

جلد چهارم اول اسفند ماه ۱۳۰۶ شمسی سال اول

حل المسائل

ریاضی

که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی است در تحت نظر و مراقبت

ناصر - هورفر - ریاضی

در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد

وجه اشتراك سالیانه در طهران و ولایات يك تومان

قیمت يك جلد دهشاهی است

اشخاصی که مایل باشند بکتابخانه تهران و ولایات لاله زار رجوع نمایند

برای اشخاصی که بعد از انتشار چند جلد مشترك میشوند مجلدات

ماقبل نیز فرستاده خواهد شد

مسائلی که در این مجموعه حل میگردد عموماً از مسائلی است که در امتحانات نهائی ایران و اروپا
و غیر آن اتخاذ میشود ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد بعد حل میشود در
جلدهای قبل بعنوان سوال طرح خواهند شد و اسامی مشترک که مسئله مندرجه را
پانزده روز بعد از نشر همان جلد صحیح حل کرده بکتابخانه تهران بفرستند و ذیل همان مسئله درج

خواهد شد ضمناً تذکر میدهیم که در يك جلد نصف صفحات مخصوص

بحل مسائل راجع بدوره اول متوسطه بوده و بقیه آن

بدوره دوم اختصاص خواهد داشت

محل تلك فروشی كتابخانه تهران و قرائتخانه شرافت است

حال بازار، $x = 2$ مقدار y مساوی $\frac{1}{4}$ - و بازار $x = -2$ مقدار y می باشد
پس میتوان گفت که بازار $x = 3$ نیز مطلقاً صفر صورت ثلث صفر خرج و بازار

$x = -2$ صفر صورت پنج برابر صفر خرج است

مسئله - کسر $\frac{x^2 + 2xy - x^2 + y^2}{x^2 - y^2 + 2yx - x^2}$ را بصورت ساده تری

تبدیل کنید. ابتدا صورت را میتوان مرتباً چنین نوشت

$$x^2 + 2xy - x^2 + y^2 = (x+y)^2 - x^2 = (x+y+x)(x+y-x)$$

و همچنین خرج را بصورت ذیل میتوان تبدیل کرد

$$x^2 - (y^2 - 2yx + x^2) = x^2 - (y-x)^2 = (x+y-x)(x-y+x)$$

و بنابراین

$$\frac{x^2 + 2xy - x^2 + y^2}{x^2 - y^2 + 2yx - x^2} = \frac{(x+y+x)(x+y-x)}{(x+y-x)(x-y+x)} = \frac{x+y+x}{x-y+x}$$

مسئله - دستگاه $\begin{cases} x+ay+a^2x+a^3=0 \\ x+by+b^2x+b^3=0 \\ x+cy+c^2x+c^3=0 \end{cases}$ را حل کنید

در معادله درجه سوم $f(u) = u^3 + xu^2 + yu + x = 0$ اگر مرتب

بجای u متدیر a و b و c را قرار دهیم :

$$f(b) = b^3 + b^2x + by + x \quad \text{و} \quad f(a) = a^3 + a^2x + ay + x$$

$$\text{و} \quad f(c) = c^3 + c^2x + cy + x \quad \text{و از مقایسه اینها با معادلات فرض مسئله}$$

پدید می شود که $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c)$ مساوی صفر میباشند

بنابراین $f(u)$ بر $u-a$ و $u-b$ و $u-c$ قابل قسمت

بوده لذا بر حاصل ضرب آنها نیز قابل قسمت است اما چون ضرب

نمود $f(u)$ در $f(u)$ واحد است پس میتوان چنین نوشت :

مسئله - عبارت $f(x) = x^5 - 17x^3 + 4x^2 + ax - 12$

مقدار a را تعیین کنید که $f(x)$ بر $x+2$ قابل قسمت شود

برای آنکه $f(x)$ بر $x+2$ قابل قسمت شود باید $f(-2) = 0$ باشد بنابراین

$$a = 24 \quad f(-2) = 32 + 136 + 16 - 2a - 12 = 0$$

$$\text{پس} \quad f(x) = x^5 - 17x^3 + 4x^2 + 24x - 12$$

قابل قسمت است

مسئله - عبارت $f(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 - 2x^2 - bx + 16$

