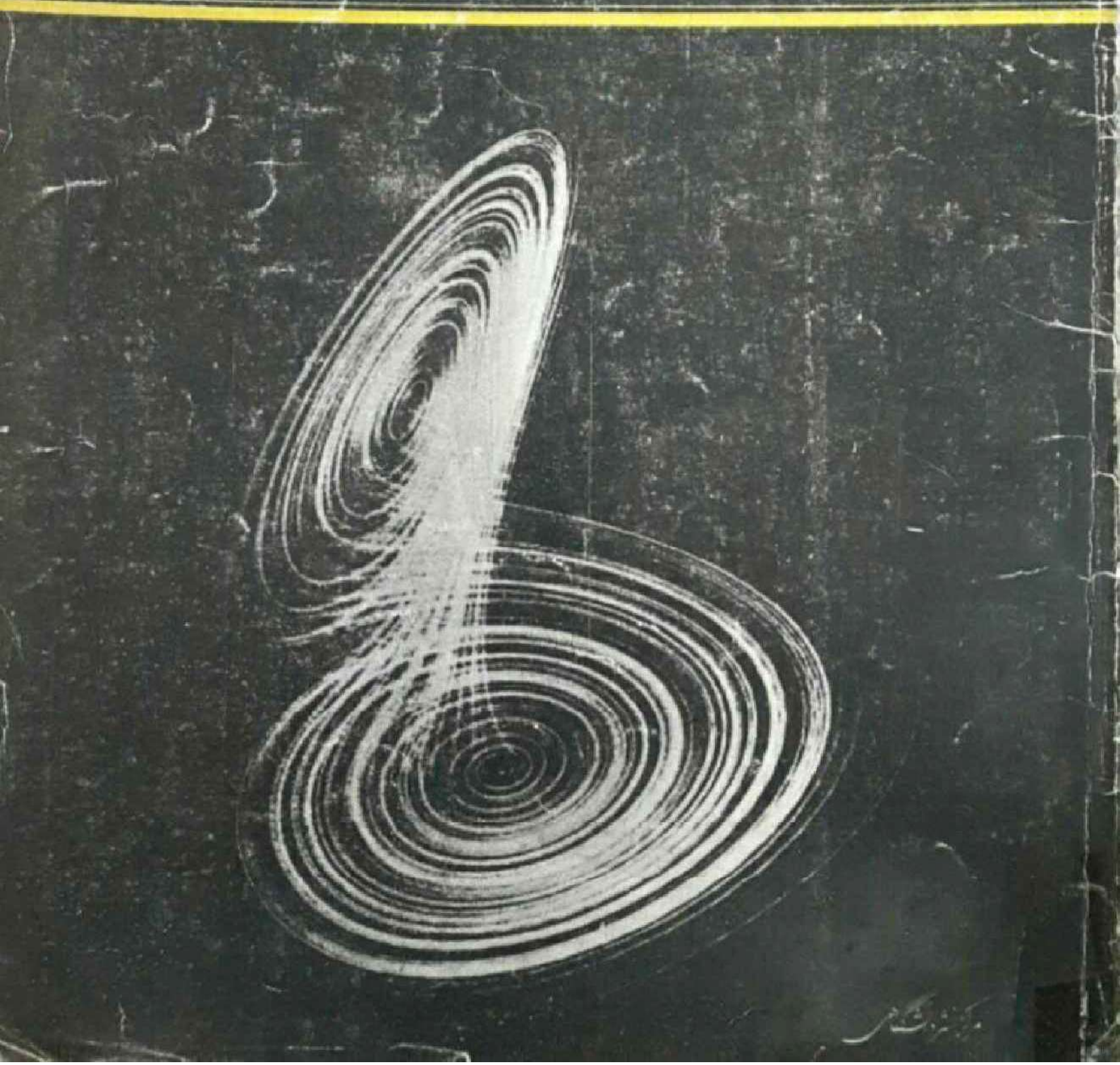
نشریه فیزیک

سال ۱، شماره ۱، فروردین ۱۳۶۷





مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک ـ خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است

بهای هر شماره ۲۵۰ ریال

حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۷۵۰ ریال

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ شده در نشر ریاضی باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در نشر ریاضی باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷

مدیر مسؤول: مهدی بهزاد

● هیأت ویراستاران: غلامرضا برادران خسروشاهی
مهدی بهزاد
یحیی تابش
محمد جلوداری‌ممقانی
مهدی رجبعلی‌پور
سیاوش شهشهانی
سیامك كاظمی

● مشاوران: محمدمهدی ابراهیمی، شاپور اعتماد، اسماعیل بابلیان، محمدباقری، مگردیچ توماسیان، احمدحقانی، محمدهادی‌شفیعیها، کریم صدیقی، علی عمیدی، امیدعلی کرمزاده، عبادالله محمودیان، حسن معصومی همدانی، اسدالله منجمی، رضا منصوری، منوچهر میثاقیان، محمدعلی نجفی، منوچهر وصال

● مسؤول فنی: نادر کثیری
● طراح و صفحه‌آرا: محمد حسن‌پور

با همکاری لابنوترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی، چاپ، صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه علامه‌طباطبائی

فهرست

دیدگاه ویراستاران

سر آغاز ۲
مسألهٔ روز: گفتگویی دربارهٔ دکتری ریاضی ۲

مقاله‌ها

ریاضیات آشوب — عباس عدالت ۹
نگاهی به فرضیهٔ ریمان — هربرت ویلف ۱۶
جای خالی ریاضیات: مروری بر نشریات ادواری ریاضی در ایران — غلامرضا برادران خسروشاهی ۱۹
بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند — ویکتور هارنیك ۲۴
تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان را چگونه باید بررسی کرد؟ — آرپاد ساپو ۳۱
چندخاطره‌از ریاضیدانهایی که شناخته‌ام — جورج پولیا ۳۷
صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات — آرتور جفی ۴۲

هنر حل مسألهٔ

آموزش هنر مسأله حل کردن — آنی شوئنفلد ۵۰

کتاب

سهم ما از منطق ریاضی — ضیاء موحد ۵۹
نقد خوب چیست؟ — آلن ادموندز، جان اوینگ ۶۶
فهرست کتابهای ریاضی فارسی — ف.ا. قریار، شیوا دخت شیوایی ۶۸
واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار — سیامك كاظمی ۷۱

اخبار و گزارشها

۷۴



تصویر روی جلد:
ربایندهٔ غریب لورنتس؛ مقالهٔ ریاضیات آشوب را ببینید.

با سپاس از:
آقای فرخ وطن به خاطر مشارکت در شکل‌گیری مجله؛ و آقای محمدحسین حلیمی به خاطر طراحی عنوان مجله.

بسم‌الله الرّحمن الرّحیم

سرآغاز

ریاضیات فرهنگی گسترده دارد. نشریات ادواری ریاضی نقش مؤثری دراشاعهٔ این‌فرهنگ ایفا می‌کنند. چنین نشریاتی باید برزیربنای‌علمی غنی و دقیقی استوار باشند و درضمن، از فنون و ظرایف مجله‌نویسی نیز بهره‌گیرند. تحقق این امر، به‌ویژه استمرار آن، جز با حمایت‌نهاد متشکلی که دارای امکانات حرفه‌ای لازم باشد، میسر نیست. با توجه به‌نیازهای موجود و تجربه‌های گذشته، نشر ریاضی پا به عرصهٔ انتشار می‌گذارد.

نشر ریاضی می‌خواهد به‌زبانی توصیفی، آگاهی از ریاضیات را اشاعه دهد. دراین مجله زمینه‌های جدیدوجذاب ریاضی، دستاوردهای مهم و دیدگاههای نوین را معرفی می‌کنیم و در عین حال، به‌تاریخ، فلسفه، وآموزش ریاضی، نقد و بررسی کتابهای تازه، و اخبار مربوط به‌ریاضیات و ریاضیدانان می‌پردازیم. دربارهٔ مسائل روزجامعهٔ ریاضی و دانشگاهی کشور، دیدگاههای صاحبنظران را مطرح می‌سازیم.

مخاطب نشر ریاضی، جامعهٔ رو به‌گسترش ریاضی‌خوان کشور است، از دانش‌آموزان کنجکاو سالهای آخر دبیرستان تا ریاضیکاران حرفه‌ای و سیاستگذاران علمی کشور. در راهی که در پیش داریم، پشتوانهٔ ما استقبال، حمایت، و همکاری خوانندگان است.

هیأت ویراستاران

مسألهٔ روز

گفتگویی دربارهٔ دورهٔ دکتری ریاضی

۱۳۴۱م

اخیراً پنج دانشگاه از دانشگاههای کشور مجوز پذیرش دانشجو برای دورهٔ دکتری ریاضی گرفته‌اندوسرگرم تدارك مقدمات‌کارند. برخی‌دانشجو هم پذیرفته‌اند وقراراست درنیمسال دوم سال تحصیلی جاری‌برای‌نخستین بار درتاریخ کشورمان دورهٔ دکتری ریاضی افتتاح شود. تقارن این‌رخداد مهم با انتشار نخستین شمارهٔ نشر ریاضی هیأت ویراستاران را برآن داشت‌که‌گفتگویی باشرکت عده‌ای ازاعضای خودترتیب دهد تا راه برای بررسیهای‌همه‌جانبه‌واظهار نظرهمکاران‌صاحبنظر گشوده‌شود. شرکت‌کنندگان دراین‌گفتگوعبارت‌اند از دکترغلامرضا برادران خسروشاهی، دکترمهدی بهزاد، دکتر مهدی رجبعلی‌پور، دکتر سیاوش شهشهانی، و یحیی تابش. متن‌گفتگو را در زیر می‌خوانید.

تابش: در مورد دورهٔ دکتری ریاضی مطالب زیادی وجود داردکه باید مورد بحث و بررسی قرار گیرد؛ از جمله اینکه آیا این زمان، لحظهٔ مناسبی برای شروع این دوره است؟ دربارهٔ چند وچون برنامه چه‌صحبتی هست وآیا پیشنهادهایی برای بهتربرگزار شدن‌آن‌داریم؟ استادان‌گرامی اگر نظراتی دارند، لطفاً بیان‌کنند.

رجبعلی‌پور: درمورد زمان شروع برنامه، من فکر می‌کنم دیر هم‌شده باشد. یعنی واقعاً خیلی وقت پیش بایستی شروع می‌کردیم. یك سد روانی جلوی این برنامه بوده‌که همیشه فکر می‌کردیم شرایطش آماده نیست. دنبال‌شرایط‌ایده‌آل بودیم؛ ولی شرایط‌ایده‌آل هیچوقت‌فراهم نمی‌شود. ناچار باید تعهدی اخلاقی و وجدانی بدهیم و این‌کار را شروع کنیم و سعی کنیم بهتر شود وسیر تکاملیش را طی کند. به‌هرحال این ریسك را بایدکرد. چه‌بسا بعدازمدتی ببینیم ازعهده‌اش برنمی‌آییم یا به‌این نتیجه برسیم‌که باید چند تا دانشگاه را درهم ادغام کنیم‌ودر یك جا دکتری خوب بدهیم. البته اگر برنامه بخواهد فقط دریك جا متمرکز باشد، طبیعتاً درتهران خواهد بود وشهرستانها هیچوقت‌جرأت ندارند جلوبیایند. ولی اگرواقعاً لازم است تمرکزوجود داشته‌باشد، بگذارید درعمل به‌آن برسیم. آن‌وقت با کمال فروتنی خواهیم‌گفت بسیارخوب، در شهرستانها یا در همهٔ دانشگاهها امکان برگزاری این برنامه نیست، بیاییدنیروها را متمرکزکنیم. واقعیت این‌است که‌اکثر کشورهای جهان دورهٔ دکتری ریاضی دارند و خیلی ازآنها از نظر علمی چندان هم بهتراز ما نیستند. ما هم باید این سد روانی‌رابشکنیم و ببینیم در عمل چه پیش می‌آید.

بهزاد: یکی دو نکته از حرفهای دکتر رجبعلی‌پور را تأیید می‌کنم و فکرمی‌کنم شاید حتی دیرشده و صددرصد لازم است‌که چنین‌دوره‌ای

تشکیل شود. نگاه‌کنید به‌وضع دانشگاهها و تعداد دانشجویان در هر کلاس ـ کلاسهای ریاضی ۲۰۰-۳۰۰ نفره ـ وکمبودی که از لحاظ کادر علمی وجود دارد. شکی نیست که چنین برنامه‌ای باید شروع می‌شد ولی تعجب در اینجاست که ما بدون اینکه مطالعهٔ جدی کرده باشیم، لوازم کار را سنجیده باشیم، امکانات دانشگاههای مختلف را در نظر گرفته باشیم، یك باره می‌خواهیم در پنج دانشگاه مختلف آن هم به طور مستقل دورهٔ دکتری دایر کنیم؛ در حالی که باید مثلاً بررسی می‌کردیم که چند تا استاد در هر کدام از این دانشگاهها وجود دارد، کارهای علمی اینها چیست و در چه سطحی است، وضع این دانشگاهها از لحاظ مجلات علمی و کتاب چطور است، وکشورهای دیگر به‌چه ترتیبی و باچه مقدماتی این‌کار راشروع کرده‌اند. اتحادیهٔ‌جهانی ریاضیدانان مطالعات وسیعی دراین زمینه‌ها دارد وحداقل‌هایی را برای ایجاد دورهٔ دکتری تعیین‌کرده است. آیا نباید از خودمان سؤال کنیم هدفمان از این برنامه تربیت چه نوع افرادی است؟ آیا می‌خواهیم محقق تربیت‌کنیم؟ مدرس تربیت کنیم؟ مدرس برای چه درسی و محقق برای تحقیق در چه زمینه‌ای؟ این سؤالات برای من مطرح است و فکرمی‌کنم که خیلی هم جدی است. ممکن بود مطالعه‌ای در ظرف مثلاً شش ماه ـ بیشتر یا کمتر ـ انجام شود و این‌چندوچون‌ها بررسی شود. هنوزهم دیر نشده و این بررسی می‌تواندالان‌هم شروع شود. خلاصهٔ عرض‌من‌این است‌که لزوم تأسیس دوره‌را مجدداً تأکید می‌کنم ولی آنچه‌که نگرانش هستم این است‌که خدای نکرده بر اثر بی‌برنامگی و تدارك ندیدن مقدمات کافی، دورهٔ دکتری به‌ابتذال کشیده شود. من‌مخالفم با این‌که‌کاری را شروع‌کنیم و بعداً ببینیم چه پیش می‌آید. این‌گونه برخورد با مسائل، بهیچوجه علمی نیست.

شهشهانی: عرض شودکه من درجهت لزوم این برنامه نکاتی می‌گویم. ببینید، این‌که‌می‌فرمایید‌لازم است مطالعاتی‌بشود، نتیجهٔ‌چنین‌مطالعاتی را خودمان می‌دانیم‌که چیست، چون واقعاً جامعهٔ ریاضی ایران خیلی کوچك و محدود است. من فکر می‌کنم چنین بررسیهایی ممکن‌است ایجاد یأس‌کند. من اتفاقاً بیشتر با رجبعلی‌پور موافقم‌که دراین مقطع، قدری بی‌گدار به‌آب بزنیم، چون دیر شده. البته، شاید ده سال پیش وضع جامعهٔ‌ریاضی ایران با حالافرق چندانی نداشت، ولی حالالزوم تأسیس این دوره بیشتر و موجباتش فراهمتراست. ده‌سال پیش ازنظر استاد مثل حالا بودیم ولی الان از نظر دانشجو وضعمان خیلی بهتر است. درآن‌موقع بیشتردانشجویان خوب بورس می‌گرفتند و به‌خارج می‌رفتند و دانشجوی‌مستعد برای دورهٔ دکتری کم داشتیم. الان تعداد قابل‌ملاحظه‌ای دانشجوی با استعداد داریم‌که در اینجا ماندنی هستند. اگر شما راه ادامهٔ تحصیل اینها را باز نکنید که علمشان را به جایی برسانندوبارورشوند، فقط درآنها ایجادیأس کرده‌ایدوجاذبهٔ مختصری را هم که این رشته از علوم پایه دارد، از بین برده‌اید. توجیه خیلی خوبی برای برنامهٔ دکتری، وجود همین دانشجویان است. در مورد اینکه هدف این‌برنامه چیست، فکرمی‌کنم جواب مشخص‌است. چنین برنامه‌ای در درجهٔ اول همیشه برای تحقیق است. هدف نهایی دراین جور برنامه‌ها باید این باشدکه مرزهای علم جلو برود؛ با تحقیق‌است که شما یك علم را زنده نگه می‌دارید. در ایران، مشکلی که داشتیم این بود که لزوم تحقیق را توجیه کنیم، هم برای متصدیان امور، هم برای خودمان. چون مسؤولان در رشته‌ای مثل ریاضی، کاربرد علمی و صنعتی واقتصادی فوری نمی‌دیدند، بنابراین مسألهٔ تحقیق چیزلوکسی تلقی می‌شد. خود ما هم که در دانشگاه مسائل عدیده‌ای داشتیم، از آموزش دورهٔ لیسانس، مسائل سازندگی دردانشگاه وغیره، تمایلمان این بودکه کار تحقیق را، که واقعاً مشکلترین رکن‌کار دانشگاه است، پشت گوش بیندازیم. الان با راه انداختن برنامهٔ دکتری، تحقیق مشروعیتی پیدا می‌کند و من فکر می‌کنم این تنها وسیله‌ای است که می‌شودبا آن جلو پوسیده شدن بخشهای ریاضی دانشگاهها را گرفت. بنابراین، وقتی جمعبندی می‌کنم، عوامل مثبت برای راه انداختن این برنامه به‌قدری براشکالات می‌چربندکه من فکر می‌کنم باید از این‌فاز گذشت و بیشتراجع به‌اینکه چگونه به‌نحوخوبی این برنامه را پیش ببریم، صحبت‌کرد.

بهزاد: با حرفهای دکتر شهشهانی کاملاً موافقم‌که الان موقع این کار است؛ دانشجوی خوب داریم، و بعضی امکانات هم داریم. دربارهٔ عرایض من اشتباه پیش نیاید. من هم هیچ شکی ندارم که این دوره باید ایجاد شود. بحث من برسر نحوهٔ انجام‌کار است. برای هرکاری آدم مدتها هدفهایش را بررسی می‌کند، نقشه‌ها را پس‌وپیش می‌کند، بودجه‌اش را می‌سنجد، ابزارکار را آماده می‌کند وسپس شروع به‌کار می‌کند. حرف من فقط دراین زمینه است. مطمئنم‌که اگر بررسی‌مورد نظرمن انجام می‌شد، هرچند نتیجه‌اش ازجهاتی خوشحال‌کننده‌نمی‌بود وبه‌قول شما یأس‌آورمی‌بود، بازهم ممکن بودتغییرات مثبتی دربرنامه ایجادکند. مثلاً با این‌کمبودی‌که از لحاظ استاد داریم، چه بسابه‌این نتیجه می‌رسیدیم‌که مرکزیتی ایجاد شود وهمه دریك جا باشند وباهم درس بگیرند، خصوصاً که تعداد دانشجویان‌هم معدود است؛ نه اینکه درچهار دانشگاه‌که در محدوده‌ای به‌شعاع تقریبی ۴ کیلومترواقع‌اند، برای‌درسهای اجباری دورهٔ دکتری کلاسهای ۲-۳نفره به‌طورجداگانه تشکیل شود. برای کلاس، سمینار، کتاب، و مجلات علمی مرکز واحدی به‌وجود می‌آمد. دولت هم می‌توانست به‌خوبی ازآن‌حمایت کند. کنکور دکتری هم درهمانجا با همکاری استادان زبدهٔ‌دانشگاهها برگزار می‌شد. در چنین صورتی، امکان داشت که استاد تز هر کس بود، درجهٔ‌دکتری را هم دانشگاه همان استاداعطا کند، واین تشویقی بود برای دانشگاههای مختلف. اگر بررسی انجام می‌شد وحداقل‌ها برای‌کشوری‌درسطح‌کشورما تعیین‌می‌شد، به‌دانشگاهها‌اعلام‌می‌کردیم برای اینکه بتوانید به‌طور مستقل دورهٔ دکتری دایر کنید باید کتابخانهٔ شماچنین وچنان باشد، کمیت و کیفیت‌استادانتان‌به‌این‌نحو باشد وغیره.

خسروشاهی: درمورد لزوم دورهٔ دکتری، بنده باید عرض‌کنم‌که‌لحظهٔ تاریخی برای شروع این برنامه فرا رسیده. البته با آقای دکتر بهزاد کاملاً موافقم‌که باید یك نوع بررسی انجام می‌شد، گو اینکه حقانیتی هم درحرف دکترشهشهانی هست‌که‌می‌گویندما خودمان می‌دانیم وضع چطوراست. با این حال، شما نمی‌دانیدکه مثلاً در دانشگاه تهران در دورهٔ فوق لیسانس (کارشناسی ارشد) چه تزهایی با چه‌کیفیتی نوشته شده. من با بررسی خیلی کوتاهی که دربارهٔ این تزها کردم، به‌این نتیجه رسیدم‌که اطلاعات، تجربه وتبحر ما درلحظهٔ حاضر خیلی‌بیشتر ازآن زمانی است‌که در دانشگاه تهران برنامهٔ فوق لیسانس رابنیان‌گذاری کردند. بنابراین، شخصاً قانع شدم‌که این‌دوره می‌تواند دایر شود. این هم که گفته شد اگر دانشجوی خوب نداشته باشیم برنامه موفق نمی‌شود، حرف درستی است. دانشجوی ممتازاست‌که می‌تواند تحقیق خوبی بکند وتزخوبی بنویسد. خلاصه، این زمان لحظهٔ مناسبی برای شروع است.

شهشهانی: اجازه دهید اشکال عملی را که در پیشنهاد دکتر بهزاد می‌بینیم، روشنتر بیان کنم. هیچکس مخالف بحث‌اصولی یا برنامه‌ریزی

اصولی نیست. اشکال عملی در این است کـه متأسفانه ما هنوز عادت به‌بحث اصولی نکرده‌ایم. همان‌طور که در بسیاری از جلسات دیده‌اید، مثلاً در جلسات برنامه‌ریزی دروس، به‌جای اینکه بحث و نتیجه‌گیری اصولی داشته باشیم، مقدار زیادی برخوردهای شخصی و اصرار بر مواضع شخصی داریم، و بالاخره هم نتیجـه‌گیری بر اساس مصالحه بین افرادی است که حاضر نیستند از مواضع خود کوتاه بیایند. چیزی که می‌خواهم بگویم این است که نوعی آشوب، بر یك برنامه‌ریزی غلط تثبیت شده ارجحیت دارد. همیشه در آشوب امکان این هست که مواضعی کـه دارای حقانیت هستند، خودشان را نشان دهند ولی یك برنامه‌ریزی غلط غیر قابل انعطاف می‌تواند جریان را از اول در یك مسیر انحرافی تثبیت کند.

رجبعلی‌پور: کسی جرأت نمی‌کند بگوید که بحث اصولی لزومی ندارد ولی به‌قول دکتر شهشهانی نتیجهٔ چنین بحثهایی را می‌دانیم. واقعیت این است که اگر بخواهیم زیاد اصولی فکر کنیم، هیچوقت نمی‌توانیم دورهٔ دکتری دایر کنیم؛ چون واقعاً نقاط ضعف زیاد است و اشکالات فراوان است. هیچ راهی نبود جز اینکه دل به‌دریا بزنیم و توکل به‌خدا بکنیم. اگر در نتیجهٔ بررسیها می‌گفتند برنامه باید در یك جا متمرکز باشد، از دو حال خارج نبود: یا باید استادان شهرستانها به‌تهران می‌آمدند که در این صورت وضع دانشگاههای شهرستانها خراب می‌شد، و یا استادان شهرستانی سر جای خود می‌ماندند، که در این صورت خود آنها می‌پوسیدند. ولی دانشگاههای مستقر در تهران بـه نظر من باید همکاری کنند تا ائتلاف انرژی و نیرو نشود. مسألهٔ دیگر این است که مجوزی که وزارت‌علوم به‌ما داده، نباید نتیجه‌اش این شود که بلافاصله ده بیست تا دانشجو بگیریم. در هر دانشگاه، استادی که فکر می‌کند واقعاً مسأله دارد، مطلبی برای تحقیق دارد، دانشجویی انتخاب می‌کند تا روی آن مسأله کار کند و پیش برود. در دورهٔ فوق لیسانس به‌نظر من باید درسهای بنیادی داده شود و اگر ممکن باشد تز فوق لیسانس هم حذف شود و به‌جای آن درسهای اساسی بیشتری داده شود و در دورهٔ دکتری، درسها بیشتر به‌صورت مقوله (topic) باشد و حالت تحقیقاتی داشته باشد. به‌این ترتیب کلاسهای دو سه نفره هم در فوق لیسانس نخواهیم داشت. این مجوز تأسیس دورهٔ دکتری، باید مایهٔ امیدی باشد برای اعضای بخشهای ریاضی دانشگاهها که بروند خودشان را آماده کنند و معلوماتشان را تکمیل کنند.

تابش: اگر راجع به‌مناسبت ولزوم شروع برنامه صحبتی هست، تمامش بکنیم.

خسروشاهی: اینجـا حرفهای عجیب و غـریبی زده شد. ببینید، همه معترف‌اند که بحث اصولی لازم است. ولی مقدمات بحث اصولی چگونه باید باشد؟ باید کمیتهٔ برگزارکننده‌ای باشد که یك‌سری بررسی انجام دهد و در ابتدای این جلسات بگوید که ما این بررسیها را کردیم، مثلاً نتایج برنامهٔ فوق لیسانس به‌این ترتیب است، وضع دانشگاهها چنین‌وچنان است و ما به‌این نتایج رسیده‌ایم، حال شما در داخل این محدوده چه می‌گویید. اگر این بررسیهای مقدماتی انجام شود، نتیجه می‌شود که مثلاً تعداد واحدهای الزامی در دورهٔ لیسانس زیاد است و دانشجو زیر فشار این همه درس چیز زیادی یاد نمی‌گیرد و آن‌وقت، در جلسه کسی نمی‌تواند درسی را کـه مورد تمایلش هست بگذارد. خلاصه، باید اول بررسیهایی صورت بگیرد و سپس بحث در محدودهٔ نتایج آنها انجام شود.

بهزاد: می‌خواستم عرض کنم که میز گرد است و حرف رأی‌گیری نیست. هر کسی عقیدهٔ خودش را ابراز می‌کند و قانع کردن یکدیگر، به‌آن صورت معنا ندارد، گرچه خوشبختانه به‌نظر می‌رسد تفاهم برقرار است. عرض من این است کـه باید روش علمی داشته باشیم. اینکه دور هم بنشینیم، صحبت بکنیم، و آخرش خسته بشویم و به‌قول دکتر شهشهانی مصالحه کنیم، روش علمی نیست و به‌نظر من غلط است. باید بر بررسیهایی بر اساس آمار و ارقام دقیق به عمل آید، هدفها، ابزارها، ملزومات و امکانات در نظر گرفته شود و بعد حداکثر استفاده از امکانات موجود بشود. چه بسا بر اساس مطالعه، احساس شود باید از ایـرانیان مقیم خارج هم استفاده کنیم. تعـدادی از ریاضیدانان مقیم خارج آمادگی کامل دارند که ـ حتی در مورد رساله‌های دکتری ـ همکاری و کمك کنند. اگر مطالعاتی که گفتم انجام شود، آنگاه اعداد و ارقام خودشان حرف می‌زنند و دیگر کسی نمی‌تواند بگوید که مثلاً این دروس را هم اضافه کن و بقیه هم تمکین کنند.

شهشهانی: یکی از برنامه‌هایـی کـه در این مجله داریم، ترجمهٔ چند گزارش بررسیهای علمی از نوعی است که شما می‌فرمایید، و در خارج انجام شده، از قبیل گزارشهایی دربارهٔ وضعیت ریاضی در آمریکا و اروپا که ممکن است مدلهایی به دست دهند که همکاران ما از طریق آنها ببینند فرنگیها در این مورد چه می‌کنند.

تابش: سؤال بعدی این است که چه محصولی می‌خواهیم بیرون بدهیم و چه محصولی می‌توانیم بیرون بدهیم. و اصولاً دربارهٔ چند وچون برنامه چه نظری داریم.

رجبعلی‌پور: دربارهٔ کیفیت این برنامه نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که واقعاً در سطح خارج باشد ـ البته خارج که می‌گوییم، معمولاً چند دانشگاه خیلی سطح بالا را در نظر داریم و گرنه بسیاری از دانشگاههای خارجی همین حالا هـم از سطح ما پایینترند؛ مثلاً در هند صرفنظر از یکی دو انستیتوی تحقیقاتی مهم، بقیه مثلاً فوق‌لیسانسشان در سطح لیسانس ماست. ما به‌هرحال تا حدی غرور ایرانی داریم و واقعاً سعی می‌کنیم محصول خوبی داشته باشیم. استادان ما با تمام ضعفی که ممکن است داشته باشند، اگرهم نتوانند جلوتر از دانشجویان حرکت کنند، بالاخره پشت سر آنها هم که شده مجبورند حرکت کنند. ممکن است از آخرین مرزهای تحقیقات در سطح بین‌المللی اطلاع نداشته باشیم؛ ولی به‌هر حال مرزهایی که در ایران داریم مشخص است. به‌دانشجو می‌گوییم تو باید از این مرزها جلوتر بروی. دانشجو یا واقعاً چیز جدید و باارزشی کشف می‌کند که سعی می‌کنیم با استفاده از داوران بین‌المللی آن را ارزیابی کنیم، یا ممکن است معلوم شود کـه دانشجو اشتباه می‌کرده که به‌هرحال خودش می‌تواند به‌مرزهای جدید ازروی منابع و مجلات خارجی پی ببرد و به‌ما هم بگوید. این دانشجو به‌هر حال معلوماتش تا حدودی بیشتر از ما خواهد بود و دانشجوی بعدی بیشتر از او. ازاین طریق بهتر می‌توانیم به‌مرزهای جدید دانش دست یابیم تا اینکه تنها و بدون دانشجو و بدون همکاران فعال بنشینیم و فکر کنیم که داریم تحقیق می‌کنیم. من امیدوارم بعد از یکـی دو دوره، در سطح مطلوب جهانی قرار بگیریم.

خسروشاهی: ببینید، قرار شده تز دکتری دانشجو در یك مجلهٔ معتبر بین‌المللی چاپ شود.

حضار: چنین قراری گذاشته نشده.

خسروشاهی: پس اگر این‌طور است، نکند تز دکتری هم کم‌کم تبدیل بشود به‌ترجمهٔ بخشی از یك کتاب خارجی.

شهشهانی: قبول دارم که نباید انتظار داشته باشیم که در شروع کار، در سطح دانشگاههای عالی خارج باشیم. چه بسا این انتظار را برای ۵۰ سال دیگر هم نتوان داشت. ولی من معتقدم که باید سعی کنیم از آنچه می‌توانیم باشیم، بدتر نباشیم. احساس من این است که برخلاف ترسی که ممکن است درمورد تزوجود داشته باشد، درهمان دوره‌های اول چند تا تز خیلی خوب در خواهد آمد؛ هم به این دلیل که دانشجوی خوب داریم وهم به‌این دلیل که حیثیت همهٔ استادان مطرح است. نگرانی من از این لحاظ نیست. بلکه از این است که زود در دام تخصص بیفتیم. دراین مورد لطیفه‌ای ازیك فرد خارجی شنیدم که می‌گفت در کشور ما اگر کسی خواندن ونوشتن بلد باشد، می‌گوییم باسواد است و اگر خواندن یا نوشتن بلد باشد، می‌گوییم متخصص است. متأسفانه گاهی واژهٔ تخصص تبدیل به پوششی می‌شودبرای ندانستن. ترس من این است که عده‌ای بخواهندمحصولی بیرون بدهند که تقریبی از خودشان باشد ــ و به خوبی خودشان هم نباشد. استادی که چیزی خوانده و تخصصی دارد، ممکن است بخواهد دانشجو را به زور بیاورد در خط خودش؛ رکودی که به‌این طریق ایجاد می‌شود، شاید بدتر از حالتی باشدکه اصلاً دورهٔ دکتری ایجاد نشود. چیزی که تضمین کنندهٔ موفقیت برنامهٔ ماست، این است که ارتباط خود را با جامعهٔ ریاضی بین‌المللی قطع نکنیم. این بسیارمهم است که الان که دورهٔ دکتری ایجادمی‌شود، وزارت آموزش عالی نگوید که‌دیگر هیچ دانشجویی‌برای دورهٔ دکتری ریاضی به‌خارج فرستاده‌نخواهدشد. درست است که بعضی دانشجویان اگروارد برنامه شوند، برنامه تقویت می‌شود ولی اگراین دانشجویان در خارج ودر دانشگاههای طراز اولی تحصیل کنند، نفعی که عاید می‌شود، ده سال دیگر، بیشتر ازاین نفع فوری خواهد بود. برای جلوگیری ازابتذال برنامهٔ دکتری به‌نظرمن دانشجو باید تعداد زیادی درس بگیرد. نه‌فقط به‌این دلیل که می‌خواهد بعداً مدرس بشود، بلکه بیشتر به‌این دلیل که اگر دانشجو آموزش خیلی باریکی ببیند ممکن است بعداً زمینه‌ای که او درآن کارکرده زیاد فعال نباشد و این شخص انعطاف علمی کافی برای اینکه خط دیگری را در پیش بگیرد، نداشته باشد. خلاصه، دانشجو باید آموزش وسیعی دربخشهای مختلف ریاضی ببیندو خیلی زود متخصص نشود.

رجبعلی‌پور: من عقیده دارم تحقیق باید اصیل باشد و تزی که دانشجو می‌نویسد توسط داوران خارجی داوری بشود. در مورد تخصص یا فراگیربودن، نظرم این است که اگرزیاد باریك بشویم به‌مرزمی‌رسیم ولی فقط در نقطهٔ خاصی، وهمهٔ مرز را نمی‌توانیم ببینیم. دانشجویی که بارمی‌آوریم به‌هرحال‌نتیجه‌ای به‌دست‌می‌آوردکه درمجلهٔ خارجی قابل چاپ است چون‌بالاخره چیزجدیدی‌است، ولی کسی که‌معلوماتش فراگیرتراست بهترازدستاورد تخصصی‌خودلذت می‌بردچون‌کاربردش را درجاهای‌مختلف‌می‌داند. اما کسی که به‌دنبال استاد درخط باریکی پیش رفته، گرچه می‌داند کار جدیدی کرده اما نمی‌داند کاربردش کجاهاست؛ ولی شخص اگرکاری درآنالیز کرده باشد ودر عین‌حال جبر هم خوب بداند، می‌داند مشابه آن مفهوم چیست، تفسیر جبریش کدام است وغیره. من اعتقاد دارم دردورهٔ فوق لیسانس بایددرسهای عمومی بیشتری گذاشته شود و حتی‌الامکان رساله را به دورهٔ دکتری بیاورند تا دانشجو زیاد باریك نشود و در دورهٔ دکتری برنامه‌ریزی کنیم که چه باید کرد.

تابش: تا جایی که من می‌دانم در برنامهٔ دکتری دو دیدگاه در سطح دنیا هست؛ یکی اینکه تأکید برکار تحقیقی دانشجوست بدون اینکه دانشجومعلومات فراگیری کسب کرده‌باشد؛ ودوم، دیدگاهی که‌می‌گوید دانشجو قبل از اینکه‌کار تحقیقی خود را شروع کند، باید درسهایی‌را که مباحث و شاخه‌های اصلی ریاضی را می‌پوشانند، بگذراند و پس از احراز شایستگی در این درسها کار تز را شروع کند. در هر دو دیدگاه براصالت تز تأکید می‌شود اما درمورد لزوم گذراندن درسها اختلاف‌نظر هست. سؤال من این است: آیا در برنامهٔ دکتری ریاضی در ایران، روی گذراندن درسها تأکید می‌شود؟

خسروشاهی: برنامهٔ موجود به‌نظرمن نمی‌تواند بر این موضوع تأکید کند، چون چنین تأکیدی‌باواقعیات‌موجود دردانشگاههایی که‌می‌خواهند دورهٔ‌دکتری دایرکنند، نمی‌خواند. ما اصلاً استاد به‌تعدادکافی‌نداریم. اینکه دکتر شهشهانی می‌گویند دانشجو معلومات جامعی پیداکند ودر رشتهٔ خاصی باریك نشود، امکان عملی ندارد. به‌عقیدهٔ من دراین برههٔ زمانی دانشجوی دکتری خوب کسی است که تز خوبی بنویسد. تز خوب هم معنیش این است که ازآن یکی دو تا مقالهٔ خوب دربیاید و چاپ شود. ضابطهٔ دیگری نداریم. اصلاً بااین موافق نیستم که آن‌قدر به‌دانشجو درسهای زیادی بدهیم که نتواند محقق خوبی بشود. باید تعادلی بین این درسها و اشتیاقی که دانشجو به تحقیق پیدا می‌کند، موجود باشد. اشتیاق به تحقیق زیاد خوشتعریف نیست. معلوم نیست کسی که درسهای‌ریاضی زیادی‌گذرانده حتماًمحقق‌خوبی بشود. برنامهٔ ماهم درحال حاضر به‌این سمت‌گرایش داردکه تحقیقات خوبی انجام شود، ولو در رشته‌های باریك؛ به‌هرحال تز معمولی در رشتهٔ باریك است. نمی‌شودکه همه مانند برندگان مدال فیلدز تزهایی بنویسندکه چندین شاخهٔ ریاضی را به‌هم مربوط کند. دنبال چنین کیفیت بالایی رفتن، با واقعیات موجود سازگار نیست.

بهزاد: این بحث برمی‌گردد به اینکه هدف و نیاز ما چیست. نیاز ما در حال حاضر هم به‌محقق است و هم به‌مدرس. هریك از این دو را فراموش کنید، مسأله ایجاد می‌شود. ازطرفی می‌خواهیم افرادی داشته باشیم که چهارپنج درس متفاوت را درسطح خوب دردانشگاه‌تدریس کنند، چون استادکم داریم. بنابراین، همان طور که گفته شد بایدپایهٔ قوی به دانشجو داده شود، درسهای متعدد تا حد امکان. در عین حال دانشجو باید تحقیق اصیل هم بکند، به‌قول دکتر رجبعلی‌پور مرز علم را هم‌ببیند، البته هرکسی بنا به‌استعداد واستاد راهنمایش، ممکن‌است یك مسألهٔ خیلی مشکل و مهم را حل کند، یا اینکه گوشه‌ای را بگیرد و قدری جلو برود. نظرم در یك جمله این است که هم عرض و هم عمق، هردو را باید درنظرداشت. احساسم این است که با یك بررسی و برنامه‌ریزی خوب، حداقل در تهران، می‌توان دانشجویان خوبی گرفت و به آنها چند درس در حد معقول ــ مثلاً دو تا آنالیز، دو تا جبر و دوتا هندسه ــ و در مدتی معقول ــ مثلاً سه‌چهار سال ــ داد تا پایه‌ای قوی پیدا کنند و یکی دو درس تخصصی هم بگیرند و افراد نسبتاً جامعی بشوند. برای کنترل کیفیت تز هم معتقدم که حتماً قبل از اعطای درجهٔ دکتری، تز باید در یك مجلهٔ معتبر بین‌المللی به چاپ برسد. خلاصه، علی‌رغم بدبینیهایی که خود من هم دارم، فکرمی‌کنم بااستفاده ازحداکثرامکانات می‌توان به‌سمت هدف‌پیش‌رفت که هدف، تربیت مدرس خوب و محقق نسبتاً خوب است. با توجه به‌نیازهای جامعهٔ ما، تأکید صرف روی تربیت محقق، گو اینکه محقق طراز اول افتخاری برای جامعه است و مرز علم را جلو می‌برد، کافی نیست.

تابش: مضمون حرف دکتر بهزاد این بود که چون انتظار می‌رود دانشجوی‌دکتری بعداً مدرس بشود، لازم است مجموعه‌ای ازدرسهای

مختلف را بگیرد. سؤال من این است که این فقط برای مدرس شدن لازم است یا برای اینکه دانشجو بعداً محقق خوبی هم بشود لازم است در مجموعهٔ متنوعی از درسها حداقل تبحری پیدا کند؟

شهشهانی: این بحث در سطح بین‌المللی جریان دارد و فکر نمی‌کنم کسی جواب نهایی و واحدی برای آن پیدا کرده باشد. از یك طرف می‌توان تأکید را بر این گذاشت که دانشجو به قلهٔ کوهی رسانده شود، هرچند این قله چندان مرتفع نباشد. از طرف دیگر می‌توان او را به طرف قلهٔ بلندی برد که شاید هیچوقت هم به آن نرسد ولی در بین راه مطالب زیادی راجع به جغرافیای اطراف یاد بگیرد. این ترس همیشه هست که اگر آموزش خیلی وسیع و طولانی به فرد بدهید، خلاقیت را در او از بین ببرید. چون هردو جنبهٔ خلاقیت و یادگیری همیشه به حد عالی در یك شخص وجود ندارد و ملاحظهٔ این امر را البته باید کرد. خطری که گفتم این است که ماخیلی زود در یکی دو کانال که به قول فون نویمان کمترین مقاومت را نشان می‌دهند، جلو برویم و عدهٔ زیادی در مملکت ما در تخصصهای باریکی تربیت شوند و به قله‌های کم ارتفاعی برسند. کشور ما ظرفیت کمی دارد و ممکن است پس از مدتی استادانی داشته باشیم با تشکل قوی که حتی از اینکه نسلهای بعدی به افقهای جدیدی برسند، جلوگیری کنند. البته برای تحقیق لازم است آدم به طور موضعی باریك بین شود ولی چیزی که خطر دارد این است که این باریك بینی از حالت موضعی به حالت سرتاسری تبدیل شود و آدم گول موفقیت موضعی خودش را بخورد. یعنی فکر کند به صرف اینکه توانسته چندتا مقاله چاپ کند، مشروعیتی در جامعهٔ علمی دارد که معادل با مشروعیت هر کسی است که به آن تعداد مقاله چاپ کرده است. درهمین برنامهٔ تصویب شده، جای کافی برای وسعت دادن به معلومات دانشجو هست و مثلاً به قول آقای رجبعلی‌پور می‌توان در دورهٔ فوق لیسانس درسهای کافی داد و در دورهٔ دکتری هم فرضاً به مدت یك سال درس داد. اگر دانشگاهها اقلاً در تهران دست به دست هم بدهند و این درسها خوب ارائه شوند، می‌توان افرادی تربیت کرد که افق دیدشان گسترده باشد.

خسروشاهی: یعنی واقعیات موجود امکان عملی شدن خواست شما را می‌دهد؟

شهشهانی: به نظر من بله، اگر خود ما تنبلی نکنیم. من دیده‌ام بعضیها اصرار شدیدی می‌ورزند که دانشجو درس زیادی نگیرد. من این را ناسالم می‌دانم. فکر می‌کنم درهمین شهر ما امکانش هست که دانشجو آموزش نسبتاً وسیعی ببیند.

رجبعلی‌پور: همان طور که گفتم من اعتقاد به فراگیر بودن برنامه دادم. فکر می‌کنم هدف ما باید این باشد که مدرسین خوبی تربیت کنیم، شوروشوق علمی در محیط دانشکده به وجود آوریم، علم ریاضی خود را به دنیای علم و تکنولوژی، مثلاً به مهندسین، عرضه کنیم و بالاخره دانشجو را طوری تربیت کنیم که اگر فرضاً در زمینهٔ عملگرها دکتری خودش را گرفت، بعداً بتواند معلوماتش را وسیعتر کند و اگر خواست بتواند رشته‌اش را عوض کند و حتی بتواند از ریاضی به رشتهٔ دیگری برود. اگر دانشجو را در یك خط باریك تربیت کنیم، بعداً برایش مشکل خواهد بود حول و حوش خودش را ببیند و پیشرفتهای جدید را درك کند. برای استاد ممکن است یادگرفتن موضوعات تازه مشکل باشد ولی دانشجو که جوان است و ذهنش طراوت زیادی دارد، مفاهیم تازه را به راحتی جذب می‌کند و استاد هم مجبور می‌شود پا به پای او کار کند و پیش برود. مثلاً می‌توان از دانشجو خواست در زمینهٔ عملگرهای مارکوف مطالعه کند؛ از این طریق دانشجو کلی احتمال یاد می‌گیرد ولی استاد هم که تزاورا بررسی می‌کند، گرچه تخصصش دراحتمال نیست، مجبور است کلمه به کلمه با دانشجو پیش برود. این به نفع استاد هم هست.

تابش: شنیده‌ام که در برخی از کشورها روی زمینه‌های خاصی از ریاضیات تأکید می‌شود. این موضوع صحت دارد؟ آیا تأکید بر نوع خاصی از ریاضیات، چون ریاضیات گسسته، برای کشورهایی مثل ما لازم وصلاح است؟ و به طور کلی آیا می‌توان در این مورد موضع گیری اقلیمی داشت؟

بهزاد: این سؤال بسیار جالبی است. سالهاست که من این نکته را در نظر دارم و با بسیاری از افراد هم بحث کرده‌ام. ابر قدرتها و کشورهای بزرگ می‌توانند در همهٔ زمینه‌های ریاضی قوی باشند؛ البته ریاضی یك کل واحداست و نباید هیچ جنبه‌ای از آن فراموش شود ولی حتی اگر شمارهٔ اخیر مجلهٔ *Siam News* را نگاه کنید، ملاحظه می‌کنید که کشورهای اروپایی هم روی زمینه‌های خاصی از ریاضی تأکید می‌کنند. لذا، کلاً به نظر من بررسی عمیق این موضوع با توجه به الگوهای موجود بین‌المللی حائز اهمیت است.

شهشهانی: قبل از اینکه به سؤال آقای تابش پاسخ دهم دربارهٔ مسألهٔ عرض و عمق صحبت می‌کنم. سوءتفاهم پیش نیاید. من طرفدار دائرة‌المعارف‌گرایی نیستم که متأسفانه فرهنگ آن در کشور ما خیلی عمیق است. فکر نمی‌کنم صحیح باشد کسی دائرة‌المعارف متحرك ریاضی شود و بعداً به تز بپردازد. چنین فردی احتمالاً هیچوقت کار تحقیقی خوبی نخواهد کرد زیرا فرد تا وقتی جوان است وجرأت دارد باید راه بیفتد. چیزی که از آن می‌ترسم این است که شخص افق دیدش محدود باشد و فکر کند حقیقت همین است که یك بار دیده و تا ابد بخواهد در آن بماند. من بین باریك بینی موضعی و سرتاسری تفاوت قائلم. اما دربارهٔ سؤال آقای تابش؛ از کشوری که به هرحال در ریاضی تازه کار است نمی‌توان انتظار داشت در همهٔ زمینه‌های ریاضی قوی باشد. ولی زمینهٔ مناسب را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ من با رنه‌توم همعقیده‌ام که می‌گوید با یك برنامه‌ریزی از طرف یك ارگان مرکزی نمی‌شود این زمینه را یافت و این مسأله شخصی است؛ یعنی یك وقت فرد مناسبی با جمیع شرایط در کشوری پیدا می‌شود، عده‌ای دورش جمع می‌شوند و مکتبی ایجاد می‌شود. همیشه چنین بوده و این موضوع در کشور ما هم نهایتاً پیش خواهد آمد و اینکه بنشینیم و برای آن برنامه‌ریزی کنیم، عملی نیست. در این باره، که آیا ریاضیات می‌تواند جنبهٔ اقلیمی داشته باشد، اکثر ریاضیدانها فکر می‌کنند چنین نیست. ممکن است فکر شود که اگر دنبال ریاضیات کاربردی برویم حتماً مملکتمان زودتر پیشرفت می‌کند. این اشتباه محض است. کاربردهای ریاضیات در سطوح بسیار بالای تکنولوژی هستند. بنابراین کسی نمی‌تواند ادعا کند که من ریاضیاتی دارم که از نوع کاربردی است و می‌تواند مثلاً مشکلات صنایع مملکت را حل کند و لذا باید به این نوع ریاضیات پرداخت.

خسروشاهی: من هم دقیقاً معتقدم این کار سفارشی نیست که ارگانی از بالا دستور بدهد در فلان رشته تحقیق کنید. اینها تصادفی است. اگر استاد متنفذی بود، اطلاعات وسیعی داشت، خوب تشکل داد، آدم پر عاطفه‌ای بود، محقق بسیار خوبی بود، این شخص می‌تواند رشته‌ای را بنیانگذاری یا تقویت کند و تحقیقات را هم تا مدتی به طرفی سوق بدهد. این اولین بار است که در ایران، استاد و دانشجو در مسألهٔ تحقیق ارتباط تنگاتنگی پیدا می‌کنند و اتفاقی که دکتر شهشهانی گفتند در ریاضیات آیندهٔ مملکت، پیش خواهد آمد.

تابش. حالا می‌توانیم برویم سرمشکلات و پیشنهادها.

رجبعلی‌پور. مایلم دربارهٔ چهار نکته صحبت کنم. اول اینکه عقیده‌دارم باید یك مرکز اسناد و مدارك علمی چه در قالب پژوهشکده و چه در قالب وزارت علوم، در ایران تشکیل شود، مرکز جامعی که کلیهٔ مجلات، کتابها، و مدارك مربوط به ریاضیات را داشته باشد و سریعاً در اختیار متقاضی قرار دهد؛ درعین حال که کتابخانه‌های دانشگاهها کار خودشان را انجام دهند و تقویت شوند. دوم مسألهٔ ایجاد پژوهشکده‌هاست که، بنا به امکانات مملکتی، دو سه تا دایر شوند، در استانهای مختلف. حتی چه اشکالی دارد که در نقطهٔ خوش آب و هوایی در کنار دریای خزر باشد؟ می‌توانند دوره‌های کوتاه مدتی بگذارند و استادان و دانشجویانی که در رشتهٔ خاصی کار می‌کنند، در آنجا یکدیگر را ببینند و در ضمن استراحت و رفع خستگی هم بکنند. مسألهٔ سوم رفاه دانشجوست که باید توجه خاصی به آن بشود و چهارمین مسأله رفاه استاد است. منظور، رفاه آنچنانی نیست، بلکه این است که قالبهای برنامهٔ فولتایم وسیعتر باشد و برای استادانی که در دورهٔ دکتری تدریس می‌کنند و دانشجوی دکتری را هدایت می‌کنند، طوری تنظیم شود که یك درس یا حداکثر دو درس داشته باشند و بقیه‌اش را صرف مطالعه و تحقیق و هدایت دانشجو بکنند.

خسروشاهی: من به ترتیب دربارهٔ تأسیس پژوهشکده، وضع کتابخانه‌ها و رسیدگی به مسألهٔ رفاهی استاد و دانشجو صحبت می‌کنم. دربارهٔ پژوهشکده، موافق نیستم که چندتا دایر شود. با توان کمی که از نظر نیروی انسانی داریم، فعلاً اجازه بدهید یکی در تهران تأسیس شود تا ببینیم چه پیش می‌آید. موضوع ایجاد پژوهشکده که ۱۵ سال است درازهان جامعهٔ ریاضی هست، ظاهراً به تصویب شورای پژوهشهای علمی کشور رسیده و در برنامهٔ هفتهٔ دولت هم به عنوان یکی از دستاوردهای وزارت فرهنگ و آموزش عالی ذکر شده ولی معلوم نیست چرا دایرش نمی‌کنند. معتقدم مرکز اسناد باید در جوار پژوهشکده باشد تا هم پژوهشکده از آن استفاده کند و هم کل جامعهٔ ریاضی ایران. به کتابخانه‌های دانشگاهی هم باید رسیدگی شود. واقعاً هیچ توجهی به آنها نمی‌شود، این کتابخانه‌ها به شدت فقیرند. در این چند سالی هم که تنگنای ارزی بوده دریافت بسیاری از مجلات قطع شده است. مثلاً گروه ریاضی دانشگاه تهران پارسال ۶۰ مجله را مشترك بود. پول ارزی آنها را ده ماه دیرتر به حساب ریخته‌اند و درنتیجه، شرکت انتشاراتی مربوطه می‌گوید که نمی‌توانیم امسال مجلات شما را بفرستیم و این پول را به حساب سال آیندهٔ شما می‌گذاریم. وقتی مجله یك سال دیرتر می‌رسد، دانشجویی که تزمی‌نویسد و هر روز باید در معرض خبرهای جدید و مقالات جدید باشد، چگونه می‌تواند خوب کار کند؟ کتاب هم باید مرتباً خریداری شود. حال که کنکور دکتری برگزار کرده‌ایم و دانشجو هم گرفته‌ایم، مقامات مسؤول باید به مسألهٔ خرید کتاب و مجله توجه کنند. مسألهٔ سوم، رفاه دانشجو و استاد است. ببینید، کل دانشجویانی که در این دوره دانشگاههای مختلف بگیرند، شاید بیشتر از ۲۰ نفر نشود. حل مشکل مسکن این ۲۰ نفر، نباید کار دشواری باشد. بالاخره کسی که زن و بچه دارد، می‌خواهد در اینجا دکتری بگیرد و خارج نرود و آدم با استعدادی هم هست، باید بتواند با خیال آسوده زندگی کند. بنابراین باید از مقامات بخواهیم مسألهٔ رفاهی دانشجو را حل کنند. آخرین مسأله، رفاه استاد است. مقررات برنامهٔ فولتایم که استاد ۱۶ ساعت درس بدهد و به پژوهش وی ۵ واحد امتیاز بدهند و غیره، برای کسانی است که در گیر این برنامه‌ها نیستند. در گیر شدن در مسألهٔ دکتری، در گیری ۲۴ ساعته است، در گیری زندگی است؛ اعتبار استاد مربوط به آن است. استاد باید حمایت شود تا بتواند با خیال راحت به تحقیق و کار بپردازد.

بهزاد: من یکی دو نکته اضافه می‌کنم. باید امیدوار باشیم که انشاءالله به موازات کاهش مشکلات و تنگناهای مالی کشور توجه کافی به مسألهٔ رفاه استاد و دانشجو بشود؛ ولی همچنانکه عنوان شد منظور از مسائل رفاهی، رفاه صرفاً مادی نیست، بلکه با تغییر پاره‌ای از مقررات نامناسب و دست و پاگیر می‌توان از استاد و دانشجوی دکتری حمایت به عمل آورد تا بتوانند کارشان را بهتر انجام دهند. درمورد مرکز اسناد، عقیده دارم که اگر تمام مجلات علمی در چنین مرکزی جمع شوند که متقاضی بتواند آنها را به راحتی تهیه کند، بهتر است تا اینکه در جاهای مختلف و به طور پراکنده باشند. به نظر من، با برنامهٔ دکتری ریاضی، و به طور کلی با برنامه‌ها و مؤسسات علمی باید به عنوان موجودات جاندار برخورد کرد. همان طور که موجودات زنده بر اثر تغییرات ناگهانی آب و هوای مجاور دچار بیماری و ضعف می‌شوند، تغییرات ناگهانی در سیاستهای علمی هم می‌تواند صدمات شدیدی بر پیکر علم وارد سازد. مثلاً، در اثر فشارهایی تعداد دانشجویانی که به دانشگاهها راه می‌یابند، ناگهان دو برابر می‌شود؛ چنین تغییرات ناگهانی، فشارهایی را بر استادان، به‌ویژه استادان ریاضی که با درسهای سرویس هم سروکار دارند، تحمیل می‌کند که کیفیت کار آنها را سخت تحت تأثیر قرار می‌دهد.

شهشهانی: یکی از امراضی که دانشگاهها به آن دچار شده‌اند تسلط دیوانسالاری، به‌خصوص در امور مالی، است. این سد بزرگی است در برابر انجام کارهای خیر در دانشگاهها، که جلو خرجهای مهم و ضروری را درموقع حساس می‌گیرد و باعث تأخیر کارها می‌شود. باید بسیاری از اموری که با برنامهٔ دکتری در ارتباط است، خارج از محدودهٔ این بوروکراسی باشد. دربارهٔ جنبه‌های معنوی حمایت از استاد، و در واقع دربارهٔ جذب استاد، اجازه دهید چیزی بگویم. یکی از حقایق تلخ سالهای اخیر این است که نه تنها عده‌ای از استادان رفته‌اند، بلکه فقط عدهٔ بسیار کمی از خارج جذب شده‌اند. درحالی که ریاضی خوانده‌های خوبی در خارج هستند که شاید خیلی از آنها میل داشته باشند برگردند. یکی از مشکلاتی که در این راه هست، مصوبه‌ای است که طبق آن، کسی که از خارج می‌آید باید برود به دانشگاههای محروم. شخصی که در امر تحقیق خیلی داغ است و به ایران می‌آید، اگر قرار باشد قبل از رسمی شدن به دانشگاه محروم برود، نمی‌توان انتظار داشت که جوش و خروشش را در امر تحقیق حفظ کند. به دانشگاههای محروم شاید از راههای دیگری بهتر بتوان کمك کرد. مسألهٔ دیگر، ایجاد پژوهشکده است. منظور این نیست که دانشگاهها بخشکند و از استاد خالی شوند، منظور ایجاد ارگانی در جوار دانشگاههاست که افراد به طور پاره وقت یا قسمتی از دوران خدمت خود را در آنجا باشند و با فراغت به امر تحقیق بپردازند. دیگر، مسألهٔ طرح تمام وقت است. اگر گروهی در رشته‌ای دکتری می‌دهد و برنامه‌اش هم مورد تأیید است، اعضای گروه باید به عنوان تمام وقت پذیرفته شوند، حتی اگر تك و توکی سوء استفاده کنند و تحقیق نکنند. کار تحقیق را نمی‌توان به هیچ طریقی امتیازبندی کرد؛ به قول دکتر خسروشاهی، درگیری ۲۴ ساعته است. باز هم تأکید می‌کنم که به نظر من، با دایر شدن این دوره نباید اعزام دانشجو به خارج قطع شود. پیشنهاد بعدی من این است که به افرادی که در اینجا دکتری می‌گیرند، درصورت شایستگی، بورس یکساله‌ای داده شود که بروند و یك دورهٔ فوق دکتری در خارج بگیرند؛ و به این طریق با افقهای وسیعتری از ریاضیات در محیط گسترده‌تری آشنا بشوند و پختگی کسب کنند.

خسروشاهی: نکته‌ای دربارهٔ دیوانسالاری مالی که به‌آن اشاره شد، می‌گویم. کتابخانه‌ها درسال چندین بارپروفورما می‌گیرند و به‌امور مالی می‌دهند؛ ولی بودجه آن‌قدر دیرتأمین می‌شود که تاریخ اعتبار پروفورما می‌گذرد و باید دوباره بگیرند. یك ماه به‌پایان سال گفته می‌شودکه ما این قدر بودجهٔ ارزی داریم ولی کسی نمی‌تواند ازآن استفاده کند. این مسأله باید مورد توجه قرار بگیرد تا کتابخانه‌ها بتوانند با دست باز کتابهای مورد نظر را تهیه کنند.

شهشهانی: گاهی هم یك اشکال در خریدکتاب این است‌که یك جریان ارزی باید چندین مرحله را طی کند. وقتی این مراحل طی می‌شود پروفورما دیگر ارزشی ندارد و روز از نو روزی ازنو، تا آخرسال می‌شود وحساب ارزی بسته می‌شود.

