} := F_{p_i} \bigcap (\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c)$، که در آن $F_p^c := \mathrm{Sym}(P) \setminus F_p$.

توجه کنید که اگر p_i و $p_{i'}$ متمایز باشند، آنگاه پیشامدهای E_{p_i} و $E_{p_{i'}}$ به‌طور همزمان نمی‌توانند رخ دهند، و لذا مجزا هستند. برای اثبات این مطلب، نخست فرض کنید که برای $p_i, p_{i'} \in P$، پیشامد E_{p_i}، و لذا F_{p_i}، رخ دهد، و اینکه p_i و $p_{i'}$ قابل مقایسه نباشند. در این صورت، به‌ویژه $p_{i'} \not> p_i$، که از آن به‌دست می‌آید $p_{i'} \in P \setminus U_{p_i}$، که، به‌نوبهٔ خود، ایجاب می‌کند $\sigma j < \sigma j'$، که در آن $i = \sigma j$ و $i' = \sigma j'$. در نتیجه، $F_{p_{i'}}$، و لذا $E_{p_{i'}}$، نمی‌تواند رخ دهد زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم $\sigma j' < \sigma j$ زیرا $p_i \not> p_{i'}$، که یک تناقض است؛ یعنی F_{p_i} و $F_{p_{i'}}$، و لذا E_{p_i} و $E_{p_{i'}}$، نمی‌توانند به‌طور همزمان رخ دهند هرگاه p_i و $p_{i'}$ قابل مقایسه نباشند. حال اگر عضوهای $p_i, p_{i'} \in P$ قابل مقایسه باشند، آنگاه روشن است که پیشامدهای E_{p_i} و $E_{p_{i'}}$ نمی‌توانند به‌طور همزمان رخ دهند. در نتیجه، پیشامدهای E_{p_i} و $E_{p_{i'}}$ مجزا هستند هرگاه $p_i, p_{i'} \in P$ متمایز باشند.

حال، با استفاده از استقرا روی $|L_{p_i}|$ اثبات می‌کنیم که $X_{p_i} = P(E_{p_i})$. اگر $|L_{p_i}| = ۰$، یعنی اگر p_i یک عضو مینیمال P باشد، آنگاه $E_{p_i} = F_{p_i}$. توجه کنید که $s_\sigma \in F_{p_i}$ با این ویژگی که $s_\sigma(p_j) = p_i$ اگر و تنها اگر $\sigma j \leq \sigma k$ هرگاه به‌ازای یک $۱ \leq k \leq n$،

۱. این راه‌حل با کمک دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن نوشته شده است.

$p = s(p_k) = p_{\sigma k} \in P \setminus U_{p_i}$. چون $|P \setminus U_{p_i}| = n - |U_{p_i}|$، در این حالت، می‌توان نوشت

$$P(E_{p_i}) = P(F_{p_i}) = \frac{(|U_{p_i}|!\binom{n}{n-|U_{p_i}|})(n-|U_{p_i}|-1)!}{n!} = \frac{1}{n-|U_{p_i}|}.$$

با فرض اینکه به‌ازای هر $p \in L_{p_i}$، $X_p = P(E_p)$ ثابت می‌کنیم که $X_{p_i} = P(E_{p_i})$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $p_i \in P$،

$$\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c = \bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c.$$

برای ملاحظهٔ این مطلب، نخست، گیریم $s_\sigma \in \bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c$ عضوی دلخواه باشد. نشان می‌دهیم $s_\sigma \in \bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c$. گیریم این‌گونه نباشد که در این صورت، یک $q \in L_{p_i}$ موجود است به‌طوری که $s_\sigma \notin E_q^c$. نتیجه می‌شود که $s_\sigma \in E_q$، و لذا $s_\sigma \in F_q$. این نتیجه با اینکه $s_\sigma \in \bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c$، در تناقض است. پس، $\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c \subseteq \bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c$. سپس، با فرض اینکه $s_\sigma \in \bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c$ دلخواه باشد، نشان می‌دهیم که $s_\sigma \in \bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c$. دوباره فرض کنید این گونه نباشد که در این صورت، یک عضو مینیمالِ $q \in L_{p_i}$ موجود است به‌طوری که $s_\sigma \notin F_q^c$ ولی به‌ازای هر $p \in L_q$، $s_\sigma \in F_p^c$. نتیجه می‌شود که $s_\sigma \in F_q$ اما به‌ازای هر $p \in L_q$، $s_\sigma \in F_p$. در نتیجه $s_\sigma \in E_q = F_q \bigcap(\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c)$، که یک تناقض است.

بنابراین، $\bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c \subseteq \bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c$، که ادعا را ثابت می‌کند. اکنون، چون E_pها $(p \in L_{p_i})$ متمایز هستند، براساس ادعای بالا می‌توان نوشت

$$P(\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c) = P(\bigcap_{p\in L_{p_i}} E_p^c) = 1 - P(\bigcup_{p\in L_{p_i}} E_p) = 1 - \sum_{p\in L_{p_i}} X_p.$$

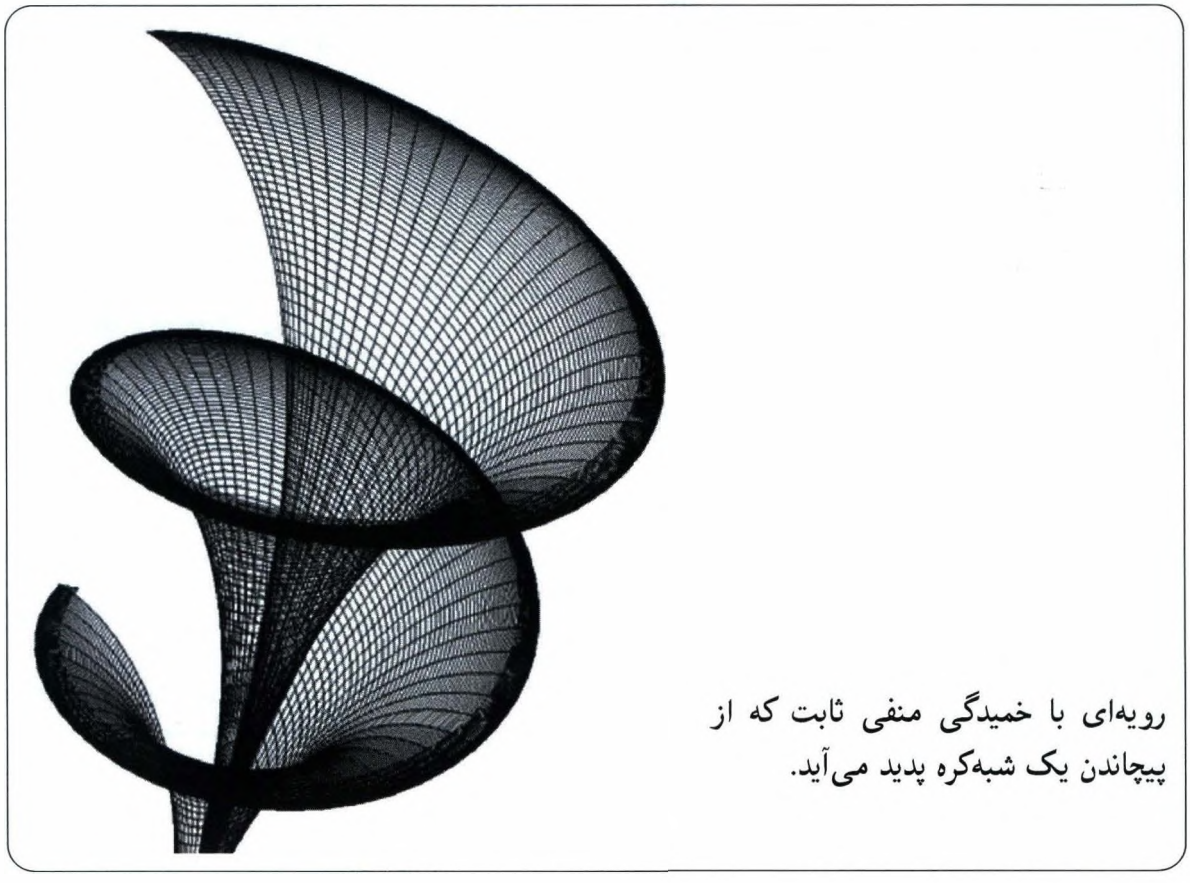
از سوی دیگر، پیشامدهای F_{p_i} و $\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c$ مستقل‌اند زیرا مکان p_i در جایگشت هیچ اثری بر F_pها $(p \in L_{p_i})$ ندارد. لذا،

$$P(E_{p_i}) = P((\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c)\bigcap F_{p_i}) = P(\bigcap_{p\in L_{p_i}} F_p^c)P(F_{p_i}) = \frac{1-\sum_{p\in L_{p_i}} X_p}{n-|U_{p_i}|}.$$

بنابراین، به‌ازای هر $p_i \in P$، $X_{p_i} = P(E_{p_i})$ و در نتیجه به ازای هر $p_i \in P$، $0 \le X_{p_i} \le 1$. ■

******

* بامداد ر. یاحقی، دانشگاه گلستان،
bamdad5@hotmail.com



رویه‌ای با خمیدگی منفی ثابت که از پیچاندن یک شبه‌کره پدید می‌آید.

نقد و بررسی

اصول اقلیدس



اصول اقلیدس، سیزده مقاله، تامس ال. هیث، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۴۹۰ صفحه.

مرکز نشر دانشگاهی اولین ترجمهٔ کامل سیزده مقالهٔ اصول اقلیدس را به زبان فارسی منتشر کرده است. اصول اقلیدس بیش از هر اثر علمی دیگری در طول تاریخ مورد مطالعه، استناد، و شرح و تفسیر قرار گرفته و از زمان اولین چاپ آن در سال ۱۴۸۲ میلادی بیش از هزار بار به زبانهای مختلف چاپ شده است. این اثر طی بیش از دو هزار سال الگوی تفکر علمی و متن معیار ریاضی به‌شمار می‌آمده است. ریاضیدانان ایرانی و اسلامی نیز در دوران شکوفایی تمدن اسلامی توجه ویژه‌ای به این کتاب داشته‌اند و ترجمه‌ها، شرحها، و تحریرهای فراوانی از اصول (به عربی) به‌دست داده‌اند. ولی این اولین بار است که ترجمهٔ کامل متن اصول به فارسی در دسترس علاقه‌مندان قرار می‌گیرد.

ترجمهٔ فارسی از روی ترجمهٔ انگلیسی سیزده مقالهٔ اصول به قلم تامس لیتل هیث (Thomas Little Heath) صورت گرفته که از ترجمه‌های مؤثق این کتاب به زبان انگلیسی است و نسخهٔ اصلی سه جلدی آن با مقدمه و توضیحات مبسوط هیث دربارهٔ جنبه‌های تاریخی و ریاضی اثر یکی از معتبرترین متون انگلیسی در معرفی اصول است. ترجمهٔ فارسی از روی یکی از بازچاپ‌های ترجمهٔ انگلیسی هیث انجام شده که سیزده مقاله را بدون حواشی دربر دارد. مترجم، استادِ زنده یاد محمدهادی شفیعیها، طرحی برای نوشتن مقدمه‌ای مفصل دربارهٔ کارِ هیث و به‌طور کلی، ترجمه‌های اصول داشت که متأسفانه به‌علت بیماری موفق به‌اجرای آن نشد و ترجمهٔ فارسی پس از درگذشت ایشان به‌چاپ رسیده است.

در اینجا نخست پیشگفتار تامس هیث را بر ویراست اول کتابش در ۱۹۰۸ می‌خوانید که حاوی نکته‌های جالبی دربارهٔ وضعیت اصول در اروپا در قرن گذشته و نیز انگیزه‌های او از این ترجمه و شرح است. پس از آن به‌مناسبت ورود اصول به گنجینهٔ نوشتگان فارسی، شرحی دربارهٔ گشت‌وگذار دوهزارسالهٔ اصول در زبانها و تمدنهای مختلف به قلم جان مرداک (John Murdock) و به ترجمهٔ شادروان احمد بیرشک می‌آوریم. این شرحِ پراطلاع را از مقالهٔ «اقلیدس» در زندگینامهٔ علمی دانشوران (جلد دوم، زیر نظر احمد بیرشک، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، چاپ اول ۱۳۷۲، صص ۲۴ـ۳۸) برداشته‌ایم و فقط با تبدیل کلمهٔ «کتاب» به «مقاله» در مورد مقالات اصول و حذف علامت ارجاع (←) به مدخلهای زندگینامه...، آن را عیناً نقل می‌کنیم.

پیشگفتار هیث بر ویراست اول متن انگلیسی

ترجمهٔ حسن حقیقی

دمورگن در اکتبر ۱۸۴۸ (در نکات تکمیلی کوتاه دربارهٔ شش مقالهٔ اول اقلیدس در ضمیمهٔ آلماناک [سالنامه] ۱۸۴۸) نوشت: «هرگز یک نظام هندسه که شایستهٔ این نام باشد وجود نداشته است، و تا جایی که پیداست به اعتقاد ما وجود نخواهد یافت که انحرافی واقعی (نه از نوع تصحیح و گسترش) از طرحی داشته باشد که اقلیدس پی ریخت.» و فکر نمی‌کنم که اگر او امروز زنده بود، دلیلی می‌دید تا در این عقیدهٔ خود که شصت سال پیش اظهار داشته بود، تجدیدنظر کند. درست است که در این فاصله تحقیقات با ارزشی در اروپای قاره‌ای برای بررسی و مطالعهٔ اصول اولیه انجام شده است، از

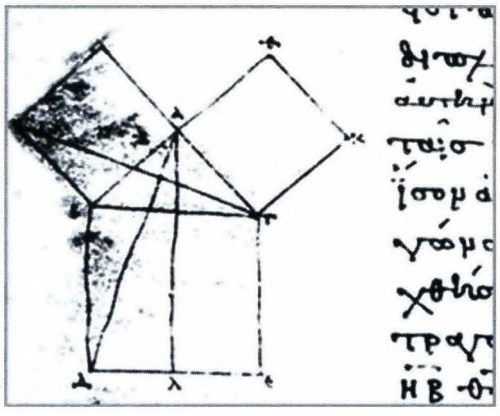
جمله صورت‌بندی و طبقه‌بندی اصول موضوع یا اصول متعارفی که برای رفع نقایص اصول موضوع و متعارفیِ تصریح‌شده توسط خود اقلیدس ضروری‌اند و همچنین برای توجیه فرضهای دیگری که وی به‌طور ضمنی در قضیهٔ معینی پذیرفته، و ظاهراً محتوای متن اجازه می‌دهد درستی آنها از طریق مشاهدهٔ شکلها، آن طور که رسم شده‌اند، استنتاج شود؛ اما همین که بحث اصلهای اولیه به کنار نهاده شود، بخش اصلی آموزهٔ مندرج در کتابهای درسی اخیر هندسهٔ مقدماتی هیچ تفاوت اساسی با آنچه در کتاب اقلیدس ارائه شده ندارد، و با توجه به طبیعت موضوع نمی‌تواند داشته باشند.

به‌نظر می‌آید کارهای انجام شده در انگلستان ارزش علمی بسیار کمتری داشته باشد. تلاش عدهٔ زیادی از نویسندگان صرف نوشتن روایتهای دیگری از اصول اقلیدس شده که مناسب‌تر باشند، به این معنا که برای دانش‌آموزان آسان‌تر باشد. البته تعجب‌آور نیست که در این روزها که گرایش به راه‌های میان‌بر زیاد است جنبشی برای خلاص‌شدن از اصول اقلیدس و جایگزین‌کردن «یک راه شاهانه به هندسه» به راه افتاده باشد؛ موضوع شگفت‌انگیز این است که کتابی که نه برای دانش‌آموزان بلکه برای افراد بزرگ‌تر نوشته شده (چنانکه تمام شواهد درون متن نشان می‌دهد، و به‌خصوص ماهیت اساساً نظری این اثر و دوری آن از هر چیزی که ماهیت هندسهٔ «عملی» داشته باشد)، بایستی این همه مدت جایگاه خودش را به‌عنوان یک کتاب مدرسه‌ای حفظ کند.

حال که اثباتهای اقلیدس و نظم اقلیدسی مطالب برای داوطلبان امتحانات لازم نیست، عده‌ای به‌شدت در رقابت‌اند تا اولین فردی باشند که در این حوزه کتابی جدید با خطوط «عملی‌تر»، که اکنون طرفداران بیشتری دارد، منتشر کنند. تمایل طبیعی هر معلمی که چنین کتابی می‌نویسد این است که به راه حل ساده‌انگارانهٔ خاصی که به‌نظر خودش در کلاس موفقیت‌آمیز بوده، برجستگی بیشتری بدهد. اغلب مواقع، یکی از تبعات این کار، از دست رفتن تناسب لازم موضوعات است، و به‌هر صورت، تنوع فراوان برداشتها گریزناپذیر خواهد بود. با توجه به چنین خطری است که لندر[1] در ۱۸۴۶ نوشت: «به محض اینکه اقلیدس از صحنه خارج شد، هر معلمی کار خودش را بهترین قلمداد می‌کند و هر مدرسه کتاب درسی خودش را خواهد داشت. تمام آن موشکافی، انسجام، درستی و دقتی که تاکنون تحسین اهل علم را برمی‌انگیخته به آخر خواهد رسید. این کلمات بسیار دقیق معنای معین خود را از دست می‌دهند. هر مدرسه‌ای استانداردی متفاوت خواهد داشت؛ چیزی که در یکی فرض است در دیگری از نوع برهان است، تا اینکه در بلندمدت، هندسه به مفهوم قدیم کلمه به‌تمامی از دست می‌رود، یا فقط به‌عنوان حالت خاص جبر و حساب در نظر گرفته می‌شود.» شاید پیشگوییِ پیامدهای نهایی ترتیبات جدید هنوز خیلی زود باشد، اما حداقل ممکن به‌نظر می‌رسد که تاریخ تکرار شود و وقتی آشوب و هرج‌ومرج در آموزش هندسه پدیدار شد، یک بار دیگر، بازگشتی کم‌وبیش کامل به اقلیدس، به‌منظور استانداردکردن روی بدهد.

اما موضوعِ ویراستی جدید از اصول اقلیدس مستقل از هرگونه مشاجره دربارهٔ چگونگی تدریس هندسه در مدارس است. اثر اقلیدس با وجود همهٔ کتابهای درسی امروزی که جایگزین یکدیگر می‌شوند و فراموش

1. Lander



می‌شوند، مدتهای مدید زنده خواهد ماند. این اثر یکی از باشکوه‌ترین آثار دوران باستان است، هیچ ریاضیدانی که شایستهٔ عنوان ریاضیدان باشد نمی‌تواند بگوید که اصول اقلیدس را نمی‌شناسد، اصول اقلیدس واقعی که متمایز از هر روایت بازنویسی‌شده یا تجدیدنظرشده‌ای است که در خدمت مهندسان و دانش‌آموزان قرار می‌گیرد. و برای شناختن اصول، لازم است زبان آن را شناخت، و تاریخ آن را، تا جایی که قابل پیگیری باشد، دانست.

این انگیزهٔ اصلی من در فراهم‌آوردن ویراست حاضر است. ترجمه‌ای جدید از متن یونانی به دو دلیل لازم بود. اولاً، اگرچه مدتی از انتشار متن و مقدمهٔ دقیق هایبرگ[1] که در فاصلهٔ ۱۸۸۳ و ۱۸۸۸ چاپ شده، گذشته است تا جایی که من می‌دانم هیچ تلاشی برای ترجمهٔ امانتدارانهٔ آن از یونانی به انگلیسی، حتی در مورد مقاله‌هایی که مطالعهٔ آنها متداول است، صورت نگرفته است. و ثانیاً مقاله‌های دیگر کتاب، یعنی مقاله‌های هفت تا ده و سیزده در کتاب سیمسن و شارحان بعد از او، یا علی‌الظاهر در هیچ ترجمهٔ انگلیسی از زمان ویلیامسن (۱۷۸۱ـ۱۷۸۸) و بعد از آن نیامده است، به‌طوری که امروزه این مقاله‌ها در عمل به هیچ شکلی دردسترس خوانندگان انگلیسی زبان نیست.

دربارهٔ یادداشت‌ها و حواشی، چاپ شش مقالهٔ اول به یونانی و لاتین با یادداشت‌های کامرر[2] و هاوبر[3] (برلین ۱۸۴۵ـ۱۸۴۲) منبع کاملی از اطلاعات است. در زمانی که آن یادداشت‌ها نوشته می‌شدند، عملاً غیرممکن بوده که جامع‌تر از آن باشند که هستند. اما طی سی یا چهل‌سال گذشته، محققان تاریخ ریاضی (لازم است نامهایی چون برتشنایدر[4]، هنکل[5]، موریتس کانتور[6]، هولتش[7]، پل تانری[8]، تسوتن[9]، لوریا[10]، و هایبرگ را ذکر کنم) کل موضوع را در سطحی متفاوت قرار داده‌اند. من تلاش کرده‌ام تمام نتایج اصلی‌ای را که این محققان تا زمان حاضر به‌دست آورده‌اند در این چاپ بگنجانم. بنابراین، در این ویراست، تا جایی که به مقاله‌های هندسی اصول مربوط است، هدف من از یادداشت‌ها تدوین نوعی فرهنگ تاریخ هندسهٔ مقدماتی است که به‌صورت موضوعی مرتب شده است، و یادداشت‌های مربوط به مقاله‌های حسابی، مقاله‌های هفت تا نُه هم طبق همین الگو تدوین شده‌اند.

1. Heiberg 2. Camerer 3. Hauber 4. Bretschneider 5. Hankel
6. Moritz Cantor 7. Hultsch 8. Paul Tannery 9. Zeuthen
10. Loria

سیر اصول در زبانها و تمدنها

هر کوششی برای ردیابی سیر «اصول» اقلیدس از سدهٔ سوم ق‌م در جریان تاریخ بعدی ریاضیات و علوم وظیفه‌ای است فوق‌العاده دشوار. هیچ اثر دیگری ــ علمی، فلسفی، یا ادبی ــ در گشودن راه خود از دوران باستان به زمان حاضر، به‌اندازهٔ این اثر زیر قلم ویراستاران و شارحان قرار نگرفته است. و با دلیلی متقن تقریباً به‌مدت دو هزار سال به‌عنوان متن معیار و نمونه هستهٔ بنیادین ریاضیات بکار رفته است. با این وصف، توجهی که تنظیم‌کنندگان و ویراستاران کتاب همواره نسبت به آن مبذول داشته‌اند امری در حد انتظار بوده است. پیچیدگی تاریخ این توجه نه فقط به سبب تنوع بسیار ترجمه‌ها است، بلکه تعدّد و تنوع حیرت‌انگیزی در انشا، اصلاح، تلخیص، تفسیر، تحشیه، و ترجمه‌های خاص برای منظورهای خاص وجود داشته است.

اصول در یونان باستان

تاریخ «اصول» درست در داخل ریاضیات بعدی یونانی آغاز می‌شود. مسلماً شرح نوشتن بر آثار مهم اقلیدس کاری نبود که متداول نباشد. براستی پرُوکلوس (۲۱۱ـ۱۳۶ ق‌هـ)، مؤلف بزرگترین شرح به زبان یونانی بر «اصول» که برجای مانده است، بارها از تلاشهای مشابه به‌وسیلهٔ اسلاف خود یاد می‌کند و آن هم به‌صورتی که آشکار می‌سازد که نوشتن آثاری دربارهٔ اقلیدس یا شرح و تفسیر و حاشیه بر کارهای او کاری رایج بوده و رواج این کار تا حدی بوده که فعالیتی ارزنده شمرده نمی‌شده است. چنین می‌نماید که در ذهن پرُوکلوس مقدار قابل‌ملاحظه‌ای حاشیه و نکته (احتمالاً بیشتر آنها در آثار فلسفی و علمی جداگانه) دربارهٔ «اصول»، و تعدادی شروح مخصوص دربارهٔ آن، انباشته بوده است. ما می‌دانیم که دست‌کم چهار تا از این گونه شرح، یا شرحهای جزئی، وجود داشته‌اند. قدیمترین شرح را هرُوْن اسکندرانی نوشته بود، ولی اطلاع ما از آن منحصر است به اشاره‌هائی معدود که خود پرُوکلوس به آن کرده، یا قطعه‌هائی که در شرح به زبان عربی به وسیلهٔ نیریزی (و. حدود ۳۰۱) نقل شده است. اما خیلی مهمتر و موسّعتر شرح پاپوس اسکندرانی است که اصل یونانی آن از میان رفته است اما ترجمهٔ عربی قسمتی از شرح که بر کتاب دهم نوشته شده بوده است در دسترس ما است. پرُوکلوس از فرفوریوس نوافلاطونی (حدود ۳۹۰ـ۳۱۸ ق‌هـ) هم یاد می‌کند، هرچند گمان نمی‌رود که کار او دربارهٔ اقلیدس به اندازه آثار هرُوْن و پاپوس اصولی و نافذ بوده باشد. آخرین، ازگمینوس رُودسی است که، هرچند شرحی خاص بر «اصول» ترتیب نداد، اثر از میان‌رفتهٔ او دربارهٔ ترتیب و آموزهٔ ریاضی (عنوان درست آن معلوم نیست) از این حیث درخور ذکر است که منبعی ارزنده در خدمت پرُوکلوس بوده است. این را هم باید گفت که سیمپلیکیوس، علاوه بر شرحهای معروفی که بر تعدادی از آثار ارسطو نوشت، کتابی به‌نام «شرحی بر مقدمات کتاب اقلیدس» تنظیم کرد و ما باز هم برای حفظ قطعاتی از آن مرهون نیریزی هستیم.

بر این کارهای رسمی‌تری که دربارهٔ آثار اقلیدس شده است باید تعداد قابل‌ملاحظه‌ای حاشیه‌های یونانی را افزود. بسیاری از آنها از شرحهای پرُوکلوس و پاپوس سرچشمه گرفته‌اند و منبع دومی به‌خصوص وقتی مهمتر است که حاشیه‌ها از کتابهای مفقود اثر او نشأت کرده باشند. حاشیه‌های دیگر از تاریخ مؤخرتر، اگر نگوییم که با ارزش کمتر، هستند، و تا سدهٔ چهاردهم م می‌رسند (که در آن شرحی دربارهٔ حساب که بارلام راهب بر کتاب دوم «اصول» نوشته است به‌عنوان موسّعترین این، باصطلاح، حاشیه‌ها برپا ایستاده است).

اما رویدادی که در مرحلهٔ یونانی انتقال «اصول» تأثیری پایاتر از همه دارد ویرایش بااصلاح مختصری است که به دست تئون اسکندرانی (سدهٔ چهارم م؛ با تئون نوافلاطونی ازمیری سدهٔ دوم م اشتباه نشود) انجام شده است. تلاشهای تئون متنی از «اصول» فراهم آورد که تا سدهٔ نوزدهم اساس همهٔ چاپهای آن اثر بود. خوشبختانه تئون، در شرحی که بر مجسطی بطلمیوس نوشته، تعیین کرده است که او مسؤول افزودن مطلبی است به گزارهٔ آخر مقالهٔ ششم در ویراستهٔ ($\grave{\epsilon}'\kappa\delta o\sigma\iota\varsigma$ خودش؛ زیرا که این اعتراف بود که اولین معیار را برای بازکردن کلاف سردرگم مسألهٔ آثار اقلیدس پیش از زمان تئون به‌دست دانشمندان داد. در ۱۱۸۷ فرانسوا پیرار خاطرنشان ساخت که یک نسخهٔ خطی متعلق به واتیکان (Vat.graec.190) که ناپوْلئون برای پاریس تملک کرده بود اضافه‌ای را که تئون به آن اشاره کرده بود ندارد. این امر، توأم با اختلافهای چشمگیر دیگری که آن نسخه با نسخه‌های معمولی ویراستهٔ تئون داشت، پیرار را به این نتیجه رسانید که ترجمه‌ای کهن‌تر از متن اقلیدسی را در برابر خود دارد. بنابر این اعتقاد، وی نسخهٔ واتیکان را با چند نسخهٔ دیگر برای تصحیح نسخهٔ *editio princeps*، اثر زیموْن گرونایوس (بازل، ۱۵۳۳) بکار برد. دیگران نسخه‌هائی اضافی را (که همه تئونی بودند)، یا نسخه‌های قدیمتر را، بکار بردند و به بهتر کردن کار پیرار ادامه دادند، اما فقط بعد از آن که ی. ل. هایبرگ به بازسازی «اصول» بر پایهٔ نسخهٔ واتیکان و تقریباً همهٔ نسخه‌های خطی دیگر پرداخت طبعی انتقادی از «اصول» (از ۱۸۸۳ تا ۱۸۸۸) فراهم آمد. هایبرگ به مقدار زیاد توفیق یافت که نه تنها بر تغییرات و اضافات بسیار تئونی دست یابد، بلکه توانست به مقدار قابل ملاحظهٔ تصرفات قبل از تئون پی ببرد. علاوه‌بر اعتبار نسخهٔ غیر تئونی واتیکان، او از قطعه‌های نوشته بر پاپیروس، ارجاعها و حاشیه‌های معروف قدیمی، و نیز اقتباس از، یا اشاره به، «اصول» برای بازسازی نسخهٔ «اصلی» اقلیدس استفاده کرد. کار او پایدار خواهد ماند.

اقلیدس در قرون میانهٔ عربی

مناسبترین شناسایی به‌چگونگی نشر «اصول» در جهان اسلام را می‌توان با نقل مقدمهٔ فهرست محمدبن اسحق‌بن ابی یعقوب ندیم کتابشناس سدهٔ دهم م به‌دست داد:

> وی، که هندسه‌دان بود، پسر نائوکراتس (نوقطرس)، پسر برنیقس، بود. هندسه تعلیم می‌داد، و پیش از ارشمیدس و دیگران در این زمینه به تألیف پرداخت. از جملهٔ کسانی بود که فیلسوفان ریاضی خوانده می‌شوند. اما دربارهٔ کتاب «اصول هندسه» او: عنوان آن $\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ (اسطروشیا) است که به معنی «اصول هندسه» است. دوبار به‌وسیلهٔ حجاج بن یوسف مَطَر به عربی ترجمه شد: ترجمهٔ اولی به هارونی معروف است، و ترجمهٔ دوم به مأمونی؛ و ترجمهٔ دومی است که مورد اعتماد تواند بود. علاوه بر این حنین بن اسحاق نیزکتاب را ترجمه کرد، و این ترجمه به نوبهٔ خود مورد تجدیدنظر ثابت بن قرهٔ حرّانی قرارگرفت. اضافه بر اینها، ابوعثمان دمشقی چند مقاله از این اثر را به عربی برگرداند؛ من مقالهٔ دهم را در موصل درکتابخانهٔ علی بن احمد عمرانی (که یکی از شاگردانش ابوالصقر قبیصی بود که به نوبت خود در زمان

ما مجلس درس مجسطی دارد) دیده‌ام. هرؤن بر این کتاب [یعنی «اصول»] شرحی نوشت و مشکلاتش را حل کرده است. نیریزی هم بر آن شرحی نگاشت، همچنین کرابیسی که بعداً از او یاد خواهم کرد. افزون بر اینها، جوهری (که از او هم بعد سخن خواهد رفت) شرحی بر همهٔ کتاب، از آغاز تا انجام، نوشت. شرح دیگری بر مقالهٔ پنجم به‌وسیلهٔ ماهانی نوشته شد. از نظیفِ پزشک شنیده‌ام که متن یونانی مقالهٔ دهم اقلیدس را دیده است و می‌گوید که تعداد گزاره‌هایش از آنچه ما داریم چهل تا بیشتر است (۱۰۹ گزاره) و او تصمیم دارد که آنها را به عربی برگرداند. یوحنای قسّ [یعنی کشیش] خبر می‌دهد که گزاره‌ای را دیده است که ثابت مدعیِ تعلق آن به مقالهٔ یکم است، و تأیید می‌کند که این گزاره در متن یونانی بوده است؛ و نظیف گفته که او آن را به وی [شاید یوحنا] نشان داده بوده است. وانگهی، ابوجعفر خازن خراسانی (که از او هم بعداً یاد خواهد شد) شرحی بر کتاب اقلیدس تنظیم کرد؛ و ابوالوفا نیز چنین کرد، هر چند شرح او به پایان نرسید. آنگاه مردی به نام ابن‌راهویه [rāheveyh] ارّجانی مقالهٔ دهم را، و ابوالقاسم انطاکی همهٔ اثر را شرح کردند و شرح انطاکی به نتیجه رسید [شاید منتشر شد]. به‌علاوه، سند بن علی شرحی نگاشت (که نُه مقاله و بخشی از مقالهٔ دهم به‌نظر ابوعلی رسیده بوده است) و ابویوسف رازی به اصرار ابن عمید مقالهٔ دهم را شرح کرد. کِندی در رساله‌ای به اسم «در اعراض کتاب اقلیدس» گفته است که کتاب به وسیلهٔ مردی به نام آپُلّونیوس نجار تنظیم شده بوده و او آن را در پانزده بخش طراحی کرده بوده است. آنگاه در زمانی که آن کتاب کهنه شده و احتیاج به تجدیدنظر پیدا کرده بوده است یکی از پادشاهان اسکندریه به آموختن هندسه دل بست. در آن زمان اقلیدس زنده بود و پادشاه او را مأمور کرد که بر روی آن کتاب کار کند و بر آن شرح بنویسد؛ اقلیدس چنان کرد و به چیزی دست یافت که بعد به او [به‌عنوان مؤلف] نسبت داده شد. بعد از مدتی هوپسیکلس، که از شاگردان اقلیدس بود، دو مقالهٔ دیگر، چهاردهم و پانزدهم، را کشف کرد و به نزد پادشاه آورد و آنها هم به مقاله‌های دیگر علاوه شدند. و همهٔ این ماجرا در اسکندریه روی داد. در میان نوشته‌های دیگر اقلیدس است: کتاب «در ظواهر» (یعنی «نمودها»)؛ کتاب «در اختلاف تصاویر» (یعنی «نورشناسی»)؛ کتاب «در اندازه‌های معلوم» (یعنی معطیات)؛ کتاب «دربارهٔ نغمه‌ها»، که به نام «در موسیقی» معروف است (اصالتش مورد تردید)؛ کتاب «در تقسیم»، که ثابت در آن تجدید نظر کرده است، کتاب «در کاربردهای عملی» (یعنی پُوریسم) (اصالتش مورد تردید)؛ کتاب «در قانون»؛ کتاب «در سنگین و سبک»؛ کتاب «در ترکیب» (اصالتش مورد تردید)؛ کتاب «در تحلیل» (اصالتش مورد تردید).