مقادیر a و b را طوری اختیار کنید که $f(x)$ بر

$$x-2 \quad \text{و} \quad x+1$$
 قابل قسمت شود

اولاً میتوان $f(x)$ را با حاصل ضرب دو عامل $x-2$ و $x+1$

تجزیه کرد پس برای آنکه $f(x)$ بر $f(x)$ قابل قسمت باشد باید :

$$f(-1) = -1 - 3 - a - 2 + b + 16 = 0 \quad f(2) = 32 - 24 + 8a - 8 - 2b + 16 = 0$$

پس $a-b=10$ و $a-b=10$ و بنابراین $a=2$ و $b=-12$

لذا $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 12x + 16$

مسئله - مقدار عددی $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$ را بازار

$x = -2$ تعیین کنید

چنانکه دیده میشود مقدار y بازار $x = \pm 2$ بصورت $\frac{0}{0}$ در می آید

یعنی صورت و مخارج کسر فوق بازار $x = 2$ و $x = -2$ صفر میباشند پس

صورت و مخارج بر $x-2$ و $x+2$ و لذا بر حاصل ضرب آنها x^2-4

قابل قسمت است تعیین میتوان چنین نوشت

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \frac{(x^2-4)(x-3)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

نیز بدست آورده تقسیم کنید

$$x = \frac{(A-b)(A-c)(A-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

$$y = \frac{(A-a)(A-c)(A-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$z = \frac{(A-a)(A-b)(A-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}$$

مسئله - معادله $\frac{(x+2)^5 + (x-2)^5}{(x+3)^5 + (x-3)^5} = \frac{1}{3}$ را حل کنید

ابتدا پرانتزهای صورت و مخرج را مطابق قاعده نیوتن بسط میدهم:

$$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

$$(x+3)^5 = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

$$(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$$

و بنابراین معادله فوق بصورت $\frac{x^5 + 40x^3 + 80x}{x^5 + 90x^3 + 405x} = \frac{1}{3}$

و یا به $x^5 - 10x^3 - 245x = 0$ در میاید حال اگر در طرف اول این معادله

$x(x^4 - 10x^2 - 245) = 0$ را حاصل مشترک قرار دهیم

پس یا $x = 0$ و یا $x^4 - 10x^2 - 245 = 0$ و از آنجا $x^2 = 5 \pm \sqrt{25 + 245}$

یا $x = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{270}}$

مسئله - معادله $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$ را حل کنید

طرفین معادله را بر x^2 تقسیم نموده و آنرا بدین صورت مینویسیم:

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 + 9 = 0$$

حال فرض کنیم $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ باشد $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$

و یا $y = \pm 3$ و $y = \pm 1$ پس حل معادله مفروضه محل چهار معادله درجه دوم

ذیل تبدیل میشود: $\frac{x^2 - x + 1}{x} = 3$ و

$$f(u) = u^3 + xu^2 + yu + z = (u-a)(u-b)(u-c)$$

$$= u^3 - (a+b+c)u^2 + (ab+ac+bc)u - abc$$

یعنی $x = -(a+b+c)$ $y = ab+ac+bc$ $z = -abc$

(بر اضرایب محل متقابل طرفین یکا اتخاذ باید مساوی باشند)

مسئله - دستگاه $x+y+z+t=1$ را حل کنید

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=A \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2t=A^2 \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3t=A^3 \end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را به ترتیب در m و n و s و t ضرب

ضرب نموده و عضو بعضو آنها را با یکدیگر جمع کرده ضرایب x و y

و z را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود:

$$m+ar+as+a^2=0$$

$$Dt=H \quad m+br+bs+b^2=0$$

$$m+cr+cs+c^2=0$$

اما جوابهای این دستگاه سه مجهولی مطابق مسئله سابق عبارتند از:

$m = -abc$ و $r = ac+ab+bc$ و $s = -(a+b+c)$

پس $D = -abc + d(ab+bc+ac) - d(a+b+c) + d^2$

$\equiv (d-a)(d-b)(d-c)$ و همچنین:

$H = (A-a)(A-b)(A-c)$ و بنابراین:

$$t = \frac{(A-a)(A-b)(A-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

بطریق مساب به باطریقه فوق میتوان سهولت مقادیر سایر مجهولات

A خط Δ باشد رسم کنید
برگز 8 شعاع $CB + r$ دایره γ بیضی را رسم میکنیم و از نقطه C خطی موازی

[illegible]

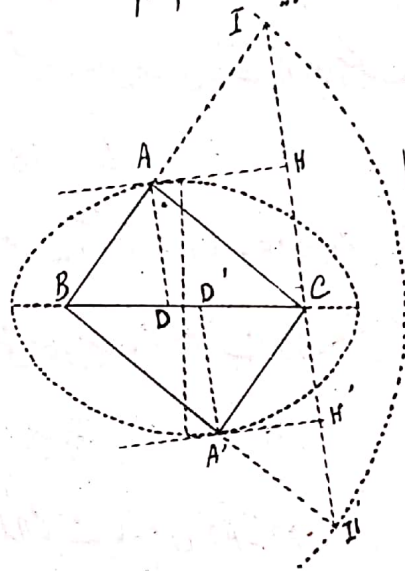
که دایره مادی

نقا، اور ط I و I

قطع کند چون از آن

و نقطه B وصل

کمیہ وازوسط



دو خط IC و IC' و عمود BI و BI' را در نقاط A و A'
 که رؤس مثلث مطلوب است قطع خواهد کرد زیرا بنا بر نسبت تساوی
 AI و AC نتیجه می شود $AC + AB = AB + AI = r_l + BE$ و همچنین
 بنا بر نسبت تساوی $A'E$ و $A'I'$ معلوم می شود
 $A'B + A'E = r_l + BE$ و خط موازات Δ رسم کنیم
 عمود بر دو خط AH و $A'H'$ میشوند اما چون دو خط اخیر منصف الزاویه های
 خارج مثلثات ABC و $A'B'C'$ اند لازم می آید AD و $A'D'$
 منصف الزاویه های داخل همین مثلثات باشند

مسئله - بر کز E وسط خط واصل بین اوسطا اقطا ABCD باشع
اختباری دایره مرورید هم ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل
بر نقطه مقسم وض بر محیط این دایره از چهار رأس و دایره اضلاع

فرض میکنیم M و N اوسط اقطار AC و BD و شعاع دایره مماس

E رسم شده و P نقطه از محیط آن باشد پس موافق قضیه میانه چپین

$$\overline{PB}^r + \overline{PD}^r = r\overline{PN}^r + \frac{8D^r}{r} \text{ و } \overline{PA}^r + \overline{PC}^r = r\overline{PM}^r + \frac{A^2}{r} \text{ ; خواص ۱ و ۲}$$

وچون طرفین این دو تساوی را عضو بعضو بایکدیگر جمع کنیم :

$$\overline{PA}^r + \overline{PB}^r + \overline{PC}^r + \overline{PD}^r = r(\overline{PM}^r + \overline{PN}^r) + \frac{\overline{AC}^r + \overline{BD}^r}{r}$$

آیا چون نقطه E وسط MN فرض شده از مثلث PMN چنین نتیجه می‌گردد

و بنا براین: $\overline{PM}^r + \overline{PN}^r = r \overline{PE}^r + \frac{\overline{MN}^r}{r} = r \overline{R}^r + \frac{\overline{MN}^r}{r}$

$$\overline{PA}^r + \overline{PB}^r + \overline{PC}^r + \overline{PD}^r = r^2 + \frac{\overline{MN}^r + \overline{AC}^r + \overline{BD}^r}{2}$$