بهزاد: من هم با نظر دکتر شهشهانی‌که اعزام دانشجو به‌خارج نباید قطع شود موافقم ولی‌فکرمی‌کنم بین‌نحوهٔ پذیرش دانشجوبرای‌اعزام به‌خارج وپذیرش دانشجو برای دورهٔ دکتری خودمان باید یك نوع هماهنگی به‌وجودآید تا دانشجو دچار وسوسه‌های عجیب وغریب نشود. فراموش نشود که رفتن به‌خارج ازیك جاذبهٔ قوی برخوردار است مخصوصاً که برنامهٔ دکتری داخلی هنوزجا نیفتاده است. ممکن است مثلاً بازهم بهترینها راهی خارج شوندوپذیرفته‌شدگان درداخل به‌دلایل مختلف احساس حقارت کنند.

تابش: بنده هم دوسه نکته را متذکرمی‌شوم. یکی اینکه آمدن عده‌ای ازخارج به‌عنوان فرصت مطالعاتی باید دراین برنامه گنجانده شود. ممکن است افرادی به‌طوردائم نخواهند به‌ایران بیایند ولی برای‌یك سال ماندن تمایل داشته باشند. این حسن را هم دارد که ممکن است پس از یکسال، به ماندن در ایران تشویق بشوند. ریاضیدانان مقیم خارج‌که به‌طورکوتاه مدت می‌آیند، خوب است بتوانند حقوقشان را به‌ارز بگیرند. نکتهٔ دیگر اینکه باید مکانیسمی به‌وجودآید که گزارشهای فنی از کارهای پژوهشی درجریان همه‌جا پخش شود تا یك نوع ارتباط به‌وجود آید. حتی همین حالا تزهای فوق لیسانس‌که بعضی ازآنها بسیار با ارزش‌اند و در دو سه نسخه تکثیر می‌شوند، باید به‌طرز گسترده پخش شوند. و بالاخره، باید امکاناتی فراهم شود که دانشجویان دکتری در دورهٔ تحصیل هم بتوانند به سهولت در دوره‌های کوتاه مدتی در خارج نظیردوره‌هایی‌که درتریست ایتالیا یا سیمپای فرانسه برگزار می‌شود، شرکت کنند.

خسروشاهی: مشکلی‌که برای شرکت دانشجویان دراین گونه‌دوره‌ها وهمچنین سمینارهاوکنفرانسهای مهم‌وجود دارد، این است که‌دانشجو دارای معافیت‌سربازی نیست ودرنتیجه نمی‌تواند خارج برود. بعضی ازاین‌کنفرانسها آن قدرمهم است‌که حتماً دانشجوهم باید همراه‌استاد برود. باید این نکته مورد توجه قرارگیرد وتسهیلاتی برای شرکت دانشجودراین گونه دوره‌هاومجامعی که‌درخارج تشکیل می‌شود، فراهم آید. نکتهٔ‌دیگری‌که مایلم‌دراینجا تذکردهم‌مسألهٔ مربیان ریاضی‌است که درحال حاضر در دانشگاهها کار می‌کنند. این‌مسأله نیاز به‌عنایت و توجه خاصی دارد. اغلب مربیان از میان بهترین دانشجویان انتخاب شده‌اند وبراساس مقررات دانشگاهها قراربراین بوده است‌که این مربیان بعد ازچهارسال برای‌ادامهٔ تحصیل به‌خارج اعزام شوند. لکن بعداز انقلاب اغلب این افراد به‌دلایل مختلف نتوانستند به‌تحصیلات خود ادامه دهند. لذا پیشنهاد من‌این‌است‌که برای‌آنها درکنکوردورهٔ دکتری تسهیلاتی قائل شوند و درضمن برای ادامهٔ تحصیل‌آنها نیز امکانات مالی بیشتری فراهم نمایند. لازم به توضیح است‌که در دانشگاههایی‌که درآنها دورهٔ دکتری‌تأسیس‌شده‌است‌عملا جای‌مربیان را، ازنظر وظایف آموزشی، دانشجویان دوره‌های کارشناسی‌ارشد و دکتری خواهند گرفت.

بهزاد: آمدن‌ریاضیدانان مقیم خارج به‌ایران وگرفتن حقوقشان به‌ارز، به‌نظرمن مربوط می‌شود به‌تأسیس پژوهشکده و هدفهایش و اساسنامه و مقررات‌آن که طبیعتاً باید تدوین شود و دقیقاً تمام این نکات درآن پیش‌بینی‌وملحوظ گردد. کلاً نکاتی که‌دوستان‌درموردتجهیز کتابخانه‌ها، ایجاد پژوهشکده، شرکت استاد و دانشجو درسمینارها وکنفرانسهای خارج ازکشور، اعزام دانشجوی دورهٔ دکتری برای دوره‌های‌کوتاه مدت در حین تحصیل و یا دورهٔ یکساله پس از فراغت از تحصیل و غیره گفتند، مبین آن است‌که پس از رفع مشکلات و تنگناهای مالی موجود، باید در زمینه‌های تحقیقاتی و علمی سرمایه‌گذاری‌کافی بشود و سهم مناسبی از تولید ناخالص ملی به‌این امور بسیار مهم تخصیص یابد؛همچنانکه کشورهای پیشرفته‌سالیان‌سال دراین راه سرمایه‌گذاری کرده‌اند و می‌کنند.

تابش: با تشکر ازهمهٔ شما که در این گفتگو شرکت‌کردید، امیداست نکات ذکر شده مورد توجه تصمیم‌گیران قرارگیرد و این اشتیاقها به‌شکوفایی ریاضیات درکشورمان کمك کند.

ریاضیات آشوب

عباس عدالت

درطی سالهای اخیرموضوع «آشوب» دردستگاههای دینامیکی به‌یکی از مهمترین مسائل ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، و همچنین شاخه‌های‌مختلف علوم‌طبیعی تبدیل‌شده است. به‌طوری‌که این‌موضوع به‌صورت یکی از وسیعترین زمینه‌های تحقیقاتی زمان حاضر درآمده است. به طورکلی مقصود از یك دستگاه دینامیکی مجموعهٔ حالات ممکن یك پدیده است همراه با یك قانون تحول که گذر از یك حالت به‌حالت دیگر را توصیف می‌کند. اگر حالت دستگاه در زمان معینی داده شده باشد، این قانون حالتهای دستگاه در زمانهای بعدی را مشخص می‌کند.

چنانچه بتوان حالتهای گذشتهٔ دستگاه‌را نیز بدون‌ابهام ازقانون تحول استخراج کرد، دستگاه دینامیکی برگشت‌پذیر خوانده می‌شود. در این نوشته بحث ما به‌دستگاههای برگشت‌پذیر محدود خواهدبود. به‌زبان‌ساده می‌توان یك دستگاه دینامیکی‌آشوبناك را دستگاهی‌تعریف کرد که قانون‌بندی دینامیکی آن کاملاً تعیینی و بدون هرگونه عامل احتمالی بوده ولی رفتاردرازمدت سیستم در عمل غیرقابل پیش‌بینی است.

به بیان دقیقتر در این دستگاهها، عدم دقت هرچند کوچك در دانستن‌حالت اولیه (که به‌هرحال از نظرعملی غیرقابل اجتناب است) موجب بروز خطای فاحش در پیش‌بینی حالت دستگاه در درازمدت می‌گردد. در نتیجه، «آشوب» پدیده‌ای است که علی‌الظاهر با بینش نیوتنی ازقوانین طبیعی مغایراست، زیرا بنا به‌فیزیك کلاسیك چنانچه معادلهٔ‌حرکت و وضعیت اولیهٔ دستگاهی را بدانیم می‌توانیم وضعیت آن‌را درهرزمان بعدی به‌دقت‌تعیین‌کنیم. به‌عنوان مثال هرگاه‌نیروهای وارد بر جسمی مشخص باشد، می‌توانیم از طریق فرمول $F=ma$ شتاب جسم و درنتیجه مکان و سرعت‌آن را در هر لحظه برحسب‌مکان و سرعت اولیهٔ آن به‌دست‌آوریم.

همان‌طورکه می‌دانیم این بینش‌کلاسیك ازفیزیك در نیمهٔ‌اول قرن بیستم باپیدایش نظریهٔ کوانتوم مردود اعلام شد، زیرابنا به‌اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اصولاً امکان اندازه‌گیری دقیق مکان و سرعت یك جسم ذره‌ای درآن واحد ممکن نیست و در نتیجه حتی وضعیت اولیهٔ آن را نمی‌توان به‌طور قطعی مشخص‌کرد.

شناخت و بررسی دستگاههای دینامیکی آشوبناك در سالهای اخیرموجب شده است‌که محدودیتهای بینش‌نیوتنی بعد جدیدی‌به‌خود بگیرد، چراکه دراین‌گونه دستگاهها هرگونه عدم قطعیت، درروضعیت اولیه، هرقدر ناچیز (که می‌تواند نتیجهٔ اصل هایزنبرگ، خطاهای آزمایشی، یا نارساییهای مدل ریاضی ما باشد) در دراز مدت ابعاد چنان‌گسترده‌ای به‌خودمی‌گیردکه وضعیت دستگاه راغیرقابل‌پیش‌بینی می‌کند.

بنابراین از بررسی پدیدهٔ «آشوب» این نتیجهٔ مهم به دست می‌آید که ملاك صحت نظریه‌ای در دستگاههای دینامیکی نمی‌تواند پیش‌بینی دقیق رفتارآن باشد بلکه بایدخواص احتمالی وهندسی‌ناشی ازآن نظریه مورد بررسی و ارزیابی قرارگیرد.

دراین‌مقاله خصوصیات اصلی نمونه‌ای ازیك دستگاه دینامیکی آشوبناك رابه‌طوراجمالی تشریح خواهیم‌کرد ولی قبل‌ازآن‌به‌بررسی چند نمونهٔ ساده از دستگاههای غیر آشوبناك می‌پردازیم و برخی مقولات لازم را از این طریق تعریف می‌کنیم.

چند نمونه از دستگاههای غیرآشوبناك

مثالهایی که دراینجا مطرح می‌کنیم، همه دستگاههای دینامیکی تعریف شده‌توسط‌یك‌معادله یا یك‌دستگاه معادلات‌دیفرانسیل‌هستند. دستگاههایی که تحول آنها به طور پیوسته در زمان صورت می‌گیرد، معمولاً از یك دستگاه‌معادلات دیفرانسیل‌عادی تبعیت‌می‌کنند. این بدین معنی‌است که هرگاه حالت دستگاه در زمان معینی مشخص باشد، تحول‌آینده (و گذشتهٔ)دستگاه بادنبال‌کردن‌آن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل که از حالت اولیه می‌گذرد، مشخص می‌شود.

مثال ۱. معادلهٔ‌دیفرانسیل‌خطی درجهٔ‌اول همگن زیررادرنظرمی‌گیریم

$$dx/dt=f(x)=-\lambda x,\quad x\in\mathbf{R},\quad \lambda>0$$

در اینجا، $\mathbf{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی خطوط x، را فضای‌حالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. هرگاه‌درلحظهٔ $t=0$، داشته باشیم $x=x_0$ آنگاه داریم $x(t)=x_0e^{-\lambda t}$. رابطهٔ اخیررا همچنین به‌صورت زیر می‌نویسیم

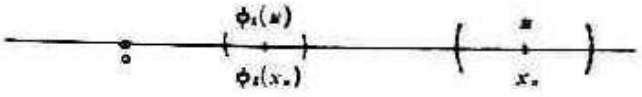
$$\phi_t(x_0)=x(t)=x_0e^{-\lambda t}.$$

به عبارت دیگر، $\phi_t(x_0)$ مقدار x را در زمان t مشخص می‌کند اگر مقدار آن درلحظهٔ $t=0$ برابر x_0 باشد. برای‌آنکه معادلهٔ دیفرانسیل فوق را به‌شکل کیفی و هندسی تصویر کنیم، $f(x)=-\lambda x$ را یك میدان برداری در $\mathbf{R}$ در نظر می‌گیریم. شکل ۱ را که از رسم این میدان برداری به‌دست‌می‌آید نمودارحالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. چند نکته را در اینجا متذکر می‌شویم.

شکل ۱

۱. هر جواب معادلهٔ $\phi_t(x_0) = x_0 e^{-\lambda t}$، صرفنظر از شرایط اولیه (یعنی مقدار x_0)، به‌صفر میل می‌کند. صفر را ربایندهٔ دستگاه دینامیکی فوق و $\mathbf{R}$ را بهنهٔ ربایش آن می‌نامیم. به‌طور کلی نقطه‌ای از فضای حالات را ربایندهٔ دستگاه می‌نامیم اگر این نقطه کلیهٔ نقاط یک همسایگی خود را جذب کند و به‌مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی که در همسایگی رباینده به‌آن جذب می‌شوند، بهنهٔ ربایش آن می‌گوییم.
البته مقصود از جذب کردن نقطهٔ p این است که جواب معادلهٔ دیفرانسیل گذرا از p در زمان مثبت به‌رباینده میل می‌کند.

۲. به‌سادگی از شکل ۲ می‌بینیم که اگر عدم قطعیتی در وضعیت اولیهٔ وجود داشته باشد، به عبارت دیگر اگر $x(0)$ نه برابر x_0 بلکه در یک همسایگی uی نقطهٔ x_0 قرار داشته باشد، آنگاه با گذشت زمان این عدم قطعیت کاهش می‌یابد؛ یا به‌عبارت دیگر طول $\phi_t(u)$ برای $t>0$ کمتر از طول u است و در واقع طول $\phi_t(u)$ وقتی $t \to \infty$، به‌صفر میل می‌کند.



شکل ۲

۳. هرگاه میدان برداری فوق را اندکی به طور هموار تغییر دهیم یعنی دستگاه

$$dx/dt = f(x) = -\lambda x + O(x), \quad \lambda > 0$$

را در نظر بگیریم که در آن مقصود از $O(x)$ یک تابع احتمال است که سریعتر از x به صفر میل می‌کند وقتی $x \to 0$، می‌توان نشان داد که کیفیت جوابهای معادله در یک همسایگی نقطهٔ صفر تغییری نخواهد کرد و در یک همسایگی صفر کلیهٔ نقاط همچنان به‌صفر میل خواهند کرد. می‌گوییم دستگاه اولیه در نقطهٔ صفر دارای ثبات ساختاری است.

۴. اگر $\lambda = 0$، کلیهٔ نقاط ثابت خواهند بود یعنی به ازای هر x_0 و t در $\mathbf{R}$ داریم $\phi_t(x_0) = x$؛ و اگر $\lambda > 0$ آنگاه نمودار حالت مطابق شکل ۳ است و نقاط از صفر دور می‌شوند. در این حالت نقطهٔ صفر را یک نقطهٔ دافع می‌نامیم.



شکل ۳

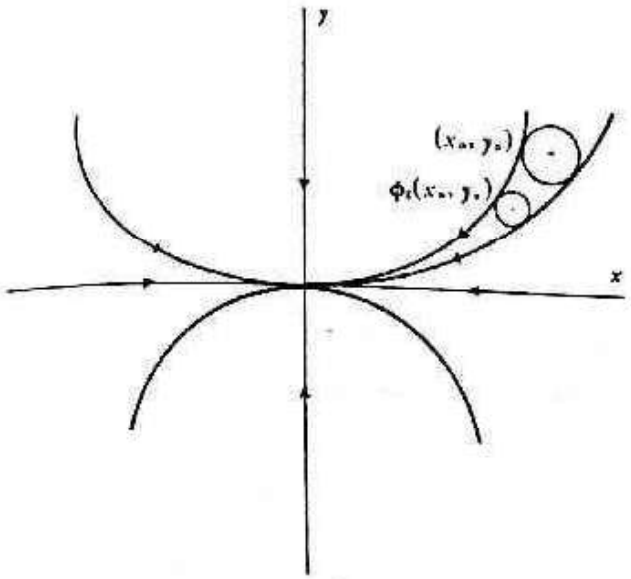
مثال ۲.

$$dx/dt = -\lambda x \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$
$$dy/dt = -\mu y \quad \mu > \lambda > 0$$

در اینجا فضای حالات $\mathbf{R}^2$ است و داریم

$$\phi_t(x_0, y_0) = (x_0 e^{-\lambda t}, y_0 e^{-\mu t})$$

نمودار حالات مطابق شکل ۴ است.



شکل ۴

به‌نکات ذیل توجه کنید:

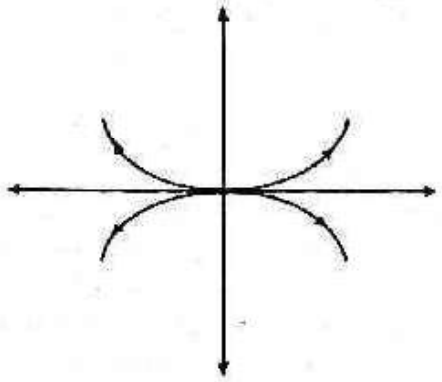
۱. مبدأ مختصات صفر، ربایندهٔ دستگاه است با بهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^2$.

۲. هر گونه عدم قطعیت در وضعیت اولیه با گذشت زمان کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر اگر u یک همسایگی (x_0, y_0) در $\mathbf{R}^2$ باشد، برای $t>0$،

$$\text{اندازهٔ } \phi_t(u) < \text{اندازهٔ } (u)$$

۳. مبدأ در نقطهٔ صفر دارای ثبات ساختاری است.

۴. اگر $0 > \lambda > \mu$، منحنیهای جواب از صفر دور می‌شوند و صفر یک نقطهٔ دافع است (شکل ۵).



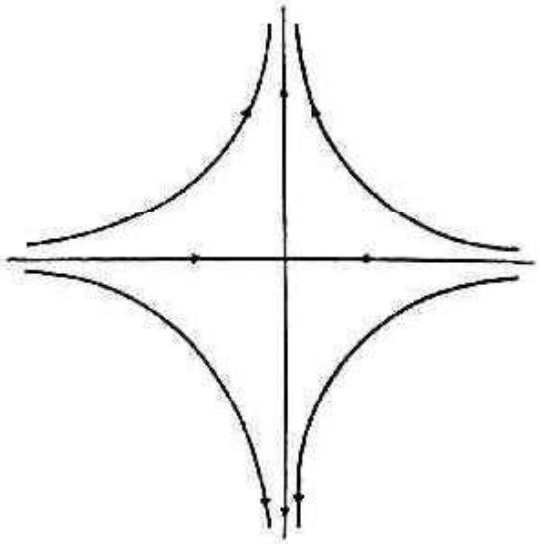
شکل ۵

مثال ۳.

$$dx/dt = -\lambda x \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$
$$dy/dt = \mu y \quad \lambda, \mu > 0$$

نمودار حالات مطابق شکل ۶ است.

محورهای x و y پایا هستند. نقاط روی محور x به‌صفر نزدیک و نقاط روی محور y از صفر دور می‌شوند. نقطهٔ صفر را در اینجا یک نقطهٔ زینی می‌نامند. مانند دو مثال قبلی، تغییرات جزئی هموار در میدان برداری، کیفیت جوابها را در همسایگی صفر تغییر نخواهد داد. محور x را، یعنی مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t \to \infty$ به‌صفر میل می‌کنند،



شکل ۶

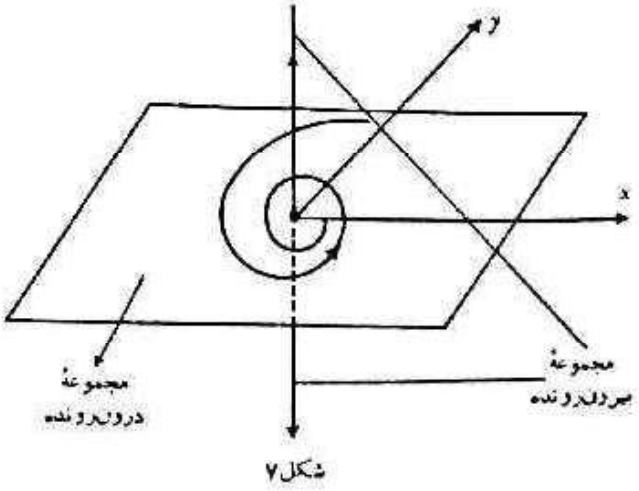
مجموعهٔ درون رونده و محور y را، یعنی مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t \to -\infty$ به صفر میل می‌کنند، مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ نقطهٔ صفر می‌نامیم. توجه کنید که در اینجا مجموعهٔ درون رونده و بیرون رونده هر کدام یک بعدی است درحالی که در مثالهای ۱ و ۲ مجموعه‌های درون‌رونده به‌ترتیب ۱ بعدی و ۲ بعدی و مجموعه‌های بیرون‌رونده تهی بودند.

توضیح: در سه مثال فوق کیفیت جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را در نزدیکی یک نقطهٔ ثابت بررسی کردیم. به‌طور کلی اگر یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ داشته باشیم که صفر نقطهٔ ثابت آن باشد یعنی اگر

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T\mathbf{x} + \text{جملات مراتب بالاتر}$$

که در اینجا $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ و $\mathbf{f}$ یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ و T بخش خطی $\mathbf{f}$ است و اگر مقادیر ویژهٔ T همگی دارای بخش حقیقی غیر صفر باشند، آنگاه نقطهٔ صفر دارای یک مجموعهٔ درون‌روندهٔ l بعدی و یک مجموعهٔ بیرون روندهٔ $n-l$ بعدی است که در اینجا l تعداد مقادیر ویژهٔ T با بخش حقیقی منفی است. به عنوان مثال، اگر داشته باشیم

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



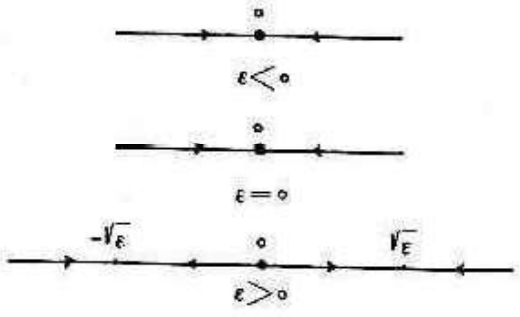
شکل ۷

آنگاه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از 1 و $1 \pm$ و -1. در اینجا صفر دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ دو بعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یک‌بعدی خواهد بود. نمودار حالات دستگاه در نزدیکی نقطهٔ صفر از لحاظ توپولوژیکی مطابق شکل ۷ است.

مثال ۴.

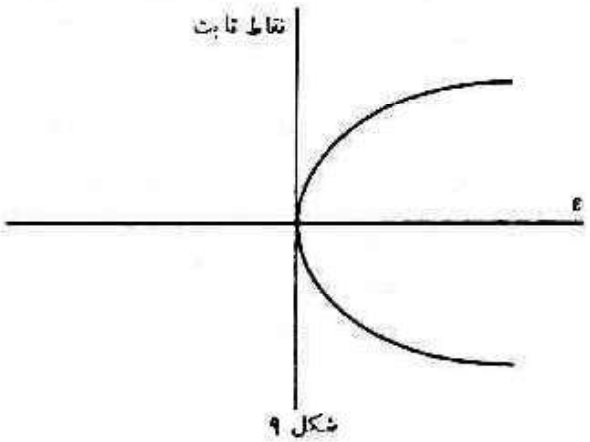
$$\frac{dx}{dt} = -x(x^2 - \varepsilon), \quad x \in \mathbf{R}$$

که ε یک پارامتر حقیقی است. در اینجا نمونه‌ای از یک انشعاب در یک دستگاه پارامتری دینامیکی داریم. نمودار حالات دستگاه برای مقادیر منفی، صفر و مثبت ε مطابق شکل ۸ است.



شکل ۸

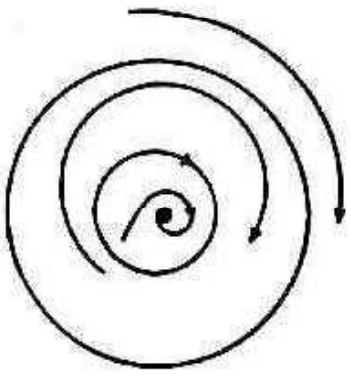
مشاهده می‌کنیم که وقتی ε از صفر می‌گذرد نمودار حالات دستگاه به‌طور کیفی تغییر می‌کند. برای $\varepsilon \leqslant 0$ سیستم دارای یک ربایندهٔ بایهنهٔ ربایش $\mathbf{R}$ است درحالی که برای $\varepsilon > 0$ سه نقطهٔ ثابت وجود دارند: صفر که یک واقع است، $\sqrt{\varepsilon}$ که ربایندهٔ با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^+$ است و $-\sqrt{\varepsilon}$ که ربایندهٔ با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^-$ (اعداد حقیقی منفی) است. نقطهٔ صفر پهنهٔ ربایش دو ربایندهٔ موجود را از یکدیگر جدا می‌کند و از این نظر به صفر می‌گوییم یک جداساز. اگر نقاط ثابت دستگاه پارامتری را در برابر محور ε رسم نماییم شکل ۹ به دست می‌آید که شبیه یک چنگال است. از این نظر به این انشعاب (و انشعاباتی که کیفیتاً به‌طور موضعی مانند این مثال‌اند) می‌گوییم انشعاب چنگالی.



شکل ۹

مثال ۵. دستگاه دینامیکی زیر را که در مختصات قطبی بیان شده است در نظر بگیرید

$$\frac{dr}{dt} = -r(r-1)(r-2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1$$



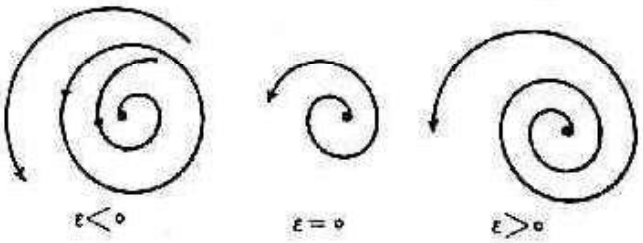
شکل ۱۰

در اینجا $r=0$، یعنی مبدأ مختصات یك رباینده است و دوایر $r=1$ و $r=2$ هر دو جوابهای دستگاه‌اند. به‌سادگی می‌توانیم ملاحظه کنیم که $r=2$ یك مدار بسته است که کلیهٔ مدارهای ناحیهٔ $r<1$ را جذب خود می‌کند. در اینجا $r=2$ نمونه‌ای از یك ربایندهٔ غیر نقطه‌ای است که آن را یك **دور حدی** می‌نامیم. پهنهٔ ربایش آن نیز $r<1$ است. از طرف دیگر $r=1$ یك مدار بستهٔ دافع است و کلیهٔ مدارها در $r<1$ و $r>1$ از آن دور می‌شوند (شکل ۱۰).

مثال ۶. در مختصات قطبی

$$\frac{dr}{dt}=r(\varepsilon+r^2) \qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$

و ε یك پارامتر حقیقی است. در اینجا نیز انشعابی داریم که به‌انشعاب هوپف[1] معروف است. برای $\varepsilon<0$، $r=\sqrt{-\varepsilon}$ یك مدار بستهٔ دافع است و $r=0$ یك ربایندهٔ نقطه‌ای. وقتی ε به‌صفر می‌رسد مدار دافع در ربایندهٔ نقطه‌ای ادغام می‌شود. به طوری که برای $\varepsilon\geq 0$ صفر یك نقطهٔ دافع می‌شود (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

اگر در دستگاه فوق زمان را معکوس کنیم یعنی میدان‌برداری

$$\frac{dr}{dt}=-r(\varepsilon+r^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-1$$

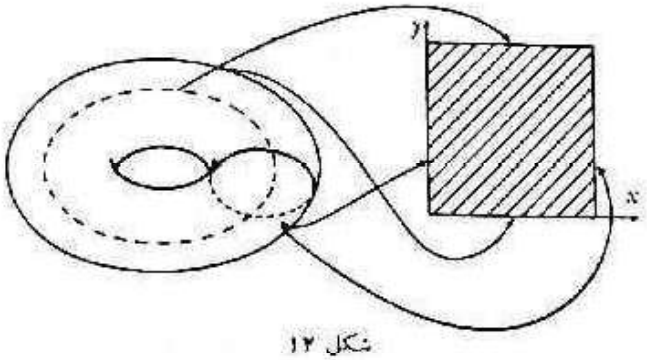
را در نظر بگیریم آنگاه برای $\varepsilon<0$ به‌جای یك مدار بستهٔ دافع یك دور حدی ربایندهٔ داریم.

از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که مهمترین مسأله در بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل تعیین ربایندهای معادله است زیرا

---

1. Hopf

مدارهایی که در قلمرو ربایندهها قرار دارند با گذشت زمان به‌سرعت به‌رباینده نزدیك می‌شوند و عملاً از ربایندهٔ موردنظر قابل تشخیص نخواهند بود. در واقع ازلحاظ فیزیکی تنها ربایندههای یك دستگاه می‌باشند که قابل مشاهده هستند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا به جز ربایندههای نقطه و دور حدی که در مثالهای گذشته دیدیم ربایندههایی از نوع دیگر وجود دارند یا نه؟ در اینجا منظور ما رباینده‌ای است که قابل تجزیه به‌ربایندههای نقطه‌ای و دورحدی نباشد. درواقع نوع دیگری از رباینده از دیربازشناخته شده است که ربایندهٔ شبه تناوبی نامیده می‌شود و نمونه‌ای از آن در «شارغیر گویا» روی چنبره مشاهده می‌شود. طبق شکل ۱۲، چنبرهٔ دوبعدی را مربعی تصور کنید که اضلاع روبروی دو به‌دو یکی انگاشته شده باشند.



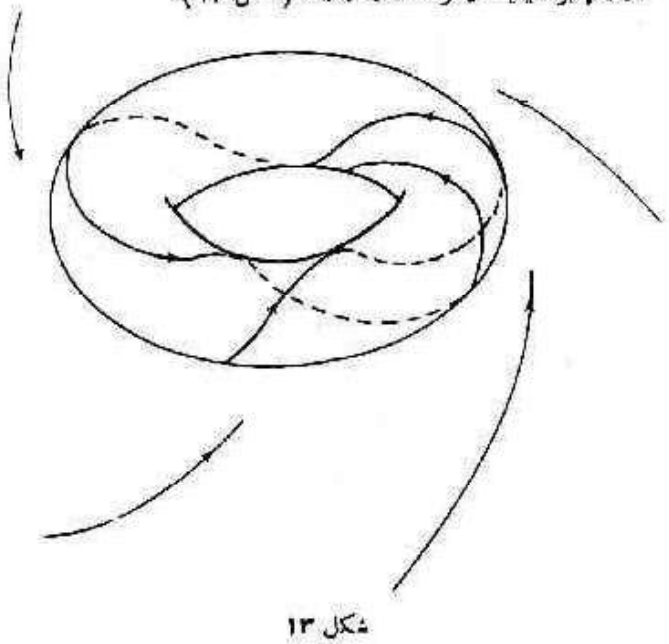
شکل ۱۲

حال میدان برداری

$$\frac{dx}{dt}=w_1$$

$$\frac{dy}{dt}=w_2$$

را روی مربع درنظر بگیرید به‌طوری که w_1/w_2 یك عدد گنگ باشد. با اندکی تأمل روشن می‌شود که مدار هر نقطه روی چنبره چگال خواهد بود. حال به‌راحتی می‌توان یك میدان برداری در R^3 تصور کرد که مدارهای آن همگی به‌سوی یك چنبره جذب می‌شوند و مدارهای روی چنبره کیفیت ذکر شده را دارند (شکل ۱۳).



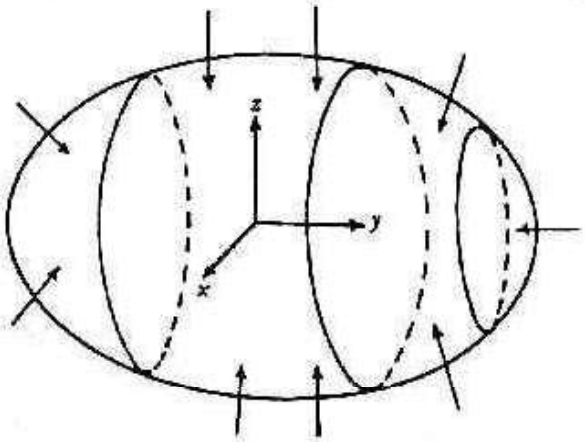
شکل ۱۳

ربایندهٔ غریب لورنتس

تا اوایل دههٔ ۱۹۶۰ تصور می‌شد که هر رباینده‌ای قابل تجزیه به یکی از سه رباینده‌ای است که تا کنون دیده‌ایم. در این زمان ریاضیدان آمریکایی اسمیل[1] اولین نمونه از یك «ربایندهٔ غریب» را ارائه کرد که در آن، ربایندهٔ دستگاه شکل پیچیده‌ای داشت و رفتار جوابهای دستگاه نیز در داخل و اطراف رباینده وضعیتی درهم و از نظر عملی غیر قابل پیش‌بینی داشت. با این حال این مثال هنوز در قلمرو نظریهٔ ریاضی بود و تصور نمی‌شد که در دستگاههای تابع قوانین فیزیك کلاسیك بتوان چنین پدیده‌ای را مشاهده کرد. ولی در ۱۹۶۳، یك ریاضیدان و جوشناس آمریکایی به نام لورنتس[2] مقاله‌ای منتشر کرد که در آن برای اولین بار رباینده‌ای از نوع جدید در مسائل طبیعی مطرح می‌شد. او که درجستجوی یك مدل ریاضی برای توضیح تلاطم جوی در هواشناسی بود، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر گرفت

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\sigma(x-y)\\ \frac{dy}{dt}&=Rx-y-xz \quad \text{یا} \quad \frac{dr}{dt}=V(r)\\ \frac{dz}{dt}&=xy-bz\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

که در اینجا $(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$ و R، b، و σ پارامترهای حقیقی هستند. لورنتس مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ را بررسی کرد و نشان داد که به‌ازای جمیع مقادیر مثبت R، یك ناحیهٔ همبند ساده، M، که در برگیرندهٔ مبدأ مختصات است در $\mathbf{R}^3$ وجود دارد بطوری که میدان برداری (*) در کلیهٔ نقاط مرزی آن به‌طرف داخل است (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

ازاینجا نتیجه می‌شود که M باید حاوی رباینده (یا رباینده‌های مختلف) باشد. درواقع $A=\bigcap_{t\geq 0}\phi_t(M)$ رباینده (یا رباینده‌های) مورد نظر است. ازطرف دیگر دیورژانس میدان برداری (*) منفی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که حجم هر قطعه از فضای حالات با گذشت زمان کاهش می‌یابد. و درواقع حجم قاعده به‌صفر میل می‌کند (در اصطلاح ریاضی، وضعیت حدی این قطعه یك مجموعهٔ اندازهٔ صفر است).

حال برای تعیین رباینده (یا رباینده‌های) موجود در M مقدار پارامتر R را از $R=0$ تا $R=28$ افزایش می‌دهیم و کیفیت و تغییرات نمودار حالات دستگاه را در این طیف از مقادیر R (که مورد بررسی لورنتس قرار گرفت) به‌طور اجمالی تشریح می‌کنیم.

ابتدا نقاط ثابت میدان را پیدا می‌کنیم. روشن است که $x=y=z=0$ یعنی مبدأ مختصات همواره یك نقطهٔ ثابت است. از معادلات (*) به‌راحتی می‌توانیم بخش خطی میدان برداری را در نقطهٔ O به‌دست آوریم

$$T=\begin{pmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ R & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix}$$

در نتیجه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از $-b$ و ریشه‌های معادلهٔ

$$\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+(1-R)\sigma=0.$$

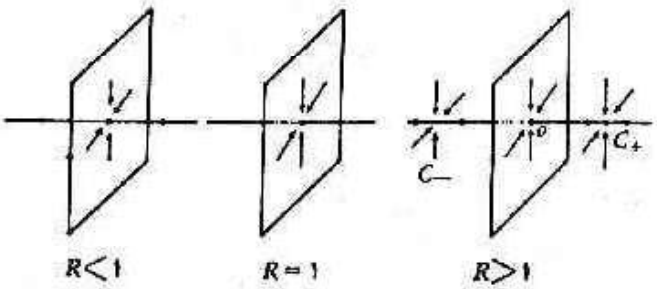
وقتی $R<1$، دو مقدار ویژهٔ دیگر هر دو منفی‌اند و در نتیجه O یك رباینده است درحالی‌که وقتی $R>1$، یکی از آنها مثبت و دیگری منفی است؛ یعنی O یك نقطهٔ زینی با مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یك‌بعدی است (توجه کنید که مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ هر دو ثابت و مثبت می‌باشند).

از طرف دیگر میدان برداری (*) به‌ازای $R>1$ در دو نقطهٔ دیگر نیز صفر می‌شود که مختصاتشان عبارت‌اند از

$$\begin{cases}z=R-1\\ x=y=\pm\sqrt{b(R-1)}\end{cases}$$

این دو نقطه را $C_\pm$ می‌نامیم. با بررسی بخش خطی میدان برداری در این دو نقطه می‌توان نشان داد که برای مقادیر Rی که کمی بزرگتر از ۱ باشند، بخش خطی میدان در هر دو نقطه دارای سه مقدار ویژهٔ منفی می‌باشند و لذا هر دو رباینده هستند.

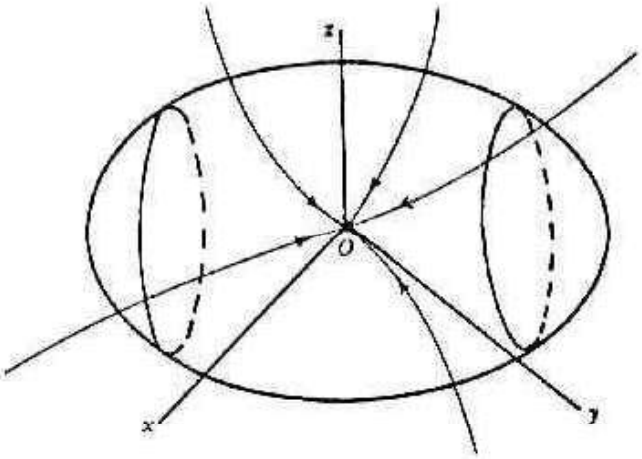
توجه کنید که وقتی $R\to 1^+$، $C_\pm\to 0$ یعنی در $R=1$ دو نقطه ربایندهٔ $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند. در واقع در $R=1$ انشعابی در نقطهٔ O صورت می‌گیرد که روی یك منحنی، که از O می‌گذرد و امتداد مماسش در آن نقطه درجهتی است که دو نقطهٔ ثابت جدید $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند، از نوع انشعاب چنگالی در مثال ۲ است. این منحنی را خمینهٔ مرکزی می‌نامند. درصفحهٔ قاطع براین منحنی انقباض صورت می‌گیرد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

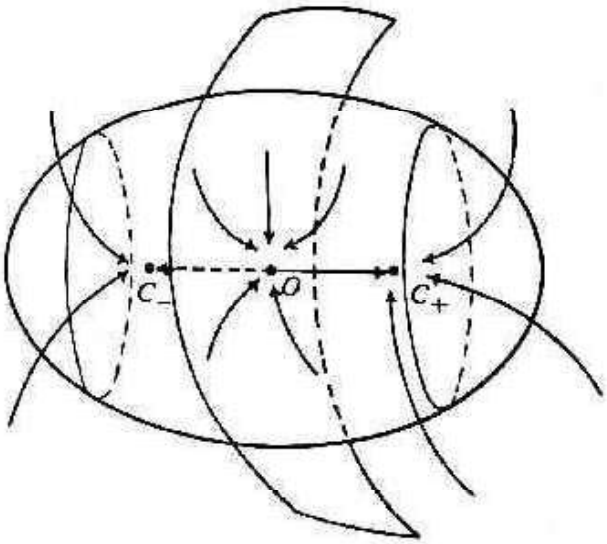
حال که انشعاب موضعی در $R=1$ را بررسی کردیم، نمودار حالات دستگاه را برای $R<1$ و R کمی بزرگتر از ۱ تشریح می‌کنیم. برای $R<1$، میدان برداری تنها یك نقطهٔ ثابت رباینده در O دارد که کلیهٔ مدارهایی را که وارد M می‌شوند جذب می‌کند (شکل ۱۶).

1. S.Smale 2. E. N. Lorenz



شکل ۱۶

برای مقادیر R کمی بزرگتر از ۱، دو نقطهٔ رباینده $C_\pm$ داریم و یك نقطهٔ ثابت زینی در O که دارای مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون روندهٔ یك بعدی است. دراینجا مجموعهٔ دوبعدی درون روندهٔ O، M را به دوناحیهٔ پایای M_+ که حاوی C_+ است و M_- که حاوی C_- است تقسیم می‌کند. کلیهٔ مدارهایی که در M_+ هستند جذب C_+ و کلیهٔ مدارهای M_- جذب C_- می‌شوند. درواقع مجموعهٔ درون روندهٔ O که برای مقادیر R کمی بزرگتر از یك تقریباً یك صفحهٔ دوبعدی تسبتاً صاف است، جدا کنندهٔ قلمرو رباینده‌گی C_+ و C_- می‌باشد (شکل ۱۷).



شکل ۱۷

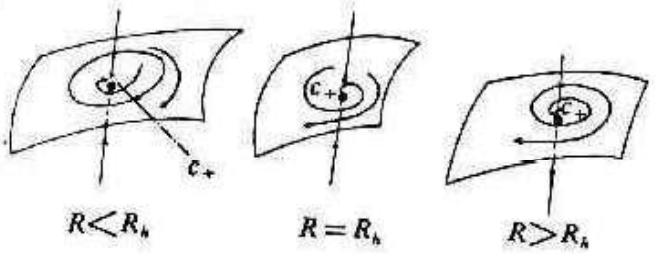
وقتی مقدار R را از $R=1$ به‌بالا افزایش دهیم نقاط $C_\pm$ بیشتر و بیشتر از O فاصله می‌گیرند و مجموعهٔ درون‌روندهٔ O به طور فزاینده خمیدگی پیدا می‌کند تا اینکه در $R\approx 13.92$ مجموعهٔ درون روندهٔ O به مجموعهٔ بیرون روندهٔ O اصابت می‌کند (در واقع مجموعهٔ بیرون رونده در مجموعهٔ درون رونده قرار می‌گیرد).

دراینجا انشعاب پیچیده‌ای صورت می‌گیرد، که برخلاف انشعاباتی که تا به‌حال دیده‌ایم یك انشعاب موضعی نیست که درهمسایگی یك نقطه انجام گیرد بلکه انشعابی سرتاسری است.

بررسی این دوانشعاب خارج ازحیطهٔ این مقاله است. تنها به‌ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که نمودار حالات دستگاه بلافاصله پس از این

دوانشعاب هنوز دارای دو رباینده C_+ و C_- است و مجموعهٔ درون روندهٔ O کماکان جدا کنندهٔ قلمرو رباینده‌گی C_+ و C_- است ولی به‌دلیل دو انشعاب اخیر، این مجموعهٔ درون رونده به‌طرز غامضی در مجاورت C_+ و C_- به هم می‌پیچد به‌طوری که مثلاً مداری که در M_+ قراردارد می‌تواند چندین‌بار در نزدیکی C_- به‌دور آن بپیچد تا سرانجام به C_+ میل کند.

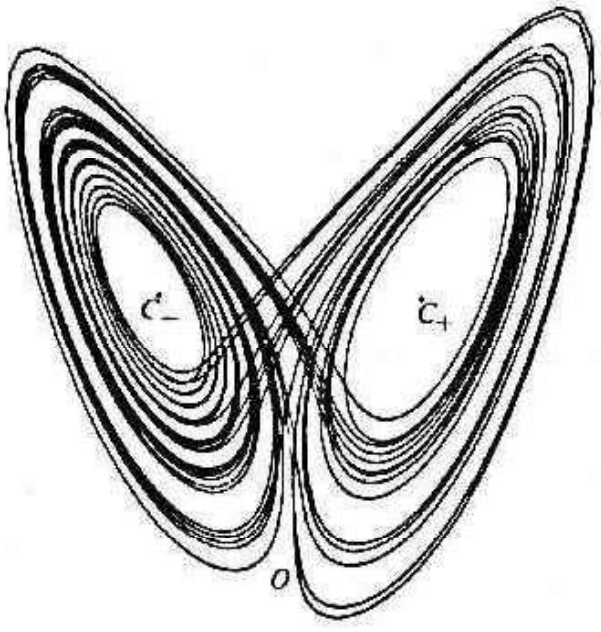
وقتی R بازهم افزایش یابد، در $R=R_h\approx 22.74$ درهریك از نقاط ثابت C_+ و C_- یك انشعاب هوپف ازنوع موجود درمثال ۶ صورت می‌گیرد. به‌عبارت دیگردرهریك‌ازنقاط‌ثابت C_+ و C_-روی یك خمینهٔ دوبعدی (خمینهٔ مرکزی) انشعابی از نوع هوپف صورت می‌گیرد ودرامتداد قاطع براین‌خمینهٔ دوبعدی درنقطهٔ ثابت موردنظر انقباض انجام می‌پذیرد (شکل۱۸).



شکل ۱۸

درنتیجه برای R کمی بزرگتراز R_h، C_+ و C_- نقاط ثابت زینی هستند که هریك‌دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ یك بعدی ومجموعهٔ بیرون روندهٔ دوبعدی می‌باشند.

اما قبلاً گفتیم که M باید حاوی رباینده‌ای باشد. سؤالی که هم‌اکنون مطرح است این است که در شرایطی که هیچیك از نقاط O و C_+ و C_- برای R کمی بزرگتراز R_h رباینده نیستند چگونه رباینده‌ای‌بود M وجود دارد؟ لورنتس با استفاده از روشهای تقریب عددی و شبیه‌سازی به‌کمك کامپیوترنشان داد که کلیهٔ مدارها در M جذب مجموعهٔ پیچیده‌ای می‌شوند که غیرقابل تجزیه است ونمودار تقریبی آن را می‌توان درشکل ۱۹ مشاهده‌کرد.



شکل ۱۹

ربایندهٔ لورنتس مطابق شکل فوق به‌صورت یك رویهٔ دولایه است که هریك ازلایه‌هایش حفره‌ای در وسط دارد. این دوحفره یکی نقطهٔ ثابت C_+ ودیگری C_- را دربرگرفته‌است. درنتیجه، ربایندهٔ لورنتس ربایندهٔ «غریبی» است که مانند هیچیك ازسه‌نوع رباینده‌ای که قبلاً دیدیم نمی‌باشد.

اگربه‌کمك کامپیوتر مسیر یك مدار دلخواه در M را بررسی کنیم خواهیم دید که مدارمزبوربه‌سرعت بهربایندهٔ لورنتس نزدیك‌می‌شود ومسیری کاملاً غیرقابل پیش‌بینی دارد به‌طوری که فی‌المثل چندین‌بار روی شاخهٔ C_+ به دوراین نقطهٔ ثابت می‌چرخد سپس تغییرمسیر داده به‌روی شاخهٔ C_- می‌رود وبه تعدادی ظاهراً نامشخص دور C_- می‌زندبعددوباره‌به شاخهٔ C_+ می‌برد واین‌کار الی‌الابد ادامه‌می‌یابد.

چگونه می‌توانیم این رفتاررا تبیین کنیم؟! ابتدا متذکرمی‌شویم که مجموعهٔ یك بعدی بیرون روندهٔ O مرز ربایندهٔ را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۹). ازطرف‌دیگرهریك‌ازلایه‌های ظاهری ربایندهٔ حول C_+ و C_- نزدیك به مجموعهٔ بیرون روندهٔ این نقاط است. در نتیجه هرگاه یك مداردلخواه در M درنزدیکی شاخهٔ C_+ قرار بگیرد تحت تأثیرمجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ چندبار دور C_+ می‌چرخد به‌طوری‌که هربارفاصله‌اش از C_+ بیشترمی‌شود تا جایی که بالاخره‌در آخرین دورخود به‌قدری از C_+ دورمی‌شود که ازحوزهٔ نفوذ مجموعهٔ بیرون روندهٔ آن‌خارج می‌شودوتحت‌تأثیرمداری که از O دور C_-می‌چرخد (که تیمی‌ازمجموعهٔ بیرون روندهٔ O را تشکیل می‌دهد) قرارمی‌گیرد ونتیجتاً به‌سمت C_- سوق‌داده می‌شود. سپس تحت‌تأثیرمجموعهٔ درون روندهٔ C_- به‌شاخهٔ C_- نزدیك مـی‌شود و اینك چندیـن‌بار دور C_- می‌چرخد وهمان روندی را درچرخش به‌دورآن طی می‌کند که قبلاً در C_+ انجام داده بود. بنابراین مـدار مزبور مرتباً پس از تعدادی چرخش دریکی ازشاخه‌ها به شاخهٔ دیگر می‌برد (شکل ۱۹).

حال‌اگردونقطهٔ بسیارنزدیك‌در M رادرنظربگیریم ومسیرمدارهای این دونقطه را مقایسه‌کنیم خواهیم دیدکه برای مدتی این دومداردر نزدیکی یکدیگرقراردارند وباهم به‌دوریك شاخه چرخیده وباهم از یك شاخه به‌شاخهٔ دیگر می‌پرند ولی چون هنگام چرخش به‌دور یك شاخه فاصلهٔ این دومدارتحت تأثیر مجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ یا C_- به‌تدریج افزایش‌می‌یابد بالاخره زمانی می‌رسدکه مسیردومدار ازهم جدا شده یکی از آنها همچنان به دور شاخهٔ قبلی خود می‌چرخد در حالی‌که دیگری ازآن شاخه به‌شاخهٔ دیگر تغییر مسیر می‌دهد.

نکتهٔ‌مهم اینجاست‌که هرچندفاصلهٔ‌اولیهٔ دومدارجزئی باشد،بالاخره باگذشت زمان مسیرها ازهم جدا می‌شوند. درنتیجه اگر کوچکترین ابهامی دروضعیت اولیه‌موجود باشد، رفتاردرازمدت دستگاه غیرقابل پیش‌بینی می‌شود. در واقـع هرگاه یـك قطعه‌ای هرچند کوچك از فضای حالات را درنظربگیریم این قطعه پس ازمدتی چرخش به دور شاخه‌ها ناگهان به‌طورغیرمنتظره به دو تکه‌که هر یك به‌دور یکی از شاخه‌ها می‌چرخد تجزیه می‌شودوسپس هرکدام ازتکه‌ها پس ازمدتی دوباره دچارتجزیه‌می‌گرددواین روند دائماً ادامه می‌یابد به‌طوری‌که پس ازمدتی تکهٔ اولیه به تعداد بسیارزیاد تجزیه شده به‌طورکمابیش یکنواخت درکل ربایندهٔ پخش خواهدشد. ازلحاظ فیزیکی این بدان معنی است‌که خطای موجود دروضعیت اولیه هرچند هم‌که ناچیزباشد باگذشت زمان وضعیت دستگاه با احتمال برابرمی‌تواند درهریك از نقاط ربایندهٔ غریب باشد!

مطلب‌دیگری که‌شایان‌توجه است این‌است که‌هرگاه مقدار Rرا کمی تغییر دهیم، انشعابات پیچیده‌ای در دستگاه صورت می گیرد و اگرچه ساختارکلی ربایندهٔ غریب تغییری نمی‌نماید ولی توپولوژی مدارهای ربایندهٔ عوض می‌شود. به‌عبارت دیگر ربایندهٔ لورنتس دارای ثبات ساختاری به معنی مرسوم کلمه نیست هـرچند که برای یك طیف از مقادیر R رفتارهای کلی مشابهی دردستگاه به‌چشم می‌خورد. این‌مطلب بیش‌ازهرچیزتارسایی مقولهٔ ثبات ساختاری را دربررسی‌رباینده‌های غریب‌نشان‌می‌دهد. درواقع علی‌رغم‌تحقیقات پردامنه‌برای رباینده‌های غریـب در معادلات دیفرانسیل و همچنین در دستگاههای گسـسته هنوز چارچوب نظری مناسبی بـرای شناخت و بررسی رباینده‌های غریب وجود نداردوتلاش دراین‌جهت بی‌شك یکی‌ازثمربخش‌ترین زمینه‌های فعالیت ریاضیات در سالهای آینده خواهد بود.

منابع

1. Abraham R., & Shaw C., *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1982.
2. Devaney R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986.
3. Guckenheimer J.,& Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectorfields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
4. Hao Bao-Lin, *Chaos*, World Scientific, Singapore, 1984.
5. Ruelle D., "Strange attractors", *Math. Intelligencer*, 2 (1980) 126-137.
6. Ruelle D., "Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence", *Bull. Am. Math. Soc*,5 (1981) 29-42.
7. Smale S., *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.
8. Sparrow C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982.

نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷

نگاهی به فرضیهٔ ریمان*

هربرت ویلف

بیشتر ریاضیدانهای حرفه‌ای از وجود فرضیهٔ ریمان و از اینکه این فرضیه مسأله‌ای حل نشده و به‌غایت مهم در ریاضیات محض و به‌ویژه در نظریهٔ اعداد است آگاه‌اند. در اینجا می‌خواهم راه بسیار ساده‌ای را برای بیان این مسأله با شما در میان نهم: راهی که می‌توان آن را برای یك کلاس قوی ماقبل آخر دبیرستان تشریح کرد. پس از آن مختصری دربارهٔ نتایج فرضیهٔ ریمان صحبت خواهم کرد، و سرانجام خبری در مورد پیشرفتهای هیجان‌انگیز اخیر در این زمینه خواهم داد.

اولاً، چگونه ممکن است این مسأله را برای دانش‌آموزان دبیرستانی شرح داد؟ یك راه این است که کار را با مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت شروع، و آن اعدادی را که بر مربع یك عدد صحیح بزرگتر از یك بخش‌پذیرند حذف کنیم. بدین ترتیب اعداد ۴، ۸، ۹، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲ و ... را کنار می‌گذاریم. برای ما فهرستی از اعداد صحیح مثبت خالی از مربع به صورت زیر به‌جا می‌ماند

۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ...

اگر هر یك از این اعداد صحیح خالی از مربع را به عوامل اول تجزیه کنیم، هیچ عامل اولی در این تجزیه تکرار نخواهد شد؛ یعنی هر یك از این اعداد صحیح، حاصلضربی از اعداد اول متمایز است. بعضی از اعداد خالی از مربع، حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز و برخی دیگر، حاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایزند.

قرارمی‌گذاریم که یك عدد صحیح، قرمز است اگر حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز باشد، و آبی است اگر حاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایز باشد. بدین ترتیب ۱۴ عددی قرمز، و ۳۵ عددی آبی است (۱۸ بدون رنگ است، زیرا خالی از مربع نیست).

مثلاً اعداد صحیح خالی از مربع تا بزرگتر از ۳۵ عبارت‌اند از

۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۵,

۱۷, ۱۹, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۶, ۲۹, ۳۵.

در میان اینها، ۸ عدد قرمز

۱, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۵, ۲۱, ۲۲, ۲۶

و ۱۱ عدد آبی

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۵

وجود دارند.

بنابراین درمیان اولین سی عدد صحیح مثبت، ۳ عدد آبی بیشتر از اعداد قرمز موجود است. فرضیهٔ ریمان، با بیانی نه چندان دقیق، می‌گوید که در هر فاصلهٔ $[1, n]$، تعداد اعداد قرمز با تعداد اعداد آبی تفاوت بسیار زیادی ندارد. در زیر، صورت دقیق این فرضیه را، نه آن گونه که ریمان بیان کرده، بلکه به‌صورتی که کاملاً معادل‌شکل اولیهٔ آن است و امیدواریم که قابل توصیف برای کلاس دبیرستانی باشد، آورده‌ایم

فرضیهٔ ریمان. $\varepsilon > 0$ را عددی ثابت می‌گیریم. در این صورت عددی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر $n > N$ تفاوت تعداد اعداد آبی و قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $n^{(1/2)+\varepsilon}$ بیشتر نیست.

بنابراین، انتظار داریم که تعداد اعداد صحیح آبی و قرمز بین ۱ و n، با خطایی حداکثر «حدود» $\sqrt{n}$، باهم تقریباً مساوی باشند.

گزارهٔ بالا، بیانی نسبتاً روشن از فرضیهٔ ریمان است و آنچه کم دارد، آشکار نکردن اهمیت مسأله است. اگر حقیقتاً فرضیهٔ ریمان فقط مربوط به این واقعیت بود که این دورنگ از اعداد به‌صورتی نسبتاً خوب درهم مخلوط شده‌اند، آنگاه مطلبی جالب توجه ولی نه مسأله‌ای مهم و برجسته به‌حساب می‌آمد. اهمیت این گزاره از انبوه پیامدهای آن نتیجه می‌شود، و ما به راستی نمی‌توانیم در اینجا به تفصیل در مورد آنها بحث کنیم [۳].

تعدادی از پیامدهای فرضیهٔ ریمان به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند. دستورهای تقریبی مهم و زیادی در نظریهٔ اعداد وجود دارند. اهمیت این فرمولها در ارائهٔ تقریبهای نسبتاً دقیقی برای برخی توابع جالب است که رفتارشان به‌قدری پیچیده است که دستوردقیق برای آنها کمتر از دستورهای تقریبی مفید خواهد بود. یکی از آنها قضیهٔ مشهور به قضیهٔ اعداد اول است. این قضیه بیان می‌کند که تعداد اعداد اول بین ۱ و x، «نزدیك به» $x/\log x$ است.

این «نزدیك به»، تا چه حد نزدیکی را بیان می‌کند؟ ما چیز زیادی راجع به آن نمی‌دانیم. می‌توانیم بگوییم که خطای این تقریب ازخود $x/\log x$ کندتر رشد می‌کند، و حتی کمی بیش از این هم می‌توان گفت. اما مثلاً، نمی‌توانیم بگوییم که این خطا سریعتر از $x^{0.75}$ رشد نمی‌کند. در واقع انتظار داریم که تقریب $x/\log x$ به غایت خوب باشد: فکر می‌کنیم (البته کسانی که به فرضیهٔ

ریمان معتقدند) که این خطا تنها مانند $n^{0.5+\varepsilon}$ رشد می‌کند. معلوم‌شده است که این گزاره از فرضیهٔ ریمان نتیجه می‌شود. همچنین تعداد بسیار زیادی براورد خطای مهم و جالب توجه «وابسته» به‌فرضیهٔ ریمان وجود دارد که اگر می‌توانستیم فرضیهٔ ریمان را ثابت کنیم، آنگاه تمام آن براوردها به‌طور همزمان ثابت می‌شدند. بیشتر اهمیت فرضیهٔ ریمان در همین است.

به‌دورنگ عددی که در بالا از آنها صحبت کردیم برمی‌گردیم؛ درسال ۱۸۹۷، مرتنس[1] [۴] به‌این نظر رسید که داده‌های تجربی ممکن است حتی فرضیه‌ای قویتر را تأیید کنند. او مشاهده کرد که به نظر می‌رسد به‌ازای همهٔ مقادیر nی که وی قادر بود محاسبات مربوط را انجام دهد تفاوت بین تعداد اعداد قرمز و آبی نابزرگتر از nهیچگاه از $\sqrt{n}$ بزرگتر نیست. او آنچه را که بعدها «فرضیهٔ مرتنس» نامیده شد چنین فرمولبندی کرد:

فرضیهٔ مرتنس. به‌ازای هر $n \geqslant 1$، تفاوت بین تعداد اعداد صحیح قرمز و آبی در فاصلهٔ $[1, n]$ هیچگاه از $\sqrt{n}$ تجاوز نمی‌کند.