گزارش ابن ندیم آشکار می‌سازد که در آخر سدهٔ چهارم (دهم م) چه توجهی به اقلیدس مبذول می‌شده است: دو ترجمهٔ کامل، که هر یک مورد تجدیدنظر قرار گرفته بود، دو ترجمهٔ جزئی، و انبوهی از انواع شرح و تفسیر. علاوه‌بر این، این فعالیت جوشان دربارهٔ «اصول» برای دست‌کم ۳۰۰ سال دیگر ادامه داشت. اما پیش از آن که چهره‌های برجستهٔ این تاریخچهٔ بعدی را نمایان سازیم لازم است بعضی از سیماهای گزارش ابن ندیم دربارهٔ تلاشهائی که برای وارد ساختن اثر اقلیدس در جریان عمدهٔ ریاضیات اسلامی شده بوده است شرح داده شود. به‌عنوان مقدمه شاید درخور توجه باشد نقل قول کاملاً تخیلی کندی دربارهٔ چگونگی تنظیم «اصول» به‌وسیلهٔ اقلیدس که، چنان که هیث نیز تأیید می‌کند، ممکن است ناشی از سوء تعبیر مبهمی از مقدمهٔ یونانی که هوپسیکلس برمقالهٔ چهاردهم نوشته است باشد. اما مهمتر از عقاید اسلامی دربارهٔ اصل و منشأ «اصول»، تاریخچهٔ چگونگی و زمان ورود آن به جهان عربی زبان است. در اینجا اطلاعات ابن ندیم بیشتر درخورد اعتماد است. نخستین ترجمه به وسیلهٔ حجّاج (**شکوفایی**، حدود ۱۶۵ـ۲۱۲)، چنان که از توصیف ابن ندیم برمی‌آید، در زمان خلافت هارون رشید (۱۶۵ـ۱۸۸) و به اصرار وزیرش یحیی‌بن‌خالدبن‌برمک صورت پذیرفته بوده است. این را هم می‌دانیم که نسخه‌ای خطی از «اصول» به‌وسیلهٔ منصور خلیفه (۱۳۳ـ۱۵۴) از امپراتور بیزانس گرفته شده بوده است، هر چند ظاهراً در آن زمان قصد ترجمهٔ آن به عربی در میان نبوده است. و این توجه خلیفگان عباسی به علوم از اینجا آشکارتر می‌شود که حجاج توجه مأمون (۱۹۲ـ۲۱۲) به ترجمهٔ دوم کوتاهتری را محتمل دانسته است. و ترجمهٔ اخیر است که ظاهراً برجای مانده است (مقاله‌های یکم تا ششم و یازدهم تا سیزدهم). شش مقالهٔ اول در نسخه‌ای خطی در لیدن همراه با شرح نیریزی موجود است، و از نکات توضیحی این اثر بر ما معلوم می‌شود که حجاج در تهیهٔ ترجمهٔ دوم خود از «اصول» «زواید را کنار گذاشته، جاهای خالی را پر کرده، غلطها را تصحیح نموده یا از میان برده، تا حدی که کتاب را کامل کرده و آن را متقن ساخته و خلاصه نموده و به‌صورتی که در این ترجمه دیده می‌شود در آورده است. این ترجمه برای خواص است، بی آن که در جوهر کتاب تصرفی شده باشد، ولی ترجمهٔ اول برای مردم عامی است». هرچند ترجمهٔ دومی که از حجاج در دست داریم هنوز مورد تحلیل کامل قرار نگرفته است، مسلم است که ذهن مترجم آن متوجه مفهوم نوعی کتاب درسی بوده است. زیرا که، با ذکر چند مثال، گرایش به مشخص ساختن موارد جداگانهٔ یک گزاره و استفاده از مثالهای عددی برای روشن ساختن استدلالها نشانهٔ تعلق خاطر به علایق آموزگارانه‌ای است که صفت بارز اقلیدس عربی و ترجمه‌های لاتینی قرون وسطاییِ منبعث از آن است.

ترجمهٔ دوم و تازه‌تر اثر اقلیدس، چنان که ابن ندیم می‌گوید، کار حنین بن اسحاق پسر اسحاق بن حنین، نامورترین مترجم از یونانی به عربی، بوده است. و در این مورد هم روایت دیگری از این ترجمه به‌وسیلهٔ دانشمندی تهیه شد که خود در تاریخ ریاضیات اسلامی مقامی ارجمند دارد، یعنی ثابت بن قره. با این که ظاهراً هیچ نسخه‌ای از ترجمهٔ اصلی ثابت برجای نمانده است، ما مالک تعدادی نسخهٔ خطی از روایت اسحاق‌ـثابت هستیم. مطالعهٔ بیشتری در این نسخه‌های خطی لازم است تا بتوان با تفصیلی بیشتر از سرشت این ترجمه سخن گفت، اما می‌دانیم که ثابت در کار مجدّدی که در مورد این ترجمه کرده نسخه‌های خطی یونانی را مورد استفاده قرار داده بوده است. (گواه بر این مدعا نکته‌ای است که در حاشیهٔ ترجمه‌ای عبری از «اصول» نوشته شده و تأییدی است که خود ثابت در مورد مراجعه به متن یونانی کرده است.) معلوم نیست که اسحاق (یا حتی ثابت) به مقدار زیاد بر یکی از ترجمه‌های حجاج به‌عنوان راهنما متکی شده یا نشده باشند. زیرا که در مقایسه و تطبیقی که مارتین کلامرؤت، اولین دانشمندی که دو ترجمه را در عمق با هم سنجید، میان یک نسخهٔ خطی که احیاناً مقاله‌های یازدهم

تا سیزدهم حجاج است با انشای اسحاق‌ـثابت بعمل آورد تصدیق کرد که اختلاف بین آنها ناچیز است. اما شاید، با فرض این که اِسناد نسخهٔ خطی مقاله‌های یازدهم تا سیزدهم از طرف کلامروْت به حجاج درست باشد، نبودن تفاوت بین دو ترجمه فقط در مقاله‌های آخر آن اثر باشد.

در اینجا این نکته درخور یادآوری است که عقیدهٔ کلامروْت این بود که ترجمهٔ عربی، به‌صورتی که در دست است، از نسخه‌های خطی یونانی موجود به متن نزدیکتر است. اما هایبرگ مقدار قابل توجهی شواهد علیه گفتهٔ کلامروْت ارائه کرد و آشکارا از بیشتر قابل اعتماد بودن روایت یونانی جانبداری کرد. در همان وقت او بستگی ترجمهٔ اسحاق‌ـثابت را با نسخهٔ خطی دور از اصل یونانی مسلم ساخت.

برای تکمیل گزارش ابن ندیم دربارهٔ ترجمه‌ها باید گفت که ابوعثمان دمشقی (**شکوفایی**، حدود ۲۸۷ـ۳۱۱) نه فقط بخشهائی از «اصول» بلکه شرح پاپوس بر مقالهٔ دهم را نیز ترجمه کرد (که فقط این یکی باقی مانده است). علاوه‌بر این، چنین می‌نماید که گزارش ابن ندیم از قصد نظیف‌بن یُمن (و. حدود ۲۶۹) به ترجمهٔ مقالهٔ دهم در اضافات و تغییرات گوناگونی که به نام نظیف از یونانی ناشی شده و به عربی وجود دارد منعکس گردیده است. و نیز باید افزود که از چشم ابن ندیم دور مانده است که مقاله‌های مشکوک چهاردهم و پانزدهم را قسطا بن لوقا، ریاضیدان و اخترشناس بغداد، ترجمه کرده است.

فهرست کامل ترجمه‌های کارهای مهم اقلیدس به عربی فقط آغازی است برای طرح برنامهٔ فعالیت مربوط به «اصول» در ریاضیات و علوم اسلامی. شرحهای متعددی که ابن ندیم از آنها یاد کرده است گواه صادق بر این گفته است. اما پیش از آن که بار دیگر دقّت را به این شرحها معطوف سازیم جای آن است که به صورتهای دیگر رفتار تازیان در مورد آثار اقلیدس توجه کنیم. کاملاً متمایز از آنچه ترجمه (نقل) نامیده می‌شود، اعمال دیگری چون خلاصه کردن (اختصار یا مختصر) و نگارش (تحریر) و تغییر جزئی (اصلاح) «اصول» نیز صورت گرفته است.

بی‌گمان مشهورترینِ اختصارها کار فیلسوف ایرانی ابن‌سینا در بخش هندسهٔ دایرةالمعارف حجیم فلسفی او، یعنی کتاب الشفا، است. هر پانزده مقالهٔ «اصول» در آن آمده است، اما با اثباتهای مختصرتر. تنها ابن‌سینا نبود که کوشید اثر اقلیدس را به‌صورت مقدار فشرده‌تری تقطیر کند؛ بلکه، چنان که دیدیم، حجاج کوتاهتر بودن ترجمهٔ دوم خود را یکی از فضیلتهای آن می‌شمرد؛ و خلاصه‌های دیگری به‌وسیلهٔ مظفر اسفزاری (و. پیش از ۵۰۱)، همکار عمر خیام، و، اگر روایت ابن خلدون مورخ قرن هشتم (مقدمه، ششم، ۲۰) را بپذیریم، به‌وسیلهٔ ابن صلت نامی (شاید مراد پزشک و اخترشناس و منطقی مسلمان اسپانیایی ابوصلت [۴۴۶ یا ۴۴۷ـ۵۱۳] باشد) بعمل آمده است.

مهمتر از این، در درون تاریخ ریاضیات اسلامی «تحریر»های مختلفی است که از «اصول» بعمل آمده است. معروفترین تحریرها از نصیرالدین طوسی فیلسوف و دانشمند ایرانی است که از آثار متعدد دیگر یونانی دربارهٔ ریاضیات و اخترشناسی و نورشناسی همین گونه تحریرها ترکیب کرد. می‌دانیم که دست‌کم یک تحریر اصول اقلیدس در ۶۲۷ به‌وسیلهٔ طوسی کامل گردیده بود، و هر پانزده مقالهٔ اقلیدس را شامل بود و در تهیه‌اش از ترجمه‌های حجاج و اسحاق‌ـثابت، هردو، استفاده شده بود. اما «تحریر» دیگری هم از «اصول» هست که برطبق سنّت جاری به طوسی نسبت داده می‌شود. با آن که این تحریر فقط مقاله‌های یکم تا سیزدهم را در بردارد، خیلی مشروحتر است از تحریر ۶۲۷، که بیشتر طرف رجوع بوده است. این اثر در ۱۵۹۴/۹۷۳ در رم چاپ شد، و ما فقط دو نسخهٔ خطی از این تحریر سیزده مقاله‌ای را می‌شناسیم (که هر دو به کتابخانهٔ مدیسه لوْرنتسی فلورانس تعلق دارند.) با وجود این، چون در یکی از این نسخه‌های خطی تصریح شده است که کار در ۱۰ محرم ۶۹۸ (= ۴ آبان ۶۷۷) به پایان رسیده است و چون نصیرالدین طوسی در ۶۵۳ درگذشته بوده است به این دلیل (و به‌دلایل دیگری هم که در دست است) در اِسناد این تحریر به او جدّاً جای تردید است. باری هر نتیجه‌ای که سرانجام دربارهٔ تألیف این تحریر بتوان گرفت، دیباچهٔ آن، از آن حیث که چه دلایلی برای ترکیب این گونه تحریرها از «اصول» در کار بوده، و نیز از حیث مطالبی که احتمالاً به آن افزوده شده است، بسیار آموزنده است. مقدمه با نکته‌ای چند دربارهٔ مقام هندسه در طبقه‌بندی علوم و چند گفتهٔ تخیلی دربارهٔ زندگی اقلیدس آغاز می‌شود و، با اشارهٔ مخصوص به ترجمه‌هائی که حجاج و (تجدیدنظری که) ثابت کرده بوده‌اند، به وصف مبسوطتری از آنچه دانشمندان اسلامی در «اصول»، و با آن، کرده‌اند می‌پردازد. این اشاره، که در حکم «تاریخچهٔ» اقلیدس عربی است، حکایت می‌کند که بیشتر کوشش در راه از میان بردن مشکلات متن و روشن ساختن نقطه‌های تاریکشان صورت می‌پذیرفته است. مثالهائی واردشده بود تا آنچه را غامض است روشنتر سازد، و در جهت مقابل، بعضی مطالب که در حکم توضیح واضحات بود کنارگذاشته شده بودند. بعضی گزاره‌های مربوط به هم ترکیب، و به‌صورت یک گزاره عرضه شده بودند، فرضهای مقدّر تصریح گردیده و مراقبت شده بود که (دست‌کم با تعداد) مشخص شود که در هر استدلال از کدام قضایای قبلی استفاده شده است. و، به گفتهٔ دیباچه، این کارها در متن ترجمه‌ها عمل نگردیده، بلکه در حاشیه‌ها، و حتی بین سطرها، به آنها پرداخته شده بود. مؤلف «تحریر» حاضر می‌گوید که گوناگونی و تعدد مطالبی که به نحوی که گفته شد فراهم آمده بود به حدی بود که سخت نیاز به توضیح و تنویر داشت، و نیت خود را به تنظیم متن اصلیِ واحدِ توأم با شرح و تفسیر لازم فاش می‌سازد. تحریری که نتیجه شد نیاز به غور و دقّت بیشتری دارد تا طیف کامل انواع مطالب اضافی را که شامل است نمایان سازد، اما از دیباچه‌ای که خلاصهٔ آن را آوردیم آشکار است که این تحریر علاوه بر سهمی اصلی که خود برعهده گرفته است نکات متعدد شبیه به آنچه را مؤلف در آثار اسلاف خود دیده است در بر دارد.

تحریر دیگری از «اصول» نام محیی‌الدین مغربی را بر خود دارد؛ او ریاضیدان و اخترشناسی بود که هم در سوریه کار می‌کرد و هم در مراغه و از او است ویرایشها (در حقیقت تهذیبها)ی آثار یونانی مربوط به مثلثات کروی (تئودوْسیوس و منلائوس) و «مخروطات» آپولوْنیوس، و کار مشابهی به نام خلاصهٔ مجسطی. تحریر او ممکن است در زمان کوتاهی بعد از تحریر پانزده مقاله‌ای اصیل طوسی نوشته شده باشد، زیرا که در نسخه‌ای خطی که تاریخ ۶۳۹/ ۱۲۶۰ـ۱۲۶۱ دارد یافته شده است. به‌علاوه، این تحریر شامل دیباچه‌ای است که از جهات متعدد شبیه است به دیباچهٔ تحریر دوم (۶۷۷) و ظاهراً، به‌غلط، به طوسی نسبت داده شده است. در این نیز از غلطهائی که در تلاشهای قبلی برای پرداختن به «اصول» اقلیدس ارتکاب شده است شکایت می‌شود، اما خصوصیت آن در این است که دست‌کم قسمتی از گناه را متوجه ابن‌سینا و نیشابوری نامی و ابوجعفر خازن (که در کتاب ابن ندیم نام برده شده است) می‌سازد. کار مغربی به قصد آن تنظیم شده است که این غلطها را

تصحیح کند و، به‌خصوص، همهٔ شکوکی را که به‌وسیلهٔ اقلیدس بوجود آمده بوده است شرح دهد و مقدمات (لمهای) دیگری را که برای اثباتهای گوناگون ضروری بوده است فراهم سازد. خلاصهٔ کلام، می‌توان گفت که اساس تحریر مغربی، و تحریرهای دیگری که از آنها یاد شد، ترجمه‌های موجود از «اصول» بوده است که مقدار زیادی مطالبی به آنها افزوده شده است که در شرحهای قبلی وجود داشته یا به نحوی ابتکاری بوجود آمده، و غرض از آنها تهیهٔ متن بهتری از اثر اقلیدس بوده است که در نهایت امر بهتر از کتاب خود اقلیدس بکار تدریس بخورد. دقیقاً محتوای این «اصول» بهبودیافته و خصوصیات برجستهٔ آن را پس از تحلیل بسیار بیشتری از متون مربوط می‌توان تشخیص داد. این گفته در مورد ترجمه‌های حجاج و اسحاق ثابت نیز صادق است.

تعیین مشخصات نوع سوم انشای «اصول»، که در بالا نام «اصلاح» بر آن نهاده شد، ورای آنچه از عنوان آن برمی‌آید، کاری است دشوار زیرا که نسخه‌های شناخته‌شده‌ای از این گونه که دانشمندان اسلامی به آنها اشاره کرده‌اند برجای نمانده است. مثلاً گفته شده است که کِندی علاوه‌برکتابش به‌نام اغراض کتاب اقلیدس، اصلاحی بر «اصول» نوشته بوده است. از همین گونه اصلاحها به‌وسیلهٔ جوهری اخترشناس و اثیرالدین ابهری فیلسوف و دانشمند ایرانی (و. ۶۴۴) نوشته شده است، ولی ما فقط به‌وسیله قسمتهائی که در کتابهای دیگر نقل شده است به‌وجود آنها وقوف یافته‌ایم. علاوه بر این در ارتباط با اصلاح «اصول» باید گفت که کمک معدودی از ریاضیدانان اسلامی به انتقال اقلیدس دست‌کم به صورت اضافات (زیادات) خاصی انجام شده است که اغلب به گزاره‌های خاصی در داخل متن صورت پذیرفته است.

باقی می‌ماند تعداد زیادی شرحهای عربی که متناوباً تفسیر یا شروح بر اقلیدس نامیده شده‌اند. در واقع می‌توان دنبالهٔ آنها را خیلی بیشتر از آنچه در فهرست ذکر شده است ادامه داد. ابن ندیم در جائی دیگر از آن کتاب می‌نویسد که، اگر منابع درست باشد، اولین شرحی بر اقلیدس که به چهرهٔ برجستهٔ کیمیایی عرب، یعنی جابربن حیّان، نسبت داده شده چه بوده است. اما روشن است که این خطائی است که نویسنده‌ای به‌جای جابربن افلح، اخترشناس سدهٔ هفتم، به متن الحاق کرده است. اما وقتی که به‌صورت اسامی شرحهای اصلی که درکتاب ابن ندیم نام برده شده‌اند بازگردیم و آن را به‌وسیلهٔ اطلاعاتی که از منابع دیگر بیرون کشیده شده‌اند کامل کنیم، تعداد آن قدر قابل ملاحظه می‌شود (در حدود پنجاه، که بیشتر از نیمی از آنها به این یا به آن صورت برجا مانده‌اند) که در اینجا فقط به مهمترین آنها می‌توانیم اشاره کنیم. از میان مهمترین کسانی که ابن ندیم ثبت کرده است ماهانی، ریاضیدان و اخترشناس ایرانی، است که مقاله‌های دهم و پنجم را شرح کرده است، و دیگر شرح نیریزی است که اندکی بعد از او می‌زیسته است. شرح نیریزی، که منبعی است برای شروح از کتابهای از میان رفتهٔ یونانی، در سده دوازدهم م به‌وسیلهٔ ژرار کرمونایی به لاتینی برگردانده شد. وقتی که از مقدمهٔ فهرست دربارهٔ آثار اقلیدس فراتر رویم باید از شرح دقیقی که ابن مُعاذ جَیّانی، ریاضیدان اندلسی، بر مقالهٔ پنجم نوشته است یاد کنیم. این شرح، علاوه بر خود ریاضیات یونانی، متضمن تعریف بسیار خوبی از برابری نسبتها است که ائودوکسوس بیان کرده بود. در حقیقت، در ترجمه‌های لاتینی اقلیدس در سده‌های میانه، بجز چند توضیح کوتاه در حواشی، این تعریف قبل از آیزک برو در سده هفدهم بندرت در غرب درست فهمیده شده بود. در پایان سخن باید خاطرنشان ساخت که بعضی از چهره‌های اسلامی که در رشته‌های دیگر مقامی ارزنده داشتند مناسب دیدند که به شرح «اصول» پردازند. از آن جمله از دو فیلسوف، کندی و فارابی، می‌توان نام برد که بر مقاله‌های یکم و پنجم شروحی نوشتند. و نیز باید به رساله‌هائی که ابن هیثم، مؤلف کتاب المناظر، که اثر بسیار مهمی دربارهٔ نورشناسی است، در مورد اقلیدس نوشته است اشاره کرد؛ و نیز باید از شروحی که عمر خیام، ریاضیدان و شاعر نامدار ایرانی، بر مسائل موازیها و نسبتها و تناسب مرقوم داشته است یاد کرد.

اگر از نویسندگان شرحها به مسائل و موضوعهائی که در آنها مورد بحث قرارگرفته است عطف توجه کنیم طرح تا حدی آگاهی بخش تری دربارهٔ آنها می‌توان رسم کرد. با این که تعدادی از آنها که مورد ویرایش قرار گرفته است، تا چه رسد به پژوهش، آن‌قدر کم است که کوشش برای آزمودن محتوای آنها بسیار عظیم خواهد بود، باز ممکن است دست‌کم به زمینه‌های مورد علاقهٔ بیشتر نظری افکند. در آغاز باید بصراحت گفت که شرحهائی که بر «اصول» نوشته شده‌اند بیشتر بر قسمتهائی از آن بوده است تا بر کل آن. در نتیجه، همان گونه که در تقریباً همهٔ شروح بر آثار اقلیدس انتظار می‌رود، تلاشی بزرگ صرف اندیشیدن دربارهٔ مقدمات شده است، یعنی دربارهٔ تعریفها و اصلهای متعارف و اصلهای موضوع (مثلاً در رساله‌های ابن کرابیسی [گزارش ابن ندیم] و فارابی و ابن هیثم و خیام که جلوتر به آنها اشاره شد). به‌عنوان طبقه‌بندی فرعی این گونه علائق باید به رساله‌های مخصوص یا جزئهائی از شرحهای عالیتر تکیه کرد که بر یک رشته تلاشهائی که قبلاً در ریاضیات یونانی برای اثبات اصل موضوع توازی به‌عمل آمده بود مبتنی بوده‌اند. بدین‌ترتیب، برای آن که به بیان جزئی از کاری که انجام شده است اکتفا کنیم، به دو رسالهٔ جداگانه که ثابت بن قره در این باره نوشته است، و اثری یک جلدی از نیریزی، و تحریرهائی که هم مغربی و هم طوسی فراهم آورده‌اند [و در مورد اخیر، تحریر اصیل و تحریر مشکوک، هر دو] اشاره می‌کنیم.

چون از علاقه به مقدمات بگذریم، در دم به تعداد بنسبت زیادی از شروح دربارهٔ مقاله‌های پنجم و دهم برمی‌خوریم. هرچند پژوهش بسیار لازم است تا بتوان به موجبات این همه دقت که متوجه این دوکتاب شده است پی برد، بآسانی می‌توان مقدمتاً حدسی زد. از سوئی دشواری فوق‌العادهٔ عمل با مقدارهای گنگ در مقالهٔ دهم به توضیح و تشریح بیشتری نیاز داشت تا خوب فهمیده شود؛ از سوی دیگر نقش مرکزی عمده‌ای که نظریهٔ تناسب، موضوع مقالهٔ پنجم، در سراسر هندسه برعهده دارد شاید ریاضیدانان اسلامی را، بحق، بر آن داشته بوده باشد که این مقاله را اساسی‌تر از کتابهای دیگر پندارند. وقتی که این دلیل دست به دست این نکته دهد که دریافت ارزش تعریفی که ائودوکسوس برای نسبتهای مساوی داده بود و در مقالهٔ پنجم آمده است با اندکی ابهام همراه است حق تقدّمی به این مقاله درنظر شارحان بالقوّه می‌بخشیده است.

خصیصه‌ای از سلسلهٔ شروح عربی «اصول» را باید در اینجا گفت: با این که عدهٔ بیشتر شارحان ریاضیدان یا اخترشناس یا پزشک (یا تلفیقی از اینها) بودند، اقلیتی از آنان را نه چنین کسان بلکه فیلسوفان تشکیل می‌دادند. البته، فیلسوفی در سطح کِندی همان قدر به مطالب علمی علاقه داشت که به موضوعهای فلسفی. اما دیگران، از قبیل فارابی و ابن سینا، علاقه یا شمّ علمی او را نداشتند. با وجود این، آنان نیز بر «اصول» شرح می‌نوشتند یا آن را خلاصه می‌کردند. این را هم می‌دانیم که فیلسوف و کلامی شافعی فخرالدین رازی (۵۲۸ـ۵۸۹) کتابی دربارهٔ مقدمات اقلیدس به رشتهٔ تحریر کشید، و ابن رشد، فیلسوف و طبیب قرطبی، که از شارحان والا مقام آثار ارسطو بود،

رساله‌ای در این باره نوشت که برای مطالعهٔ مجسطی بطلمیوس دانستن چه مقدار از کار اقلیدس بایسته است. البته جای این احتمال هست که آثاری که فیلسوفان دربارهٔ «اصول» برجای گذاشته‌اند (هر چند با نهایت تأسف اکثر آنها از بین رفته است) از کارهای ریاضیتر شارحان دیگر کمتر نافذ و دقیق باشند؛ با وجود این، در جهت نشان دادن اهمیت میزان نفوذ اقلیدس در اندیشهٔ اسلامی درخور اعتنایند. برروی هم، می‌توان ثابت کرد که مرحلهٔ عربی تاریخ «اصول» نه تنها دارای متنوع‌ترین وجوه، بلکه از همهٔ مراحل دیگر با خلّاقیتی بیشتر توأم بوده است.

به‌نظر می‌رسد که همهٔ ترجمه‌هائی که در قرون میانه در خاور نزدیک از «اصول» شده بر این یا آن ترجمهٔ عربی که ذکرشان گذشت مبتنی بوده باشند. مسلماً چنین است در مورد ترجمهٔ فارسی «تحریر» پانزده مقاله‌ای طوسی که (در ۶۶۱ صورت کمال پذیرفت و) ظاهراً به‌وسیلهٔ شاگردش قطب‌الدین شیرازی (۶۱۵ـ ۶۹۰) انجام شده است. و نیز، با این که تعداد بنسبت زیادی تلخیصها و نگارشهای خاصی از «اصول» به زبان عبری وجود دارد، به‌نظر می‌رسد که ترجمه (یا ترجمه‌های) عبری سده هفتم از ترجمهٔ تجدیدنظر شدهٔ اسحاق‌ـ ثابت گرفته شده و در حاشیهٔ آنها به ترجمهٔ حجاج اشاره شده باشد. هنوز روشن نیست که ما دو ترجمهٔ متمایز عبری در دست داریم یا نتیجهٔ کار مشترک ممتد (تقریباً از ۶۳۳ تا ۶۴۹) دو دانشمند، موسی بن تبّون و یعقوب بن محیر بن تبّون.

و بیشتر از اینها موضوع ترجمهٔ سریانی اقلیدس مورد بحث و جدل است. اغلب اتفاق می‌افتاد که ترجمه‌های آثار یونانی به عربی با یک میانجی سریانی صورت می‌پذیرفت. اما جای تردید است که این گفته در مورد ترجمهٔ «اصول» نیز صدق کند. قطعاتی از یک انشای سریانی این اثر مربوط به سدهٔ پانزدهم یا شانزدهم در اختیار ما است، و مقایسه این قطعات با ترجمهٔ عربی آشکار از نوعی بستگی بین آنها حکایت می‌کند، اما هیچ بیّنهٔ قطعی در دست نیست که این بستگی در چه جهت سیر کرده است. اگر کسی بپرسد که قدمت این اثر سریانی چقدر است براساس قراین لازم می‌آید که به سدهٔ یازدهم یا دوازدهم م عقب برویم. مثلاً می‌دانیم که ذوفنون سریانی ابوالفرج (بار هبرایوس، ۶۰۵ـ۶۶۵) در ۶۴۷ در مراغه دربارهٔ اقلیدس سخنرانی کرد. علاوه بر این، در تحریر مشکوک ۶۷۷ طوسی و در جزوهٔ ریاضی ابن سَری (و. ۵۳۲) به ترجمه‌ای از «اصول» به زبان سریانی اشاره رفته است. دست آخر باید به ترجمهٔ قطعاتی از «اصول» به زبان ارمنی اشاره کرد، زیرا که گمان می‌رود آن نیز به ترجمهٔ عربی (اسحاق‌ـ ثابت) مرتبط باشد. چنین می‌نماید که این ترجمهٔ کتاب اقلیدس کار گرگوری ماگیستروس (و. ۳۳۷) باشد زیرا که می‌بینیم در یکی از نامه‌هایش بشارت داده است که ترجمهٔ «اصول» را آغاز کرده است. اگر به آنچه گذشت علاوه کنیم که، به گفتهٔ یکی از دانشمندان، گرگوری فقط یونانی و سریانی می‌دانست، نه عربی، به‌نظر می‌رسد که وی پایهٔ ترجمهٔ خود را به نحوی از انحا بر ترجمهٔ سریانی مورد بحث قرار داده است. از اینجا جوابی نهایی برمی‌آید که تاریخ ترجمه ضمیمهٔ سدهٔ یازدهم م است، اما قرینهٔ دیگری در دست ما نیست که آن را با قطعیت به تاریخی جلوتر از آن نسبت دهیم. فقط می‌توان تعیین کرد که فورلانی ویراستار این قطعات سریانی داوری کرده بود که این قطعات ارتباط بسیار نزدیک با ترجمهٔ عربی حجاج دارند و از این نظر به نحوی از آن اثر مشتق شده‌اند. او دلیل ظاهراً مخالف را که ممکن است از نقل به کلمهٔ بعضی اصطلاحات یونانی ترجمهٔ سریانی گرفت کنار می‌گذارد، زیرا که این عمل غالباً در آثار سریانی که می‌دانیم بر اصلهای عربی مبتنی هستند نیز دیده می‌شود. اما خانم کلربوْدو، دانشمند دومی که این قطعات را مورد بررسی قرار داده است، مدعی است که بین این ترجمه و ترجمهٔ اسحاق‌ـ ثابت (که مورد پژوهش فورلانی قرار نگرفته بود) پیوندی قطعی است و نتیجه گرفته است که ترجمهٔ سریانی بر ترجمهٔ اسحاق تقدم داشته و به‌عنوان رابطی بین او و متن یونانی بکار برده شده بوده است. با وجود این، به‌نظر می‌رسد که نتیجه را باید غیر قطعی تلقی کرد تا وقتی که مقایسهٔ تازه‌ای بین هر دو ترجمه عربی بعمل آید و همهٔ قرینه‌ها بتفصیل مورد استفاده قرار گیرند. تا آن زمان معقولتر می‌نماید که به این نتیجه تمسک شود که ترجمهٔ سریانی منبعی عربی داشته است، نه بعکس.

اقلیدس لاتینی در قرون میانه: مرحلهٔ یونانی‌ـلاتینی

اوّلین اشارهٔ معلوم به اقلیدس به لاتینی از کیکروْ [به فرانسوی سیسروْن] در *De oratore* (سوم، ۱۰۳) است که مسلماً خیلی سال پیش از آن که برای ترجمه «اصول» اقدامی شود نوشته شده بوده است. تا آنجا که منابع موجود حکایت می‌کنند قسمت بعدی تاریخ لاتینی اقلیدس با قطعه‌ای آغاز می‌گردد که منتسب است به کنسوْرینوس اختربین سده سوم م. آنچه در این قطعه هست و از «اصول» اقتباس شده است می‌تواند در قسمتهائی از آثار اقلیدس در *De nuptiis* مارتیانوس کاپلا انعکاس یافته باشد. هر چند برخی مورخان احساس می‌کنند که مارتیانوس هم منبعی یونانی را در اختیار داشته است و هم تمام (یا دست کم اجزائی) از «اصول» به لاتینی را.