یا MN و AC و BD مفادیر ثابت اند پس حکم محقق بوده یعنی :

$$PA^r + PB^r + PC^r + PD^r = ct \quad (ct \text{ علامت مقدار ثابت})$$

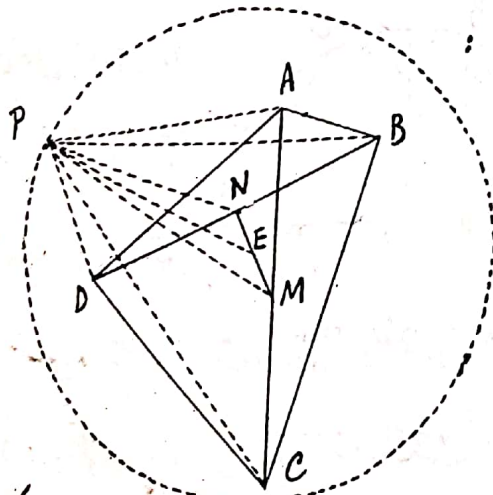
بخصوص۔ اگر طرفین تساوی مساوی مقدار ثابت K^2 باشد

طرف ثانی تر مساوی سبب بمقدار ثبات بوده و از آنجا

$$K^r = \frac{1}{2} (AC^r + BD^r + MN^r)$$

۸ = کتابت برین خط است

مانند



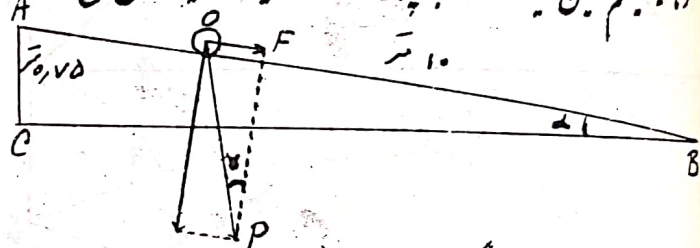
حکم - مکان هندسی نقاطی از سطح ذوار ربعه اضلاع که مجموع

مربعات فواصلشان از رُوس ذو اربعه اضلاع تعدا
بانی باشد محیط دایره است که بر کز وسط خط واصل بین
اوساط اقطار آن رسم شود.

بنده اگر شعاع R را صفر فرض کنیم
 $K^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) + MN^2$
پنی بنده ان گفت که:

وسط واصل بین اوساط اقطار هر ذو اربعه
اضلاع نقطه است که مجموع مربعات فواصلش از رُوس
میشوم می باشد.

فیزیک - مسئله - طول سطح مورب ۱۰ متر و ارتفاع آن ۷۵
نیمتر است گلوله را که جرمش ۵۰۰ گرم است آزادانه در سطح آن
را بکنیم متین کنید اولاً با چه قوه ساخط میشود ثانیاً طول سطح مورباً



اوجدت طی میکند ثالثاً در انتها آیه خود دارای چه حذتی است
(مخسود همان)

حل - ۱- به گره جرم و وزن جسم را بر تریب M و P و قوه که با آن
گلوله در سطح مورب ساخط میشود F و شدت قوه ثقل را در سطح مورب
و در ابتدا قائم فرض کنیم از تشابه دو مثلث قائم الزامیه
ABC و POF (اضلاع کیزاویه حاده شان بر هم عمود است) نتیجه میشود:

$$(1) \frac{F}{P} = \frac{AC}{AB} = \sin \alpha$$

$$F = P \sin \alpha = M g \sin \alpha =$$

$$= 500 \times 981 \times \frac{75}{1000} = 36787.5 \text{ dynes}$$

۲- حال اگر در رابطه (۱) بجای F مقدارش M و بجای P مقدارش

$$Mg \text{ را قرار دهیم حاصل میشود } \frac{x}{g} = \sin \alpha \text{ و از آنجا } x = g \sin \alpha$$