اگر فرضیهٔ مرتنس را با فرضیهٔ ریمان مقایسه کنیم، می‌بینیم که مرتنس مدعی بود که می‌توان ε را مساوی صفر و N را مساوی یك اختیار کرد، که اگر درست می‌بود، مسأله خیلی ساده می‌شد (آخرهمه دوست دارند که به‌جای ε، صفر را قرار دهند).

حال مایلم که راجع به‌نتایج محاسبهٔ زیایی که چند سال پیش به وسیلهٔ نویاوتر [۵]، روی فرضیهٔ مرتنس انجام شد با شما صحبت کنم. در آن محاسبه همهٔ مقادیر n تا 10^8 و همراه آنها مقادیر بسیار دیگری برای n بزرگتر از 10^8، تا 10^{10} در نظر گرفته شدند. به‌ازای هر یك از این nها، تفاوت بین تعداد قرمزها وآبیها محاسبه شد.

آنچه که نویاوتر انجام داد ثبت اعدادی است که آنها را با $M_1(n)/\sqrt{n}$ نمایش می‌داد. در این نمایش، $M_1(n)$ تعداد اعداد صحیح قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ منهای تعداد اعداد صحیح آبی در این فاصله است.

بنابراین اگر حدس مرتنس درست می‌بود، آنگاه مقادیر جدولبندی شدهٔ این نسبت باید همواره بین -1 و 1 قرار می‌گرفتند. در واقع نویاوتر حدسی حتی قویتر از حدس مرتنس را، به‌این مضمون که این نسبت به‌ازای n بزرگتر از ۲۰۰ هیچگاه از حیث قدرمطلق از ۰٫۵ تجاوز نمی‌کند، آزمود.

به‌هر صورت، تمام خوانندگان علاقه‌مند به مقالهٔ حاضر باید نمودارهایی را که در آن مقاله نشان داده شده‌اند ملاحظه کنند. درآنجا، نابعی دیده می‌شود که به‌گونه‌ای نامنظم نوسان می‌کند و بین ± 0.28 و یا درهمین حدود جلو و عقب می‌رود و بیش از هرچیز، شبیه میانگینهای شاخص بازار سهام دردوران بی‌ثباتی اقتصادی است.

نویاوتر ناگهان به‌ازای $n = 7,700,000,000$ و یا نزدیکیهای آن[2]، آنچه را که درجستجویش بود یافت. نمودار ناگهان به بالای ۰٫۵ جهید و مثال ناقض برای حدس تقویت شدهٔ مرتنس (یعنی فرضیهٔ ریمان دوبار تقویت شده) پیدا شد.

---

۱. فرانتس مرتنس (۱۸۴۰–۱۹۲۷) در یوزنان، واقع در غرب اهستان مرکزی، متولد شد و در برلین تحصیل کرد (مرجع تاریخی [۸] را ببینید).

۲. کارهای بعد [۱]، نقطهٔ جهش را به‌ازای $n = 7,725,038,629$ نشان داد.

چنین رفتاری از نظر متخصصین کار کشتهٔ نظریهٔ اعداد شگفت‌آور نبود. آنها قبلاً چندین بار حدسهای ساده شدهٔ گوناگونی را در مورد رفتار توابع پیچیده‌ای از نظریهٔ اعداد دیده بودند، حدسهایی که به‌ازای همهٔ مقادیر قابل‌محاسبهٔ n درست به‌نظر می‌رسیدند ولی برای بسیاری ازمقادیر غیرقابل‌محاسبهٔ n نادرست ازآب‌درآمده بودند. در بعضی از حالتها، می‌دانیم که حدسی نادرست است، اما حتی‌مقداری از n را که به‌ازای آن حدس مزبور ردمی‌شود نمی‌شناسیم. (آنچه را در زیر می‌آید ببینید).

خلاصه اینکه، هر چند بعد از کار نویاوتر هنوز مثال ناقضی برای حدس اولیهٔ مرتنس نداشتیم، اما موجه بودن آن یقیناً مختصری لطمه دیده بود. باوجود این، مشکل بودن فوق‌العادهٔ حل‌مسائل مربوط به‌فرضیهٔ ریمان به‌این منجر شد که اکثراً تصور کنند که ممکن است تا تعیین تکلیف فرضیهٔ مرتنس راه درازی در پیش باشد.

در ۱۹۸۵، ادلیزکو و تی‌دیل [۶] ثابت کردند که فرضیهٔ مرتنس نادرست است.

در واقع آنها ثابت کردند که به‌ازای تعدادی نامتناهی ازمقادیر n، فزونی اعدادقرمز بر آبی در فاصلهٔ $[1, n]$ از $1.06\sqrt{n}$ بیشتر است.

آنها همچنین نشان دادند که به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n، فزونی اعدادآبی بر قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $1.0009\sqrt{n}$ بیشتر است.

بااینکه این دو نفر نشان دادند که تعدادی نامتناهی از دو نوع n وجود دارد، اثبات آنها حتی یك مقدار برای n مشخص نمی‌کند که در مورد آن یکی از نتایج بالا برقرار باشد.

بعداً پانوش‌پینتر [۷]، نشان داد که حدس مرتنس یقیناً به ازای nی کوچکتر از 3.21×10^{64} نادرست است.

دراثبات ادلیزکو و تی‌دیل از روشهای بسیار جدیدی استفاده می‌شود. مثلاً، الگوریتم تقلیل‌پایهٔ شبکه‌ای لنسترا [۳] به‌کار گرفته می‌شود این اساساً الگوریتمی است که بردار کوتاهی را در شبکه‌ای صحیح که با پایه‌ای مفروض توصیف شده است سریعاً می‌یابد. احتمالاً بد نیست گفته شود که این الگوریتم در ابتدا برای یافتن روشهای چند جمله‌ای ـ زمان به منظور حل مسائلی محاسباتی که قبلاً قابل دستیابی نبودند، مانند مسئلهٔ تجزیهٔ کامل یك چندجمله‌ای روی اعداد گویا، اختراع شد.

اما در مقالهٔ ادلیزکو و تی‌دیل در می‌یابیم که این الگوریتم برای هدفی نظری و نه‌محاسباتی به‌کار رفته است که همان یافتن‌جوابی خوب برای دستگاه نامعادلات دیوفانتی همزمان است. نکتهٔ اساسی این‌است: گیریم u_j و γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ اعداد حقیقی مفروضی باشند، در این صورت مسألهٔ یافتن عددی مانند y که به‌ازای آن همهٔ کمیتهای $|\gamma_j y - u_j|$، $j = 1, \ldots, n$، به‌طور همزمان کوچك‌اند، می‌تواند به‌مسألهٔ یافتن بردار کوتاهی دریك شبکهٔ صحیح تبدیل شود. معلوم شده است که موضوع مورد توجه در اثبات ادلیزکو و تی‌دیل، بلندترین بردار در پایهٔ انتقال یافته است که الگوریتم پیدا می‌کند.

البته هیچ داستانی نباید بدون یکی دو نتیجهٔ اخلاقی به‌آخر برسد:

۱. εها را دست کم نگیرید، صفر گرفتن آنها همانا تن به‌زحمت دادن است.

۲. هیچ چیز را تنها به‌خاطر برخی دلایل پیش پاافتاده، مانند دانستن اینکه به‌ازای همهٔ مقادیر n تا $7,000,000,000$ درست است، باور نکنید.

۳. هرچند حدسی ممکن است نادرست باشد، کامپیوتر شما شاید قادر نباشد که نادرستی آن را در طی یك جستجوی طولانی (اما به هر

حال محدود) بیابد.

۴. الگوریتمهایی که به خاطر علوم نظری کامپیوتر بسط داده شده‌اند ممکن است به‌اثبات قضایای مهمی در ریاضیات محض کمک کنند.

۵. هرچند کامپیوتر شما هنوز مثال نقضی نیافته و هیچ علامتی دال بر رسیدن به‌چنین نقضی را نشان نمی‌دهد، اما روی مطالعهٔ یک میلیارد حالت بعدی اصرار کنید زیرا کسی چه می‌داند که چه چیزی ممکن است در آن حالتها یافت شود.

ترجمهٔ مجتبی منیری

• Wilf Herbert S., "A greeting; and a view of Riemann's hypothesis", *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987) 3-6.

مراجع

1. Cohen H., "Arithmétique et informatique", *Astérisque*, **61** (1979) 57-61.

2. Edwards Harold M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.
3. Lenstra A. K., Lenstra H. W. Jr., and Lovász L., "Factoring polynomials with rational coefficients", *Math. Ann.*, **261** (1982) 515-534.
4. Mertens F., "Über eine zahlentheoretische funktion", Sitzungsberichte Akad. Wiss. *Wien*, **IIa 106** (1897) 761-830.
5. Neubauer Gerhard, "Eine empirische untersuchung zur Mertenss-chen funktion", *Numerische Mathematik*, **5** (1963) 1-13.
6. Odlyzko A. M., and te Riele H. J. J., "Disproof of the Mertens conjecture", *J. für die Reine und Angew. Math*, **357** (1985) 138-160.
7. Pintz Janos, "An effective disproof of the Mertens conjecture", *Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, preprint no 55 (1985).
8. te Riele H. J. J., "Some historical and other notes about the Mertens conjecture and its recent disproof", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, July 1985, 237-243.

اشتباه است اگر فکر کنیم که دقت در اثبات، دشمن سادگی است. برعکس، مثالهای متعددی نشان می‌دهند که روش دقیق، ساده‌تر و آسان فهم‌تر است و تلاش در راه دقت، ما را وامی‌دارد روشهای اثبات ساده‌تری بیابیم؛ و نیز این تلاش غالباً به‌یافتن روشهایی می‌انجامد که بیش از روشهای کم‌دقت‌تر قدیمی قابل بسط و توسعه‌اند.

دیوید هیلبرت

کتابخانه
خانه ریاضیات اصفهان
۱۳۷۷
۱۳۴۴ م



جای خالی ریاضیات

مروری بر نشریات ادواری ریاضی در ایران

غلامرضا برادران خسروشاهی

انتشاراولین شمارهٔ «نشریاضی» ازطرف مرکز نشر دانشگاهی، و نیز انتشار دومقاله در مطبوعات دربارهٔ بررسی وضعیت مجلات ونشریات ادواری علمی [۱ و ۳]، مروری اجمالی به نشریات ادواری ریاضی به‌زبان فارسی را ایجاب می‌کند. دراین‌مقاله پس‌ازنگاهی‌بسیارکوتاه ومجمل به‌وضع نشریات‌ادواری‌علمی داخلی وخارجی، وضع‌نشریات ادواری ریاضی درایران را مورد بررسی قرارداده وسپس به‌ذکرچند نتیجهٔ کلی می‌پردازیم.

۱

از انتشار اولین شمارهٔ اولین نشریهٔ علمی ادواری به‌زبان فارسی در ایـران، به‌نام «روزنامهٔ علمیهٔ دولت علیهٔ ایران»، کـه انتشار آن به‌صورت ماهنامه به‌دستورناصرالدین شاه قاجار درسال ۱۲۴۲ هجری شمسی(۱۱ ژانویهٔ ۱۸۶۴) آغاز شد ، قریب ۱۲۴ سال می‌گذرد. وضع بد سواد درجامعهٔ آن روز(در سال انتشار نشریه فقط ۳۸۷ نفر محصل در سراسر مملکت دولت علیه بـه تحصیل مشغول بـوده‌اند)، و قیمت گزاف هرنسخهٔ این مجله (۱۵ شاهی برای هر تك شماره) شایـد حاکـی از نمایشی و تقلیدی بـودن این نشریـه بـوده و انتشار آن واقعاً بـرای نشر و پخش معارف علمی روز نبوده است. شاید هم به‌همین دلیل بودکـه از۱۲۶۴ تا ۱۲۷۹ هیچ نشریهٔ علمی انتشارنیافت. دراین ۱۲۴ سال نیز، رویهمرفته، ۲۵۰ نشریـهٔ علمی منتشرشده است‌که عمرمتوسط‌آنها درحدود ۶سال بوده است . جالب توجه‌آن است‌که ۴۲ درصد این نشریات‌دربارهٔ موضوعات وابسته به علوم پزشکی، ۱۶٫۶ درصد دربارهٔ علوم مربوط‌به‌کشاورزی (بیشتر با حمایت دولت) و۴۱٫۴ درصد باقیمانده دربارهٔ موضوعات دیگر ازقبیل صنعت، تکنولوژی،وضمناً علوم پایه‌بوده است [۴]. این مطلب، یعنی گرایش به علوم پزشکی، درمطالعه‌ای کـه درسال ۱۹۷۳ انتشار یافته [۵] مورد تأکید قرار گرفته است. دراین بررسی ایران‌در زمرهٔ کشورهایی‌آمده است‌که برتحقیق درطب بالینی تأکید دارند.

به‌طورکلـی، آماری‌که در [۴] مورد بـررسی قرار گرفته و نتایج تحلیلی حاصل از آن، حاکی از آن است که بیشترین گرایش نشریات ادواری علمی ، دراین مدت زمان ۱۲۴ سال ، از نظرتعداد

نشریه، تیراژ، و خواننده، به‌سوی علوم کاربردی مانند پزشکی، و کشاورزی بوده است و نشریات علوم پایه جایگاهی بس‌نازل درمیان دیگران داشته‌اند. لذا بی‌گمان می‌توان با این گفته هم رأی بود که: «نشریات ادواری علمی درجهان سوم اگرچه به‌دلیل محتوای آنها از فشارهای سیاسی نظیرسانسور واعمال نظرحکومتها در امان بوده‌اند، اما بازهم شرایط اجتماعی در روند تحول آنها بسیارمؤثرمی‌باشد. به عبارتی رابطهٔ عرضه و تقاضا دراین مورد تأثیرمهمی داشته و هرمتغیر عرضه وتقاضا نیزخود تابع متغیرهای دیگری بوده که آنها را باید در بررسی جامعه‌شناسی تاریخی این وسیلهٔ ارتباط جمعی جستجو کرد.» [۳].

البته نباید ناگفته گذاشت که درسالهای بعد از انقلاب مجلات علوم‌پایه‌رشدچشمگیری داشته‌اند. دراین سالها، هرمجله به‌طورمتوسط ۳٫۴شماره درسال‌منتشر کرده‌ومتوسط تیراژ آنهااز برخی‌علوم‌کاربردی پیشی گرفته است لکن هنوز درسطح نازل ۱۹۵۶ نسخه می‌باشد [۳].

بگذارید نگاهی بسیار سریع به‌آمارمجلات علمی در دنیا نیز بیفکنیم. درحدود سال ۱۸۰۰ میلادی، تقریباً ۱۰۰ مجلهٔ علمی دردنیا انتشارمی‌یافت. این رقم‌درسال ۱۹۶۸ به ۲۰۰,۰۰۰ بالغ گشته است [۵]. دراینجا توجه به این نکته لازم است که اصولاً تولید جریان اصلی علم در دست تعداد معدودی ازکشورهاست و دراین زمینه‌فاصلهٔ بین دارا و ندار حتی بیش از فاصلهٔ آنها درحوزهٔ مسائل اقتصادی است. به‌آمار جدول ۱ توجه‌کنید [۵]:

جدول ۱. تعداد نشریات‌ادواری درسال ۱۹۷۳

کشور	تعداد
آمریکا	۱۰۳۷۸۰
انگلیس	۲۵۰۰۵
شوروی	۲۴۴۱۸
آلمان غربی	۱۶۴۰۸
فرانسه	۱۵۱۰۲
ژاپن	۱۴۲۶۵
کانادا	۱۱۹۰۷
هندوستان	۶۸۸۰
استرالیا	۵۳۴۱
ایتالیا	۴۶۹۱

جالب توجه‌آن است که همین ده‌کشوری که ۸۳٫۹۲ درصد نشریات علمی‌را درسال۱۹۷۳منتشرمی‌کردند[۵]، کشورهایی هستند که‌بیشترین برندگان جوایز نوبل نیز ازبین‌آنها برمی‌خیزند؛ ومدالهای فیلدز نیز عمدتاً بین‌آنها تقسیم می‌شود (جدول ۲).[۶]

وبه‌طورکلی، همین‌کشورها هستندکه برعلم دنیا مسلط‌اند.

وبالاخره، به‌این آمارمنتشره ازطرف‌سازمان یونسکو توجه‌کنید: «درکشورآمریکا ۱۰۰۰ دانشمند علوم طبیعی و ریاضی درمقابل‌هریك میلیون نفرجمعیت مشغول به‌کارند. این عده برای شوروی درحدود ۱۵۰۰ نفر وبرای‌فرانسه ۳۶۰ نفرمی‌باشد.» [۲]. با این حساب‌تعداد دانشمندان علوم طبیعی و ریاضی ایرانی باید چیزی بین ۱۸ تا ۷۵ هزارنفر باشد. اما می‌دانید تعداد دانشمندان علوم پایه در ایران چقدر است؟ اگربهت‌زده‌نمی‌شوید،که نمی‌شوید، می‌گویم که یك‌کران‌بالای

جدول ۲. تعداد برندگان مدال فیلدز[۱]

کشور	تعداد
آمریکا	۱۶
فرانسه	۶
انگلیس	۴
شوروی	۲
ایتالیا	۱
سوئد	۱

خوشبینانه برای‌آن، یك‌هزار نفراست.

ازآمار وتحلیل مجمل بالا گزاره‌های زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

گزارهٔ ۱. درجهان امروز، کشورهایی‌که وضع علمی آنهاخوب‌است، وضع نشریات علمیشان هم خوب است.

گزارهٔ ۲. وضع نشریات علمی ایران خوب نیست، پس وضع علمی ایران هم خوب نیست.

گزارهٔ ۳. وضع نشریات ادواری علوم پایه نسبت به‌نشریات ادواری علوم‌کاربردی بدتراست.

گزارهٔ ۴. علوم پایه درایران بهیچوجه وضع خوبی ندارد.

۲

جدول ۳ نشان دهندهٔ وضع نشریات ریاضی ادواری به‌زبان فارسی (وگهگاه انگلیسی) است که درطول ۱۲۴ سال گذشته درایران‌انتشار یافته‌اند. دراینجا مرورکوتاهی براین نشریات داریم.

۱. در ۱۵دیماه ۱۳۰۶ نخستین‌نشریهٔ ریاضی به‌زبان فارسی‌با نام«حل‌المسائل‌ریاضی» انتشاریافت وقراربود هر۱۵ روزیکبارمنتشر شود، لکن درمجموع تنها ۷ شماره و رویهمرفته در ۵۷ صفحه منتشر شد. ناگفته نماندکه به‌استثنای یك مقاله، بقیهٔ این ۵۷ صفحه منحصراً مشتمل برمسأله و حل مسأله است. شایان توجه‌آن است که این نشریه ۵۳ سال پس‌ازانتشاراولین نشریهٔ علمی درایران انتشاریافته است و بعد از یك دورهٔ‌کوتاه نیز برای همیشه تعطیل شده است.

۲. دومین نشریهٔ ریاضی درتاریخ نشریات ریاضی ادواری ایران، «مجلهٔ ریاضیات‌عالی و مقدماتی» غلامحسین مصاحب است‌که اولین شمارهٔ آن در آبانماه ۱۳۰۹ انتشاریافت. این نشریه نیز قرار بود ماهی دوبار منتشر شود لکن بعدازیازده شماره تعطیل شد (یعنی درست ۵ماه بعدازانتشارنخستین شماره) و بعدها در سال ۱۳۱۴ دو شمارهٔ دیگر از آن منتشر شد و سپس برای همیشه تعطیل شد. تصویر قسمتی ازسرمقالهٔ نخستین‌شمارهٔ آن [۴]، درصفحهٔ روبرودیده‌می‌شود.

دراولین شمارهٔ سال دوم در ۱۳۱۴ علت تعطیل شدن نشریه چنین بیان شده‌است: «تنها علت تعطیل مجلهٔ ریاضیات بدحسابی‌جمعی ازمشترکین آن بود بالاخص بسیاری‌ازاشخاص که صفت معارف‌پروری

---

۱. مدال فیلدز معتبرترین جایزهٔ ریاضیات است‌که هرچهارسال یکباردر کنگرهٔ جهانی ریاضیدانان به‌ریاضیدانان جوان‌کمتر از چهل سال‌که به‌کشف عمده‌ای در ریاضیات نائل آمده‌اند، داده می‌شود.

کتابخانه
خانه ریاضیات اصفهان
۱۳۷۷

مجلهٔ ریاضیات

عالی و مقدماتی

اول آبان ماه ۱۳۰۹ شمسی

مقصود و وظیفه ما چیست؟!

هر چیزی را احتیاج بوجود می‌آورد کتاب - مجله - روزنامه - قانون و حتی کاد زائیدهٔ احتیاج است بدین معنی که آنرا در عالم ایجاد احتیاجها عور کنیم می‌بینیم که انسان احتیاج محیط ایجادها را در یافته و سپس در صدد ایجاد آنها برآمده است. این مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی نیز یکی از موالید احتیاجات محیط یازده سال قبل است. چطور شد که این مجله دوام می‌یافت بلکه اصلاً کسی بفکر ایجاد آن نمی‌افتاد چرا؟ برای اینکه در روزنامه تمام ایران ۳ محصل متوسطه بیش نبود و امروز فقط در تهران ۳۰۰۰ محصل و ۱۵۰۰ محصل مشغول تحصیل در آکادمی علوم و فنون مختلفه که از تمام آنها ریاضیات است میباشند.

عبارهٔ اخری روز محیط احتیاج نداشت و امروز احتیاج آن چنین مجله که در نوع خود منحصر بفرد است در نزد اهل کمال واضح و محتاج بتوضیح و تشریح نمیباشد. پس از ادای این مقدمه معلوم میشود پس از اینکه مسلم شد که مجلهٔ ریاضیات را احتیاج محیط بوجود آورده تکلیف و وظیفه ما نیز معین می‌شود، تشخیص احتیاجاتی که باعث ایجاد مجله شده و کوشیدن در رفع آنها. نکات و ملاحظاتی که ما را وادار بانتشار چنین مجله نموده همه چیز است.

را جزء لاینفک اسم خود می‌شمارند و قریباً ۲۰ تا ۳۰ شماره از مجله را از بدو تا ختم آن تحت عناوین مختلف دریافت داشتند بدون آنکه وجه مشترک آن را بپردازند.»

۳. سومین نشریهٔ صرفاً ریاضی در ۱۳۴۲، با نام «یکان» منتشر شد و ۱۴ سال دوام آورد. شایان توجه، تأسف و تعجب است که از زمان تعطیل مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی تا آغاز انتشار مجلهٔ یکان (یعنی از ۱۳۱۴ تا ۱۳۴۲)، با وجود تأسیس دانشگاه تهران و دانشگاههای دیگر، هیچ یک از رجال تحصیل کرده و استادان دانشگاه به فکر انتشار یک نشریهٔ ریاضی نمی‌افتند و رنج نشر و پخش معارف ریاضی را به خود راه نمی‌دهند.

مجلهٔ یکان مجله‌ای کاملاً پیش‌دانشگاهی بود و «عمدهٔ خوانندگان این مجله را دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان تشکیل می‌دادند. اینان بیشتر به مسأله‌های ریاضی راغب بودند. از این رو بیش از نصف صفحه‌های مجله را مسأله و حل مسأله پر می‌کرد.» [مکاتبهٔ شخصی با صاحب امتیاز مجلهٔ یکان، ۱۳۶۶].

مجلهٔ یکان پس از ۱۴ سال انتشار مداوم و بی‌وقفه، در سال ۱۳۵۶ تعطیل شد. دربارهٔ علت تعطیل آن آقای مصحفی، صاحب امتیاز مجله، چنین می‌گویند: «به‌تدریج شرایط سنی مانع از آن می‌شد که صاحب امتیاز مجله مانند گذشته بتواند از خواب و استراحت خود برای فعالیتهای مربوط به مجله صرفنظر کند. گرانی روزافزون کاغذ و هزینهٔ چاپ نیز چنان رشد سریعی داشت که یا بایستی بهای مجله را ماه به‌ماه بالا برد و یا هزینهٔ سنگینی را متحمل شد که هیچ کدام عملی نبود. به‌ناچار در سال ۱۳۵۶ علی‌رغم میل باطنی صاحب امتیاز، مجله به‌محاق تعطیل در آمد.»

توجه کنید: مجله‌ای ۱۴ سال با تیراژ هر شماره ۵ هزار انتشار می‌یابد و برای خود خواننده تربیت می‌کند، لکن «نهادی» نمی‌شود و فقط قائم به‌وجود صاحب امتیاز است و چون صاحب امتیاز هم بعد از تحمل فشارهای زیاد و کهولت از صحنه خارج می‌شود، انتشار مجله نیز پایان می‌یابد و دستی از آستین بیرون نمی‌آید که این پرچم افتاده را برخیزاند. عدم تداوم انتشار یک نشریهٔ علمی جا افتاده و پرخواننده به‌خودی خود ضایعه‌ای است و از نقطه‌نظر فرهنگی بی‌سنتی یا سست سنتی به حساب می‌آید.

۴. انجمن ریاضی ایران که یکی از قدیمیترین و پرسابقه‌ترین و فعالترین انجمنهای علمی ایران است و از تأسیس آن قریب ۱۸ سال می‌گذرد، سه نشریهٔ ریاضی و یک نشریهٔ خبری منتشر می‌کند.

«بولتن انجمن ریاضی ایران» که ارگان رسمی انجمن است و در سال ۱۳۵۲ نخستین شمارهٔ آن انتشار یافته است. به‌روایت یکی از دبیران سابق انجمن، بولتن سه‌دورهٔ متمایز را گذرانده است:

دورهٔ اول. بولتن به عنوان جایگاهی برای اخبار، مقالات فارسی و مقالات تحقیقی به‌زبان انگلیسی بوده است.

دورهٔ دوم. با تأسیس یک بولتن خبری به نام خبرنامه، بولتن به‌مقالات توصیفی فارسی و مقالات تحقیقی انگلیسی اختصاص داده شده است.

دورهٔ سوم. با انتشار یک نشریهٔ جدید، با نام فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی بولتن منحصراً به مقالات تحقیقی ریاضی اختصاص داده شده است.

تاکنون ۲۲ شمارهٔ بولتن در دوره‌های مختلف با چاپهای بد، متوسط، و خوب و در قطعهای مختلف منتشر شده است.

«گزارش کنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی ایران» که تاکنون ۱۴ شمارهٔ آن به‌ازای ۱۸ کنفرانس انتشار یافته است. آن را درواقع نمی‌توان یک نشریهٔ ریاضی به‌حساب آورد. درحقیقت مجموعه‌ای از مقالات است که در طول کنفرانسهای سالانه عرضه می‌شوند. هیچ کار ژورنالیستی در آن انجام نمی‌شود. این نشریه نیز در قطعهای متنوع و چاپهای گوناگون منتشر شده است.

به‌طور کلی، انجمن ریاضی ایران همیشه دست به گریبان مشکلات فراوان چاپی و مالی بوده است و به‌همین علت انتشارات انجمن غالباً از کیفیت خوب چاپ، کاغذ، و فرم برخوردار نبوده‌اند.

۵. مجلهٔ دیگری که باید ذکر شود، مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» است که از سال ۱۳۶۳ با نام جدید «آشنایی با ریاضیات» منتشر می‌شود. مجله‌ای است که مطالب آن در حد فاصل دبیرستان و دانشگاه و گاهی ترکیبی از این دومی باشد. بین ۲ تا ۴ هزار تیراژ دارد و به‌گفتهٔ صاحب امتیاز آن، ممکن است در نتیجهٔ گرانی کاغذ و مشکلات چاپ از انتشار باز ایستد.

۶. چند مجلهٔ دانشجویی از قبیل «الگوریتم»، «گویا و گنگ»، و مجلهٔ غیردانشجویی پرطمطراق و کم‌دوام «مجلهٔ ریاضی تهران» نیز در گذشته در آمدند و دیگر در نمی‌آیند. مجلات دانشجویی اصولاً از نتایج کارهای فوق برنامه هستند؛ قائم به‌فرد بوده و نمی‌توانند نهادی شوند. بنابراین روی این نوع مجلات نمی‌توان زیاد حساب کرد.

۷. مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» نشریه‌ای است در سطح پیش دانشگاهی و چون از طرف یک سازمان دولتی حمایت می‌شود، اصولاً باید به‌صورت مرتب و شایسته‌ای انتشار یابد.

۸. بالاخره جدیدترین نشریهٔ ریاضی «پیک ریاضی» است که با مطالب گوناگون و جذاب اما با چاپی نه‌چندان رضایت‌بخش و با تیراژی اندک (در حدود ۵۰۰ نسخه) از طرف دانشگاه صنعتی اصفهان منتشر

کتابخانه
خانه ریاضیات اصفهان
۱۳۷۷

جدول ۳

عنوان	تاریخ انتشار اولین شماره	مدت انتشار	فاصلهٔ انتشار	تعداد کل صفحات	تعداد شماره‌ها	ناشر	ملاحظات
حل‌المسائل ریاضی	۱۵ دی ۱۳۰۶	۳ ماه	۱۵ روز	۵۷	۷	ناصر، هورفر، ریاضی	اسم کوچك ناشران ذکر نشده است.
مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی	اوّل آبان ۱۳۰۹	۵ سال	۱۵ روز	۳۲۰	۱۲	غلامحسین مصاحب	این مجله بعد از انتشار شمارهٔ دهم و یازدهم دراوّل فروردین ۱۳۱۰ تعطیل شد و اولین شمارهٔ سال دوّم آن در ۱۳۱۴ منتشر شد و بعد از انتشار ۲ شماره برای همیشه تعطیل شد.
یکان	بهمن ۱۳۴۲	۱۴ سال	ماهانه	۶۹۹۰ + ۱۵۷۸ ویژه‌نامه		عبدالحسین مصحفی	در بهمن ۱۳۵۶ تعطیل شد.
گزارش کنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی ایران	۱۳۴۹	ادامه دارد	سالانه و نامنظم	۴۴۱۴	۱۳	انجمن ریاضی ایران	شمارهٔ ۱۰، مربوط به کنفرانس ۱۳۵۸ منتشر نشده است.
الگوریتم، مجلهٔ دانشجویان دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف	زمستان ۱۳۵۱	تا زمستان ۵۸	نامنظم	در حدود ۱۱۷۰	در حدود ۱۳	دانشگاه صنعتی شریف	
گویا و گنگ	فروردین ۱۳۵۲	یك سال	ذکر نشده است	۱۰۲	۲	گروه ریاضی دانشگاه تهران	
بولتن انجمن ریاضی ایران	بهمن ۱۳۵۲	ادامه دارد	نامنظم، فعلاً سالی یك شمارهٔ	۲۰۱۸	۲۱	انجمن ریاضی ایران	مقالات به زبان انگلیسی است.
مجلهٔ ریاضی تهران	بهار ۱۳۵۶	یك سال	۶ ماه یکبار	۲۰۴	۲	گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران	بعضی از مقالات به زبان انگلیسی است.
آشتی با ریاضیات	زمستان ۱۳۵۶	تا فروردین ۶۴	نامنظم، سالی ۱ یا ۴ یا ۶ شماره	۳۹۲۸	۳۲	تا دی ۱۳۵۹، انتشارات جانبی دانشگاه آزاد سپس تا ابتدای ۱۳۶۱، انتشارات جانبی مجتمع دانشگاهی ادبیات و علوم انسانی و بعد تا ابتدای ۱۳۶۴، پرویز شهریاری	این نشریه از ابتدای ۱۳۶۴ با نام آشنایی با ریاضیات منتشر شده است
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی	بهار ۱۳۶۱	ادامه دارد	۶ ماه یکبار	۷۱۵	۶	انجمن ریاضی ایران	آخرین شمارهٔ این مجله سال ۶۵ منتشر شده است.
رشد آموزش ریاضی	بهار ۱۳۶۳	ادامه دارد	سه ماه یکبار	۸۵۶	۱۴	نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی	
آشنایی با ریاضیات	فروردین ۱۳۶۴	ادامه دارد	دو ماه یکبار	۱۷۱۵	۱۷	پرویز شهریاری	این مجلهٔ ادامه مجلهٔ آشتی با ریاضیات است.
بیك ریاضی	بهار ۱۳۶۵	ادامه دارد	سه ماه یکبار	۴۵۶	۴	دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان	

می‌شود.

درخاتمهٔ ایـن بخش فهرستی ازنشریاتـی راکه گهگاه مقالاتی ریاضی، یا دربارهٔ ریاضی، منتشر کرده‌اند می‌آوریم.

۱. روزنامهٔ سازمان، ۲. ماهنامهٔ آموزش وپرورش، ۳. مجلهٔ فرهنگ ایران‌زمین، ۴. مجلهٔ گاهنامه، ۵. نامهٔ دانشوران، ۶. راهنمای زندگی، ۷. مهرگـان، ۸. کیهان فـرهنگی (قـدیم و جـدیـد)، ۹. دانشمند، ۱۰. نشریهٔ آستان قدس رضوی، ۱۱. مجلهٔ ایران و آمریکا، ۱۲. هدهد، ۱۳. سخن علمی، ۱۴. سنجش ادبی، ۱۵. نشر دانش، ۱۶. راهنمای کتاب، ۱۷. کتاب هفته، ۱۸. پیام، ۱۹. مکتب تشیـع، ۲۰. معارف اسلامی، ۲۱. جاویدان خرد (انجمن حکمت و فلسفه)، ۲۲. مجلهٔ فضا، ۲۳. فرهنگ خـراسان، ۲۴. نشریهٔ دانشکدهٔ عـلوم (دانشگاه تهران)، ۲۵. نشریهٔ دانشکدهٔ فنی (دانشگاه تهران)، ۲۶. خبرنـامهٔ انجمن ریاضی ایران، ۲۷. آینده، ۲۸. علم و زندگـی، ۲۹. رازی، ۳۰. دانشگاه انقلاب، ۳۱. روزنامهٔ برق، ۳۲. روزنامهٔ علمی، ۳۳. روزنامهٔ دانش، ۳۴. مجلهٔ سودمند، ۳۵. اطلاعات علمی.

۳

اکنون وقت آن است که ازحرفهای بالاچند نتیجهٔ مهم استنتاج کنیم.

۱۲۴ سالی کـه از انتشار اولین نشریهٔ علمی به زبان فارسی می‌گذرد با یکـی از پربار ترین و افتخـار آمیزترین دورانهـای تمام علوم و بالاخص ریاضیات مقارن بـوده است. در این مـدت، ریاضیات دستخوش تحولات عمده‌ای شده و انبوه عظیمی از حقایق، مفاهیم، و روشهای جدید برپیکر کهن وهزاران سالهٔ ریاضیات افزوده شده است. بدیهی‌است که‌برای انتقال این‌حجم ازیافته‌ها ودستاوردها، رساله‌ها ونشریات زیادی مورد نیازبوده است. لکن همچنان که‌جدول ۳ نشان می‌دهدکل نشریات ریاضی ادواری دراین فاصلهٔ زمانی فقط درحدود ۲۵۰۰۰ صفحـه را دربر داشته است. با درنظر گرفتن اینکه تقریباً نصف ایـن صفحات را مسائل و حل آنها دربرمی‌گیرد بدیهی است جای زیادی برای نشرمفاهیم باقی نمی‌ماند.

نشریات ادواری واقعاً می‌توانند درایجاد فرهنگ وسنت علمی ونشرحقایق بسیارمؤثر واقع شوند. مثال بارز آن «مجلهٔ فیزیك» از انتشارات‌مرکز نشردانشگاهی است که‌در گسترش‌توجه وعلاقه به‌دانش فیزیك ونشرایده‌ها و پیشرفتهای آن نقش مهمی ایفاکرده است. نشریه زبان علمی‌را گسترش‌می‌دهد؛ ویراستار تربیت می‌کند؛ حقایق را پخش می‌کند؛ خوانندهٔ مصمم ومعتقد تربیت مـی‌کند؛ استعدادهای خوب را کشف می‌کند؛ نیروهای منفرد را همسو می‌سازد؛ و اثرات مهمی در گسترش و تعمیق یك دیسیپلین علمی به‌جا می‌گذارد.

بحث‌بالاوبررسیهای‌دیگران [۱ و ۳] نشان‌می‌دهندکه بامشکلات فراوانی که در راه انتشارنشریات علمی وجود دارد، افراد یا انجمنها به دشواری می‌توانندنشریه‌ای‌پایداروموفق منتشرکنند. ناشرخصوصی یا نهاد غیردولتـی، درنتیجهٔ انبوه مشکلات، ازقـبیل کمبود امکانات حرفه‌ای برای تهیه و ویرایش مطالب ومسائل کاغذ وچاپ، معمولاً توانایی انتشارمرتب یك نشریـه را به‌صورتی‌که آن نشریه روال پا-برجایی در فرم و محتوا پیدا کند، ندارد وگاه مجبور بـه تعطیل آن می‌شود.

با درنظر گرفتن وضع نامساعد نشریات ریاضی درحال حاضر، ونیاز فراوان به اشاعهٔ فرهنگ ریاضی پیشنهاد می‌کنیم که:

۱. دولت ازطریق مؤسسات انتشاراتی تحت حمایت خودمانند مرکزنشردانشگاهی و سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش، و مؤسسات مشابـه. نشریات ادواری در زمینهٔ ریاضی (و بـه طورکلی، علوم پایه) را قویا حمایت کند.

۲. نشریات انجمنهای علمی غیردولتی از طریق ارائهٔ امکانات وکمکهای مالی ازطرف دولت حمایت شوند. به‌ویژه، بولتن انجمن ریاضی ایران به عنوان تنها نشریهٔ تحقیقاتی ریاضی در ایران، مورد حمایت همه‌جانبه قرارگیرد ومشکلات مالی وچاپی آن مرتفع شود.

اینك به‌پایان مقاله رسیده‌ایم و حرفی را که همیشه باید بزنیم می‌زنیم: ریاضیات بنیادیترین همهٔ علوم است واساسیترین نقش را در گسترش‌سایرعلوم، ونیزتکنولوژی، ایفامی‌کند. ریاضیات‌هنرمندانه‌ترین علمهاست؛ نابترین علمهاست؛ مجردترین علمهاست؛ تجریدی بـودن ریاضیات فاصله‌ای بین این علم وادراکات شهودی انسان عامی‌ایجاد می‌کند که یکی از موجبات انزوای ریاضیات در سطح جامعه است؛ حتی گاهی طراحان نظام آمـوزشی و تحقیقاتی نیز نسبت بـه نقش ضروری ریاضیات در هرنوع پیشرفت علمی و صنعتی تفاهم کافـی ندارند. حال آنکه یکی ازشاخصهای‌اصلی پیشرفتگی‌علم درهرکشور، میزان توجه به تحقیق وآموزش و اشاعهٔ ریاضی است. متأسفانـه در میهن ما علی‌رغم میل و اشتیاق جوانان به‌ریاضیات، فیزیك، و فلسفه، و استعدادهای فراوانی که در این زمینه‌ها وجود دارد، جاذبه‌هـای شغلی و رفاهی کافی برای تعقیب جدی این رشته‌ها موجود نیست.

سیاست علمی دولت باید شامل برنامه‌ریزی و سرمایه‌گذاری کوتاه مدت و درازمدت بنیادی در زمینهٔ حمایت و گسترش علوم‌پایه، بالاخص ریـاضیات، باشد تا این علوم ازانزوا بـه درآیند و رشد و شکوفایی یابند.

پیشبرد علوم پایه نیازمند یك‌بازنگری عمیق واساسی و ایجاد نهضتی درسیاست گذاری علمی کشوراست. نشریات‌ادواری می‌توانند محملی برای برپایی چنین نهضتی باشند.

آنچه از این بررسی مشهود است، «جای خالی ریـاضیات» است.

منابع

۱. پورجوادی، نصرالله، و دیـگران. گفتگو دربارهٔ مجله‌های علمی، نشر دانش، سال پنجم، ۷ (۱۳۶۴)، ص ۲-۱۴.

۲. ضرغامی، مهدی. بررسی وضع علوم در ایران، انتشارات سازمان بازرسی‌شاهنشاهی‌آموزش‌عالی‌وپژوهش‌علمی، شمارهٔ ۶۶ (۱۳۵۴).

۳. محسنیان‌راد، مهدی وجعفری، سعیدمحمد. مشکلات روزنامه‌نگاری علمی نویسی درجهان سوم ونگاهی به ۲۱ سال تاریخ مطبوعات علمی درایران، اطلاعات، ۲۹ شهریور ۱۳۶۶.

۴. مصاحب، غلامحسین، مقصود و وظیفهٔ ما چیست؟!، مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی، شمارهٔ ۱ (۱۳۵۹)، ۱-۳.

5. Davidson Frame J., Narin F., and Carpenter P., "The distribution of world science", *Social Studies of Science*, 7 (1977) 501-510.

6. Holmay K., "Publicizing mathematics", *Notices of Amer. Math. Soc.*(2)33 (1984)310.

بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند*

ویکتور هارنیک

۱. آنالیز لایب‌نیتس

حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) را لایب‌نیتس و نیوتن، به‌طور مستقل، در حدود سالهای ۱۶۷۰ میلادی کشف کردند. کار آنها که بر پایهٔ کارهای پیشینیان بلافصلشان و همچنین کار ریاضیدانان پیشتر از آنها (که تاریخچهٔ آن دست‌کم تا زمان ارشمیدس به‌عقب بر می‌گردد)، قرار داشت، اثر عظیمی بـه جا گـذاشت. واژگان و نمادهای لایب‌نیتس باقی ماندند، و هنوز هم به‌طور گسترده‌ای به‌کار برده می‌شوند. رهیافت او به اجمال چنین بود:

لایب‌نیتس می‌خواست جنبه‌های «موضعی» یا «لحظه‌ای» رفتار توابع را، یعنی پدیده‌هایی را که در تنها یك نقطه از مکان یـا زمان اتفاق می‌افتند، تحلیل کند. به این منظور او گـونهٔ جدیدی از اعداد، یعنی اعداد «بینهایت کوچك» را اختراع کرد ــ اعدادی که از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر بـودند و با این حال باز مخالف صفر فرض می‌شدند. او این اعداد را بینهایت کوچکها (ی ناصفر) نامید. لایب‌نیتس به‌یاری ایـن اعداد مشتق تـابعی چـون $f(x)$ را چنین تعریف کرد

$$f'(x)=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

که در آن dx بینهایت کوچك ناصفری است که تغییری بسیار اندك، یعنی تغییری بینهایت کوچك را در x نشان می‌دهد. (البته dx با Δx که معمولاً برای نمایش یك نمو متناهی در x به‌کار می‌رود، به‌کلی فرق می‌کند. خود لایب‌نیتس نماد «$f'(x)$» را بـه‌کار نبرد. این نماد را بعدها لاگرانژ ابداع کرد.)

لایب‌نیتس توصیف پرآب‌وتابی از بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهایی که در مقایسه با اعداد حقیقی مثبت معمولی (با آن گونه که امروزه آنها را می‌نامند، اعداد حقیقی مثبت استاندارد)، قابل اغماض هستند، به‌دست داد ــ تقریباً به‌همان معنایی که مثلاً قطر یك توپ در مقایسه بـا قطر زمین، یـا قطر زمین در قیاس بـا قطر کیهان، قابل اغماض است.

برای آنکه بتوان بـا ایـن اعداد جدید کار کرد، لایب‌نیتس اصلی بسیار کلی، اما نه چندان روشن، به‌نام «اصل پیوستگی» وضع کرد. آنچه این اصل حکم می‌کرد، به زبان ساده تقریباً چنین بود که بینهایت کوچکها در واقع بـه‌طور خارق‌العاده‌ای کوچك هستند، اما برکنار از این ویژگیشان کاملاً همانند اعداد حقیقی معمولی رفتار می‌کنند. تمثیلی که ذکر کردیم، این نظر را تأیید می‌کند. درحقیقت اعدادی که برای توصیف اشیای کوچك چون توپها به‌کار می‌روند، دقیقاً از همان قوانینی پیروی می‌کنند که بر اعداد بزرگ منتسب به قطـر سیارات باختی اعداد بزرگتر که ابعاد کیهان را بیان می‌کنند، حکمفرما هستند. باید تصدیق کرد که گرچه ایـن اصل مبهم است، اما لایب‌نیتس آن را با مهارتی تمام به‌کار می‌برد.

۲. سرنوشت بینهایت کوچکها

از همان آغاز، احساسات ناخوشایندی دربارهٔ بینهایت کوچکها پدید آمد و نضج گرفت. خود لایب‌نیتس آنها را مولود «افسانه‌ای به‌درد بخور» می‌نامید. نیوتن خیلی زود آنها را رها کرد و ترجیح داد مشتق را برحسب «سرعت لحظه‌ای» (که به هیچ‌وجه مفهوم روشنتری نیست) تعریف کند. برعکس، هوپیتال که نخستین درسنامهٔ حسابان را نوشت، از آن دو با حرارت‌تر بود و واقعاً بینهایت کوچکها را باور داشت. اما همروزگارانش در این شوروشوق وشیفتگی با او هم رأی نشدند. در واقـع اعداد لایب‌نیتس در معرض انتقادات بسیار خشنی قـرار گرفتند. نامدارترین و بی‌پرواتریـن مخالف بینهایت کوچکها اسقف برکلی بود که آنها را در اثر خود به سال ۱۷۲۳، آماج انتقادات بیرحمانه‌ای قرارداد. ایرادات او عمدتاً در این راستاها بود:

(الف) هیچ بینهایت کوچك ناصفری نمی‌توانـد وجود داشته باشد، زیرا هرعددی که قدرمطلقش از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر باشد، باید برابر صفر شود.

(ب) اگـر $f(x)=x^2$، آنـگاه $f'(x)=2x$. حـال آنـکه $[f(x+dx)-f(x)]/dx=2x+dx$. چون این دو عبارت باید باهم برابر باشند، پس $2x+dx=2x$، یعنی $dx=0$، که با فرض ناصفر بودن dx متناقض است.

بینهایت کوچکها علی‌رغم ابهام منطقیشان، بـا موفقیت روزافزونی به‌کار برده شدند. پاره‌ای از ریاضیدانان برجسته نه تنها آنها را به‌کار می‌بردند، بلکه بیش از این، سخت مـی‌کوشیدند تا پایه‌ای منطقی برایشان فراهم کنند. در ایـن راستا ما به نامهای لاگرانژ، دالامبر، اولرلسانو و بیش از همه کوشی بـرمی‌خوریم. سهم کوشی در این تلاشها، داستان بس جالب و پیچیده‌ای دارد. او با بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهای متغیری که به صفر می‌گرایند، بـرخورد

کرد. این برخورد حد را به صورت مفهومی بنیادی در آورد. (باید خاطر نشان کرد که توصیف کوشی ازحد، دقیقاً با تعریف آشنا و نوین اپسیلون-دلتایی یکی نیست.) بعدها آشکار شد که تلاش کوشی برای جلب اعتماد بیشتر به بینهایت کوچکها چندان قرین موفقیت نبوده است؛ در واقع کوششهای او تأثیری کاملاً وارونه برجای نهاد. این تأثیر ناخوشایند را می‌توان به‌خوبی از خلال ماجرایی که ذکر می‌کنیم، احساس کرد. کوشی در سال ۱۸۲۱ بینهایت کوچکها را درقالب قضیه‌ای (با این مضمون که مجموع یک‌سری نقطه‌به‌نقطه همگرا ازتوابع پیوسته، یقیناً تابعی است پیوسته) به‌کار برده بود. بسیاری کسان مدعی شدند که قضیه نادرست است، اما کوشی سرسختانه از آن دفاع می‌کرد. مباحثه در این مورد تا پایان زندگانی او ادامه یافت. در ۱۸۵۳ چهار سال پیش از مرگش، در واکنش نسبت به مثال نافضی که آبل به سال ۱۸۲۶ ارائه کرده بود، مقاله‌ای منتشر کرد که در آن ضمن پافشاری بردرستی قضیه، برخی توضیحات روشنگرانه آمده بود. ظاهراً ریاضیدانان نمی‌توانستند تصویر ذهنی خاصی را که از بینهایت کوچکها داشتند، به همدیگر انتقال دهند. (خواننده علاقه‌مند می‌تواند در این باره به [۳] یا [۴] رجوع کند؛ با مطالعهٔ این مراجع، او در خواهد یافت که شك بین اینکه آیا کوشی واقعا اشتباه‌می‌کرده است یا آنکه نظرش را بد می‌فهمیده‌اند، هنوز برطرف نشده است.)

نتیجهٔ تمام این وقایع به‌غایت شگفت‌آور است. در سال ۱۸۷۲ وایرشتراس مفهوم حد را بی‌آنکه حتی نامی از بینهایت کوچکها به‌میان آورد، تعریف کرد. گرچه کمی تناقض‌آمیز بدنظر می‌آید، اما در واقع این توصیف کوشی از حد بود که زمینه‌را برای تعریف وایرشتراس، تعریفی که امروزه‌قبول عام یافته‌است، آماده کرد. پس از آن وایرشتراس مفهوم حدرا برای تعریف دیگر مفاهیم اساسی- پیوستگی و مشتق- به‌کاربرد. پیامد ناگزیر این تحولات این بود که بینهایت کوچکها به‌عنوان‌ساخته‌های منطقاً پذیرفتنی، به‌طور کامل به‌کنار نهاده شوند.

مرحلهٔ مهم دیگر در سرگذشت بینهایت کوچکها، در ۱۹۶۰ یعنی تقریباً ۳۰۰ سال پس از ابداع آنها توسط لایب‌نیتس، به‌وقوع پیوست. در این سال آبراهام رابینسون[1]، «آنالیز نااستاندارد» خود را که در کنار سایر ثمرات، همچنین توجیه منطقی بایسته‌ای هم برای بینهایت کوچکها فراهم می‌آورد، منتشر کرد. کاری که سرانجام از پس سالیان مدید، وجود این اعداد را «موجه» جلوه داد.

۳. کاربرد بینهایت کوچکها در آموزش و پژوهش

استفاده از بینهایت کوچکها هرگز کاملاً وانهاده نشد. حتی تا امروز هم فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی (کسانی که البته هرگز رهیافت نوین رابینسون را نیاموخته‌اند)، به‌طور گسترده‌ای آنها را به‌کار می‌برند. حدود سی سال پیش در بسیاری از دانشکده‌ها هنوز هم از بینهایت کوچکها برای آموزش حسابان به‌دانشجویان مهندسی استفاده می‌شد. حتی امروزه هم استادان فیزیك از «جزء سطح dA» یا «جزء طول dl» (از مثلاً یك رسانای الکتریکی) و مانند اینها سخن می‌گویند. شاهد خوبی برای پذیرش ناخودآگاه بینهایت کوچکها در ضمیر ریاضیدانان، این است که حتی در کتابی چون حساب دیفرانسیل و انتگرال لانداو- نمونهٔ اعلایی ازدقت ریاضیات قرن بیستم- از نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ استفاده می‌شود. ظاهراً این نماد، این دیدگاه را باز می‌تاباند که حد «آخرین مقداری» است که f «در لحظه‌ای که x به a می‌رسد» اختیار می‌کند.

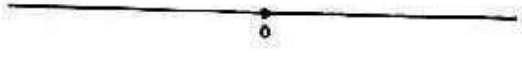
تنها در سالهای اخیر شاهد پرورش نسل کاملی از معلمان ریاضیات بوده‌ایم که حتی نامی هم از بینهایت کوچکها نشنیده‌اند. گرایش غالب در دانشگاهها وحتی دردبیرستانها این‌است که ازطرح مفاهیم«نادقیقی» چون بینهایت کوچکها پرهیز شود. طبیعی است‌انتظار داشته‌باشیم که باکشف رابینسون، بینهایت کوچکها به‌مدارس باز گردند. اما بیشتر ریاضیدانها می‌پندارند که کار رابینسون چنان پیچیده وفنی است که نمی‌توان به‌هیچ‌عنوانی آن‌را در آموزش نوآموزان ریاضیات عالی به‌کاربرد

کایزلر[1]، ریاضیدان برجستهٔ معاصر، ازکسانی است که نظری خلاف این دارند. در ۱۹۷۶ کایزلر درسنامه‌ای در حساب بینهایت کوچکها [۱]، به‌پیوست یك‌راهنمای مدرسین [۲] برای آن منتشر کرد. او در این کتاب نشان‌داد که چگونه می‌توان بخش اساسی کشف رابینسون را به‌زبانی ساده بیان‌کرد وازآن درآموزش‌حسابان بهره جست. این‌کتاب در چند دانشگاه به‌طور آزمایشی تدریس شده است. (برای آگاهی از نتایج این‌کار، به گزارش [۵] مراجعه کنید.) وجود نوشتار حاضر، مرهون درسنامهٔ کایزلر است.

۴. چگونه ازبینهایت کوچکها در دبیرستان استفاده کنیم

رهیافت مبتنی بربینهایت کوچکها به‌حسابان‌را باید در جایی به‌کاربرد که موضوع برای نخستین بار تدریس می‌شود، یعنی در دبیرستان. این آموزش مقدماتی را می‌توان با بهره‌گیری از روش کایزلر در سطحی بسیار شهودی انجام‌داد. البته برای عملی‌کردن این اندیشه، هنوزکارهای بسیار دیگری باید انجام شود، کارهایی از قبیل نوشتن کتابهای مقدماتیتر مناسب و آموزش دبیران. من می‌خواهم در اینجا به‌طور محدود روش آغاز آموزش بینهایت کوچکها درکلاس درس را مطرح کنم.

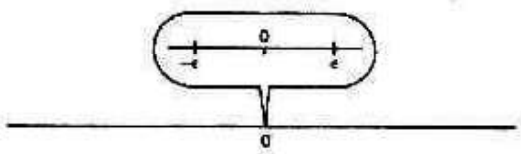
دبیر باید ابتدا این‌نکته را یادآوری کند که مفهوم عدد بارهاو بارها در مدرسه، یا معرفی کسرها، اعداد منفی واعداد گنگ (که این آخری برای سنجش نسبت درازای پاره‌خطها لازم است)، گسترش داده شده است. پس ازآن او می‌تواند نوع جدیدتری از اعداد ــ یعنی بینهایت کوچکها(ی ناصفر) که مخالف صفرند ولی از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکترند ــ را معرفی کند. آنها را می‌توان با استفاده ازیك ترفندکایزلر، به‌شیوه‌ای بس ساده و ملموس تصویرکرد. فرض کنیم میکروسکوپی را برمبدأ، یعنی نقطهٔ ۰ روی محور اعداد، قرارداده باشیم. در حالی که چشم غیرمسلح تصویری ماکروسکوپی مانند آنکه در شکل ۱ آمده می‌بیند، آنچه ازنقطهٔ ۰ تنها زیر میکروسکوپ دیده می‌شود چیزی است به‌کلی متفاوت.



شکل ۱

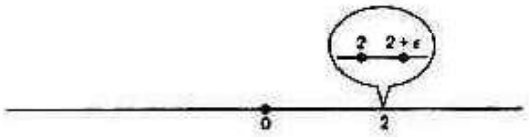
در مرکز یك «هستهٔ درخشان» خواهیم دید که آن‌را با صفر «واقعی» یکی می‌گیریم. در هردوطرف این هسته بسیاری اعداد دیگر به‌چشم خواهند خورد که، باز هم تکرار می‌کنیم، برای چشم غیرمسلح همهٔ آنها برنقطهٔ صفر منطبق‌اند، اما زیر میکروسکوپ ازآن متمایزند (شکل۲). همهٔ آن‌اعدادی که زیر میکروسکوپ بر گرد نقطهٔ ۰ دیده می‌شوند، بینهایت کوچك هستند؛ خود (یعنی «هستهٔ درخشان»)

1. Abraham Robinson



شکل ۲

نیز یک بینهایت کوچک است و بقیهٔ اعداد بینهایت کوچکهای ناصفر هستند. همان گونه که از تصویر میکروسکوپی پیداست، آنها دقیقاً همان رفتار اعداد ماکروسکوپی را دارند. برخی از آنها مثبت و برخی منفی هستند. آنها را می‌توان باهم جمع و درهم ضرب کرد، و هریک وارونی (جمعی) دارد. پس اگر ε یک بینهایت کوچک باشد، $2\varepsilon = \varepsilon+\varepsilon$، ε^2، و $-\varepsilon$ نیز همگی چنین خواهند بود.[1] حتی می‌توان هر بینهایت کوچک ناصفری را به یک عدد معمولی چون ۲ افزود و عددی چون $2+\varepsilon$ به‌دست آورد. اینها هم گونهٔ جدیدی از اعداد هستند، هرچند دیگر بینهایت کوچک نیستند. اینها کجایند؟ چگونه می‌توان آنها را دید؟ حدس‌زدن پاسخ این پرسش چندان دشوار نیست. باچشم غیرمسلح، $2+\varepsilon$ را منطبق بر ۲ می‌بینیم، اما با میکروسکوپی که بر ۲ متمرکز شده باشد می‌توان آن‌را متمایز از ۲ مشاهده کرد (شکل ۳).



شکل ۳

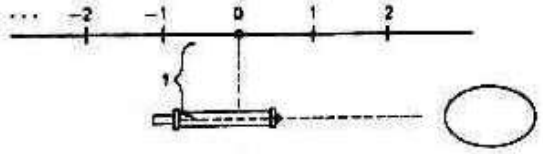
بیایید اعداد معمولی «ماکروسکوپی» را اعداد استاندهٔ بنامیم (اینها همان اعداد حقیقی متعارف هستند). اغلب به‌جای «اعداد استانده»، آنها را «اعداد حقیقی استانده» خواهیم خواند.

پس به‌این نتیجه می‌رسیم که هرعدد استانده چون a با بینهایت عدد از نوع جدید احاطه شده است. همهٔ این اعداد از دید ماکروسکوپی بر a منطبق‌اند، اما زیرمیکروسکوپ از آن متمایزند.

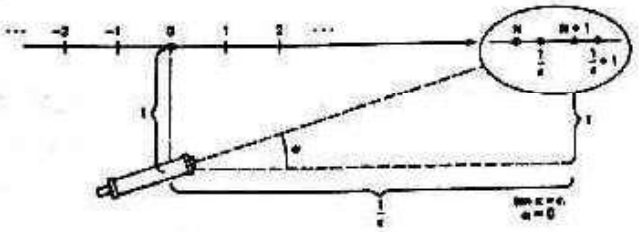
باز عدد استاندهٔ ۲ و عدد جدید ناستاندهٔ $2+\varepsilon$ را، که در آن ε بینهایت کوچک ناصفری است، در نظر می‌گیریم. به وضوح $2\neq 2+\varepsilon$، اما این نامساوی تنها از دیدگاه میکروسکوپی برقرار است، حال آنکه از دیدگاه ماکروسکوپی ۲ و $2+\varepsilon$ مساوی هستند. پس دونوع تساوی (یا به‌عبارت دیگر، دو رابطهٔ تساوی متمایز) داریم: تساوی میکروسکوپی، یعنی همانی مطلق که آن را با نماد «$=$» نمایش می‌دهیم؛ و تساوی ماکروسکوپی که بین اعدادی برقرار است که با چشم غیرمسلح برهم منطبق دیده می‌شوند. ما این تساوی نوع اخیر را با «$\approx$» (نمادگذاری رابینسون) نشان خواهیم داد. پس $2\approx 2+\varepsilon$ (بخوانید: $2+\varepsilon$ نزدیک به ۲ است)، اما $2\neq 2+\varepsilon$.