بیّنهٔ دومی در تاریخ برگرداندن آثار اقلیدس به لاتینی قطعه‌ای کاغذ پوستی متعلق به قرن پنجم م است که نوشتهٔ قبلی آن را پاک کرده و به‌جای آن مطلب تازه‌ای نوشته‌اند و متعلق است به بیبلیوْتکا کاپیتوْلاره در ورونا. چون در سدهٔ نهم م با مواد شیمیایی روی آن کار کرده‌اند اکنون خواندن مطالب آن ناممکن است. با وجود این مسلم شده است که حاوی قطعاتی از ترجمه مقاله‌های دوازدهم و سیزدهم «اصول» است. خیلی کم می‌توان با اطمینان خاطر مطلبی دربارهٔ ترجمه گفت، هر چند م. گیموْنات، تازه‌ترین ویراستار آن، اصرار ورزیده است که تاریخ آن اندکی دیرتر است و گفته است که کسی که به ترجمهٔ قطعه‌هائی که در آن است پرداخته است بوْئتیوس بوده است.

این فکر خواه درست باشد و خواه نباشد ما باید اکنون به مسألهٔ بوْئتیوس و اقلیدس بازگردیم. می‌دانیم که بوْئتیوس چنین ترجمه‌ای کرده است زیرا که کاسیوْدوْروس در *Institutiones* خود به آن اشاره می‌کند (دوم، ۶، ۳: «دربارهٔ آنچه از اقلیدس به زبان رومی ترجمه شد همان که مرد عالیقدر بوْئتیوس انجام داد») و نیز در نامه‌ای از تئودوْریک به بوْئتیوس (*Variae*، یکم، ۴۵، ۴) محفوظ است و در آن وجود ترجمه بار دیگر تصدیق شده است. اما ما خیلی دور از آنیم که اطلاع کافی دربارهٔ حدود و چگونگی این ترجمه داشته باشیم زیرا که هندسه‌های بوْئتیوس—یا به بیان بهتر، مطالب هندسی او—که به ما رسیده‌اند به‌صورت قطعاتی هستند که دیر تهیه شده‌اند. اساساً مستخرجهائی که از ترجمهٔ بوْئتیوس در اختیار و تملک ما است از چهار منبع رسیده است که به‌مقداری قابل ملاحظه بعد از تاریخ تلاشهای عملی او در راه ترجمه فراهم آمده بوده‌اند: (۱) مستخرجهائی از نگارش سوم مقالهٔ دوم *Institutiones* کاسیوْدوْروس (سدهٔ هشتم یا نهم م)؛ (۲) مستخرجهائی از تعدادی دستنویسهای نگارش بعدی *Agrimensores* که

مجموعه‌ای (گردآوری شده در حدود ۴۵۰ م) است مربوط به مساحی، تقسیم زمین، نقشه‌کشی، قواعد زمینداری و امثال اینها (حدود سدهٔ نهم م)؛ (۳) مستخرجهائی از باصطلاح هندسهٔ پنج مقاله‌ای «بوْئتیوسی» (سدهٔ هشتم م)؛ (۴) مستخرجهائی از باصطلاح هندسهٔ دو مقاله‌ای «بوْئتیوسی» (سدهٔ یازدهم م). نکتهٔ خاصی از همهٔ محتوای دو منبع آخر، که با نام بوْئتیوس در زمرهٔ مقاله‌ها باقی مانده‌اند، می‌توان به‌دست آورد. مجموعهٔ اول، پنج مقاله‌ای، مشتمل است بر مطالب مربوط به هندسهٔ زمین در مقاله اول و جزئی از مقاله پنجم، مستخرجی از *Arithmetica* ی بوْئتیوس در مقاله دوم، و مستخرجی از ترجمهٔ او از اقلیدس در مقاله‌های سوم و چهارم و بخش اول مقالهٔ پنجم. به‌نظر می‌رسد که ترجمهٔ دو مقاله بوْئتیوس به‌وسیلهٔ دانشمندی از مردم لوْرن [ناحیه‌ای در مشرق فرانسه] که از استعداد حادّ ریاضی بهره‌ای نداشته گردآوری شده باشد، و مشتمل است بر مستخرجهائی از ترجمهٔ بوْئتیوس در مقالهٔ اول با مقدمه‌ای کوتاه و مؤخره‌ای دربارهٔ چرتکه، در حالی که بیشتر مقالهٔ دوم عبارت است از مطالب *Agrimensores*. اگر همهٔ مستخرجهای بوْئتیوس از «اصول» اقلیدس را که در این دو مقاله است با مستخرجهائی که در منابع مقالهٔ کاسیوْدوْروس و *Agrimensores* که در بالا به آنها اشاره شده گردآوریم آنچه از اقلیدس ترجمه شده است بالغ می‌شود بر: (آ) تقریباً همهٔ تعریفها و اصلهای متعارف و موضوع مقاله‌های یکم تا پنجم «اصول» ؛ (ب) بیان تقریباً همهٔ گزاره‌های مقاله‌های یکم تا چهارم؛ و (ج) اثبات گزاره‌های ۱ تا ۳ مقالهٔ یکم. چهار منبعی که در بالا نام بردیم و این مستخرجها در آنها است غالباً در موضوعهائی که در آنها است تداخل می‌کنند، اما درخور توجه است که بیان یک رشته از گزاره‌های مقالهٔ سوم (یعنی ۷ تا ۲۲) فقط در هندسهٔ پنج مقاله‌ای «بوْئتیوسی» آمده است در حالی که تعریفهای مقالهٔ پنجم فقط در نگارش کاسیوْدوْروس آورده شده است. (ارتباط بین چهار منبع را می‌توان در نمودار آخر این مقاله دید.)

نسخه‌های خطی سده‌های از نهم تا پانزدهم م که در آنها این منبعهای (بخصوص منبع آخر) مستخرجهای اقلیدس دیده می‌شوند اکثراً گردآورده‌هائی هستند مشتمل بر مطالب مربوط به هنرهای آزاد چهارگانه. اما حتی وقتی که، با ترجمه‌های کامل «اصول» در سدهٔ دوازدهم م، سلطه و رونقی که این گونه مجموعه‌ها در ریاضیات لاتینی قرون وسطایی داشتند کم‌کم موضع غالب خود را از دست دادند، اثرهائی از کار بوْئتیوس در مورد اقلیدس با پیوندهای گهگاهی با ترجمه‌های تازه به حیات خود ادامه دادند. بدین‌ترتیب با دست‌کم دو مخلوط متفاوت از اجزای مستخرجهای بوْئتیوسی با یکی از ترجمه‌های «اصول» از عربی به‌وسیلهٔ آدلارد باثی (که از این پس آن را آدلارد ۲ خواهیم نامید) می‌شناسیم. تاریخ یکی از این دو مخلوط حدود ۱۲۰۰ م است و ظاهراً گردآورندهٔ آن دانشمندی بوده است از آلمان شمالی با شمّی ریاضی بسیار قویتر از، مثلاً، مؤلف «بوْئتیوس» دو مقاله‌ای که ذکرش جلوتر گذشت. این مجموعه در یک نسخه خطی منحصر به فرد قرن سیزدهم م باقی مانده است با نشانهٔ Lüneburg Ratsbücherei MS miscell. D4° 48. مخلوط دوم به صورت چهار نسخه خطی، که سه‌تای آن متعلق به قرن دوازدهم م است، برجا مانده اما برای شناخت مؤلف آنها کار قابل ذکری انجام نشده است. بعلاوه، باید به این وقوف داشت که به‌نظر می‌رسد «منبع» بوْئتیوسی هر دو مخلوط هندسهٔ دو مقاله‌ای بوده است. سخن آخر: با این که بدین سان کوشیده‌ایم که مستخرجهای بوْئتیوسی یونانی-لاتینی «اصول» را با روایت عربی-لاتینی ناشی از مساعی آدلارد در آمیزیم، باید روشن ساخت که این جز بخش کوچکی از کار مربوط به اقلیدس در دورهٔ قرون وسطایی مغرب زمین نبوده است؛ طولی نکشید که روایت مبتنی بر شالودهٔ کار آدلارد نفوذ خود را گسترد.

اما پیش از آن که یکباره به این مرحله، و به‌طور کلی به اقلیدس عربی-لاتینی، بپردازیم به دو ترجمهٔ یونانی-لاتینی دیگر در قرون میانه باید اشاره کنیم. از اولی جز قطعه‌ای (یکم، ۳۷-۳۸ و دوم، ۸-۹) در دست نداریم، که به‌صورت نسخه‌های خطی از سده دهم م در مونیخ باقی مانده است. با این که مترجم، که مردی ایتالیایی بوده، سخت کوشیده است که ترجمهٔ کلمه به کلمه کند، نمی‌دانسته است که چه می‌کند، چون حروفی را که تعیین‌کنندهٔ شکلهای هندسی بوده‌اند به عدد ترجمه کرده است.

دومین ترجمهٔ یونانی-لاتینیِ اثر اقلیدس که باید مورد بحث ما واقع شود درست‌ترین ترجمه‌ای است که از اصول شده است، کلمه به کلمه، با رعایت ترتیب کلمات؛ و احیاناً قواعد نحوی که در آن مراعات شده است بیشتر یونانی است تا لاتینی. این ترجمه را، که فقط بر متنی تدوّنی مبتنی است، از روی دو نسخه خطی موجود می‌توان شناخت و مقاله‌های یکم تا سیزدهم و مقالهٔ پانزدهم را شامل است. هیچ یک از دو نسخه نام مترجم را ندارد، اما تحلیلی براساس سبک تحریر متن ثابت کرده است که مترجم آن همان ناشناسی است که در سدهٔ دوازدهم م مجسطی بطلمیوس را از یونانی به لاتینی گردانده است. دیباچه‌ای که خوشبختانه به این ترجمه ملصق است ما را آگاه می‌سازد که مترجم بی‌نام ما زمانی دانشجوی پزشکی در سالرنْو بوده و چون از وجود نسخه‌ای خطی یونانی اثر بطلمیوس در پالرموْ اطلاع پیدا کرده بود (حدود ۱۱۶۰ م) به سیسیل سفر کرده بوده است تا این گنج شایگان را ببیند، و پس از مدتی که آمادگی علمی بیشتری پیدا کرده بوده به گرداندن آن به لاتینی همت گماشته بوده است. احتمال می‌رود که مترجم اندکی بعد همین کار را با «اصول» اقلیدس کرده باشد (زیرا که هیچ ذکری از چنین تلاشی در توصیف فعالیتهای دیگرش که در مقدمهٔ کذایی کرده نشده است). اما وقتی که به خود ترجمه توجه گردد، دیده می‌شود که مترجم هم در ویراستاری و هم در ریاضیات ذهنی تیز داشته است. نه تنها ترجمه‌ای فوق‌العاده دقیق از یونانی بدست می‌دهد بلکه بموقع به عنوان معترضه به قسمتهای متعدد از نسخهٔ خطی دیگری که مورد استفاده‌اش بوده است اشاره می‌کند. و بالاتر از این، چندین بار همین گونه معترضه‌ها را برای بهتر کردن منطق استدلال بکار می‌برد. بدبختانه ترجمه‌ای بسیار عالی که وی بوجود آورده بر کسانی که در سده‌های میانه بعد از او به ترجمه پرداخته‌اند تأثیری بسیار کم، اگر نگوییم هیچ، بخشیده است. (این هم باید گفته شود که یکی از این دو نسخهٔ خطی به جای مقالهٔ چهاردهم که در آن نیست چیزی به اسلوب مقاله‌های چهاردهم و پانزدهم دارد که آن نیز از یونانی گرفته شده است؛ در این قسمت مترجمانِ از عربی سخت نکوهش می‌شوند که به اندازهٔ کافی دقیق نبوده‌اند).

آثار اقلیدس در کشورهای لاتینی‌زبان سده‌های میانی: مرحلهٔ عربی-لاتینی

به مجرد آن که ترجمه‌های کامل «اصول» از عربی در دسترس دانشمندان قرون میانه قرار گرفتند همهٔ قطعات یونانی-لاتینی و ترجمه‌ها کنار گذاشته

شدند. اما ترجمهٔ جدید، غالب دوگانه بود؛ یک جناح از ترجمهٔ اقلیدس به‌وسیلهٔ حجاج مشتق شد، و جناح دیگر از ترجمهٔ اسحاق‌ـثابت؛ تحریرهای طوسی و مغربی، البته، دیرتر از آن آمدند که در صحنهٔ رقابت فعالیت برای ترجمهٔ سدهٔ دوازدهم م وارد شوند.

«اصول» لاتینی براساس متن اسحاق‌ـثابت ترجمهٔ ژرار کرمونایی بود که پرکارترین و هشیارترین مترجمان کتابهای علمی، فلسفی، و طبی از عربی بود. پی بردن به این که او «اصول» را ترجمه کرده از اشاره‌ای است در *Vita*ی خود که به‌وسیلهٔ یکی از شاگردانش نوشته شده و در یکی از ترجمه‌هایش از آثار جالینوس ضمیمه کرده بود. اقلیدسِ ترجمهٔ ژرار در میان نسخه‌های خطی موجود در سال ۱۹۰۱/۱۲۸۰ شناخته شد و خیلی زود معلوم گردید که در میان همهٔ ترجمه‌های از عربی به لاتینی به متن یونانی نزدیکتر است. تنها این ترجمه است که مطالبی یونانی ــ مثلاً، دیباچهٔ مقالهٔ مشکوک چهاردهم ــ را دارد که در ترجمه‌های دیگر نیست. اما، از طنز روزگار، بوضوح به‌نظر می‌رسد که این ترجمه از ترجمه‌های کمتر دقیق و صحیح (مبتنی بر کار آدلارد) کمتر مورد استفاده واقع شده و کمتر تأثیر بخشیده بوده است. این ترجمه از آن روی انعکاس صادقانه‌تری از اصل یونانی است که براساس ترجمهٔ اسحاق‌ـثابت است، که خود دقیقتر و صحیحتر از ترجمه‌های دیگر است. ما هیچ سند صریحی در دست نداریم که حکایت از آن کند که ژرار براساس متن یادشده کار کرده است، اما مقدماتی‌ترین آزمایشها در متن او این احتمال قوی را فاش می‌سازد. مثلاً عبارت «Thebit dixit» (ثابت می‌گوید) به فراوانی در سراسر متن دیده می‌شود. دست‌کم بعضی از این موارد تکرار ــ شاید تقریباً همهٔ آنها ــ ناشی از آن نیست که ژرار دربارهٔ متنی که ترجمه می‌کرده است اندیشیده باشد، بلکه ترجمهٔ مستقیم خود آن متن است، چون در چندین نقل که کلامرؤت از عربی آورده و در اثر ژرار هم وجود دارد نیز از ثابت نام برده شده است. (البته این که مؤلفی از خود به صیغه شخص سوم نام ببرد امری است کاملاً متداول.) در انتظار نتیجه‌ای که از مقایسهٔ مستقیم متون اسحاق‌ـثابت و ژرار حاصل شود، به این واقعیت اشاره می‌کنیم که ترجمهٔ ژرار دو گزاره‌ای را که بعد از گزارهٔ ۲۵ مقالهٔ هشتم و فرعهائی را که برگزاره‌های ۱۴ و ۱۵ آن مقاله علاوه شده است، و از خصوصیات ترجمهٔ اسحاق‌ـثابت است، دربردارد. اما این تنها ترجمهٔ عربی، یا دست‌کم صورت خالص و خلّص این ترجمه، نیست که ژرار در برابر چشم داشته است. زیرا که گزارهٔ ۱۶ مقالهٔ هشتم را دارد که مطابق تحقیق کلامرؤت در نسخه‌های خطی اسحاق‌ـثابت نیست. علاوه براین، پس از آن که ژرار در ترجمهٔ گزاره‌های جداگانه و متمایز ۲۲ و ۱۲ مقالهٔ هشتم از نسخهٔ خطی موصوف پیروی کرده در آخر مقالهٔ هشتم ملحقّه‌ای اضافه کرده و مدعی شده است که این دو گزاره در «یک مقالهٔ دیگر» (in alio libro) یافته شده است، و در قسمت الحاقی این ترجمهٔ مخلوط را می‌آورد و ثابت می‌کند، و غیره. درست معلوم نیست که چه کس این ترجمهٔ مخلوط هشتم، ۱۱ـ۱۲، را در مقالهٔ دیگر پیدا کرده است؛ کاربرد صیغهٔ شخص اول از طرف ژرار مشکلی را به‌نحوه قاطع حل نمی‌کند، زیرا که ممکن است مستقیماً در نسخهٔ عربی مورد استفادهٔ او بوده باشد. با وجود این می‌دانیم که ترجمهٔ آدلارد که بنیانش ترجمهٔ حجاج از اقلیدس بوده (که مقالهٔ هشتم آن در دست نیست) دو گزارهٔ مورد بحث را جدا از یکدیگر آورده است. بنابراین یا ژرار خود از هر دو متن اسحاق‌ـثابت و حجاج استفاده کرده است یا (چیزی که محتمل‌تر است) متنی از اسحاق‌ـثابت را مورد استفاده قرار داده بوده است که برخی مطالب از یکی از دو ترجمهٔ حجاج در آن آورده شده بوده است.

ژرار به رواج آثار اقلیدس به لاتینی خدمت دیگری هم کرد، و آن ترجمهٔ شرح نیریزی بر «اصول» و شرح محمودبن عبدالباقی (**شکوفایی**، حدود ۴۸۰) بر مقالهٔ دهم، و دست‌کم ترجمهٔ جزئی از ترجمهٔ دمشقی از شرح پاپوس بر مقالهٔ دهم بود.

به مقدار زیاد مهمترین سهم ترجمهٔ از عربی به لاتینی سده‌های میانی نصیب مترجم و ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی آدلارد باثی است. نه تنها آدلارد شخصاً دست‌کم سه ترجمه از «اصول» کرد، بلکه آغازگر نوشته‌ها و تجدیدنظرهای متعدد هم بود. اگر همهٔ آنها را با هم روایت آدلاردی بنامیم، دیری نکشید که این روایت به‌عنوان منبع استفاده و نقل در آثار لاتینی اقلیدسی قرون میانی جنبهٔ انحصاری یافت.

اولین ترجمهٔ آدلارد (که از این پس با عدد رومی I مشخص می‌سازیم) در میان کل روایت تنها اثری است که اطلاق لفظ ترجمه به تمام معنی بر آن روا است. با این عنوان روشن است که مبتنی بر متن عربی حجاج بوده است. بدین ترتیب، استدلالها در آدلارد I به‌نظر می‌رسد که کاملاً با آنچه در ترجمهٔ حجاج است مطابقت دارند. علاوه بر این، آدلارد I همان سه تعریفی (یا، اگر به نحوی به اصل یونانی بازگشت شود، دست‌کم دو تعریفی) را به مقالهٔ سوم افزوده دارد که در ترجمهٔ حجاج هست، و با او در مراعات حداکثر شش حالت جداگانه در اثبات گزارهٔ ۳۵ مقالهٔ سوم موافق است. اما این هم روشن به‌نظر می‌رسد که آدلارد کتاب حجاج را به صورتی که امروز در دست ما است مورد استفاده قرار نداده است. موضوع نیاوردن مثالهای حسابی در مقاله‌های دوم و ششم، یا نیفزودن گزاره‌هائی به مقالهٔ پنجم، به‌صورتی که در نسخهٔ موجود حجاج هست، مورد بحث ما نیست، زیرا که احتمال آن می‌رود که این خصوصیات از شرحی نشأت کرده باشد که نیریزی نوشته بوده و نسخهٔ موجود حجاج مبتنی بر آن است. موضوع مهمتر این است که آدلارد I متضمن فرعهائی برگزارهٔ ۴ مقالهٔ دوم و گزارهٔ ۸ مقالهٔ ششم است که در نسخه حجاج وجود ندارد، و الهام انگیزتر نبودن گزارهٔ ۱۲ مقالهٔ ششم در آدلارد است که در حجاج ما هست. اگر نکتهٔ اخیر را با این بیان تحریر مشکوک طوسی توأم سازیم که می‌گوید ترجمهٔ حجاج گزارهٔ ۱۲ مقالهٔ ششم را ندارد، احتمال وجود نسخهٔ دیگری از ترجمهٔ حجاج، که اندکی با آن که ما داریم فرق داشته بوده باشد، و نیز این احتمال که آن نسخهٔ عربی مورد استفاده آدلارد I بوده باشد، قویتر می‌شود. ممکن است استدلال شود که این همان ترجمهٔ اول حجاج است که در زمان هارون رشید صورت پذیرفته بوده است، اما می‌دانیم که ترجمهٔ اولی تا حدی مفصلتر از ترجمهٔ دوم، که احتمالاً همهٔ نسخه‌ای است که ما داریم، بوده است. و آدلارد I از جهات دیگر (بخصوص از جهت طول و تفصیل استدلالها) ظاهراً به قدر کافی با ترجمهٔ دوم موجود مطابقت دارد که اشتقاق از نسخهٔ اصیل عربی مفصلتری را نامحتمل سازد. وجود نوشتهٔ دیگری از ترجمهٔ دوم به‌عنوان مبنا معقولتر به‌نظر می‌رسد.

از سوی دیگر آدلارد II مسائل مشابهی را برنمی‌انگیزد، زیرا که ترجمه نیست بلکه ویرایش مختصرتری است، یا، همان‌طور که خود آدلارد (در ترجمهٔ سوم) گفته است، نوعی شرح (commentum) است. این کار، با این که کوتاهترین تلاش آدلارد برای برگرداندن اثری از اقلیدس به لاتینی بوده است، بی‌تردید موردپسندترینِ آنها است. این موضوع نه تنها از آن روی روشن است که

تعداد نسخه‌هایی که از آدلارد II تکثیر شده خیلی بیشتر است، بلکه از آن روی که ترجمه‌ای که در آن از «بیان» (تعریفها، اصلهای موضوع، اصلهای متعارف، و گزاره‌ها) شده بعداً مورد استفادهٔ مترجمانی غیر از خود آدلارد قرار گرفته‌اند. در حقیقت به نظر می‌رسد که تنوعی که از آدلارد نتیجه شده است در خود آن نیز وجود داشته باشد، زیرا که در تقریباً پنجاه نسخهٔ خطی که از آن تاکنون شناخته شده‌اند تنوع بسیار است. مثلاً قدیمیترین نسخهٔ موجود (آکسفرد، کالج ترینیتی، ۴۷) متنی دارد مختصرتر از متنی که در هر نسخهٔ خطی دیگر است.

صفت بارز آدلارد II در اثباتهای آن است، که در حقیقت اصلاً اثبات نیست بلکه شرحی است که هر جا دل در پی یافتن اثباتی باشد رهنمودهائی مرتبط با آنچه را مورد بحث است فراهم می‌آورد و نشان می‌دهد. مثلاً همیشه به آدمی یادآوری می‌کند که بر روی کدام گزاره یا تعریف و اصل موضوع دارد بنا می‌کند، و این که استدلال ــ اگر لازم باشد ــ مستقیم است یا نامستقیم. «شرح» دربارهٔ گزاره و اثبات بالقوهٔ آن سخن می‌گوید؛ و زبان، با اصطلاحی که ما بکار می‌بریم، ماورای ریاضی (متاماتماتیک) است. علاوه بر این، سخنی که دربارهٔ استدلال گفته می‌شود تکیهٔ بیشتری بر ساختمان و ترسیم دارد تا بر برهان مناسب.

آدلارد III، که راجر بیکن آن را «ویرایش خاصی» (editio specialis) می‌داند، علاقهٔ خاص مشابهی به بیان نکته‌های ریاضی نشان می‌دهد، اما حالا آنها را نگین‌وار در حلقهٔ استدلال کامل و جامعی می‌کشاند. در این معامله آدمی اغلب متوجه می‌شود که این گونه اندیشه‌ها از گزاره و استدلالی که در دست است دور می‌شوند و به موضوعهای ریاضی خارجی می‌انجامند.

آدلارد II و آدلارد III، علاوه‌بر مؤلف مشترک، مشترکات زیاد دارند. هر دو مشتمل بر عرب گراییها و یونان گراییهائی هستند؛ و در آدلارد III از آدلارد II نقل قول می‌شود. اما مهمتر آن که هر دو از مطالب و مواد لاتینی استفاده می‌کنند: مفهومهائی را که از حساب بوئتیوسی گرفته می‌شود مورد استفاده قرار می‌دهند، اصطلاحات ادبی قدیمی (کلاسیک) بکار می‌برند، و حتی (آدلارد III) به اوُوید اشاره و ارجاع می‌کنند.

چهارمین مؤلفهٔ عمده روایت آدلاردی ترجمه‌ای از «اصول» است که کامپانوس نوُوارایی فراهم آورده بوده است. این ترجمه بر طرز بیان مطالب آدلارد II و بر نحوهٔ بیان استدلالها، که ظاهراً به آدلارد ارتباطی ندارد، اثر می‌گذارد و چیزی به‌وجود می‌آورد که از دیدگاه ریاضی رساتر از همهٔ ترجمه‌های از عربی به لاتینی آثار اقلیدس است (قدیمیترین نسخهٔ موجود تاریخدار آن از ۱۲۵۹/۶۳۸ است). ملحقاتی که کامپانوس به متن اصلی اقلیدسیِ خود افزود بخصوص چشمگیر است. با این نظر که «اصول» را در حد ممکن خودبسنده سازد، توجه بسیار به روشن ساختن و بحث کردن دربارهٔ آنچه به‌نظر او نکته‌هائی مبهم و قابل بحث می‌آمد مبذول داشت. او هم کوشید که کار اقلیدس را بیشتر در جریان سدهٔ سیزدهم م وارد کند و «اصول» را با مطالبی که از *Arithmetica* ی یوُردانوس نموُری می‌گرفت مرتبط سازد بلکه آنها را تکمیل کند.

علاوه بر این، اثر کامپونوس و سه ترجمهٔ آدلارد (بخصوص II و III) مانند سرچشمه‌هائی برای تکثیری حیرت‌انگیز از ترجمه‌های دیگر «اصول» بکار رفتند. با این که اختلاف آنها با یکدیگر و با این سرچشمه‌ها نمی‌تواند زیاد باشد، و با این که دیده می‌شود که آنها غالباً بر کتابهای منتخبی از اقلیدس متمرکز می‌گردند، هنوز می‌توان در میان نسخه‌های خطی موجود در حدود پانزده، یا بیشتر، ویرایش اضافی یافت که متعلق به روایت آدلاردی هستند.

این نسخه‌ها از سدهٔ سیزدهم م تا سده پانزدهم م بوجود آمده‌اند، و تا جائی که تحقیقی سطحی نشان می‌دهد، نام مؤلف یا گردآورنده‌ای با آنها همراه نیست.

برروی هم روایت آدلاردی برای عرضه کردن نوشته‌های اقلیدس در قرون وسطی بالای دست همهٔ ترجمه‌های دیگر بود. بعلاوه، با این که به مقدار زیاد بزرگترین سهم این روایت ترجمهٔ اکید از منابع عربی نبود، دورشدن از منبع اصلی یونانی که بدین نحو روی داده بود مشکل بزرگی پیش نیاورد. معدودی گزاره‌ها که جایشان خالی بود جبران شد و عوض کردن ترتیب قضایا مطلقاً موجب احساس شک و تردید ریاضی نشد. به‌نظر می‌رسد که بد فهمیدن هدف و منظور اقلیدس هم زیاد نبود، جز در مورد محک اوُدوُکسوس برای برابری نسبتها، که در تعریف مقالهٔ پنجم جا خوش کرده بود. در اینجا با نفوذترین تفسیر قرون وسطایی ــ که از کامپانوس بود ــ ظاهراً بر اثر تاب عجیبی که در موقع انتقال خورده بود مشروط شده بود. زیرا که کامپانوس (و همهٔ منابع دیگری که مؤلفه‌های روایت آدلاردی را تشکیل می‌دادند) به جای تعریف اصیل مقالهٔ پنجم تعریف دیگری را که از جنبهٔ ریاضی بی‌فایده بود قرار داده بود [ند]؛ و کامپانوس، برای معنی بخشیدن به این عمل، یک سلسله توضیحاتی وارد کرده بود که به بحث خود او سرایت کردند و در نتیجه موجب بد فهمیده شدن در تعریف مقالهٔ پنجم «اوُدوُکسوسی» شدند. بدین ترتیب ما شاهد یگانه موردی هستیم که در آن وجود یک قطعهٔ مشکوک در متن روایت به نحوی جدی بر تغییر موضوعی اصیل اثر گذاشته است.

اما تأثیر بخشترین صفت بارز «اصول» آدلاردی ـ کامپانوسی این نیست که قطعاتی از متن در آن نیست یا هست و بد فهمیده شده است، بلکه در اضافات و ملحقات بسیار است به آن، اضافاتی که اغلب صورت گزاره‌ها یا مقدمه‌های مکمل به خود می‌گیرند اما در داخل قضایای اصلی و معیار اقلیدس به‌صورت نکته‌های انعکاسی در می‌آیند. حتی ممکن نیست که کسر کوچکی از این اضافات را به‌صورت فهرست بیان کرد، اما مهم آن است که از اساس علاقه آنها به نکاتی پی برد. از اینجا شروع می‌کنیم که انگیزه بسیاری، بلکه اکثرِ، این تغییرات در آوردن کتاب اقلیدس به‌صورتی آموزنده‌تر بود. گرایش به‌سوی در آوردن «اصول» به‌صورت کتابی درسی، که در تاریخچهٔ عربی آن به آن اشاره شد (و حتی به نحوی در انشای تازهٔ تئون در نقل «اصول» دیده می‌شود). بسط یافت. اندیشه‌هائی که در بالا در مورد ساخت استدلالها به آنها اشاره شد بی‌تردید جزئی از گرایش به افزایش آموزندگی است. برای بخشهای داخل یک استدلال اسم گذاشتن مبین دستورهائی است که چگونه ترسیمهائی که خواسته می‌شود اجرا گردد و چگونه شکلهای سه‌بُعدی کشیده شود، و تعیین آن که گزاره‌های «برادر» را چگونه می‌توان در جاهای دیگر «اصول» یافت، و حتی اشارات توضیحی به مفاهیم اخترشناسی و موسیقی گواههائی صادق بر این گرایش شمرده می‌شوند. و نیز ما گواه فرسایش سدّ سدیدی هستیم که یونانیان بین عدد و کمیّت کشیده بودند زیرا که وسواسی که برای استفاده کردن از گزاره‌های کلی مقالهٔ پنجم در مقاله‌های حسابی هفتم تا نهم نشان داده می‌شد کنار گذاشته شد و دیگر می‌توان به تعدادی مثالهای عددی ــ که همه در غیر کافی بودنشان معترفند ــ برای گزاره‌ها (بخصوص در مقاله‌های پنجم و دهم) برخورد کرد که در آنها به کمیّتهای کلی پرداخته می‌شود.

مطلبی بیشتر در خور توجه تعلق خاطر همیشه حاضری است به مقدمات و به هر چه اصولی است. اصل موضوعها همه‌جا (حتی در وسط اثباتها) افزوده

می‌شوند تا چاله‌هائی را که ممکن است در سلسلهٔ استدلالها باشد پر کنند، و دقّتی شایان توجه به منطق آنچه در جریان است می‌شود. بار دیگر حمله‌ای با نیّت و هدف آموزندگی دیده می‌شود. اما تأکیدی که بر مفهومها و مفروضهای بنیادین می‌شد نه فقط متوجه آن بود که هندسهٔ «اصول» را بهتر در دسترس کسانی قرار دهند که آن را در مدارس هنری سده‌های میانی بکار می‌بردند، بلکه نیت آن بود که هندسه را بر مسائل مهم خارجی، بخصوص فلسفی، نیز اثربخش سازند. از این حیث قابل توجه‌تر از همه وقتی بود که صرف مفهومهای پر درد سر اندازه‌ناپذیری (گنگی) و، باصطلاح، زاویهٔ شاخ (بین دایره و مماس آن)، و بخش‌پذیری اندازه‌ها می‌شد. زیرا که این مفهومها همه مرتبط بودند با نامتناهی بودن و تداوم که غالباً حدّت ذهن فیلسوفان سده‌های میانی را ورزیده می‌ساختند. روایت آدلاردی، به‌صورتی که بود، کتاب اقلیدس را به‌صورت یک کتاب درسی در آورده بود که به نحوی شگفت‌انگیز بر قامت علایق مدرسی، هم در داخل و هم در خارج حدود ریاضیات قرون وسطایی، برازنده بود.