بنابراین معادله حرکت جسم در سطح مورب AB عبارت خواهد بود از:

$$(2) e = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha t^2$$

چون در رابطه فوق t را استخراج میکنیم حاصل میشود:

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{981 \times \frac{75}{1000}}} \approx 5 \text{ ثانیه}$$

۳- برای یافتن حذت گلوله در منتهی آیه سیر خود از رابطه (۲) مشتق

استخراج میکنیم تا معادله سرعت حرکت گلوله بدست آید $v = g \sin \alpha t$

حال اگر در رابطه $E = \frac{1}{2} M v^2$ بجای v مقدارش را قرار دهیم حاصل میشود:

$$E = \frac{1}{2} M g^2 \sin^2 \alpha t^2 = \frac{1}{2} M g^2 \sin^2 \alpha \frac{2e}{g \sin^2 \alpha} = e \cdot M g \sin \alpha$$

که چون بجای حروف معادله پریشان اقرار دهیم مقدار حذت جاب میشود:

$$E = e M g \sin \alpha = 1000 \times 500 \times 981 \times \frac{75}{1000} = 36787500 \text{ ergs}$$

هندسه تریبی - مسئله - بر دو خط متناظر فقیه بطول معین

مردودید

حل هندسی - معلوم است که به سوار یکی از دو خط AB و CD

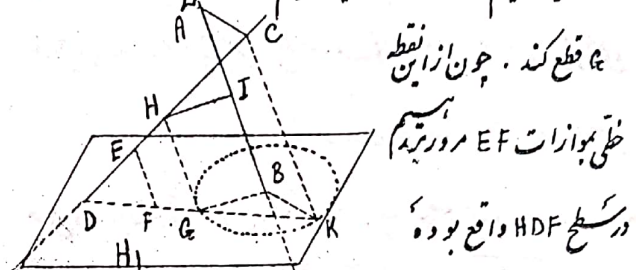
اقتلا سطح افقی را قطع خواهند کرد چه در غیر این صورت لازم می آید که

در یک سطح افقی (موازی یا متقاطع) و یا در دو سطح افقی باشند

و در صورت اخیر واضح است که مسئله جواب نخواهد داشت

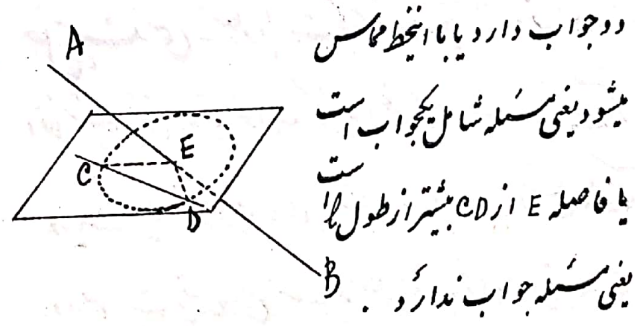
اولاً دو خط AB و CD هر دو سطح افقی H₁ را قطع میکنند - در انصورت

برکز نقطه تقاطع یکی از دو خط متساویان B دایره شعاع را رسم میکنیم و
بعد از نقطه مفروضه E خط EF را موازات AB
مردریم پس DF را امتداد میدیم تا محیط دایره را در نقطه H مانند



چون از این
خطی موازات EF مرور کردیم
در سطح HDF واقع بود
بنابرین DC را در نقطه H تلاقی میکند. حال اگر خط HI موازات
 AB رسم کنیم این خط نیز در سطح $H&B$ واقع است پس AB را در نقطه I
قطع میکند و بالاخره جواب مسئله خط HI خواهد بود. وضحت وقتی
 DF محیط دایره را در دو نقطه قطع کند مسئله دارای دو جواب دیگر
بر دایره مماس گردد شامل یک جواب بوده و سه گاه اصلاً محیط
دایره را تلاقی نکند مسئله جواب ندارد