ε بینهایت کوچک است اگر و تنها اگر $\varepsilon\approx 0$. این تساوی ماکروسکوپی به هیچ وجه نامساوی میکروسکوپی $\varepsilon\neq 0$ را نقض نمی‌کند. خود ۰ تنها بینهایت کوچک استانده است. به‌طور کلی، $a\approx b$ (a نزدیک به b است)، اگر و تنها اگر $a-b$ بینهایت کوچک باشد. پس به‌ازای اعداد استاندهٔ a و b، رابطهٔ $a\approx b$ هم‌ارز $a=b$ است. اما به‌ازای هر a و b دلخواه، ممکن است $a\approx b$ و درعین‌حال $a\neq b$. استفاده‌ازاین‌دومفهوم تساوی انتقادات اسقف برکلی رابرطرف می‌کند. دراین‌باره باید خاطرنشان کرد که لایب‌نیتس و هوییتال هم آشکارا از تمایز این دو گونه تساوی نیک آگاه بودند، اما هرگز این تمایز را به‌گونه‌ای نمادی مشخص نکردند.

اگر ε بینهایت کوچک مثبتی باشد، می‌توان از وارون (ضربی) آن $1/\varepsilon$ سخن گفت. این وارون «عدد» مثبتی خواهد بود بزرگتر از هرعدد حقیقی استانده. چگونه می‌توان آن را دید؟ خوب، معلوم است دیگر، بایک تلسکوپ! تلسکوپی را تصور کنید که موازی محور اعداد و به فاصلهٔ یک واحد از آن قرار گرفته باشد. دراین صورت چیزی درمیدان دید آن قرار نخواهد داشت (شکل ۴). حال تلسکوپ را به‌اندازهٔ یک‌زاویهٔ بینهایت کوچک ناصفر α به‌طرف محور بچرخانیم. گرچه تلسکوپ و محور اعداد هنوز «از دید ماکروسکوپی» موازی به‌نظر می‌رسند، «از دید میکروسکوپی» چنین نیستند و اگر زاویهٔ α به‌گونهٔ مناسب انتخاب شده باشد، تلسکوپ پاره‌خطی به مرکز $1/\varepsilon$ را نشان خواهد داد (شکل ۵). واضح است که انتخاب مناسب α، یعنی انتخاب αیی که به‌ازای آن رابطهٔ $\tan\alpha=\varepsilon$ برقرار باشد.



شکل ۴



شکل ۵

اعدادی را که با تلسکوپ می‌توان دید همهٔ اعداد مثبت و بینهایت بزرگ ناستانده هستند، اما از دیگر جنبه‌ها قطعه خطی که دیده می‌شود هیچ تفاوتی با بقیه ندارد. پس $1/\varepsilon$ باید جایی بین دو عدد صحیح بینهایت بزرگ و نااستانده N و $N+1$ باشد (البته ممکن است $1/\varepsilon=N$).

اعداد استانده و ناستانده باهم مجموعهٔ اعداد ابرحقیقی را تشکیل می‌دهند. آنها را می‌توان به‌دو دستهٔ کلی تقسیم کرد:

---

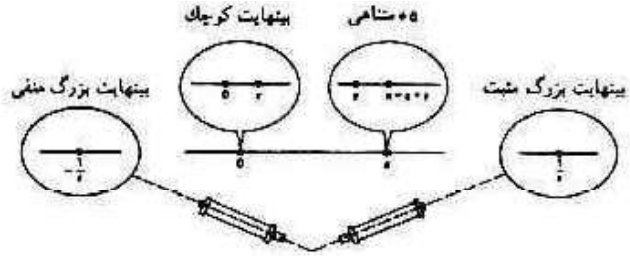
۱. این‌گونه توصیف بینهایت کوچکها بسیار جذاب است، زیرا بر پایهٔ مفاهیمی بنا شده است که از جهان فیزیکی آشنا برای دانش‌آموز قرن بیستم وام‌گرفته شده‌اند. اندیشهٔ اینکه آنچه در نگاه اول نقطهٔ واحدی می‌نماید، وقتی که ازنزدیک و با ابزار دقیقتری به‌آن‌نگریسته شود، ممکن است ساختار پیچیده‌ای داشته‌باشد، دیگر امروزه نباید هیچکس را به‌شگفتی وادارد. این‌را هم بیفزاییم که استفاده از مفاهیم فیزیکی در آموزش مفاهیم ریاضی دامنهٔ گسترده‌ای دارد. مثلا توصیف یک‌خط راست به‌عنوان شکل یک‌ریسمان کشیده، مقایسهٔ نقطه‌ها با دانه‌های شن، یا یکی انگاشتن اعداد با نقطه‌های روی‌خط حقیقی، ویا یاری جستن از مفهوم ارتفاع یا دما برای توضیح مفهوم اعداد منفی و چیزهایی از این قبیل را می‌توان ذکر کرد.

(الف) ابرحقیقیهای متناهی: x یك ابرحقیقی متناهی است اگر و تنها اگر به‌ازای عدد حقیقی استانده مثبتی چون M، داشته باشیم $|x|<M$. پس x جایی درفاصلهٔ M و $-M$ روی خط اعداد حقیقی‌است. این‌واقعیت اساسی که کایزلر آن‌را «اصل موضوع بخش استاندهٔ» نامید، به‌بیان دقیق چنین است:

هر عدد ابرحقیقی متناهی x، نزدیك یك عدد حقیقی استاندهٔ a است.

واضح است که x نمی‌تواند نزدیك دوعدد حقیقی استاندهٔ متمایز باشد، عدد استاندهٔ یگانه‌ای چون a که $x\approx a$؛ بخش استاندهٔ x، $\mathrm{st}(x)$، نامیده می‌شود. پس به‌ازای ابرحقیقیهای متناهی x و y، $x\approx y$ اگر و تنها اگر $\mathrm{st}(x)=\mathrm{st}(y)$ و x بینهایت کوچك است اگر و تنها اگر $\mathrm{st}(x)=0$.

(ب) ابرحقیقیهای نامتناهی که می‌توانند مثبت یا منفی باشند، شکل ۶ گونه‌های مختلف اعداد ابرحقیقی را نمایش می‌دهد.



شکل ۶

هدف بعدی، آشنا کردن دانش‌آموز با اعداد ابرحقیقی از طریق واداشتن او به انجام عملهای مشخص برروی آنهاست. کتاب کایزلر بویژه از این لحاظ بس سودمند است، چون تمرینهای متنوع بسیاری دارد.

نخست باید چند قاعدهٔ محاسبه‌ای ذکر شود:

(الف) بینهایت کوچك = { بینهایت کوچك + بینهایت کوچك ؛ ابرحقیقی متناهی × بینهایت کوچك }

(ب) بینهایت بزرگ = { بینهایت بزرگ + بینهایت بزرگ (هر دو مثبت یا هر دو منفی) ؛ (۰ ≠ متناهی) × بینهایت بزرگ }

(پ) متناهی = متناهی + متناهی

$(0\neq \text{متناهی}) = (0\neq \text{متناهی}) \times (0\neq \text{متناهی})$

(ت) $\text{بینهایت بزرگ} = \dfrac{1}{\text{بینهایت کوچك ناصفر}}$

$\text{بینهایت کوچك ناصفر} = \dfrac{1}{\text{بینهایت بزرگ}}$

$0\neq \text{متناهی} = \dfrac{1}{0\neq \text{متناهی}}$

توجه کنید: هیچ قاعده‌ای برای

$$\frac{\text{بینهایت کوچك}}{\text{بینهایت کوچك}},$$

بینهایت بزرگ × بینهایت کوچك ناصفر

یا

بینهایت بزرگ − بینهایت بزرگ

(که هر دو مثبت یا هر دو منفی) وجود ندارد. زیرا مثلاً اگر $\varepsilon\approx 0$، $\varepsilon\neq 0$ آنگاه $\varepsilon/\varepsilon^2$، $\varepsilon/\varepsilon^3$ و $\varepsilon/\varepsilon^4$، همگی به‌صورت $\frac{\text{بینهایت کوچك}}{\text{بینهایت کوچك}}$ هستند، اما به‌ترتیب بینهایت کوچك، $0\neq$ متناهی، و بینهایت بزرگ هستند. از سوی دیگر $(0=0\times$ بینهایت بزرگ) و $1/0$ تعریف نمی‌شود.

حال دوتمرین حل کنیم.

تمرین اول: با فرض $\varepsilon,\delta\approx 0$، بخش استاندهٔ $(3+\varepsilon)/(2+\delta)$ را پیدا کنید.

حل: حدس می‌زنیم که $(3+\varepsilon)/(2+\delta)\approx 3/2$، و به‌سادگی دیده می‌شود که تفاضل

$$\frac{3+\varepsilon}{2+\delta}-\frac{3}{2}=\frac{2\varepsilon-3\delta}{2(2+\delta)}=(2\varepsilon-3\delta)\cdot\frac{1}{2(2+\delta)}$$

بنا به قواعدی که ذکر کردیم، بینهایت کوچك است.

نکته: این تمرین حالت خاصی‌است ازیك اصل کلی حاکی از اینکه اگر $a'\approx a$ و $b'\approx b$ (a و b متناهی هستند)، آنگاه

$$a'+b'\approx a+b, \qquad (1)$$

$$a'b'\approx ab, \qquad (2)$$

$$\frac{a'}{b'}\approx\frac{a}{b}\ (b\neq 0 \text{ با فرض}). \qquad (3)$$

برای تحقیق درستی این اصل کافی است قرار دهیم $a'=a+\varepsilon$ و $b'=b+\delta$ و همانند مثال بالا عمل کنیم.

تمرین دوم: (دشوار). اگر $x\approx 1$ اما $x\neq 1$، بخش استاندهٔ $(x^2-1)/(x^2+x-2)$ چیست؟

حل: دانش‌آموزکار آزموده بلافاصله به‌این نکته توجه خواهد کرد که اگر $x\approx 1$، آنگاه

$$x^2-1\approx 1^2-1=0,$$

$$x^2+x-2\approx 1^2+1-2=0,$$

و از این رو با عبارتی به‌صورت $\frac{\text{بینهایت کوچك}}{\text{بینهایت کوچك}}$ سروکار دارد؛ او تصدیق خواهدکرد که این تمرین مشکل است. (البته این امکان هم وجوددارد که دانش‌آموزحتی متوجه بعضی ازدشواریهای این تمرین نشود!) یك راه حل طبیعی این است که قرار دهیم $x=1+\varepsilon$، که $\varepsilon\approx 0$، وعبارات زیر را محاسبه کنیم:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(1+\varepsilon)^2-1}{(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)-2}=\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{3\varepsilon+\varepsilon^2}$$
$$=\frac{2+\varepsilon}{3+\varepsilon}\approx\frac{2}{3}$$

یك راه حل هوشندانه‌تر توجه به تساویهای زیر است

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}\approx\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

تمرین دوم از لحاظی به‌یك تمرین معمول در حسابان می‌ماند: $\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x^2+x-1)$ را بیابید.» درواقع نتیجهٔ این تمرین را می‌توان چنین هم بیان کرد، اگر قراردهیم

$$f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x^2+x-2)}$$

آنگاه نشان داده‌ایم که هرگاه $x\approx 1$ ولی $x\neq 1$، خواهیم داشت $f(x)\approx 2/3$. به عبارت دیگر هرگاه x نزدیك ۱، ولی مخالف آن باشد، $f(x)$ نزدیك $2/3$ است. پس ما به‌زبان بینهایت کوچکها حکم $\lim_{x\to 1} f(x)=2/3$ را بیان کرده‌ایم.

چگونه می‌توان مفهوم حد را برای یك تابع دلخواه $f(x)$ تعریف کرد؟ طبیعی است که تعریف زیر به‌نظر برسد:

(*) می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x)=l$ درصورتی که وقتی مقدار x نزدیك به a ومخالف آن باشد، مقدار $f(x)$ نزدیك به l باشد.

باید به یاد آورد که تابع f، یك تابع حقیقی استانده فرض می‌شود، یعنی تابعی که دامنهٔ تعریفش، D، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی استانده است و $f(x)$ (به‌ازای $x\in D$) نیز استانده است. با این‌وجود درتعریف (*)، x می‌تواند مقادیر ابرحقیقی نااستانده را هم بگیرد! پس باید فرض کنیم که $f(x)$ برای (دست کم بعضی از) مقادیر نااستانده x هم تعریف شده است.

درمثال ویژهٔ ما، تابع $f(x)=(x^2-1)/(x^2+x-2)$ هیچ مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند، چون به خودی خود نه تنها به ازای مقادیر حقیقی x، بلکه به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای مخالف ۱ و ۲ نیز تعریف می‌شود. علت این امر آن‌است که $f(x)$ تابعی گویا است، یعنی تابعی است که از کاربست چهار عمل اصلی روی x و تابتها نتیجه می‌شود- عملهایی که می‌دانیم می‌توان آنها را روی اعداد ابرحقیقی هم انجام داد. هیچ دلیلی نداردکه حوزهٔ کاربست این اصل را تنها محدود به این عملهای اصلی و ترکیبات آنها بدانیم. درواقع، فرض می‌کنیم که هرتابع $f(x)$ تعریف شده به‌ازای برخی ازمقادیر حقیقی استانده x، خود به‌خود به‌ازای اعداد ابرحقیقی متناظر هم تعریف می‌شود. گرچه این ایده اساسا ساده است، در عمل باید با مثالهایی آن را روشن ساخت. به‌این منظور فرض می‌کنیم که $\tan x$ که به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی غیر از اعداد به صورت $(\pi/2)(2k+1)$، که k عدد صحیح (استانده) است، تعریف می‌شود، به‌ازای همهٔ مقادیر ابر- حقیقی x نیز، بجز اعدادی به‌صورت $(\pi/2)(2k+1)$، که k هدد صحیح (نه لزوما استانده!) است، تعریف می‌شوند (k می‌تواند عدد صحیح متناهی، یا بینهایت و در نتیجه نااستانده‌ای باشد)؛ گذشته از این، ما بیشتر $\tan\alpha$ را به‌ازای بینهایت کوچك ناصفر α هم به‌کار

برده‌ایم. همچنین فرض می‌کنیم که مثلاً رابطهٔ

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

حتی به‌ازای x و yهای نااستانده هم برقرار است. به‌همین ترتیب، $\log x$ تابعی است که برای اعداد ابرحقیقی مثبت تعریف می‌شود (و همواره داریم $\log(xy)=\log x+\log y$)، یا $\sqrt{x}$ به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی تعریف می‌شود، وقس علی‌هذا. دبیر باید این ایده‌ها را به‌تدریج و از طریق تمرینهای بیشمار به دانش‌آموزان القا کند. اگر این‌کار انجام شود، آنگاه تعریف (*) به‌ازای هرتابع (تعریف شده نزدیك به a) موجه جلوه می‌کند. به‌زبان تمادی

$$\forall x\approx a(x\neq a\to f(x)\approx l \text{ اگر و تنها اگر } \lim_{x\to a} f(x)=l \quad (1^\circ)$$

پس ازاین می‌توان مفاهیم زیررا تعریف کرد:

f در x پیوسته است اگر $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ وتنها اگر

$$\forall\varepsilon\approx 0(f(x+\varepsilon)\approx f(x)) \text{ اگروتنها اگر} \quad (2^\circ)$$

(۳°) به‌ازای هر $\varepsilon\approx 0$ که $\varepsilon\neq 0$، $f'(x)=\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$.

باید تأکید کنیم که x در (۲°)، و x و $f'(x)$ در (۳°) همگی استانده فرض می‌شوند.

همان گونه که پیشتر گفتیم، لایب‌نیتس «dx» را برای نمایش تغییر بینهایت کوچکی در x به‌کار می‌برد. حال گیریم $y=f(x)$. وقتی مقدار x به اندازهٔ بینهایت کوچك dx به $x+dx$ تغییر می‌کند، مقدار y از $f(x)$ به $f(x+dx)$ تغییر خواهد کرد. اگر f پیوسته باشد، این تغییر در مقدار y هم بینهایت کوچك خواهد بود ولایب‌نیتس آن را با «dy» نشان می‌داده است. در این صورت

$$dy=f(x+dx)-f(x)$$

و

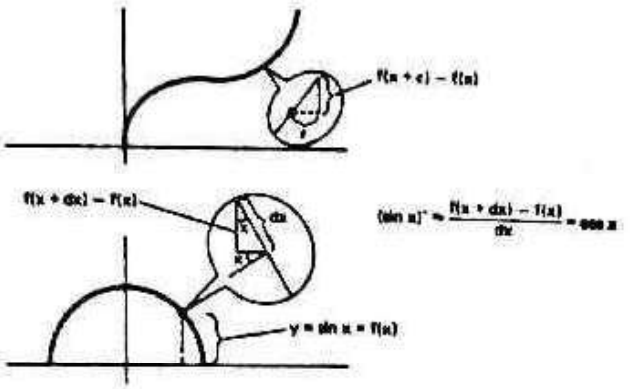
$$f'(x)\approx\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

این ملاحظات بود که لایب‌نیتس را به‌نماد آشنای «dy/dx» رهنمون شد. تأکید می‌کنیم که تساوی $f'(x)\approx dy/dx$ ماکروسکوپی است و اگر می‌خواستیم از دید میکروسکوپی به آن بنگریم، می‌بایست چنین می‌نوشتیم: $f'(x)=\mathrm{st}(dy/dx)$. همان گونه که قبلا اشاره شد لایب‌نیتس‌دردسر چنین تمایزات نمادین را به‌خود نداده است.

دو شکلی که در زیر از کتاب کایزلر می‌آوریم، به‌اندازهٔ کافی گویا هستند و شواهد خوبی برای نمایش توان آموزشی ترفند «میکروسکوپ» به‌شمار می‌روند. خواننده باید براساس این‌شکلها نشان‌دهد که مشتق $\cos x$، برابر $-\sin x$ (و نه $\sin x$) است.

تا اینجا کوشیدیم که به‌خواننده تصوری کلی از شیوهٔ آموزش حسابان درسطحی بسیار شهودی، برپایهٔ رهیافت بینهایت کوچکها بدهیم. در این راستا تنها به‌مقدمات حساب دیفرانسیل پرداختیم. درسنامهٔ کایزلر مجموعهٔ مفصلی ازموضوعات، ازجمله حساب انتگرال، را عرضه می‌کند. بیشتر مواد این درسنامه را می‌توان برای آموزش دبیرستانی بازنویسی کرد.

رهیافت بینهایت کوچکها از نظر آموزشی جذاب است؛



زیرا تعاریف منطقی آن‌را می‌توان به‌طور شهودی هم پذیرفت؛ از این گذشته حتی ریاضیدانان حرفه‌ای هم که با تعریف اپسیلون ـ دلتایی حد به‌راحتی کار می‌کنند، عملاً آن‌را به‌این‌صورت درک می‌کنند که کوچکی $a-x$، کوچکی $f(x)-l$ را ایجاب می‌کند. چون تعریف نااستانده (یعنی تعریف مبتنی بر بینهایت کوچکهای) حد این تصور شهودی را باز می‌تاباند، دریافت آن آسانتر است. مثلاً دلایلی بر این مدعا وجود دارد که دانش‌آموزان دبیرستانی می‌توانند تمرین دومی را که ذکر شد، حل کنند. همان‌گونه که پیشتر گفتیم، با حل این تمرین آنها اثبات نااستانده صحیحی از حکم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$$

خواهند داد. چندنفر از این دانش‌آموزان خواهند توانست اثبات استانده، یعنی اپسیلون ـ دلتایی، صحیحی از همین حکم را ارائه کنند؟ احتمالاً تعداد معدودی.

این‌را هم بیفزاییم که تعریفهای نااستانده، ساختار منطقی ساده‌تری از مشابه‌های استانده‌شان دارند. مثلاً تعریف نااستانده(*) از مفهوم حد، به‌طور ساده حکم می‌کند که «به‌ازای هر x، یک شرط ساده و بی‌سور برقرار می‌شود. (عبارت «به‌ازای هر»، یا $\forall$، سور عمومی و عبارت «وجود دارد»، یا $\exists$، سور وجودی نامیده می‌شود.) برعکس در تعریف استانده حد، به توالی سورها مانند: «به‌ازای هر ε، وجود دارد یک δ، چنان‌که به‌ازای هر x ...» برمی‌خوریم. هرچه این توالی سورهای یک‌جمله بیشتر باشد، آن‌جمله پیچیده‌تر است و بالطبع دریافت معنی آن دشوارتر. تعریفهای نااستانده، پیچیدگی سوری کمتری از همانندهای استانده‌شان دارند.

۵. ماهیت کار رابینسون

از آنچه که تاکنون گفته‌ایم شاید چندان روشن نشده باشد که ماهیت و معنای کشف رابینسون چیست. اینک می‌کوشیم تا آنجا که ممکن است بدون ذکر جزئیات فنی زیاد، این معنا را بازگشاییم.

در پیدایش یک مفهوم نوین ریاضی، سه مرحله را می‌توان از هم بازشناخت.

(الف) مرحلهٔ آغازی. هر مفهوم نوینی از نیاز زاده می‌شود. در آغاز اغلب این مفهوم مبهم است و حتی ابداع کنندگانش هم نمی‌توانند به‌راحتی با آن کار کنند.

این مرحله را می‌توان به‌خوبی در پیدایش گونه‌های مختلف اعداد، چون اعداد گنگ، موهومی و ابدآل تشخیص داد (حتی خود این نامها نشانه‌هایی هستند از تردیدهای نخستین دربارهٔ این مفاهیم). همچنین می‌توان مفاهیم نقطه، خط، وصفحه یا مفهوم تابع را در نظر آورد.

(ب) مرحلهٔ آشنایی. مفهوم نوین بارها و بارها با اطمینان روزافزونی به‌کار برده می‌شود، تا آنجا که سرانجام کاملاً متبلور شده و فهمیده شود. این مرحله ممکن است بسیار پیش از فراهم آمدن روایت اصل موضوعی از مفهوم (که جوهرهٔ مرحلهٔ سوم است)، طی شود. این موضوع را می‌توان به‌بهترین وجهی در مورد اعداد طبیعی مشاهده کرد. این اعداد پس از کشفشان، مدتها پیش از ارائهٔ روایت اصل موضوعی آنها توسط پئانو، که تنها در پایان سدهٔ نوزدهم آماده شد، کاملاً درک شده بودند؛ به‌همین گونه، یونانیان نه‌تنها اعداد گویا، که حتی اعداد گنگ را دو هزار سال پیش از اصل موضوعی شدنشان (در سدهٔ نوزدهم) درک کرده بودند.

(پ) مرحلهٔ اصل موضوعی‌سازی، که خود از دو مرحلهٔ فرعی تشکیل می‌شود.

(پ۱) اصل موضوعی‌سازی مادی. پاره‌ای ویژگیهای اساسی مفهوم (یا مفاهیم) به‌عنوان اصول موضوع برگزیده می‌شوند. همهٔ ویژگیهای شناخته‌شدهٔ دیگر از این اصول موضوع استنتاج می‌شوند. اولین اصل موضوعی‌سازی مادی شناخته‌شده، بی‌تردید کار اقلیدس در هندسه است. اهمیت سترگ این کار را خطلهایی که ما امروزه از آنها آگاهیم، خدشه‌دار نمی‌کند. اصل موضوعی‌سازی مادی اعداد حقیقی در اواخر سدهٔ نوزدهم انجام شد. شاخصترین اصل موضوع آن (در یکی از صورتبندیهایش) بیان می‌کند که هر مجموعهٔ [ناتهی] کراندار از اعداد حقیقی، یک کوچکترین کران بالا دارد.

(پ۲) اصل موضوعی‌سازی صوری. این، مرحله‌ای است امروزی که نیاز به آن حدود صد سال پیش آشکار شد و ماهیت آن تنها در سدهٔ حاضر به‌روشنی تبلور یافت.

ریاضیدان امروزی به‌فهرست اصول موضوعی که مفهومی مشخص را توصیف می‌کنند، از این دید می‌نگرد که آیا این اصول موضوع تناقض‌آمیزند یا نه. هرچه باشد این امکان وجود دارد که شهودمان، ما را گمراه کند و در واقع هیچ ساختاری که در همهٔ این اصول موضوع صدق کند، وجود نداشته‌باشد. این پرسش معمولاً با ساختن یک الگو برای آن اصول موضوع، یعنی دستگاهی از اشیای ریاضی که در همهٔ اصول موضوع صدق کنند، پاسخ داده می‌شود.

این الگو را تنها کسانی می‌توانند به‌تمامی درک کنند، که از «بلوغ ریاضی» قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار باشند. عموماً مشکل ذهنی عمده این است که اشیای الگو هیچ همانندی ظاهری با آن اشیای شهودی که اصل موضوعی شده‌اند ندارند. مثلاً الگوهای بسیاری از اعداد حقیقی وجود دارد. معروفترین آنها، دستگاه برشهای ددکیند است. این برشها اصول موضوع اعداد حقیقی را برآورده می‌کنند، اما چون زوجهای مشخصی از مجموعه‌های نامتناهی اعداد گویا هستند، هیچ شباهتی با آنچه که ما شهوداً از اعداد حقیقی می‌فهمیم، ندارند. با این وجود در برخی از متنهای پیشرفته، برشهای ددکیند با اعداد حقیقی یکی گرفته می‌شوند. این کار البته از نظر ریاضی بسیار باشکوه است، اما وقتی به‌نوآموزان آموخته شود (همان‌گونه که گهگاه نابخردانه چنین هم می‌شود)، در اغلب موارد تأثیری

ناخوشایند بر آنهامی گذارد. احساسی که پدیدمی آید دربهترین حالت احساس مواجهه بایك معما و در بدترین حالت، چیزی است شبیه یك کابوس.

به سر وقت بینهایت کوچکها باز گردیم: هنگامی کـه از دید گذراندن ایـن سه مرحله به تاریخچهٔ آنها می‌نگریم، در می‌یابیم که تا پیش از ۱۹۶۰ تنها نخستین مرحله واقعاً کامل شده بود. حال آنکه مرحلهٔ دوم، مرحلهٔ آشنایی، علیرغم کوششهای بسیار برای کامل کردن آن به فرجام نرسیده بود. رابینسون درآن سال به گونه‌ای درخشان مرحلهٔ اصل موضوعی سازی را به انجام رساند. او اصول موضوعی برای بینهایت کوچکها (با دقیقتر، برای اعداد ابرحقیقی) معین کرد و الگویی (یا در واقع چند الگو) برای آنها ساخت. در خلال این کار او ماهیت بینهایت کوچکها را هم آشکار ساخت و با این عمل مرحلهٔ آشنایی را هـم ضمن اصل موضوعی سازی به اتمام رساند. کایزلر، اصول رابینسون را ساده‌تر کرد. اصل موضوع تعیین کننده درفهرست کایزلر، «اصل موضوع جواب» نام دارد. این اصل حکم می کند که اگر $f(x)$ و $g(x)$ عبارتهایی «مانند» از متغیر x بـاشند (یعنی عبارتهایی کـه از ترکیب چند تـابع استانده از متغیرها و ثابتهای حقیقی ساخته شده‌اند)، آنـگاه معـادلات $f(x)=0$ و $g(x)=0$ جـوابهای حقیقی یکسان دارند اگر و تنها اگر جـوابهای ابر حقیقی یکسان داشته باشند. به‌زبان نمادی، ویژگی

$$\forall x(f(x)=0\leftrightarrow g(x)=0)$$

به ازای مقادیر حقیقی x برقرار است اگر و تنها اگر به ازای مقادیر ابر حقیقی x هم برقرار باشد. این اصل چیزی نیست مگر بیان دقیق حالت خاصی از اصل مهم لایب‌نیتس، موسوم به «اصل پیوستگی»، (این اصل کـه ''یك ویـژگی بـه ازای اعداد حقیقی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای ابر حقیقیها برقرار باشد.'') همین حالت خاص هم برای مقاصد حساب دیفرانسیل و انتگرال بسنده است!

دست آخر می‌بینیم که رابینسون (و به تبع او کایزلر) نمایزات نمادی را به‌دقت مـراعات کرده اند. همان‌گونه کـه پیشتر گفتیم، دو رابطهٔ متمایز $=$ و $\cong$ وجود دارد. $\mathbf{R}$مجموعهٔ اعداد حقیقی‌است درحالی که $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ ابرحقیقیهاست و البته $\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^*$. اگر f تابع استانده‌ای با مقادیر حقیقی و دامنهٔ $D\subset\mathbf{R}$ باشد، در ایـن صورت (همان طـور کـه اشاره شد) f «خودبـه‌خود» روی یـك مجموعهٔ «متناظر» از ابر حقیقیها تعریف می‌شود. به عبارت فنی‌تر، تابعی چون f^* با دامنهٔ تعریف D^* به f متناظر می‌شود، کـه $D\subset D^*\subset\mathbf{R}^*$، و بـه ازای هـر $x\in D$ داریم $f^*(x)=f(x)$ و بـه ازای هر $x\in D^*$ عدد $f^*(x)$ ابرحقیقی است؛ f^* را توسیع طبیعی f می‌نامند. مثلاً اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آنگـاه D دامنهٔ f، مجموعهٔ همـهٔ اعداد حقیقی نامنفی است، و D^* دامنهٔ تـوسیع طبیعی f، یعنـی $f^*(x)=\sqrt{x}^*$، مجموعهٔ همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی است. چون به‌ازای هر $x\in D$ داریم $(\sqrt{x})^2=x$، اصل جواب‌ایجاب می کند که بـه ازای هر $x\in D^*$ نیز تساوی $(\sqrt{x}^*)^2=x$ برقرار باشد.

به دلایل عملی و آموزشی بهتر این است که تمایز نمادی بین یك تابع و توسیع طبیعی آن را نادیده بگیریم. به همین خاطر است که مثلاً هرگز جمع ابـرحقیقیها را بـا نماد «$+^*$» نشان نمی‌دهیم (درحالی‌که باید چنین می کردیم). باز هم به‌همین دلیل، کایزلر پس از پشت سر گذاردن مقدمهٔ کتابش، نماد «f» را هم برای نشان‌دادن یك تابع استانده و هم برای نمایش توسیع طبیعی آن به‌کار می‌برد. شاید در آموزش دبیرستانی بهتر این باشد که ایـن تمایزات نمادی را اصلاً مطرح نکنیم.

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که کایزلر نشان‌داده است، بینهایت کوچکها، این‌ابزارهای خوب قدیمی و انگیزه‌بخش را مـی‌توان با اندکی انحراف از تعبیر لایب‌نیتسی آنها، به خوبی در آموزش حسابان به کار بست. تفاوت عمده، تمایـز صریحی است که بـاید میان $\cong$ و $=$ قائل شد، و به کارگیری مفاهیمی است چـون «بخش استانده» و چیزهایـی از این قبیل که پیشتر به‌گونه‌ای صریح‌مطرح نشده بودند. درسطح کلاسهای درس، اهمیت عمدهٔ کار رابینسون این است که به ما معلمان اطمینان خاطر می‌بخشد. اطمینان از اینکه وقتی از «بینهایت کوچکها» سخن می گوییم، به واقع می‌دانیم چه می گوییم و از چه می گوییم.

ترجمهٔ رضا کرمی

- Hamik V., "Infinitesimals from Leibniz to Robinson, time to bring them Back to school", *The Mathematical Intelligencer* (2)8 (1986) 41-47.

مراجع

1. Keisler H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
2. Keisler H. J., *Foundations of Infinitesimals Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
3. Lakatos I., "Cauchy and the continuum", *The Mathematical Intelligencer*, 1(1978) 151-161.
4. Robinson A., *Non-standard Analysis*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.
5. Sullivan, K., "The teaching of elementary calculus using the nonstandard approach", *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976) 371-375.

تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان را چگونه باید بررسی کرد؟*

آرپاد سایو

در حدود دو دههٔ قبل تحقیقاتی را شروع کردم که امیدوارم به‌روشنتر شدن چندمسألهٔ تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات کمک کرده باشد. در این مقاله چندان بر آن نیستم که نتایج این تحقیقات را مشخص کنم، بلکه بیشتر بر آنم که به مسائل وروشهای دنبال شده در این تحقیقات بپردازم.

ولی نخست می‌خواهم به‌رده‌بندی معروفی درمورد علوم، که‌مرا به‌یکی از مهمترین مسائلم هدایت کرد، اشاره کنم. شاخه‌های گوناگون تحقیقات‌علمی رامی‌توان به‌دو گروه مهم‌تقسیم کرد: علوم تجربی و علوم غیرتجربی. گروه‌اول به‌بررسی، توصیف، توضیح و پیش‌بینی‌رویدادهای جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، می‌پردازد. احکام این علوم با واقعیتهای تجربهٔ ما مقابله می‌شوند، و تنها درصورتی قابل قبول‌هستند که درست بر شواهد تجربی استوار باشند؛ و خود علوم تجربی هم به‌طورکلی به‌علوم طبیعی و علوم اجتماعی تقسیم می‌شوند. (به‌اعتقاد من علوم رفتاری هم رویهمرفته جزو علوم اجتماعی به شمار می‌آیند، حتی‌اگر ازبرخی تأثیرات بنیادمهم علوم طبیعی برکنار نمانده باشند. ولی مسألهٔ من فعلاً این نیست.) به هر ترتیب، آنچه علوم تجربی را ازشاخه‌های غیرتجربی، یعنی‌منطق وریاضیات محض، متمایز می‌سازد وابستگی بـه شواهد تجربی است. زیرا گزاره‌های منطق و قضایای ریاضی‌بدون‌هیچ‌گونه‌ارجاع‌اساسی به‌یافته‌های‌تجربی اثبات‌می‌شوند. البته این تمایز را به‌صورت دیگری هم می‌توان بیان کرد، یعنی به‌این زبان‌که روش همهٔ‌علوم تجربی، استقرایی است، درحالی‌که روش هر دوشاخهٔ‌غیرتجربی، یعنی منطق و ریاضیات، قیاسی است. و تاآنجاکه این امربا ریاضیات ارتباط می‌یابد، این حکم‌آخر را می‌توانیم به‌کمک نکتهٔ ساده‌ای تکمیل کنیم که در سالهای اخیر به خصوص از سوی ریاضیدان معروفی چون پولیا مورد تأکید قرارگرفته است. او به ما یادآوری می‌کند که

> ریاضیات دو جنبه دارد: از یک سو علم دقیق اقلیدس است، ولی از سوی دیگر، چیزدیگری هم هست. ریاضیاتی‌که به‌سبک‌اقلیدسی ارائه می‌شود به‌صورت علمی قیاسی و منظم به‌نظر می‌آید، ولی ریاضیات درحال پیدایش به صورت علمی استقرایی، آزمایشی، و تجربی به‌نظر می‌آید.

درحقیقت، بیشتر احکام ریاضی درابتدا صرفاً حدسها و گمان‌پردازیهایی بر مبنای تجارب عینی بوده‌اند، و مدتها بعد به قضایایی واقعی تبدیل شده‌اند، یعنی‌وقتی‌که ریاضیدانان‌سرانجام‌موفق به‌اثبات آنهامی‌شدند، به‌این معنی‌که‌آنها را از اصول ریاضی معینی استنتاج می‌کردند.

پرسشی که‌اکنون مطرح می‌شود پرسشی دوگانه‌است: ازیک‌سو پرسشی فلسفی است و ازسوی دیگر پرسشی تاریخی است (۱) فلاسفه باید این پرسش را پاسخ گویند که چرا ما برای یقین قیاسی، یعنی، یقینی که‌درمورد گزاره‌های ثابت‌شدهٔ ریاضی‌زبانزدهمگان است، ارج بیشتری قائل هستیم تا برای یـه اصطلاح عـدم یقین استقرایی علوم تجربی؟ منظورم از عدم یقین این است:

> یک فرضیهٔ تجربی هر اندازه هم‌که مورد آزمون واقع شده باشد، و هر اندازه هم‌که توسط یافته‌های تجربی مورد تأیید قرارگرفته باشد، باز ممکن است در موارد بررسی نشده مردود شود. شواهد تجربی هیچگاه به‌تنهایی برای تصدیق یک‌فرضیه کفایت نمی‌کنند؛ به‌عبارت‌دیگر، هرگز نمی‌توانند صدق فرضیه را با یقین قیاسی تعیین‌کنند، بلکه تنها می‌توانند پشتیبان استقرایی کم و بیش‌قوی برای فرضیه به‌شمارآیند (همپل).

بدون شک، ارجی‌که ما برای «یقین قیاسی» قائل هستیم سبب می‌شود که ریاضیدانان همیشه تلاش‌کنند تا حدسها، وگمان‌پردازیهای صرف خود را به‌قضایای اثبات شدهٔ واقعی تبدیل‌کنند. ولی فکر می‌کنم که شاید احترام فوق‌العاده بـه «یقین قیاسی» تا اندازه‌ای مبالغه آمیز باشد. زیرا تا آنجا که اطلاع دارم هنوز پاسخ قانع‌کننده‌ای برای این‌پرسش وجود ندارد که چرا ریاضیدانان باید احکام خود را ــ حتی در مواردی هم که این احکام بدون هرگونه اثباتی بدیهی به شمار می‌آیند ــ ثابت‌کنند. همانطورکه پولیا نوشته است

> با اندکی اغراق می‌توان گفت که بشریت این اندیشه را ــ یعنی اندیشهٔ اثبات ریاضی را ــ تنها ازیک شخص وازیک‌کتاب آموخت، از شخص اقلیدس و ازکتاب اصول او.

حال بپردازیم به‌پرسش‌دوم‌خود، یعنی به‌پرسش‌تاریخی: ریاضیات چگونه توانست به‌علمی قیاسی ومنظم تبدیل شود؟ زیرا درابتدا، یعنی در تمدنهای باستانی و ماقبل یونانی مصر و بابل، ریاضیات صرفاً معرفت تجربی‌کاربردی و بسیارپیشرفته‌ای به‌شمار می‌آمد. در حقیقت، امروزه دیگر همه می‌پذیرندکه بابلیها حدود هزار سال پیش ازآغاز

ریاضیات یونان قادر بودند جواب مسائل ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای را با تقریب بسیارخوبی پیدا کنند. لیکن، مطلقاً هیچگونه مدرکی وجود ندارد که حاکی از این امر باشد که بابلیها (چه رسد به مصریان) هرگز تلاش کرده باشند که قضایای ریاضی را به‌سبك دقیقی از اصول اولیه [معینی] استنتاج کنند. هنوز پاسخی برای این پرسش نیافته‌ایم که آیا ریاضیدانان مصر و بابل اصلاً مفاهیم علمی «قضیه»، «اثبات»، «استنتاج»، «تعریف»، «اصل متعارفی»، «اصل موضوع»، و غیره، را می‌شناختند یا نه. حتی در مورد این هم اطلاع قطعی نداریم که آیا بابلیها می‌دانستند چگونه قضایای کلی را باید صورتبندی کرد یا نه. ریاضیات تا پیش از تمدن یونان باستان چیزی جز دستورالعملهایی مفید (که گاهی حتی گردایه‌ای است از قواعد عملی بسیار ابتکاری) درارتباط با نحوهٔ انجام‌کارهای ریاضی مشخص نیست. تحول اساسی در تاریخ ریاضیات، یعنی دگرگونی معرفت تجربی-عملی گذشته، طی تکامل تمدن یونان باستان به‌وقوع پیوست. بنابراین، پرسش‌ما عبارت است از اینکه: دلیل اینکه یونانیان به معرفت تجربی قناعت و اکتفا نکردند چه بود؟ چرا آنان یك علم قیاسی دارای ساختمانی منظم را جانشین «مجموعه‌ای دستورالعمل» ساختند؟ چه امری موجب شد که آنان به‌ناگهان به‌آنچه به‌کمك نظریه می‌توانستند ثابت کنند ــ نشان دهند یا ردکنند ــ بیشتر اطمینان کنند تا به‌آنچه عمل صرف، درستی یا نادرستیش را نشان می‌داد؟ آشکار است که ریاضیات قیاسی زمانی زاده شد که معرفت صرفاً ناشی از تجربه دیگرمورد قبول نبود؛ ازآن پس، حتی آنچه تجربه همواره تأیید می کردمحتاج ملاحظات نظری بود.

به‌اعتقاد من شگفت‌انگیزترین جنبهٔ ریاضیات یونان، جنبه‌ای که آن را درهمان نگاه نخست از نظایر شرقی خود متمایز می‌سازد، وجود اثباتهای اصیل و واقعی است. علم یونانی تنها به بیان قضایا اکتفا نمی کند بلکه، مضافاً برآن، برای هرکدام ازآنها اثباتی ارائه می‌دهد. نقش اثبات در ریاضیات یونان کمتر از نقش آن در ریاضیات معاصر نیست؛ درواقع، در هر دو، نقش یکسانی دارد. افزون بر این، بیشتر اثباتهای اقلیدس درنوع خود الگو هستند و نسل اندر نسل معیار دقت ریاضی بوده‌اند، علیرغم این واقعیت که ریاضیدانان جدید نقایصی دریك یا دو مورد می‌یابند، اثباتهای کتاب اصول در مجموع نمونه هستند.

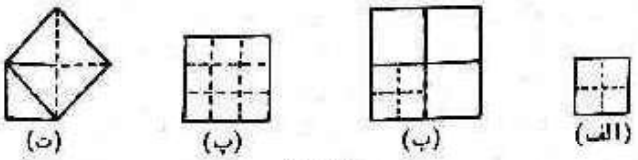
اکنون می‌توانم بازسازی خود را در مورد سیر تکامل اثبات ریاضی به‌شرح زیرخلاصه کنم. در ریاضیات یونان، اصطلاح فنی برای «اثبات» و «ثابت کردن» فعل δείκνυμι (دیکنومی) است. اقلیدس در انتهای هر اثباتی آن را به‌کار می‌برد. او بحث خود را در مورد هر قضیه با کلمات زیر به پایان می‌رساند ὅπερ ἔδει δεῖξαι «quod erat demonstrandum» یعنی «فهوالمطلوب» یا «این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم».

این واقعیت که فعل یونانی دیکنومی از نظر ریشهٔ لغوی در ابتدا به‌معنای «اشاره‌کردن»، «نشان‌دادن»، و «قابل‌رؤیت ساختن» بوده است این فکر را به‌ذهن متبادر می‌سازدکه شاید نخستین «اثباتها» در ریاضیات مرکب از نوعی «اشاره کردن» به واقعیتها یا «قابل رؤیت ساختن» آنها بوده است. در تأیید این نظر حتی می‌توان مثالی از افلاطون آورد.

سقراط در گفتگوی منون از یك غلام بیسواد عامی می پرسد که‌چگونه می‌توان مساحت مربعی را که هرکدام ازاضلاعش برابر با دوذرع است دوبرابر کرد. سقراط برای‌ممانعت ازهرگونه سوءتفاهمی، پس از طرح پرسش خود بی‌درنگ مربعی می کشد که هر کدام از اضلاعش طولی به‌اندازهٔ دوذرع را نمایش می‌دهند. (به‌سخن دیگر: او مربعی را که مساحتش باید دو برابر شود قابل رؤیت می‌سازد.) ازآنجا که سقراط به صراحت گفته بودکه اضلاع مربع اصلی طولی به درازای ۲ ذرع دارند، نخستین فکری‌که به ذهن این جوان خطور می کند این است که شاید بتوان مساحت مربع را با دو برابر کردن طول اضلاع آن دو برابر کرد. لیکن سقراط شکل دیگری رسم می کند تا به‌او نشان دهد که مربعی‌که طول اضلاعش دو برابر طول اضلاع مربع اصلی است مساحتی چهار برابر آن دارد. غلام ناگزیر می‌پذیرد که نخستین پاسخ او به پرسش اصلی، پاسخ غلطی بوده است. و پیش خود چنین می‌اندیشد: روشن است که مربعی با مساحتی دو برابر مساحت مربع اصلی باید اضلاع بلندتری داشته باشد؛ پس اضلاع مربع مطلوب باید بلندتر از ۲ ذرع باشند. اما بیشتر از چهار ذرع هم نمی‌توانند باشند چون مربعی به اضلاع ۴ ذرع مساحتی چهار برابر مساحت مربع اصلی خواهد داشت. پس طول مطلوب باید کمتر از ۴ ذرع هم باشد. ازآنجا که سه مابین دو وچهار قراردارد، شاید مربعی که ضلعش سه ذرع طول دارد مساحتی دوبرابر مساحت مربع اصلی داشته باشد. بار دیگر واکنش سقراط این است که به‌کمك کشیدن شکلی نشان دهدکه مربعی باضلعی به‌طول سه‌واحد طول، مساحتی برابر با نه واحد سطح دارد، و درنتیجه بیش از اندازهٔ مطلوب بزرگ است. وسقراط عاقبت با کشیدن چهارمین شکل خود نشان می‌دهد که مربع حاصل ازقطر مربع اصلی، مساحتی درست دو برابر مساحت آن دارد.

به‌اعتقاد من این قسمت از منون افلاطون نمونهٔ بارزی است از اینکه در نخستین مرحلهٔ تکامل ریاضیات یونان احکام ریاضی چگونه مورد تحقیق و تصدیق قرار می گرفتند؛ یعنی آنکه به‌کمك آن می‌توان فهمیدکه قضایا «اثبات می‌شدند»، البته «اثبات» به‌معنای منسوخ کلمه.

«مربع حاصل ازقطر مربعی دیگر، مساحتی دو برابرآن دارد» ــ این قضیه‌ای بود که سقراط به صورت یك مسأله برای غلام بیسواد طرح کرد. تصاویر (ب) و (پ) شکل ۱ دو پاسخ نخستین را ابطال می کنند ونقص آنها را قابل‌رؤیت می‌سازند. درحالی که تصویر (ت) نه تنها پاسخ صحیح را نشان می‌دهد (یعنی قضیهٔ مورد نظر را صورتبندی می کند)، بلکه درعین حال «اثبات» قابل رؤیتی ازصحت آن است.



شکل ۱

البته خطاست ادعا کنیم که دوره‌ای وجود داشته است که طی آن، اثباتهای ریاضی چیزی جزقابل‌رؤیت ساختن واقعیتها نبوده‌اند. نباید فراموش کنیم که اثبات با فکرکردن در مورد آنچه دیده‌می‌شود به‌دست می‌آید. همین تفکر است که‌آنچه را می‌بینیم به مدرك تجربی و قابل‌رؤیت تبدیل می کند. قصد من فقط تأکید بر این نکته است که هستهٔ قدیمیترین اثباتهای ریاضی از راه قابل رؤیت ساختن واقعیتها تأمین می‌شد.

ولی شکل نمونه‌وار اثباتهای اقلیدس بهیچوجه چنین نیست. اقلیدس، که‌آثارش برای ما درحکم قدیمیترین، و در عین حال شکل کلاسیك ریاضیات یونان است، بهیچوجه درپند قابل رؤیت ساختن چیزی نیست. توجه او بیشترمعطوف به‌این است که‌با ارائهٔ سلسله‌ای از

استدلالهای مجرد که در هر کدام می‌کوشد از دخالت هر گونه عنصر بصری پرهیز کند، خواننده را درمورد صدق قضایای خودقانع سازد. اکنون سعی می‌کنم تا این نظر خود را ــ یعنی اجتناب عامدانه و آگاهانه از توسل بـه عناصر بصری را ــ با اثبات اقلیدسی دو قضیهٔ بسیار ساده در مورد اعداد زوج و فرد روشن سازم. بنابریکی از این قضایا:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد زوج را با یکدیگر جمع کنیم، کل حاصل هم زوج خواهد بود.

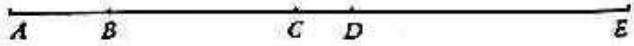
و بنابر قضیهٔ دوم:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد فرد را با یکدیگـر جمع کنیم و این تعداد زوج باشد کل حاصل هم زوج خواهد بود.

البته، هردوی این قضایا برای کسی که با حساب آشنایی اندکی داشته باشد بیش از آن بدیهی به‌نظرمی‌آیندکه نیازی به‌اثبات داشته‌باشند. این امراهمیت و جاذبهٔ نحوهٔ اثبات آنها را دوچندان می‌کند. در هر دو مورد، نخستین‌گام عبارت است از بیان یکی از مصادیق نمونه‌وار قضیه. برای مثال، در مورد اول

فرض‌کنید که تعداد دلخواهی عدد زوج AB، BC، CD، DE بـا یکدیگر جمع شوند؛ می‌گوییم که حاصل AE، زوج است.

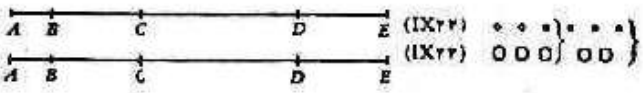
روشن‌است‌که اقلیدس اعداد مذکور را به‌صورت پاره‌خط در نظر می‌گیرد، زیرا هر یك را با دو حرف نمایش می‌دهد. همچنین، اینکه او حاصلجمع آنها را AE می‌نامد، بیانگر این امر است‌که نزد خودچنین تصورمی‌کرده است‌که حاصلجمع، ازپشت سرهم قراردادن این پاره‌خطها حاصل می‌شود:



حال، اثبات چنین ادامه می‌یابد:

ازآنجا که هرکدام ازاعداد AB، BC، CD، DE زوج است، هر کدام نیمی‌دارد، بنابراین‌کل‌آنها یعنی AE هم‌نیمی دارد. اما عدد زوج عددی است‌که به‌دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. پس AE زوج است. فهوالمطلوب

باید روشن شده باشد که این اثبات با آن نوع «قابل رؤیت ساختنی» که قبلاً در موردش سخن گفتم هیچ وجه اشتراکی ندارد. بهیچوجه‌نمی‌توان ادعاکردکه پاره‌خطهای AB، BC، وغیره، نمایش قابل رؤیت و دقیق «اعداد زوجی» هستندکه به ما نشان می‌دهند که حاصلجمعشان، یعنی پاره‌خط AE، تنهامی‌تواند «عددی زوج» رانمایش دهد. زیرا کاملاً بیمعنی است کـه بگوییم پاره‌خط دلخواهی [تنها] می‌تواند نمایش قابل رؤیت «عددی زوج» باشد. لااقل به این دلیل که، در اثبات قضیهٔ دوم همان پاره‌خطها (با همان حروف) اعداد فرد رانمایش می‌دهند. درواقع بهیچوجه نمی‌توان اعداد زوج و فرد را، با استفاده ازپاره‌خط برای نمایش آنها، ازیکدیگرتشخیص داد. زیرا پاره‌خط را همیشه می‌توان به دو نیم تقسیم کرد. ولی، بنا بر تعریف، اعداد فرد را هرگز نمی‌توان به دو نیم تقسیم کرد درحالی‌که اعداد زوج را می‌توان.



شکل ۲

بنابراین درست است‌که اقلیدس طبق معمول، قرار داد نمایش اعـداد به وسیلهٔ پـاره خط را رعایت می‌کند، ولی فعل «δείκνυμι» («نشان‌دادن»، «چیزی‌را نشان‌دادن») را صرفاً به‌معنای مجازیش به‌کار می‌برد. او از نشان دادن چیزها سخن می‌گوید، ولی استدلالهای او اساساً مجرد هستند؛ مراحل‌آنها را نمی‌توان دید.

برای اینکه آسانتر تشخیص دهیم که اقلیدس تا چه اندازه از این امر پرهیز دارد‌که صدق قضایای ساده را قابل رؤیت سازد (یعنی آنها را «ثابت‌کند»، البته به‌معنای ابتدایی این لفظ)، کافی است‌که روش اثبات او (به‌کمك پـاره‌خطها) را بـا روش اثبات ابتدایی آنها مقایسه‌کنیم. می‌دانیم‌که درآن موقع قضایای مربوط به‌اعدادفرد و زوج در ابتدا به‌کمك سنگریزه نمایش داده می‌شدند، بدین صورت که اعـداد زوج متضمن تعـدادی مساوی از سنگریزه‌هـای سیاه و سنگریزه‌های سفید بودند، در حالی که اعداد فرد با افزودن یا کاستن یك سنگریزه بـه، یا از، یکی از این دو نوع سنگریزه نمایش داده می‌شدند. این روش اثبات روشی بسیار ابتدایی است، ولی درعوض مضمون‌اصلی‌قضیه‌را قابل‌رؤیت می‌سازد. تنهاکافی است‌که به‌ردیفهای سنگریزه نگاهی بیفکنیم تا خود را در مورد درستی قضیه قانع‌کنیم. زیرا سنگریزه‌ها به‌ما امکان می‌دهند تا ببینیم که‌آیا عددی زوج است یا نیست.

به نظر می‌آیدکه اقلیدس به این دلیل اثباتهای بصری را رها کرده‌که می‌خواست اثباتش برای همهٔ موارد ممکن معتبرباشد. به‌همین دلیل بود که پاره خط را جانشین سنگریزه کرد. زیرا نباید فراموش کرد‌که‌نمی‌توان‌اعدادمخلوط($5\frac{2}{3}$، ۳/۵، وغیره) را به‌کمك سنگریزه نمایش داد. ولی، پاره‌خط هم قرارنیست به‌جای عدد مخلوط به‌کار برود، بلکه به‌جای عدد دلخواه‌فرد یازوج مورد استفاده قرار می‌گیرد. افزون براین، اقلیدس به‌خاطردستیابی به تعمیم بیشتر بود‌که به‌استدلال منطقی روی‌آورد. به‌همین دلیل نقطهٔ شروع اثبات اویادآوری‌این‌امر است‌که عدد زوج، بنا بر تعریف، عددی است که به دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. از این مطلب به‌وضوح نتیجه می‌شود که حاصلجمع اعداد زوج هم عددی زوج است، و . . .

اما، این‌نظرکه اقلیدس، به‌دلیل تلاشش برای دستیابی به‌تعمیم هرچه بیشتر، قادر نبودکه اعداد فرد و زوج را به‌نحو دقیقی نمایش دهد، ما را به‌یادقسمت جالب‌توجه دیگری ازاثرافلاطون می‌اندازد. منظورم‌آن قسمتی است‌که درآن‌سقراط توضیح می‌دهدکه‌تا آنجاکه به حساب مربوط می‌شود، اعداد نمی‌توانند پیکر قابل‌رؤیت و قابل لمس‌داشته باشند؛آنها صرفاًعناصری آرمانی هستندکه تنها ازراه‌تفکر محض دریافتنی می‌باشند.

به‌این‌ترتیب می‌بینیم که‌در ریاضیات یونان، چنان‌که نمونه‌های آن در اثباتهای اقلیدس دیده می‌شود، با پرهیز از استدلال بصری تلاش می‌شود به‌موضوع ریاضی به‌عنوان چیزی نگریسته شودکه‌صرفاً به عالم تفکر محض تعلق دارد. این گرایش در تکامل علم علت اصلی ارائهٔ جالبترین اثباتهای اقلیدس بوده‌است. مثال سوم من درست یکی از این اثباتهای اصیل اقلیدسی است.

درکتاب‌اصول قضیه‌ای وجود دارد (VII ۳۱) که خصوصیت

جالبی از اعداد مرکب را بیان می‌کند. ولی پیش از آنکه به تفصیل به آن بپردازم سه تعریف را که برای فهم آن لازم است یادآوری می‌کنم. این سه تعریف عبارت‌اند از:

VII ۲: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.»

VII ۱۱: «عدد اول عددی است که تنها بر واحد تقسیم‌پذیر باشد.»

VII ۱۳: «عدد مرکب (یعنی عددی که عدد اول نیست) عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» [یا به‌اصطلاح ریاضی عددی است که عددی آن را عاد کند.]

اما قضیه‌ای که می‌خواهم اثباتش را در اینجا با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار دهم می‌گوید که «هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است». اثبات آن به‌قرار زیر است.

اثبات. فرض کنید a عدد مرکبی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که a بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است. از آنجا که a مرکب است، دست‌کم یک عدد، مثلاً b، باید وجود داشته باشد که a بر آن تقسیم‌پذیر باشد. بنابر تعریف خود عدد مرکب: «عدد مرکب عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» اما b خود یا اول است یا مرکب، زیرا تعاریف «عدد اول» و «عدد مرکب» هر گونه امکان و حالت (سوم) دیگری را منتفی می‌کند. در حالت اول (که b اول است) قضیه ثابت می‌شود، زیرا a بر b تقسیم‌پذیر، و b عدد اول است. ولی در حالت دوم، عددی، مثلاً c، باید وجود داشته باشد که b بر آن تقسیم‌پذیر باشد (باز بنا بر تعریف «عدد مرکب»). اما واضح است که a هم بر c تقسیم‌پذیر خواهد بود؛ بنابراین اگر c اول باشد قضیه ثابت شده است. ولی اگر c مرکب باشد، عددی باید وجود داشته باشد که آن را عاد کند، و هکذا تا آخر. در این برهان، این امر مورد تأکید قرار می‌گیرد که این روند باید سرانجام به‌پایان رسد؛ زیرا در غیر این صورت دنباله‌ای نزولی از مقسوم‌علیه‌های مرکب a خواهیم داشت که نامتناهی خواهد بود. (به‌اعتقاد یونانیان هر عدد همواره بزرگتر از هریک از مقسوم‌علیه‌های خود است.) لیکن وجود یک چنین دنبالهٔ نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های عدد دلخواهی چون a، تعریف عدد را نقض می‌کند: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.» (واحد کوچکترین مقسوم‌علیه هر عددی است). پس a باید بر عدد اولی تقسیم‌پذیر باشد و قضیه اثبات می‌شود.

در این اثبات نه چیزی «نشان داده شده» و نه چیزی «قابل رؤیت ساخته شده» است. درست است که اقلیدس از پاره‌خط استفاده می‌کند تا مورد نمونه‌واری از قضیهٔ خود را روشن سازد؛ او عدد مرکب دلخواهی چون (a) را با چنین پاره‌خطی نمایش می‌دهد، و مقسوم‌علیه آن (b) را با پاره خطی کوتاهتر، اما این کار او چیزی جز رعایت قرارداد سنتی و منسوخ نیست. زنجیرهٔ استدلال او را نمی‌توان دید. اگر بخواهیم آن را درک کنیم، سودی ندارد که به‌اعداد (به‌صورتی که با پاره‌خط نمایش داده شده‌اند) نگاه کنیم؛ به جای این کار باید تعاریف انواع مختلف عدد را به خاطر بسپاریم، زیرا اثبات فقط بر آنها استوار است.

اثبات اقلیدسی که هم‌اکنون بررسی کردیم سوای اینکه استدلالی غیر قابل رؤیت است، لااقل دو جنبهٔ جالب توجه دیگر نیز دارد که مایلم در اینجا آنها را به‌طور صریح مورد تأکید قرار دهم. جنبهٔ اول عبارت است از اینکه: ما مجبور شدیم وجود عدد اولی را ثابت کنیم که مقسوم‌علیه عدد مرکب دلخواهی چون a بود، و دلیل قطعی این امر را از راه ابطال [فرض] «عدم وجود» آن به‌دست آوردیم. یعنی آنکه نشان دادیم که عدم وجود آن امری محال است. به‌سخن دیگر: اثبات ما به‌اصطلاح «اثباتی غیرمستقیم» بود، که در ریاضیات روش بسیار متداولی است، یعنی روشی است که به‌کمک آن، صدق یک حکم معین از طریق نشان دادن کذب فرض نقیض آن اثبات می‌شود.