ترجمهٔ قرون وسطایی دیگری از «اصول» وجود دارد که، به‌نحوی مسلماً آبکی‌تر، با ترجمه‌های آدلاری پیوند دارد. پیوند آن از استفاده از بیشتر بیانهای آدلارد II ظاهر می‌شود، هر چند اغلب تغییرهای اساسی در آنها می‌دهد. این ترجمه بی‌نام مؤلف در فقط یک نسخه خطی (Paris, BNlat. 16646) وجود دارد. اما می‌دانیم که این نسخه در ۱۲۷۱/۶۵۰ به‌موجب وصیت ژرار آبِویلی به سوْربوْن داده شده بود و به اغلب احتمال همان نسخهٔ خطی است که در *Biblionomia*ی (حدود ۱۲۴۶ م) ریشاردوْ فورنیوال وصف شده است. اما ریشار نسخهٔ خطی را چنین می‌شناساند: «هندسه و حساب و تصویر رسم‌الجسمی اقلیدس براساس شرح هرمان دوّم». پس احتمالاً این ترجمه کار هرمان کارینتیایی (**شکوفایی**، حدود ۵۲۰ـ۵۳۰/۱۱۴۰ـ۱۱۵۰)، مترجم نامدار کتابهای اخترشناسی و اختربینی از عربی، بوده است. استدلالهای آن با استدلالهای روایت آدلاردی فرق دارند، و نبودن اصطلاحات عربی که در روایت آدلاردی بکار رفته بود نشانهٔ آن دانسته شده است که هرمان متن عربی دیگری را مبنای کار خود قرار داده بوده است. اما فکری که بتازگی القا می‌گردد و ترجمهٔ اسحاق‌ـثابت اساس کار او تصور می‌رود به‌نظر مورد تأمل است، زیرا که برخلاف ترجمهٔ ژرارکرموْنایی، که به‌نحوی مشهود بر ترجمهٔ عربی مبتنی است، هرمان نه تنها به ثابت اشاره‌ای نمی‌کند بلکه اضافات و محلقات مقالهٔ هشتم (بالا) را، که علامت مشخص‌کنندهٔ اسحاق‌ـثابت است، ندارد. از سوی دیگر راست است که کار هرمان از تنوعهای متن حجاج، به‌صورتی که در اختیار ما است، نشان دارد اما همهٔ اینها ظاهراً در آدلارد I، که به‌طور مسلم، چنان که دیدیم، از یکی از ترجمه‌های حجاج مشتق می‌شوند، نیز وجود دارند. هرمان تفاوتی را که در بالا به آن اشاره شد فقط به هنگام بحث دربارهٔ آدلارد I تکرار می‌کند و در میان همهٔ ترجمه‌های لاتینی فقط او و آدلارد I هر شش حالت جداگانهٔ گزارهٔ ۳۵ مقالهٔ سوم را به‌طور کامل نقل می‌کنند. نکتهٔ دیگری را هم به‌عنوان قرینه می‌توان ارائه کرد: در یک رشته گزاره‌ها (مقالهٔ پنجم، ۲۰ تا ۲۳) که به تناسب می‌پردازند در متن یونانی اقلیدس فقط یک حالت اختصاصی است (پنجم، ۲۲): «برای هر تعداد از کمیات ...»، و بقیه فقط برای سه کمیّت بیان شده‌اند. حالا همهٔ ترجمه‌ها، جز آدلارد I و هرمان، از جمله حجاج ما و، بنابر داوری ترجمهٔ ژرار، اسحاق‌ـثابت این وضع را پذیرفته‌اند که هر چهارگزاره را به‌صورت کلی می‌نویسند. اما هرمان و آدلارد I عبارت «سه کمیّت» را برایِ گزاره‌های ۲۰ و ۲۱ و ۲۳ مقالهٔ پنجم حفظ می‌کنند اما در مقالهٔ پنجم، گزارهٔ ۲۲، tres (= سه) را به‌جای Quotlibet (= هرچند کمیت) قرار می‌دهند. پس خویشاوندی این دو، نیز، بکلی نزدیک است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هرمان دست‌کم آدلارد II را (که از آن فراوان نقل کرده است) و نیز ترجمه‌ای از حجاج را که مبنای آدلارد I بوده (و شاید آدلارد I را هم) مورد استفاده قرار می‌داده است. کلام آخر، توجه شده است که در کتاب هرمان اصطلاح شبه‌عربی aelman geme (مربوط به «علم جامع») را بکار می‌برد تا به اصلهای موضوع یا متعارف ارجاع دهد، در حالی که هم حجاج و هم ــ به داوری کلامرؤت ــ اسحاق‌ـثابت اصطلاح «العلوم المتعارفه» را بکار برده‌اند. در این مورد هم ممکن است هرمان دنباله‌رو یکی از متون حجاج بوده باشد، زیرا که اصطلاح «علم جامع» (که ابن‌سینا هم در اثر خود دربارهٔ اقلیدس بکار برده است) گاهی در حاشیهٔ نسخهٔ خطی حجاج ما بکار رفته است.

ادعا شده است که دو ترجمهٔ قابل تشخیص دیگر قرون وسطایی از «اصول» وجود دارد. معلوم شده است که یکی از آنها که منتسب است به آلفرد ملقب به بزرگ در نتیجهٔ انتسابی اشتباه‌آمیز در حاشیهٔ تنها یک نسخهٔ خطی ترجمهٔ آدلارد II است به «آلفردوس». نسخه دوم، که یک فهرست خطی سدهٔ هفدهم است، به ترجمه‌ای از «اصول» اشاره می‌کند با عنوان «ترجمهٔ از عربی به لاتینی به وسیلهٔ جوْن اوْکرئاتوم». ما از قسمتهائی در آغاز مقالهٔ پنجم و در مقالهٔ دهم (گزاره‌های ۹، ۲۳، ۲۴) بعضی از نسخه‌های خطی آدلارد II مطلعیم که متمسک به «Ocrea Johannis» می‌شوند، اما به‌صورتی که ممکن است اشاره‌ای به شروح جداگانه (شاید در حاشیه) دربارهٔ اقلیدس یا رسالهٔ ریاضی دیگری باشد و نه ترجمهٔ متمایز یا روایت دیگری از «اصول».

اگر در پایان سخن مقدار معتنابه مطالب مربوط به ترجمهٔ از عربی به لاتینیِ آثار اقلیدس را با تاریخِ آن هم موسّعِ سرگذشت «اصول» در اسلام مقایسه کنیم چندین تفاوت چشمگیر ظاهر می‌شوند، حتی در مرحلهٔ بسیار مقدماتی پژوهش این دو روایت. در هر دو ناظر تعداد خردکننده‌ای ترجمه‌ها و ویرایشها و انواع کار خاص اقلیدس خواهیم بود. هر چند در اینجا صفت مشترکی هست اما شک نیست که تعداد شروحی که در عربی نوشته شده‌اند خیلی بیشتر است از شروح لاتینی. در حقیقت به‌نظر می‌رسد که فقط یک شرح اصیل خاص به لاتینی وجود داشته باشد که، نه به‌طور مسلّم، اِسناد داده می‌شود به فیلسوف دوْمینیکی سدهٔ سیزدهم م آلبرت بزرگ (آلبرتوس ماگنوس) که، به هر تقدیر، بسیار وابسته است به مطالبی که قبلاً به لاتینی ترجمه شده بوده است (بخصوص شرح نیریزی). وقتی که به *Questiones super Euclidem* می‌رسیم، آنها بیشتر به مسائل کلی در درون هندسه و ریاضی و حکمت طبیعی می‌پردازند تا به نتایجی که مستقیماً بستگی دارند به مقدمات یا قضایای اقلیدسی. در واقع این بیشتر مربوط است به عنصر تباین دیگری بین روایتهای عربی و لاتینی ــ و آن این است که وی ظاهراً سریعتر در جهت خدمت به علایق فیلسوفان پیش‌رفته است، در حالی که اوّلی از جهت علایق خود بیشتر به‌صورت ریاضی باقی ماند. مثلاً در متون لاتینی هیچ چیزی نیست که شبیه باشد به بحثهای عربی در اطراف اصلهای موضوع توازی. اما ریاضیات اسلامی خیلی زنده‌تر و خلاق‌تر بود از آنچه در کشورهای غربی لاتینی وجود داشت.

تجدد علمی و هنری (رنسانس) و اقلیدس جدید

به‌نظر می‌رسد که چهار رویداد در تعیین سیر «اصول» در سدهٔ شانزدهم و سده‌های بعد از آن بسیار برجسته بوده‌اند: (۱) انتشار ترجمهٔ قرون وسطایی کامپانوس تؤوارایی، نخست به‌عنوان چاپ اول در ونیز (۱۴۸۲) به‌وسیلهٔ ارهارت راتدؤلت، و در بسیار جاهای دیگر در یکصد سال پس از آن؛ (۲) ترجمهٔ تازه‌ای از یونانی به‌وسیلهٔ بارتولومئو دزامبرتی در ۱۵۰۵؛ (۳) اولین چاپ متن یونانی به‌وسیلهٔ زیمونْ گرونایوس در بازل در ۱۵۳۳؛ (۴) ترجمهٔ از یونانی به لاتینی دیگری در ۱۵۷۲ به‌وسیلهٔ فدریکوْ کوْماندینوْ. آنچه بر اثر این چهار ترجمه انتشار یافت تأثیر خود را بر تقریباً همهٔ ترجمه‌های بعدی، خواه به لاتینی و خواه به زبانهای محلی، نشان می‌دهند.

از کامپانوس جلوتر سخن گفته‌ایم. آنچه از اقلیدس بعد از چاپ ترجمهٔ او طبع و نشر شد اثر با نفوذ دزامبرتی نبود بلکه، بی‌خبر از انتشار قطعات بوْئتیوسی به‌صورتهای مختلف، قطعات پراکنده‌ای از «اصول» بود در دایرةالمعارف عظیم *De expetendis et fugiendis rebus* جوْرجوس والاّ (و. ۱۴۹۹/۸۷۸) در ونیز (۱۵۰۱). مسلماً این اثری از اقلیدس نبود که بآسانی در دسترس باشد؛ زیرا، گذشته از این که کاربرد این کتاب فوق‌العاده مزاحم بود، گزیده‌هائی از «اصول» در سراسر کتاب بین مطالبی که از کتابهای دیگر ریاضی و علمی یونانی ترجمه شده بود پراکنده بود. اولین انتشار «اصول» لاتینیِ مبتنی بر یونانی به‌صورتی جامع و کلی آن بود که در ۱۵۰۵/۸۸۴ در ونیز به‌وسیلهٔ دزامبرتی (ت. حدود ۱۴۷۳/۸۵۲) فراهم آمده بود. ترجمهٔ او بر اساس یک متن یونانی کاملاً تؤنی بود، و در نتیجهٔ این عامل دزامبرتی اثباتهای خود را به نویسندهٔ اسکندرانی نسبت می‌دهد («با بیان ریاضی برجسته و ممتاز تؤنی»). این اثر شامل ترجمهٔ کارهای خُردتری از اقلیدس، که قسمتی از آنها در دایرةالعمارف والاّ هم آمده بود، نیز هست.

دزامبرتی کاملاً از مزیتی آگاه بود که به عقیدهٔ او بر کارش بر اساس متنی یونانی مترتّب بود. مدعی بود که بدین‌وسیله توانسته است مطالبی را که تا آن وقت جایشان خالی بود علاوه کند و خیلی از چیزهائی را که در ترجمهٔ کامپانوس بود به‌نحوی مناسب تنظیم کند و اثبات نماید. در واقع عناد او با سَلَف قرون وسطائیش از ادب دور بود: دزامبرتی شکایت داشت که اقلیدسِ او (کامپانوس) سرشار از ارواح و رؤیاها و تخیلات حیرت‌انگیز (miris larvis somniis et phantasmatibus)؛ است و به خود کامپانوس «پیامبر بربریت» (interpres barbarissimus) لقب داده بود.

جواب حمله‌ای که دزامبرتی آغاز کرده بود تقریباً در دهم با چاپهای تازه کامپانوس داده شد، که برجسته‌ترین آنها در ۸۸۸ در ونیز به وسیلهٔ کشیش فرانسیسی لوکا پاچوْلی آماده گردید. پاچوْلی خود را مصححی (castigator) می‌دانست که کار کامپانوس را از خطاهای نسخه‌برداران، بخصوص از شکلهای نادرستی که کشیده شده بود، منزه کرده است. در جواب مستقیم به دزامبرتی اینک کامپانوس به‌صورت «پیامبر اعتماد» (interpres fidissimus) ظاهر می‌گردید.

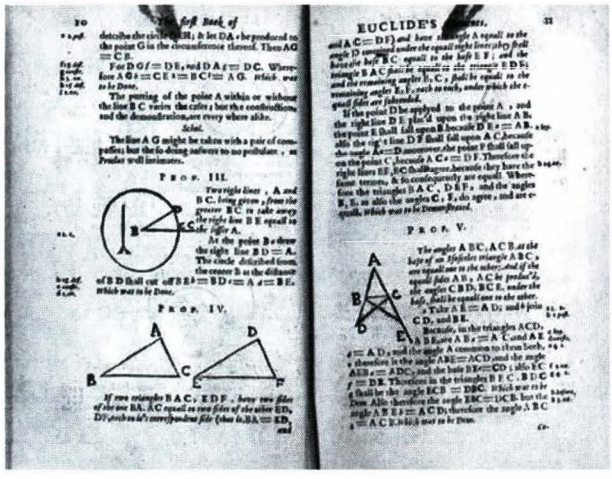
در نتیجه نوعی «تنش» میان دو اردوی کامپانوس و دزامبرتی بوجود آمد، زیرا که دیری نکشید که یک سلسله «اصول» طبع و نشر شد که چاپهای هر دو نفر را به‌طور کامل (in toto) تجدید کرده بودند، و اولین آنها در ۱۵۱۶/۸۹۵ در پاریس انتشار یافت. هر قضیه و استدلال آن نخست «به روش کامپانوس»، و بی‌فاصله بعد از آن «به روش تؤن از طریق دزامبرتی» عرضه می‌شد. اضافات و ملحقات کامپانوس به‌جای خود و با همان عنوان چاپ شده بود.

پایان ثلث اول سدهٔ شانزدهم اولین چاپ متن یونانی «اصول» را به ارمغان آورد. متألّه آلمانی زیمونْ گرونایوس (و. ۱۵۴۱/۹۲۰) این کار را براساس دونسخهٔ خطی و مراجعهٔ گهگاهی به نسخه لاتینی دزامبرتی انجام داده بود. چاپ او، که «شرح» پرؤکلوس را هم دربرداشت، تنها نسخهٔ کامل یونانی پیش از سدهٔ هجدهم بود. چاپهای دیگر یونانی «اصول» در دورهٔ رنسانس ناقص بودند، و غالباً فقط بیان گزاره‌ها را به یونانی (معمولاً همراه با ترجمهٔ به لاتینی) عرضه می‌کردند. مهمترینِ این «اصول»های «قطعه‌قطعه» بی‌تردید آن است که ریاضیدان و ساعت‌ساز سویسی کوْنرات دازوپوْدیوس یا راوخفوس (۹۱۱ـ۹۷۹) تنظیم کرده است. دازوپوْدیوس بارها تصریح کرده است که کتاب او، که در سه جزء در ۱۵۶۴/۹۴۳ در اشتراسبورک چاپ شده بود. فقط به نیّت آن که کتاب درسی اقلیدس باشد فراهم آمده بود. به این دلیل او معتقد بود که مناسبتر است که فقط بیان گزاره‌های مقاله‌های سوم تا سیزدهم با متن کامل مقاله‌های یکم و دوم، همه به یونانی با ترجمهٔ لاتینی، در دسترس قرار داده شود. آموزشی بودن طرح کتاب او از اینجا هم دیده می‌شود که، به‌رغم کنارگذاشتن بخش بزرگی از کار اصیل اقلیدس، مناسب دیده بود که ترجمهٔ حساب مقالهٔ دوم را که راهب بازیلی بارلام (و. در حدود ۷۲۹/ ۱۳۵۰) تهیه کرده و خیلی آسانتر فهمیده می‌شد جزء کتاب خودش بیاورد.

به هر تقدیر، چاپ متن کامل یونانی در ۱۵۳۳/۹۱۲، و چاپ کتابهای کامپانوس و دزامبرتیِ پیش از آن، مواد خام لازم برای مرحلهٔ اول پیش از کوْماندینوییِ اقلیدسِ دورهٔ رنسانس را فراهم آورد. طرفه آن که کتابهای کامپانوس و دزامبرتی نقش عمده را برعهده گرفتند، نه چاپ اول متن یونانی. نکته‌ای چند از مهمترین «اصول» چاپی، در میان چاپهای متعدد دورهٔ رنسانس، مطلب را روشن می‌کند. (مواد دستنوشتهٔ این دوره، که درخور اعتنا اما مطلقاً ناپژوهیده‌اند، در اینجا درنظر گرفته نشده‌اند).

اگر در شروع مطلب دقت خود را بر آثار لاتینی اقلیدس متمرکز کنیم اولین ترجمهٔ مهم «تازه» (پاریس، ۱۵۳۶) از ریاضیدان فرانسوی اوْرؤنس فین (۸۷۳ـ۹۳۴) است. اما به‌نظر می‌رسد که کمک او وارد کردن متن یونانی بیانها است برای «قبل از مقالهٔ ششم (libri sex priores) در جاهای مناسب در ترجمهٔ به لاتینیِ دزامبرتی در همهٔ این مقاله‌ها. به‌نحو مشابه، هم‌میهنش ژاک پلتیه دومان یک ترجمهٔ لاتینی شش مقاله‌ای دیگر بیرون داد (لیوْن، ۱۵۷۷) که، چنان که کوْماندینوْ خاطرنشان کرده است، بیشتر بر ترجمهٔ عربی‌ـلاتینی کامپانوس مبتنی بود تا بر اثری یونانی. (باید گفت که پلتیه «اضافاتی» را که از کامپانوس گرفته بود با چند نکتهٔ اضافی شایان توجه خودش تکمیل کرده بود.) دانشمند فرانسوی سومی، فرانسیسکوس فلوساتوس کاندالا (فرانسوا دوْفوا، کنت دوْ کاندال، ۸۸۱ـ۹۷۳) یک «اصول» به زبان لاتینی بوجود آورد. این اثر، که هر پانزده کتاب را در بردارد، بعلاوهٔ سه ضمیمهٔ دیگر در محاط کردن و محیط کردن اجسام، باز هم نه براساس متن واقعاً یونانی بلکه بر مبنای کارهای دزامبرتی و کامپانوس است. و هر جا هم مطلبی باشد که از آن دوگرفته نشده باشد غالباً به‌نظر می‌رسد که اختراع خود کاندالا نباشد.

مقارن همان زمان نظری کوتاه نسبت به وضع علمی اقلیدس وقتی هویدا شد که، چندسالی پیش از انتشار «اصول» موسع



کاندالا، یوْهانس بوتئوْ *De quadratura circuli* («در تربیع دایره») ی خود را در ۱۵۵۹/۹۳۸ در لیوْن منتشر کرد. در ضمیمهٔ این کتاب شرحی منتشر شد که بوتئوْ نوشته بود با عنوان *Annotationum opuscula in errores Campani, Zamberti, Orontii, Peletarii ... interpretum Euclidis* («یادداشتهائی مختصر دربارهٔ خطاهای کامپانوس، دزامبرتی، اوْرونْس فین، پلتیه ...، مفسّران اقلیدس»). درنظر او کامپانوس بهترینِ این نویسندگان بود زیرا که خطاهای او ناشی از مأخذ عربی او بود نه از بی‌استعدادی خودش در ریاضیات. دزامبرتی، با این که مستقیماً از مآخذ یونانی استفاده کرده، شمّ هنری نداشته است. بوتئوْ دربارهٔ آثار فین و پلتیه هم داوری کرده و آنها را نادرست‌تر دانسته و در مورد پلتیه گفته است که هر نوع مقتضی می‌دانسته بی‌محابا اضافه یا حذف می‌کرده است.

تاکنون فقط از ترجمه‌های لاتینی سدهٔ شانزدهم سخن گفته‌ایم، اما بر همین نحو می‌توان از تأثیر کامپانوس و دزامبرتی و مهمترین ترجمه‌ها به زبانهای محلی سخن گفت. اولینِ این‌گونه آثار که به‌چاپ رسید ترجمه به زبان ایتالیایی بود به‌وسیلهٔ ریاضیدان و مکانیک‌دان و فیلسوف طبیعی نیکوْلوْ تارتالیا. چاپ اول آن در ۱۵۴۳/۹۲۲ در ونیز منتشر شد. وقتی که تارتالیا می‌گوید که ترجمهٔ او «با دو روایت مطابقت داشته است»، تردیدی نیست که مرادش کامپانوس (که بسیار موردتوجه به‌نظر می‌رسد) و دزامبرتی بوده است. وقتی که کامپانوس گزاره‌ای یا مقدمه‌ای افزوده است تارتالیا آن را ترجمه کرده و نبودنشان در روایت دوم (*nella secondat radittione*) را متذکر شده است؛ و وقتی که کامپانوس چیزی را از قلم انداخته اما دزامبرتی آن را آورده است به‌نحو معکوس رفتار شده است.

دومین زبانی که این امتیاز را یافت که آثار اقلیدس را در میان کالاهای خود در معرض دید قرار دهد زبان فرانسوی بود (به وسیلهٔ پیئر فوْرکادل در پاریس به سال ۹۴۳) و سپس زبان آلمانی (به‌دست یوْهان شوْیبل و ویلهلم هوْلتسمان در ۹۳۷ و ۹۴۱). اما اطلاع ما دربارهٔ اولین چاپ منقح و کامل انگلیسی بیشتر است. اما، پیش از آن که به‌شرح این اجمال پردازیم، بجا است که به مطالب اقلیدسی که پیشتر از آن در زبان انگلیسی نفوذ کرده بوده است اشاره کنیم. این را می‌توان در کتاب *The Pathway to Knowledge* («راه معرفت»، لندن، ۱۵۵۱) نوشتهٔ ریاضیدان اهل عمل زمان پادشاهی تودوْرها به نام رابرت رکوْرد یافت. رکوْرد زمینی را که می‌خواست در آن کشت کند خوب می‌شناخت، زیرا که برای احتراز از سرگشتگی‌ای که حتی یادگرفتن تعریفهای آغازین اقلیدس احتمالاً در خوانندهٔ «بحث بسیط» موجب می‌گردد جانب احتیاط را نگاه می‌داشت: «زیرا که عجیب‌تر و بیگانه‌تر از این مطلبی در زبان انگلیسی نبود و چنین کتابی پیش از این به این زبان نوشته نشده بود». منظور رکوْرد کاملاً عملی بود، و او مخصوصاً به اهمیت هندسه برای ممیزی و مساحی و ساختمان اشاره کرد. «راه معرفت» آنچه را در مقاله‌های یکم تا چهارم بیان شده است متضمن است و دربارهٔ آنها کار شده و تنظیم مجدد گردیده‌اند، تا به کار هدفهای عملی او بخورند.

اوّلین ترجمهٔ خوب انگلیسی کار سرهنری بیلینگزلی (و. ۱۶۰۶/۹۸۵)، که بعداً شهردار لندن شد، بود، و در ۱۵۷۰/۹۴۹ با مقدمه‌ای از جان دی در لندن منتشر شد. جان دی مشوق هنرهای ریاضی بود و گاه خود به آن می‌پرداخت. ترجمهٔ بیلینگزلی، که با قطع بزرگ و باشکوه بود، مشتمل بود بر «ملحقات بسیار، حواشی، یادداشتها ، ابتکارات ... که از معروفترین استادان ریاضی پیشین و عصرما، هردو، گردآوری شده است»؛ و حتی ورقهای کاغذ به آن چسبانیده شده بودند که به‌صورتی تا شده بودند که شکلهای سه‌بعدی برای گزاره‌های مقالهٔ یازدهم بوجود می‌آوردند. هر مقاله با خلاصه‌ای آغاز می‌شد که متضمن شرحهای شایان توجه وگاهی هم بیان نظرهائی از پیشینیان بیلینگزلی، و به‌طور عمده‌تر نظرهای کامپانوس و دزامبرتی، بود. تأثیری که این دو دانشمند برکارهای بیلینگزلی داشتند از طریق دیگری هم تأیید شده است. در کتابخانهٔ دانشگاه پرینستن نسخه‌ای از اولین چاپ (editio priceps) ۱۵۳۳ متن یونانی اقلیدس وجود دارد که با چاپ «**مختلط**» **۱۵۵۸** بازل آثار کامپانوس و دزامبرتی در یک مجلّد صحافی شده است. معلوم نیست که این مقاله‌ها چگونه به تملک پرینستن در آمده‌اند، اما در هر دو یادداشتهائی به خط بیلینگزلی هست. این واقعیت که فقط در پنج صفحه از متن یونانی و در بیشتر از ۲۰۰ صفحه در متون کامپانوس و دزامبرتی یادداشت نوشته شده آشکارا منبع عمدهٔ بیلینگزلی را نشان می‌دهد. بار دیگر دو ترجمهٔ بنیادین لاتینی، یکی قرون وسطایی و دومی رنسانسی، پهنهٔ گستردهٔ نفوذ خود را نمایان ساخته‌اند.

اما بهترین بخش این نفوذ به‌طور ناگهان و به‌صورتی قاطع با چهارمین ترجمهٔ عمده‌ای که در بالا نام بردیم قطع شد: انتشار ترجمه لاتینی فدریکوْ کوْماندینوْی اوربینوْیی در پزاروْ به سال ۱۵۷۲/۹۵۱. کوْماندینوْ ــ که علاوه‌بر مقامی که با *Liber de centro gravitatis* («کتاب گرانیگاه»، بوْلوْنیا، ۱۵۶۵) در تاریخ فیزیک احراز کرده و ترجمه‌های دقیق لاتینی از آثار ریاضی متعدد یونانی فراهم آورده است ــ بی‌گمان در میان مترجمان و ویراستاران ریاضی کتابهای اقلیدسیِ دورهٔ رنسانس صاحب صلاحیت‌ترین کس بوده است. او در رشته دانشی خود موشکافترین فرد هم بود، زیرا که می‌دانیم برای تهیهٔ مبنای ترجمهٔ خود، علاوه‌بر نخستین چاپ لاتینی ۱۵۳۳ «اصول» یک نسخهٔ خطی یونانی دیگر نیز بکار برده است. برای نخستین بار، جز در مورد ترجمه‌های بی‌نام سدهٔ دوازدهم م اکنون ترجمه‌ای (به هر زبان که بکار رفته باشد) از «اصول» در دست داریم که به‌نحوی استوار برمبنای نسخهٔ انتقادی و قابل قبول اصیل یونانی قرار دارد. حتی برای اولین بار ترجمهٔ حاشیه‌های متعدد یونانی را متضمن است. کوْماندینوْ، که ازکوششهای پیشینیان خود آگاه است اما به‌نظر انتقادی در آنها می‌نگرد، در مورد مزیت نزدیکتر بودن به منابع یونانی، که بسا از آنها اگر نادیده گرفته نشده بودند قدرشان خیلی کم شناخته شده بود، جای تردید باقی نمی‌گذارد. نتیجهٔ زحمات طاقت فرسای او شاید

به دلربایی ترجمه‌های دیگر نباشد، زیرا که خیلی نزدیک است به یونانی‌ای که ما اکنون می‌دانیم، اما اهمیتش برای تاریخ جدید «اصول» از حیّز اندازه بیرون است. خلاصه، این ترجمه، پیش از آن که پیرار در اوایل سدهٔ نوزدهم اقلیدس «آغازین» را کشف کند، به‌عنوان اساسِ تقریباً همهٔ ترجمه‌های دیگر بکار رفته است. بدین‌ترتیب، اگر فقط از برجسته‌ترین متون «اصول» همراه با ترجمهٔ لاتینی نام ببریم، ترجمهٔ لاتینی غالباً مبتنی است بر کار کوْماندینوْ: مثلاً *Elementorum Euclidis libri VI priores* هنری بریگز (لندن، ۱۶۲۰) و حتی *Opera omnia*ی اقلیدس چاپ ۱۷۰۳/۱۰۸۲ آکسفرد به‌وسیلهٔ دیوید گرگوْری (که منبع نمونه و معیار پیش از سدهٔ نوزدهم شمرده می‌شود). کوْماندینوْ پیروانی هم در ترجمه‌های بعدی به لاتینی داشت: ترجمهٔ رابرت سیمسن، که همزمان در ۱۷۵۶/۱۱۳۵ در گلاسگو انگلستان به انگلیسی هم منتشر شد؛ و حتی ترجمه سیموئل هارزلی که در ۱۸۰۲/۱۱۸۱ در لندن انتشار یافت. ترجمه‌های دیگر به زبانهای محلی هم تقریباً همین جریان را طی کردند؛ با ترجمهٔ به ایتالیایی شروع شد، به‌وسیلهٔ کوْماندینوْ در آن تجدیدنظر شد، در ۱۵۷۵/۹۵۴ در اوربینوْ انتشار یافت، و تا ترجمهٔ به انگلیسی به توسط جان کیل، استاد سَویلیِ اخترشناسی دانشگاه آکسفرد در ۱۷۰۸/۱۰۸۷ گسترش یافت.

در هر ترجمه‌ای که سخت به کوْماندینوْ بستگی داشت، مترجم به ویرایش یونانی (تئونی) خیلی نزدیک می‌ماند؛ اما هم پیش و هم پس از کوْماندینوْ کوششهای دیگری هم شده است که خیلی رواج نیافت. اینها عبارت بودند از شرحهای متعدد بر اقلیدس، کتابهای درسی مختلف «اصول» و، در رده‌ای خاص خودش، ویرایش کریستوْفر کالویوس.

شرحهای سده‌های شانزدهم تا هجدهم تقریباً همه محدود بودند به مقاله‌های خاص یا اجزائی از «اصول». قبلاً به «یادداشتهای مختصر...» بوتئوْ اشاره کرده‌ایم، اما مقدار قابل توجهی از نوشته‌های تفسیری در همان اوان شروع به شکفتن کردند. جوْوانی باتیستا بندتّی (۹۰۹_۹۶۹) *Resolution omnium Euclidis problematum ... unatantummodo cricini data apertura*ی خود را در ونیز، در ۱۵۵۳/۹۳۲ در جواب نوعی تضاد و اختلاف که بتازگی در نتیجهٔ فکر چند دانشمند دربارهٔ اقلیدس پیداشده بود بیرون داد. پتروس راموس، که ترجمهٔ لاتینی «اصول» را در ۱۵۴۵/۹۲۴ منتشر کرده بود، در ۱۵۵۹/۹۳۸ در فرانکفورت کتاب *Scholae mathematicae*ی خود را منتشر ساخت که در آن با موشکافی به ساخت اثر اقلیدس از دیدگاه منطق پرداخته بود. در این میان باید یادی از *Euclideae demonstrationes in syllogismos resolutae*ی عجیب (اشتراسبورک، ۱۵۶۴) نوشتهٔ کوْنرات دازوپوْدیوس و کریستیانوس هرلینوس کرد. این‌گونه کتابها را به‌نحوی باید ادامهٔ، شاید هوسناکِ، علاقهٔ مَدرَسیِ قرون وسطایی با منطق «اصول» شمرد. نوع دیگری از گسترش را می‌توان در تلاشهای گوناگون برای تبدیل «اصول» به دانشی عملی دید. جلوتر به این دیدگاه در کار رابرت رکوْرد اشاره کرده‌ایم، و به آن می‌توانیم اولین ترجمهٔ آلمانی مقاله‌های یکم تا ششم را ــ که ویلهلم هوْلتسمان (کسولاندر) در ۱۵۶۲/۹۴۱ منتشر ساخت ــ بیفزاییم، که با توجه ذهنی به زرگران و نقاشان و ساختمان کنندگان نوشته شده بود؛ و به ترجمهٔ ایتالیایی (۱۶۱۳_۱۶۲۵) آنتوْنیوْ کاتالدی، که صریحاً اعلام کرده بود «اصولی مختص کاربرد» (Elementi ridotti alla practica).

در سطح خاصتری، شروحی بر مقالهٔ پنجم، و بخصوص بر تعریف اثودوْکسوسی از نسبتهای متساوی، که، همچنان که جلوتر دیدیم، مسأله‌انگیز است در سده‌های شانزدهم و هفدهم ادامه یافت. از آثار تقریباً بکلی ناشناخته جامباتیستا پوْلیتی، به نام *Super defitiones et propositiones quae supponuntur ab Euclide in quinto Elementorum eius*(سیئنا، ۱۵۲۹)، و از اثر الیا و نیتوْ سانتوْنه، بنام *Definitiones elementi quincti et sexti Euclidis* (بوْردوْ، ۱۵۷۵)، آغاز می‌کنیم؛ نتیجه به‌وسیلهٔ گالیلئوْ در الحاقیِ «روز پنجم» *Discorsi ... a due nuove scienze*(«سخنی ... در دانش نوین») او مورد بحث قرار گرفت (الحاقی‌ای که نخستین بار در ۱۶۷۴/۱۰۵۳ در فلوْرانس در [*Quinto libro degli Elementi d'Euclide* «مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس»] وینچنتسوْ و یویانی چاپ شد). آخر سر باید به دو شرح از اولین شرحهای مؤثر جدید دربارهٔ وجود برگزیدهٔ اقلیدس اشاره‌ای کنیم. اولی سخنرانیهای درسی هنری سَویل است، با عنوان *Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis Oxoniae habitae MDCXX*(آکسفرد، ۱۶۲۱)، که فقط شامل مقدمات و اولین هشت گزارهٔ مقالهٔ یکم است، اما به روشی فوق‌العاده نافذ و ارزنده. آخرین اثری که باید از آن یاد کرد چندان مشهور است که اغلب فراموش می‌شود که جزء سلسله شروح بر «اصول» بوده است، و آن *Euclides ab omni naevo vindicatus*جیروْلاموْ ساکری (میلان، ۱۷۳۳) است، که در آن این ریاضیدان و منطقیِ یسوعی دست به کوششی برای اثبات اصل موضوع توازی اقلیدس زد که برایش مقامی چنین ارجمند در تاریخ هندسه‌های نااقلیدسی ببار آورد.