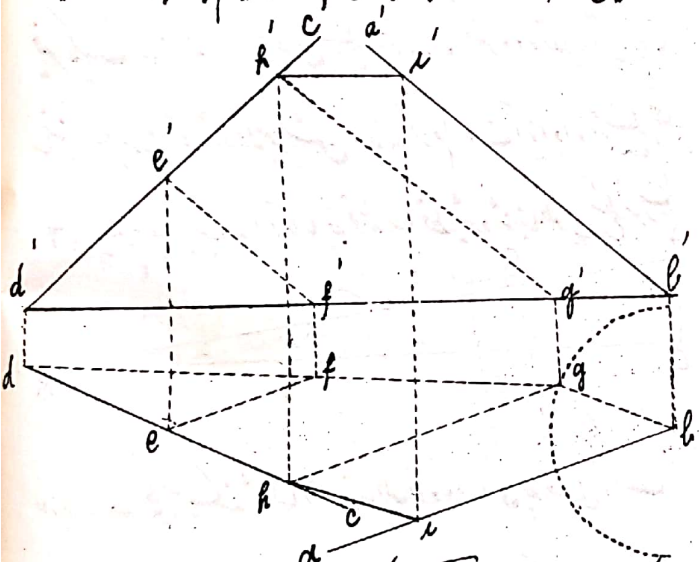
ثانیاً یکی از دو خط متساویان CD افقیه است. چون خط دیگری
 AB افقیه نیست پس سطح افقی را که بر CD مانند H_1 مرور میدیم
در نقطه E قطع خواهد کرد و وقتی برکز E شعاع را در سطح H_1 دایره
رسم کنیم با خط CD را در دو نقطه قطع خواهد کرد و بنا برین مسئله



دو جواب دارد یا با این خط مماس
میشود یعنی مسئله شامل یک جواب است
یا فاصله E از CD بیشتر از طول AB است
یعنی مسئله جواب ندارد.

حل ریسی - اولاً فرض میکنیم دو خط متساویان $cd&cd'$ و $ab&ab'$

بسیچیک افقیه نباشند. آثار افقی ایند و خط را که نقاط $cd&cd'$
است تعیین میکنیم و برکز d دایره شعاع را در سطح افقی رسم میکنیم
بعد از نقطه e مفروضه بر خط $cd&cd'$ خط $ef&ef'$ را موازی با
 $ab&ab'$ مرور میدیم اثر افقی این خط معینی نقطه f را بر نقطه d
اثر افقی $cd&cd'$ است وصل کرده امتداد میدیم تا محیط دایره را
بر نقطه h مانند q تلاقی کند چون از نقطه h خط $gh&gh'$ مواز
 $ab&ab'$ مرور میدیم خط $cd&cd'$ را در نقطه h تلاقی میکند و چون
از این نقطه موازات $gh&gh'$ خطی مرور میدیم جواب مسئله افقیه



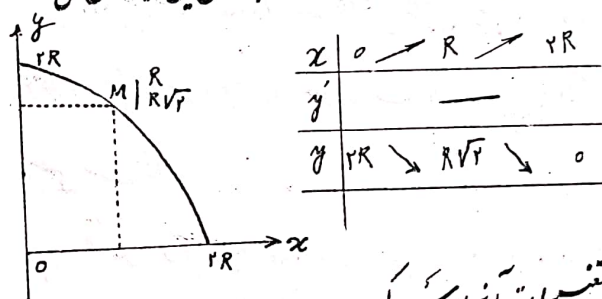
که h خواهد بود ثانیاً فرض کنیم $cd&cd'$ افقیه باشد پس
 $cd&cd'$ اثر قائم سطح افقی خواهد بود که خط cd در آن واقع است
محل تلاقی این سطح با خط $ab&ab'$ نقطه e است که چون برکز e
شعاع را دایره در سطح افقی de رسم کنیم cd را در نقطه d مانند
 $ef&ef'$ قطع خواهد کرد پس در اینجا
جواب مسئله خط $ef&ef'$ میشود
حل عمومی مسئله را بنده قایلین محترم اند