جنبهٔ دیگر اثبات مذکور که باید مورد تأکید قرار گیرد به‌شرح زیر است. برای اثبات غیرمستقیم حکم: «هر عدد مرکب دلخواه بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است»، نخست نقیض این حکم را صورت‌بندی کردیم تا بتوانیم آن را ابطال کنیم، زیرا ابطال حکم آخیر اثبات حکم اصلی است. بنابراین گفتیم: «عدد a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد که هر کدام عددی مرکب است.» حال نکتهٔ جالب‌توجه این است که ببینیم چه امری نادرستی حکم اخیر را آشکار می‌سازد: این امر که حکمی آشکارا متناقض است. زیرا، عبارت «a عدد است» بدین معناست که «مجموعه‌ای است متناهی و متشکل از واحد»؛ و این نقیض این حکم است که «a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد.» با پذیرفتن صدق حکم اول از این دو حکم متناقض، در مورد حکم دوم کاری نمی‌توانیم بکنیم جز اینکه آن را به‌عنوان حکمی کاذب رد کنیم.

به‌اعتقاد من مهمترین گام تاریخی در تدارک زمینهٔ تحول ریاضیات تجربی و استقرایی ماقبل یونان به نظامی قیاسی، دقیقاً کاربرد همین روش اثبات غیر مستقیم بود. لیکن پیش از آنکه به منشأ این روش استادانه بپردازم، می‌خواهم، ولو به‌طور اجمال، دربارهٔ مشهورترین کاربرد آن در اثر اقلیدس سخن گویم. (فکر می‌کنم بسیاری این اثبات اقلیدس را به خاطر دارند، چون همهٔ ما آن را در دوران تحصیلات خود در مدرسه لااقل یک بار آموخته‌ایم.)

بنا بر قضیهٔ معروفی در حساب (IX ۲۰): «دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی است.» اثبات غیر مستقیم این قضیه به صورت زیر است. نخست نقیض حکمی را که می‌خواهیم ثابت کنیم صورت‌بندی می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که کاذب است، و بنابراین نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ اصلی باید صادق باشد.

اگر دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی نباشد، می‌توان دنبالهٔ کامل آنها را نوشت

$$۲, ۵, ۳, \ldots, P$$

که در آن P بنا بر ادعای مذکور «آخرین و بزرگترین عدد اول» به شمار می‌آید. حال ببینیم این حکم چه ایرادی دارد؟ ما می‌توانیم عددی مانند Q بسازیم (که عبارت باشد از حاصلضرب همهٔ اعداد اول به اضافهٔ یک)

$$Q=(۲\cdot۳\cdot۵\cdot\ldots\cdot P)+۱$$

عدد Q بزرگتر از P است و در نتیجه، از آنجا که بنا بر ادعای مذکور، Q نمی‌تواند عدد اول باشد، باید عددی مرکب باشد. (P، بنا بر فرض، بزرگترین عدد اول است.) بنابراین، Q باید بر عدد اولی تقسیم‌پذیر باشد. زیرا هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است. لیکن، همهٔ اعداد اول موجود، بنا بر فرض، در دنبالهٔ مذکور جای دارند. اما، حاصل تقسیم Q بر هر کدام از این اعداد باقیمانده‌ای برابر با یک دارد؛ و بنابراین، عدد اول مورد نظری که مقسوم‌علیه Q باشد هیچکدام از اعداد دنبالهٔ به‌اصطلاح کامل مورد ادعا نیست. پس با تناقضی روبرو هستیم؛ یعنی آنکه، در ابتدا حکم کردیم که: «دنبالهٔ متشکل از اعداد اول، کامل است.» ولی، از سوی دیگر، اکنون باید پذیریم که: «همان دنباله کامل نیست.»

این تناقض، نادرستی این حکم را که دنبالهٔ کامل اعداد اول را می‌توان نوشت آشکار می‌سازد. نه، این حکم نمی‌تواند صادق باشد، و در نتیجه صدق حکم مخالف آن آشکار است: «دنبالهٔ اعداد اول

نامتناهی است.»

حال، [با در نظر گرفتن این مطالب] حدس من در مورد این مسألهٔ تاریخی این است که روش اثبات غیرمستقیم را ریاضیدانان نه خود آفریدند و نه آنکه نخستین کسانی بودند که آن را مورد استفاده قرار دادند. آنان این روش را، به‌اصطلاح حاضر و آماده، از فلاسفهٔ ایلیایی گرفتند. همان طور که احتمالاً اطلاع دارید، فلاسفهٔ ایلیایی با استفاده از این روش احکام متناقض بسیاری را، که در نقطهٔ مقابل تجربهٔ متعارف قرارداشتند، اثبات می کردند. برای مثال، زنون محال بودن حرکت را به‌طور غیرمستقیم ثابت می کرد، در حالی که تجربهٔ آگاهانه نشان می‌داد که حرکت، البته، امری واقعی است.

در این مقاله مجال آن نیست که درمورد فلسفهٔ ایلیایی توضیحات بیشتری بدهم. در نتیجه به شرح مهمترین جنبه‌های آن که چارچوب ریاضیات قیاسی را هم مشخص می کند اکتفا می کنم.

دردرجهٔ اول، این فلاسفه قایل اطمینان بودن حواس را مورد سؤال قرارمی‌دادند. آنان می گفتند که: حقیقت نمی‌تواند بر تجربیات حسی استوار باشد، به اعتقادآنان علیرغم انواع شواهدی که توسط حواس و تجربهٔ روزانهٔ ما تأمین می گردند، واقعیت و احکام صادق دربارهٔ آن تنها از طریق تفکر محض قابل اثبات است، زیرا حواس و تجربه گمراه‌کننده هستند. به‌همین دلیل بود که اقلیدس می کوشید تا در اثباتهای ریاضی خود از استدلالهای بصری پرهیز کند. اعداد نمی‌توانند بیکرقابل رؤیت و قابل لمسی داشته باشند، و تنها از راه تفکر محض می‌توان به‌صدق احکام مربوط به‌آنها پی برد.

جنبهٔ دوم در دیدگاه این فلاسفه این است که: پارمنیدس، و به‌طورکلی همهٔ فلاسفهٔ ایلیایی، فقدان تناقض را تنها معیارحکم‌صادق می‌دانستند. دراینجا نیازی به‌تأکید نیست که در ریاضیات هم‌ضمانت سازگاری هر نظام بسته‌ای تنها منوط است به‌فقدان تناقض.

نقش تعیین‌کنندهٔ تناقض در همهٔ بررسیهای مربوط به صدق، این امر را هم توضیح می‌دهد که چرا فلاسفهٔ ایلیایی در نظام فلسفی خود چنان ارزش عظیمی برای اثبات غیر مستقیم قائل بودند. آنان هیچکدام از احکام خود را اثبات نمی کردند؛ به‌جای این‌کار، احکام نقیض را ردمی کردند، یعنی نشان می‌دادند که این احکام مستلزم نوعی تناقض هستند. برای مثال، پارمنیدس سه امکان را از یکدیگر تمیز می‌داد: (۱) «هستی وجود دارد»، (۲) «هستی وجود ندارد»، و (۳) «هستی وجود دارد و وجود ندارد»، آنگاه امکان دوم وسوم رابه‌عنوان احکامی آشکارا متناقض طرد می کرد، و این امر دلیل قانع کننده‌ای برای درستی امکان اول بود: «هستی وجود دارد.»

حال پرسشی که مطرح می‌شود این است که چه امری سبب شد تا ریاضیدانان این شکل بخصوص اثبات را از فلاسفه اقتباس کنند؟ به اعتقاد من به یاری این روش، اثبات واقعیت شگفت‌انگیزی در ریاضیات امکان‌پذیر گشت، که در غیر این صورت، یعنی بدون توسل به‌چنین‌شیوهٔ تفکری، هرگزقابل اثبات نبود. منظورم این واقعیت است که: نخستین ریاضیدانان یونان به‌دشواری (یا شایدبهتراست بگوییم که به محال بودن) بیان رابطهٔ ضلع و قطر یک مربع به‌وسیلهٔ اعداد، پی برده بودند. این واقعیت از این نتیجه می‌شود که این دو مقدار خطی ــ ضلع و قطر ــ مقادیری نامتوافق هستند. ولی فراموش نکنید که چرا این مفهوم (نامتوافق بودن) ــ که ازنظریه سرچشمه می گیرد و نه از تجربه ــ وارد ریاضیات شد. بنابر اثبات آن: اگر ضلع وقطر مربع متوافق باشند، یک‌عددمی‌بایست هم‌فرد باشدهم‌زوج. ریاضیدانان برای آنکه از این تناقض پرهیز کنند مجبور شدند مفهوم «نامتوافق» را تعریف کنند. بنابراین می‌بینیم که کاربرد روش اثبات غیر مستقیم به‌پیدایش وآفرینش مفهوم علمی جدیدی منجر شد. اما درست همین امر منشأ تأسیس ریاضیات بر مبنای تعاریف و اصول موضوع بود.

در نتیجه حدس من این است که: ریاضیدانان یونان تحت‌تأثیر فلسفهٔ ایلیایی علم خود را به‌نظامی قیاسی تبدیل کردند. برای آنکه این نظام را صورتی سازگار بخشند، یعنی به‌صورتی درآورند که دارای تناقض نباشد، آنان از اصول معینی آغاز می کردند که آنها را ازپیش و بدون هیچ برهانی می‌پذیرفتند. آنگاه، احکام (یا قضایا) می بایست خود را یا اصول اثبات نشده هماهنگ سازند، یعنی آنکه خود را بدون تناقض با آنها تطبیق دهند.

حال حدس خود را به‌کمک مثالهای زیر روشن می‌سازم.

پیشتر به‌بحث دربارهٔ این قضیهٔ حساب پرداختیم که: «هر عدد مرکب a بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است.» در اثبات آن خواندیم که: اگر عدد اول مطلوب پیدا نشود، معنی‌آن این خواهد بود که: عدد a بر اعدادی تقسیم‌پذیر است که دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها کوچکتر از دیگری است: امری که در مورد اعداد محال است. حال، وقتی این مطلب را در خود متن اصلی می‌خوانیم پرسشی که پدیدمی‌آید این است: چرا اقلیدس تأکید می کند که روند نامتناهی که وی توصیف کرده است «در مورد اعداد» محال است؟ از عبارات اوچنین برمی‌آید که گویا حوزهٔ دیگری وجود دارد که‌در آن، حالت مشابه این امرممکن است. این ملاحظه ما را به‌یادزنون ایلیایی می‌اندازد، زیرا نخستین بار، هم او بود که استدلال کرد جسم درحال حرکت نخست بایدنصف مسافت باقیمانده تا مقصد را بپیماید؛ لیکن این‌امرمستلزم آن است که‌نصف این‌نصف را بپیماید، والی غیرالنهایه. نکتهٔ مورد نظر زنون این بود که جسم در حال حرکت مسیری راطی می کند که از تعدادی نامتناهی فاصله تشکیل یافته است، که هر کدام کوتاهتر ازفاصلهٔ قبلی است. ولی این استدلال را می‌توان به‌صورت این ادعا هم تعبیر کرد که هر پاره‌خط مستقیمی، مانند AB، را می‌توان به‌تعدادی نامتناهی پاره‌خط تقسیم کرد به طوری که هر کدام کوتاهتر از قبلی باشد؛ اما این گفته، صرفاً بیان دیگری از این مطلب است که مفهوم‌علیه‌های AB دنباله‌ای نزولی و نامتناهی تشکیل می‌دهند. بنابراین چنین به‌نظر می‌آید که‌آثار نفوذ زنون در اثبات قضیهٔ مورد نظر ما در حساب منعکس است. زیرا واضح این اثبات راه خود را کج می کند تا این نکته را مورد تأکید قرار دهدکه اثباتش تنهابرای اعداد معتبر است، و انگیزهٔ او برای این کار احتمالاً این بوده که موردی را که زنون بررسی کرده بود، کنار گذارد.

درابتدای مقاله به‌تقسیم شاخه‌های مختلف تحقیقات علمی به‌دو گروه اصلی اشاره کردم: علوم تجربی و علوم غیر تجربی. بدون شک منشأ همهٔ علوم تجربی در نهایت تجربهٔ حسی است. لیکن، حواس‌ما قابل اعتماد نیستند. افزون بر این، روش علوم تجربی البته استقراء است، که این خود مستلزم عدم قطعیت قابل توجهی است. بنابراین علوم تجربی ما چیزی نیستند جز ــ به‌قول برخی از فلاسفهٔ امروزی ــ برنامه‌هایی تحقیقاتی، حدسهایی جسورانه وتلاشهایی صادقانه، نخست، برای تصدیق‌آنها، و سپس، برای ابطال همانها. از سوی دیگر، یقین معرفت ریاضیات قیاسی ازچه تشکیل شده است؟ بدون شک، قضایای ریاضی از راه برهان تثبیت می‌شوند، و این نشان می‌دهد که قضایای مورد نظر به‌طور منطقی از اصول نتیجه می‌شوند، به طوری که، اگر اصول صادق باشند، قضایا هم به‌یقین صادق خواهندبود. بنابراین‌یقین قضایا نسبت به اصول تعیین می‌شود. لیکن، موارد مشهوری وجود دارند که در آنها تصمیم در مورد صدق برخی اصول ریاضی امری کم‌وبیش دلخواهانه‌بوده است. (این‌موضوع را حتی درمرحلهٔ نخستین

دورهٔ باستان، یعنی لااقل درزمان قبل از ارسطو، نیز به‌خوبی می‌دانستند.) منظور من فقط اختلاف هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی نیست. (یعنی به‌اصل موضوع توازی اشاره نمی‌کنم، که نباید به طور مقدم بر قضیه در موردش تصمیم گرفت.) اصل اقلیدسی دیگری ــ از نوع اصول متعارفی ــ نیز وجود دارد که از شهرت کمتری برخوردار است: «کل بزرگتر از جزء است.» به نظر می‌آید که این اصل نه تنها در برابر استدلال شبه‌انگیز زنون موضع می‌گیرد (استدلالی که در غیر این صورت ابطال‌ناپذیر می‌بود): «نصف زمان برابر است با دوبرابر آن»، بلکه همچنین، اگر اغراق‌گویی نکنم، در برابر آن شیوهٔ تفکری هم که از ویژگیهای نظریهٔ جدید مجموعه‌هاست موضع می‌گیرد: «یک زیرمجموعهٔ نامتناهی، یک جزء واقعی از مجموعهٔ نامتناهی دیگر، با کل مجموعه معادل است.»

به‌اعتقاد من بررسی تاریخ ریاضیات باستان به‌این شکل، ممکن است به نحوی اساسی به حل مهمترین مسائل روز در زمینهٔ فلسفهٔ علم هم یاری رساند.

ترجمهٔ شاپور اعتماد

* Cohen R., Wartofsky M. (eds) *Methodology, Metaphysics and the History of Science*, 1984, D. Reidel Publishing Company, pp 283-294.

مراجع

1. Hempel C. G., *Philosophy of Natural Science*, New York, Prentice-Hall, 1966.
2. Hempel C. G., "Science unlimited?", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 3 (1973) 31-46.
3. Lakatos I., "Falsification and the methodology of scientific research programmes." In *Criticism and the Growth of Knowledge*, edited by I. Lakatos and A. Musgrave, Camberidge: Cambridge University Press, 1970, pp 91-195.
4. Polya G., *How to Solve It?*, Princeton: Princeton University Press, 1945.
5. Szabó Arpad, *Anfänge der Griechischen Mathematik*, München and Vienna: Oldenberg, 1969.

مرگ ارشمیدس به‌دست یک سرباز رومی، نمادی است از یک تغییر درجه اول در جهان؛ یونانیان نظریه‌پسند، با آن عشقی که به‌علم مجرد داشتند، به‌وسیلهٔ رومیهای عمل دوست از سروری اروپا کنار گذاشته شدند. لردبیکونفیلد در یکی از داستانهایش آدم عمل زده را کسی دانسته که خطاهای پدرانش را تکرار و تمرین می‌کند. رومیان نژادبزرگی بودند، اما به‌آن سترونی دچار شدند که در کمین عمل‌زدگی است. آنان معرفت پدرانشان را گسترش نبخشیدند و تمامی پیشرفتهایشان به‌امور جزئی کم‌اهمیتی در مهندسی محدود بود. رومیها آن‌قدر خیال‌پرداز نبودند که به‌پایگاههای نظری جدیدی برسند که می‌توانست عامل کنترل اساسیتری بر نیروهای طبیعت بشود. هیچ رومی به‌این دلیل زندگیش را از دست نداد که غرق تفکر در یک شکل ریاضی باشد.

آلفرد نورث وایتهد

چند خاطره از ریاضیدانهایی که شناخته‌ام*

جورج پولیا



جورج پولیا

پروفسور کلی[1]، خانمها و آقایان

قرارشده است که در اینجا سخنرانی کنم. ولی من خیلی پیر هستم و دوران خلاقیتم سپری شده است. چندتایی مطلب ریاضی هم که اخیراً تهیه کرده‌ام ناچیزتر و کم اهمیت‌تر از آن‌اند که بتوان درباره‌شان سخنرانی کرد. دربارهٔ کارهای گذشتهٔ خودم هم که حدود شصت سال رویشان کار کرده‌ام، حرفی گفتنی ندارم، چون برای خیلی از شماها تازگی نخواهد داشت.

خوب، پس تکلیف سخنرانی چه می‌شود؟ البته صحبتم را برای بعد از شام نمی‌گذارم و همین حالا پیش از غذا، سخنرانی می‌کنم. برایتان چند خاطره از ریاضیدانهایی که می‌شناخته‌ام نقل می‌کنم. این مطالب درجایی چاپ نشده و شاید هم در خور چاپ شدن نبوده‌اند. در واقع، اینها داستانهایی هستند که سینه به سینه نقل می‌شوند و شما هم می‌توانید در مناسبتهایی آنها را برای دوستان یا شاگردانتان تعریف کنید.

وقتی اشخاص غیر ریاضیدان دربارهٔ ریاضیدانها صحبت می‌کنند (مثلاً وقتی که همسر یك استاد دانشگاه دربارهٔ شوهر خود یا دوستان شوهرش حرف می‌زند) معمولاً این سؤال مطرح می‌شود: چه ویژگی خاصی در ریاضیدانها وجود دارد؟ ریاضیدانها با بقیهٔ مردم چه فرقی دارند؟ جوابها هم اغلب یکسان است: «ریاضیدانها حواس‌پرت‌اند»، یا «ریاضیدانها غیرعادی‌هستند.» آیا واقعاً ریاضیدانان حواس‌پرت یا غیرعادی‌اند؟ من که نمی‌دانم، ولی داستانهای زیادی در تأیید این مطلب وجود دارد که چندتایی از آنها را نقل می‌کنم، شاید بعضیهایش برایتان تکراری باشد ولی گمان نمی‌کنم همه‌شان‌را قبلاً شنیده باشید.

اول بپردازیم به موضوع حواس‌پرتی. خیلی از این داستانها دربارهٔ هیلبرت است. البته مطمئن نیستم که همهٔ اینها راست‌باشد ولی بعضیهایشان خیلی جالب‌اند. یکی از این داستانهای خیلی معروف از این قرار است: در یك مهمانی که در خانهٔ هیلبرت برپا شده بود، خانم هیلبرت ناگهان‌متوجه می‌شود که شوهرش فراموش کرده پیرهن تمیز بپوشد. با لحنی جدی به هیلبرت می‌گوید: «دیوید، برو اتاق بالا و پیرهن دیگری بپوش.» دیوید هم همان‌طور که از یك مرد متأهل جا افتاده انتظار می‌رود، مؤدبانه اطاعت می‌کند و راهی طبقهٔ بالا می‌شود. ولی به پایین برنمی‌گردد...، ده دقیقه می‌گذرد، ولی از هیلبرت خبری نمی‌شود. بالاخره خانم هیلبرت به اتاق خواب سر می‌زند و می‌بیند که هیلبرت به رختخواب رفته است. مطلب از این قرار بود که برای هیلبرت طبیعی‌ترین‌کار بعد از کندن کت و درآوردن کراوات و پیرهن، رفتن به رختخواب بود.

داستان دیگری هم هست که به‌آن علاقهٔ خاصی دارم، زیرا مرا به‌یاد گوتینگن قدیم می‌اندازد، جایی که بیش از نیم قرن پیش در آن تحصیل می‌کردم. آدی... در آن زمانها در دانشگاه گوتینگن تشریفات خاصی وجود داشت. هرمدرس جدید که به‌دانشگاه می‌آمد، باید خودش را رسماً به همکاران معرفی می‌کرد. برای این کار کت سیاهی می‌پوشید، کلاه بلند ابریشمی به سر می‌گذاشت، در تاکسی می‌نشست وروانهٔ کوی مسکونی دانشگاه می‌شد. تاکسی جلوی درهر خانه می‌ایستاد و همکار جدید کارت ویزیت خود را دم در ارائه می‌کرد. گاهی‌اوقات‌جواب می‌آمد که جناب استاد در منزل تشریف ندارند، ولی وقتی جناب استاد درمنزل بود، همکارجدید قاعدتاً باید وارد می‌شد و چند دقیقه‌ای خوش و بش می‌کرد. روزی یکی از این همکارهای‌تازه به‌خانهٔ‌هیلبرت آمد. هیلبرت‌تصمیم گرفت(یا خانم‌هیلبرت ازجانب‌اوتصمیم گرفت) که‌حضورش‌را درخانه‌اعلام کند. به‌این‌ترتیب، همکار جدید وارد خانه‌شد، نشست، کلاهش را برداشت و سر صحبت را باز کرد. تا اینجای قضیه اشکالی نداشت، ولی او ازصحبت باز نمی‌ایستاد. هیلبرت هم‌ـ که گویا این دیدار رشتهٔ تفکرات ریاضی او را پاره کرده بود ـ بیتاب‌تر و بیتاب‌تر می‌شد. فکرمی‌کنید آخرسرچکار کرد؟ کلاه ابریشمی را از زمین‌برداشت وسرش گذاشت، دست همسرش را گرفت و گفت: «عزیزم، فکر می‌کنم به اندازهٔ کافی مزاحم‌وقت آقای همکارمان شده‌ایم» و ازخانهٔ خود خارج شد.

1. Klee



دیوید هیلبرت

درمورد ریاضیدانهای کم حافظه داستانهای معتبری وجود دارد؛ مثلاً می‌گویند که نیوتن وقتی روی مسأله‌ای شدیداً کار می‌کرد، اغلب یادش می‌رفت غذای خود را بخورد، یا وقتی غذایش را می‌خورد، فراموش می‌کرد که غذا خورده است. البته داستانهای دیگر اعتبار کمتری دارند.

داستان زیر را از تئودور فون کارمان[1] شنیده‌ام ولی تضمین نمی‌کنم که واقعاً چنین چیزی رخ داده باشد. راستش را بخواهید او به داستانهای جالب خیلی علاقه‌مند بود و بهترین داستانها هم اغلب واقعی نیستند، بلکه پرداختهٔ ذهن اشخاص‌اند. در آن ایام فون کارمان دو سمت داشت: هم استاد دانشگاه آخن در آلمان بود و هم در کلتک[2] پاسادنا (کالیفرنیا) تدریس می‌کرد. ضمناً به‌عنوان مهندسی چیره‌دست در رشتهٔ فضانوردی، طرف مشورت چند مؤسسهٔ هواپیمایی بود. به همین علت هم همروقت در هواپیمای یکی از این مؤسسات صندلی خالی یافت می‌شد، می‌توانست به رایگان با آن سفر کند. به این ترتیب بین آخن و پاسادنا رفت و آمد کم و بیش منظمی داشت. در هر دو جا هم یک درس را می‌داد. یک بار، وقتی به پاسادنا رسید خیلی خسته بود. با این حال شروع به درس دادن کرد. این کار چندان دشوار نبود، زیرا یادداشتهایی را که در آخن هم از آنها استفاده کرده بود، به همراه داشت. کارمان درس را شروع کرد ولی هرچه به دوروبرش می‌نگریست احساس می‌کرد که شنوندگانش بیش از همیشه مبهوت مانده‌اند. تازه پی‌برد که اوضاع از چه قرار است؛ او داشت به زبان آلمانی صحبت می‌کرد! خیلی ناراحت شد. «حقش بود به من تذکر می‌دادید چرا چیزی نگفتید؟» دانشجویان ساکت بودند، ولی بالاخره صدای یکی بلند شد که: «ناراحت نباشید استاد؛ چه آلمانی صحبت کنید، چه انگلیسی، ما به یک اندازه از موضوع سر درمی‌آوریم.»

اما زیباترین داستانی که سراغ دارم، دربارهٔ نوربی[3] ــ یعنی همان نوربرت وینر[4] ــ است. (اسم «نوربی» را ضمن گفتگوی وینر با یکی از دوستانش شنیدم. وینر به دوستش گفت: «اعتراف کن که در

1. Theodore von Kármán 2. Cal Tech 3. Norbie
4. Norbert Wiener

غیاب من مرا وینی صدا می‌کنید.» دوستش هم جواب داد که «نخیر، نوربی صدایت می‌کنیم.») حالا ماجرایی را برایتان تعریف می‌کنم که خیلی جاها گفته شده است، ولی چندان حقیقت ندارد. موضوع دربارهٔ دانشجویی است که وینر را بسیار ستایش می‌کرد، ولی هیچوقت مجالی برای صحبت با او نمی‌یافت. یک روز صبح این دانشجو به ادارهٔ پست رفت. درآنجا وینر را دید که یک برگ کاغذ روی نیمکت جلویش گذاشته و غرق در تفکر به آن خیره شده است؛ ناگهان وینر با شتاب به‌سویی روانه شد و دوباره به سر وقت کاغذ برگشت و با همان حالت تفکر عمیق به آن چشم دوخت. دانشجو ازمشاهدهٔ این تلاش فکری فوق‌العاده که در حرکات وینر دیده می‌شد، سخت تحت تأثیر قرار گرفته بود. در این حال، مردد بود که برود با وینر صحبت کند یا نه. اما ناگهان تردیدش برطرف شد، زیرا وینر که دوباره داشت ازکاغذش دور می‌شد، یکسره به سوی او آمد. دانشجو ناگزیر به‌حرف درآمد: «صبح بخیر، استاد وینر.» وینر درنگی کرد، قدری مبهوت ماند، دستش را به پیشانی کوبید و گفت: «آهان...! وینر...! دنبال همین کلمه می‌گشتم.»

در این زمینه داستان بهتری به‌خاطر ندارم که برایتان بگویم. پس برویم به سر وقت سؤال دوم: آیا ریاضیدانها اشخاصی غیر عادی‌اند؟ آیا افرادی غیرطبیعی و عجیب و غریب هستند؟

البته پاسخ به تعبیری مثبت است. ریاضیدان واقعی بودن، یعنی عمدهٔ تلاش خود را نه در راه کسب ثروت یا خدمتگزاری به‌مافوق خود، بلکه صرفاً دراندیشیدن به ریاضیات صرف کردن، البته رفتاری غیرمتعارف است. پس بهتر است سؤال را به این صورت طرح کنیم: آیا اگر ازاین جنبه بگذریم، بازهم ریاضیدانها غیرعادی‌اند؟

جواب این سؤال را نمی‌دانم. وقتی به ریاضیدانهایی فکر می‌کنم که آنها را نسبتاً بهتر شناخته‌ام، ترجیح می‌دهم که ازهرگونه قضاوت کلی پرهیز کنم. بگذارید برایتان از سه ریاضیدان که از نزدیک آنها را شناخته‌ام صحبت کنم: لئوپولد (لیپوت) فه‌یر[1] (۱۸۸۰–۱۹۵۹)، آدولف هورویتس[2] (۱۸۵۹–۱۹۱۹) و گادفری هارولد هاردی[3] (۱۸۷۷–۱۹۴۷). با هریک از این سه تن آشنایی چندین ساله داشته‌ام و افتخار کارکردن با هرسهٔ آنها نصیبم شده‌است



نوربرت وینر

1. Leopold (Lipòt) Fejer 2. Adolf Hurwitz
3. Godfrey Harold Hardy



گادفری هارولد هاردی

و از هرسهٔ آنها با تمام وجود سپاسگزارم. بد نیست قدری ازشیوهٔ زندگی، شخصیت و نحوهٔ کارکردن آنها برایتان صحبت کنم و (چون چیزی به وقت‌غذا نمانده است)تنها بذکر چند داستان گویا بپردازم.

لیپوت فه‌یر درمجارستان بـه دنیا آمد. در حدود بیست سال داشت که «قضیهٔ فه‌یر» را کشف کرد. این قضیه دربارهٔ میانگینهای حسابی سری‌فوریه است،ولی‌درابنجا وارد بحث‌درجزئیات‌ریاضی آن نمی‌شوم. رسالهٔ‌دکترای‌اوهم به‌همین‌قضیه‌مربوط است(فه‌یر دکترایش را در ۲۲ سالگی گرفت). پس از آن نیز وی بـارهـا و بـارهـا بـه سراغ کشف اولـیه‌اش رفـت: بیانهای بهتر، همسانیهای تازه و گسترشهای جدیدی برای آن یافت و مضمون اساسی این قضیه رادر حوزه‌های مجاور نیزپیگیری‌کرد. گرچه فه‌یر به نکات جالب دیگری در سایر زمینه‌ها نیزدست‌یافت، این کشف اولیه‌همچنان محورکارهای او باقی ماند.

خواندن مقاله‌های فه‌یرکه با روانی خاصی نوشته‌شده‌اندبسیار آسان است. این امر ناشی ازسبک‌کار اوست: وقتی نکته‌ای می‌یافت، توجهش مشتاقانه روی آن متمرکز می‌شد. سعی می‌کرد آن را هرچه کامل‌تر وساده‌ترکند وازفرعیات بپرایید. بادقت وباریک بینی موضوع را دنبال می‌کـرد تـا آن نکته روشن و ساده شود. سرانجام حاصل کارش همچون اثری هنری، کم‌حجم وبسیار پاکیزه ازآب درمی‌آمد.

وی علاوه برریاضیات قریحهٔ هنری نیزداشت. به‌موسیقی عشق می‌ورزیـد و خود پیانو می‌نـواخت. استعداد خاصی درداستان گفتن داشت و یك پا «نقال» بود. موقع داستان گفتن ادای قهرمانهایش را درمی‌آورد و بـا لحن خاصی جملات را ادا می‌کـرد. خیلی دوست داشت‌دربارهٔ معلمش صحبت کند؛ همان کسی که‌عامل غیرمستقیم‌موفقیت وی‌در نخستین‌کشفش بود: هرمان آماندوس شوارتس[1]. وقتی از بدبیاریهای این ریاضیدان بزرگ تعریف می‌کـرد، تماشایی می‌شد و انسان نمی‌توانست از خنده خودداری کند.

این‌گونه‌گویی استعدادها تا حدی مربوط است به‌این سؤال‌که بارها شنیده‌ام: چـرا مجارستان این همه ریاضیدان درخود پرورانده است؟ مجارستان کشور کوچکی بود (وامـروز حتی کوچکتر هم شده است)؛ ازلحاظ‌صنعتی‌چندان‌پیشرفته نبود. بااین‌وجود، تعداد فوق‌العاده چشمگیری ریاضیدان ازآنجا برخاسته‌اندکه عده‌ای ازآنها درهمین جا [آمریکا] فعالیت داشته‌اند. علت این پدیده چیست؟ پاسخ جامعی دراین‌مورد وجودندارد. به‌نظرمن مجارستان علاوه‌براین ریاضیدانها، عدهٔ زیادی موسیقیدان ونیز تعدادی فیزیکدان عرضه‌کرده است. ولی فکرمی‌کنم تا جایی‌که به‌ریاضیدانها مربوط است، بخش عمدهٔ پاسخ را می‌توان در شخصیت فه‌یر یافت. او باموفقیتی‌که در کارخودکسب کرد و نیز براثر جاذبهٔ شخصیتش، افراد زیادی را به‌سوی‌ریاضیات کشاند. خیلی وقتها در کافه‌ای‌که پاتوقش بود می‌نشست. در آنجـا جوانهایی دور و برش را می‌گرفتندکه به او عشق می‌ورزیدند ودر همان‌حال‌که اوروی برگه‌های فهرست‌غذا فرمول می‌نوشت وبی‌دربی ازریاضیات صحبت‌می‌کرد وداستانهایی‌دربارهٔ ریاضیدانان می‌گفت، سعی می‌کردند از روش او تقلید کنند. می‌توان گفت که تقریباً همهٔ ریاضیدانهای مجارستانی که معاصر او یا قدری جوانتر از اوبودند تحت نفوذ شخصیت وی قرار داشتند و خیلی از آنها زندگی ریاضی خود را با کار روی مسأله‌های او آغاز کردند.

برای تکمیل این‌تصویر ازفه‌یر، باید چند مورد ازبذله‌گوییهایش را که خودم از او شنیده‌ام نقل‌کنم.

یکی از این ماجراها ضمن یك گردهمایی در آلمان رخ داد. در آن ایام من «استاد بـدون کرسی»[1] بودم. نمی‌توانم دقیقاً معنـی چنین سمتی را توضیح بدهم. این شغل از لحاظ مالـی چندان قابل اتکا نیست. سمتی‌است تقریباً ــ وتقریباً ــ شبیه استادیار؛ جای‌شکرش باقی است کـه این روزهـا چنین سمتی رفته‌رفته به‌فراموشی سپرده مـی‌شود. من ازدواج کـرده بـودم و همـسرم از ریاضیدانها عکس می‌گرفت. یك‌بارهم جلوی دانشگاه، توی خیابان ودرمسیرعبورماشینها جلوی فه‌یر را کـه بـا سه چهارتن از دوستانش ازآنجا می گذشت گرفت و ازآنها عکسی برداشت ومی‌خواست عکس بعدی را بگیرد که صدای فه‌یر بلند شد: «چه همسر خوبی! این همه استاد رسمی را یکجا سرراه اتومبیلها نگهداشته تا بلکه ماشین آنها را زیر بگیرد و شوهرش بتواند شغلی دست وپا کند.»

دریك گردهمایی دیگر (کـه سالها بعد برگزار شد) فه‌یر از دست یك ریـاضیدان مجارستانی‌که توپولوژی‌دان بود و اسمش را اینجا نمی‌بـرم، خیلی عصبانی شد (و عصبانیتش هم بـی‌دلیل نبود). مدتی با فه‌یر این‌سو وآن‌سو قدم زدیم واویکسره درمورد آن‌شخص صحبت می‌کرد. بالاخره‌حرفش را بااین‌جمله به‌پایان رساند: «چیزی که او می‌گوید نگاشتی توپولـوژیك ازحقیقت است.» خودتان بهتر می‌دانیدکه چنین نگاشتی تا چه حد می‌تواند تحریف شده باشد.

از مطلب اصلی دور نشویم: آیا فه‌یر فردی غیر عادی بود؟ از حرفهای فوق‌که بگذریم، اگر او را درلباس محلی بوهمی (که‌گمان می‌کنم حساب شده انتخاب شده بـود) مـی‌دیدید، حتماً به نظرتان خیلی عجیب جلوه می‌کرد. اما این سروضع درمکان طبیعی او، یعنی در میان طبقهٔ متوسط بوداپست، عجیب تلقی نمی‌شد، زیـرا خیلی از اهالی آنجا هم در همان هیأت ظاهر می‌شدند، هـر چند رفتار او را نداشتند. درآنجا هم فه‌یر به‌خاطر خصوصیات ویژه‌اش دست‌کم نیمه عجیب به‌شمار می‌آمد.

آدولف هورویتس ازیك لحاظ خیلی بـه فه‌یر شباهت داشت: ازلحاظ سبك نـوشته هـا. فلیکس کلاین در کتاب تاریخ ریاضیات در قرن نوزدهم هورویتس را «موجز نویس» خوانده است. ایجاز، سخن کوتاه و پرمعنی گفتن است. سخن موجز، به ظاهـر کوتاه است ولی

1. Hermann Amandus Schwarz

1. Privatdozent

همین کوتاه‌شدن ممکن‌است مستلزم‌کاری طولانی‌بوده باشد. هورویتس هم روی موضوعهای مورد علاقه‌اش مشتاقانه کار می‌کرد تا به ساده‌ترین بیان ممکن‌که روشن و عاری از هرگونه پیرایه و مطلب اضافی باشد دست یابد. وی ازیك لحاظ دیگر هم به فه‌یر شباهت داشت. او هم مسائلی را ترجیح می‌داد که چندان بزرگ نباشند ودرنتیجه بتوان آنها را با روشنی هرچه بیشتری بیان‌کرد. ولی قلمروکار او بسیار گسترده‌تر ازفه‌یر بود. اوبه‌طیف گستردهٔ ریاضیات عصر خود، تاحدی که درآغازقرن حاضر ممکن بود، تسلط داشت. بسیاری ازدانسته‌های خود را هم از سرچشمهٔ اصلی فرا گرفته بود: نظریهٔ اعداد وجبر را ازکومرو کرونکر، تغییرریمانی متغیرهای مختلط را از فلیکس کلاین، و تعبیر وایرشتراسی این مبحث را از خود وایرشتراس. دربارهٔ تسلط او به زمینه‌های گستردهٔ ریاضیات، دیگران خیلی بهتر ازآنچه درتوان من است سخن گفته‌اند واین کار را هیلبرت به بهترین وجه ممکن در زندگینامهٔ سرآغاز مجموعهٔ آثار هورویتس انجام داده است.

آری، مقاله‌های هورویتس نمونه‌هایی از فشرده نویسی هستند. او درقلمروگستردهٔ معلومات ریاضیش مسائل مشخص ومهمی را یا راه حلهای فوق‌العاده ساده مطرح‌کرد وجوابها را نیز بطورکامل به‌دست داد. مثلاً می‌توانید دوصفحه از مجموعهٔ آثار اورا زیر عنوان «اثبات متعالی بودن عدد e» بخوانید.

ازیك لحاظ دیگرهم بین او وفه‌یرتشابه وجود داشت: موسیقی در زندگی هورویتس جای مهمی داشت واو خود پیانو را عالی می‌نواخت. درواقع، طی سالهای جوانی مردد بودکه ریاضیدان شود یا پیانو نواز ــ خوشبختانه به ضرر پیانو تصمیم گرفت.

وجوه تشابه دراینجابه‌پایان می‌رسد. شخصیت هورویتس و فه‌یر بسیار متفاوت بود. پیش از هرچیز، کوچکترین نشانی از سرو وضع بوهمی یا ظاهرغیرعادی در هورویتس یافت نمی‌شد. اوهمیشه مؤدب، کم حرف، دور از خودنمایی و فوق‌العاده فروتن بود. معمولاً در برخورد با خدمتکاران همسایگانش به‌احترام کلاه ازسر برمی‌داشت. برای یك بیگانه اصلاً قابل تصور نبودکه درپشت این ظاهر بی‌ادعا، چیزی بیش از یك شخصیت محترم طبقهٔ متوسط وجود داشته باشد. تنها کسانی‌که آثارش را می‌خواندند یا سر درسش حاضر می‌شدند قادربه‌تصورچنین چیزی بودند وتنها کسانی‌که او را بهترمی‌شناختند، به احساس مسؤولیت شدید و دلبستگی عمیق وی به حقیقت و سادگی پی می‌بردند.

هرگز نشنیدم که هورویتس سخن تندی در میان جمع بر زبان آورده‌باشد. ولی درمحفل خانوادگی یا درجمع دوستان نزدیك گاهی حرف نیشدار یا کنایه‌آمیزی از اوشنیده می‌شد. برای داستانی که الان می‌خواهم بگویم ذکر مقدمه‌ای لازم است. هورویتس در انجام وظایف خود به عنوان یك استاد با وجدان، راهنمای بسیاری از دانشجویان دورهٔ دکترا بود و رفتارش با آنها با دلسوزی وشکیبایی همراه بود. دربین این افرادکسانی بودند که به‌کمك زیادی نیاز داشتند وحتی کار به‌جایی کشیدکه یك‌بار هورویتس صبور این‌جمله را برزبان آورد: «رسالهٔ دکترا مقاله‌ای است که توسط استاد راهنما نوشته می‌شود، منتهی با اعمال شاقه.»

هاردی یك‌وجه تشابه‌عمده با فه‌یرداشت. فه‌یر به‌عنوان یك‌نمونهٔ قابل‌تقلید، باشخصیت گیرا وتلاش فردی‌خودموجب گسترش ریاضیات درمجارستان شد، هاردی هم درانگلستان نقشی بسیارشبیه وی داشت. وجوه تشابه‌این‌دو در همین‌جا به‌پایان می‌رسد. در سایرموارد، شرایط محیطی و خصوصیات فردی آن دوبسیار متفاوت است.

ریاضیات کاربردی در انگلستان پایه‌های نیرومندی داشت که از نیوتن آغاز می‌شد. ولی نقش انگلستان در ریاضیات محض که عمدتاً در فرانسه و آلمان گسترش یافته بود، بدین حد نمی‌رسید. هاردی بر ریاضیات محض تأکید داشت و همین تأکید او روندکار ریاضی را درانگلستان دگرگون‌کرد. (می‌توان بعضی از قضاوتهای غیر منصفانه و غیر عادلانهٔ او را در مورد ریاضیات کاربردی نادیده گرفت.)

سبك نوشتن هاردی خیلی پاکیزه و روان بود، ولی خواندن مقاله‌هایش ــ به‌خصوص برخی ازمقاله‌هایی که‌مشترکاً با لیتلوود نوشته‌ــ کار چندان آسانی نیست. مسأله‌ها بسیار دشوار وروشها هم به ناگزیر خیلی پیچیده هستند. او به‌سادگی مطالب اهمیت می‌داد، ولی از نظر او مهمترین چیز درریاضیات نه‌سادگی، بلکه توانمندی و چیرگی بر موانع بزرگی بودکه دیگران نومیدانه رهایشان کرده بودند. او خودتوان‌ریاضی عظیمی داشت وفرضیهٔ‌ریمان اورا مجذوب کرده‌بود.

(مسائل نسبتاً عینی، ازقبیل اثبات فرضیهٔ‌ریمان این روزها کمتر مورد بحث قرار می‌گیرند. این پدیده دلایل مثبت و منفی خاص خود را دارد. البته اگرلیتلوود دراینجا حضورداشت، وسط حرفم می‌دوید و می‌گفت: «این عوامل عمدتاً منفی‌اند.»)

باگذشت چند دهه، اوضاع تغییرکرد وجا دارد اینجا داستانی برایتان نقل‌کنم، هرچندکه مقدمه‌ای طولانی لازم دارد.

در آلمان افسانه‌ای راجع به امپراتور باربروسا، فردریك اول، وجود دارد. مردم عادی در آلمان این شخص را دوست داشتند و پس از مرگ وی دریك جنگ صلیبی و مدفون شدنش درگوری دورافتاده، این افسانه برسر زبانها افتادکه او زنده است و درغاری واقع درکوهستان کوف‌هویزر[1] به‌خواب رفته است. اما هر وقت آلمان به اونیاز داشته باشد، حتی پس از گذشت صدها سال، بیدار می‌شود و از غار بیرون می‌آید.

می گویند یك‌بارکسی ازهیلبرت‌پرسید: «اگرشماهم مثل باربروسا، پس از پانصد سال زنده می‌شدید، چکار می‌کردید؟» هیلبرت پاسخ داد: «می‌پرسیدم آیا کسی فرضیهٔ ریمان را اثبات‌کرده است؟»

دوباره به سروقت هاردی برگردیم. ماجراهای گفتنی دربارهٔ او زیاد است. ظاهراً او در هر جمعی غیرعادی به‌شمار می‌آمد، حتی درکالجهای آکسفورد وکمبریج که درآنجاها رفتار غیرعادی را تحمل و بلکه تشویق می‌کردند. هاردی فوق‌العاده خوش‌تیپ بود و وقتی‌اسموکینگ می‌پوشید ابهت خاصی‌پیدا می‌کرد. وگاهی اوقات، به‌خصوص هنگام سفر به‌خارج ازانگلستان ژاکت بیقواره‌ای می‌پوشید ــ گرچه این هم نوعی بیقوارگی هنرمندانه بود و خوش‌تیپی او را برهم نمی‌زد.

دیدگاه او دربارهٔ همه چیز کاملاً فردی و مشخص بود: گربه را دوست داشت ولی ازسگ خیلی بدش می‌آمد. عاشق بازی کریکت بود اما قایقرانی را کار بیخودی می‌دانست. (هاردی به‌کمبریج تعلق داشت ولی مدتی استادآکسفورد شد. روزی درآکسفورد شخصی که با خلق وخوی او آشنا نبود ازاوپرسید: «شما طرفدارتیمهای ورزشی کدام دانشگاه هستید؟» هاردی گفت: «بستگی دارد به‌نوع ورزش، درکریکت طرفدارکمبریج هستم و درقایقرانی طرفدارآکسفورد.»)

هاردی دوست داشت که خونسردانه دیدگاههایی ابرازکندکه برای طرف مقابل کاملاً غیر مترقبه باشد. همچنین دوست داشت که صرفاً به‌خاطرآنکه بحث جالبی راه بیفتد از آنها دفاع کند، زیرا از بحث کردن خوشش می‌آمد. به‌لطیفه گفتن هم خیلی علاقه‌مند بود.

---

1. Kyffhaüser

ماجراهای مربوط به لطیفه گویهای هاردی تمامی ندارد ولی بهتر است جلوی خودم را بگیرم و باعث نشوم که برنامهٔ غذا خیلی عقب بیفتد. اما یك قضیه را که به‌خودم مربوط می‌شود حتماً باید تعریف کنم. یك‌بار ضمن کار با هاردی نکته‌ای را مطرح کردم که برای هاردی هم جالب بود. ولی بعداً درست وحسابی روی آن نکته کار نکردم و این امر موجب ناخشنودی هاردی شد. البته به‌خود من چیزی نگفت. ولی موضوع وقتی آشکار شد که او به‌همراه مادسل‌ریس به‌دیدن باغ‌وحشی درسوئد رفته بود. در یك قفس خرسی دیده می‌شد. قفس دری داشت وقفلی به درآویزان بود. خرس قفل را بو می‌کشید، بر آن پنجه می‌کوبید، سپس قدری خروخر می‌کرد و برمی‌گشت و مشغول قدم زدن می‌شد. هاردی با دیدن این صحنه گفت: «این هم مثل پولیاست، نکته را خوب پیدا می‌کند ولی تا آخر پی قضیه را نمی‌گیرد».

هاردی عاشق آفتاب بود اما درانگلستان هوا زیاد آفتابی نمی‌شود. به‌همین سبب‌هرسال درتعطیلات تابستانی به‌محض تمام‌شدن فصل بازی کریکت به قاره (اروپا) می‌رفت و به دیدار دوستان می‌پرداخت. دوست اصلیش هارالد بور بود. برنامهٔ ملاقات آنها ثابت بود. اول می‌نشستند و صحبت می‌کردند، بعد قدمی با هم می‌زدند. وقتی به صحبت می‌نشستند، دستور جلسه‌ای تهیه می‌کردند و روی کاغذ می‌آوردند. اولین مادهٔ دستور جلسه همیشه یکسان بود: «فرضیهٔ ریمان اثبات شود.» لابد می‌دانید که این ماده هرگز اجرا نشد. با این حال هاردی اصرار داشت که هربار آن را بنویسند.

بدون ذکر لطیفهٔ اصلی مربوط به هاردی، تصویری که از او داده‌ام ناقص خواهد بود: تقدیرآسمانی با اوخصومت شخصی داشت. قضیه ازاین قرار بود که به‌نظرهاردی، تقدیرآسمانی وظیفه‌ای مبرمتر ازآزاردادن اوتداشت. دراین باب داستانهای بیشماری وجود دارد که معروفترین آنها را برایتان نقل می‌کنم.

هاردی به‌همراه بور تاپایان تعطیلات‌تابستان دردانمارك مانده بود ووقتی‌لازم شدکه برای شروع کار تدریسش به انگلستان برگردد تنها قایق‌کوچکی در دسترس بود (در آن ایام رفت وآمد با هواپیما مقدور نبود). دریای شمال‌کم و بیش متلاطم بود و احتمال غرق‌شدن چنین قایق‌کوچکی دقیقاً صفر نبود. با این حال هاردی با قایق روانه شد. ضمناً کارت پستالی با این مضمون برای بور فرستاد: «من فرضیهٔ ریمان را اثبات کردم. هاردی.» برایتان جالب خواهد بود که علت این کارش را بدانید. فلسفهٔ کار هاردی این بود که: اگر قایق درآب فرو می‌رفت و هاردی غرق می‌شد، همه باید باور می‌کردند که او فرضیهٔ ریمان را ثابت کرده است. ولی تقدیرآسمانی برآن بود که چنین افتخار عظیمی نصیب هاردی نشود و به همین علت نگذاشت قایق غرق شود.

من این داستان را باور می‌کنم، چون تقریباً عین همین قضیه در حضور من رخ داد. یك تابستان دیگر، هاردی در انگلبرگ واقع در یکی از دره‌های آلپ در سویس بود. ما درآنجا کلبه‌ای داشتیم. او دوستدار آفتاب بود ولی یکسره باران می‌بارید وچون کاردیگری نمی‌شدکرد، بریج بازی می‌کردیم. بازیکنان عبارت‌بودند ازهاردی که بریج باز ماهری بود، همسرم، خودم و یکی از دوستان ریاضیدان و فیلسوف من به نام گونست. پس از مدتی گونست ناگزیر شد ازآنجا برود و باید خودش را به قطاری می‌رساند. من شاهد بودم که هاردی به گونست می‌گفت: «لطفاً وقتی قطار به‌راه افتاد، پنجره را بازکن، سرت را از پنجره بیرون ببر و روبه آسمان فریاد بزن: من هاردی هستم.» به‌گمانم بعضیهایتان متوجه موضوع شده‌اید. منظور هاردی این بود که: وقتی تقدیر آسمانی تصورکند که هاردی از اینجا رفته است، برای ناراحت‌کردن او هم که شده، هوا را آفتابی می‌کند.

امیدوارم که غذایتان خیلی دیر نشده باشد. متشکرم.

ترجمهٔ محمد باقری

• این مقاله، متن سخنرانی جورج پولیاست که از متنی زیر ترجمه شده است.

Pólya G., "Some mathematicians I have known", *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969) 746-753.

به‌عقیدهٔ من علم ریاضی یك کل تجزیه‌ناپذیر است، جانداری است که زندگیش مشروط به ارتباط اجزای آن است؛ زیرا با همهٔ تنوعی که دانش ریاضی دارد، بازهم از شباهت ابزارهای منطقی، ارتباط ایده‌ها در کل ریاضیات و تشابهات فراوان در بخشهای گوناگون آن به‌خوبی آگاهیم. همچنین می‌بینیم که هرچه یك نظریهٔ ریاضی بیشتر گسترش می‌یابد، ساخت آن به‌صورت هماهنگ‌تر و یکنواخت‌تری پیش می‌رود و رابطه‌های غیرمنتظره‌ای بین شاخه‌هایی که قبلاً جدا از هم بودند، آشکار می‌شود. با گسترش ریاضیات، سرشت آن به‌عنوان یك موجود زنده از میان نمی‌رود بلکه با وضوح بیشتری جلوه می‌کند.

دیوید هیلبرت

صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۱)

آرتور جفی

در سال ۱۹۸۴ «بنیاد ملی علوم» در ایالات متحدهٔ آمریکا کمیته‌ای برای بررسی وضع ریاضیات در آن کشور تشکیل داده ریاست کمیته با ادوارد ویوید بود که ازمشاوران کاخ سفید و رئیس بخش تحقیقات کمپانی اکسون است. نتیجهٔ بررسیهای این کمیته به‌گزارش دیویده معروف شده است. انتشار این گزارش موجب افزایش حمایتهای مادی و معنوی از آموزش و پژوهش ریاضی در آمریکا شده است. مقاله‌ای که در زیر می‌خوانید ترجمهٔ یکی از پیوستهای این گزارش است که به‌علت طولانی بودن آن، در چند شماره خواهد آمد.

۱. ریاضیات

ریاضیات هنری است باستانی، و از همان آغاز از جملهٔ ذهنیترین و درعین‌حال عملیترین تلاشهای آدمی به‌شمار آمده است. از ۱۸۰۰ سال پیش ازمیلاد، بابلیها در زمینهٔ خواص تجریدی اعداد به‌پژوهش پرداختند، و در یونان دوران تمدن آتن، هندسه درحوزهٔ فعالیتهای ذهنی انسان بلندترین جایگاه را از آن خود کرد. ریاضیات، درکنار این جنبه‌های ادراکی‌نظری، به‌صورت ابزاری که‌هرروز برای مساحی زمین، دریانوردی، و ساختن بناهای بزرگ مورد نیاز بود، شکوفا شد. مسائل عملی و پیامدهای نظری یکدیگر را برانگیختند؛ تفکیک این دو رشته همواره ناممکن بوده است.

امروزه نیز وضع به‌همین منوال است. درقرن بیستم، دامنه وتنوع ریاضیات گسترش یافته وپیچیدگی و تجرید آن عمق پیدا کرده‌است. این رونق ناگهانی پژوهشهای ریاضی چندان ژرف بوده است که ممکن است حوزه‌هایی از ریاضیات برای افراد عامی ــ و در موارد زیادی حتی برای ریاضیدانانی که در زمینه‌های دیگری کار می‌کنند ــ نامفهوم به نظر برسد. علی‌رغم این‌روند به سوی تخصصی شدن ــ و در واقع به علت آن ــ ریاضیات بیش از هر زمان دیگری ملموس شده و نقش حیاتی یافته است.

در ربع قرن گذشته، ریاضیات و روشهای ریاضی به جزءلاینفک، فراگیر، و اساسی علوم، تکنولوژی، و تجارت تبدیل شده است. در جامعهٔ ما که تکنولوژیگراست، بیسوادی جای خود را به‌ناتوانی در درک یا به‌کارگیری ریاضیات، که تمابانگر یک شکاف آموزشی است، سپرده است. می‌توان سهم ریاضیات را در جامعهٔ تکنولوژیک ما با نیاز موجود زنده به هوا و غذا مقایسه کرد. در واقع، می‌توان گفت که ما درعصر ریاضیات زندگی می‌کنیم ــ فرهنگ ما «ریاضی‌سازی» شده است. هیچیک از آثار ریاضیات در پیرامون ما شگفتی‌آفرینتر از این کامپیوتری که درهمه‌جا حضوردارد، نیست؛ به‌چند نمونهٔ معدود تأثیر کامپیوتر برزندگی خود نظری کنیم:

هواپیمایی. هم‌اکنون هواپیماهای خطوط هوایی تجاری می‌توانند درفرودگاهها فرود آیند بدون آنکه خلبان حتی ابزار کنترل را لمس کند. داده‌هایی در خصوص سرعت و موضع هواپیما به‌طور خودکار برای دستگاهی به نام پالایهٔ کالمن ـ باسی[1] رله می‌شود. این دستگاه با پیدا کردن پیوستهٔ «بهترین برازش با دوش کمترین مربعها» برای تقریب مرتبهٔ اول قوانین فیزیک نیوتنی، هواپیما را به پرواز درمی‌آورد. «پالایه‌های حالتی» مشابه،موشکها وفضاکاوها وماهواره‌های ردیاب را راهنمایی می‌کنند. این‌ماهواره‌ها وموشکها عکسهای مهمی را به‌زمین مخابره می‌کنند، که از طریق «تجزیهٔ طیفی» با کامپیوتر آنها را واضحتر و روشنتر می‌کنند.

پزشکی. نمونه‌گیری بزرگ مقیاس داده‌ها، پژوهشهای پزشکی را برای‌یافتن همبستگی بیماریها با الگوهای سبک زندگی وتغذیه امکان‌پذیر می‌سازد؛ از این‌رو، تحلیل داده‌ها بررسی عامی از واگیرشناسی (اپیدمیولوژی) را ممکن می‌سازد. کامپیوترها با تدارک تجزیهٔ خودکار خون و ادرار و نیز برش‌نگاری (توموگرافی) به‌کمک کامپیوتر (سی‌تی‌اسکن)[2] از اندامهای درونی، انقلابی در تشخیص بیماریها برپا کرده‌اند. کامپیوترها به‌زودی قادر خواهند بود با انجام آزمونهای ساده، و آزمونهایی که نیاز به‌عمل جراحی (بردن دستگاهها به درون بدن) ندارند، خطر بیماریهایی را ده تا بیست سال زودتر پیشگویی کنند.

تجارت. روش سادکی (سیمپلکس) در برنامه‌ریزی خطی، با ساده کردن محاسبهٔ کارامدترین تخصیص منابع، امر تولید، ساخت، کنترل موجودی وتوزیع محصولات صنعتی را دگرگون کرده است. ظرفیت دستیابی و ذخیرهٔ باورکهای بزرگ داده‌ها، نگهداری سوابق، صدور صورتحساب، حسابداری، و مانند آنها را به‌کلی تغییر داده است.

این کاربردهای بسیار گوناگون کامپیوتر ــ پالایهٔ کالمن ـ باسی، واضح‌سازی تصاویر به‌کمک تجزیهٔ طیفی، آمار پزشکی، سی‌تی‌اسکن‌کننده‌ها، و تحلیل برنامه‌ریزی خطی ــ چه نقطهٔ مشترکی‌دارند؟ هریک ازآنها عمدتاً بر جبرخطی استواراست؛ جبرخطی حوزه‌ای‌ازریاضیات است که در اواخر قرن نوزدهم به وجود آمد و درآن زمان هیچیک از این کاربردها به فکر کسی هم نیامده بود؛ انگیزهٔ تکامل این‌شاخه

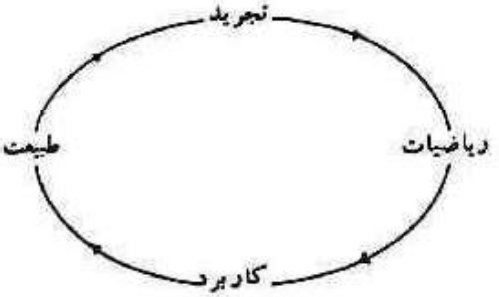
1. Kalmam-Bucy 2. CT scan

ازجبر از تلاش برای فهم هندسهٔ فضای n بعدی منشأ می‌گرفت.

اعمال بخشی از این ایده‌ها در خلال همین قرن ــ به‌دست کسانی بااستعداد استثنایی در ریاضیات ــ انجام شد. وانگهی، هریك از این کاربردها متضمن داده‌های چندان زیادی‌اند که حتی سریعترین کامپیوترها نمی‌توانند تنها باجستجوی کورکورانه به‌پاسخهای لازم دست یابند. اینها به ابداع و بهره‌گیری از روشهای پیچیدهٔ ریاضی نیز نیاز داشتند.

می‌توانیم برای مستند کردن ارزش انتقاعی پژوهشهای ریاضی برای جامعهٔ خود و نمایاندن چگونگی نفوذ ایده‌های خاص ریاضی بر جهان خویش، چندین جلد کتاب بنویسیم. اما، چند مورد معدود را برگزیده‌ایم تا توان و ژرفای بسیاری از شاخه‌های فرعی را که از ریاضیات مشتق شده‌اند، نشان دهیم. هدف دیگری هم داریم که شاید مهمتر از گزارشی ساده در خصوص برخی از پیشرفتها درجبههٔ مقدم ریاضیات و علوم باشد. می‌خواهیم بر دو موضوع که بارها و بارها درمسیر تاریخ پیش می‌آیند، تأکید ورزیم.

۱. ریاضیات عالی، هرچند تجریدی، به‌کاربردهای‌عملی درطبیعت منجرمی‌شود. مسائل مشکلی که درطبیعت پیش می‌آیندابداع‌ریاضیات نوینی را برمی‌انگیزند.