آنچه ارتباط نزدیک با تفسیرها و شرحهائی که نمونه‌هایشان را دادیم دارد ترجمهٔ شکوهمند لاتینی «اصول» است به‌وسیلهٔ دانشمند یسوعی دیگری به نام کریستوْف کلاویوس (۹۱۶_۹۹۱). نخستین چاپ *Euclidis Elementorum libri XV*ی او در ۱۵۷۴/۹۵۳ در رم منتشر شد. این کتاب که، چنان که خود کلاویوس قبول دارد، ترجمه نیست بلکه نوشتهٔ خود او است که از مؤلفان پیشین مانند کامپانوس و دزامبرتی و کوْماندینوْ گردآورده است، به مناسبت مقدار زیادی مطالبی کمکی که دربردارد بسیار شایان توجه و فوق‌العاده ارزنده است. بخشهای عملی (Praxeis) جداگانه برای ترسیمهائی که در مسأله‌ها پیش می‌آیند، حاشیه‌های (excursus) طولانی در مورد مطالب قابل بحثی مانند زاویهٔ شاخ (بین منحنی و مماس بر آن)، و رساله‌های بالقوه خود ــ بسنده‌ای درباره موضوعهائی مانند نسبتهای مسلسل (مرکب) و وسایط عددی و هندسی و گونه‌هائی از تناسب که در کتاب اقلیدس نیست و واسطهٔ عددی مجذورها، در جاهای مناسب افزوده شده‌اند. به‌حساب خود کلاویوس، به ۴۸۶ گزاره‌ای که او در اقلیدسِ به‌مبنای یونانیِ خود شمرده است ۶۷۱ گزارهٔ دیگر از خودش علاوه کرد و نتیجه گرفته است که: «بنابراین به‌طور کلی ۱۲۳۴ گزاره در اقلیدس ما به اثبات رسیده‌اند». و ارزش مطالبی که گردآورده، خاصه برای مورخ، با حجم آن همسری می‌کند.

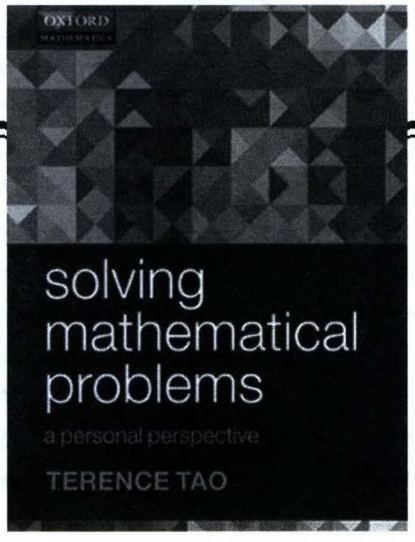
قسمت آخر تاریخ جدید اقلیدس که درخور وصف است چیزی است که شاید، به‌طور اخص، بتوان آن را به سنّت کتاب دستی «اصول»، چه به لاتینی و چه به زبانهای محلی، نامید. بسیاری از ترجمه‌های مختصرتر

دورهٔ رنسانس را که ذکرشان گذشت بحق جزئی از این سنت می‌توان شمرد؛ و اگر خود را به حجم کتاب محدود نسازیم چاپهای مثل کلاویوس هم می‌توانند در این وصف قرار گیرند. در حقیقت، جریان نهفتهٔ آموزشی بودن را که دیدیم در ترجمه‌های عربی و لاتینی قرون وسطایی «اصول» حضور دارند می‌توان آغازی برای این سنت کتاب دستی یا کتاب درسی شمرد.

اما این سنت در سدهٔ هفدهم صورت قاطعتری به‌خود می‌گیرد. مثالهای متعدد می‌توان از این دوره ذکر کرد، اما همهٔ آنها گرایش به کوتاه‌کردن استدلال، کنار گذاشتن گزاره‌های ــ حتی کتابهای کامل ــ کم‌مصرف، و واردکردن نمادها، در هر جا که ممکن باشد، برای آسان کردن درک مطلب از خود نشان می‌دهند. البته این گفته به معنی از میان بردن انواع مطالب مکملْ نیست که صفت شاخص این همه ترجمه‌ها و نگارشهای «اصول» است. بعکس، هرجا که به‌نظر می‌رسید که این گونه مطالب از جنبهٔ آموزشی ثمربخش است آنها با نظم جدید نگاه‌داشته، و حتی گاهی مطالب تازه آفریده می‌شدند. مثلاً یکی از محبوبترین اثرها (از میان تقریباً بیست کتاب درسی چند سال اول سدهٔ نوزدهم) کتاب *Elementa geometriae planae et solidae* («اصول هندسه‌های مسطح و فضایی»، آنتورپ، ۱۶۵۴) نوشتهٔ آندره تاکه (۹۹۱ـ۱۰۳۹) مشتمل است بر مقاله‌های یکم تا ششم و یازدهم و دوازدهم، با مطالبی اضافی از ارشمیدس. استدلالهایش پربار اما کوتاهند، ولی با افزودن تعداد درخور توجهی از فروع و حواشی که از جنبهٔ آموزشی مفیدند بر سودمندی کتاب افزوده شده است. از سوی دیگر، اثری از آیزک برُو (۱۰۰۹ـ۱۰۵۶) به‌نام *Euclidis Elementorum libri XV breviter demonstrati* (کیمبریج، ۱۶۵۵) سخت به‌خلاصه بودن پایبند است. برُو، که شاید کوتاهترین کتاب دستی از همهٔ مقاله‌های یکم تا پانزدهم را فراهم آورده است، این حداکثر فشردگی را با استفاده از نمادگذاری ویلیام آوترد (۹۵۳ـ۱۰۳۹) بوجود آورد، نمادگذاری‌ای که آوترد در ایضاع (declaratio) مقالهٔ دهم اقلیدس در *Clavis mathematicae* («کلید ریاضیات») خود (آکسفرد، ۱۶۴۸ و بعد) بکار برده بود. برُو در مقدمهٔ خود ادعا می‌کند که هدفش «حداکثر فشردگی در استدلال با متنهای موشکافی و دقتی است که موضوع اجازه می‌دهد». هرچند توفیق او بعضی (مانند، جان کیل) را به تألیف خلاصه‌هائی مبهم رهنمون گردید، مانع ظهور چندین (در حدود ده) چاپ نشد که بعضی از آنها به زبان انگلیسی بود. کتابهای دستی به زبانهای دیگر هم به طبع رسیدند، که شاید قابل ذکرترین آنها *Les Eléments d' Euclide* (لیوْن، ۱۶۷۲) از یسوعی فرانسوی کلوْد فرانسوا میلیه دشال (۱۰۰۰ـ۱۰۵۷) باشد. این کتاب دستی، که قبلاً به لاتینی منتشر شده بود (لیوْن، ۱۶۶۰)، مانند کتاب تاکه، مقاله‌های یکم تا ششم و یازدهم و دوازدهم را شامل بود و در حدود بیست و چهار بار، از جمله ترجمه‌های به انگلیسی و ایتالیایی، چاپ شد.

مرحلهٔ بعدی کتابهای دستی متعلق به سدهٔ نوزدهم است که در آن بهمنی راستین از کتابهای درسی اقلیدس فرود آمد که اکثراً بکلی از هر متن قابل تصور «اصول» دور بودند. بکلی جدا از تلاشهائی که برای مناسب ساختن کار اقلیدس برای دبیرستانهای دههٔ ۱۱۸۰ صورت می‌گرفت، پیدایش زبانشناسی زبانهای قدیم همراه با تلاشهائی بود برای تهیه متنی انتقادی و استوار از «اصول». این تلاشها به نوبهٔ خود به‌ظهور ترجمه‌های تحشیه شدهٔ قرن حاضر انجامید که حاضران در صحنه آن بیشتر مورخان و ادیبان کهن‌شناس بودند تا ریاضیدانان.

در بالا فقط به ذکر تعداد ناچیزی از ترجمه‌های بی‌شمار «اصول» از دورهٔ رنسانس تا عصر حاضر پرداخته شده است ــ که بیشترشان فقط به‌صورت فهرست درکتابنامه‌ها آمده و بکلی مطالعه نشده باقی مانده‌اند. حتی عنوانهائی از این دوره که از آنها یاد شده است خیلی کم مورد دقتی سطحی واقع شده‌اند، که غالباً محدود به مطالعهٔ مقدمهٔ آنها از طرف مورخان بوده است. بی‌شک مطالعهٔ بیشتری اهمیت این انبوه مطالب مربوط به اقلیدس را برای تاریخ ریاضیات، و علوم به‌طور کلی، مبرهن خواهد ساخت.



حل مسائل ریاضی: دیدگاهی شخصی•

لورن لارسن*

Solving Mathematical Problems : A Personal Perspective, **Terence Tao, Oxford University Press (2006), 128 pp.**

پال هالموس در سال ۱۹۸۰ مقالهٔ خود را در مجلهٔ مانتلی با عنوان «قلب ریاضیات» [۱] با ابزار این عقیده به پایان بود:

> من معتقدم که مسائل قلب ریاضیات‌اند، و امیدوارم ما به‌عنوان معلم، در کلاسهای درس، سمینارها، کتابها، و مقالاتی که می‌نویسیم، بیش از پیش بر آنها تأکید کنیم، و دانشجویان خود را چنان تربیت کنیم که مسأله‌طرح‌کن‌ها و مسأله‌حل‌کن‌های بهتری از ما باشند.

اینک، پس از گذشت سی‌سال، تصور می‌کنم اگر او در قید حیات بود از آنچه رخ داده است خشنود می‌بود. امروز حل مسأله در آموزش ریاضیات، از کودکستان گرفته تا دورهٔ متوسطه، از دبیرستان گرفته تا دانشگاه، و دوره‌های پس از آن، موضوعی اساسی است. یادگیری ریاضیات به‌معنی ریاضی‌ورزی است، ترکیبی است از حل تمرینها[ی تکنیکی] برای کسب مهارت و مسأله‌ها برای درک عمیق مطالب. نسبت هر یک از آنها به‌نوع درس بستگی دارد، می‌تواند از ۱۰۰ به ۰ برای درسهای فشرده که در آنها مسائل بعداً (به‌منظورهای مختلف) مطرح می‌شوند تا ۰ به ۱۰۰ برای درسهای مبتنی بر روش مور[۱] که در آنها تکنیکهای ماهرانه بعداً عرضه می‌شوند، باشد. هر دو لازم‌اند، ولی از لحاظ آموزشی، مسائلی که تحت شرایط مورد نظر به‌طور مناسب انتخاب شوند، سرگرم‌کننده‌تر و رضایت‌بخش‌ترند. به قول آلبرشت دورر[1]، «علاقه و شعف، آموزگانی بهتر از زور و اجبارند.»

یکی از راههای ایجاد انگیزه برای حل مسأله، برگزاری مسابقات ریاضی است؛ در حال حاضر مسابقاتی متنوع برگزار می‌شود و فرصتهایی فراوان برای شرکت در این مسابقات وجود دارد. انبوهی از متون و امکانات، داوطلبان را برای شرکت در این مسابقه‌ها آماده می‌کنند: گزیده‌ها، گردآوری‌ها، کتابهای چگونه مسأله حل کنیم، مباحث خاص، راهبردهای حل مسأله، کلاسهای برخط، گردهمایی‌ها، اردوهای تابستانی، و ویدئوها (به‌عنوان نمونه، مراجعه کنید به `http://www.artofproblemsolving.com`). مسابقات نقش مسلمی در ایجاد علاقه به ریاضیات، البته نه در مورد هرکس، دارند. برخی از دانشجویان با شرکت در مسابقات دلزده می‌شوند، یا دارای علائقی ریاضی‌اند که با قالب مسابقه سازگاری ندارد، یا احساس می‌کنند که در مسابقات سرعت بر توانایی غلبه دارد (و نه اینکه این دو نمی‌توانند در کنار هم باشند)، اما، راههای دیگری برای ایجاد انگیزهٔ حل مسأله و مشارکت شخصی افراد در آن، مانند سمینارهای مسائل، پژوهشهای مستقل، و پروژه‌های میان‌رشته‌ای وجود دارد.

یافتن مسائل مناسب به‌وقت زیادی نیاز دارد. از کتابهای مسأله می‌توان برای کسب ایده و شروعِ کار استفاده کرد، به‌عنوان مثال، با تغییرات غیربدیهی در صورت نتایج منتشرشده و یا با درنظرگرفتن حالتهای خاص آنها. منبع بهتری برای هدفمندکردنِ ایده‌ها و به‌روز نگه‌داشتن آنها، جامعهٔ تحقیقاتی است ــ از طریق ارتباطات شخصی و شبکه‌ای، گروههای خبری، بخشهای مسألهٔ مجلات حرفه‌ای، و مقالات مجلات ــ در مسابقاتِ سطح بالا مسأله نه تنها

۱. روش مور (Moore) که به نام مبدع آن رابرت لی مور، توپولوژیدان برجسته معروف است روشی است در آموزش دروس ریاضیات عالی که به‌وسیلهٔ او در سال ۱۹۱۱ در دانشگاه پنسیلوانیا به‌کار برده شد. به اجمال می‌توان گفت که در این روش معلم به‌جای استفاده از کتاب درسی، مجموعه‌ای از تعریفها و قضیه‌ها را در اختیار دانشجویان قرار می‌دهد که مطالب را پس از اثبات در کلاس عرضه کنند.ــم.

1. Albrecht Dürer

باید اصیل باشد، بلکه باید با بصیرت خاصی ارائه شود. طراحان چنین مسائلی باید در ابزار حس خود نسبت به زبان، طبع هنری خود، و حتی شوخ‌طبعی خود آزاد باشند. به نفع جامعهٔ ماست که این نوع تلاش را تشویق کند، زیرا علاقه‌مند ساختن دانشجویان به پژوهشهای جاری از طریق مسائل یکی از راههای مهم ایجاد تحرک ذهنی است. پال اردوش استادِ معرفیِ ایده‌های غنی ریاضیات از راه بیان مسأله بود. مسائل پاتنم[1] طی سالها طراوت و تازگی خود را به‌خاطر مشارکت محققان و مشتاقان قهار مسأله حفظ کرده است. کتاب پاول و جودیت سَلی [۴] از این نظر سودمند است که نشان می‌دهد گاهی می‌توان یک مفهوم واحد ریاضی را درنظر گرفت و آن را به‌صورت مسألهٔ مهمی در تقریباً هر سطح تخصصی ریاضی بیان کرد.

ترنس تائو، مؤلف کتاب مورد نقد، یکی از ستارگان ریاضی است که در سال ۲۰۰۶ برندهٔ نشان فیلدز شد. در صورتی که با دستاوردهای تحسین‌برانگیز وی و نبوغ او از خردسالی آشنا نیستید، به هر صورتی که شده نگاهی به داستان حیرت‌انگیز زندگی او بیندازید. هر چند که وی این کتاب را زمانی نوشته که تنها پانزده سال داشته است، ولی از صلاحیت کافی برای این کار برخوردار بوده است: وی قبلاً در سه المپیاد بین‌المللی ریاضیات شرکت و جوایز برنز، و نقره، و سپس طلا را درست چند روز پس از سیزدهمین سالگرد تولد خود کسب کرده بود.

در نگاه اول، هدف این کتاب آشناکردن دانش آموزان دبیرستانی با نحوهٔ حل مسائل المپیادگونه است. تقریباً همهٔ مسائل کتاب از مجموعه‌های منتشرشده در مورد مسابقات ریاضی انتخاب شده‌اند. در پیشگفتار ویراست دوم کتاب، تائوی جاافتاده در سن سی‌سالگی می‌گوید که اگر هم‌اکنون درصدد نوشتن کتاب مسأله بود، کتابی به‌کلی متفاوت می‌نوشت. ولی در برابر وسوسهٔ دست بردن درکتاب به استثنای تغییراتی جزئی در نظم و ترتیب مطالب ایستادگی کرده است، با اشاره به اینکه «شخصیت تائوی نوجوان با دنیای مسأله‌حل‌کن‌های دبیرستانی هماهنگی بیشتری دارد.» در واقع، یکی از ویژگیهای بسیار جذاب این کتاب توصیف پرشوروحال آن است، که تائوی پا به سن گذاشته به آن اشاره می‌کند «[آگاهی] این توصیف از سادگی خاصی برخوردار است، یا حتی ساده‌لوحانه است.» در اینجا گزیده‌های جذابی را از پیش‌درآمد فصلهای کتاب می‌آوریم (در صورتی که با جوانان استثنایی کار کرده باشید، با این‌گونه نظرات آشنا هستید):

جبر: جبر پایهٔ اساسیِ بخش مهمی از ریاضیات کاربردی است. مسائل مکانیک، اقتصاد، شیمی، الکترونیک، بهینه‌سازی، و جز آن با جبر و حساب دیفرانسیل، که صورت پیشرفته‌ای از جبر است، حل می‌شود. در واقع جبر به‌قدری مهم است که بسیاری از رازهای آن کشف شده‌اند ــ بنابراین آن را می‌توان در برنامهٔ آموزشی دبیرستان گنجاند. با این وصف، هنوز می‌توان گوهرهایی چند اینجا و آنجا یافت.

نظریهٔ اعداد: برخلاف جبر، که ستون اصلی آن قوانین عملیات روی معادلات است، به‌نظر می‌رسد نتایج نظریهٔ اعداد از منبع نامعلومی به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال، قضیهٔ لاگرانژ را درنظر بگیرید. . . . نظریهٔ اعداد یکی از ارکان اصلی ریاضیات است که بخش عمده‌ای از ریاضیات بر آن استوار است.

آنالیز: آنالیز مطالعهٔ توابع و ویژگیهای آنهاست . . . . معادله‌های تابعی نوعی «ریاضیات جیبی» را تشکیل می‌دهند، که در آن به‌جای دهها اصل موضوع و هزاران قضیه، تنها معدودی «اصل موضوع» (یعنی داده) برای استفاده در دست است، و مسیر روشنی برای پیشروی وجود دارد. با وجود همهٔ اینها، هنوز دارای شگفتیهایی است.

هندسه: زیبایی راستین هندسه در این است که چگونه درستی حکمی غیرواضح با به‌کارگیری مکرر احکامی واضح به‌طرز انکارناپذیری ثابت می‌شود. به‌عنوان مثال: همواره نقاط وسطِ چهار ضلع هر چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع می‌سازند ــ اینها حقایق جالبی هستند.

به این اظهارات باید به اقتضای شرایط نگریست. باید در نظر داشت که خوانندهٔ مورد نظر او شخصی است مثل او در سن نه سالگی، که سخت مشتاق و مستعد است، و توجه خود را به یادگیری مسائل ریاضی در سطح المپیاد تا حد ممکن معطوف کرده است. در این سن و سال، نوعی خودنمایی و قدری اغراق و رفتار غیرعادی دور از انتظار نیست. اهداف او از تألیف این کتاب در پیشگفتار تشریح می‌شود:

> تلاش خواهم کرد تا برخی از ترفندهای این کار را در حین حل مسأله نشان دهم. دو حربهٔ اصلی ــ تجربه و معلومات ــ را نمی‌توان درکتابی آورد: این دو را باید در طول زمان به‌دست آورد. اما ترفندهای متعدد آسان‌تری موجودند که آموختن آنها نیاز به زمان زیادی ندارد. راههایی برای بررسی مسأله وجود دارد که یافتن طرحی را برای پرداختن به مسأله آسان‌تر می‌سازد. شیوه‌های سامانمندی در دست است که به کمک آنها می‌توان مسأله‌ای را به مسائل فرعی آسان‌تر تبدیل کرد.

معمولاً کتابهای ریاضیِ «چگونه می‌توان» به کاربردهای خاصی از روشهایی که جورج پولیا [۳] ارائه کرده است توجه دارند، و این کتاب هم از این قاعده مستثنی نیست ــ هدفْ ایجاد زمینه برای حل است. ولی، شیوه‌ای که تائو در پیش می‌گیرد، از جملهٔ ممتازترین ویژگیهای کتاب است. زیرا نه‌تنها به زمینه‌چینی برای حل مسأله می‌پردازد، بلکه کل فرایند تفکر خود را شرح می‌دهد، و ایده‌های مطرود و شروعهای نادرست خود را نیز ذکر می‌کند. گویی با صدای بلند فکر می‌کند، همان‌طور که پیش می‌رود توضیح می‌دهد ــ هر مسیر، جریانی ظاهراً بی‌دردسر از ایده‌هاست. این کتاب، کتاب کم‌قطری است، در حدود ۱۰۰ صفحه، ولی مسائل آن به‌خوبی انتخاب شده‌اند، تنها بیست و شش تا از آنها، تقریباً با همان تعداد تمرین آموزنده، بدون حل‌اند. راه‌حل‌های مسائل تقریباً جزئی از مشاهده‌ها و فرمول‌بندی‌های مجدد تائو ضمن طی مسیر هستند. او به ما نشان می‌دهد که چگونه مانند ریاضیدانان فکر کنیم. به‌عنوان مثال، حل واقعی مسألهٔ ۲.۲ (آیا توانی از ۲ وجود دارد که ارقام آن را بتوان از نو چنان مرتب کرد که دوباره توانی از ۲ باشد؟) تنها در شش خط آمده، ولی پیش از آن پنج صفحه بحث صورت گرفته است.

ویژگی بارز نظر تائو دربارهٔ حل مسأله برعقیدهٔ پولیا استوار است، که هالموس آن را به‌طرز زیبایی بیان کرده است [۱]:

> آن را آسان‌ترکن. به عبارت دیگر: در صورتی که نمی‌توانی مسأله‌ای را حل کنی، مسألهٔ آسان‌تری وجود دارد که آن را [هم] نمی‌توانی حل کنی، و نخستین کار یافتن آن است! آن را مشخص کن. منظورم

1. Putnam

این است که: بی‌درنگ در مورد سؤالات طبیعی پافشاری نکن («چه . . .؟»، «چه موقع. . .؟»، «چه اندازه. . .؟»)، بلکه به‌جای آن نخست در مورد سؤالِ آسان (ولی غیربدیهی) بله-یا-نه («آیا آن . . . است»؟) تمرکز کن.

این رویکرد اساساً شبیه روش بولتسانو-وایرشتراس برای گرفتن شیری در بیابان است [۲]: یعنی با تنصیف مکرر ناحیه با خطوط عمودی و افقی متناوب، و با انتخاب نیمه‌ای که شیر در آن است، در هر مرحله، حصاری تعبیه می‌کنیم. سرانجام شیر در حصاری که پیرامون آن به‌قدر دلخواه کوچک است گرفتار می‌شود.

به بیان دیگر، ابتدا باید بیابان را مساحی کنی؛ یعنی، مسأله را درک کنی و همهٔ مطالبی را که فکر می‌کنی به مسأله مربوط است، بنویسی. این موضوع به‌خصوص در این سطح مهم است زیرا شاید واضح‌ترین شروعها به ثمر نرسد. در این صورت، با در دست داشتن این فهرست، به تنصیف بپردازید، و ایده‌هایی را که کار را دشوارتر می‌کنند کنار بگذارید. این فرایند را با طرح نظام‌مندِ پرسشها و تبدیل آنها به مسأله‌های جزئی‌تر تکرار کنید تا بخشهای دشوار دیگر دشوار نباشند. «آن را آسان کن» شعار کتاب است که خواندن آن را دلچسب می‌کند. تائو این مضمون را با شاخ و برگ بیان می‌کند:

> از این قرار، معادله را به فرمولهای ساده‌تر و ساده‌تر تبدیل می‌کنیم تا اینکه چیزی از آن باقی نماند. کار دشواری است، ولی گاهی تنها راه چاره برای حل این معادلات بسیار پیچیده است: ساده‌سازی گام به‌گام.
>
> تا می‌توانید [مسأله را] ساده کنید تا بخشهای غیرقابل استفاده و انعطاف‌ناپذیر مسأله به‌صورت طبیعی‌تر و انعطاف‌پذیرتر در آیند.
>
> بهتر است ابتدا روشهای مقدماتی را به‌کار بندیم. این کار باعث می‌شود زیاد دور خودمان نچرخیم.
>
> تا وقتی که برای ساده‌ترکردن و ایجاد ارتباط تلاش کنید، این شانس وجود دارد که مسأله به‌زودی حل شود. (البته، با این فرض که حلی موجود باشد—و بسیاری از مسائل در پی این نیستند که سر به‌سر شما گذارند.)

در اینجا مثالی می‌آوریم که نحوهٔ اجرای این رهنمود را شرح می‌دهد: در یکی از مسائل هندسه از شما خواسته می‌شود ثابت کنید که مثلث مفروضی متساوی الساقین است یا زاویهٔ خاصی ۶۰° است. تائو بی‌درنگ هندسهٔ تحلیلی را کنار می‌گذارد: «استفاده از هندسهٔ تحلیلی راه طولانی و کسل‌کننده‌ای است که ممکن است پیچیدگی زیاد داشته باشد و در معرض اشتباهات فاحش باشد. بیایید از آن به‌عنوان آخرین حربه استفاده کنیم.» با تشخیص اینکه نتیجه راجع به زاویه‌ها و دادهٔ مفروض متضمن پاره‌خط‌های برابر است، وی به نتایجی نیاز دارد که به‌طول و زاویه مربوط‌اند. بنابراین احکام مربوط به مثلثهای قائم‌الزاویه، مثلثهای متساوی‌الساقین، قانون کسینوسها، و قانون سینوسها را یادداشت می‌کند. تعداد زیادی مثلث قائم‌الزاویه در شکل موجود نیست، بنابراین اجازه دهید دیگر چنین مثلثی درست نکنیم. پاره‌خط‌های برابر بخشی از یک مثلث متساوی‌الساقین نیستند که مستقیماً به نتیجه مربوط باشند، بنابراین فعلاً از آن می‌گذاریم. وی ادامه می‌دهد: «معمولاً قانون کسینوسها کار را به‌جای اینکه ساده‌ترکند پیچیده‌تر می‌کند، و تنها طولهای مجهول زیادتری پدید می‌آورد. بنابراین تنها قانون سینوسها به‌عنوان شق ممکن باقی می‌ماند.» این به برابریها منجر می‌شود، و سپس به جرح و تعدیلهای بیشتر و فرمول‌بندی‌های نو و خلاصه‌سازی‌هایی براساس هدف کلی، و سرانجام به زاویه‌های مربوط.

بسیار خوب، این تبدیل گام‌به‌گام به‌خصوص در مسائل المپیادگونه مؤثر است، و تائو این موضوع را در پیشگفتار اولیه اعلام می‌کند:

> مسائل ریاضی [المپیادگونه] از نوع ریاضیاتِ «پیراسته»اند، که برای آنها حل زیبایی از پیش پیدا شده است، سؤالها از حشو و زواید پیراسته شده و به‌صورتی جالب و (انشاءالله) تفکربرانگیز طرح شده‌اند. اگر ریاضیات را به‌جستجوی طلا تشبیه کنیم، مسألهٔ خوب ریاضی شبیه «قایم موشک‌بازی» درکشف طلاست: از شما خواسته می‌شود تکه‌ای از طلا را بیابید، و شما از کم و کیف آن آگاه‌اید، می‌دانید آن بیرون در جایی است، رسیدن به آن دشوار نیست، پیداکردنش از توانایی شما خارج نیست، و تجهیزات لازم (یعنی، داده‌ها) برای به‌دست آوردن آن در اختیار شما گذاشته شده است. چه بسا در جای عجیبی پنهان شده باشد، ولی برای دسترسی به آن به‌جای حفاری، به خلاقیت نیاز است.

مسائل مسابقه موقعیتی را فراهم می‌کند که از طریق آن، عادت تفکر ریاضی حاصل می‌شود. مزیت روانی، این مسائل را به‌طور ایده‌آل برای ایجاد نحوهٔ تفکری مناسب می‌سازد که به ریاضیات «ناپیراسته» منجر می‌شود یعنی عادت به انجام‌دادنِ هر آنچه از دستتان برمی‌آید و پیشاپیش اندیشیدن دربارهٔ نحوهٔ ساده‌کردن بخشهای پیچیده.

فرض کتاب این است که خواننده زمینه‌ای قوی در حساب و جبر بنیادی (حساب پیمانه‌ای، دستورهای تجزیه، اتحادهای مقدماتی)، هندسهٔ اقلیدسی متعارف مشتمل بر روشهای برداری مقدماتی، و ویژگیهای چندجمله‌ای‌ها و توابع، و نیز استقرای ریاضی دارد. در صورتی که امروز تائو پانزده ساله بود، کتابش مباحث بیشتری از ریاضیات گسسته را دربرمی‌گرفت، مانند اصل لانهٔ کبوتر، نظریهٔ مقدماتی گرافها (دستور اویلر $V - E + F = ۲$، مدارهای اویلر-همیلتن)، و ترکیبیات (اصلهای شمارش، فرمولهای بازگشتی). با وجود این، رویکرد کلی به حل مسأله تفاوتی نمی‌کرد، و تا حد زیادی این ویژگی است که همراه با بیان مبسوط، روشمند، صمیمانه، و پرشور، کتاب را به‌صورت افزودهٔ ارزشمندی به منابع مربوط به حل مسأله و نحوهٔ تدریس آن در می‌آورد.

مراجع

1. P. R. Halmos, The heart of mathematics, *The American Mathematical Monthly* **87** (7, Aug.-Sept) (1980), 519-24.
2. H. Pétard, A contribution to the mathematical theory of big game hunting, *The American Mathematical Monthly*, **45** (1938), 446-7.
3. G. Pólya, *How to Solve It*, 2nd Edition, Princeton University Press, 1957.
4. J. D. Sally and P. J. Sally Jr., *Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007.

* * * * * *

• Loren Larson, *Notices Amer. Math. Soc.*, (2) **57** (2010) 244-247

* لورن لارسن، کالج سینت اولاف، آمریکا

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم•

پال هالموس
ترجمهٔ سیامک کاظمی

فصل چهارم ــ یاد می‌گیرم چگونه مطالعه کنم

دوب وارد صحنه می‌شود

آن سال تحصیلی که از پاییز ۱۹۳۵ آغاز شد سال مهمی بود، سالی سرنوشت‌ساز، و به‌یادماندنی‌ترین رویدادی که چنین خصوصیتی به آن سال بخشید، ورود جو دوب[1] به دانشگاه ایلینوی بود.

امبروز و من دانشجویانِ از همه جا با خبرِ تحصیلات تکمیلی بودیم. از همه چیزِ بخش اطلاع داشتیم، همه کس را می‌شناختیم، و می‌شد به ما اعتماد کرد که از پسِ هر کاری که در یک بعدازظهر اوایل سپتامبر پیش آید، برمی‌آییم ــ منشی بخش مراقبت از دفتر را به ما سپرده بود. جوانکی وارد دفتر شد که شبیه دانشجویانِ تازه واردِ تحصیلات تکمیلی به‌نظر می‌رسید، با موی اصلاح شده و بدون کُت. بعداً دانستم ۲۵ ساله است اما ۱۹ ـ ۲۰ ساله به‌نظر می‌آمد. از او پرسیدیم: چه می‌خواهی؟ سراغ کابل را از ما گرفت. گفت: «اسم من دوب است» و آن را هجی کرد. شنیده بودیم جوان نخبه‌ای پس از پژوهشیاری[2] در کلمبیا به ایلینوی می‌آید. پاها را به‌سرعت از روی میز برداشتیم و خودمان را به او معرفی کردیم. طولی نکشید که زندگی ما به‌هم پیوند خورد. چند روز پس از ورود دوب، دفتر خاطرات من عبارتهای زیادی از این قبیل دربردارد: «شوت بال با دوب»، «سیزده دور (!) بازی اسکوواش با دوب، ۷ به ۶ به نفع او»، و «کلاس دوب خوب است». [من در کلاس او نبودم ـ برای آن آمادگی نداشتم ـ ولی گهگاه به‌عنوان مستمع آزاد در آن شرکت می‌کردم.] در یکی از اولین بازیهای اسکوواش با دوب، شوتی را از دست دادم و از سرِ عصبانیت، ناسزایی گفتم. او گفت: «فقط مرا جو صدا بزن». ما دربارهٔ ریاضیات صحبت می‌کردیم، نه اینکه از سیاست و موسیقی و شایعات حرفه‌ای و خیلی دیگر از دغدغه‌ها و علائق انسانی حرفی نزنیم، ولی بیش از هر چیز دربارهٔ ریاضیات حرف می‌زدیم. آیا مجموعه‌ای در صفحه هست که . . .؟ . . . ولی اگر خودِ مشتق، مشتق‌پذیر نباشد آیا باز هم نتیجه می‌شود که . . .؟

در آن دوران برنامهٔ درسی ریاضیات در ایلینوی پرمایه و کاملاً روزآمد نبود. ولی احتمالاً از بیشتر دانشگاههای دیگر بدتر هم نبود. تعداد موارد استثنا (مانند شیکاگو، هاروارد، و پرینستن) بایستی کم بوده باشد. دوب اولین ریاضیدان مدرنِ مطلع در بخش ما بود. مارتین و باوئر[1]، و به دنبال آنها خیلیهای دیگر، بعداً آمدند. هر چند زندگی حرفه‌ای من بعدها به تفکر دربارهٔ نظریهٔ ارگودیک، گروههای توپولوژیک، منطق ریاضی، و آنالیز تابعی گذشت که موضوعات داغ در دههٔ ۱۹۳۰ بودند، زمانی که در ۱۹۳۸ درجهٔ دکتری خود را گرفتم تقریباً با هیچ بخشی از این موضوعها آشنایی نداشتم و مسلماً هیچ درسی در آنها نگذرانده بودم. معدودی از ما دانشجویانِ تحصیلات تکمیلی سمینار کوتاه‌مدتی براساس کتاب باناخ راه انداختیم. ولی صرف‌نظر از آن، آنچه در جریان بود، برنامهٔ درسی معمولی بود که از مرزهای پژوهش دور بود. دوب رسالتی برای خودش احساس نمی‌کرد که با طراحی یک برنامهٔ درسی جدید، انقلابی راه بیندازد ولی صرفِ وجودش به‌تدریج حال و هوای جدیدی در محیط القا کرد.