شرط آنکه ریشه های معادله فوق حقیقی باشند این است که $\alpha < \frac{4R}{3}$
 پس اگر $\alpha < \frac{4R}{3}$ باشد مسئله صاحب دو جواب مثبت و اگر
 $\alpha < 2R$ باشد مسئله بیش از یک جواب مثبت نخواهد داشت

۲- برای یقین تغییرات $y = \sqrt{2R(2R-x)}$ باید x را از صفر تا $2R$
 تغییر و ترقی در هم مشتق تابع $y' = \frac{-R}{\sqrt{2R(2R-x)}}$ بهواره منفی و بنابراین

y نزولی بوده بازاء $x=0$ مقدارش $2R$ و بازاء $x=2R$

مقدار آن صفر خواهد بود و از ملاحظه جدول ذیل میتوان منحنی نمایش



تغییرات آنرا رسم کرد

۳- $x = \sqrt{2R(2R-x)}$ پس کافی است طول نقطه تقاطع منحنی
 نمایش تغییرات فوق را با منصف الزاویه بین دو محور تعیین نمود و
 برای اینکار طرفین معادله (۱) را مجذور کنیم نتیجه میشود

$$x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0$$

این معادله دارای دو ریشه حقیقی
 یکی مثبت و دیگری منفی میباشد ریشه منفی آن در مسئله صدق

نیکنه در ریشه مثبت آن عبارت است از $x = R(\sqrt{5}-1)$
 و برای یقین آن کافی است قطر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نمود

(سید غریزی - حسن علی)

مسائل حل کردنی - برای دوره اول متوسطه

جبر - مسئله - مقدار $y = \frac{x-1}{x^2-5x+2x+2}$ را با $x=1$ تعیین کنید

مسئله - مطلوب است حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x+1} - \alpha x$ وقتی x میل کند به بی نهایت
 مسئله - عقربه های ثانیه شمار و دقیقه شمار ساعت شمار ساعتی در نظر
 بگیرید منطبقند معین کنید بعد از چه مدت در مرتبه چهل و سوم عقربه ثانیه
 شمار از رویه بین دو عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار را به نسبت $\frac{2}{3}$
 تقسیم میکند

مسئله - کسر $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}$ را مجموع دو کسر بصورت $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
 تبدیل کنید بعبارۀ آخری مقادیر a و b و A و B را بقسمی انتخاب کنید
 که کسر اول معادل مجموع دو کسر ثانیا باشد

مسئله - عبارت $f(x) = x^2 - (1+m-2)x + 15m^2 - 2m - 7$ را
 مقدار m را بطریقی تعیین کنید که $f(x)$ همواره از اربعه مقادیر مثبت
 باشد ثانیاً مقدار m را طوری انتخاب کنید که مجموع مربعات
 ریشه های معادله $f(x) = 0$ هم مساوی ۲۴ گردد

مسئله - دستگاه $x^2 + xy + y^2 = 37$ و $x^2 + xz + z^2 = 21$
 $x^2 + yz + z^2 = 19$ را حل کنید

مسئله - دستگاه $xy + xz + yz = a^2$ و $x^2 + y^2 = b^2$ را حل کنید
 هندسه - مسئله - ثابت کنید که اگر در مثلثی دو منصف الزاویه متساوی
 باشند آن مثلث مساوی الساقین است

(برای دوره دوم متوسطه) مثلثات - مسئله - صحت الحاد ذیل را اثبات کنید

$$\cot^2 x + \cot^2 y = 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

مسئله - عبارت ذیل را قابل محاسبه کنید

$$\sin(a+b+c) - \sin a - \sin b - \sin c$$

بسته زنجیره مطبوع علی