می‌توان ازهرسویی به این چرخهٔ تجرید وکاربرد عملی وارد شد. فاصلهٔ زمانی بین پیدایش ریاضیات تجریدی تا کاربردهای عملی بسیارگوناگون است. گاهی بی‌واسطه وآنی است؛ گاهی هم یك قرن‌طول می‌کشد تا نظریهٔ تجریدی از طریق کاربردهای عملیش انقلابی بر پا کند. در بسیاری موارد ، مقیاس زمانی چیزی بین این دوحالت است.

۲. پیشگویی‌این نکته که حوزه‌ای ازریاضیات دقیقاً در کجاسودمند خواهد بود ناممکن است. حتی مبدعین بسیاری از ایده‌های ریاضی هم غالباً ازکاربردهای آن ایده‌ها به شگفت آمده‌اند. تنها چیزی که می‌توانیم با قطعیت بیان کنیم این است که زمانه به کسی که مدعی باشد «هرگز کاربرد عملی نخواهد یافت» پندی سزاوار خواهد داد. مثلاً، هاردی[1]، ریاضیدان بزرگ انگلیسی ، در اثرش، به نام اعتذار یك ریاضیدان[2]، می‌نویسد که به‌خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است، نه به‌خاطر ارزش عملیش. او با بی‌پروایی بیان می‌کند که هیچگونه کاربردی برای نظریهٔ اعداد یا نسبیت نیافته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته است که پیامدهای نظریهٔ تجریدی اعداد به آنجا کشیده شده که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود ؛ خصیصهٔ اعداد اول شالودهٔ طرحهای نوینی را برای ساختن رمزهای سری تشکیل می‌دهد. درخلال چندسال، اختراع دستگاههای شکافت و گداخت [هسته‌ای] ، نظریات هاردی را در مورد نسبیت ابطال کرد.

1. G.H.Hardy 2. *A Mathematician's Apology*

ممکن است حیرت‌آور باشدکه تجریدی‌ترین حوزه‌های‌ریاضیات ــ هندسه، نظریهٔ اعداد، منطق ــ اهمیت عملی بسیاری داشته باشند. د. ا. کنوث[1]، یکی از دانشمندان علوم‌کامپیوتری، می‌گوید: «هرمطلب اندکی هم که از ریاضیات می‌دانم به‌نحوی در کاربردی عملی مرا یاری رسانیده است.»

اویگن ویگنر[2]فیزیکدان از «تأثیر گذاری بی حدوحساب‌ریاضیات بر علوم طبیعی» در شگفت است . مطمئناً تمایل شدید ریاضیدان در این است‌که همه‌چیز را جزئیهٔ اساسی مسأله‌کنار بگذارد، تا دیدگاه مشترکی را بیابد که از آن، دومسألهٔ ظاهراً متفاوت درارتباط نزدیك با یکدیگر قرارمی‌گیرند. اما این مطلب توضیحی‌کافی ارائه نمی‌دهد که‌چرا، درمواردی بسیار، ریاضیات تجریدی‌که به‌خاطر زیبایی‌خود تکامل یافته است، چند دهه بعد، توانسته است طبیعت را به‌تمامی توصیف کند.

اندرو گلیسون[3]ریاضیدانی از دانشگاه هاروارد پاسخ خود را چنین ارائه می‌دهد: «ریاضیات علم نظم است ــ موضوع آن یافتن، توصیف و درك نظمی است که‌در وضعیتهای ظاهراً پیچیده نهفته‌است. ابزارهای اصولی ریاضیات مفاهیمی‌اندکه ما را قادر می‌سازند این نظم را توصیف کنیم. دقیقاً به خاطر آنکه ریاضیدانان فرنها در جستجوی کارامدترین مفاهیمی بوده‌اند که نمونه‌های مبهم نظم را توصیف کنند، ابزارهایشان برای جهان بیرونی کاربردپذیر است ؛ زیرا دنیای واقعی نمونهٔ کوچکی از وضعیتی پیچیده است که درآن نظم فراوانی وجود دارد.»

یك‌دلیل دیگر ارائه می‌کنیم. ایده‌های ریاضی ازذهن پژوهشگران نمی‌رویند. تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات غالباً الهام خود را از الگوهای طبیعت می‌گیرد. درسهایی که از یك برخورد با طبیعت فرا می‌گیریم وقتی پدیدهٔ طبیعی دیگری راکشف می‌کنیم، همچنان به کارمان می‌آیند.

دلایل اهمیت ریاضیات برای جامعه هرچه باشند، فهم چگونگی پیشرفت ریاضیات پیامدهایی تعیین‌کننده دارد. باید چگونگی پیشبرد ریاضیات عالی دراین کشور [امریکا] به بهترین وجه، و چگونگی حفظ رهبریی‌که درچهل سال گذشته به‌دست آمده، ارزیابی شود. ما به دو اصل اساسی اعتقاد داریم:

تحقیقات ریاضی باید تا حد ممکن گسترده و نومایه و با اهداف دراز مدت باشد. انتظار داریم تاریخ تکرار شود؛ براین گمانیم که ژرفترین و سودمندترین کاربردهای آیندهٔ ریاضیات را امروز نمی‌توان پیشگویی کرد، زیرا این‌کاربردها برپایهٔ ریاضیاتی استوارخواهد بود که هنوز کشف نشده است.

درحالی که سمت و سوی اکثر پژوهشهای ریاضی متوجه فهم و درك مسائل شناخته شده است، باید به یاد داشته باشیم که جهت خود ریاضیات همواره درحال‌تغییراست. ریاضیدانان با استعدادباید به پیگیری پژوهشهایی ترغیب شوند که مناسبت آنها را با خیلی‌کم می‌فهمیم یا اصلاً نمی‌فهمیم اما ممکن است سرانجام به دیدگاههای نو، یا به ابداع حوزه‌های نوین ریاضیات بینجامند.

ما درچهل سال گذشته یك دوران طلایی ریاضیات را تجربه کرده‌ایم. معلوم شده است‌که هرشاخهٔ فرعی ریاضیات، گویی باجادوی به شاخه‌های فرعی دیگر، وبه بسیاری کاربردها در علوم طبیعی و مهندسی ارتباط پیدا کرده‌اند. این بافتهٔ سخت به هم پیوسته نه تنها هیجان‌انگیز است، بلکه توصیف پژوهشها و کاربردهای اخیر ریاضی

1. D.E.Knuth 2. Eugene Wigner 3. Andrew Gleason

را به‌صورت دائرةالمعارفی [مختصر و گسسته] ناممکن می‌سازد، و هرگونه نمودار سازمانی ساده‌ای که از آنها به دست دهیم، نادقیق خواهد بود.

انتخاب مثالهای زیر از جانب ما ضرورتاً مربوط به طرز تفکر شخصی، و متأثر از میزان آگاهی وسلیقهٔ ماست. آنها را به تسامح در چهار حوزه ــ محاسبه، فیزیک، ارتباطات، ومهندسی ــ مطرح کرده‌ایم؛ هرچند این مثالها ازمرزهای مشخص این حوزه‌ها به‌راحتی فراتر می‌روند. براین نکته آگاهیم که بربسیاری از حوزه‌ها و پیشرفتها چشم پوشیده‌ایم. علی‌رغم این چشمپوشیها، اطمینان داریم که مثالهای ما ماهیت ریاضیات را به‌عنوان یك کل آشکار می‌سازند.

پیش ازآنکه به‌این کاربردها بازگردیم، می‌خواهیم سرگذشت یك مبحث ــ آنالیزفوریه ــ را بازگوییم و چگونگی تکامل آن را در خلال ۱۷۰ سال حکایت کنیم. این داستان نشان می‌دهد که غالباً ریاضیات چگونه به چیزی بسیارمهمتر از آن مسألهٔ ویژه‌ای که‌حلش مورد نظر بوده است، تبدیل می‌شود.

آنالیزفوریه

در اوایل دههٔ ۱۸۰۰، ژان باپتیست ژوزف فوریه[1]، که به تازگی از مقام حکمرانی مصر درزمان ناپلئون [به فرانسه] بازگشته بود، برآن شدکه مسألهٔ رسانش گرما را درك کند. اومی‌خواست به این پرسش پاسخ دهد که: با فرض آنکه دمای اولیه در تمامی نقاط یك ناحیه معلوم باشد، گرماچگونه درطی‌زمان درسرتاسرآن ناحیه پخش‌خواهد شد؟ کنجکاوی درخصوص پدیده‌هایی مانند دمای جو وآب وهوابود که فوریه را به طرح این پرسش تجریدی کشاند.

فوریه، به منظورحل مسألهٔ پخش گرما، روش ریاضی ساده ــ اما تابناکی ــ را ابداع کرد. معلوم شد کـه اگر توزیع گرمای اولیه توسانی ــ یعنی، اساساً موجی سینوسی ــ باشد، حل این مسأله ساده است. فوریه، با استفاده از این موضوع به‌این نتیجه رسیدکه بایدهر توزیع گرمای اولیه به‌مجموعی (احتمالاً نامتناهی) از امواج‌سینوسی تجزیه و آنگاه هریك از این مسأله‌های ساده را حل کرد. بنابراین جواب‌عمومی مسأله ازطریق جمع‌کردن جوابهای هریك ازمؤلفه‌های توسانی، به‌نام همساز، به‌دست می‌آمد.

ریاضیدانان فرانسوی، مانند لاگرانژ، با ابراز تردید نسبت به این نکته‌که این‌همسازهای ساده بتوانند به‌طورنایسته‌ای‌تمامی توابع‌ممکن را بیان کنند، این ایده‌ها را بـه سختی رد کردند، و دقت و زحمت فوریه را به باد دشنام گـرفتند. این حملات به‌مدت دو دهه همچنان متوجه فوریه بـود، و او در خـلال این مدت تحقیقات خـود را با بصیرتی قابل ملاحظه دنبال می‌کرد. امـروزه به‌ثبات قدم، سرسختی، و قدرت عمل او، علی‌رغم تردیدهای سهمناك در اذهان رهبران‌جامعهٔ علمی، دین فراوانی داریم. فوریه حتی پس از آنـکه درسال ۱۸۱۱ جایزهٔ بزرگ ریاضی را به‌خاطر مقاله‌اش دربارهٔ مسألهٔ رسانش‌گرما از فرهنگستان علوم دریافت داشت، انتشار کارخود را مشکل یافت، زیرا فرهنگستان در حکم اعطای جایزه دربارهٔ عمومیت و دقت روش فوریه تردیدهای سختی قائل‌شده‌بود. فوریه استقامت کرد وسرانجام کارش درپی انتشار اثرش، نظریهٔ تحلیلی‌گرما، درسال ۱۸۲۲، اثری که هم‌اکنون کلاسیك شده است، مقبولیت عام یافت.

روش آنالیز همساز یا آنالیز فوریه، در واقع اکنون در هر زمینهٔ ریاضیات و علوم فیزیکی اهمیت زیاد خود را نمایان کرده است ــ اهمیتی بسیارفراتر ازحل مسألهٔ پخش گرما. درحوزهٔ ریاضیات، این مبحث به‌خودی‌خود به‌یك‌موضوع [مستقل] تبدیل‌شده است. در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ آمار، هندسه، نظریهٔ اعداد، وبسیاری دیگر، روش‌فوریه را برای تجزیهٔ توابع به‌یامدهای اساسیشان به‌کار می‌برند.

درفیزیك، مهندسی، و علوم‌کامپیوتری تأثیر آن به همان ژرفاست. فوریه تأثیر روش خـود را در پیشگفتارش بـر نظریهٔ تحلیلی‌گرما چنین‌پیشگویی می‌کند: «مطالعهٔ عمیق طبیعت بارورترین مرحلهٔ‌کشفیات ریاضیات‌است. این‌روش مطمئنی است برای... کشف... عناصر بنیادیی که درتمامی پدیده‌های طبیعت مجدداً به‌وجود می‌آیند.» فوریه، عملاً یکی ازتواناترین ابزارها را بـرای فیزیك ریاضی تدارك کرد. به محض‌آنکه ماکسول در ۱۸۷۳ امواج الکترومغناطیسی را بامعادلات مشهورش تشریح کرد، آنالیز فوریه به‌یکی از روشهای کلیدی‌مطالعهٔ این امواج و مؤلفه‌هـای هماهنگ‌آن ــ پرتوهای ایکس، نورمرئی، میکروموجها، امواج رادیویـی، ومانند آنها ــ تبدیل شد. هم اکنون بسیاری از دستگاههای الکتریکی والکترونیکی برشالودهٔ آنالیزفوریه استوارند، از جمله دستگاههای جـدید مانند طیف‌نـگارهای تشدید مغناطیسی هسته‌ای و طیف‌نگارهای بلورنگاشتی پرتو ایکس. در قرن اخیر، آنالیز فوریه زمینـهٔ درك اساسی نظریهٔ کوانتومی ــ و از این رو درك تمامی فیزیك و شیمی نوین ــ را فراهم آورده است.

ایدهٔ تجزیهٔ داده‌ها به مؤلفه‌های دوره‌ای نیز درمهندسی نقشی‌عمده دارد. این ایده به تبدیل لاپـلاس انجامید، که هردانشجوی مهندسی این تبدیل را به‌عنوان روش استانداردمطالعهٔ معادلات دیفرانسیل خطی می‌آموزد. آنالیز فوریه به آنـالیز سریهای زمانی منجر شد که در اکتشاف نفت ــ از طریق تفسیر امواج زلزله‌ای فرستاده شده درمیان صخره‌هایی که‌گمان می‌رود حاوی نفت باشند ــ به‌کار می‌رود.

ظهور کامپیوتر اخیراً استفاده از آنالیز فوریه را به طـور عددی به‌صورت جزئی عـادی از تحلیل داده‌هـا امکان‌پذیـر ساخته است. کامپیوتر توانسته است تجزیهٔ صوت بـه مؤلفه‌هـای هماهنگ آن و امکان تولید و بازشناسی سخن آدمی را فراهم آورد. انجام عملیاتی مشابـه بر روی عکسها ــ مثلاً، تصاویر ماهواره‌ای ازنواحی مختلف زمین ــ به کامپیوتر این امکان را می‌بخشد که «برفك» آن را حذف و بدینسان تصویر را واضح‌کند یا بر روشنی آن بیفزاید.

حتی امورپیش‌پا افتاده، مانند ضرب دو عدد، را می‌توان با استفاده از تبدیلات فوریـه بسیار سریعتر از روش سنتیی کـه درکلاسهای دبستان‌آموزش داده می‌شود، به‌انجام رسانید. این روش ارقام اعداد را به‌صورت یك تابع مورد نظرقرارمی‌دهد، که می‌تواند به پلنسری فوریه بسط داده شود. درمـورد اعداد ۱۰۰۰ رقمی، روش فوریه می‌تواند تا ۵۰ بار سریعتر از الگوریتمی باشد که با آن آشناتریم؛ و البته این روش درطراحی کامپیوتر به‌کار می‌رود.

کاری کـه مسؤول رمز نیروی دریایی با تبدیل فوریه انجام می‌دهد تنها به خاطر دوشهای ظریفی که در ریاضیات به منظور محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ دنبالـهٔ اعداد ــ الگوریتمهایی کـه درپیمرفته تبدیلهای فوریهٔ سریع (FFT) نام دارند ــ کشف شد، امکان‌پذیر است. ایدهٔ این الگوریتمها درکار رانگ[1] وکونیگ[2] در ۱۹۲۴ بنیاد گـرفتهٔ هرچند هستهٔ اولیهٔ این روش شاید به یك قرن پیش به‌کار گاوس بر- گردد. پس‌ازانتشار مقالهٔ کولی[3] وتاکی[4]، درسال ۱۹۶۵، این روش

1. Jean Baptiste Joseph Fourier

1. Runge
2. König
3. Cooley
4. R. Tukey

کاملاً شناخته شد و کاربرد عام یافت، و گاروین[1]، رادنیک[2]، گود[3]، وینوگراد[4] و سابرین در آن اصلاحات گوناگونی انجام دادند.

محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریه با n عدد نیازمند حدود n^2 عمل است. تبدیل فوریهٔ سریع یافتن پاسخ را در تقریباً $n\log n$ مرحله میسر می‌سازد ــ که به‌ازای مقادیر بزرگ n کاهش بزرگ است. بدون این اصلاح، کامپیوترها هرگز نمی‌توانند بسیاری ازمسائل را «بیدرنگ» تحلیل کنند ــ یعنی، پاسخها را با همان آهنگی به‌دست دهند که داده‌ها جریان دارند و بدینسان ازتنگناهای بسیاری پرهیز شود. (معلوم شده که تعیین مدت زمان دقیقی که برای انجام تبدیل فوریهٔ سریع لازم است مسألهٔ مشکلی است، که به‌برخی قضایای ژرف ناشی از نظریهٔ تحلیلی اعداد دربارهٔ توزیع اعداد اول، وابسته است.)

کاربردهای بیشمار آنالیز فوریه درعلوم ومهندسی دست‌کم تاحد کاربرد آن در خود ریاضیات مهم است. ریاضیدانان، مانند سایر دانشمندان پیوسته در جستجوی ابزارهای نوینی برای حل مسائل نظری‌خویش‌اند. بارها پیش می‌آید که روشهای کشف شده برای حل مسأله‌ای تجریدی، بعداً درگسترهٔ وسیعی از مسائل دیگر به‌کارمی‌آید.

برای روشن‌شدن مطلب، خوب‌است درکتابخانهٔ علوم یك دانشگاه درفهرست برگه‌ای آن به عنوان «فوریه» نسگاهی بیندازید. مثلاً، درکتابخانهٔ هاروارد، ۲۱۲ مدخل وجود دارد، که ده‌تای اول آنها عبارت‌اند از: آنالیزفوریه درنظریهٔ احتمال، آنالیز فوریه درچندین متغیر مختلط، آنالیز فوریهٔ سریهای زمانی، آنالیزفوریهٔ اندازه‌های پیکوان در گروههای آبلی موضعاً فشرده، آنالیزفوریه در گروهها و آنالیز موجی جزئی، آنالیز فوریهٔ میدانهای موضعی، آنالیز فوریهٔ فضاهای ماتریسی، ضرایب فوریهٔ اشکال خودریخت (اتومورف)، انتگرال فوریه وکاربردهای آن، و عملگرهای انتگرال فوریه و معادلات دیفرانسیل جزئی.

درقرن گذشته سری فوریه روحی درجان سریهای دیریکله ودیمان دمید، و این سریها سرانجام به L ــ سریها، که امروزه مورد مطالعه است، انجامید. این ایده‌ها نظریهٔ اعداد رابا نظریهٔ نمایشهای گروهها یکی کرده است. آنالیز فوریه به تعریف فضاهای تابعی (مانند فضاهای سوبولف[5]، فضاهای شوارتس، فضاهای توزیعی، و فضاهای هاردی) انجامیده که شالودهٔ آنالیز تابعی نوین را تشکیل می‌دهند. در این چهارچوب می‌توانیم معادلات دیفرانسیل (هم خطی‌وهم غیرخطی) و تعمیم نوین آنها ــ معادلات شبه‌دیفرانسیل ــ و عملگرهای انتگرال فوریه را تحلیل کنیم. با این روشها می‌توان ماهیت وانتشار تکینیها را مطالعه کرد.

هرچند فوریه خود اهمیت روشش را باز می‌شناخت ــ چنانکه دو دهه در برابر انتقادها استقامت کرد ــ هرگز نمی‌دانست که ابداعش تا چه میزان پربار خواهد بود. در حالی که هیچ پیشرفت جدیدی در ریاضیات از این نفوذ جدی آنالیز فوریه برخوردار نبوده است، اما الگوی اساسی همچنان یکسان و بی‌تغییر مانده است، تأثیر ایده‌های خوب ریاضی تادوردستها و در راستاهایی غیرمنتظره گسترش می‌یابد.

۲. محاسبه

شاید برجسته‌ترین کاربرد ریاضی این قرن پیشرفت حسابگر الکترونیکی بوده است. کامپیوتر اینك در دفاتر کار، مدارس، و کارخانه‌ها به وسیله‌ای ضروری بدل شده و درخانه‌ها نیز به سرعت به وسیله‌ای

1. Garwin 2. Rudnick 3. Good 4. Winograd 5. Sobolev

هادی تبدیل می‌شود. نکتهٔ اساسی این‌بخش بازنمودن این مطلب است که انقلاب کامپیوتری صرفاً یك انقلاب مهندسی نیست. این‌یك انقلاب ریاضی‌است، زیرا منشأ ایده‌های اختراع و کاربرد روزانهٔ کامپیوتر، ریاضیات پیچیده است.

کامپیوترها دستخوش دو محدودیت بنیادی‌اند. هرچند سریعترین کامپیوترها می‌توانند میلیونها عمل دریك ثانیه اجراکنند، با این حال همیشه بسیارکندند. این هم ظاهراً یك پارادوکس است، اما جان‌کلام اینجاست: هرچه کامپیوترها بهتر وبزرگترشوند، دانشمندان ومهندسان حل مسائل بیشتر و بزرگتری را از آنها توقع دارند. هرکه بامش بیش برفش بیشتر. وقتی میزان داده‌های مسأله‌ای را دوبرابر می‌کنید، تعداد مراحل مورد نیاز برای محاسبهٔ جواب غالباً چهاربرابر، یا هشت برابر، یا شانزده برابر می‌شود. دربسیاری موارد، زمان محاسبه جدیترین محدودیت‌درپیشرفت‌کاراست. دوبرابر کردن سرعت‌کامپیوتر درهر چند سال، تنهابه‌این معنی است‌که توانایی حل مسائل‌بزرگتری را ۱۰ الی ۲۰ درصد افزایش دهند، که غالباً هم به این میزان دست پیدا نمی‌کنند. توانایی بخشیدن به کامپیوتر جهت انجام محاسبهٔ مورد نیاز رهیافت ریاضی کاملاً نوینی را ایجاب می‌کند.

محدودیت دوم کامپیوترها ناشی از ماهیت رقمی آنهاست، زیرا بیشتر ریاضیاتی که بستر علم را تشکیل می‌دهد پیوسته است. تقریب زدن جواب مسأله‌ای پیوسته با ماشینی گسسته مهارت زیادی راطلب می‌کند. بیشتر محاسبات علمی به پاسخ پرسشهایی از این دست وابسته است: چه‌روشهای ریاضیی درپس یك جواب عددی ارائه شده نهان است؟ چون کامپیوتر با اعداد با طول ثابت کار می‌کند (و درنتیجه، خطای ناشی از گردکردن دارد)، آیا انباشته شدن خطاها به خطای فاحش در جواب منجر می‌شود؟ آیا از تقریبهای دیگر نیز چنین خطاهایی حاصل می‌شود؟ اگرچنین نیست، برای دستیابی به‌یك‌درجه دقت‌مطلوب، یك‌محاسبهٔ رقمی‌چه‌مدتی طول می‌کشد؟ بازهم‌ریاضیدان باید همواره دیدگاههای‌نوینی را برای بهبود روش‌کامپیوتردرانجام محاسبه ارائه دهد.

بدینسان ریاضیات درکانون محاسبه قرار دارد. حال سرگذشت ریاضیات وکامپیوتر را از آغاز بیان می‌کنیم.

خود کامپیوتر

امروزه به سادگی می‌توان فراموش کرد که کامپیوتر همه منظوره محصول بسیارجدیدی است. تاپنجاه‌سال پیش، منظوراز«ماشین‌محاسبه» ماشینی بود که برای انجام بسرخی اعمال اصلی به‌کار می‌رفت. در قرن پانزدهم غیاث‌الدین جمشیدکاشانی ریاضیدان‌قرن پانزدهم‌ایرانی ماشین حسابی را برای محاسبهٔ خسوفهای ماه، وماشین حساب‌دیگری را برای تجسم و نمایاندن موضع‌ستارگان ساخت. ویلیام شیکارف[1]، بلزپاسکال، و ویلیام لایب‌نیتس‌همگی ماشینهایی برای‌انجام عمل‌جمع و تفریق خودکارساختند؛ چارلزبیبج[2] به خاطرماشین تحلیلی‌اش‌مشهور بود. برای محاسبهٔ مساحت زیریك منحنی مسطح، ژ. هـ هرمان[3]، جیمز-کلرك ماکسول، وجیمز تامسون هریك صفحه منجهایی را ابداع کردند که نوع دیگر کامپیوتر قیاسی (آنالوگ) بود. اما، یك ماشین تك، و عام که برای تمام مسائل وتمام محاسبات مناسب باشد از منبعی سر بر آورد که ظاهراً کمترین احتمال به آن می‌رفت. آن منبع مبحث مشکل منطق ریاضی است.

1. Schikarf 2. Babbage 3. J.H.Hermann

منطق و کامپیوتر

بنیانهای ریاضیات برپایه‌های منطق استوارند. قرنها، ریاضیدانان براین اعتقاد بودند که استدلال قیاسی هرگز نمی‌تواند به‌نتایج ناسازگار بینجامد. این نوع تعقل مرسوم را در سال ۱۹۰۳ پارادوکسهای مشهور برتراند راسل، و آلفرد نورث وایتهد، مورد تردید قرار دادند. مثلاً، اگر S مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی باشد که شامل خودشان نیستند، آیا S شامل خودش هست؟

در حدود ۱۹۱۵، دیوید هیلبرت نیز به تدوین برنامه‌ای برای اصلاح بنیانهای ریاضیات دست زد. در ۱۹۲۷، جان فون نویمان، یکی از همکاران جوان هیلبرت، مقالهٔ مشهوری منتشر کرد که در آن حدس می‌زد منطق ریاضی بزودی از هرتناقض ممکنی پالوده خواهد شد. با همهٔ اینها، تنها سه سال بعد بود که، کورت گودل اثبات کرد جنی حساب‌ساده هم شامل «گزاره‌های تصمیم ناپذیر» است، جمله‌هایی که صدق وکذب آنها را نمی‌توان ثابت کرد. روش او همچنین نشان‌می‌دهد که اثبات سازگاری منطقی ریاضیات ناممکن است. معلوم شد که پاسخهای این پرسش ظاهراً ذهنی، ثمرات عملی بسیار زیادی دارند.

در ۱۹۳۶، آلن تورینگ[1] و امیل پست[2] مستقل ازهم دریافتند که این پرسش هم‌ارز آن است که کدام دنباله‌های از ۰ و ۱ را می‌توان به کمک یک ماشین تجریدی و بامجموعه‌ای متناهی ازدستورالعملها بازشناخت؛ آنان این گونه اتوماتون راجعهٔ سیاه سادهای می‌دانستند که توانی برای نوشتن وخواندن نمادها دارد. تورینگ و پست قضیهٔ شگفت آوری را درخصوص اتوماتونها اثبات کردند: علی‌الاصول، باید یک «اتوماتون‌عمومی» وجود داشته باشد که بتواند هردنباله را که با اتوماتون دیگری قابل تشخیص باشد، بازشناسد. یعنی، این ماشین عمومی می‌تواند ــ بادنباله‌ای متناهی ازدستورالعملها ــ کارکرد ویژهٔ هر ماشین خاصی را تقلید کند.

در واقع تولد کامپیوتر عمومی همین‌جا بود. چرچ[3]، کلینی[4]، و سایرین، ایده‌های منطقی بیشتری را پی گرفتند. اما این جان‌فون‌نویمان، ریاضیدان بزرگ بود که دانست «اتوماتون‌عمومی» را چگونه به‌صورت یک حسابگر الکترونیکی (کامپیوتر) بادستورالعملهای ذخیره شده ــ «برنامه‌ای» که خود ماشین می‌توانست به‌هنگام محاسبه تغییردهد ــ درآورد. فون‌نویمان و همکارانش آنگاه کارتکنیکی جاودان خودرا که برای تبدیل امری نظری به واقعیت ضروری بود، به عهده گرفتند. در خلال یک دهه، ابزارهایی مانند انیاک[5] فون نویمان، در انستیتوی مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، که خودش در آنجا کارمی‌کرد، ساخته شد. در هیچ لحظه‌ای از سالهای اولیهٔ این قرن هیچ کس حدس نمی‌زد که آن مناظرهٔ ذهنی پیرامون بنیادهای منطق ریاضی مآلاً به‌کجا می‌انجامد.

الگوریتم و پیچیدگی محاسبه

پیشتر به یکی از مسائل اصلی محاسبه اشاره کردیم: با رشد ابعاد مسائل محاسباتی، زمان و حافظهٔ مورد نیاز برای حل آنها با سرعت بیشتری رشد می‌کند. درنخستین روزهای تولد کامپیوتر ومحاسبات کامپیوتری، ریاضیدان می‌بایست درستی و سرعت یک برنامه را با آزمودن آن در ورودیهای مختلف، باتوجه به زمان حافظهٔ موردنیاز، بررسی کند. موانع این روش نه چندان کارآمد آشکارند. برای اجتناب از آنها، ریاضیدانان برشالودهٔ کار تورینگ و پست الگوهای نظری محاسبه را بنا کرده‌اند تا بیازمایند که یک الگوریتم به چندعمل نیازدارد. آنان دریافتند که بهتر است به‌جای تلاش در حل هر مسألهٔ جدید با شیوه‌ای خاص و مربوط به موضوع، مجموعه‌ای از روشهای ریاضی اساسی ابداع شوند تا بتوانند به صورت سنگهای زیربنا برای الگوریتمهای بسیار به‌کار روند.

مثلاً، به یک کارمعمولی که یک کامپیوتر باید چندین بارانجام دهد توجه کنید: n عدد a_n ، ... ، a_2 ، a_1 را درنظرمی گیریم؛ می‌خواهیم آنها را به‌ترتیب صعودی بنویسیم. ساده‌ترین روش چنین است:

۱. a_1 را بنویس.

۲. بررسی کن که آیا a_2 کوچکتر از a_1 است یانه؛ اگرچنین است، آن را سمت چپ a_1 بنویس. در غیر این صورت، a_2 را در سمت راست a_1 بنویس.

۳. بررسی کن که a_3 از کوچکترین عددی که تاکنون نوشته شده کوچکتر است یانه. درصورت مثبت بودن پاسخ آن را در سمت چپ بنویس، درغیراین‌صورت آن را با عدد بعدی مقایسه‌کن، اگر کوچکتر است، آن را درسمت چپ و اگر بزرگتر است آن را در سمت راست بنویس.

۴. این فرایند را به‌ازای a_4، ...، a_5، a_n ادامه ده.

معیارخوبی برای زمان موردنیاز انجام این الگوریتم تعداد مقایسه‌هایی است که بایدانجام‌شود. اگر اعداد درابتدا ترتیبی نزولی داشته باشند، این‌مدت زمان باید $n^2/2$ باشد. این «پیچیدگی بدترین‌حالت الگوریتم» می‌نامند. اگر ترتیب این اعداد تصادفی باشد، می‌توان $n^2/4$ مقایسهٔ ضروری را انتظار داشت، که پیچیدگی حالت میانگین نام دارد. این‌نکته که زمان موردنیازمتناسب با n^2 زیاد می‌شود، محدودیت واقعی برای بزرگی فهرستی است که می‌توان عملاً مرتب کرد. از ضرب ویژهٔ ۱/۲ یا ۱/۴ معمولاً چشم‌پوشی می‌شود و متخصصین کامپیوتر می‌نویسند که زمان این الگوریتم $O(n^2)$ است، که نمایشگر این نکته است که زمان اجرا ازمرتبهٔ n^2 است.

باید بگوییم که پیچیدگی بدترین حالت وحالت میانگین یک الگوریتم ممکن است به طورمحسوسی فرق داشته باشند. الگوریتم مشهور سادکی (سیمپلکس) برای برنامه‌ریزی خطی دربدترین حالت می‌تواند به تابعی نمایی از اندازهٔ مسأله نیازداشته باشد. اما، این بدترین‌حالتها معدود و نادرند؛ بورگوارد[1] و اسمیل[2] در ۱۹۸۲ ثابت کردند که برای نوع دیگری از این مسأله، این الگوریتم به‌طور متوسط به‌زمانی از مرتبهٔ درجهٔ دوم اندازهٔ مسأله نیازدارد.

در واقع، روش بسیارسریعتری برای مرتب کردن اعداد، برپایهٔ اصل بازگشت، وجود دارد: تقسیم اعداد به دو گروه مساوی؛ مرتب کردن هرگروه؛ سپس ادغام این دوفهرست مرتب‌شدهٔ شامل $n/2$ عدد. برای مرتب کردن هریک ازگروههای شامل $n/2$ عدد، ازهمان روش استفاده می‌کنند: آنها را در دو گروه شامل $n/4$ عدد مرتب می‌کنند؛ این اعداد را مرتب و سپس فهرستها را ادغام می‌کنند. هر یک از گروههای با اندازهٔ $n/4$ ازطریق تقسیم آن به‌گروههایی با اندازهٔ $n/8$ مرتب می‌شود و به‌همین‌ترتیب تا آخر. زمان انجام این فرایند $O(n\log n)$ است، وبنابراین هنگام مرتب کردن ۲۵۶ عدد، این‌روش ۶۴ بارسریعتر از روش قبلی است.

اصل بازگشت‌دربسیاری ازمسائل دیگرنیز به‌خوبی اعمال می‌شود. کامپیوترها همواره ماتریسهای بزرگ را ــ مثلاً، درانجام تحلیل آماری داده‌ها ــ ضرب می‌کنند. روش استاندهٔ دبیرستانی برای ضرب

1. Alan Turing 2. Emil Post 3. Church 4. Kleene 5. ENIAC

1. Borgwardt 2. Smale

کردن ماتریسهای $n \times n$ نیازمند زمان $O(n^3)$ است. اما، به‌کمک تدبیرهایی می‌توان ضرب ماتریسهای 2×2 را به‌جای ۸ عمل ضرب با ۷ عمل ضرب انجام داد. با شکستن ماتریسهای بزرگ به پاره‌های کوچکتر و کوچکتر به‌طور بازگشتی می‌توان از این مزیت برای مسائل کوچک بهره گرفت و به الگوریتمی برای ضرب ماتریسها دست یافت که با زمان $O(n^{2.8074})$ انجام می‌شود.

افزون برروش بازگشت، بسیاری روشهای مفید دیگر نیز، ازجمله وساختار داده‌ها، برای سامان بخشیدن محاسبات وجود دارند. مثلاً، تمامی مثالهایی که در پیشگفتار این مقاله برشمردیم ــ پالایهٔ کالمن ــ باسی، واضح کردن تصویر، سی‌تی‌اسکن کننده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، و آمار پزشکی ــ به‌استفاده از کامپیوتر برای حل دستگاه n معادلهٔ خطی n متغیری وابسته‌اند. درنتیجه، به این الگوریتمها توجه زیادی معطوف شده است. روش کلاسیک حذفی گاوس، زمان $O(n^3)$ می‌برد. اما، در بسیاری ازمسائل مهم ــ بارزتر ازهمه روشهای عنصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل یا برخی مسائل مقادیر ویژه ــ که برای شبیه‌سازیهای کامپیوتری هواپرواز فضایی، طراحی صنعتی، ومانند آنها ضروری است، در ضرایب معادلات صفرهای زیادی پیدا می‌شود، که توزیع آنها دارای الگویی منظم است. ریاضیدانان برای دستیابی به‌الگوریتمهای سریعتر از این ساختار بهره گرفته‌اند. این الگو را می‌توان به یک گراف برگرداند (ساختاری متشکل از نقاط و یالهایی که آنهارا بهم وصل می‌کنند.) و از این گراف به‌نوبهٔ خود می‌توان برای ابداع نظمی کارامد به منظور انجام روش حذفی گاوس سود جست. نتیجهٔ کارالگوریتمی است که زمانی که می‌برد تنها $O(n^{2.2})$ است ــ صرفه‌جویی عمده درعملی که باید هزاران‌بار انجام شود. اخیراً، معلوم شده است که این روش همچنین به الگوریتمی با زمان $O(n^{2.1})$ برای ماتریسهایی که گرافهایشان را می‌توان در یک صفحه رسم کرد، تعمیم پیدا می‌کند.

درحالی‌که الگوریتمهای بسیاری بر مفاهیم ریاضی نسبتاً مقدماتی متکی‌اند، سه الگوریتم اخیر از قضایای عمیقی متعلق به شاخه‌های بسیار گوناگون بهره می‌گیرند تا به مسائل محاسباتی مشکل راه پیدا کنند. معلوم شده است که برخی نتایج نسبتاً ذهنی، پیامدهای محاسباتی کاملاً عملیی در آزمودن اعداد اول، بازشناسی گراف، و برنامه‌ریزی با اعداد صحیح داشته‌اند.

اعداد اول بزرگ پایهٔ یک طرح رمزنگاری نوین را تشکیل می‌دهند. اما تا همین اواخر، آزمودن اینکه آیا عددی ۶۰ رقمی اول است یا خیر خارج ازحوزهٔ توانایی حتی سریعترین کامپیوترها بوده است. ساده‌ترین آزمون ــ وارسی تمامی اعداد صحیح تا ریشهٔ دوم عدد مورد نظر برای دریافتن اینکه آیا آنها مقسوم‌علیه هستند یا خیر ــ نیازمند وارسی 10^{30} عدد است. (در اینجا 10^{30} نماد علمی برای عددی است متشکل از یک و سی صفر در سمت راست آن.) اما، کارشناسان نظریهٔ اعداد از دیرباز در کار مطالعهٔ خواص اعداد اول بوده‌اند. بسیاری ازقوانینی که کشف کردند ــ مانند به‌اصطلاح قوانین تقابلی بالاتر ــ اخیراً برای آزمودن اول‌بودن اعداد درالگوریتم نوینی ادغام شده‌اند که وارسی حتی اعداد یکصد رقمی را عملی می‌سازد.

مسألهٔ دیگری که درمحاسبه بسیار رخ می‌دهد تعیین این امراست که آیا دو گراف n نقطه‌ای ظاهراً متفاوت درواقع همریخت هستند ــ یعنی، الگوی پیوند نقاط آنها یکی است ــ یا خیر. تا همین سالهای اخیر، این نکته را تنها ازطریق آزمون و خطا می‌توانستیم تعیین کنیم. اما هدف برخی از الگوریتمها کشف تفاوت بین دو گراف است، که ازیکی ازپیروزیهای اخیرجبر، یعنی رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، بهره می‌گیرد. الگوریتمهای جدیدکه برتفاوت استوارند، بسیارسریعتر از آزمون و خطا عمل می‌کنند، هرچند هنوزهم راههای بهتری مورد جستجو است.

مسألهٔ کامپیوتری دیگری که در صنعت اهمیت دارد، یعنی برنامه‌ریزی بااعداد صحیح، این‌است که بهینه‌سازی زمان‌بندی یا استفاده از مواد را برای یک مؤسسه میسرسازد. درچند سال گذشته، روشهای قرن نوزدهمی مطالعهٔ شبکه‌ها درهیأتهای اعداد جبری درمورد برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به‌کار گرفته شده و به‌الگوریتمهای جدیدی انجامیده است. (به‌علاوه، همین روشهای شبکه‌ای سریعترین الگوریتمها را برای تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌وجود آورده است.)

ریاضیدانان درکارجستجوی الگوریتمهایی برای حل مسائل عملی، طرح پرسشهای عمیقی را آغازکرده‌اند. ازجمله وحدود مطلق کران پایین سرعت درحل مسائل کدام‌اند؟ و «آیا برخی مسائل ذاتاً سرکش هستند؟» باساختن مدلهای محاسبه براساس ماشینهای تورینگ، ریاضیدانان به پاسخهایی مقدماتی دست یافته‌اند. پیامدهای یکی از مباحث جالب توجه نمایانگر این نکته است که برخی مسائل را، به‌نام مسائل NP تمام، نمی‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد، کارکردن برای اثبات اینکه رده‌ای از مسائل از لحاظ محاسبه سرکش می‌مانند، ظاهراً عبث می‌نماید، اما چنین برهانی دقیقاً روشن خواهد کرد که چه چیزی یک محاسبه را سرکش می‌کند، ولذا یافتن الگوریتمهایی را برای مسائل سرکش آسانتر می‌سازد.

تصادفی بودن محاسبه

یکی از زیباترین کشفیات ریاضی در زمینهٔ محاسبه این است که محاسبه‌ای که بر عاملی تصادفی ــ مثلاً، پرتاب سکه ــ متکی است می‌تواند بسیار کارامدتر از هرالگوریتم از پیش تعیین شده‌ای باشد.

نمونهٔ کلاسیک این موضوع روش مونت‌کارلو است، که در دههٔ ۱۹۴۰ ارائه شد. مثلاً، برای محاسبهٔ مساحت تخته هدفی که بر دیواره‌ای به‌مساحت ۱۰۰ فوت مربع موارشده، و ۵۰۰ نیزه را به‌طور تصادفی به سوی دیوار پرتاب می‌کند. فرض کنید ۳ نیزه بر تخته می‌نشیند، مساحت آن تقریباً ۱۵/۵۰۰ مساحت دیوار، یا ۳ فوت مربع است. درحالت کلیتر، برای محاسبهٔ حجم یک ناحیهٔ R در درون یک جعبهٔ B، n نقطه را به‌طور تصادفی در B برمی‌گزینیم. براورد خوبی برای نسبت حجم R به حجم B کسری است از n نقطه، که در R واقع‌اند. در واقع خطای این روش با اختیارکردن نقاط بیشتر به سمت صفرمیل می‌کند، وآهنگ همگرایی با $n^{-1/2}$ متناسب است.

روش مونت‌کارلو برای شکلهای پیچیده و/یا ابعاد زیاد فوق‌العاده کارامد است. این روش به‌روش عددی متداولی برای محاسبهٔ انتگرالهای چند بعدی تبدیل شده است و انتگرالگیری توابعی راکه به راههای دیگر ناممکن است، استانده‌سازی می‌کند. درمقابل باروش مونت‌کارلو، برخی محاسبات مطلوب به‌ظرفیتی به مراتب بیشتر از ظرفیت کامپیوترهای موجود نیازدارند. معماران کامپیوتر درکارتحقیق‌اند که چگونه می‌توان واحدهای پردازش موازی زیادی را، خواه برای کامپیوتر چند منظوره یا برای کامپیوتر مختص یک محاسبهٔ ویژه، به‌طور مؤثر به‌هم پیوند داد.

تصادفی بودن الگوریتمها

مثالهای بالا یکی ازکاربردهای تصادفی بودن دریک دستگاه پیوستار را نشان می‌دهد. اخیراً، تصادفی بودن کاربسردپذیری خود را در مطالعهٔ مسائل جبری نیز نشان‌داده‌است. دراینجا یک روش تصادفی دقیقاً پاسخ

صحیح را به‌دست می‌دهد ــ مگر گاهگاهی، که پاسخی اشتباه باشد. هر یك از این روشها به ویژگیهای ساختاری بنیانی موجودات جبری مجردی مانند حلقه‌های چند جمله‌ایها، هیأتهای اعداد، و گروههای جایگشتها وابسته است.

چنین الگوریتمی چگونه سودمند می‌افتد؟ اجرای الگوریتمی که در ۱۰۰ درصد موارد درست باشد ممکن است نیازمند میلیونها مرحله باشد، در حالی که الگوریتمی که پاسخ درست را تنها در ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹ر۹۹ درصد موارد به دست می‌دهد اجرایش صرفاً نیازمند n مرحله است. صرفه‌جوییهای عظیم در وقت بر امکان ناچیز خطا می‌چربد. در هشت سال گذشته، به چندین نمونه از این گونه روشها دست یافته‌اند.

یکی از الگوریتمهای تصادفی، که دامنهٔ ایمنی کامپیوتر را با هزینهٔ اندکی بسیار بالا می‌برد بزودی در درون تراشه‌های سیلیسیم سیم‌بندی خواهد شد. این الگوریتم، ثبت «اثرانگشت» پرونده‌های کامپیوتری را به‌خاطر بازداشتن دیگران از تحریف آن، میسر می‌سازد. فرض کنیم در دیسك کامپیوتری ۴۰ میلیون لقمه (بایت) اطلاعات ذخیره شده باشد. این لقمه‌ها را به‌صورت ضرایب یك چندجمله‌ای از درجهٔ ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ در نظر می‌گیریم؛ این چندجمله‌ای را بر یك چندجمله‌ای درجهٔ ۱۳ که به‌طور تصادفی اختیار شده است تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ تقسیم را کنار می‌گذاریم. اکنون ضرایب چندجمله‌ای را که به‌طور تصادفی برگزیده‌ایم و ضرایب باقیمانده را یادداشت می‌کنیم و آنها را در برگه‌دان خود قرار می‌دهیم. اینها برای پروندهٔ شما حکم یك «اثرانگشت» را دارند. احتمال اینکه یك مداخله‌گر بتواند داده‌ها را بدون تغییر این اثرانگشت تصادفی عوض کند کمتر از یك در ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ یا با تماد علمی، 10^{-30} است.

اگر امکان خطای اندکی مجاز باشد، آزمون اول بودن یك عدد، مسأله‌ای که در بالا از آن یاد کردیم، بسیار آسان از کار درمی‌آید. اگر عدد صحیحی مانند n عدد اول نباشد، آنگاه دست‌کم $3/4$ اعداد بین ۱ و n دارای خاصیت ویژه‌ای چون S اند که می‌توان آن را به سرعت وارسی کرد. اگر n عدد اول باشد، چنین اعدادی با خاصیت S وجود ندارند. آزمون ساده است: پنجاه عدد انتخاب کنید و ببینید آیا خاصیت S را دارند یا خیر. اگر یکی این خاصیت را داشته باشد، پس n اول نیست. درغیراین صورت، n تقریباً با اطمینان اول است ــ زیرا، اگر n اول نباشد، احتمال انتخاب کردن پنجاه عدد به‌طور تصادفی بدون اینکه خاصیت S را داشته باشند دست بالا در حدود $(1/2)^{50}$ (یا 10^{-30}) است. اگر این احتمال به‌اندازهٔ کافی مطلوب نباشد، روی پنجاه عدد دیگر همین کار را انجام دهید؛ این کار فقط یك یا دوثانیه به درازا می‌کشد، و امکان خطا سریعتر کاهش می‌یابد.

کامپیوتر در خدمت اثبات

ریاضیدانان کامپیوتر را به‌صورت آزمایشگاهی علمی برای آزمودن ایده‌ها و رسیدن به پنداره‌های دقیق، بر پایهٔ مدارك عددی، به خدمت گرفته‌اند. این فکر اخیراً در مطالعه و بررسی نگاشتهای بازه، و به‌طور کلی در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی، به‌کار نشسته است. کامپیوتر همین کاربرد را در نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، توپولوژی، آنالیز مختلط، و مطالعهٔ پتانسیلهای شبه دوره‌ای دارد. از محاسبهٔ بسیار دقیق، الگوهایی زاده می‌شوند. در موردی، محاسبات مفصل، حتی نشان می‌دهند چه موقع تابعی نقاط بازگشت با ناپیوستگیهایی دارد و بنابراین اساس پندارهای ریاضی را پایه‌ریزی می‌کنند.

اما، اخیراً امکانات تازهٔ فریبنده‌ای پدید آمده است: در برخی موارد کامپیوتر می‌تواند به‌جای اینکه آزمایشگاه ریاضیدان باشد، در پروراندن یك اثبات سنتی ریاضی، همچون یك همکار برای او عمل کند. کامپیوتر می‌تواند کار جبری، ترکیبیاتی، یا تحلیلی انجام دهد. در مورد اولی، مانند تحلیل مسألهٔ چهاررنگ، کامپیوتر این نکته را وارسی می‌کند که آیا تعدادی متناهی و معین از حالتهای یك حکم ترکیبیاتی برقرار است یا خیر؛ این کار با بازبینی یکی از آنها پس از دیگری انجام می‌گیرد. تبدیل این قضیه به حکمی ترکیبیاتی کاری است که بر عهدهٔ ریاضیدان می‌ماند.

کامپیوتر همچنین می‌تواند نامساویهای ضروری برای اثبات یك قضیه را تحقیق کند. این کار می‌تواند با دقت ۱۰۰ درصد انجام گیرد. ریاضیدانان باید کامپیوتری داشته باشند که بررسی کند آیا یك عدد خاص x قطعاً در بازهٔ $[a, b]$ واقع است یا خیر. اثبات نامساوی $x<y$ به اثبات این موضوع تبدیل می‌شود که کران بالای x ــ بازهٔ کمتر از کران پایینی y ــ بازه است. این محاسبه با بازه‌ها را می‌توان با تبدیل هرمحاسبه به حساب اعداد صحیح با اطمینان انجام داد.

این روش در مطالعهٔ تکرار نگاشتهای بازه با موفقیت به‌کار گرفته شده است، و در اثبات اخیر در مورد وجود یك نقطهٔ ثابت برای تکرار یك نگاشت درجهٔ دوم جزء با اهمیتی است. کامپیوتر می‌تواند تعداد زیادی براورد را وارسی کند، که هریك از آنها را می‌توان با دست انجام داد. اما انجام این براوردها وقتی کلاً مد نظر باشند، مشکلات زیادی را می‌آفرینند.

این دو مثال هر دو انحرافی از سنت‌اند که می‌توانند از اهمیت فزاینده‌ای برخوردار باشند. در این مرحله ما پیشگویی نمی‌کنیم که کامپیوترها در طراحی ساختمان یك اثبات جایگزین تفکر ریاضیدان خواهد شد. اما در مواردی مطمئناً چنان به‌یاری ریاضیدان می‌شتابند که نقش آنها خیلی فراتر از آزمایشگاه تجربی با مدل ریاضی خواهد بود؛ کامپیوتر با تثبیت تعداد زیادی اتحاد یا نامساوی در درون یك اثبات ریاضی، مکمل توانایی ریاضیدان خواهد بود.

آنالیز عددی و مدل‌سازی ریاضی

ردپای مراحل اولیهٔ آنالیز عددی را می‌توان در آثار نیوتن (قرن ۱۷) و اویلر (قرن ۱۸) سراغ گرفت. اما، ریاضیات گسسته با ظهور کامپیوتر به سرعت تکامل پیدا کرد. در دورهٔ پس از ۱۹۵۰، واردونی ماتریسهای تنك و انتگرالگیری عددی به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفتند؛ روشهای انتگرال گرفتن از معادلات دیفرانسیل معمولی جزئی نیز به همین منوال بود. این پیشرفتها طراحی مهندسی را در گسترهٔ وسیعی از مسائل میسر کردند. امروزه بیشتر طراحی و توسعهٔ تکنولوژی پیشرفته ــ از اتومبیل و هواپیما تا مهندسی نفت و ماهواره ــ بر شالودهٔ شبیه‌سازی کامپیوتری استوار است. افزون بر این، محاسبات بیدرنگ به پیروزیهایی در زمینهٔ اکتشافات فضایی و کنترل خودکار موشك انجامیده است.

اما، همهٔ محاسبات را نیز نمی‌توان در مجرای خودکار انداخت. اهمیت مغز متفکر چندان است که هرچه برآن تأکید ورزیم گزاف نگفته‌ایم. در یك سمت مدل‌سازی عددی، قوانین فیزیکی و معادلات ریاضی قرار دارند که یك فرایند مهندسی خاص را توصیف می‌کنند، در دیگرسو الگوریتمها و کدها (برنامه‌ها)ی عددی هستند که برای دستور دادن به کامپیوتر به‌کار می‌روند. پیوند دادن این دو حوزه مستلزم محاسبات ریاضی تقریبهای گسسته، و درکی ریاضی از ساختار معادلات، و پدیده‌های غیرخطی است که توسط این معادلات توصیف می‌شوند.

در اینجا روشهای تفاضل متناهی و عنصر متناهی نقشی اساسی‌بازی کرده‌اند. با ظهور محاسبهٔ برداری وموازی، مسائلی که از دیرباز غیر قابل حصول تصور می‌شدند اینك رام می‌شوند. علی‌رغم پیشرفتهای اخیر، آنالیز عددی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی‌در سه بعد، همچون بسیاری ازمعادلات مرزی دیگر، باید منتظر روشهای ریاضی نوینی باشند.

همچنین ریاضیات نوین می‌تواند بین‌دو پرسش مهم دربارهٔ سرعت محاسبه تمیز قائل شود. آیا محاسبات را می‌توان آنقدر سریع انجام داد که سودمند باشد؟ دربسیاری ازمسائل رایج در مهندسی انجام‌کار درمدتی خیلی‌کم امری اساسی است. ثانیاً، ریاضیات نوین می‌تواند به‌این مسأله پاسخ دهد که آیا محاسبه‌ای صرفاً شدنی است، یا آنکه می‌توان آن را در زمان لازم که عملاً به‌کار می‌آید برای یك منظور عملی مانند به‌زمین نشاندن هواپیما انجام داد.

ریاضیات عددی درتحقق سه تحول‌قابل ملاحظه‌نقشی کلیدی‌بازی می‌کند: نشستن شبیه‌سازی کامپیوتری به جای آزمایش، علم تصمیم، و پردازش داده‌ها و سیگنالها. محاسبه می‌تواند از آزمایش ارزانتر تمام شود. اصلاح طرح آزمایشها در یك بررسی کامپیوتری از یك آزمایش فیزیکی واقعی بسیار ساده تر است. برای برخی پروژه‌ها، آزمایش خطرناك یا ناممکن است.

در آئرودینامیك، طراحی هواپیما، توربین وکمپرسور به‌کمك کامپیوتر انجام می‌شود. برای عمل شبیه‌ساز پروازکه درآن خلبانهای فضاپیما آموزش می‌دیدند، توانایی محاسبهٔ نیروهای آئرودینامیکی وارد بر فضاپیما (شاتل) ضرورتی قطعی بود.

برخی ازکاربردهای دیگر دینامیك عددی سیالها عبارت‌اند از: طراحی بدنهٔ کشتی، محاسبهٔ الگوهای احتراقی، جریان آمیزه‌ای از روغن و آب (یا سایر مواد شیمیایی) برای بازیابی روغن اضافی، جریان یافتن چند فازی [مواد] در راکتورها تحت شرایط گذرا، جریان آب زیرزمینی از میان صخره‌های خرد شده، و انتشار سیگنالهای صوتی در لایه‌های زمینی، و مانند آنها. طراحی راکتور همجوشی هسته‌ای بر پایهٔ مدل‌سازی ریاضی‌متکی‌است؛ به‌وجودآوردن پلاسما یا جگالیهایی که مورد نظر ماست هنوز برروی زمین ممکن نشده است؛ این‌نوع پلاسماها تنها به‌صورت‌مدلهای ریاضی‌موجودند. همین امر در مورد ایجاد لیزر همجوشی هم صدق می‌کند.

تحقیق درعملیات، حوزه‌ای از علم تصمیم که بر عملیات ریاضی روی داده‌های ذخیره شده متکی است، به‌ساده‌کردن عملیات‌بزرگ‌مقیاس یاری عظیمی رسانیده و استفادهٔ بهینه از منابع را تضمین کرده است. برنامه‌ریزی خطی، ازهمان نخستین کاربردهای صنعتی‌اش در جدول زمان‌بندی پالایشگاههای نفت درآغاز دههٔ ۱۹۵۰، به‌افزایش اساسی کارایی عملیاتی که در تجزیه [مواد] مورد استفاده قرار می‌گرفت، منجرشده‌است. توپولوژی، آنالیزمحدب، ریاضیات ترکیبیاتی، و هندسه، جملگی درپیشبرد این مدل ریاضی سهم داشته‌اند.

با انجام عملیات ریاضی روی اطلاعات ذخیره شده به‌صورت رقمی می‌توان جزئیات پنهان در توده‌ای از داده‌ها را استخراج کرد. دراینجا ریاضیات آمار وارد کار می‌شود تا گرایشها و همبستگیهای پنهان را نشان دهد. در علوم پزشکی، مدل‌سازی فیزیولوژیك در را به روی امکاناتی برای فهم عملکردهای زیست‌شناختی موجودات زنده و نیز طراحی اعضای مصنوعی مؤثر، می‌گشاید. شاید جالبترین موفقیت محاسبات [کامپیوتری] درپزشکی کاربرد آن در برش‌نگاری (توموگرافی) با پرتوایکس کامپیوتری است، ونیز درسایرپیشرفتهای تشخیص بدون استفاده ازجراحی (بردن دستگاههای تشخیص به‌درون بدن) که از فراصوتی، تشدید مغناطیسی هسته‌ای، و برش‌نگاری گسیل پوزیترون بهره می‌گیرند.

تأثیر کامل کامپیوتر در دهه‌های آینده‌آشکار خواهد شد. کامپیوتر مانند اختراع ماشین بخار، برای بالابردن سطح زندگی ما دارای ظرفیت عظیمی است. ابتکاراتی که هم اکنون برای ابرکامپیوترها و کامپیوترهای نسل پنجم (که هدف آن هوش مصنوعی، تشخیص الگوها، پردازش اطلاع و مانند آنها، و نیز محاسبات علمی است) درجریان است می‌تواند تنها تا اندازه‌ای نتیجه‌بخش باشد، مگرآنکه چنین سخت افزاری با دیدگاههای ریاضی نوین تکمیل شود.

معماری کامپیوتر امروزی، رشته‌ای است؛ این کامپیوتر به افتخار فون نویمان که چگونگی اجرای این نوع برنامه نویسی را نشان داد، ماشین فون نویمان نامیده می‌شود. در انقلاب آیندهٔ سخت‌افزار محاسبات، سازماندهی به‌جای‌اینکه رشته‌ای باشد، موازی‌است. این‌کامپیوترخیلی بیشترشبیه ساختار موازی‌مغزطراحی خواهد شد، که کندتر اما بسیارپیچیده‌تراست. مطمئناً برای‌ساخت و برنامه‌دادن به‌آن و به‌رهیافت مفهومی نوین نیازخواهدبود. کامپیوتر، درتمام‌کاربردهایش، به‌طور حیاتی به ایده‌ها، بینشها، و روشهای برگرفته از ریاضیات وابسته است.

ترجمهٔ بهرام معلمی

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of mathematics", *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washington D.C, 1984, 117-162.

آموزش هنر مسئله حل کردن*

آنی شوئنفلد

۱. مقدمه و کلیات

این مقاله دو سؤال زیر را بررسی می‌کند:

(الف) آیا می‌توانیم استراتژیهایی را که ریاضیدانهای «خبره» برای حل مسئله به‌کار می‌برند، دقیقاً تشریح کنیم؟ و

(ب) آیا می‌توانیم به کاربردن این استراتژیها را به دانشجویان بیاموزیم؟

دو فرض اصلی زیر را می‌پذیریم. نخست: ریاضیدانها در نتیجهٔ تجربهٔ خود در مسئله حل کردن، به‌تدریج استراتژیهایی سازگار و مفید به‌دست می‌آورند. دوم: بیشتر دانشجویان یا از این استراتژیها آگاهی ندارند یا آنها را به‌کار نمی‌برند. برای مثال مسئله‌های زیر را در نظر بگیرید:

مسئلهٔ ۱. فرض کنید a، b، c، و d اعدادی مفروض بین ۰ و ۱ باشند. ثابت کنید که

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d)>۱-a-b-c-d\ .$$

مسئلهٔ ۲. مجموع $\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\cdots+\frac{n}{(n+۱)!}$ را تعیین کنید.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید که اگر $۲^n-۱$ عدد اول باشد، آنگاه n اول است.