دانشجویان تحصیلات تکمیلی که دوب باید با آنها کار می‌کرد، درسهای جبر و آنالیز و هندسه را به‌شرحی که گفته‌ام می‌گرفتند. درسهای سال دوم و سوم در موضوعات مرزی مانند جبر هومولوژیک، توپولوژی دیفرانسیل، و آنالیز تابعی که بعدها بسیار متداول شدند در آن زمان ناشناخته بودند؛ تنها چیزی که شباهت اندکی با آنها داشت، بعضی درسهای گهگاهی و نادر بود، مانند درسی

1. Joe Doob 2. fellowship

1. Baer



جی. ال. دوب، ۱۹۶۷

در توابع بیضوی که کارمایکل یک‌بار عرضه کرد. در آخرین سال تحصیلی من، دوب کوشید کار جدیدی انجام دهد: او درسی در توپولوژی عرضه کرد که قبلاً به آن اشاره کرده‌ام. این درس عمدتاً مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها بود ولی هوموتوپی و رده‌بندی خمینه‌های فشردهٔ ۲بعدی را دربرداشت. تا سالها پس از آمدن دوب به ایلینوی، هر چند رساله‌های دکتری متعددی در زمینهٔ فرایندهای تصادفی زیر نظر او تدوین شد، وی هرگز شانس تدریس یک درس پژوهشی در زمینهٔ تخصصی خودش را نیافت؛ دانشجویانش باید خودشان مطالب لازم را از روی متون اصلی می‌آموختند. نمی‌خواهم نتیجه بگیرم که این روال، روال بدی است ــ شاید بهتر از نظام «پخته‌خواری» باشد ــ ولی امروز چنین شیوه‌ای مسلماً بسیاری از دانشجویان تحصیلات تکمیلی و بسیاری از مدرسان آیندهٔ درسهای پراعتبار پژوهشی را به‌وحشت می‌اندازد.

ضمناً، هر چند من دوب را تحسین می‌کنم و آدم مهمی می‌دانم، گمان نمی‌کنم سخنران و مدرس خوبی باشد. بسیار آسان‌گیر و غیرجدی است. ظاهراً از ترس اینکه مبادا از خودراضی به‌نظر برسد، همه چیز را کم اهمیت جلوه می‌دهد ــ هیچ چیز مهم نیست، هیچ چیز سخت نیست، هیچ چیزی به صرف وقت زیاد (وقت کافی؟) نمی‌ارزد. در گفتگوی خصوصی دیدگاه او پیروز می‌شود ــ ولی حتی در این مورد هم به‌جای آنکه فقط به سخنان او گوش بدهید باید توجه کنید که چه حالتی دارد و چگونه به‌نظر می‌آید. در حالات او، توجه و علاقه به موضوع، خرسندی و هیجان‌زدگی مشهود است ولی آنچه به زبان می‌آورد از این قبیل است: «این کاملاً بدیهی است . . . تنها کاری که باید بکنید . . .». بهترین حالت او وقتی است که در مسأله‌ای گیر می‌کند و شما می‌توانید دست و پنجه نرم‌کردن او را با مسأله ببینید ــ در آن موقع مصمم و جدی است.

او خصلتی را که هر معلمی قطعاً باید داشته باشد داراست: او می‌تواند دریابد که شاگرد چه چیزی را نمی‌بیند. آسان‌گیری و مختصرگویی او در اینجا می‌تواند منبع بصیرت شود. به‌یاد می‌آورم که یک بار فقط دو کلمه به من گفت که مفهوم را برایم روشن کرد. من سعی می‌کردم مفهوم خمهای راستیدنی را بفهمم و کتابهایی که در این مورد به آنها مراجعه می‌کردم هرگز آن دو کلمهٔ اساسی را نمی‌گفتند (حالا که به گذشته برمی‌گردم در این مورد شک دارم ــ شاید این دو کلمه را دربرداشتند ولی من توجهی نمی‌کردم). به‌هر حال، مجموعها و قدرمطلق‌ها و نابرابریها و کرانهای بالا مرا گیج کرده بود و اختلافها و شباهتهای پیوستگی مطلق و تغییر کراندار را درست درک نمی‌کردم. در گفتگو بین عده‌ای از ما موضوع خم راستیدنی دوباره مطرح شد. لابد من گیج و مشوش به‌نظر می‌رسیده‌ام و جو این را حس کرده بوده است. او رو به من کرد و گفت: «طول دارد». همین دو کلمه، به آنچه خوانده بودم معنا بخشید.

همه‌اش کار و سیاست

نصایحی که من به دانشجویان تحصیلات تکمیلی می‌کنم همیشه آن چیزهایی نیست که خودم در زمان دانشجویی به آنها عمل کرده باشم. مثلاً به آنها نصیحت می‌کنم که هرگز در دانشگاهی که دورهٔ کارشناسی را در آنجا گذرانده‌اید، برای تحصیلات تکمیلی نمانید. ماندن فکر خوبی نیست: به‌اندازهٔ کافی چیز یاد نمی‌گیرید، با افراد زیادی آشنا نمی‌شوید، و دیدگاهتان محدود و بسته باقی می‌ماند. تغییر محل تحصیل از ایلینوی به میشیگان، و حتی از پرینستن به ایلینوی، و مسلماً از لُس‌آنجلس به شیکاگو شما را در معرض ایده‌ها و دیدگاههای جدید قرار می‌دهد؛ ریاضیاتی می‌آموزید که قبلاً ندیده‌اید، رویکردها و شیوه‌هایی می‌بینید که برایتان تازگی دارد. اعضای هیأت علمی در محل جدید، و دوستان دانشگاهی آنها، منابع ارتباطات علمی شما را گسترش می‌دهد و غنا می‌بخشد. حتی اگر محل جدید در سطح معمولی و نه چندان بالا باشد، باز هم مهم است؛ همه باید بدانیم که شیوه‌های برگزاری و سازماندهی درسها، سمینارها، کتابخانه و به‌طور کلی، راهبریِ بخشهای دانشگاهی، متعدد است. این نکتهٔ حکیمانه‌ای است که همه آن را قبول دارند. من در زمان دانشجویی توجهی به این موضوع نداشتم، ولی ایکاش می‌داشتم.

اندرز دیگری که امروز به دانشجویان می‌دهم و ای کاش خودم هم به آن عمل کرده بودم به این مثل قدیمی مربوط می‌شود که «همه‌اش کارکردن و هیچ تفریح نکردن، آدم را ملول و ملال‌آور می‌کند». من اعتقادی به این مثل ندارم و گمان می‌کنم «فقط کارکردن و تفریح‌نکردن» تنها راهی است که می‌توان کاری را از پیش برد. اگر نظرم را به افراطی‌ترین شکل مطرح کرده‌ام می‌توانم آن را پس بگیرم و تعدیل کنم. منظورم یک عمر رنج و بردگی نیست و بازی مفرح تنیس، خواندن داستان پلیسی، صرف شام در چایناتاون[1] با گروهی از دوستان یا سینمای شنبه‌شب‌ها را نفی نمی‌کنم. می‌خواهم بگویم که کار دانشمند، رنج و مشقتی نیست که بدون تفنن، تحمل‌ناپذیر باشد و برای بیشتر ما دو نوع دلبستگی شدید، زیاد است.

ما ریاضیدانها خوشبختیم و در این خوش‌اقبالی مانند بسیاری از هنرمندان هستیم. ما پول می‌گیریم تا کاری انجام دهیم که از آن لذت می‌بریم. وصف حال ما این ترانهٔ قدیمی کارگری نیست که: «می‌رویم کار کنیم، تا پولی به‌دست آوریم، تا غذایی بخریم، تا توش و توانی به‌دست آوریم، تا برویم کار کنیم، تا پولی به‌دست آوریم، . . .». صندوقدار رستوران، خسته از کار روزانه‌ای که از آن بیزار است، ممکن است در آموزشگاه شبانه حقوق بخواند، خواه برای لذتی که از آن می‌برد یا برای ارتقای سطح زندگیش، یا هر شب به بولینگ

1. Chinatown

برود، چون به تفنن و سرگرمی نیاز دارد، ولی ما نیازی به تفنن نداریم. من ممکن است تا آنجا پیش بروم که بگویم ما نباید کار تفننی داشته باشیم. اغلبِ ما موجودات فانیِ عادی آنقدر توان ذهنی و روحی نداریم که بین دو علاقه تقسیم شود؛ ما نمی‌توانیم هم در ریاضیات و هم در نواختن ویولن‌سل مهارت داشته باشیم، یا هم در ریاضیات و هم در مبل‌سازی خلاقیت زیادی داشته باشیم، یا هم در ریاضیات و هم در سیاست مؤثر باشیم. محدودکردن علائق به یکی، و هدایت‌کردن همهٔ انرژیهای شخص به سمت یک فعالیت عمده، به‌خصوص برای فرد حرفه‌ای در مرحلهٔ کارآموزی‌اش مهم است. دانشجوی تحصیلات تکمیلی ریاضی وقتی برای پرداختن به‌هیچ چیز، جز دانشجویی، ندارد و نباید داشته باشد.

من این اصل را نقض کردم ولی نه با شرکت‌کردن در کلاس درک موسیقی یا خواندن یکی دو کتاب در ریشه‌شناسی (که در تمام عمر مایهٔ تفنن من بوده است) یا ملحق‌شدن به گروه شیمیدانهای پوکربازــاینها تفریحات جزئی و حاشیه‌ای است، مانند بازی تنیس، داستان پلیسی، و شام‌خوردن با دوستان است. من اصل خودم را با توجه موقتی ولی بسیار وقتگیر به آرمانهای سیاسی نقض کردم.

من از یک سلطنت‌طلب میهن‌پرست مجار به یک چپگرای فعال از نوع چپگرایان اواسطه دههٔ ۱۹۳۰ تبدیل شدم. هیتلر در آلمان قدرت بیشتر و بیشتری می‌یافت و در آمریکا عوامفریبانی از قبیل هیوئی لانگ[1] و پدر کاگلین[2] پیروان بیشتر و بیشتری به‌دست می‌آوردند. سوسیالیستها، نورمن تامس[3]، و لئون بلوم[4]، و بعد کمونیستها، ارل براودر[5] و حتی ژوزف استالین، در مقایسه با آنها بهتر بودند. من که به دیدهٔ تحسین به جو دوب می‌نگریستم تا حدود زیادی تحت‌تأثیر او که از مدتها قبل گرایشهای دست چپی داشت به آن سو روآوردم و به چپها پیوستم. در میتینگها شرکت می‌کردم و به جمع‌آوری امضا برای بیانیه‌ها و پول برای سازمانهایی که بعداً جبههٔ کمونیستی نامیده شدند می‌پرداختم. امروز حتی نام همهٔ آنها را به‌یاد نمی‌آورم. در دفتر خاطرات من بارها از ALWF یاد شده است، و به یادآوردن این یکی برایم آسان است: سرنام "American League against War and Fascism" (اتحادیهٔ آمریکایی علیه جنگ و فاشیسم). من عضو چیزی به نام «کمیسیون جوانان»، وگویا عضو «کمیتهٔ سرگرمی» یک سازمان و «کمیتهٔ صلح» سازمانی دیگر بودم، که خاطراتم نمی‌گوید کدام سازمان. اعلامیه‌های مربوط به سخنرانی شخصیتهای جناح چپ را پخش می‌کردم و برای اسپانیاییهای وفادار [به حکومت جمهوری] پول جمع می‌کردم. به سازماندهی یک تعاونی کمک کردم که یکی از هدفهای آن تأسیس رستورانی بود که در آنجا با سیاهان درست مانند سفیدها رفتار شود.

حتی زندگی اجتماعی من تحت تأثیر قرار گرفت. بیشتر آن مرتبط با ریاضیات بود ولی، برای مدتی، بخش بزرگی از آن از جایی دیگر در محوطهٔ دانشگاه سرچشمه می‌گرفت و ناشی از اشتیاق به انتشار عقاید بود. جو دوب گروه بحث بعدازظهر جمعه را ترتیب داد. اشخاص ترغیب می‌شدند که «داوطلب» مطالعهٔ عمیق موضوعی شوند که اهمیت اجتماعی داشته باشد و دربارهٔ آن برای عده‌ای که در جمع حاضر می‌شدند سخنرانی کنند. موضوعهای بحث از این قبیل بود: دیوان عالی، بیمهٔ اجتماعی، ماتریالیسم

1. Huey Long 2. Father Coughlin 3. Norman Thomas
4. Leon Blum 5. Earl Browder

دیالکتیک، مکزیکو، آزادی مطبوعات، و آدمهای شریری مانند اسوالد موزلیِ[1] انگلیسی که فاشیستی به سبک خودش بود و در آن زمان شهرتی داشت. بعد از سخنرانی، برنامهٔ قهوه و شیرینی بود و بعد، مسلماً، بحث عمیق روشنفکرانه دربارهٔ موضوع سخنرانی آن روز. این قسمت غیرقابل پیش‌بینی بود؛ ممکن بود موضوع بحث ناگهان عوض شود و به آخرین افتضاح طلاق در سطح محلی یا به ریاضیات بکشد. امبروزگاهی می‌آمد و البته، او و من سیاست را جزو موضوعاتی که از بحث دربارهٔ آنها لذت می‌بردیم مطرح می‌کردیم. به‌یاد می‌آورم که امبروز در آغاز به‌اندازهٔ من، و شاید بیشتر، محافظه‌کار بود و در دفتر خاطراتم تعجب و هیجان من از اینکه توانستم او را به عضویت ALWF درآورم، ثبت شده است. او از آن زمان به بعد، محافظه‌کارانه (منظورم این است که وفادارانه، پابرجا، و بی‌تغییر) در موضع رادیکال خود مانده است. من مدتهاست با سرخوردگی، انزجار، و ناشکیبایی از آن ایده‌ها دست کشیده‌ام و او وفادار باقی مانده و اغلب در طرف راستِ (یعنی چپ) بیشتر جریانات و مسائل اجتماعی که دنیا در چهل سال گذشته با آنها روبه‌رو بوده قرار داشته است.

تا زمانی که ماه عسل با سیاست ادامه داشت، بر هرکاری که می‌کردم تأثیر می‌گذاشت (البته، بجز، بر ریاضیات). مثلاً نوع کتابهایی که می‌خواندم از ده روزی که دنیا را تکان داد[2] ، اثر جان رید[3] و من دنیاها را تغییر می‌دهم[4]، اثر آنا لوئیس استرانگ[5] تبدیل شد به آثار الگزاندر ولکات[6] و پی. جی. وودهاوس[7]، و سپس به‌سمت نیو مسز[8] و نوپازارانِ[9] اُپتون سینکلر[10] بازگشتم. شروع به‌یاد گرفتن زبان روسی کردم و رؤیای مهاجرت به آن سرزمین شیر و عسل را داشتم.

بیشتر اینها در سال ۱۹۳۵ـ۱۹۳۶ اتفاق افتاد. در اواخر ۱۹۳۶ کم‌کم دیدم که طی روز وقت کافی هم برای ریاضیات و هم برای سیاست وجود ندارد؛ از کمیته‌ها استعفا کردم و از حضورم در میتینگها کاستم. عقایدم هنوز مایهٔ پررنگی از ایدئولوژی حزبی داشت، و یادداشت‌هایی از این قبیل در خاطراتم دیده می‌شود: «این یارو افلاطون مرتجع مسلمــفاشیستــاست.» در حدود یک سال بعد، احساس خستگی، بی‌حوصلگی، و شور و اشتیاقی که برای کار ریاضی داشتم، به‌تدریج عقایدم را دگرگون کرد و در دفتر خاطراتم شروع به نوشتن مطالبی از این قبیل کردم: «میتینگ خسته‌کنندهٔ ALWF که همه چیز آن طبق معمول غلط بود ــ دیگر این را نمی‌خواهم»، و «بعدازظهر تحمل‌ناپذیرــ می‌خواهم بیرون بیایم» و «بعد از امسال برای من جایی نیست». برای من، مانند بسیاری از روشنفکران رادیکال آن دوره، پایان کار به ناگهان با معاهدهٔ آلمان و شوروی در ۱۹۳۹ فرا رسید. من البته حیرت‌زده و شوکه شدم، و از جهتی هم تسکین یافتم. به دوستانم گفتم که به «خودکشی سیاسی» دست می‌زنم، و زدم. تصمیم گرفتم که دیگر از هیچ چیزی حمایت نکنم، هیچ بیانیه‌ای امضا نکنم، و به هیچ هدف سیاسی خدمت نکنم. من همیشه کم‌وتر از آن بوده‌ام که همچون مبلّغی دیگران را به کیش خود دعوت کنم ــ این کار به نظرم موقرانه نمی‌رسید، مانند کارِ ویزیتورهای سمج در فروش داروهای

1. Oswald Mosley 2. *Ten Days that Shook the World*
3. John Reed 4. *I Change Worlds*
5. Anna Louise Strong 6. Alexander Wollcott
7. P. G. Wodehouse 8. *New Masses* (توده‌های جدید)
9. *No Pasaran* (غلبه نخواهند کرد) 10. Upton Sinclair

جدید یا از دیدگاهی دیگر، مانند گدایی خفت‌بار به‌نظرم می‌آمد ــ باقی‌ماندن بر این تصمیم که دیگران را به دیدگاههای خود دعوت نکنم آسان بود.

دیدگاههای من چیست؟ این پرسش در بحثی معطوف به ریاضیات بی‌ربط به‌نظر می‌رسد ولی حالا که بحث به اینجا کشیده است سعی می‌کنم پاسخی به آن بدهم و بعد به بحث اصلی برگردم. عبارت مناسبی که موضع مرا احتمالاً توصیف می‌کند «لیبرال دلزده» است. از لحاظ اقتصادی محافظه‌کارم، ولی طرفدار توافقهای دسته‌جمعی مسؤولانه در صنعت هستم. با تشکیل اتحادیهٔ اعضای هیأت علمی دانشگاهها مخالفم. معتقدم که این کار به بی‌توجهی اسفباری به استانداردهای آکادمیک و در نهایت به تنزّل این استانداردها می‌انجامد. من طرفدار رعایت انصاف کامل در مورد سیاهپوستان و سایر اقلیتها هستم و زنان را عضو باشگاهی که به آن تعلق دارم ــ نژاد انسانی ــ می‌دانم. همهٔ ما، از جمله لاتین‌تباران، سفیدپوست‌ها، و یهودیان مجاز، باید فرصتهای برابر برای زیستن در امنیت و آسایش و برخورداری از احترام داشته باشیم. ولی من مخالف چیزی هستم که تبعیض مثبت[1] نامیده می‌شود. انتخاب یک فرد بی‌صلاحیتِ لاتین‌تبار، سفیدپوست، یا یهودی مجار به سناتوری یا استادی دانشگاه فقط به این دلیل که در لحظهٔ انتخاب، افراد با صلاحیت به تعداد کافی وجود نداشته‌اند که آنها را ــ به نسبت سهمشان در جمعیت ــ در کنگره یا دانشگاه نمایندگی کنند، به‌نظر من یک عقبگرد است، عقبگرد از مسیر تلاش انسان برای کمال روحی و فکری.

من در ۱۹۳۲، ۱۹۳۶، ۱۹۴۰، و ۱۹۴۴، دموکراتِ روزولتی بوده‌ام و هنوز هم هستم. روزولت انسان بی‌عیبی نبود (چه کسی هست که عیبی نداشته باشد؟) ولی رهبری بود که راهِ رسیدن به هدفهای شایسته را نشان داد. واقعاً فکر نمی‌کنم رأی دادن به یک رئیس جمهور جمهوری‌خواه کاری غیراخلاقی باشد، ولی من چنین کاری نکرده‌ام. درنظر فروشندگان اتومبیل و حقوقدانهایی که با آنها پوکر بازی می‌کنم من یک رادیکال دوآتشه هستم، و همکاران جوان‌تر مرا مرتجعِ مسلم می‌دانند.

تولد دوباره

حتی پس از اینکه بر اپسیلون ـ دلتا مسلط شدم، فوراً به آنالیز علاقه پیدا نکردم؛ تأثیر دوب برمن تدریجی و نامحسوس بود. حال که به گذشته نگاه می‌کنم، همان روندی را [در مواجهه با آنالیز] می‌بینم که در ورود به جبر خطی طی کردم؛ من جبر خطی را نمی‌فهمیدم و بنابراین، (الف) آن را دوست نداشتم، و (ب) سخت کار کردم تا آن را یاد بگیرم؛ پس از کار سخت، این موضوع را بهتر از موضوعهایی که آسان به‌نظر می‌رسیدند درک کردم، و در نهایت به آن علاقه‌مند شدم.

در اوایل سال تحصیلی ۱۹۳۵ ـ ۱۹۳۶، زندگی تیره و تار به‌نظر می‌رسید. (احساس یأس از اینکه نکند کار را به پایان نرسانم). هنوز عاشق دلخستهٔ گروههای فرآبلی بودم و کنفرانسهای طولانی زیادی با براهانا داشتم. ولی همچنان که سال به پایان می‌رسید، بیشتر و بیشتر با آنالیز دست و پنجه نرم می‌کردم و گهگاه موفقیت کوچکی به‌دست می‌آوردم. شروع به مطالعهٔ آثار ویتاکر[2] و واتسن[3] در دسامبر، دلا واله پوسن[4] در ژانویه، و متغیرهای حقیقی تاون‌سند[5] در فوریه کردم. خدا مرا ببخشد! در دفتر خاطراتم نوشته‌ام: «تاون‌سند خوب است». بعدها فهمیدم که چه چیز وحشتناکی است، نه دقیق بود و نه روشن. ولی در آن زمان سبک آن که «ویتاکر ـ واتسن» وار نبود، مرا مجذوب خود کرده بوده است. تکلف بسیار کمتری داشت و اپسیلونهای کمتر ــ ریاضیات آسان می‌شود اگر با نادیده گرفتن مشکلات از دست آنها خلاص شوید. مرتب به ریاضیات محض هاردی برمی‌گشتم که به‌نظرم دشوار ولی صادقانه بود ــ اگر حوصله می‌داشتید، بعد از مدت کوتاهی متوجه پیشرفت خود می‌شدید.

در نیم‌سال دوم، کارمایکل درسی در توابع بیضوی عرضه کرد. او به من گفت که نمی‌توانم آن درس را بگیرم چون بعضی قسمتهای نظریهٔ توابع مختلط را که پیشنیاز آن است نگذرانده‌ام. من تقاضا و اصرار کردم که مجاز باشم متغیرهای مختلط را همزمان با آن بخوانم. با اکراه موافقت کرد، و من خیلی سخت کار کردم. توابع مختلط را پیش خود یاد گرفتم و به این منظور ترجمهٔ انگلیسی کاملی از هر دو جلد کتاب نوپ[1] را باز نوشتم، و در درس توابع بیضوی نمرهٔ A گرفتم. امروز فکر می‌کنم که مطالب ناجوری بود: اتحادهای طویلی بین سریهای توانی که از روی آنها، با بررسی دقیقِ تعداد کافی از ضرایب، تعیین می‌کردید که یک عدد صحیح خاص را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع سه مجذور نوشت.

در خاطراتم، در ماه ژوئن نوشته‌ام: «روش نوپ در بررسی توابع دوره‌ای زیباست» و چند هفته بعد: «رویه‌های ریمان چیزهای وحشتناکی هستند». در اوایل ژوییه: «نظریهٔ توابع موضوع مهمی است»؛ در اواسط ژوییه: «تقریباً تصمیم گرفته‌ام در آنالیز کار کنم» و در اواخر ماه ژوییه: «سرنوشت من تعیین شده است: رشتهٔ اصلی من آنالیز است». معنی اینها البته این نیست که در انتهای کار بودم ــ درست برعکس. ولی روند کار رضایت‌بخش بود: «روزی که بیشتر از هر روزی در ایام اخیر با اشتیاق کار کردم؛ سری لامبرت[2] در صبح، کاراتئودوری[3] در بعدازظهر». در ماه اوت: «بیشترِ روز کری هان[4] دور و بر من بود؛ بی‌فایده. احساس می‌کنم که هنوز به کندی در حال یادگیری آنالیز هستم.»

هر چند تولدی دوباره در آنالیز یافته بودم، جبر و نظریهٔ اعداد هنوز تا حد زیادی ذهن مرا به‌خود مشغول می‌داشت. کتابی دربارهٔ گروهها اثر ماتیوسن[5] وجود داشت که سعی می‌کردم آن را بخوانم، و اثر معروف میلر[6]، بلیکفلت[7]، و دیکسن[8] (با عنوان گروههای خطی؟) مرا عذاب می‌داد. (میلر متخصص آمریکایی نظریهٔ گروههای متناهی و صاحب مقالات بسیار، مردی بود پیر، خمیده، نحیف، جزم‌اندیش، با علائقی محدود در ریاضیات، و ثروتی روزافزون. بسیاری اوقات او را در ساختمان ریاضیات می‌دیدم. می‌آمد با کارگزاران بورس ملاقات کند. وقتی که مُرد، میلیونر بود و دارایی خود را برای دانشگاه ایلینوی به ارث گذاشت.)

در نظریهٔ اعداد سعی می‌کردم کتاب لاندو را بخوانم. مطالعهٔ این کتاب مانند پیاده‌روی در یک جادهٔ کوهستانی بود؛ شیب جاده ممکن است تند به‌نظر نرسد ولی بعد از نیم‌ساعت به نفس‌نفس زدن می‌افتید. همچنین، در همان ایام مشغول اِتمام برنامهٔ تقریباً عمومی خود بودم که قبلاً از آن یاد کردم، و بعضی از مدخلهای دفتر خاطراتم به هیجان پیشرفت اشاره دارند. اول ژوییه: «تقلای سخت نتیجه داد و اثباتی برای حالت زوج به ارمغان آورد. حالت

1. affirmative action 2. Whittaker 3. Watson
4. de la Valleé Poussin 5. Townsend

1. Knoop 2. Lambert 3. Carathéodory 4. Carry Hahn
5. Mathewson 6. Miller 7. Blichfeldt 8. Dickson

فرد سخت‌تر به‌نظر می‌رسد.» دو روز بعد: «امروز صبح حالت اعداد فرد را به‌دست آوردم! اثباتی عجیب و غریب! توجه کارمایکل را کمابیش جلب کرد.»

کارمایکل در آن تابستان دوباره نظریهٔ اعداد را درس می‌داد ولی معلومات من در آن زمان خیلی پیشرفته‌تر از درس او بود و فقط گهگاه برای تفنن به آن کلاس می‌رفتم. بیشتر شاگردانش، دانشجویان تابستانی بودند یعنی معلمان مدرسه که هر تابستان یکی دو درس می‌گرفتند تا در نهایت مدرک کارشناسی ارشد را به‌دست آورند. شاگردان خوبی نبودند. خاطره‌ای از آن کلاس دارم. کارمایکل در حال یادآوری تناظر یک‌به‌یک بین اعداد مختلط و نقاط صفحهٔ دکارتی بود. یکی از شاگردان که آرزومندِ مدرک کارشناسی ارشد بود، دست خود را بلند کرد: «می‌توانم بفهمم که با a و b چه کردید. اما ممکن است به من بگویید که i کجا رفت؟» رئیس غمگنانه به او نگاه کرد.

شعف‌انگیزترین تجربهٔ من در آن تابستان، آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌ها بود. جلوی ایوان روی تاب می‌نشستم، چای سرد می‌خوردم، و مبانی نظریهٔ مجموعه‌های هاوسدورف را با ولع می‌خواندم. مانند کودکی بودم که اسباب‌بازی تازه‌ای به دستش افتاده باشد: آن را زیبا و حیرت‌انگیز می‌دیدم. مقدماتی‌ترین مفهومها تعجب مرا برمی‌انگیخت و در عین حال، می‌توانستم اهمیت آنها را به محض اینکه در برابرم قرار می‌گرفتند، درک کنم. حساب کاردینالها را دوست می‌داشتم و تعداد اعضای هر مجموعه‌ای را که به‌تصورم در می‌آمد، مشتاقانه محاسبه می‌کردم. اعداد ترتیبی کشف دیگری بود، و انواع غریب ترتیب، مجموعه‌هایی که خوش‌ترتیب نیستند، همچون موسیقی به‌نظرم می‌رسید: پیچیده، اما درست همان که باید باشد.

همه‌اش کار کن و هیچ تفریح نکن؟ من ۲۰ ساله بودم. تازه یاد گرفته بودم دوچرخه‌سواری کنم، و در اواسط ماه اوت، با افتخار نوشتم که می‌توانم پیچ را دور بزنم.

نیروهای دیگر، زبانهای دیگر

در حالی که «تغییر و تحول» من به‌تدریج صورت می‌گرفت، تأثیرات بسیار دیگری هم، چه شخصی و چه حرفه‌ای در کار بود.

تأثیری که فرعی بود ولی ناچیز نبود، از آنِ ترجیت‌ژینسکی[1] بود. من بلافاصله به او علاقه پیدا کردم. خوش‌تیپیِ هنرپیشه‌های نقش منفی، و لهجهٔ غلیظ روسی داشت. او و همسر بلوند و تنومندش واروارا[2] (تلفظ روسی باربارا) در نظر خیلیها بچه‌هایی میانسال و دوست‌داشتنی ولی تا حدی عجیب و غریب بودند. بچه‌گانه‌ترین خصلت او عشق دیوانه‌وارش به‌رانندگی بود. او و واروارا بسیاری اوقات به ساحل غربی می‌رفتند. (تا جایی که به‌خاطر می‌آورم، برای دیدن یکی از بستگان). او چهار تایر نو را به اتومبیل هادسونِ پرقدرت خود می‌بست و ۲۰ ساعت با سرعت ۸۵ مایل رانندگی می‌کرد و فقط برای بنزین‌زدن توقف می‌کرد. گاهی هم ماشین را کنار جاده نگه‌می‌داشت تا چرتی بزند (واروارا رانندگی نمی‌کرد)؛ یک بار گفت که دو روزه به لُس‌آنجلس رفته است.

در آن ایام او شخص مهمی در ایلینوی بود، نویسندهٔ پرکار مقاله‌های تحقیقی و تولیدکنندهٔ خستگی‌ناپذیر دکتر ریاضی. بسیاری از دانشجویان ضعیف جذب او می‌شدند؛ شایعه‌ای بر سر زبانها بود که شیوهٔ کمک کردن او به دانشجو در واقع این است که پایان نامه را خودش بنویسد. بعدها بعضی از دانشجویانِ بهترش به من شکایت می‌کردند. آنها دوست داشتند که سخت‌تر به‌کار واداشته شوند تا بیشتر بیاموزند. تریجی[3] (اسم خودمانی که همه او را با

1. Trjitzinsky 2. Varvara 3. Triji

آن صدا می‌زدند) در «آنالیز سخت» (معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی) کار می‌کرد ولی در عین حال، شیفتهٔ مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ایِ مدرن رده‌بندی ترامتناهی (مجموعه‌های بورل، تابعهای بئر) بود. چندین مقالهٔ او و شاگردانش، آمیخته‌ای از آنالیز کلاسیک و رده‌های بئر است ــ هر چیزی را به‌صورت دنباله‌ای ترامتناهی مرتب کن و بعد انتگرالهای چندگانه را با آن مخلوط کن. تریجی خودش را ریاضیدان خیلی خوبی می‌دانست و ناراحت بود که قدرش را، چنانکه باید، نمی‌دانند. یک‌بار که شواله[1] برای سمتی در شورای انجمن ریاضی آمریکا (AMS) نامزد شده بود، تریجی زیر لب گفت: «او اصلاً چه کار کرده است؟» و غرولندکنان می‌خواست بداند که چرا خودش را نامزد نکرده‌اند.

تأثیرات دیگر؟ بله، ریاضیات در همهٔ شکلهایش حضور داشت و ذهنم را از همه سو احاطه کرده بود. هر بخشی از ریاضیات را که آن زمان درگیرش نبودم، بعدها که به آن علاقه می‌یافتم حس می‌کردم گویی از قبل دوستش می‌داشته‌ام. در هندسه، چیزهایی دربارهٔ ناورداها، به مفهوم قرن نوزدهمی و پیش‌هیلبرتی آن، آموختم. در خاطراتم نوشته‌ام: «مطالعهٔ ناورداها در همهٔ روز ــ این مطلب دارد هیجان‌انگیز می‌شود». در نظریهٔ اعداد، اثبات اویلر از قضیهٔ چهارمربع را ــ به لاتین! ــ خواندم. معنی خیلی از کلمات را نمی‌فهمیدم ولی می‌توانستم با حدس زدن از روی متن، موانع زبانی را از سر راه فهم اثبات بردارم.