هر سهٔ این مسائل به وضوح برای دانش‌آموزان دبیرستانی قابل فهم است. حل هیچیک نیازبه‌داشتن معلومات ریاضی بیش‌ازجبر دبیرستان ندارد و همه، راه‌حلهای سرراستی دارند. با این حال دانشجویان مدارس عالی وریاضیدانهای حرفه‌ای این مسئله‌ها را باروشهای کاملاً متفاوتی حل می‌کنند.

درمسئلهٔ ۱ اغلب دانشجویان باصرف انرژی‌زیاد چهارعامل ضرب طرف چپ را در هم ضرب کرده، جملات طرف راست را به‌طرف چپ می‌برند و سعی می‌کنند نامساوی

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$-abc-abd-acd-bcd+abcd)>۰$$

را اثبات کنند. ولی معمولاً موفق نمی‌شوند. تا آنجایی که من مشاهده کرده‌ام همهٔ ریاضیدانها حل مسئله را با اثبات نامساوی

$$(۱-a)(۱-b)>۱-a-b$$

آغاز می‌کنند. بعدبرای اثبات حالتهای سه و چهارمتغیره، این نامساوی را در $(c-۱)$ و بعد نتیجه را در $(d-۱)$ ضرب می‌نمایند.

همچنین درمسئلهٔ ۲ بیشتر دانشجویان شروع می‌کنند به‌جمع کردن و نوشتن تمام جمله‌ها با یك مخرج مشترك. از طرف دیگر، فرد خبره پیش خود می‌گوید: «مسئلهٔ ناجوری‌است، خوب است چند حالت آن را محاسبه کنم.» الگوی استقرایی روشنی به‌دست می‌آید و به‌آسانی اثبات می‌شود.

همکاری که مسئلهٔ ۳ را خواند و گفت «باید با یافتن نقض حل شود»، نظرمتداول خبره‌ها را اظهار داشت. با توجه به ساختار مسئله، حقیقتاً هیچ راه دیگری وجود ندارد. اما آنچه‌که فرد خبره تقریباً به‌طوراتوماتیك مشاهده می‌کند، به‌نظردانشجویان نمی‌رسد. این مسئله را که به دانشجویان دادم، تعداد زیادی از آنها، یا با جملاتی شبیه «نمی‌دانم ازکجاشروع کنم» پاسخ دادند، یا کمی محاسبه کردند بی‌آنکه نتیجه قابل قبول است یا نه، و به‌نتیجه نرسیدند.

البته اینها، مسئله‌های ویژه‌ای هستند که درمورد آنها عملکرد خبره‌ها از یك‌طرف و مبتدیها از طرف دیگر به‌طور قابل ملاحظه‌ای با هم سازگار است. با اینکه خبره‌ها آگاهانه از استراتژی معینی پیروی نمی‌کردند، رفتار آنها دست‌کم با دستورهای «ابتکاری» زیرسازگار بود:

(الف) در مسئله‌های پیچیده که متغیرها زیاد هستند، حل مسئله‌ای مشابه را که متغیرهای کمتری دارد در نظر بگیرید. سپس بکوشید یا از روش حل یا از نتیجهٔ این مسئله بهره بگیرید.

(ب) اگر مسئله‌ای با پارامتر صحیح n داده شده باشد، برای مقادیر کوچك n، حالات خاص را محاسبه کنید و درجستجوی یك الگو باشید.

(پ) روش برهان خلف را درنظر بگیرید؛ بخصوص وقتی که با نفی حکم مورد نظر، امکانات بیشتری برای حل مسئله به دست می‌آید.

بسیاری ازمبتدیان ازاین استراتژیها بی‌اطلاع بودند، وتعداد زیادی هم «اطلاعاتی دربارهٔ آنها داشتند» (یعنی وقتی حل مسئله را می‌دیدند می‌گفتند که قبلاً راه‌حلهای مشابهی را دیده‌اند) ولی به‌فکرشان نرسید آنها را به‌کار ببرند. روشن است که خبره و مبتدی در مسئله حل کردن روشهای متفاوتی دارند. سؤال اصلی این است: آیا می‌توان به‌مبتدی آموخت که مانند خبره مسئله حل کند؟ جواب من، «بله» مشروط است. من فکر می‌کنم امکان دارد به‌دانشجویان درسی داده شود که آنها را

قادر سازد مسئله‌های مختلفی را ــ از جمله مسئله‌هایی را که نظیر آنها درسر کلاس حل نشده‌است ــ بهتر و با توفیقی بیشتر از زمانی که این درس را نخوانده‌اند، حل کنند. ولی در اینجا پرسشهای زیادی مطرح می‌شوند که باید به آنها پاسخ داده شود. دانشجو به‌چه‌اندازه پرورش فکری و معلومات نیازمند است تا این درس برایش مفید واقع شود؟ درک یک استراتژی نظیر «هدفهای فرعی تعیین کنید» و درک نحوهٔ استفاده از آن مستلزم چیست؟ علاوه بر تسلط بر تک تک استراتژیها به‌چه‌چیز دیگری نیاز است؟ به‌طور خلاصه نظر من این است:

نخست اینکه استراتژیها پیچیده‌تر از آن هستند که از توصیف ساده آنها استفاد می‌شود. اگر بخواهیم دانشجویان آنها را به کار ببرند، باید آنها را به‌تفصیل شرح دهیم و تدریس آنها را به‌اندازهٔ هر درس دیگر ریاضی جدی بگیریم. دوم، کاملاً روشن است که هرگاه تعداد کمی استراتژی انتخاب کنیم و آنها را در شرایط کاملاً کنترل شده‌ای تدریس نماییم، مؤثر واقع می‌شوند. سوم، توانایی در کاربرد تک‌تک استراتژیها کافی نیست. باید بدانید از کدامیک وچه‌موقع استفاده کنید. می‌توانیم دانشجو را با اسلوبی معقول برای خوب حل کردن مسئله تجهیز کنیم و می‌توانیم پیشرفت در کار را عملاً نشان دهیم.

۲. پیچیدگی استراتژیهای ابتکاری

اولین کسی که استراتژیهای مسئله حل کردن را چنان توصیف کرد که می‌شد آنها را تدریس نمود، پولیا بود (هرچند وی چنین ادعایی نکرده وهیچ وعده‌ای هم دربارهٔ نتایج حاصل نداده است). در کتاب چگونه مسئله حل کنیم [۱۹] و در کتاب دوجلدی اکتشاف ریاضی [۲۰] پولیا اساس کاوش دربارهٔ ابتکارات را بنا نهاد.

استراتژی ابتکاری را چنین توصیف می‌کنیم: یک پیشنهاد یا یک تکنیک کلی که به کسانی که با مسئله‌ای درگیر شده‌اند کمک می‌کند که آن را درک یا حل کنند. استراتژیهای ابتکاری که در بخش نخست ذکر کردیم: «متغیرهای کمتر»، «محاسبهٔ حالات خاص» و «استدلال به‌روش برهان خلف» از جملهٔ استراتژیهای ابتکاری هستند. در شکل ۳ استراتژیهای بیشتری عرضه شده‌اند. پژوهشگران زیادی کوشش کرده‌اند نشان دهند که این استراتژیها می‌توانند دانشجو را در حل کردن مسئله یاری کنند، اما به‌طور کلی نتایج حاصل قطعیت ندارند. یک علت آن این است که ممکن است معلوم شود این استراتژیهای به‌ظاهر ساده، خیلی پیچیده هستند. به‌استراتژی و چند مسئله‌ای که در زیر می‌آیند توجه کنید.

«اغلب بررسی و حل یک مسئلهٔ مشابه ساده‌تر، به حل مسئلهٔ پیچیده کمک می‌کند. مسئلهٔ ساده‌تر را حل کنید و از آن برای حل مسئلهٔ پیچیده استفاده نمایید.»

مسئلهٔ ۴. دو نقطهٔ واقع بر روی کرهٔ واحد (در فضای سه بعدی) به‌وسیلهٔ کمانی چون A که از داخل کره می‌گذرد، به‌هم وصل شده‌اند. ثابت کنید که اگر طول A کمتر از ۲ باشد، یک نیمکرهٔ H وجود دارد که A را قطع نمی‌کند.

مسئلهٔ ۵. فرض کنید a ، b ، c اعدادی حقیقی و مثبت باشند. نشان دهید امکان ندارد که هرسه عبارت $a(1-b)$ ، $b(1-c)$ و $c(1-a)$ از ۱/۴ بیشتر باشند.

مسئلهٔ ۶. حجم کرهٔ واحد در فضای ۷ بعدی را بیابید.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید که اگر

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$

آنگاه $a=b=c=d$.

این چهار مسئله را مانند مسئلهٔ ۱ ، می‌توان با استراتژی «مسئلهٔ مشابه» حل کرد. با این حال بعید است دانشجویی که در به‌کار بردن این استراتژی تجربه ندارد، بتواند در بیشتر این مسئله‌ها با موفقیت از آن استفاده کند. یکی از علل آن این‌است که در هر مسئله باید استراتژی را به‌گونه‌ای متفاوت به‌کار برد.

در حل مسئلهٔ ۱ ، براساس حل مسئله در حالت دو متغیره، یک راه حل استقرایی بنا کردیم، و از آن، مانند جای‌پایی برای رسیدن به‌حل مسئلهٔ اصلی استفاده نمودیم.

برخلاف مسئلهٔ اول، در مسئلهٔ ۴ از تشابه برای به‌دست‌آوردن ایدهٔ یک برهان استفاده می‌شود. تجسم مسئله درفضای سه‌بعدی دشوار، ولی دیدن آن در صفحه آسان است: می‌خواهیم در دایرهٔ به‌شعاع ۱ قطری رسم کنیم که کمانی را که طولش از ۲ کمتر است و دوانتهایش روی دایره هستند، قطع نکند. می‌بینیم که قطر موازی با خط راستی است که از دو انتهای کمان می‌گذرد و ویژگی مطلوب را دارد، و این ما را قادر می‌سازد که به‌فضای سه‌بعدی برگردیم وصفحهٔ مشابه را رسم کنیم.

مسئلهٔ ۵ به‌وقت نیاز دارد. به‌نظر می‌رسد که مشابه دومتغیرهٔ آن باید مفید باشد. ولی من راه ساده‌ای برای حل آن نیافته‌ام. در نظر اول، مشابه یک متغیرهٔ آن بی‌معنی به‌نظر می‌رسد، ولی چنین نیست. اگر مسئله را در این حالت حل کنیم و به‌فکرتان برسد که سه‌جملهٔ داده شده را به‌کار ببرید مسئله حل می‌شود. در اینجا نیز از حل مسئلهٔ مشابه استفاده می‌کنیم، ولی این‌بار از نتیجه‌ای متفاوت و با روشی متفاوت.

در مسئلهٔ ۶ ، هم از روشها و هم از نتیجه‌های مسئله در بعدهای کمتر استفاده می‌کنیم. باهمان روش حل مسئله در بعدکمتر، ازمقطعهای عرضی انتگرال می‌گیریم؛ اندازهٔ این مقطعها نتیجه‌هایی هستند که مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در مسئلهٔ ۷ شاید روشن باشد که مسئله باید در حالت دو متغیره بررسی شود. اما برای دانشجو اصلاً روشن نیست که کدام مسئلهٔ دو متغیره را در نظر بگیرد. تعداد زیادی از آنهایی که من مراقب کارشان بوده‌ام کوشیده‌اند مسئلهٔ زیر را حل کنند.

مسئلهٔ ۷'. ثابت کنید اگر $a^2+b^2=ab$ ، آنگاه $a=b$.

درحالی که باید مسئلهٔ زیر را حل می‌کردند.

مسئلهٔ ۷". ثابت کنید اگر $a^2+b^2=ab+ba$، آنگاه $a=b$.

نتیجه می‌گیریم که «بهره‌برداری ازمسئله‌های مشابه ساده‌تر» حقیقتاً یک استراتژی نیست، بلکه مجموعه‌ای از استراتژیهای مشابه است. برای حل مسئله‌ای با استفاده از این استراتژی باید، (الف) به‌فکر استفاده از آن بیفتیم (واین ساده نیست)، (ب) بتوانیم مسئله‌های مشابهی طرح کنیم که مناسب به‌نظر می‌رسند، (پ) از میان مسئله‌های مشابه، مسئلهٔ مناسب را برگزینیم، (ت) این مسئله را حل کنیم، و (ث) بتوانیم خواه از روش حل یا از نتیجهٔ مسئلهٔ مشابه به‌نحو مناسبی بهره‌برداری کنیم.

این استراتژی زیادپیچیده‌نیست. اما استراتژی «وقتی یک پارامتر صحیح در مسئله می‌بینید، در جستجوی راه حل استقرایی باشید» از آن هم ساده‌تر است؛ ولی استراتژی «هدفهای فرعی تعیین کنید و از آنها بهره بگیرید» به‌مراتب مشکلتر است. منظور ما در این بخش آن است که نشان دهیم آموزش دانشجویان برای به کاربردن حتی یک استراتژی، مستلزم صرف وقت زیادی است. باید از میان استراتژیها

یك استراتژی مناسب انتخاب کنیم؛ به‌عنوان نمونه مسئله‌هایی را (مانند مسئله‌هایی که در بالا آوردیم) ذکر کنیم که طرز کار استراتژی را نشان دهند؛ باید وقتی استراتژی را در دیگر مسئله به‌کار می‌بریم، استعمال آن را به‌دانشجویان خاطرنشان کنیم؛ و وقتی آن را به‌کار نمی‌برند، از آنان بازخواست کنیم.

۳. آموزش استراتژیها به‌دانشجویان (گاهی) مؤثر واقع می‌شود

شواهدی معتبر وجود دارد که «خبره‌ها» از استراتژیهای ابتکاری که در بالا بحث کردیم، استفاده می‌کنند. ولی این استراتژیها را به‌ندرت به طرز صریح به‌دانشجویان می‌آموزند؛ ممکن است گفته شود «این استراتژیها عادتهای خوبی هستند، که شخص آنها را از راه مسئله‌حل کردن فرا می‌گیرد». بنابراین ممکن است ادعا شود (در واقع ادعا نیز شده است) که اگر پیشرفتی در مسئله حل کردن به‌دست آید، از آموزش استراتژیها نیست، بلکه در اثر تمرین در مسئله حل کردن است. به همین دلیل من آزمایشی ترتیب دادم که در آن، به دو گروه از دانشجویان تعلیم اساساً یکسانی در مسئله حل کردن داده شد، جز اینکه برای یکی از دو گروه، استراتژیها نیز صریحاً تشریح گردید.

من با هفت دانشجوی علوم سالهای بالای دورهٔ کارشناسی به‌طور انفرادی کار کردم و به‌طور انفرادی از آنان امتحان گرفتم. برای اینکه تدریس قابل تکرار باشد و همکاران بتوانند آن را بررسی کنند، «درسها» را روی نوار ضبط کردم. به‌دانشجویان آموزش دادم که مسئله را «به‌صدای بلند» حل کنند، و سؤالهای امتحانی نیز بر نوار ضبط شدند. این آزمایش برای این طرح شده بود که استفادهٔ دانشجویان از پنج استراتژی ابتکاری زیر آزمایش شود:

۱. در صورت امکان شکل رسم کنید.
۲. اگر در مسئله پارامتر صحیح وجود داشته باشد، روش استقرا را بیازمایید.
۳. یك راه منطقی را در نظر بگیرید. از راه برهان خلف یا از راه عکس نقیض استدلال کنید.
۴. مسئلهٔ مشابهی را که متغیرهای کمتری دارد، در نظر بگیرید.
۵. کوشش کنید هدفهای فرعی تعیین کنید.

درجریان تعلیم، همهٔ دانشجویان روی‌بیست مسئله کار کردند وسپس حل هریك ازمسئله‌ها را دیدند. به آنان برای حل‌مسئله‌ها ودیدن راه‌حل آنها وقت مساوی داده‌شد. اما به‌چهار نفراز دانشجویان، یك آموزش ابتکار نیز داده شد. به آنان صورت و توضیح پنج استراتژی مورد استفاده داده شد و نیز درقسمت حل هر مسئله یك «توضیح اضافی» هم داده‌شد که شرح می‌داد ازاستراتژی چگونه استفاده شده‌است. شکل ۱ حل مسئله‌ای را که قبلاً دیدیم، ارائه می‌دهد. طرف چپ، حل مسئله است که همهٔ دانشجویان آن‌را دیدند. طرف‌راست راتنها دانشجویان «ابتکارآموز» دیدند. به‌همهٔ دانشجویان گاه (هم در طول جلسه‌های تمرین و هم درآزمونها) تذکر داده می‌شد که به‌دقت مرور کنند ببینند چه می‌کنند و درتذکرهایی که به‌گروه «ابتکارآموز» داده شد، عبارت «به‌فهرست استراتژیها نگاه کنید» هم وجود داشت.

نتیجه‌های این آزمایش را درمقالهٔ «آموزش صریح ابتکار ...» [۳۳] به‌تفصیل شرح داده‌ام. حتی این نمونهٔ کوچك نشان دادکه در عملکرد دو گروه دانشجویان موردآزمون، یك تفاوت معنی‌دار آماری وجود دارد: هریك از چهار دانشجوی «ابتکارآموز» از دانشجویان غیر ابتکارآموز پیشی گرفتند. آزمونی آماری براساس این نمونه، نشان می‌دهد که درسطح معنی‌دار بودن ۱/۳۵، تفاوت مورد بحث در عملکرد دو گروه وجود دارد. اما مهمتر اینکه ورقه‌های حل مسئله‌ها نشان‌می‌دهند که‌کاربردصریح استراتژیها بین‌دو گروه‌تفاوتهایی به‌وجود آورده است.

در تمرین مربوط به «متغیرهای کمتر» مسئله‌های ۱، ۵ و ۷ بالا و مسئلهٔ زیر آمده بودند.

مسئلهٔ ۸. نشان دهید اعدادی حقیقی چون a, b, c, d, e, A, B، C, D، و E وجود ندارند که برای تمام مقادیر x, y, z, r و s رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$x^2+y^2+z^2+r^2+s^2$$
$$=(ax+by+cz+dr+es)(Ax+By+Cz+Dr+Es)$$

همهٔ دانشجویان دیدند که چگونه مسئلهٔ مشابه یك یا دو متغیره برای حل هریك ازاین مسئله‌ها به‌کار گرفته می‌شود. اگر «تمرین» تنهاچیزی است که باید به‌حساب آید، همهٔ آنها مسئلهٔ زیر را که بعد از امتحان به‌آنها داده شد، باید حل می‌کردند:

مسئلهٔ ۹. فرض کنید p, q, r و s اعداد حقیقی‌مثبتی باشند، نامساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1)(s^2+1)}{pqrs} \geqslant 16.$$

هر چهار دانشجوی «ابتکارآموز» و تنها یك نفر دیگرآن‌را حل کردند. دودانشجوی دیگرغیرابتکارآموز دوطرف رابطه را در $pqrs$ ضرب کردند و (به‌طور ناموفق) سعی کردند نامساوی حاصل را اثبات کنند.

این‌نشان‌می‌دهدکه ما نباید انتظارداشته‌باشیم که بدون‌دادن‌آموزش صریح برای استفاده از استراتژیهای مناسب، دانشجویان بتوانند استراتژیهای مفید مسئله حل کردن را بیاموزند، وهمچنین‌نشان می‌دهد که آموزش، «مؤثر واقع شد». دقیقتر بگوییم، ابتکارات در شرایط تجربی زیرمفید واقع شدند: (۱) تعداد استراتژیهایی‌که باید به‌آنها «توجه» شود محدودبود، (۲) به‌تناوب تذکر داده شدکه به‌استراتژیها توجه‌کنند و (۳) مسئله‌های آزمون به وضوح با یکی از روشهای «ابتکاری» پیشنهادی حل شدنی بودند. انتقال‌آموزش ابتکار به‌خارج ازآزمایشگاه و به‌دنیای واقعی‌کارآسانی نخواهد بود.

۴. نیاز به‌استراتژیهای جامع

اگر ابتکارات می‌توانند مؤثرواقع شوند، چرا درنوشتارهای‌مربوطه، نتیجه‌ها این‌چنین‌مبهم هستند؟ پژوهشهای اصلی (به‌مقاله‌های گلدبرگ، کانتوسکی، لوکاس، اسمیت، وب، و ویلسن‌رجوع کنید) عموماً دلگرم کننده هستند، ولی همین و نه‌بیش. به‌نظر من دو دلیل می‌تواند وجود داشته باشد، که یکی ازآنها به‌آسانی قابل رفع است

دیدیم که میزان‌کارلازم برای آموزش یك استراتژی خاص، معمولاً کمتر از میزان واقعی آن درنظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، درسال ۱۹۷۸ کانتوسکی در کنفرانس‌مربوط به‌آموزش ریاضی[1] گزارش داد که در یك آزمایش مسئله حل کردن، با اینکه ۴۰درصد ازوقت آموزش

1. NCTM

مسئله در حالت چهار متغیره خیلی مشکل است.

آیا از مسئلهٔ مشابه یک‌متغیره چیزی دستگیرتان می‌شود؟ تغیر

از مسئلهٔ مشابه دو متغیره چطور؟ حل آن آسان است.

آیا می‌توان این نتیجه را به‌کار برد؟ بلی...

از آن حالت سه‌متغیره و سپس حالت چهار متغیره را بسازید.

به‌خاطر داشته باشید که وقتی مسئله‌ای مشکل است؛ مسئلهٔ مشابه با تعداد متغیرهای کمتر را در نظر بگیرید. سپس از روش یا از نتیجهٔ آن برای حل مسئلهٔ اصلی استفاده کنید.

چهار عدد حقیقی a، b، c، d که هر کدام بین ۰ و ۱ واقع است، داده شده‌اند. نامساوی زیر را ثابت کنید

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d)>۱-a-b-c-d$$

حل

برای حل مسئلهٔ اول نامساوی

$$(۱-a)(۱-b)>۱-a-b \qquad (*)$$

را ثابت می‌کنیم. اگر ضرب طرف‌چپ را انجام دهیم می‌بینیم که (*) درست است اگر و تنها اگر

$$۱-a-b+ab>۱-a-b$$

درست باشد و این نامساوی درست است اگر وتنها اگر $ab>۰$. ولی $ab>۰$، زیرا a و b مثبت فرض شده‌اند. حال براساس این نامساوی اقدام می‌کنیم. عدد c بین ۰ و ۱ است و بنابراین $c-۱$ مثبت است. از ضرب دو طرف (*) در $(c-۱)$ به‌دست می‌آید

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)>(۱-a-b)(۱-c)$$

یا

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)>۱-a-b-c+ac+bc$$

چون ac و bc مثبت هستند، داریم

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)>۱-a-b-c \qquad (**)$$

باادامهٔ این روش، توجه می‌کنیم که $d-۱$ مثبت است. از ضرب دو طرف (**) در $(d-۱)$ داریم

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d)>(۱-a-b-c)(۱-d)$$

یا

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d)>۱-a-b-c-d+ad+bd+cd.$$

مانند گذشته می‌بینیم که ad، bd، cd همه مثبت هستند. بنابراین

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d)>۱-a-b-c-d$$

و این همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

شکل ۱

صرف «مرور» شده بود، دانشجویان پاسخهای خود را مرور نکردند. نوارهای ویدئوی جلسه‌های کلاس نشان می‌دهد که معلم بعد از حل هر مسئله کنار رفته و گفته بود «اکنون ببینیم چه‌کار کرده‌ایم»، و این کار را انجام داده بود. ولی روی ارزش این استراتژی تأکید نشده بود. به‌دانشجویان نشان داده نشده بود که چرا «مرور» مفید است و در نتیجه آنان این کار را نکردند. اگر می‌خواهیم دانشجویان یک استراتژی را جدی بگیرند، باید آنها را قانع کنیم که مفید است.

اما حتی اگر موفق شویم به‌دانشجویان یاد بدهیم یک سری از استراتژیهای ابتکاری مهم را به‌کار ببرند، تضمینی وجود ندارد که به‌طور کلی در مسئله حل کردن پیشرفت کرده باشند. دانستن نحوهٔ استفاده از یک استراتژی کافی نیست. دانشجو باید به‌فکرش برسد که در مواردمناسب آن را به کار ببرد. برای اثبات این ادعا، ابتدا به یک تشبیه متوسل می‌شوم و سپس به‌اختصار تجربه‌ای را شرح می‌دهم که آن را تأیید می‌کند.

یک استراتژی را می‌توان «کلیدی» برای گشودن یک مسئله تصور کرد. تعداد زیادی کلید وجود دارد و مسئله تنها با تعداد اندکی از آنها «باز» می‌شود. تصور کنید که درمقابل دری بسته با یک دسته کلید متشکل ازسی کلید، که تنها دوتا از آنها در را بازمی‌کنند، ایستاده‌اید.

اگر تنها برای امتحان کردن سه‌یا چهار کلید وقت داشته باشید، دانستن اینکه «کلید قفل» در دسته کلید هست، ممکن است کمک چندانی به‌شما نکند. ازطرف دیگر، یک استراتژی برای انتخاب کلید مناسب، ممکن است کمکی باشد. اگربتوانید تعداد کلیدهایی را که باید امتحان کنید به‌ده عدد تقلیل دهید، بافرصتی که برای امتحان سه‌یاچهار کلیددارید، برای موفقیت شانس خیلی بیشتری به‌دست می‌آورید.

روشهای انتگرالگیری درحساب دیفرانسیل وانتگرال را درنظر بگیرید. تعداد تکنیکهای مهم به یک دوجین نمی‌رسد، و تمام آنها الگوریتمی و یادگرفتنشان نسبتاً آسان است. اغلب دانشجویان می‌توانند هریک‌از روشهای انتگرالگیری جزبه‌جزء، تبدیل متغیر وتجزیه به‌کسرهای جزئی را یادبگیرند وآنها را به‌کاربرند با این فرض که تکنیکی راکه باید به‌کاربرند، بشناسند. (آزمونی‌را درنظربگیرید که درآن روش حل هرمسئله مشخص‌شده‌است؛ احتمالاً امتحان‌دانشجویان خیلی خوب خواهد شد) اما وقتی انتخاب روش با خود آنها باشد، اغلب به‌راه غلط می‌روند. مثلاً انتگرال

$$\int \frac{x\,dx}{x^۲-۹}$$

که اولین مسئلهٔ «اهدایی» یك آزمون بود، تعداد زیادی ازدانشجویان راکه سعی کردند آن را ازراه تجزیه به کسرهای جزئی حل کنند دچار سردرگمی کرد؛ حتی وقتی سعی کردند متغیر رابك تابع مثلثاتی بگیرند، سردرگمی بیشترشد!

درمقالهٔ «معرفی یك استراتژی برای محاسبهٔ انتگرال نامعین» [۳۱] آزمایشی را مورد بحث قرار داده‌ام که در آن به نصف دانشجویان یك کلاس (نه کلاس خود من) یك استراتژی برای انتخاب روش انتگرالگیری داده شده بود. این استراتژی مبتنی بود برالگویی از عمل «خبره». به دانشجویان دیگر گفته شده بود که طبق معمول مطالعه کنند، یعنی تمرینهای گوناگون کتاب رابه‌کار برند تابه‌تدریج خودشان روشهایی برای مسئله حل کردن بدست آورند. میانگین وقت مطالعه برای گروه «استراتژی» ۷٫۱ ساعت و برای دیگر دانشجویان ۸٫۸ ساعت بود، با وجود این در یك آزمایش مهارت انتگرالگیری، بهتر عمل کردن گروه «استراتژی» از گروه دیگر مشخص بود، علیرغم اینکه به دانشجویان گروه «استراتژی» انتگرالگیری تعلیم داده نشده بود وتنها انتخاب روشهای انتگرالگیری یاد شده بود.

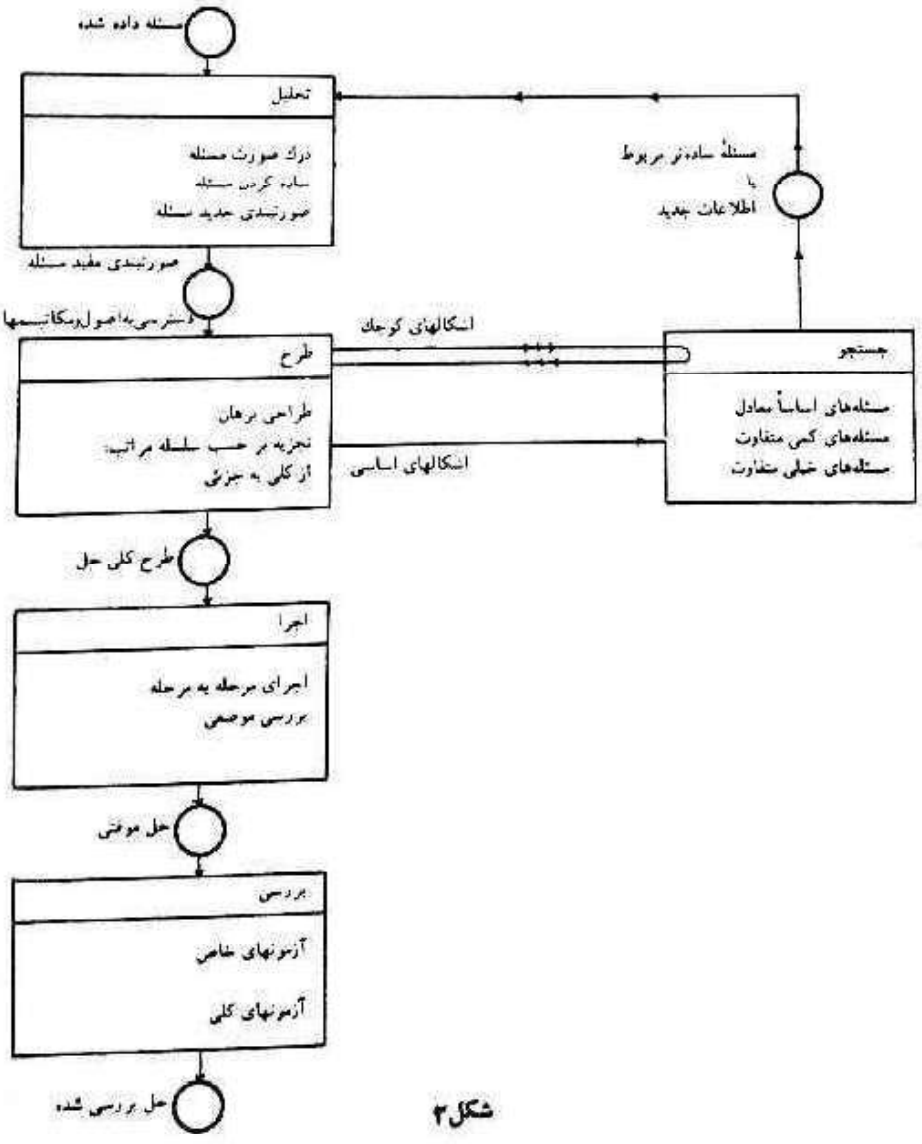
حاصل این تجربه آن است که تنیجهٔ کاردانشجویانی که نمی‌توانند دریافت «صحیح» بمسئله را بدست آورند ــ حتی در زمینه‌ای که‌تنها چند راه سرراست وجود دارد ــ با آنچه که «قابل انتظار» است فاصلهٔ زیادی دارد. اگر از تکنیکهای انتگرالگیری به حالت کلی حل کردن مسئلهٔ ریاضی بپردازیم، تعداد روشهای بالقوه مفید بسیار افزایش می‌یابند، همان‌طور که مشکلات و ریزه‌کاریهای به‌کاربردن تکنیکها نیز خیلی زیاد می‌شوند. بنابراین وسایل مؤثر برای انتخاب روشهای حل مسئله ــ جهت اجتناب از «راههای بی‌ثمر» وتخصیص فنون مسئله حل کردن ــ درحالت کلی، اهمیت زیادتری می‌یابند. بدون این وسائل ممکن است از آموزش تك‌تك ابتکارات نفعی حاصل نشود.

۵. الگو

الگوی عمل «خبره» که درزیر توضیح داده می‌شود، چارچوب درسهای من در مسئله حل کردن است. البته هر کس که بکوشد نحوهٔ حل کردن مسائل ریاضی را تنها درچند صفحه مشخص کند، نگفته‌هایش به‌مراتب بیش از گفته‌هایش خواهد بود.

خلاصهٔ کل این استراتژی درشکل۲ ارائه شده‌است. با استفاده از نمودار، این فرایند راکه عموماً طبیعتی متغیر ولی اسلوبمند دارد، نشان داده‌ام. این نمودار راهنمایی است برای عملهای سودمند، و نه وسیله‌ای که حاکم براین اعمال باشد و آنهارا محدود سازد. دربعضی از مراحل فرایند، غالباً تك ابتکارهایی می‌توانند به‌مناسبترین وجه مورد استفاده قرار گیرند. این ابتکارات درشکل۳ درج شده‌اند.

خلاصهٔ نموداری استراتژی مسئله حل کردن



شکل۲

ابتکاراتی که معمولاً در حل یك مسئله به کار می‌روند

تحلیل

۱. در صورت امکان نمودار رسم کنید.
۲. حالتهای خاص را بررسی کنید.
(الف) برای توصیف مسئله با مثال و "لمس کردن" آن، مقادیر خاصی را انتخاب کنید.
(ب) برای کشف دامنهٔ امکانات، حالتهای حدی را بررسی کنید.
(پ) هر پارامتر صحیح را به ترتیب مساوی با ۱، ۲، و ۳،... قرار دهید و یك الگوی استقرایی جستجو کنید.
۳. سعی کنید مسئله را با
(الف) بهره‌گیری از تقارن، یا
(ب) با استفاده از استدلالهای "بدون کاسته شدن از کلّیت" (از جمله مقیاس‌بندی)
ساده کنید.

جستجو

۱. مسئله‌های اساساً معادل را با توجه به نکات زیر به دست آورید:
(الف) با گذاشتن شرایط معادل به جای شرایط داده شده.
(ب) با ترکیب مجدد عناصر مسئله از راههای مختلف.
(پ) با وارد کردن عناصر کمکی.
(ت) با صورتبندی مجدد مسئله به وسیلهٔ
(یك) تعویض دید یا نماد.
(دو) در نظر گرفتن استدلال از راه برهان خلف یا عکس نقیض.
(سه) فرض اینکه مسئله حل شده است و تعیین ویژگیهای آن.
۲. مسئله‌های کمی متفاوت با مسئلهٔ مفروض را در نظر بگیرید.
(الف) هدفهای فرعی را انتخاب کنید. (مسئله‌ای به دست آورید که بعضی از شرایط مسئلهٔ اصلی در آن صدق کند.)
(ب) شرطی را کنار بگذارید و بعداً آن را اعمال کنید.
(پ) حوزهٔ مسئله را تجزیه کنید و یك به یك روی حالتهای آن کار کنید.
۳. مسئله‌های خیلی متفاوت با مسئلهٔ مفروض را در نظر بگیرید.
(الف) یك مسئلهٔ مشابه با متغیرهای کمتر بسازید.
(ب) همهٔ متغیرها جز یکی را ثابت نگه دارید و عملکرد آن را تعیین کنید.
(پ) سعی کنید از همهٔ مسئلهٔ مربوط که دارای
(یك) صورت
(دو) داده‌های
(سه) حکمهای
مشابه است، بهره بگیرید.
به خاطر داشته باشید: پس از حل مسئله‌های مشابه مربوط، بکوشید هم از نتیجه و هم از روش حل آنها در حل مسئلهٔ مورد نظر استفاده کنید.

بررسی نهایی حل

۱. آیا راه‌حلّ شما از نظر آزمونهای خاص زیر موفّق است؟
(الف) آیا از همهٔ داده‌های مسئله استفاده کرده‌اید؟
(ب) آیا با برآوردها و پیش‌بینیهای معقول تطبیق می‌کند؟
(پ) آیا با آزمونهای تقارن، تحلیل بعد و مقیاس‌بندی سازگار است؟
۲. آیا راه‌حلّ شما از نظر آزمونهای کلی زیر موفّق است؟
(الف) آیا می‌توان آن را به طریق دیگری به دست آورد؟
(ب) آیا می‌تواند به وسیلهٔ حالتهای خاص تأیید شود؟
(پ) آیا می‌تواند به نتایج شناخته شده تحویل شود؟
(ت) آیا می‌توانید آن را برای تولید چیزی که می‌شناسید به کار ببرید؟

شکل ۳

فرایند مسئله حل کردن با تحلیل اینکه محتوای مسئله چیست آغاز می‌شود. قسمتی ازاین تحلیل این است که با بررسیهای زیر بتوانیم مسئله را «لمس» کنیم: مسئله برای چه داده شده است؟ خواستهٔ مسئله چیست؟ چرا «داده‌های مسئله» داده شده‌اند؟ آیا خواستهٔ مسئله معقول است؟ مکانیسمهای اساسی که احتمالاً باید به کار روند، کدام‌اند؟ مسئله به چه مطلبی مربوط می‌شود؟ و . . . . اینکه چه ابتکاراتی (درصورت وجود) درحین تحلیل به کار می‌روند ممکن است هم به مسئله بستگی داشته باشد وهم به کسی که مسئله را حل می‌کند. اما، دراین مرحله از مسئله حل کردن مثالهایی مناسب از کاربرد چند استراتژی ابتکاری عبارت انداز:

(۱) نموداری رسم کنید حتی موقعی که به‌نظرمی‌رسد مسئله ازطریق دیگری حل می‌شود؛ مانند مسئلهٔ زیر:

مسئلهٔ ۱۰. برای t مقادیری بیابید که بازای آنها دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-t)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ جواب داشته باشد.

(۲) حالتهای خاص را بررسی کنید، و در حل آنها یکی از الگوها را تعیین کنید. مثلاً در مسئلهٔ زیر:

مسئلهٔ ۱۱. به‌ازای $a, b > 0$، $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ را تعیین کنید.

می‌توانید a را برابر با ۱ بگیرید؛ یا در مسئلهٔ زیر

مسئلهٔ ۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ را پیدا کنید.

برای دیدن جواب (که به‌طور عجیبی واضح است)، می‌توان مجموع ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ جمله را حساب کرد.

(۳) در جستجوی ساده‌کردنهای مقدماتی باشید. مثلاً در مسئلهٔ زیر

مسئلهٔ ۱۳. بزرگترین مساحت مثلثهای محاط در دایرهٔ به‌شعاع R را پیدا کنید.

(یک) دایرهٔ واحد را در نظر بگیرید. (دو) توجه کنید که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که قاعدهٔ مثلث افقی است و (سه) چند طرح را بررسی کرده، سعی کنید قبل از شروع به حل تحلیلی، جواب را حدس بزنید.

طرح به معنایی «کنترل اصلی» است. در نمودار جای جداگانهٔ بخصوصی ندارد، بلکه در سراسر فرایند حل پخش شده است. کارش تضمین این نکته است که حل کنندهٔ مسئله متعول فعالیتهایی است که به‌احتمال زیاد مفید هستند. طرح ما را وا می‌دارد که همواره یک دید کلی از مسئله داشته باشیم و سلسله مراتب را در حل آن رعایت کنیم. ممکن است طرح حل مسئله در سطحی کلی ریخته شود و سپس به‌تدریج که فرایند حل مسئله پیش می‌رود، جزئیات طرح تکمیل شود. مثلاً، محاسبات مفصل با اعمال پیچیده را نباید انجام داد مگر اینکه (یک) راههای مختلف مطالعه شده باشند، (دو) توجیه روشنی از آنها در دست باشد، و (سه) مراحل دیگر حل مسئله به‌جایی رسیده باشند که نتایج محاسبات یا لازم باشند یا به‌روشنی معلوم شده باشد که مفید خواهند بود. (چقدر ناراحت کننده است که برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل وقت و انرژی صرف کنیم و بعد متوجه شویم که جواب آن در مرحلهٔ کلی «بعدی» حل مسئله هیچ کمک مؤثری نمی‌کند.)

جستجو «هسته» ابتکار در استراتژی است. در مرحلهٔ جستجو است که بیشتر ابتکارات مسئله حل کردن وارد معرکه می‌شوند. شکل ۳ نشان می‌دهد که جستجو به سه گام تقسیم می‌شود. به‌طور کلی پیشنهادهای گام اول در مقایسه با پیشنهادهای گام دوم، یا به‌کار برد نشان آسانتر است و یا با احتمال بیشتری دسترسی مستقیم به راه حلی از مسئلهٔ اصلی را فراهم می‌کنند. همچنین است رابطهٔ بین گامهای دوم و سوم. هر گاه تمام عوامل دیگر یکسان باشند، حل کنندهٔ مسئله در مرحلهٔ جستجو به‌طور خلاصه قابل قبول بودن پیشنهادهای گام اول را بررسی می‌کند؛ یک یا چند پیشنهاد برمی‌گزیند و سعی می‌کند از آنها استفاده کند. اگر روشن شود که استراتژیهای گام اول کافی نیستند به گام دوم می‌پردازد؛ وقتی که گام دوم کاملاً بررسی شد، در صورت نیاز استراتژیهای گام سوم را امتحان می‌کند. در صورتی که در گامی پیشرفت قابل توجهی حاصل شود، حل کنندهٔ مسئله می‌تواند یا به طرح کردن نقشه‌ای برای حل و اصلاح راه حل بر گردد یا تصمیم بگیرد دوباره وارد مرحلهٔ تحلیل شود. با این اعتقاد که نظریات به‌دست آمده در مرحلهٔ جستجو می‌تواند در قالب ریزی مجدد مسئله از طریقی که قبلاً دیده نشده است، کمک کند.

اخیراً به‌توضیح نیاز ندارد، جز اینکه این مرحله باید آخرین گام در حل عملی مسئله باشد. از طرف دیگر، بررسی نهایی نیازمند به‌توجه بیشتری است. زیرا در اغلب موارد نادیده گرفته می‌شود. در بررسی موضعی می‌توان به‌اشتباهاتی که در اثر بی‌توجهی رخ داده است، پی‌برد، در بررسی کلی، با مروری بر حل مسئله ممکن است روشهای دیگری به‌دست آید، ارتباط با موضوع دیگری آشکار شود که به‌ظاهر نامربوط به‌نظر می‌رسد، و گاهی تکنیک مفیدی به‌دست آید که شخص بتواند آن را به‌رهیافت کلی مسئله حل کردن خود بیفزاید.

۶. تعلیم و چند نتیجه

الگویی که در بخش پیش توصیف شد، به‌عنوان اساس دو درس در زمینهٔ مسئله حل کردن به‌کار رفته است ــ درس اول به‌هشت دانشجوی ریاضی سال سوم و چهارم در برکلی در سال ۱۹۷۶ و درس دوم به ۱۹ دانشجوی (عمدتاً) سال اول و دوم دانشکدهٔ ادبیات و علوم در کالج هامیلتون در سال ۱۹۷۹ داده شد. در هر درس الگوی فرایند مسئله حل کردن به عنوان راهنما به دانشجو داده شد. هر جلسهٔ درس به یک سری از مسئله‌های قابل حل با یک استراتژی (یا بیشتر) از استراتژیهای مندرج در شکل ۳ اختصاص داده شد. با تأکید بر استراتژی مورد نظر و همچنین (در ارتباط با الگو) با تأکید بر اینکه چگونه با کل مسئله برخورد کنیم که تا حدودی کارامد باشد حل مسئله را مرور می‌کردیم.

عمدتاً به‌دلیل تفاوت سطح معلومات ریاضی دانشجویان دو گروه، تفاوتهای اساسی بین دو درس وجود داشت. مثلاً، پیشنهاد «استدلال به‌وسیلهٔ عکس نقیض یا برهان خلف را در نظر بگیرید» برای دانشجویان دو گروه معانی خیلی متفاوتی داشت. دانشجویان ریاضی دوسال آخر، با چند مثال و توضیح اینکه چه موقعی در نظر گرفتن این استراتژی ممکن است مناسب باشد، به‌مطلب پی بردند. در مورد دانشجویان سال اول، داستان کاملاً فرق می‌کرد. خیلی از آنها اصلاً اعتقاد نداشتند که چیزها باید از راه ریاضی اثبات شوند و بسیاری استدلال از راه برهان خلف را ندیده بودند! در برکلی مسئلهٔ زیر را داده بودم که دانشجویان به عنوان بخشی از امتحان میان ترم در منزل روی آن کار کنند.

مسئلهٔ ۱۴. فرض کنید a یکی از ارقام ۱ تا ۹ باشد. از اعداد به صورت $aaaa\ldots a$ که در آنها a، n بار تکرار می‌شود، کدامها مربع کامل‌اند؟

همهٔ دانشجویان جز یکی آن را حل کردند. در مقابل، این مسئله در هامیلتون چندروز از وقت ما را گرفت.

باوجود این شباهتهای زیادی بین دو گروه وجود داشت. تعداد کمی از دانشجویان از استراتژیهای ابتکاری مورد بحث آگاهی دقیق داشتند. در نخستین جلسهٔ درس در برکلی تنها دو نفر از هشت نفر موفق شدند $\sum_{n=1}^{m} 1/n(n+1)$ را با استفاده از سری ادغامی حساب کنند. به‌فکر هیچیک نرسیده بود به m، مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ بدهد. همچنین جاهایی که لازم بود شکل رسم کنند، نکرده بودند، و الی آخر. درس که به‌پایان رسید به روشنی دیده می‌شد که دانشجویان ابتکارات را آگاهانه و به خوبی به‌کار می‌برند و تشخیص می‌دهند چه ابتکاری برای چه‌نوع مسئله‌ای مناسب است. برای مثال، مسئلهٔ زیر یکی از مسئله‌های امتحان پایان

ترم بود.

مسئلهٔ ۱۵. فرض کنید S یک مجموعهٔ نا‌تهی متناهی باشد. $E(S)$ را به‌عنوان تعداد زیرمجموعه‌های S با تعداد عنصرهای زوج، تعریف کنید. این زیرمجموعه‌ها، مجموعهٔ تهی و احتمالاً S را شامل می‌شوند. فرمولی برای $E(S)$ تعیین و درستی جواب خود را اثبات کنید.

هفت نفر از هشت دانشجو، در برخوردشان با مسئله به دنبال روش استقرا رفتند، که با رفتاری که در بدو ورود به این درس داشتند، خیلی متفاوت بود. (دانشجوی هشتمی، تنها دانشجویی که ادعا می‌کرد مسئله را قبلاً دیده است، ژئوس یک برهان ترکیبیاتی را نوشت.)

درهامیلتون نیز دربارهٔ این استراتژی نتایج مشابهی حاصل شد. در یک آزمون، در آغاز درس ۴ نفر از ۱۹ دانشجو، درمسئلهٔ:

مسئلهٔ ۱۶. مجموع اولین ۸۹ عدد فرد چیست؟

به‌فکر جمع کردن افتادند و بعضی دیگر برای به‌دست آوردن جواب، روش جفت کردن جملات (روش گاوس) را به‌کار بردند (روشی که قبلاً دیده بودند). درامتحان پایان ترم ۱۸ نفر از ۱۹ دانشجو مسئلهٔ زیر را درست حل کردند.

مسئلهٔ ۱۷. مجموع ضرایب بسط $(x+1)^{۳۱}$ چیست؟

مسئله‌ای مشابه با مسئلهٔ ۱۷ قبلاً در کلاس مطرح نشده بود.

همچنین درهردو کلاس تفاوتهای آشکاری، درابتدا وانتهای درس، دربارهٔ استراتژی «متغیر کمتر» وجود داشت و این امر برای استراتژیهای دیگر که تعریف روشنی داشتند نیز صادق بود. عملکرد دانشجویان در مورد مسئلهٔ ۱، که آن را در آغاز هردو کلاس دادم، بررسی شد. مسئلهٔ ۹، یکی ازمسئله‌های امتحان نهایی هر دو کلاس بود، و بیش از سه چهارم دانشجویان هر کلاس آن را حل کردند.

باید تا حدودی این «داستانهای موفقیت» را تعدیل کنم. همان‌طور که در بخش ۲ دیدیم، ابتکارات نکات ظریفی دارند، و دانشجو در به‌کار بردن آنها ممکن است به آسانی سر در گم شود. در آن بخش دیدیم که انتخاب مسئلهٔ مشابه «مناسب» کار آسانی نیست. همچنین ما «خبره‌ها» توانایی «دیدن» صورتهای معینی را داریم که حتی دانشجویان خیلی قوی دورهٔ لیسانس هم ازدیدن آنها عاجزند. درسطر آخر برهانی که در بر کلی برای مسئلهٔ ۷ آورده بودیم، نوشته شده بود: «چون $(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-d)^۲+(d-a)^۲=۰$، پس $a=b$، $b=c$، $c=d$ و $d=a$». ازپاک کردن این سطرازروی تخته‌خودداری کردم و مسئلهٔ زیر را به‌دانشجویان دادم.

مسئلهٔ ۱۸. اعداد a_i و b_i به ازای $i=۱, ۲, \dots, n$ داده شده‌اند. شرایطی لازم و کافی برای a_i و b_i تعیین کنید به طوری که اعدادی چون A و B وجود داشته باشند که به‌ازای هر x، تساوی زیر برقرار باشد

$$(a_۱x+b_۱)^۲+\dots+(a_nx+b_n)^۲=(Ax+B)^۲$$

رفتاری نمادهای این مسئله، ازجمله متغیر x، اندیسها و غیره، مانع دیدن شباهت این دومسئله شد. دانشجویان نتوانستند تشخیص دهند که ساختار «مجموعی از مربعات برابر با چیزی است که می‌توان آن را صفر کرد» با ساختار «مجموعی از مربعات برابر با صفر است» اساساً شبیه‌است. از این‌رو آنها نتوانستند مسئلهٔ دوم را حل کنند.

نمی‌توانیم ازدانشجو انتظار داشته باشیم که ابتکاری را درحالتهایی به‌کاربرد که به‌طور قابل توجهی ازحالتی که به‌کاربردنش را آموخته است، پیشرفته‌تر باشد. وقتی از دانشجویانم خواستم که $D(N)$، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح N را پیدا کنند، دانشجویان بدون زحمت دیدند که باید $D(N)$ را به‌ازای مقادیر مختلف N حساب کنند. اما هنگامی که نتایج حاصل، روشن نبود، آنها فکر نکردند از خودسؤال کنند که به‌ازای چه مقادیری از N مقادیر خاصی برای $D(N)$ به‌دست می‌آید ــ سؤالی که راه را برای حل مسئله باز می‌کند.

همچنین اگر در مسئله‌ای ترکیب ماهرانهٔ دو ابتکار از ابتکارات تدریس شده مورد نیاز باشد، (نظیر قضیهٔ پیک[1] که برای اثبات آن نخست باید یکی از متغیرها را ثابت نگه داشت و سپس روی متغیر دیگر به‌استقرا عمل کرد) معمولاً دانشجو موفق نمی‌شود آن را حل کند. اینها موضوعهای ناامیدکننده نیستند، بلکه تنها انتظارات واقعی را می‌رسانند.

انتظارات معقول ما می‌تواند عملاً تا حدودی زیاد باشد. دست‌کم در کوتاه‌مدت، امتحانهای قبل و بعدازدرس، نشان‌می‌دهد که دانشجویان واقعاً پیشرفت کرده‌اند. البته، مطلب مهمتر تأثیر تعلیم در درازمدت و اثر آن (اگر اثری داشته باشد) درعملکرد دانشجو درخارج ازکلاس درس است. البته هنوز خیلی زود است که در این‌باره نظری اظهار کنیم، اما گزارشهای اولیهٔ دانشجویانی که این درسها را گرفته‌اند، پراحساس و امیدبخش بوده است.

برای اینکه کاملاً حقیقت را گفته باشم، باید متذکر شوم که درس مسئله حل کردن، برای همهٔ افراد درگیر وظایف سنگینی ایجاب‌می‌کند. معلم باید بسیار انعطاف‌پذیر باشد، زیرا فرایند مسئله حل کردن است که ارزش دارد و معلم اساساً به‌صورت یک «مربی تیم» عمل می‌کند. از دانشجویان خواسته می‌شود که، فکر کنند و بیافرینند و نه اینکه مطلبی را «از بر بخوانند». این کار آسانی نیست، اما مهم است ــ و سرانجام بسیار پرارزش؛ به‌زحمتی که دانشجویان می‌کشند می‌ارزد؛ و البته برای معلم موفق منبع رضایت خاطری عظیم است.

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

• Schoenfeld A. H., "Teaching problem-solving skills", *Amer. Math. Monthly*, 87(1980) 794-805.

مراجع

1. Bloom B. S., *Problem Solving Processes of College Students*, university of Chicago Press, Chicago, Ill, 1950.
2. D'Amour G., Wales C., "Improving problem-solving skills through a course in guided design", *Engineering Education*, 67 (1977).
3. Daniels P., *Strategies to Facilitate Problem Solving*, Cooperative Research Project No-1810, Brigham Young University, Provo Utah, 1964.
4. Dodson J., *Characteristics of Successful Insightful Problem Solvers*, No 71-13,048, University Microfilms, Ann Arbor, 1970.
5. Duncker K., *On Problem Solving, Psychological Monographs*, 58, No.5 American Psychological Association, Washington, D.C., 1945.
6. Flaherty E., *Cognitive Processes Used in Solving Mathematical Problems*, No 73-23, 562, University Microfilms, Ann Arbor, 1973.
7. Goldberg D., *The Effects of Training in Heuristic Methods on the Ability to Write Proofs in Number Theory*, No. 75-07836, University Microfilms, Ann Arbor, 1975.

1. Pick

8. Hadamard J. W., *Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover, New York, 1954.
9. Hayes J. R., *Memory, Goals, and Problem Solving*, in B. Kleinmuntz, ed., Problem Solving: Research, Method, and Theory, Wiley, New York, 1966.
10. Kilpatrick J., *Problem Solving in Mathematics*, Review of Educational Research, 1969.
11. Kilpatrick J., *Research in the Teaching and Learning of Mathematics*, paper Presented to the MAA, Dallas, 1973.
12. Kilpatrick J., *Variables and Methodologies in Research in Problem Solving*, paper for research workshop on Problem Solving in Mathematics Education, University of Georgia, 1975.
13. Lakatos I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, rev. ed., 1977.
14. Landa L. N., *Algorithmization*, Educational Technology Publications, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
15. Landa L. N., "The ability to think: how can it be taught?" *Soviet Education*, vol. 18, 5 March 1976.
16. Larkin J., "Skilled problem solving in physics: a hierarchical planning model" *Journal of Structural Learning* (in press).
17. Lucas J., *An Exploratory Study on The Diagnostic Teaching of Heuristic Problem-Solving Strategies in Calculus*, No. 72-15, 368, University Microfilms, Ann Arbor, 1972.
18. Newell A., Simon H., *Human Problem Solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.
19. Pólya G., *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1945.
20. Pólya G., *Mathematical Discovery*, vols. 1 and 2, Wiley, New York, 1962 (vol. 1) and 1965 (vol. 2).
21. Schoenfeld A., "Presenting a strategy for indefinite integration", *Am. Math. Monthly*, 85 (1978) 673-678.
22. Schoenfeld A., *Can Heuristics Be Taught?* in J. Lockhead, ed., Cognitive Process Instruction, Franklin Institute Press, Philadelphia, 1979.
23. Schoenfeld A., "Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance", *Journal for Research in Mathematics Education*, May 1979.
24. Schoenfeld A., *Heuristics in the Classroom*, 1980, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, 1980.
25. Skinner B. F., Teaching Thinking, Chapter 6of *The Technology of Teaching*, Appleton-Century Crofts, New York, 1968.
26. Smith P., *The Effect of General vs. Specific Heuristics in Mathematical Problem Solving Tasks*, No. 73-26367, University Microfilms, Ann Arbor, 1973.
27. Turner R., *Design Problems in Research on Teaching Strategies in Mathematics*, in T. Cooney, ed., Teaching Strategies: Papers from a Research Workshop, ERIC, Columbus, Ohio, 1976.
28. Wickelgren W., *How to Solve Problems*, W. H. Freeman, San Francisco, 1974.
29. Woods D. R., et al., *How Can one Teach Problem Solving?*, Program for Instructional Development Newsletter, Ontario Universities, May 1977.

منابع مسئله

30. Burkill J. C., Cundy H. M., *Mathematical Scholarship Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
31. Bryant S. J., et al., *Non-Routine Problems in Algebra, Geometry, and Trigonometry*, McGraw-Hill, New York, 1965.
32. Dynkin E. B., et al., *Mathematical Problems: An Anthology*, Gordon and Breach, New York, 1969.
33. Eves H., Starke E. P., *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Mathematical Association of America, 1957.
34. Lidsky D., et al., *Problems in Elementary Mathematics* (transl. by V. Volosov), Mir Publishers, Moscow, 1963.
35. Pólya G., kilpatric J., *The Stanford Mathematics matics Problem Book*, Teacher's College Press, New York, 1974.
36. Rapaport E., Transl., *The Hungarian Problem Book*, Mathematical Association of America, 1963.
37. Shklorsky D. O., et al, *The USSR Olympiad Problem Book*, W. H. Freeman, San Francisco, 1962.
38. Trigg C. W., *Mathematical Quickies*, McGraw-Hill, New York, 1967.
39. Yaglom, Yaglom, *Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions*, Holden-Day, San Francisco, 1967.

سهم ما از منطق ریاضی

ضیاء موحد

مانند خیلی چیزهای دیگر که تعریف مختصر و مفیدی ندارند، منطق ریاضی هم به‌معنای عام آن تعریف مختصر ومفیدی ندارد. گونا گونی نوشته‌هایی که به‌نام منطق ریاضی منتشر می‌شوند چنان است که هیچ تعریفی نمی‌تواند همهٔ آنها را در بر گیرد. از این‌رو، تنها راهی که می‌ماند این است که فهرستی از موضوعهای این نوشته‌ها فراهم کنیم و از میان آنها چند موضوع کلیتر را بر گزینیم وبگوییم منطق ریاضی یعنی این چند موضوع. این همان راهی است که ویراستار راهنمای منطق ریاضی[۲]، به‌پیروی از دیگران و با اقرار به‌نیافتن راهی بهتر، رفته است.

بنابر فهرست راهنمای مذکور، منطق ریاضی دارای چهار موضوع اساسی است: نظریهٔ الگوها، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ تابعهای بازگشتی، و نظریهٔ برهان. و البته هرموضوع هم مجموعه‌ای است از موضوعهای فرعی دیگر.

پیش‌از پرداختن به‌موضوع اصلی این نوشته که معرفی وارزیابی کوتاهی است از کتابهایی که در این زمینه به‌فارسی داریم، لازم است دربارهٔ هر کدام از این چهار موضوع شرح کوتاهی بدهیم.

۱. نظریهٔ الگوها[1]

نظامهای صوری ریاضی و منطقی چیزی جز نشانه‌هایی بر کاغذ و قاعده‌هایی برای گونه‌ای بازی با این نشانه‌ها نیستند. اما بازی به‌همین‌جا ختم نمی‌شود. باید دید این نشانه‌ها تعبیری هم دارند یا نه واگر دارند رابطهٔ میان نشانه‌ها و تعبیرهای آنها چگونه برقرار می‌شود. نظریهٔ الگوها چیزی جز بیان همین رابطه نیست. بخش مهمی از این نظریه، منطق محمولهای مرتبهٔ اول است که می‌توان آن‌را به انضمام قراضیه‌های گودل و چرچ منطق ریاضی به‌معنای خاص دانست. بخش اصلی کتابهای درسی منطق ریاضی همین بخش از نظریهٔ الگوها ونظریهٔ برهان است. اگر از این بخش پاره‌ای از ویژه‌کاریهای ریاضی و قراضیه‌های منطقی را حذف کنیم، موضوعی به‌دست می‌آید که می‌توان آن را با منطقدانان سنتی در میان گذاشت و برسر برتری آن برمنطق ارسطویی جر وبحث کرد.