زبانها همچنان منبع لذت من بودند. انگلیسی‌ام تاکنون، برای همهٔ مقاصد و از جمله خواندن ریاضیات، بهتر از بقیهٔ زبانهاست. هر چند می‌توانم مجاری را نسبتاً خوب، اسپانیایی را متوسط، و آلمانی را خیلی بد صحبت کنم، بهترین زبان دوم من برای فهم ریاضیات، آلمانی است. (چرا؟ تا حدی به این دلیل که مواجههٔ من با آلمانی در زمان کودکی، باعث شده است که این زبان در نظر من زبانی «واقعی» جلوه کند، برخلاف زبان فرانسه، و تا حدی هم به این علت که بهترین کتابها در دورهٔ دانشجویی من اکثراً به زبان آلمانی بودند ــ مانند آثار وان در واردن، زایفرت ـ ترلفال[2]، و کاراتئودوری). آشناشدن، با زبان لاتینی درگیمنازیوم و با زبان فرانسه که در دورهٔ دکتری جزو الزامات بود به من امکان می‌دهد که متنهای ریاضی را به ایتالیایی (به‌آسانی)، و به پرتغالی و رومانیایی (به‌سختی) بخوانم. اسپرانتو هم که بسیار آسان است (یک بار مقالهٔ کاملی را به این زبان با کمال راحتی خواندم بدون آنکه از خودم بپرسم زبان آن چیست). انگلیسی و آلمانی به اتفاق هم خواندن متنهای هلندی را میسر می‌سازند، ولی البته با مقدار زیادی حدس‌زدن، و به هر حال کفایت نمی‌کنند؛ متأسفانه برای اینکه دانمارکی، نروژی، و سوئدی برایم قابل فهم باشد باید آموزش می‌دیدم.

زبان هلندی مایهٔ تفریح است. زمانی از یک هلندی پرسیدم که آیا می‌داند که چرا حرف‌زدن به زبان او لبخند بر لبان انگلیسی‌زبان‌ها می‌آورد، و او پاسخ داد که «حرف‌زدن به هلندی درنظر آنها مثل حرف‌زدن کودکان است، همان‌طور که صحبت کردن به زبان آفریکانس[3] درنظر من چنین حالتی دارد». من چالشی را که یک صفحه مطلب هلندی پیش رویم می‌گذارد دوست دارم ــ مانند جدول کلمات متقاطع است ــ و وقتی بسیاری لغات هم‌خانواده [با لغات انگلیسی و آلمانی] را بالاخره شناسایی می‌کنم، همان نوع لذتی را می‌برم که همهٔ ما از بازشناسی دوستی که مدتهاست او را ندیده‌ایم و صورتش زیر ریش انبوهی پنهان شده است، در خود احساس می‌کنیم.

زبان روسی مایهٔ خنده نیست ولی بسیار سخت است. من هیچ وقت آن را واقعاً یاد نگرفته‌ام ولی یکی دوبار درسی در این زبان گرفته‌ام و دو سه

1. Chevalley 2. Seifert-Threlfall

۳. شاخه‌ای از زبان هلندی که در آفریقای جنوبی رایج است.ـ م.

کتاب دستور زبان روسی را هم ورق زده‌ام و سعی کرده‌ام روزی یک صفحه به زبان روسی مطالعه کنم. روشی که در این مورد برای من خیلی مفید واقع شد، پروژهٔ ترجمهٔ مقالهٔ رایکوف[1] بود. مقالهٔ ۹۰ صفحه‌ای «آنالیز همساز روی گروههای ناجابه‌جایی» او را به‌دست گرفتم و با یک فرهنگ لغت به ترجمهٔ آن نشستم. مجبور بودم تقریباً برای نیمی از کلمات به فرهنگ مراجعه کنم، و صفحهٔ اول یک ساعت و نیم طول کشید. حالا می‌توانم ریاضیات روسی را بخوانم، البته به کمک فرهنگ و با مشقت، ولی به هر حال می‌توانم بخوانم.

تأثیرات دیگر؟ شاید باید از کتابهای لیبر یاد کنم؛ من به‌قدری از آنها لذت بردم که تأثیر عمیقی در من گذاشتند. نمی‌دانم چند تا بودند ولی هنوز سه جلد از آنها را دارم. کتابهای نازکی هستند (۳۴، ۶۴، و ۷۳ صفحه). در صفحهٔ عنوان آمده است: «متن به قلم لیلیان اِر.لیبر[2]، نقاشیها از هیو گری لیبر[3]» (زن و شوهر بودند یا برادر و خواهر؟) کتابهایی که از این سری دارم دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی، نظریهٔ گالوا، و نسبیت‌اند. آرایش صفحات مانند صفحات کتاب شعر است ــ سطرهای نامساوی که هر یک با یک حرف بزرگ شروع شده است ــ ولی در مقدمه چنین توضیح داده شده است:

«این قرار نیست
شعر آزاد باشد
نوشتن هر عبارت در سطری جداگانه
به‌خواندن سریع کمک می‌کند
و همه
امروز
عجله دارند.»

هر یک از کتابها شرح جذابی از یک موضوع بود خطاب به تی. سی. میتس[4] (آدم عادی کوچه و خیابان). برای خواندن آنها لازم است حوصلهٔ ریاضی آقای میتس بیشتر از حدی باشد که چنین شخصی معمولاً دارد، ولی بچه‌های دبیرستانی او که کنجکاوی ریاضی دارند از کتاب لذت می‌برند و بهره‌مند می‌شوند.

تلاش مداوم، خواندن، مطالعه‌کردن، و دغدغه دربارهٔ امتحانات آمادگی، شمشیر داموکلسی که همواره بر سر من و دوستانم آویزان بود ــ من پیش می‌رفتم، ولی اگر این پیشروی امروز در نگاه به گذشته، یکنواخت و سریع به‌نظر می‌آید، در آن زمان همواره چنین نبود. در دفتر خاطراتم آمده است: «به‌نظر می‌آید حدی برای مقداری از ریاضیات که می‌توانم ظرف شش ماه فراموش کنم متصور نیست».

امتحان آمادگی

امتحان آمادگی برای دکتری شامل چهار قسمت بود. سه قسمت کتبی (در جبر، آنالیز، و هندسه که جداگانه و با فاصله برگزار می‌شد)، و یک امتحان جامع شفاهی که شامل «کهاد» هم بود ــ کهاد معمولاً یکی از علوم دقیق ولی در مورد من فلسفه بود.

حالا که به گذشته نگاه می‌کنم، آن نظام را دوست دارم زیرا اطلاعات کافی (به هر دو طرف، هم به داوطلبان و هم به اعضای هیأت علمی) می‌دهد و برنامهٔ درسی منسجمی را فراهم می‌سازد. بنا به یک مثل قدیمی، امتحان کتبی به استاد می‌گوید که داوطلب چه چیزی را می‌داند و امتحان شفاهی می‌گوید که چه چیزی را نمی‌داند. در مورد انسجام، آن نظام برخلاف گرایش جاری است که به هر دانشجویی، آموزشی مناسب و مخصوص خود او داده می‌شود به‌جای اینکه همه از زمینهٔ مشترک وسیعی برخوردار شوند که هر کس بداند که با دیگران در آن معلومات سهیم است. همواره حداقلی از معلومات ریاضی برای هر ریاضیدانی لازم بوده و هنوز هم لازم است. اینکه ولو به نادرست حدس بزنیم این حداقل چیست به نظر من بهتر از این است که اصلاً حدس نزنیم. امروز در بخشهای «علوم ریاضی» دانشگاهها مشکل بتوان موضوعی را یافت که برای همهٔ دانشجویان الزامی باشد. بیشتر درسها اختیاری‌اند تا اجباری. بعضیها می‌پرسند که دانشمند علوم رایانه چرا باید حساب دیفرانسیل و انتگرال بداند؟ متخصص آنالیز عددی چرا باید نظریهٔ اعداد بداند؟ و آماردان چرا باید از گروههای هومولوژی اطلاع داشته باشد؟ نتیجهٔ این نگرش عملگرایانه هرج و مرج علمی است که باعث می‌شود در بعضی دانشگاهها حتی کسی که دکتری در ریاضیات محض دارد از توابع تحلیلی کاملاً بی‌اطلاع باشد.

من برای آمادگی در امتحان جامع سخت کار می‌کردم و البته نگران هم بودم، ولی واقعاً گمان نمی‌کردم که ممکن است مردود شوم. امتحانهای کتبی مثل آب‌خوردن بود؛ خاطراتم می‌گوید: «امتحان آنالیز کتبی است؛ البته در آن موفق می‌شوم.» امتحان شفاهی تفریح مطبوعی بود. اعضای کمیته تا جایی که به‌یاد می‌آورم، براهانا، کارمایکل، دوب، امچ[1]، و مک‌کلور[2] (رئیس کالج علوم انسانی، نمایندهٔ فلسفه) بودند، و از سؤالها فقط بعضی را به‌یاد می‌آورم. دوب دربارهٔ اثبات قضیهٔ رده‌بندی برای خمینه‌های ۲بعدی سؤال کرد. من فکر کردم جوابش را داده‌ام. ولی او راضی به‌نظر نمی‌رسید. بعداً گفت که می‌خواسته است مطالبی دربارهٔ زمینهٔ شهودی موضوع، از نوع «ببُر و بچسبان[3]» رویه‌ها، از من بشنود. کارمایکل از من پرسید استورم که بود و چه کرد؛ دستپاچه شدم. براهانا از من خواست روی تخته بنویسم $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$، و پرسید که اگر a و b حقیقی باشند مجموعهٔ همهٔ ماتریسهایی از این نوع چیست. احساس راحتی و خاطرجمعی کردم و گفتم: «اگر این ماتریس را درست دیکته کرده باشید، یکریخت با مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط است.»

[داستانی شنیده‌ام که دوست دارم بازگو کنم چون مرا با سه واسطه به یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدانان تمامی اعصار مربوط می‌کند. من با آرتر روزنتال[4]، وقتی در دانشگاه پردو[5] بود، کمی آشنایی داشتم. او سالها قبل از آن، در زمان دانشجویی‌اش، با لانداو هم‌اطاق بوده است. روزی لانداو به خانه می‌آید و از اینکه بعدازظهر طولانی و ملال‌آوری با ددکیندِ پیرگذرانده است شکوه می‌کند. ددکیند که دیگر کاری از دستش برنمی‌آمده، تمام صحبتش دربارهٔ دوران قدیم بوده است و به تلخی از سؤالات سخت، بی‌رحمانه، و نامنصفانه‌ای که گاوس در امتحان دکتری از او کرده بود شکوه می‌کرده است.]

وقتی امتحانم تمام شد، مرا به بیرون اتاق فرستادند و کمیته واردِ شور شد. در راهرو قدم می‌زدم و پُکهای عمیقی به سیگار می‌زدم، تا اینکه همه با هم بیرون آمدند. به‌نظرم امچ اولین نفر بود. او لبخند زد، با من دست داد، و گفت: «تبریک! خوب بود ــ فقط شرط کوچکی در مورد فلسفه هست.» یعنی

1. Raikov 2. Lillian R. Lieber 3. Hugh Gray Lieber
۴. سرنام The Common Man In The Street

1. Emch 2. McClure 3. cut and paste 4. Arthur Rosenthal
5. Purdue

موفق شدم؛ چنانکه دوب گفت امتحانم خوب بوده ولی قبولی من مشروط به گذراندن امتحان کتبی دیگری در فلسفه شده بود. غرولند کردم ولی کار دیگری از من ساخته نبود؛ حدود سه ماه بعد آن امتحان را هم گذراندم و شرط را احراز کردم.

سال ۱۹۳۶ـ۱۹۳۷ آخرین سالی بود که دانشجوی درس‌بگیر واقعی بودم. درسهای من مشکل نبود، یک نیمسال معادلات دیفرانسیل (کارمایکل) و دونیمسال توپولوژی (دوب)، به‌اضافهٔ فرمالیته‌ای به نام «سمینار و تز»، ریاضیات ۱۰۰، فقط برای اینکه حداقل ساعات الزامی پر شود. سال بعد واقعاً آخرین سال تحصیلم بود، و من فقط برای نیمسال اول ثبت نام کردم. طی ترم بهارهٔ ۱۹۳۸ پایان‌نامه‌ام را نوشتم و در مخارج صرفه‌جویی کردم. این بود داستان تحصیلات من: تا جایی که به درسها مربوط می‌شود دورهٔ آموزش ریاضی خود را به‌طور کامل توصیف کردم. در مقایسه با وضعیت امروز چطور است؟

برای مثال

با «تمام‌کردن» دورهٔ آموزشی، نشستم که مطالعه کنم. فشار امتحان آمادگی رفع شده بود و فشار پایان‌نامهٔ تازه داشت شروع می‌شد؛ در این روزهای آرامش نسبی وقت داشتم جادهٔ تنباکو[1] را بخوانم و در بازی بیلیارد با امبروز و دیک لیبلر[2] پول ببازم. وقتی از جو دوب درخواست کردم که راهنمای پایان‌نامهٔ من باشد، پاسخ داد: «گمان می‌کنم بتوانیم چیزی پیدا کنیم که روی آن کار کنی.» او دفترچهٔ جیبی ارزان‌قیمتی داشت که تعداد زیادی مسألهٔ مناسب برای تحقیق را در آن نوشته بود. فکر اولیه‌اش این بود که من روشهای جدید و پرتوان نظریهٔ اندازه‌ها را در مورد ایده‌های آماری که آر. اِی. فیشر مطرح می‌کرد به‌کار ببرم. او قبلاً شروع به سروسامان دادنِ روش ماکسیمم محتمل‌نمایی [درستنمایی[3]] فیشر کرده بود. اولین قدم برای من این بود که تا جایی که می‌توانم، احتمال و آمار را بیشتر بیاموزم.

حالا، بعد از ۶۰ سال علم‌آموزی، ثبت نام در ۱۶ مدرسه از انواع مختلف (از دبستان تا دکتری)، گمان می‌کنم که می‌دانم چطور باید مطالعه کرد. بعد از امتحان آمادگی هنوز نمی‌دانستم، ولی سعی می‌کردم روشی پیدا کنم که برای من مناسب باشد. اگر می‌خواستم نتیجه را در یک کلمه توصیف کنم، می‌گفتم: مثال. مثالها برای من اهمیت زیادی دارند. هر وقت مفهوم جدیدی یاد می‌گیرم (گروه آزاد، یا عملگر شبه‌دیفرانسیل، یا فضای پیرافشرده) به دنبال مثال ــ و البته نامثال ــ می‌گردم. این مثالها باید، در صورت امکان، هم نمونه‌های نوعی و هم نمونه‌های تبهگن را دربرگیرد. بله، البته، $\mathbb{R}^2$ یک فضای برداری حقیقی است ولی مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی نیز چنین است، و مجموعهٔ همهٔ توابع تحلیلی که بر قرص یکهٔ باز تعریف شده باشند ــ و دربارهٔ حالت ۰ بعدی چه می‌توان گفت؟ آیا مثالهایی هستند که در همهٔ شرایط بجز $x = 1x$ صدق کنند؟ آیا مجموعهٔ همهٔ توابع صعودی یکنوایِ حقیقی‌مقداری که بر، مثلاً، بازهٔ یکه، تعریف شوند یک فضای برداری حقیقی است؟ دربارهٔ همهٔ توابع یکنوا، خواه صعودی یا نزولی، چه می‌توان گفت؟

[معمایی مناسب این بحث هست که وسوسه می‌شوم آن را ذکر کنم. یک سؤال عادی امتحانی که در اوایل درسهای جبرخطی به کرّات مطرح می‌شود، این است که آیا مجموعهٔ $\mathbb{C}$ از همهٔ اعداد مختلط، فضایی برداری روی میدان $\mathbb{R}$ از اعداد حقیقی است یا نه. آدم دقیق و موشکاف ممکن است به نحوهٔ بیان این سؤال اعتراض کند: آنچه باید پرسیده شود این است که آیا راهی برای تعریف ضرب اعداد مختلط در اعداد حقیقی هست به‌طوری که گروه جمعی $\mathbb{C}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد؟ گفته‌اند که یک بار یک دانشجوی دستپاچه این سؤال را اشتباه می‌خواند: او گمان می‌کند سؤال این است که آیا $\mathbb{R}$ می‌تواند فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد یا نه. یعنی: آیا راهی برای تعریف ضرب اعداد حقیقی در اعداد مختلط هست به‌طوری که گروه جمعی $\mathbb{R}$ فضایی برداری روی $\mathbb{C}$ شود؟ این یکی از معماهای مورد علاقهٔ من است. اگر از پاسخ درماندید، به‌صفحهٔ بعد نگاه کنید.]

وقتی راینهولد بِر[1] برای بار اول وارد ایلینوی شد، درسی عرضه کرد که مدتی به‌طور مستمع آزاد در آن حضور می‌یافتم. در همان اوایل، این مفهوم را که زیرحلقه‌ای از یک حلقه، صحیحاً بسته باشد تعریف کرد. تعریف به‌قدر کافی طبیعی به‌نظر می‌رسید ــ خیلی طبیعی ــ تنها مثالی که شنیده بودم در شرط صدق می‌کرد. از بِر خواستم مثالی بیاورد که در شرط صدق نکند. و او این کار را نکرد. مسلماً می‌توانست مثالی بیاورد ولی نیاورد. با بی‌حوصلگی اظهارنظر طعنه‌آمیزی کرد، سؤال را نوشت و به ادامهٔ درسش پرداخت. ضمناً این خصلت بِر بود. او ذهنی درخشان داشت ولی متکبر و خودبین هم بود؛ ریاضیدانی بود با آثار فراوان، «هِر پروفسور»ی قدرتمند در سنت استبدادی آلمانی و آدمی فرهیخته و خوش‌صحبت.

نمونه‌ای از رفتار عالیجناب‌مآبانهٔ او (که مایهٔ رشک من بود ولی هرگز جسارت آن را نداشتم که از آن تقلید کنم) طرز استفادهٔ او از دستیارانش بود. یکی از وظایف آنها این بود که مجله‌های جدید را به‌محض رسیدن به کتابخانه وارسی، و مقالات مورد علاقهٔ بِر را دستچین کنند. آنها البته دستورالعمل‌هایی داشتند ولی بایستی بصیرت ریاضی خودشان را در تصمیم‌گیری به‌کار می‌گرفتند. در هر حال، نتیجه‌اش این بود که بِر می‌توانست آنچه را می‌خواست ببیند بدون آنکه انبوهی مطالب بی‌ربط را بخواند.

او در ایلینوی سفیر محترم دانشِ جهانی بود. آنقدر آنجا ماند تا در پنجاه و چندسالگی بازنشسته شد، و حقوق بازنشستگی بسیار خوبی به او تعلق گرفت. ولی صرف‌نظر از دریافت این مستمری، بازنشستگی برای او فقط به معنی تغییر شغل بود: احساس عذاب وجدان حکومت آلمان نسبت به کسانی که در زمان نازیها با آنها بدرفتاری شده بود، سمت استادی را در فرانکفورت برای او به ارمغان آورد. با شدت و حدت درگیرِ کار جدید شد و پیاپی مقاله و فارغ‌التحصیل دکتری تولید می‌کرد و شرکت‌کنندهٔ فعال بسیاری از کنفرانسها بود. وقتی در فرانکفورت به سن بازنشستگی اجباری رسید، حقوق بازنشستگی فرانکفورت هم به حقوق ایلینوی اضافه شد، و او باز شغل جدیدی در زوریخ پیدا کرد.

من و او در ایلینوی با هم دوست شدیم و طی چند دههٔ بعد یکدیگر را در کشورهای مختلف می‌دیدیم. ولی من به درس او برنگشتم؛ طرز برخورد او با مثالها بد بود.

ابراز شگفتی از کارایی نامعقول ریاضیات در «دنیای واقعی» ــ براساس گفتهٔ زیبای یوجین ویگنر ــ به‌صورت کلیشه درآمده است. ولی روی دیگر سکه، ناکارایی ریاضیات در تطبیق دادن تعریفهای دقیق با تصورات شهودی ماست. (حقیقت شاید این باشد که شهود ما مبهم و ناسازگار است، و هیچ چیز دقیقی نمی‌تواند با آن تطبیق کند.) همهٔ ما گمان می‌کنیم که می‌دانیم مفهوم پیوستگی

1. *Tobacco Road* 2. Dick Liebler 3. likelihood

1. Reinhold Baer

چیست. ولی مسلماً بعضی از ما وقتی با تابعی روبه‌رو می‌شویم که در هر عدد گویا ناپیوسته و در هر عدد گنگ پیوسته است، هضم آن برایمان آسان نیست. (هیولای بسیار مشهورتر که موضوع بسیار عمیق‌تری است، خمی است که همه جا به‌طور پیوسته می‌پیچد ولی هیچ جا مماس ندارد). همهٔ ما مطمئنیم که می‌دانیم همبندی چه معنایی دارد، ولی آیا وقتی می‌بینیم خمی شامل دوتکه است (مانند یک دایره و یک مارپیچ که بینهایت بار دور آن می‌پیچد) و در عین حال، همبند نامیده می‌شود قدری شک نمی‌کنیم؟ من عقیده دارم که دانشجو تا وقتی این گونه مثالها را نشناسد، نمی‌داند معنای پیوستگی و همبندی چیست.

در دست داشتن مجموعهٔ خوبی از مثالها، هرچه بزرگ‌تر بهتر، برای فهم کامل هر مفهومی ضروری است، و من وقتی می‌خواهم چیز تازه‌ای یاد بگیرم، اولین کارم این است که چنین مجموعه‌ای فراهم کنم. مسلماً گاهی نمی‌توان این کار را فوراً انجام داد: برای اثبات وجود حتی یک مثال ممکن است اطلاعاتی از نظریه لازم باشد که از صرفِ تعریف برنمی‌آید. مثلاً وقتی برای اولین بار با اعداد متعالی آشنا می‌شویم، به‌هیچ وجه واضح نیست که چنین چیزهایی وجود دارند. عکس این حالت وقتی پیش می‌آید که برای اولین بار از مجموعه‌های اندازه‌پذیر آگاه می‌شویم. این مجموعه‌ها فراوان هستند. شکی در این باره نیست؛ کار مشکل‌تر، یافتن مثالی از مجموعه‌ای است که از این نوع نباشد.

مثالهای ناقض هم البته مثال‌اند، ولی شهرت بدی دارند چون بر جنبهٔ منفیِ تأکید دارند، انکارکننده‌اند نه تأییدکننده. تفاوت مثال و مثال ناقض غالباً به زبان و نگرش بستگی دارد، و هر چند از لحاظ نظری تا حدی معتبر است، بیشتر جنبهٔ احساسی دارد. آیا مجموعهٔ کانتور مثالی زیباست (مجموعهٔ کاملی با درونِ تهی)، یا یک مثال ناقضِ زشت است (مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر که شمارا نیست)؟

به‌نظر من، مثالها، مثالها، و مثالها هستند—خواه مثبت یا منفی—که ریاضیات برپایهٔ آنها بنا می‌شود و من همیشه در جستجوی آنها هستم. از آغاز مطالعهٔ هر موضوعی به جستجوی مثالها می‌پردازم و این جستجو را ادامه می‌دهم، و آنها را دوست می‌دارم.

مسألهٔ صفحهٔ قبل را به‌یاد می‌آورید (آیا $\mathbb{R}$ می‌تواند فضایی برداری روی $\mathbb{C}$ باشد)؟ خیلیها ممکن است از پاسخ آن تعجب کنند، ولی پاسخ مثبت است.

بیان فنی‌تری از مسأله این است: آیا یک تکریختیِ حلقه‌ای از $\mathbb{C}$ به حلقهٔ درون‌ریختی‌های گروهی $\mathbb{R}$ وجود دارد؟ جواب این صورت از مسأله به‌وضوح مثبت است. دلیل: گروه جمعی $\mathbb{R}$ با گروه جمعی $\mathbb{C}$ یکریخت است. نه؟ هنوز متوجه نمی‌شوید؟ پس به پایه‌های هملِ[1] فکر کنید تا یادتان بیاید که گروه جمعی $\mathbb{R}$ مجموع مستقیم تعداد ناشمارایی از نسخه‌های گروه جمعی میدان $\mathbb{Q}$ از عددهای گویاست. نتیجه: گروه جمعی $\mathbb{R}$ با گروه جمعی $\mathbb{R}^2$ یکریخت است.

آمار، نه

کجا می‌توانیم مثالها، مثالهای ناقض، و نامثال‌ها را پیدا کنیم؟ پاسخ: همانجایی که تعریفها، قضیه‌ها، اثباتها، و سایر جنبه‌های ریاضیات را می‌یابیم —در آثار گذشتگان و در افکار خودمان. آنها را در کتابها، مقاله‌های انتشاریافته، پیش‌چاپ مقاله‌ها، درسها، سخنرانیهای سمینارها، گفتگوهای شخصی، مکاتبات، و مقدم بر همه و بیش از هر چیز، در ذهن خودمان با تفکر خلاقه، پیدا می‌کنیم. در آغاز مطالعاتم پس از امتحان آمادگی و پیش از رساله، اتکای زیادی به کتابها—قدیمی و نو—و به‌تدریج که با موضوع همراه شدم با مقاله‌های مجلات جدید داشتم (اما پیش‌چاپ[1]: این کلمه هنوز وجود نداشت.)

من در فهرست کارتهای کتابخانهٔ ریاضی که شامل عنوانهای جذابی بود، به‌دنبال «اندازه» و «انتگرال» و «احتمال» و «آمار» گشتم، و بعد سراغ قفسه‌هایی رفتم که کتابهای مورد نظرم باید در آنجا می‌بودند. ولی همهٔ آنها را نیافتم (آیا هیچ کس یافته است؟) ولی تعدادی از آنها را پیدا کردم. در میان آنها کتابهای دیگری یافتم که جالب به‌نظر می‌رسیدند و در فهرست به آنها توجه نکرده بودم. ۳۰ یا ۴۰ کتاب را برداشتم و نگاهی به آنها کردم. آیا این یکی را می‌توانم بخوانم؟ آیا پیشگفتار آن یکی مرا از طیف خوانندگانش کنار نگذاشته است (به‌این دلیل که اطلاعات کافی برای مطالعهٔ آن ندارم، یا به‌هدف تخصصی کتاب علاقه‌مند نیستم، یا به هر دلیل دیگر)؟ آیا کتاب سوم به زبانی نوشته شده که آن را راحت نمی‌فهمم؟ در کمتر از یک ساعت، ده دوازده‌تایی کتاب مناسب یافتم، تلوتلوخوران با آنها تا میز امانت رفتم، و بعد آنها را به خانه بردم.

من همهٔ آن کتابها را نخواندم. هیچ یک از آنها را نخواندم. به‌استثنای کتابهایی که خودم نوشته‌ام، فقط دو کتاب ریاضی را به‌یاد می‌آورم که خوانده‌ام، به این معنی که هر کلمهٔ آنها را آن‌طور که آثار اولین وو[2] و لوئیس کارول را می‌خواندم، خوانده‌ام. (آن دو کتاب، یکی نظریهٔ توابع نوپ بود که آن را ترجمه کردم و دیگری، نظریهٔ گروههای کارمایکل که آن را نمونه‌خوانی کردم) من البته ۱۰ یا ۲۰ صفحهٔ اول همه آن کتابها را خواندم، ورق می‌زدم و به بخشهای دیگر کتاب می‌رفتم و در میان مطالب جلو و عقب می‌پریدم (کاش ۱۰ صفحهٔ اول کتابهای بیشتری را خوانده بودم—از این طریق می‌توان آموزش ریاضی بسیار خوبی کسب کرد.) بعد اکثر آنها را به کتابخانه برگرداندم و با کوله‌بار سنگین دیگری از کتاب به خانه برگشتم.

کتاب هابسن[3] مدتی طولانی روی میزم بود—کتابی نومیده کننده. نظریهٔ انتگرال ساکس[4] کتاب مقدس بود—یا شاید عهد عتیق. مبانی احتمالی کولموگوروف تازگی داشت. من خیلی مجذوب بحث ساکس دربارهٔ انتگرالهای مجرد بودم. احتمالهای شرطی کولموگوروف به‌نظرم بغرنج بود. بعضی از مجلدات سری‌ای که با ویراستاری بورِل منتشر شده بود در وهلهٔ اول خوب به‌نظر می‌رسیدند ولی بیشتر آنها را نومیدکننده—مبهم یا بی‌دقت—یافتم. کتاب لوی[5] و راث[6] را دوست داشتم («کتابی عالی که نیاز به شرح و بسط بیشتری برای ریاضیدانان دارد»)، از بیانات آمرانهٔ فون میزس[7] دربارهٔ گردایه‌ها[8] نزدیک بود دچار سکتهٔ مغزی شوم، کتاب خینچین[9] را مشکل اما روشنگر یافتم، و هرگز شگردِ فهم کتاب پل لوی[10] را یاد نگرفتم [لوی در «لوی-راث»، هری[11] لوی نیست بلکه هیمن[12] لویِ انگلیسی است، و پل لویِ فرانسوی یکی از مهم‌ترین نامها در نظریهٔ نوین احتمال است. او بصیرت عمیق و بیان نامفهوم داشت؛ به‌نظر می‌رسید هیچ تصوری از معنای توضیح‌دادن یا ثابت‌کردنِ چیزی ندارد.]

سیر مطالعاتم باید جهتدار می‌بود (آموختن نظریهٔ اندازه برای آموختن احتمال برای آموختن آمار) ولی کتاب خواندنم در یک خط مستقیم پیش

1. Hamel bases

1. preprint 2. Evelyn Waugh 3. Hobson 4. Saks 5. Levy 6. Roth 7. von Mises 8. Kollektivs 9. Khintchine 10. Paul Lévy 11. Harry 12. Hyman

نمی‌رفت. من کتاب ساکس را دوست داشتم، این بود که زیگزاگ رفتم. مجلهٔ فاندامنتا ماتماتیکا[1] را خیلی ورق می‌زدم. آن مجلهٔ مهم در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ در اوج شکوفایی‌اش بود. در این نشریه بود که با تارسکی، اشتاین‌هاوس[2]، باناخ و بسیاری از قطبهای مهم دیگر آشنا شدم. این نوع کشف تصادفی (خواندن مقاله‌ای که مورد نظرت نبوده در مجله‌ای که آن را برای منظور دیگری ورق می‌زنی) همیشه ممکن است پیش بیاید: من همهٔ دانشجویان را تشویق می‌کنم که خود را از این شانس محروم نکنند [ضمناً، از اینجا می‌توان بحثی علیه مجلات تخصصی مطرح کرد. اگر مجلاتی که بررسی می‌کنید شامل هیچ مقاله‌ای نباشند مگر دربارهٔ جبر C^*، این شانس را از خودتان دریغ می‌کنید که بهترین مقاله دربارهٔ گروههای لی را که در ۲۵ سال اخیر انتشار یافته، تصادفاً ببینید.]

از این فکر دست کشیدم که شناخت خود از احتمال را برمبنای منطقی محکمی استوار کنم، و همان زمان سعی کردم رویکرد تاریخی را در پیش بگیرم: چبیشف و مارکوف دقیقاً چه کرده‌اند؟ اما در آمار هنوز نوشتگان جامعی وجود نداشت. آثار تسوبر[3] را مطالعه کردم، بعضی از نوشته‌های هتلینگ[4] را به امانت گرفتم، شانس این را داشتم که به یکی دو سخنرانی نیمن[5] گوش بدهم و نهایت تلاشم را کردم تا فیشر را به‌خاطر اینکه ریاضیدان نبود ببخشم. اما کار آسانی نبود. در خاطراتم آمده است: «سعی در مطالعهٔ آمار از روی نوشته‌های فیشر: غیرممکن.» در اواخر آن سال تحصیلی (مه ۱۹۳۷) طاقتم تاق شد: «سعی کن دوباره مقاله‌های فیشر و دوب را مطالعه کنی. من احتمال را خواهم گذراند، فیشر برود به جهنم».

خواندن و ارزشیابی

علاوه‌بر سمینارهای عمومی، «باشگاه دانشجویان تحصیلات تکمیلی» هم سخنرانیهایی به زبان توصیفی برگزار می‌کرد که سخنرانان آن، دانشجویان تحصیلات تکمیلی و اعضای هیأت علمی بودند. یک محفل خصوصی هم به نام «سمینار متغیر حقیقی» وجود داشت که فقط شش هفت عضو داشت: دان کیبی[6]، اندی لیندستروم[7]، فیل میکر[8]، فلیکس ولچ[9]، و البته امبروز و خودم را به‌یاد می‌آورم. محفل ما هم مانند «باشگاه دانشجویان» بود با این تفاوت که همهٔ سخنرانیهای ما دربارهٔ آنالیز حقیقی یا موضوعات نزدیک به آن بود (امبروز دربارهٔ تابع کانتور، ولچ دربارهٔ فضاهای تفکیک ناپذیر، و من دربارهٔ «متغیرهای شانسی») و با این تفاوت که (به تصورِ غرورآمیز ما) سخنرانیهای ما ممکن بود سطح بالاتر باشد. من برای اولین بار در سمینار متغیر حقیقی با فضای هیلبرت آشنا شدم و خیلی خوشم آمد («خیلی جذاب»).

علاوه بر همهٔ اینها سعی می‌کردم با کارهایی مانند خواندن ریاضیات مقدماتی کلاین («از دیدگاهی بالاتر از سطح کتاب») و حضور گهگاهی در درس باب مارتین، به فرهنگ عمومی ریاضی‌ام بیفزایم. رابرت. اس. مارتین[10] از پرینستن آمده بود، از دنیایی متفاوت که جوّ ریاضی روزآمد، فعال، و هیجان‌انگیزی داشت و شخصیتهایی پرجاذبه با نامهای مشهور در آنجا بودند. او مهربان و بذله‌گو بود. مارتین همان کسی است که اول بار (در صحبت راجع به مقالهٔ مشهور تارسکی دربارهٔ معنای صدق) این قضاوت را از او شنیدم: «کم مایه‌تر از آن است که به‌چشم می‌آید». او ریاضیات را می‌فهمید ولی نمی‌توانست آن را توضیح بدهد. دربارهٔ ادبیات و شایعات و سیاست و تاریخ خوب حرف می‌زد، ولی ریاضیاتی که می‌دانست برایش خیلی آسان بود و هنگام توضیح دادن چیزی که در نظرش بدیهی بود به لکنت زبان و تپق‌زدن دچار می‌شد. شاگردان کلاسش نمی‌توانستند درس او را تعقیب کنند و او را معلم بدی می‌دانستند، و هنگامی که در شرف اخراج بود درگذشت. (پاشنهٔ پای او عفونت داشت. چند نفر از ما برای انتقال خون مورد آزمایش قرارگرفتیم ولی فقط نتیجهٔ آزمایش امبروز قابل قبول بود، اما تزریق خون هم کمکی به مارتین نکرد. پنی‌سیلین اگر چهار سال زودتر کشف می‌شد، می‌توانست جان او را نجات دهد). باب کسی است که مفهوم مشهور مرز مارتین در نظریهٔ پتانسیل را کشف کرد، اما چون او خیلی کم چیزی منتشر می‌کرد و جوان مُرد، مارتین‌های دیگر غالباً امتیاز کشف او را از آن خود کرده‌اند.

دانشجویان تحصیلات تکمیلی وقت خود را به مطالعه‌کردن (که باید می‌کردند!) و غرولندکردن (که لازم نیست آموزشی در آن دیده باشند) می‌گذراندند. موضوع دائمی شکایت و غرولند دانشجویان، نظام ارزشیابی دکتری و نتایج آن بود. نمرات درسی معنای چندانی نداشت (برای بسیاری از استادان مشکل بود که خیره در چشمان دانشجو نگاه کنند و به او نمرهٔ کم بدهند)، و به‌خصوص این نمره‌ها تقریباً هیچ کمکی به دانشکده نمی‌کرد که شانس دانشجو را در به‌دست آوردن مدرک دکتری برآورد کند. نظام ارزشیابی به این منظور طرح شده بود که مفیدتر باشد. ایده این بود که هر عضو هیأت علمی به هر یک از دانشجویان تحصیلات تکمیلی که می‌شناسد رتبه‌ای بدهد و رتبه را محرمانه به رئیس بخش گزارش کند. دانشجویان فقط از معدلشان آگاه می‌شدند نه از تک‌تک رتبه‌ها. رتبهٔ ۱ به‌معنای «بیشترین قابلیت» و رتبهٔ ۳ به‌معنای «فقدان قابلیت» بود.

ما دانشجویان نسبت به ارزشیابی هیأت علمی از خودمان نظر خوبی نداشتیم: مطمئن بودیم که خودمان بهتر می‌دانیم. حالا مطمئن نیستم. تجربهٔ من می‌گوید که دانشجویان تمایل دارند دانشجویان دیگر را بیش از حد واقع ارزشیابی کنند. هر یک چنان مطمئن است که خودش نمی‌داند حتی کورسویی از هوش در شخص دیگر، او را بیش از حد تحت تأثیر قرار می‌دهد.

این ارزشیابی پایهٔ اصلی اعطای آموزشیاری یا پژوهشیاری بود. از آن اولین ترم سال ۱۹۳۵ که خوش‌اقبالی به سراغم آمد، هر سپتامبر و هر فوریه با اشتیاق در انتظار بودم (یک فرصت اضطراری دیگر؟ شانس دیگری برای تدریس؟) و پیش از اول آوریل، که پژوهشیاری‌های پاییز بعد اعلام می‌شد، با نگرانی دست به‌دعا بودم. هر سپتامبر، دفتر خاطراتم حاوی اخبار بدی است ــ: «شغلی نیست». آخرین مدخل در ۱۹۳۷: «و ظاهراً به‌عنوان آخرین فرصت: پژوهشیاری را به‌دست نیاوردم.»

بازچاپ‌ها: دوب و دیگران

زیراکس هنوز وجود نداشت و استفاده از پیش‌چاپ‌ها، هر چند از لحاظ فنی ممکن بود، هنوز متداول نبود. پس چگونه می‌توانستید اطلاعات علمی موجود را دریافت کنید؟ پاسخ: می‌توانستید مجله‌ها را مشترک شوید، یا از مجله‌های موجود درکتابخانه استفاده کنید یا از مؤلفان بخواهید نسخه‌ای از بازچاپ [تیراژ آپار] مقاله‌های خود را برایتان بفرستند. قیمت مجله‌ها خیلی زیاد نبود. مثلاً

1. *Fundamenta Mathematicae* 2. Steinhaus 3. Czuber
4. Hotelling 5. Neyman 6. Don Kibbey 7. Andy Lindstrum
8. Phil Maker 9. Felix Welch 10. R. S. Martin

برای مدتی در اوایل دههٔ ۱۹۴۰، معاملهٔ خاصی میسر بود: چنانکه حالا به‌یاد می‌آورم، اگر عضو MAA (جامعهٔ ریاضی آمریکا) می‌شدید، می‌توانستید نشریهٔ آنالیز آو متمتیکس را به‌بهای ۴ دلار در سال مشترک شوید. در مورد استفاده از مجله‌های کتابخانه، باید بگویم که این کار عملی‌تر از آن بود که امروز مردم گمان می‌کنند. اگر مقاله‌ای که می‌خواستید در مجله‌ای بود که امانت داده نمی‌شد، مشکل مهمی پیش نمی‌آمد. ظرف نیم‌ساعت یا یک ساعت (یا حتی پنج دقیقه) مجلد مورد نظر روی میز کتابخانه جلو روی شما بود و شما، قلم و کاغذ در دست، می‌توانستید آنچه را می‌خواهید، یاد بگیرید. (آیا تمایلی امروزیها به اینکه اول زیراکس کنند و بعداً بخوانند تا حدی اسراف نیست؟) اگر مقاله طولانی بود و شما در خواندن کُند بودید، زمان بیشتری لازم می‌آمد و شما بعداً به کتابخانه برمی‌گشتید و ساعتهای زیادی را صرف مطالعهٔ مجلهٔ روی میز می‌کردید. این کار به‌راحتیِ نشستن روی کاناپه در اتاق نشیمن خودتان با چند ورق زیراکس نیست، ولی خیلی هم بد نیست. از آن گذشته، اگر می‌خواستید، هیچ چیز مانع از این نبود که مقاله، یا به هر حال قسمتهای مهم آن را، با دست رونویسی کنید. این کار لزوماً اتلاف وقت نیست ــ همان‌طور که پیش می‌روید، چیز یاد می‌گیرید.

نامه‌نگاری برای دریافت بازچاپ مقاله‌ها کار متداولی بود. تقریباً هر نویسنده‌ای از این درخواست خشنود می‌شد و مقاله را می‌فرستاد. گاهی ارسال مقاله‌ها با مکاتبات خصوصی‌تری همراه می‌شد. مثلاً من یک بار ذوق‌زده شدم که نامه‌ای از خینچین، خینچین بزرگ، خطاب به «دکتر پال هالموس» دریافت کردم (هنوز شش ماه مانده بود تا مدرک دکتری بگیرم). او مرا محترمانه "Sehr geehrter Herr Kollege!" (آقای عزیز، همکار عزیز) خطاب کرده و پوزش خواسته بود که دیگر نسخه‌ای از مقالهٔ مورد نظر من برایش نمانده است. او مقالات دیگری در مباحث وابسته فرستاده و ابراز امیدواری کرده بود که مورد علاقهٔ من باشد. زهی غرور و افتخار!

من کلکسیونر مشتاقی بودم. نامه‌هایی به فرانسه، آلمان، دانمارک، روسیه، لهستان، ژاپن، و البته، سراسر ایالات متحده، فرستادم و کلکسیونی عالی از مقاله‌ها درست کردم. من بازچاپ‌هایی از مقالات پل لوی، ابرهارت هوپف[1]، بورگ یسن[2]، مارسین‌کیه‌ویچ[3] و زیگموند[4]، و یوسیدا[5] وکاکوتانی[6] و نیز بوخنر[7]، کوپلند[8]، فلر[9]، توکی[10]، ون کامپن[11]، فون نویمان، وینر، و وینتنر[12] داشتم (و هنوز هم دارم). آنها را جمع می‌کردم و تا آنجا پیش رفتم که بسیاری از آنها را دسته کردم و با کیفیت خوب، با پارچهٔ صحافی پر دوام، به‌هم بستم؛ چهار مجلد از آنها را، که کلماتی با حروف قرمز و طلایی روی عطف آنها نقش بسته است در قفسهٔ کتابم دارم که ممکن است برای کلکسیون‌بازها ارزشمند باشند یا زمانی بشوند. نخستین آثار هوپف دربارهٔ نظریهٔ ارگودیک و مقاله‌ای که ممکن است اولین مقالهٔ توکی در آمار باشد، جزو مقالات این مجلدهاست.

وقتی مقاله‌ها را به‌دست می‌آوردم آنها را می‌خواندم، و در بسیاری موارد به تفصیل و با دقت مطالعه می‌کردم. من از مطالب اشتاینهاوس دربارهٔ احتمال اینکه سری‌ای مانند $\sum \pm\frac{1}{n}$ همگرا باشد و دربارهٔ احتمال اینکه مرز طبیعی یک سری توانی به‌صورت $\sum \pm\frac{z^n}{n}$ دایرهٔ یکه باشد، لذت بردم. با رویکردهای اسرارآمیز چندتن از آلمانیها (رایشنباخ[1]، تورنیر[2]، فون میزس) به احتمال دست پنجه نرم می‌کردم. بخشی از آنچه آنها می‌نوشتند کاملاً مزخرف بود و من نمی‌توانستم بر این فکر غلبه کنم که شاید از لحاظ نظری ارتباطی بین این مطالب و انگیزه‌هایی که بعضی از این آلمانیها را به نازیهای فعال و مغرور تبدیل کرده بود وجود دارد. یکی از اولین مقالات در زمینهٔ احتمال از طریق اندازه روی فضاهای حاصلضرب نامتناهی، از آنِ لومنیتسکی[3] و اولام[4] است. این مقالهٔ خوبی است ولی اشتباهی در آن هست، اشتباهی مهم که به همگرایی نایکنواخت مربوط می‌شود. خیلی تلاش کردم ولی نتوانستم بفهمم که چه چیزی غلط است. مجلدی از فاندامنتا را که این مقاله در آن بود، می‌شد به امانت گرفت و من آن را در خانه داشتم. به‌مدت دو سه هفته، جو دوب تقریباً یک روز در میان به خانهٔ من می‌آمد تا مقالهٔ لومنیتسکی-اولام را مطالعه کند: او هم مشکلاتی در پی بردن به قضیه داشت اما بالاخره، خطا را تشخیص داد و بعداً در مقاله‌ای نشان داد که چگونه می‌توان آن را رفع کرد.

جو قضیه‌های ارگودیک را که فون نویمان و گرت برکاف در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ منتشر کرده بودند می‌دانست و یکی از اولین کسانی بود که از ارتباط بین آنها و قانون موسوم به قانون اعداد بزرگ استفاده کرد. من وقت زیادی را با جو صرف می‌کردم بدون آنکه متوجه باشم مصاحبت با او تا چه حدی برای من آموزنده و الهامبخش است، و بیشتر وقت مطالعه‌ام به مطالعهٔ مقالات دوب و بدوبیراه گفتن به آنها می‌گذشت. مدخل دفتر خاطرات در ۲۵ آوریل ۱۹۳۷: «دست و پنجه‌نرم کردن با 'توزیعهای حدی دوب'، تمام بعدازظهر و غروب. با دوب در مورد آنها صحبت کنم. من کودن هستم.» و در خاطرات دو روز بعد: «کار روی مقالهٔ دوب در بعدازظهر؛ دوب کودن است؛ ۵ سنت بردم.»

دوب خونگرم است و به‌آسانی با همه کنار می‌آید. ظاهراً هیچ چیز را جدی نمی‌گیرد، اما همه کس را به یک اندازه جدی می‌گیرد. هرگز بی‌صداقتی علمی در او ندیده‌ام ــ خُب، تقریباً هرگز. یک بار امبروز و من اصرار داشتیم در موردی او را به حرف بیاوریم. او چیزی دربارهٔ زمان و حرکت می‌گفت (که شاید از بحثی در هوموتوپی سرچشمه می‌گرفت) و وقتی از او خواستیم تعریفهای دقیقی برحسب مجموعه‌ها و تابعها و پارامترها بدهد، گفت: «نمی‌توان این کار را کرد ــ نمی‌توان چیزی را که دینامیک است، استاتیک کرد.» که حرف مهملی بود.

او هیچ ظرافتی در سازماندهی مطلب، شرح و توضیح، زبان، یا نمادگذاری ندارد. در اینجا مثالی می‌آورم. در یکی از مقالات اولیه‌اش دربارهٔ فرایندهای تصادفی، عباراتی از قبیل «فضای همهٔ توابع $x(t)$ آمده بود [که قبیح است ــ نام متغیر نباید در اینجا ذکر می‌شد]، و چند صفحه بعد دربارهٔ این فرض بحث می‌کرد که «$x(\tau)$ تابعی اندازه‌پذیر روی $T \times \Omega$ است». این عبارت اشاره به نگاشت $< x, \tau > \mapsto x(\tau)$ داشت یعنی نگاشتی که جفت مرکب از یک تابع و نقطه را به آن مقدار می‌فرستاد. از شما انتظار می‌رفت حدس زده باشید که t «متغیر» است و حرف یونانی τ به‌معنایِ چیز دیگری است. به‌دلایلی از این قبیل، و بدتر، خواندن مقاله‌های او آسان نیست. ولی در عین حال، دوب درک عمیقی از ظرافت ایده‌ها و بصیرت زیادی در پی بردن به عمق مطالب دارد. گاهی (وقتی از خودم خیلی راضی نیستم) از خودم می‌پرسم که آیا استعدادهای او و من دقیقاً مکمل هم است؟

1. Eberhard Hopf 2. Børge Jessen 3. Marcinkiewicz 4. Zygmund 5. Yosida 6. Kakutani 7. Bochner 8. Copeland 9. Feller 10. Tukey 11. van Kampen 12. Wintner

1. Reichenbach 2. Tornier 3. Łomnicki 4. Ulam

مطالعه

شما اینجا نشسته‌اید، دانشجویی هستید در دورهٔ کارشناسی با یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال که جلو شما باز است، یا یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی پیش از شروع نوشتن رساله با یکی از آن کتابهایی که دوست دارید لااقل ده صفحهٔ اولش را خوب بفهمید، یا یک ریاضیدان محقق (مجرّب یا تازه کار) با مقاله‌ای که تازه از چاپ درآمده است ــ حالا چه می‌کنید؟ چگونه مطالعه می‌کنید، چگونه در تاریکی نفوذ می‌کنید، چگونه چیزی یاد می‌گیرید؟ تمام آنچه می‌گویم مسلماً کارهایی است که خودم می‌کنم، ولی گمان می‌کنم همین نوع کارها برای هر کسی مثمرثمر است.

قبلاً بارها گفته شده است، ولی هرچه گفته شود زیاد نیست که، انفعالی مطالعه نکنید. به خواندن متن اکتفا نکنید؛ با آن دست به‌گریبان شوید! پرسشهای خودتان را مطرح کنید، در جستجوی مثالهای خودتان باشید، اثباتهای خودتان را کشف کنید. آیا فلان فرض لازم است؟ آیا عکس حکم درست است؟ در حالت خاص کلاسیک چه وضعی پیش می‌آید؟ در حالت تبهگن چطور؟ چگونه از آن فرض در اثبات استفاده می‌شود؟

راه دیگری برای اینکه هنگام خواندن متن فعال بمانم، تغییردادن نمادهاست؛ اگر کار دیگری نباشد که انجام دهم، حداقل می‌توانم حروف انتخابی را تغییر بدهم (بهتر کنم؟) بعضی از دوستانم این کار را احمقانه می‌دانند، ولی برای من مفید واقع می‌شود. زمانی که گزارشی دربارهٔ فصل هفت کتاب استون (فصل مربوط به نظریهٔ چندگانگی که موضوع پیچیده‌ای است) در سمینار کوچکی با شرکت امبروز و دوب ارائه می‌کردم. شنوندگانم مرا به‌خاطر تغییر حرفها دست انداختند، ولی من احساس می‌کردم این کار به من کمک می‌کند که وقتی می‌کوشم نظم و نسقی به مطلب بدهم حواسم روی موضوع متمرکز باشد. گمان می‌کنم که اگر در عین حال که با تحسین به معماری موضوع خیره می‌شوم روی آجر و ملاط آن تمرکز کنم، ظرایف موضوع کمتر احتمال دارد از دست برود. من حروفی (و سایر نمادهایی) را که بر حروف و نمادهای مؤلف ترجیح می‌دهم انتخاب می‌کنم و مهم‌تر اینکه، نمادهای یکسانی را در سراسر بحث به‌کار می‌برم و نظام نمادگذاری را در بخشی از نوشتگان ریاضی که مشغول مطالعهٔ آن هستم، هماهنگ و منسجم می‌کنم.

تغییر نمادها روشی برای تمرکز توجه است، مانند یادداشت برداشتن در کلاس یا سمینار، ولی چیز دیگری هم هست. این کار، تفاوت رویکردهای مؤلفان مختلف را نشان می‌دهد و لذا ممکن است باعث جلب توجه به نکته‌ای شود که عمق ریاضی دارد و خوانندهٔ کم‌توجه با تکان دادن سر از کنار آن می‌گذرد ــ بله، بله، این باید همان قضیه‌ای باشد که دیروز در کتاب دیگری خواندم. من عقیده دارم که تعویض نمادهای هر مقاله‌ای که می‌خوانم، آن را با دیدگاه من هماهنگ می‌سازد و در درازمدت باعث صرفه‌جویی در وقت می‌شود. اگر این کار را خوب انجام دهم، لازم نیست برای هر مقالهٔ جدیدی در زمینهٔ مورد نظر وقت تلف کنم تا آن را با طرح نمادی مورد نظر تطبیق دهم؛ من قبلاً دربارهٔ آن کاملاً فکر کرده‌ام و حالا می‌توانم به موضوعات مهم‌تری بپردازم. و بالاخره، نکتهٔ کوچکی هست که از نظر روانشناسی اعتبار دارد: وقتی نمادها را طبق سلیقهٔ خودم تغییر می‌دهم، حس می‌کنم اندکی خلاقیت به خرج می‌دهم ــ حتی پیش از آنکه بفهمم موضوع از چه قرار است، و خیلی پیش از آنکه آن را تعمیم بدهم، بهتر کنم، یا به‌کار ببرم، فعال بوده‌ام، کاری انجام داده‌ام.

یادگیری زبان با یادگیری موضوعات ریاضی تفاوت دارد. در یکی، کسب یک عادت و در دیگری، فهم یک ساختار مطرح است. این تفاوت پیامدهای مهمی دارد. درآموختن زبان از روی یک کتاب درسی، می‌توانید همراه صفحات کتاب پیش بروید و همهٔ تمرینهای آن را انجام دهید. ولی اگر بخواهید نظریهٔ گروهها را یاد بگیرید، خوب نیست کتابی را باز کنید، از صفحهٔ اول شروع به خواندن کنید، و همهٔ مسأله‌ها را به‌ترتیب حل کنید تا وقتی به صفحهٔ آخر برسید. این کار خوبی نیست. البته مطالب طوری درکتاب تنظیم شده‌اند که خواندن آن به‌ترتیب خطی، منطقاً قابل دفاع است ولی خوانندگان افراد بشرند، همه با هم و با مؤلف تفاوت دارند، و ممکن است چیزی در نظر کسی مشکل و در نظر دیگری آسان باشد. توصیهٔ من این است که تا آنجا بخوانید که به تعریفی برسید که برای شما تازگی دارد، و سپس توقف کنید و دنبال مثالها و نامثال‌ها بگردید، یا به قضیه‌ای برسید که برای شما تازه است، و سپس توقف کنید و سعی کنید آن را بفهمید و برای خودتان ثابت کنید ــ و مهم‌تر اینکه، وقتی به مانعی بر می‌خورید، به‌مطلبی اسرارآمیز یا مسأله‌ای حل نشده، از آن بگذرید، پیش بروید، به مسألهٔ بعدی بپردازید، صفحه را ورق بزنید، به فصل بعد بروید، یا حتی کتاب را کنار بگذارید و خواندن کتاب دیگری را شروع کنید. مطالب کتابها ممکن است ترتیب خطی داشته باشند، ولی ذهن ما چنین ترتیبی ندارد.

آیا همسرتان همهٔ حرفهای شما را باور می‌کند؟ همسر من همیشه نظرات کارشناسانهٔ مرا نمی‌پذیرد. یک‌بار که می‌خواست قدری ریاضی بخواند همین توصیه را (در مورد پریدن از روی مطالب) به او کردم و او با شک و تردید به من نگاه کرد. ولی روز بعد، با خرسندی و هیجان، پیشگفتار کتابی را به من نشان داد: «اینجا را ببین، حق با توست، اینها همان چیزی را می‌گویند که تو گفتی.» بله البته، در پیشگفتار آمده بود که خواننده «نباید انتظار داشته باشد همهٔ قسمتهای کتاب را در اولین قرائت بفهمد. او باید خود را آزاد حس کند که از قسمتهای پیچیده بگذرد و بعداً به آنها برگردد؛ بسیاری اوقات، یک استدلال با نکته یا توضیحی که بعداً می‌آید، روشن می‌شود». چیزی که همسرم توجه نداشت این بود که «اینها» منبع مستقلی برای تأیید گفتهٔ من نبود. «اینها» اعضای هیأت ویراستاران بودند که نامهایشان در صفحهٔ عنوان آمده بود؛ من عضوی از آن گروه بودم و کلماتی که «اینها» گفته بودند در واقع به قلم من بود.

وقتی دربارهٔ آموختن ریاضیات از راه چشم فکر می‌کنم، ممکن است لحظه‌ای هم به آموزش ریاضیات از راه گوش فکر کنم. درس شفاهی در کلاس یا سمینار، راه متعارفی برای یادگیری چیزی است، و یکی از بدترین راههاست. مشکل اینجاست که بسیار انفعالی است. توصیهٔ معمول: یادداشت بردارید. استدلال ناقض: بله، یادداشت برداشتن، خودش فعالیتی است و اگر این کار را بکنید، متن قابل اعتمادی در دست دارید که بعداً به آن مراجعه کنید، ولی احتمال دارد متوجه جزئیات ظریفی که مطرح می‌شود و نیز تصویر کلی موضوع نشوید چون سخت مشغول نوشتن هستید و نمی‌توانید خوب توجه کنید. نقضِ استدلالِ ناقض: اگر یادداشت برندارید، به‌یاد نخواهید داشت که در کلاس چه گذشته است، ترتیب مطالب چه بوده است، ممکن است تمرکزتان کم شود، در رؤیاهای خود غرق شوید، و، کسی چه می‌داند، شاید به چرت‌زدن بیفتید.

هر دو استدلال، له و علیه یادداشت برداشتن، درست است. راه حل شخصی من راهی بینابینی است: یادداشت‌های مختصری برمی‌دارم و بعداً، در نزدیک‌ترین زمانی که میسر بود، آنها را با تفصیل بیشتری پاکنویس می‌کنم،

منظورم از یادداشت مختصر، یکی دو کلمه در دقیقه است به اضافهٔ، احتمالاً، یکی دو فرمول یا یکی دو شکلِ خیلی مهم ــ در حدی که برای مشخص کردن ترتیب وقایع کافی باشد و ضمناً مرا بیدار و گوش به‌زنگ نگه دارد. منظورم از پاکنویس کردن این است که یادداشت از تفصیل کافی برخوردار باشد تا به‌دوستی که در آنجا نبوده نشان دهم و امیدوار باشم آن را بفهمد.

سخنرانیهایی از آن نوع که در سمینارهای عمومی معمول است گاهی شهرت خوبی ندارند شاید چون در بسیاری موارد خوب نیستند. آیا این سخنرانیها برای دانشجو، یا فرد با تجربه‌ای که می‌خواهد چیزی بیاموزد مفیدند؟ آن چیز ممکن است مشخص باشد (من لازم است مطالب بیشتری دربارهٔ رابطهٔ بین ساختارهای توپولوژیک و تمامریخت رویه‌های ریمان بدانم) یا ممکن است بخواهم دغدغهٔ مبهم ولی مزمنی را که در ضمیرم دارم، کم کنم (آموزش ریاضی من در محدودهٔ باریکی بوده است. می‌خواهم بدانم که سایر ریاضیدانها چه می‌کنند و چرا). پاسخ خود من این است که سخنرانیهای سمینارهای عمومی، حتی نمونه‌های خیلی بد آن، برای کسی که (به‌طور مشخص یا مبهم و کلی) می‌خواهد چیزی بیاموزد، مفید است و من اصرار دارم که دانشجویان و همکارانم به این سمینارها بروند.

چرا؟ چون ریاضیات یک کلِّ یکپارچه است و همهٔ بخشهای آن با هم ارتباط و در هم تأثیر دارند. هر چیزی که می‌آموزیم همهٔ چیزهایی را که می‌دانیم تغییر می‌دهد و بعداً به ما کمک می‌کند چیزهای دیگری بیاموزیم. شک نیست که سخنرانیِ عمومی اگر خوب توجیه و سازماندهی‌شده و موضوع مشخص و دقیقی داشته باشد و به روشنی بیان شود، مفید است ــ ولی حتی نوع بد آن هم بی‌فایده نیست. نمونهٔ مورد علاقهٔ من در این مورد، سخنرانی بدی دربارهٔ توپولوژی است که زمانی شنیدم. من تعریفها، قضیه‌ها، و اثباتها را نمی‌فهمیدم، ولی شنیدم که صحبت از «گروههای هوموتوپی پایدار» و چند دقیقهٔ بعد، «اعداد برنولی» در میان است. من فقط تصور بسیار محو و مبهمی از «گروههای هوموتوپی پایدار» و همچنین از «اعداد برنولی» داشتم. ولی فقط با شنیدن ارتباط شگفت‌انگیز بین این دو مفهوم، معلومات ریاضی من افزایش یافت و توانایی‌ام در فهم ریاضیات (و سخنرانیهای سمینارهای بعدی) بیشتر شد. (امروز این موضوع در میان متخصصان به موضوعی پیش‌پاافتاده تبدیل شده است). ۵۵ دقیقه وقت تلف‌کردن می‌ارزد به اینکه ظرف پنج دقیقه بفهمم که صفرهای توابع برخه‌ریخت ارتباط زیادی با توزیع اعداد اول دارند.

گمان می‌رود سخنرانیهایِ سمینار تخصصی متفاوت با سمینار عمومی باشد، ولی در واقع چنین نیست. تصور معمول این است که حاضران در سمینار تخصصی، متخصصانی هستند که هر چیزی را که تا پریروز در موضوع مورد نظر اثبات‌شده، می‌دانند و فقط آنجا آمده‌اند تا از آخرین ظریف‌کاری‌های موضوع باخبر شوند. این تصور غلط است؛ سخنرانی تخصصی هم، مانند سخنرانی عمومی، خوب و بد دارد. این فکر که اگر نام سمینار به‌جای عمومی، تخصصی باشد ابهامات تکنیکی حرفهای سخنران تبدیل به بصیرت مفهومی می‌شود، واقعگرایانه نیست؛ واقعیت ندارد. «متخصصان» حاضر در سمینار، خواه همکارانی باشند که در مسائلی مشابه با مسائل مورد نظر سخنران کار می‌کنند (توجه کنید که «مشابه‌بودن» با «یکی‌بودن» فرق دارد) یا دانشجویان تحصیلات تکمیلی باشند که ضمن تحصیل خود به موضوعات فنی می‌پردازند، فقط ۳۰ ثانیه دیرتر از مخاطبانِ به‌اصطلاح «عمومی» در سمینار عمومی،



آلن شیلدز، ۱۹۶۹

بی‌حوصله و کسل می‌شوند. به‌نظر من، سخنرانی خوب در سمینار تخصصی با سخنرانی خوب در سمینار عمومی یکی است، ولی حتی سخنرانیهای بد هم ارزش گوش دادن دارند.

بهترین نوع سمینار، سمیناری است که دو عضو دارد. این سمینار ممکن است فقط پنج دقیقه طول بکشد ــ یک پرسش، به دنبالش پاسخی مختصر و ذکر یک مرجع ــ یا یک پیوند همکاری مستحکم باشد که دهها سال ادامه یابد، و حالتهای بسیار دیگر هم بین این دو حالت ممکن است. من به‌شدت طرفدارِ تبادل نظر در ریاضیات هستم، و به این دلیل است که هوادار سمینار، عمومی یا تخصصی، هستم. بهترین سمیناری که در آن شرکت داشته‌ام، متشکل از آلن شیلدز[1] و من بوده است. ما یک بعدازظهر در هفته، به‌مدت تقریباً دو ساعت، یکدیگر را می‌دیدیم. خودمان را برای این ملاقات آماده نمی‌کردیم، و واضح است که به‌هم درس نمی‌دادیم. به چیزهای مشابهی علاقه داشتیم، با هم خوب کنار می‌آمدیم؛ هر یک از ما افکار خودش را توضیح می‌داد و دیگری با علاقه و توجه گوش می‌داد. معماهای ابتدایی را که در طول هفته شنیده بودیم، سؤالات عجیب و غریبی را که در کلاس از ما شده بود، مسائل ناپخته‌ای را که به ذهنمان خطور کرده بود، ایده‌های مبهمی را که برای حل مسائل هفتهٔ پیش به‌نظرمان رسیده بود، و نکات روشنگری را که در سمینارهای دیگر شنیده بودیم به‌هم می‌گفتیم ــ گاهی هیجان‌زده فریاد می‌زدیم، گاهی پای تخته، در سکوتِ ناشی از گیجی، خیره به هم نگاه می‌کردیم ــ و به هر حال طی یک سالی که این سمینار ادامه داشت، چیزهای زیادی از یکدیگر یاد گرفتیم، و هر دو لذت بردیم. این مراوده به همکاری، به‌معنیِ انتشار مقالهٔ مشترک منجر نشد، ولی ما اهمیتی به آن نمی‌دادیم. با این جلسات پخته شدیم؟ خُب شاید پخته‌تر.

******

• ترجمهٔ فصل چهارم (صفحات ۵۰ـ۷۳) از کتاب

Paul R. Halmos, *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag (1985).

ترجمهٔ این کتاب به‌صورت پاورقی در نشر ریاضی چاپ می‌شود.

1. Allen Shields

NASHR-E RIYĀZI

Volume 18, Number 1, April 2010

Editorial Board

H. HAGHIGHI, A. JAMĀLI, S. KĀZEMI,
M. Q. VAHIDI-ASL (chairman)

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 50 Park Avenue, Tehrān 1511786911, Iran.

CONTENTS

Notes & News

Articles

* On the concept of genus in topology and complex analysis, F. E. P. HIRZEBRUCH and M. KRECK
* An elementary approach to the monster, C. S. SIMONS
* Emmy Noether and the advent of abstract algebra, I. KLEINER
* Frequentist statistics as a theory of inductive inference, D. G. MAYO and D. R. COX
* *K*-theory: An elementary introduction, M. KAROUBI

Teaching/Problems

Iranian university students mathematics competitions: A brief review, B. R. YĀHAGHI

Reviews

A Persian translation of the *Elements of Euclid*

* *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*, by T. Tao (reviewed by L. LARSON)

A chapter from a book

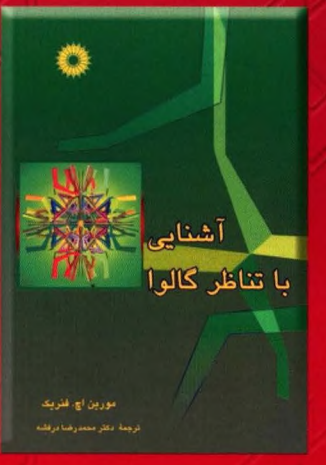
* *I Want to be a Mathematician* (ch.4), P. R. HALMOS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

گروه ریاضی مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است





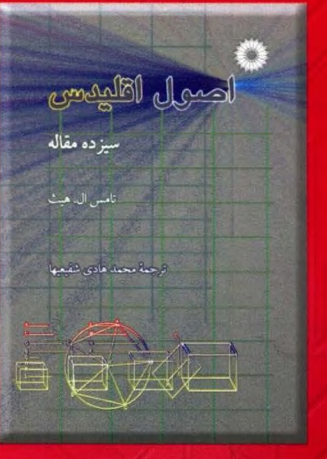












تلفن دفتر توزیع و فروش: ۶۶۴۰۴۰۱۱