۲. نظریهٔ مجموعه‌ها

ریاضیدانان از قدیم حدس زده بودند که مفهومهای معروف به بدیهی چندان هم بدیهی نیستند. اما اهمیت این حدس هنگامی آشکار شد که یکی از همین مفهومها ــ پارادوکس راسل ــ راه را بر تأویل ریاضیات به‌منطق بست. کشف این پارادوکس سر آغاز کشف پارادوکسهای دیگری شد که مبانی ریاضیات را با بحران روبرو گردانید. این پارادوکسها اغلب به‌مفهوم مجموعه، که می‌خواستند ریاضیات را براساس آن بنا کنند، مربوط می‌شدند. مجموعه مفهومی نیست که بتوان از آن گذشت اما تناقض هم چیزی نیست که بتوان آن را در یک نظام صوری راه داد. بنابراین چاره‌ای نبود جز آنکه دست‌از خوشبینیهای شهودی بردارند و نظامی اصل موضوعی وخالی از تناقض برای مجموعه‌ها تأسیس کنند. از آن‌پس نظامهای گوناگونی آورده شد که از میان آنها نظام تسرملو ـ فرانکل (ZF) اکنون بیش‌ازهمه قبول‌عام یافته است. ازبحثهای جالب نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات سازگاری اصلهای آن باهم واستقلال آنها از یکدیگر است. شگردهای گودل و کوهن دراین‌اثباتها فراموش‌نشدنی است. این‌اثباتها روشهای تازه‌ای درحل مسائل ریاضی پدید آوردند.

۳. نظریهٔ تابعهای بازگشتی[1]

اینکه برای چه تابعهایی می‌توان راه‌حلهای ماشینی یافت و برای چه تابعهایی نمی‌توان، از تازه‌ترین و مهمترین کشفهای دانشمندان منطق ریاضی است. از جالبترین نکته‌های این نظریه این است که همهٔ راههای گوناگونی که منطقدانان برای پیداکردن تابعهای محاسبه‌پذیر[2] رفتند به‌یک نتیجه رسید. شگفتی‌انگیز است که گروه کوچکی از تابعها به‌نام تابعهای بازگشتی تمام تابعهای محاسبه‌پذیر را در بر بگیرند. محاسبه‌پذیری مفهومی است و تابعهای بازگشتی مفهومی دیگر. ولی به‌نظر می‌رسد که این دو مفهوم مصداقهای یکسانی داشته باشند. فرضیهٔ معروف چرچ بیان همین امر است.

این حرف درستی است که اگر منطقدانان این تابعها را کشف نمی‌کردند، محققان کامپیوتر کشف می‌کردند، اما اینکه چرا منطقدانان به‌این بررسی پرداختند دلیلهای متعددی دارد که یکی از آنها ارتباط این مسأله با نظریهٔ برهان است.

۴. نظریهٔ برهان[3]

کار ریاضیدانان برهان‌سازی است. این برهانها بویژه در ریاضیات

1. model theory 2. meta-theorem

1. recursive 2. computable 3. proof theory

جدید تنوع چشمگیری دارند. برهان کانتور در بزرگتر بودن هر مجموعه از مجموعهٔ توانی آن، برهان هنکین در تمامیت منطق، برهان گودل در ناتمامیت ریاضیات، برهانهای مستقیم و غیرمستقیم و سازنده[1] و غیر-سازنده از شناخته‌ترین این انواع‌اند. نظریهٔ برهان، بررسی انواع برهانها و بحث در باب آنها به‌عنوان شیئهای ریاضی است. دستاوردهای این نظریه باهمهٔ نوپایی آن کم نبوده‌اند. برای مثال، اگر روزی برخی از ریاضیدانان در قضیهٔ ناتمامیت گودل و دنبال اشتباهی در زنجیرهٔ طولانی برهان آن می‌گشتند، امروز دست‌کم می‌توان یک قضیهٔ مشخص ریاضی را نام برد و نشان داد که از اصلهای موضوع پئانو نمی‌توان آن را استنتاج کرد[۵] این یکی از نتیجه‌های مهم نظریهٔ برهان است.

شمارهٔ موضوعهایی که این چهار نظریه در بر می‌گیرند در حال حاضر از صد عنوان هم بیشتر است و تازه ما در این تقسیم‌بندی منطقهای به‌اصطلاح ناایستانده و نیز فلسفهٔ منطق و زبان را که خود موضوعی بسیار پردامنه است به‌حساب نیاورده‌ایم.

بدیهی است که در موضوعی تا این‌حد زنده و پویا نوشته‌های فراوانی در کشورهایی که کار تحقیقی جدی گرفته می‌شود انتشار یابد. بحث دربارهٔ این انتشارات موضوع دیگری است. ما در این مقاله تنها به کتابهای درسی و آموزشی اشاره‌ای می‌کنیم.

نلسون گودمن[2] جایی در معرفی کواین[3] گفته است که آثار منطقی کواین شمارش‌ناپذیر است. این توصیف از زبان کسی که خود منطقدان شایسته‌ای است اغراقی است بزرگتر از « زمین شش شد و آسمان گشت هشت». مجموعهٔ همهٔ انتهای عالم هم شمارش‌ناپذیر نیست. اما در این اغراق حقیقتی هم نهفته است: تنها یکی از منطقدانان نوشته‌هایش چنان زیاد است که شمارش آنها کار ساده‌ای نیست. در زبانهای غربی، به‌ویژه زبان انگلیسی، برای هر گروه از خوانندگان و در هر سطحی از مقدمائی گرفته تا تخصصی شمارهٔ کتابهای درسی و آموزشی به اندازه‌ای است که فهرست آنها خود یک کتاب بزرگ می‌شود.

در واقع یکی از معیارهای معتبری که با آن می‌توان میزان رشد هر علمی را در هر کشوری معین کرد شمارهٔ کتابهای آموزشی و کیفیت این کتابها در آن کشور است. با این معیار، چنان که خواهیم دید، نصیب ما از منطق ریاضی به‌راستی ناچیز است و این در کشوری که گذشته‌ای غنی در منطق سنتی و منطقدانان بزرگی چون فارابی و ابن‌سینا دارد کمبود کمی نیست.

بررسی کتابهای منطق را با توضیحی دربارهٔ کتابهای درسی و آموزشی آغاز می‌کنیم.

امروز که نوآوریها و کشفهای علمی در پایان‌نامه‌های دانشگاهی و سمینارها و نشریه‌های تخصصی گزارش می‌شوند، کتابهای درسی وظیفهٔ محدود و معینی پیدا کرده‌اند. این وظیفه گزارش دادن و آموزش دوشن و مرتب نتیجه‌های پذیرفته شده و جا افتاده است. از این گذشته در نوشتن یک کتاب آموزشی باید از پیش دانست که کتاب برای چه گروهی از خوانندگان و در چه سطحی نوشته می‌شود. منظور آنکه برای ریاضیدانان کتاب درسی منطق را باید به گونه‌ای نوشت و برای فلسفه‌دانان یا زبانشناسان به گونه‌ای دیگر. در هر مورد هم باید معلوم کرد که کتاب برای دورهٔ مقدمائی نوشته شده است یا دوره‌های بالاتر. البته کتابهایی هم هستند که بخشهایی از آنها برای دورهٔ مقدماتی مناسب‌اند و بخشهایی برای دوره‌های بالاتر؛ در این گونه کتابها رسم بر این است که نویسندگان راهنماییهای لازم را بیاورند و چگونگی استفاده از کتاب و ترتیب خواندن فصلها و ارتباط هر فصل را با فصلهای دیگر شرح دهند.

نکتهٔ مهمی که در نوشتن یک کتاب درسی باید همیشه به‌یاد داشت این است که از نویسندهٔ چنین کتابی انتظار نمی‌رود که کشف تازه‌ای کرده باشد یا حرفهایی بزند که تاکنون هیچ کس نزده باشد. این نکته ممکن است در گروهی این گمان را برانگیزد که کتاب درسی نوشتن کاری است آسان و نه‌چندان مهم. اما این گمانی است سخت باطل. در هر زبان کتابهای درسی خوب و موفق و کم‌نقص در هر موضوع بسیار اندک‌اند. اجازه بدهید مطلب را روشنتر کنیم.

در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌ویژه برای دورهٔ مقدماتی کتابهای زیادی به‌زبان انگلیسی نوشته شده است. اما از میان انبوه این کتابها تنها کتاب نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها نوشتهٔ هالموس[۹] شهرت جهانی پیدا کرده است و به اغلب زبانهای دیگر ترجمه شده است. مطالب این کتاب همان مطالب معمول کتابهای دیگر در این موضوع و در این سطح است. اما از زمان انتشار آن (۱۹۶۰) تاکنون هیچ کتابی در نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته نشده است که ارجاع به این کتاب نداده باشد. جالب این است که برای دوره‌های بالاتر در نظریه مجموعه‌ها، اگرچه کتابهای فراوانی نوشته شده است اما در مورد هیچ کدام چنین اتفاق نظری وجود ندارد. نمونهٔ دیگر کتاب مندلسون[۴] در منطق ریاضی است. این کتاب هم که برای دوره‌های بالاتواز مقدماتی نوشته شده از زمان انتشار آن (۱۹۶۴) در شمار مرجعهای اصلی این موضوع درآمده است. در سایر زمینه‌ها نیز قضیه از همین قرار است. این نشان می‌دهد که کتاب درسی خوب نوشتن هنری است که هر کس ندارد. بیهوده نیست که در میان انبوه کتابهایی که در منطق قدیم داریم تنها چند کتاب در حوزه‌ها راه یافته‌اند و نسل پس از نسل آن همه شرح بسر آنها نوشته‌اند.

بنابراین، کتاب درسی نوشتن کاری است دشوار و مهم. البته دستورهایی هم برای نوشتن چنین کتابهایی هست. ولی رعایت این دستورها لزوماً توفیق کتاب را تضمین نمی‌کند. این که گفتیم کاری است هنری، یکی نیز به‌همین دلیل است.

با در نظر گرفتن آنچه گفتیم حرف آخر این مقاله این است که در منطق ریاضی به‌معنای خاص، که در نظریهٔ الگوها تعریف آن را آوردیم، در حال حاضر، در زمینهٔ تألیف تنها یک کتاب و در زمینهٔ ترجمه نیز تنها یک کتاب داریم! در منطق ریاضی به معنای عام هم تنها در نظریهٔ مجموعه‌هاست که کتابهایی به فارسی تألیف و ترجمه شده‌است. بررسی این کتابها را برای مقالهٔ دیگری می‌گذاریم.

کتابهای تألیفی

اولین کتابی که در فارسی برای آشنا کردن 'مبتدی' (به‌اصطلاح مؤلف) نوشته شد کتاب مدخل منطق صورت از دکتر غلامحسین مصاحب بود. این کتاب که در سال ۱۳۳۴ یعنی ۳۲ سال پیش توسط دانشگاه تهران انتشار یافت تا امروز تنها تألیف باارزش در این زمینه است. این کتاب از پاکیزگی نثر، روشنی بیان و ترتیب منطقی مطالب گرفته تا تنظیم انواع فهرستها و فراهم آوردن علامتهای تازه و نسخه‌پردازی و چاپ، بدون شک کاری بزرگ و بی‌سابقه بوده است. به‌گمان من تا کسی کتاب درسی ننوشته باشد ارزش این کتاب را چنانکه باید درنخواهد یافت. اما این کتاب در میان مبتدیان راه پیدا نکرد و البته یکی از دلیلهای این راه پیدا نکردن را باید در پایین بودن کیفیت آموزش در ایران دانست اما دلیل دیگر آن را باید در

1. constructive 2. Nelson Goodman 3. Quine

خود کتاب پیدا کرد.

از پیش باید اعتراف کنم که برای من خرده‌گیری بر کتابی که با آن با منطق جدید آشنا شدم دلپذیر نیست. اما آنچه از سنگینی این نادلپذیری می‌کاهد این است که اگر این خرده‌گیریها پذیرفتنی باشند به‌این دلیل است که از تاریخ انتشار این کتاب ۳۲ سال دیگر بر عمر منطق گذشته است و در این سالهاست که راه و روشهای آسانتری مانند جدولهای معنایی[1] و استنتاج طبیعی[2] برای آموزش آن پیداشده است. روشن است که اگر این روشها در آن زمان متداول بودند دانشمند جستجوگری چون مصاحب از آنها بیخبر نمی‌ماند.

کتاب مدخل منطق صورت یک دورهٔ عمومی در منطق جدید و شامل این بحثهاست: منطق جمله‌ها، منطق محمولها، نظریهٔ مجموعه‌ها و اصول منطق ارسطویی. منطق جمله‌ها با یک قاعده و مجموعهٔ قانونهای این منطق، و منطق محمولها با پنج قاعده و مجموعهٔ قانونهای منطق جمله‌ها و سه قانون خاص منطق محمولها پایه‌گذاری شده است. بنابراین اگر بخواهیم در منطق جمله‌ها برهان استنتاجی را بنویسیم باید نخست فهرست نسبتاً طولانی راستگوها را برابر خود بگذاریم و با کاربرد مکرر قانونهای آن و آن یک قاعده، نتیجه را به‌دست آوریم. این روش چند عیب اساسی دارد. یکی اینکه برهانها طولانی می‌شوند و برای گرفتن یک نتیجهٔ ساده از چند مقدمه ناچار می‌شویم بارها به‌فهرست قانونها متوسل شویم. دیگر آنکه این روش خیلی دور از روش طبیعی ذهن در استنتاجهای عادی است. اما عیب اساسی آن درهم آمیختن بحثهای صوری و معنایی است. توضیح آنکه نکته‌گاه این‌گونه استنتاجها قانونها هستند که با کاربرد مفهوم صدق و کذب و جدولهای ارزش به‌دست می‌آیند. بدین‌ترتیب، اگرچه نتیجه‌ها، بنا به‌تعریف، نتیجه‌های صوری[3] هستند، اما دخالت ملاحظات معنایی در آنها آشکار است. البته می‌توان در تعریف این قانونها ملاحظات معناشناسی را کنار نهاد، اما در این صورت توجیه پذیرفتن یک فهرست بینهایت از اصول برای نوآموزان دشوار می‌شود. و از اینها که بگذریم دیگر بیان دقیق فراقضیه‌های سازگاری و تمامیت ممکن نخواهد بود. زیرا این دو فراقضیه بیان کنندهٔ یکی بودن نتیجه‌های صوری و معنایی هستند. اما تعریف نتیجهٔ صوری جز در چهارچوب یک نظام اصل موضوعی یا نظام صوری دیگر[4] که خالی از مفاهیم معناشناختی باشد ممکن نیست و این درست همان چهارچوبی است که در همهٔ کتابهایی که با این روش نوشته می‌شوند جلوه و نمایی ندارد.

البته نویسندهٔ دانشمند کتاب به‌این نکته توجه داشته است و در مبحث آخر کتاب با کاربرد یک دستگاه اصل موضوعی، تمامیت منطق جمله‌ها را به‌وقت تمام بیان و اثبات کرده است. اما مسأله این است که کمتر نوآموزی می‌تواند این کتاب را به‌مبحث آخر برساند و این خردهٔ دیگری است که می‌توان بر این کتاب گرفت.

کتاب مدخل منطق صورت اگرچه به تصریح دکتر مصاحب برای مبتدی نوشته شده‌است اما درواقع چنین نیست؛ آوردن بسیاری از موضوعهای فرعی که مناسب یک کتاب ابتدایی نیست، استخراج قاعده‌های کمکی فراوان از قاعده‌های اصلی که اغلب مبتدی را گیج می‌کند و به‌ویژه روش دشواری که در تأسیس منطق محمولها به‌کار رفته است مطالعهٔ آن را برای مبتدی به‌تدریج دشوار می‌سازد. درست است که برای خواندن این کتاب نیازی به‌دانستن ریاضیات عالی نیست اما تا کسی تجربهٔ حل مسائل ریاضی را نداشته باشد نمی‌تواند ازعهدهٔ بازی با فرمولهای منطق محمولها برآید. به‌این ترتیب باید گفت از صد صفحهٔ اول کتاب که بگذریم مخاطبان کتاب دیگر مبتدیان نمی‌توانند باشند و این فراموش‌شدن یکی از اصولی است که در نگارش کتابهای درسی بدان اشاره کردیم.

فصل مهم دیگر کتاب نظریهٔ مجموعه‌هاست. در این کتاب نظریهٔ مجموعه‌ها به‌روشی مبتنی بر نظریهٔ انواع[1]، یا به‌اصطلاح مصاحب «نظریهٔ طبقات» راسل شرح داده شده است. این فصل با دیدگاه منطقدانان اوایل این قرن که ریاضیات را قابل تأویل به‌منطق می‌دانستند نوشته شده است. امروز این نظر را افراطی می‌دانند. در هر صورت اگر دکتر مصاحب زنده بود و می‌خواست این فصل را دوباره بنویسد گمان نمی‌کنم با بودن نظام ترسلو-فرانکل این روش را به‌کار می‌برد.

مباحث دیگر کتاب مجموعه‌ای است از اطلاعات مفید و ارزنده که بادقت و استواری تمام تقریر شده است. خلاصه آنکه:

۱. روش آموزش منطق ریاضی در این کتاب روشی و قتگیر و خسته‌کننده و در برابر روشهای آسان امروز قدیمی است؛
۲. اگرچه کتاب به اعتبار مطالب آن، کتابی مقدماتی است ولی برای مبتدیان نوشته نشده است و آن را نمی‌توان کتاب درسی مناسبی برای شروع منطق دانست؛
۳. به‌عنوان اولین کتاب منطق ریاضی که به فارسی تألیف شده است اثری است مهم و ارزنده که هنوز هم نظیری ندارد.

پس از کتاب مدخل منطق صورت حق این است که با در نظر گرفتن کیفیت مطالبی که در این موضوع تاکنون نوشته شده است حرفی از تألیف به‌میان نیاوریم، اما کار شده را نمی‌شود ناشده انگاشت.

پس از کتاب مصاحب، تا جایی که من اطلاع دارم، کتاب مستقلی در این موضوع، مگر یک کتاب که شرح آن خواهد آمد، تألیف نشده است و آنچه در این زمینه داریم در حد مقدمه یا بخش کوتاهی از کتابهایی هستند که موضوع اصلی آنها منطق نیست. در میان این نوشته‌ها هم آنچه جدی و دقیق و خواندنی است بخشهایی است که دکتر مصاحب در آغاز جلد اول و ضمیمه‌های جلد دوم آنالیز ریاضی خود آورده است. از اینکه بگذریم دو سه نوشتهٔ دیگری که داریم، آشفته، ناقص و گمراه‌کننده‌اند. مشروحترین این نوشته‌ها را در دو کتاب زیر می‌توان یافت:

۱. عبدی، غلامرضا. جبادی منطق و ریاضی جدید، انتشارات مجلهٔ یکان، ۱۳۴۸؛
۲. منتظر حقیقی، علی‌اکبر. دستگاه اصولی و نظریهٔ اصولی مجموعه، مؤسسهٔ آموزش عالی آمار، ۱۳۵۲.

نویسندهٔ کتاب اول از آنچه نوشته‌است چنین برمی‌آید که درصدد تقریر منظم و مرتب منطق جدید نبوده است. ترجمهٔ مطالبی از این کتاب و آن کتاب یا بخشهای مجزایی از یک کتاب را دنبال هم نهاده است. کتاب دوم از یک نظر بی‌ضررتر از کتاب اول است. این کتاب گذشته از غلطهای فراوان به‌زبانی نوشته شده است که هیچ فارسی‌زبانی از آن سر درنمی‌آورد. ترجمه‌ای پرغلط به‌زبانی نامفهوم.

حالا می‌رسیم به کتاب مستقلی که در بالا ذکر کردیم. منظور ما از این بحث نقد این کتاب خاص نیست، می‌خواهیم نمونه‌هایی از

---

۱. کتاب درسی مقدماتی برای این روش منبع ۳ است که ترجمه‌ای از آن زیر چاپ است.
۲. در این روش نیز کتابی تألیفی زیر چاپ است.
3. syntactical consequences
۴. مانند نظام استنتاج طبیعی که تنها مبتنی بر قاعده است.

1. theory of types

روشهای نادرست در کتاب‌نویسی را معرفی کنیم.

۳. بروجردیان، ناصر. منطق ریاضی به زبان ساده، چهاد دانشگاهی دانشگاه تهران، ۱۳۶۳.

در زبان فارسی کتاب ساده برای آموزش منطق جدید نداریم و اگر این کتاب به نام خود وفادار مانده و واقعاً کتابی برای دورهٔ مقدماتی به‌زبان ساده بود تاکنون بارها تجدید چاپ شده بود ولی چنین نیست. کتاب شامل پنج فصل است. فصل اول و پنجم مجموعه‌ای است از آرای شخصی نویسنده در باب منطق وزبان. به‌دلیل همین دوفصل است که نویسنده در پیشگفتار کتاب می گوید:

> دراین کتاب چهرهٔ خاص فلسفی این منطق بیشتر موردنظرما بوده است. (ص الف)

نویسنده مدعی است که کتاب را برای آشنا کردن فیلسوفان ایران با ریاضیات ومنطق جدید نوشته است، زیرا به‌اعتقاد او:

> اصولا یك فیلسوف باید همه چیزدان باشد و فلاسفهٔ اولیهٔ بزرگ تاریخ هم همگی همه‌چیزدان بوده‌اند و به‌تمامی علوم عصرخویش واقف بوده‌اند... ولی مطمئناً این عمل امروز خیلی مشکل‌است و عمر آدمی کفاف آن را نمی‌دهد که تمام علوم عصر فرا گرفته شوند اما به هرصورت چارهٔ دیگری نیست. (ص ب)

از این دوفصل که هرچه هستند هیچ تناسبی با یك کتاب آموزشی‌دورهٔ مقدماتی‌ندارند می گذریم وبه‌سه‌فصل دیگر که فصلهای جدی کتاب‌اند می‌رسیم. این سه فصل در باب مجموعه‌ها، منطق جمله‌ها و منطق محمولهاست. پیش‌از آنکه نگاهی به‌این سه فصل بیندازیم لازم است نکته‌ای را شرح دهیم.

در منطق منظور از کتاب دورهٔ مقدماتی کتابی است که خواننده را با مثالهای حساب‌شده و متعدد با مفهوم صورت، ادائهای منطقی و معادلهای آنها در زبان طبیعی و به‌ویژه روش استنتاج آشنا کند. در این کتابها تکیهٔ اصلی بر استنتاج و قاعده‌ها و اصول آن است. در این دوره خواننده باید با انواع واقسام استنتاجها و کیفیت کاربرد قاعده‌ها و استخراج عینی نتیجه‌ها ازمقدمه‌ها، با حل تمرینهای فراوان، آشنا شود. این مطالب به‌اندازهٔ کافی ارزنده و آموزنده و در عین حال گسترده هستند که یك کتاب و دست‌کم یك نیم‌سال تحصیلی (چهارساعت در هفته) به‌آموزاندن آنها اختصاص داده شود. این همان مطالبی است که باید درسالهای آخر دبیرستان و برای تمام رشته‌ها تدریس شود.

و اما کتابهای دوره‌های بالاتر. دراین کتابها فرض براین‌است که خواننده مطالب دورهٔ مقدماتی را می‌داند. از این رو دراین کتابها کمتر با استنتاجهای واقعی در زبان موضوعی برمی‌خوردیم. در این کتابها بیشتر برهانها در فرازبان انجام می‌شوند و احکام ثابت‌شدهٔ در آنها نیز درباب خواص نظامهای منطقی ونظریه‌های گوناگون‌ریاضی است. مباحثی چون‌سازگاری اصلهای یك نظام صوری، تمامیت‌قیاسی آن، تعریف دقیق تعبیر و رابطهٔ میان الگوها و بحثهای فراوانی ازاین گونه، موضوع این‌کتابها هستند. کوتاه سخن آنکه‌کتابهای مقدماتی، منطق هستند و کتابهای بالاتر ازمقدماتی، فرامنطق.[1] به‌این اعتبارهم کتاب مدخل منطق صورت دکتر مصاحب کتاب دورهٔ مقدماتی است ونویسندهٔ روش‌شناس آن تنها مبحث آخر کتاب را به‌مباحث فرامنطقی منطق‌جمله‌ها اختصاص داده و ازدرهم آمیختن منطق وفرامنطق آگاهانه پرهیز کرده است.

واما کتاب‌منطق ریاضی به‌زبان ساده. دراین کتاب ازهمان‌اول

1. metalogic

بحثهای‌دورهٔ مقدماتی‌ودورهٔ‌بالاتر درهم آمیخته‌و حتی‌هیچ یك‌هم‌ادانشده است. برای مثال، خواننده هنوز فصل منطق جمله‌ها را شروع نکرده است که باتعریف جمله‌های درستساخت[1] زبان صوری آن،آن‌هم با روشی آشفته در پنج‌صفحه روبرو می‌شود. از استنتاج تنها تعریف‌آن، آن‌هم درآخر این فصل، داده شده واصلهای موضوعی نیز که‌بی‌مقدمه معرفی‌می‌شوند تناسبی بازبان صوری این فصل که همهٔ ادائهای‌منطقی آن استقلال دارند، ندارد. فصل منطق محمولها هم به تمامی صرف همین تعریفها شده است. دراین‌فصل صفحه‌های زیادی به‌تعریف‌تابع، تعریف ترم وتعریف تعبیراین‌دو اختصاص داده شده‌که اصولاً دریك کتاب آموزشی مقدماتی بحثهای زائدی است. نویسنده هیچ نظام استنتاجی برای این فصل معرفی نکرده و درسرتاسر فصل تنها یك استنتاج آورده‌که درآن ازسورها که‌اساس بحث منطق محمولهاست خبری نیست. این فصل مجموعه‌ای‌است ازتعریف سازگاری،استلزام، تمامیت، واستنتاج.

البته تقصیر این بی‌روشیها را تا اندازه‌ای هم باید به‌گردن نظام‌آموزشی موجود انداخت. در رشته‌های ریاضی دانشگاههای ما یا منطق جدید تدریس نمی‌شود و یا تدریس‌آن را به‌قیاس کشورهای غربی باکتابهای دورهای بالاتر که اصولاً فرا منطق‌اند تا منطق، آغاز می‌کنند. کتابهای معروفی چون‌کتاب مندلسون، که ذکر آن گذشت و کتاب اندرتون، که ذکرآن خواهد آمد، برای دانشجویانی مفید است که دورهٔ مقدماتی منطق را گذرانده باشند. اما درنظام آموزشی‌ما چنین دوره‌ای وجود ندارد وآن مقدار منطقی هم‌که در درس مبانی ریاضی‌برای دانشجویان تدریس می‌شود، تا آنجاکه من‌اطلاع‌دارم، جای منطق دورهٔ مقدماتی را نمی‌تواند بگیرد. نتیجه آن می‌شود که دانشجویی هم‌که مانند نویسندهٔ این کتاب به مباحث منطقی علاقه‌مند است تصوردرستی از روش آموختن وآموزاندن منطق نداشته باشد.

نقصهای این‌کتاب متأسفانه منحصر به‌آنچه بر شمردیم نیست. نثر کتاب نااستوار وگاهی نادرست است. نویسنده در انتخاب اصطلاحها به‌راستی کج‌سلیقگی کرده‌است. برای‌مثال انتخاب «صحت» و «صحیح» به‌جای «صدق» و «صادق» و «منطق عبارات» به جای «منطق‌جمله‌ها»نویسنده را ناچارکرده است که‌اغلب به‌جای‌اصطلاحهای انتخابی خود همان معادلهای جا افتادهٔ آنها را به‌کار برد وکتاب واژگان آشفته‌ای پیدا کند. اظهارنظرهای شتاب‌زده ونادرست هم‌در آن دیده می‌شود. برای مثال نویسنده معتقد است:

> در حقیقت منطق اصلی همان منطق محمولات است منتها اینجا تفکیك کردن‌قاعده‌هایی را در بردارد که ازلحاظ تعلیم‌عملی منطق ضروری است. (ص۶۵)

که اشتباهی است مسلم. منطق جمله‌ها اساس و پایهٔ منطق محمولهاست واین تفکیك کردن هم‌دلیل نظری دارد نه‌عملی. کوتاه سخن نویسنده، کتاب‌نویسی را دست‌کم گرفته و تاوان‌آن را هم ناچار بایدخواننده ماندن آن خواهد پرداخت.

بحث کتابهای تألیفی را با اشاره‌ای به‌کتابهای دبیرستانی پایان می‌دهیم.

در کتابهای دبیرستانی‌زیرعنوان «ریاضیات جدید» ۳۰صفحه در سال اول و ۲۲صفحه درسال چهارم به‌منطق اختصاص داده شده‌است. دراین ۵۲صفحه منطق جمله‌ها را باجدولهای ارزش معرفی کرده‌اند ومنطق‌محمولها را درحد علامتهای سور وجودی و عمومی ونقیضهای آنها. درچنین کتابهایی حتی بیدقتی هم نباید راه پیدا کند چه رسد

1. well-formed

به‌اشتباه. امامتأسفانه درآنها اشتباه هم هست. درپایین به‌چند موردآن اشاره می‌کنیم.

۱. درصفحهٔ۳ ازکتاب ریاضیات جدید سال چهارم «گزاره‌های همیشه درست» چنین تعریف شده‌اند:

> گزارهٔ Qیک‌گزارهٔ همیشه درست است هرگاه ارزش آن، مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش، همیشه درست باشد.

که البته تعریف درستی است. اما درصفحهٔ بعد در تعریف قضیه به‌این جمله می‌رسیم:

> دریک‌شاخهٔ ریاضی، قضیه‌گزاره‌ای است که ازاصول آن‌شاخهٔ ریاضی نتیجه شده و درستی آن یا برهان بیان می‌شود. می‌توان ثابت کردکه یک‌قضیه، گزارهٔ همیشه درست است.

جملهٔ اخیر تنها درمورد قضیه‌های منطقی صادق است نه هر شاخهٔ ریاضی. این‌ازآن جمله‌های کاذبی‌است که اگر در ذهن دانش‌آموزی بنشیند بیرون‌کردن آن از ذهن او دیگر ساده نخواهد بود.

۲. درصفحهٔ ۱۶ استنتاج چنین تعریف شده:

> استنتاج به‌مفهوم نتیجه‌گیری است بدین معنا که از گزاره‌های مفروضی با استفاده از دستورهای معینی‌که به‌نام قوانین خوانده می‌شوندگزارهٔ دیگری را نتیجه می‌گیریم.

که‌تعریفی‌است‌غلط. استنتاج بدون‌کاربرد قاعده غیرممکن‌است وقاعده هم البته چیزی است غیراز قانون. اصولاً نویسندگان این‌کتابها قاعده را ازقانون جدا نکرده‌اند. این را ازآنچه درمورد استنتاج نوشته‌اند می‌توان دریافت.

۳. درکتاب سال اول صفحهٔ ۲۳ می‌خوانیم:

> عبارات زیر برای خواندن$p\Rightarrow q$به‌کار برده شده است.
> ـ اگرp، آن‌گاه q
> ـp نتیجه می‌دهدq را
> ـ اگرp
> ـq شرط لازم برای p است
> ـp شرط‌کافی برایq است

ازاین عبارات دومی وچهارمی وپنجمی ازعباراتی است‌که به‌کار بردن آنها برای «$p\Rightarrow q$» بسیار گمراه‌کننده است و دست‌کم در کتابهای منطق نباید به‌کار رود. البته نویسندگان درکتاب سال چهارم درصفحهٔ ۲ با اضافه‌کردن قید «همیشه درست بودن $p\Rightarrow q$» اشتباه سال‌اول راتصحیح کرده‌اند ولی تکلیف دانش‌آموز دراین‌میان چیست؟

درهرصورت بخش منطق این کتابها باید از نو نوشته شوند. دیگر زمان‌آن رسیده است‌که منطق را در دبیرستانها آن‌چنان‌که‌هست یعنی به‌عنوان یک‌نظام دقیق صوری آموزش دهند.

کتابهای ترجمه‌ای

درترجمه نیز شمارهٔ کتابهای ما، چنان‌که از فهرست زیر معلوم می‌شود، بسیار اندک است:

۱. لنکر، سوزان. منطق سمبولیک، ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر، تهران، خوارزمی، ۱۳۲۹.

کتاب سوزان‌لنکر دراصل انگلیسی کتابی متوسط است ولی در ترجمه به‌کتابی پراز غلطهای گوناگون تبدیل شده است. خوانندگان می‌توانند برای اطلاع ازچگونگی این ترجمه به دو مقاله‌ای‌که در یازدهم آبانماه ۱۳۲۹ و ۲ اسفند همان سال در نقد این ترجمه در روزنامهٔ آیندگان به‌چاپ رسید ونیز به‌شمارهٔ آبانماه مجلهٔ سخن همان سال برای جواب منوچهر بزرگمهر به‌اولین نقد مراجعه کنند.

۲. هاجز، ویلفرد. راهی نودرمنطق، ترجمهٔ عبدالحسین‌آذرنگ، تهران، اطلاعات، ۱۳۶۷.

این کتاب نیز دراصل انگلیسی کتابی است مفید و آسان ولی ترجمهٔ آن متأسفانه قابل اطمینان نیست. خوانندگان برای اطلاع از کیفیت این‌ترجمه می‌توانند به‌این مقاله رجوع کنند: هرندی، منوچهر، راهی‌نو در ترجمهٔ منطق، نشر دانش، شمارهٔ دوم، بهمن و اسفند ۱۳۶۵، ص۱۵۹.

۳. کراسلی، ج. ن. و دیگران، منطق ریاضی چیست؟ ترجمهٔ شاپوراعتمادوغلامرضا برادران‌خسروشاهی، تهران، نشرروز، ۱۳۶۳.

مجموعهٔ چند سخنرانی در زمینهٔ معروفترین بخشهای منطق ریاضی. از اصل انگلیسی این‌کتاب نیز انتقاد شدیدی کرده‌اند.[1] درهرصورت کتابی است غیرآموزشی و شاید تورق آن برای کسانی که با منطق ریاضی آشنایی‌کافی دارند خالی از لطف نباشد.

۴. ناگل، ارنست و جیمز نیومن، آلفرد تارسکی. برهان‌گودل و حقیقت و برهان، ترجمهٔ محمد اردشیر، تهران، مولی، ۱۳۶۴.

دربارهٔ این‌کتاب لازم است‌برای طرح چند مطلب تازه شرحی بیاوریم.

این مجموعه،ترجمهٔ‌یک‌کتاب‌ویک مقاله است.موضوع کتاب‌بیان قضیهٔ گودل به زبان ساده است. گودل در ۱۹۳۱ و درسن ۲۵ سالگی مقاله‌ای انتشار داد‌که دانشمندان ریاضی ومنطق را به‌حیرت انداخت. در این مقاله گودل نه تنها یکی از باور نکردنی‌ترین حکمهای منفی را در باب ریاضیات به اثبات رسانده بود بلکه در اثبات، روشی را به کار برده بودکه تا آن زمان نظیری نداشت، و فهم درست آن بدون تسلط‌کافی بر منطق ریاضی وآشنایی‌کافی با نظریهٔ صوری اعداد ممکن نبود. ازاین‌رو تلاش برای عامه فهم‌کردن‌آن آغاز شد.کتاب ارنست ناگل و جیمز نیومن یکی از موفقترین تلاشها در این راه است. یکی از نتیجه‌های مهم قضیهٔ گودل این است‌که همهٔ احکام صادق ریاضی‌را نمی‌توان دریک‌نظام اصل موضوعی به اثبات رسانید، و به بیان دیگر صدق به‌معنای برهان‌پذیری نیست. از اینجا می‌توان ارتباط مقاله‌ای راکه در این‌کتاب ترجمه شده یاکتاب ناگل ونیومن دریافت. مقاله، نوشتهٔ آلفرد تارسکی و دربیان رابطهٔ مفهوم صدق وبرهان است.

باید انصاف داد‌که مترجم در ترجمهٔ این مجموعه‌کوشش خود را کرده‌است وترجمهٔ او به‌ویژه از برهان‌گودل قابل فهم است وخواننده راگمراه‌نمی‌کند. اگردرترجمهٔ این بخش‌که بخش اصلی این مجموعه است‌اصلاحاتی که‌موارد‌آن هم‌زیادنیست انجام‌شود،ترجمه‌خواندنی‌تر و بی‌نقص می‌شود.

ترجمهٔ مقالهٔ تارسکی متأسفانه به‌روشنی ودرستی برهان گودل نیست. دلیل‌آن هم‌این است‌که مقاله شامل مفهومهایی است‌که یابرای آنها معادلهای مناسب نداریم یا داریم و مترجم به‌کار نبرده است. گرفتاری از همان عنوان مقاله شروع می‌شود. ترجمهٔ عنوان حتماً باید «صدق‌وبرهان» باشد نه «حقیقت وبرهان». معادل «truth» درمتنهای منطقی «صدق» است نه «حقیقت». این نکته‌ای است‌که هنوز به آن توجه‌نمی‌کنند. نظریهٔ دلالت تارسکی‌نظریهٔ صدق است برای زبانهای صوری. صدق در یک زبان صوری با ارجاع به تعبیرکه ساختاری ریاضی است تعریف می‌شود. این صدق لزوماً متناظر با حقیقت‌که در ترجمهٔ «reality» به‌کارمی‌رود نیست. قضیه‌های هندسه‌های‌نااقلیدسی

---

۱. باتشکر ازآقای شاپور اعتماد‌که این اطلاع را دراختیار من نهادند.

با نظریه‌های مجرد ریاضی بنا بر نظریهٔ دلالت تارسکی صادق‌اند اما نمی‌توان گفت حقیقی هم هستند. در بسیاری از موارد صدق مفهومی است نسبی اما حقیقت، هرچه باشد، موضع متافیزیکی متعین‌تری دارد. از اینها هم که بگذریم در منطق از قدیمترین ایام برای جمله صفت «صادق» و «کاذب» را به‌کار می‌برده‌اند نه «حقیقی» و «غیر حقیقی» را. این اصرار بی‌دلیل نیست و بیان دلیل آن هم خارج از موضوع این مقاله است. مترجم خود به این نکته توجه کرده است و در بسیاری از موارد به جای «حقیقت» کلمهٔ «راست» را به‌کار برده است. در متن انگلیسی این ناهماهنگی در واژگان وجود ندارد و همه‌جا آنچه را مترجم «حقیقت» ترجمه کرده کلمهٔ «truth» و آنچه‌را «راست» ترجمه کرده کلمهٔ «true» آمده و این دلیل دیگری بر دقیق نبودن ترجمهٔ کلمهٔ اول به «حقیقت» است.

در ترجمهٔ این مقاله جمله‌هایی هم‌مانند جمله‌های زیر دیده می‌شوند:[۱]

۱) لفت «راست» بطور چند معنایی در بعضی حالات خاص استفاده میشود نه بطور قاطع ومعین. (ص ۱۲۷)

۲) ما قادر نیستیم یك تعریف عام، بوسیلهٔ تشکیل الصاق منطقی همهٔ تعاریف جزئی ارائه دهیم. با این وجود، آنچه که بدست میآوریم، به یك معنای شهودی معادل الصاق خیالی نامتناهی است. (ص ۱۲۸)

۳) باید دانست که این روش، تقریبی برای روش واقعی است، به‌دلایل تکنیکی، روش تراجعی نه‌برای تعریف حقیقت، بلکه بمفهوم معناشناختی ارضاء بکار می‌رود. بعد، حقیقت بر حسب ارضاء تعریف میشود. (ص ۱۲۸)

درجملهٔ (۱) معادلهای «چند معنایی» و«قاطع ومعین» درترجمهٔ «syncategorematic» و «categorematic» به‌کار رفته‌اند که معادلهای غلطی هستند اما معادلهای مناسبی‌هم، تا آنجاکه می‌دانم، برای آنها نداریم. این دو لغت در اصل یونانی هستند و در آثار منطقدانان قرون وسطای اروپا به‌کار می‌رفته‌اند. در زمان ما کواین از منطقدانانی است که این دو لغت را دوباره رایج کرده است. درجملهٔ (۲) مترجم با کاربرد «الصاق» به جای اصطلاح متداول «ترکیب عطفی» جمله را نامفهوم کرده است. درجملهٔ (۳) گذشته از «حقیقت» که شرح آن گذشت «ارضاء» برای «satisfaction» به کار رفته که معادلی است نامناسب و متأسفانه متداول. نویسندگان کتابهای درسی ما ازسالها پیش درترجمهٔ این کلمه ومشتقات آن ازمشتقات کلمهٔ «صدق» استفاده می‌کردند و برای مثال درترجمهٔ

2 satisfies the equation $2X+1=5$

می‌نوشتند

۲ در معادلهٔ $۲x+۱=۵$ صدق می‌کند

یا

۲ معادلهٔ $۲x+۱=۵$ را صادق می‌کند

حال اگر بخواهیم «ارضاء» را به‌کار ببریم باید بگوییم

۲ درمعادلهٔ $۲x+۱=۵$ ارضا می‌شود

۲ معادلهٔ $۲x+۱=۵$ را ارضا می‌کند

در این مورد گمان نمی‌کنم توضیح بیشتری در نامناسب بودن این معادل لازم باشد.

---

۱. درنقل، رسم‌الخط کتاب حفظ شده است.

این مجموعه هم مانند کتاب قبلی کتاب درسی نیست وچنانکه مترجم آن توجه کرده است، وبا قید این شرط که به دقت ویراسته‌شود می‌تواند کتاب مفیدی درفلسفهٔ ریاضی باشد.

۵. اندرتون، هربرت، ب. آشنایی با منطق (ریاضی)، ترجمهٔ غلامرضا برادران‌خسروشاهی ومحمدرجبی طرخورانی، تهران، مرکز نشردانشگاهی، ۱۳۶۶.

این کتاب از کتابهای معروف منطق ریاضی ونویسندهٔ آن نیز از منطقدانان شناخته شده است. کتاب برای آموزش دورهٔ بالاتر منطق به دانشجویان ریاضی مناسب است. بخش اساسی این کتاب فصلهای ۱ تا ۳ هستند. درفصل ۱و۲ منطق جمله‌ها ومنطق محمولها و همهٔ قرائضیه‌های مهم این دومبحث آمده‌اند. فصل ۳ اختصاص به‌مسألهٔ «تصمیم ناپذیری» (که البته معادل خوبی برای «undecidability» نیست و معادل مناسبی هم تا کنون برای آن نداریم) واثبات قضیهٔ گودل وتابعهای بازگشتی دارد. این مبحثی است که اندرتون دراین کتاب تکیهٔ زیادی برآن کرده و تقریراو از این بحث بسیار جالب و آموزنده است. از ویژگیهای این کتاب مثالهای فراوان از چگونگی کاربرد منطق در ریاضیات است. فصل آخر کتاب شامل بحث کوتاهی دربارهٔ منطق محمولهای مرتبهٔ دوم است.

برای فهمیدن این کتاب خواننده باید ازنظریهٔ مجموعه‌ها بیشتر از خلاصهٔ فشرده‌ای که اندرتون در اول کتاب آورده است اطلاع داشته باشد.

ترجمهٔ کتاب درمجموع خوب است وخواننده می‌تواند به آن اطمینان کند. از موردهایی که مترجمان بهتر است در چاپهای بعدی در آن تجدید نظر کنند کلمهٔ «ارضاء» است که شرح آن گذشت. در چاپ کتاب نیز دقتهای لازم به‌کاررفته است.

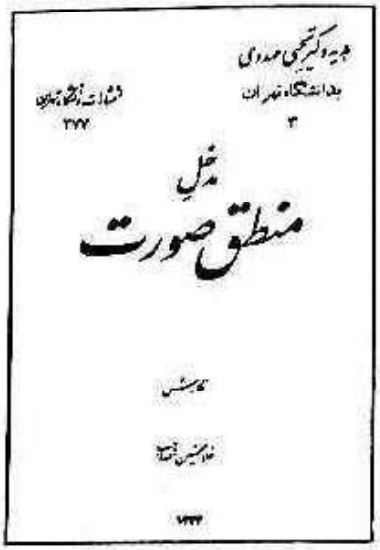
بررسی‌ما یاکتاب با ارزش مدخل منطق صورت آغاز شد و باکتاب با ارزش دیگری حسن‌ختام یافت. ازدانش منطق‌ریاضی‌نصیب ما تاکنون درترجمه وتألیف همین دوکتاب بوده است. امیدواریم در سالهای آینده منطق‌آموزان ما از این دانش سهمی را که شایستهٔ آنان است دریافت کنند.

پیوست

کتاب مدخل منطق صورت شادروان دکترمصاحب پس از انتشار، در نشریهٔ معتبر *J. of Symbolic Logic* («مجلهٔ منطق نمادی») شمارهٔ چهارم ـ جلد بیست ودوم سال ۱۹۵۷، مورد نقد و بررسی‌قرار گرفت. این نقد به قلم لطفی عسکرزاده استاد ایرانی تبار دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) است که درآن دیار به زاده شهرت دارد. ترجمهٔ این بررسی را در ذیل می‌بینید.

مصاحب، غلامحسین. مدخل منطق صورت، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۳۴. ۷۰۹ صفحه.

این اثر در موضوع منطق ریاضی جدید در نوع خود نخستین کتاب در زبان فارسی است. و اساسا کتابی است درسی که درآن نظامهای کلاسیك منطقی ازقبیل حساب گزاره‌ها، حساب محمولهای مرتبهٔ اول، حساب‌محمولهای‌مرتبهٔ اول وهمانی، نظریهٔ گسترش یافتهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ نسبتها، ونظریهٔ صوری‌اعدادشرح وبسط داده‌شده است. مطالب در مجموع درسطح نسبتاً بالایی تقریرشده و نویسنده برای به‌روشنی



فهم‌پذیر کردن موضوع از هیچ کوششی دریغ نکرده است.

کتاب به شش مبحث که مندرجات آنها را به کوتاهی خلاصه می‌کنیم تقسیم شده است. مبحث اول با بررسی تاریخی رشد منطق جدید از زمان لایب‌نیتس تا به امروز آغاز می‌شود. آنگاه نویسنده به‌صورتی شیر رسمی مفاهیم بنیادی روش منطقی را معرفی می‌کند. متغیرهای گزاره‌ای و ثابتها، قاعده‌های استنتاج ومفهوم برهان به‌تفصیل، اما نه با دقت، بررسی می‌شوند.

در مبحث دوم، حساب گزاره‌ها با تقریری نسبتاً شتاب‌زده ارائه می‌گردد. اداتهای دوتایی براساس جدولهای ارزش وقضیه‌ها به‌عنوان راستگوها تعریف می‌شوند. از مسألهٔ تمامیت بحثی نمی‌شود و قضیهٔ استنتاج بدون اثبات بیان می‌گردد. صورتهای نرمال فصلی اصلی و عطفی اصلی به اختصار بررسی و به کاربرد آنها در طرح مدارهای الکتریکی اشاره‌می‌شود. این مبحث با فهرستی که شامل حدودصدوپنجاه اصل و قضیه است پایان می‌یابد.

مبحث سوم مربوط به حساب محمولهای مرتبهٔ اول و حساب محمولهای مرتبهٔ اول و همانی است. تقریر مطالب در سطحی بالاتر و تا اندازه‌ای کاملتر از مبحث دوم است. مفاهیم سورهای وجودی و عمومی به‌تفصیل بررسی و با مثالهای متعدد روشن می‌شوند. قاعده‌های استنتاج وتعویض صوری بیان می‌شوند وقضیهٔ استنتاج، اگرچه اثبات آن داده نشده است، آزادانه به‌کار می‌رود. قوانین ابتدایی سورها از قبیل جابه‌جایی سورها وتبدیل سه، $\exists$، و $\forall$ دریک سور، مورد بحث قرار می‌گیرد. اما روش یافتن صورت نرمال پیش ذنجیره‌ای عرضه نمی‌گردد. وهمچنین مسألهٔ‌ساز گاری وتمامیت حساب محمولهای مرتبهٔ اول نیز بررسی نمی‌شود.

مبحث چهارم تقریری است کوتاه از نظریهٔ گسترش یافتهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ نسبتها و نظریهٔ صوری اعداد. اصلهای عضویت، بیان ونظریهٔ طبقات طرح‌ریزی می‌شود. مفاهیم جمع، ضرب و تفریق منطقی تعریف و قضیه‌های بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شوند. در نظریهٔ نسبتها، مفاهیم انعکاسی، تعدی، همانی و ترتیب جزئی به‌تفصیل بحث‌ومثالهای روشنگر فراوانی، به‌ویژه ازهندسه، برای ایضاح اهمیت این مفاهیم آورده می‌شود. بحث نظریهٔ اعداد مبتنی برنظام پانواست.

دومبحث آخر به‌بحثهای کوتاه در موضوعهای گوناگونی که در چهار مبحث اول نیامده بودند اختصاص دارد. اصول استدلالهای قیاسی، مفاهیم تمامیت و سازگاری یک نظام منطقی و اثبات قضیهٔ استنتاج از این گونه موضوعها هستند. از این گذشته تقریر نسبتاً کاملی ازصورت‌بندی رسر[1] از حساب گزاره‌ها وبحثی کوتاه از نظام نیکود[2] داده می‌شود.

منابع

۱. هالموس، پ. ر. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها، ترجمهٔ عبدالمجید دادالله، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲.

2. *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, New York, Oxford, 1983 (3rd printing).

3. Jeffrey R., *Formal Logic: Its Scope and Limits*, McGraw - Hill, 1967.

4. Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van-Nostrand, Princeton, 1964.

5. Paris J., and Harrington L., "A mathematical incompleteness in Peano arithmetic", *Handbook of Mathematical Logic*, New-York, Oxford, 1983, 1133-1142.

نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷

نقد خوب چیست؟*

آلن ادموندز ، جان اِوینگ

نقدخوب کتاب چیست؟ به‌شما نمی‌گوییم که نقد خوب چیست (هرچه باشد مطمئن نیستیم کـه این پرسش فقط یك پاسخ داشته‌باشد)، بلکه می‌گوییم که از نظر ما (و براستاران) نقد خوب برای مجلهٔ ماتئلی چیست.

نخست، نقد بدچیست؟ خیلی ساده، نقدی بد است که ملال‌انگیز باشد. این نقـد، محتوای کتاب را به اختصار چنان شرح می‌دهد که متخصصان علاقه‌مند به‌مطالعهٔ آن کتـاب دقیقاً تشخیص می‌دهند که چه مباحثی در کتاب آمده‌اند. در این نقد ممکن است به‌شما گفته شود کـه مثلاً در صفحهٔ ۳۵۱ چندانشباه جـایی به‌چشم می‌خورد، نماد گذاری در فصل ۷ بسیار بداست، وچون مؤلف ارجاعات به‌مقالهٔ سال ۱۹۸۶ پروفسور بیکر را ازقلم انداخته، درواقع کاملاً سهل‌انگار بوده‌است؛ وممکن است با این عبارت تحلیل‌آمیز ختم شود (ومحتملا هم‌می‌شود) که بـه‌نظر نقدنویس، در مجموعهٔ نوشتارهـا در زمینهٔ شبه‌جبرهـای محدب‌نما، این کتاب اثر مفیدی است. چه‌نقدکسالت‌آوری!

نقد مجلهٔ ماتئلی بایستی مقاله‌ای باشد بـا عباراتی مأنوس و خودمانی درموضوع کتاب، نه‌یك گزارش کسل‌کنندهٔ رسمی؛ بایدشرحی از موضوع کتاب باشد نه فهرستی ازمطالب آن. مقاله بایستی آموزنده و، مهمتر از هرچیز دیگر، جالب باشد ــ جالب برای گروه وسیعی از ریاضیدانان. مخاطب این‌مقاله باید هزارها تن از اهل فن بـاشد، نه ده دوازده نفر ازمتخصصان.

هرسال صدها کتاب برای نقد وبررسی به‌دست ما می‌رسد، وما می‌توانیم فقط درحدود ۶۰ تـا از آنها را نقدکنیم. چگونه اینها را انتخاب می‌کنیم؟ جزئی از پاسخ که جنبهٔ عملی دارد این است که فقط کتابهایی را می‌توانیم نقدکنیم که بتوانیم نقدنویس مناسبی برای آنها پیداکنیم. ولی‌ملاك اصلی ما درانتخاب این است: سعی می‌کنیم کتابهایی‌رانقدکنیم که‌آموزنده‌باشند ــ درسطح لیسانس، فوق‌لیسانس، یا حتی در سطح پژوهش. مجموعهٔ مقالات کنفرانسها و جزوه‌ها اغلب از این مقوله نیستند. متون دورهٔ لیسانس وفوق‌لیسانس، ونیز بسیاری ازکتابهـای در سطح پژوهش در عداد این کتـابها قرار می‌گیرند. البته منظور این است کـه کتابهایی کـه نقد می‌شوند رشتهٔ وسیعی از زمینه‌ها و سطوح علمی را دربرمی‌گیرند.

در نقدکتابهای در سطح پژوهش، ممکن است مطالب چندانی دربارهٔ خودکتـاب گفته نشود. کتاب را باید به‌مثابهٔ چارچوبی که نقد دربـاره‌اش نوشته شده است بـه‌کار برد (خـانه بدون پی بنـا نمی‌شود، ولی دراکثر موارد وقتی خانه‌کامل شد، پی‌دیده نمی‌شود). برای بیشتر خوانندگان شرح محتویات این‌گونه کتابها غیرآموزنده و همچنین ملال‌آور است. معمولاً خواننده فقط به‌محتوای یك یا دو کتاب از کتـابهای در سطح پژوهش، که در طی یك‌سال نقد شده، علاقه‌مند است. از سوی دیگر، گرچه ممکن است شخصاً به‌مطـالب کتـابی در زمینهٔ عملگرهـای شبه‌دیفرانسیلی علاقه‌مند نبـاشم، ولی می‌خـواهم بدانم موضوع آن چیست؟ چه‌وقت عده‌ای به‌این چیزهـا علاقه‌مند شده‌اند؟ (یا اصلا کسی علاقه‌مند شده است؟) آیا جبر است؟ آنـالیز است؟ توپولوژی است؟ مسائل اصلی آن کدام‌اند؟ این‌گونه نقد محتمل است برای ۲۵ درصد از خوانندگان جـالب باشد؛ یك گزارش تفصیلی از مندرجـات کتـاب شاید فقط برای یك‌درصد از خوانندگان جالب باشد.

البته خیلی خوب است که منقدی بتواند مقاله‌ای بنویسد که هم دربارهٔ کتاب باشد وهم مقامی را که کتاب در بین نوشتارهای مربوط به‌موضوع کتـاب دارد، برای خواننده به‌صورتی کلی روشن سازد. این‌کار را اغلب می‌توان انجـام‌داد بـدون ذکر مطـالب و بدون کسل‌کردن اکثریت خوانندگان که هرگز قصد انتخاب این‌کتاب را ندارند (صرفنظر از گفتهٔ نقدنویس). ولی اگر در انتخاب بین تحقیق دربارهٔ آن‌کتاب یا تحقیق دربارهٔ ریاضیات مخیر بـاشیم، ما همواره ریاضی را اختیار می‌کنیم.

نقد متون دورهٔ لیسانس و سالهای اول دورهٔ فـوق لیـانس، اغلب ممکن است روی نکات آموزشی و برنامه‌ای متمرکز شود. ولی باز هم صلاح در این است که انـدکی از ریاضیات حقیقی در آن گنجانیده شود. (خواننده‌ای که یك‌درس فوق‌لیسانس درنظریهٔ‌اندازه را در ۲۰ سال قبل گذرانیده ولی از آن به بعد در نظریهٔ گروههای متناهی کار کرده است، اندکی به‌یادآوری چند وچون قضیهٔ یگورووف نیاز دارد.) دراینجا نیز نقد باید برموضوع کتاب مبتنی باشد نه‌اینکه برخـود کتاب متمرکز شود. تـا چه اندازه ایـن موضوع با برنامه مطابقت دارد؟ (یـا آیـا اصولاً مطابـقت دارد؟) مباحث اساسی و قضایای عمدهٔ آن‌کدامها هستند؟ آیا برخی از مباحث از بعضی دیگر

مهمترند؟ متون داستانده» کدام‌اند؟

به علت ماهیت متون درسی، نقد و بررسی آنها احتمالاً تا حد زیادی رنگ و بوی سلیقهٔ شخصی می‌دهد. بسیار خوب. فلان و بهمان چیز را چگونه تدریس می‌کنید؟ از شخصی که فهرست بالا- بلندی ازشقوق مختلف به شما بدهد چیزی نخواهید فهمید. ولی خواندن نظر قوی وروشن یك فرد ــ حتی اگر با آن موافق نباشید ــ بینشی بیش از آنچه که قبلاً داشته‌اید به شما می‌دهد.

آیا کتابهای خوب وبد وجود دارند؟ البته که وجود دارند. ما همواره احساسات خود را دربارهٔ کتابهای بد و خوب شفاهاً با همکارانمان‌درمیان می گذاریم:ــسرناهار، هنگام صرف چای، درسالن غذاخوری. این روش را درنوشتن نقد هم باید به‌کار ببریم، و بایداز همان بیان‌روشن و تخطی‌ناپذیر استفاده کنیم. حتی اگر خشم ناشران یا مؤلفان را بر انگیزیم. ریاضیدانان متأسفانه به نحوهٔ تدریس موضوع توجه چندانی ندارند. داوریهای قوی و مسؤولانه ما را به تفکر وامی‌دارند ــ به اصطلاح مغز را به‌کار می‌اندازند.

ضمناً داوری «مسؤولانه» الزاماً داوریی نیست که ویراستاران با آن موافق باشند (درعین اینکه ماکاملاً به‌داوری خود علاقه‌مندیم، میل داریم داوریهای دیگران را نیز بشنویم، حتی اگر با آنها موافق نباشیم ــ اغلب هم این کار را می‌کنیم.) اگر درصفحات مقاله‌های روزنامه‌ها تنها مقالات و نامه‌های مورد قبول ناشران چاپ می‌شدند، واقعاً صفحات کسالت‌آوری می‌شدند؛ بخش نقدکتاب ما هم به‌همین اندازه کسالت‌آور می‌شد.

نقد «کامل» آمیزه‌ای است از همهٔ مطالب مذکور دربالا. این نقد شامل تاریخ، ریاضیات، و عقاید است؛ این نقد از موضوع کتاب و از خود کتاب صحبت می‌کند (بی‌آنکه دیده شود)، به ما آگاهی می‌بخشد و ما را سرگرم می‌سازد و بالاتر ازهمه دلنشین است. قابل توجه اینکه همهٔ این کارها باید در۴ تا ۶ صفحه انجام گیرد. (توصیهٔ ما: به نقد نویسان می گوییم دست‌کم سه صفحه بنویسند و هرگز بیش از ده صفحه ننویسند.)

آیا این نوع نقد در حق مؤلفان غیرمنصفانه تلقی نمی‌شود؟ آیا این تصور برای خواننده‌پیدا نمی‌شود که ندادن اطلاعات مشروح دربارهٔ خود کتاب، اظهار نظری مؤدبانه دربارهٔ کم ارزشی آن است؟ امیدواریم چنین نباشد، ما می‌خواهیم نسبت‌به مؤلفان (و ناشران) منصف باشیم. اما می‌خواهیم نسبت به‌خوانندگان نیز چنین باشیم. انتشار نقدهای رسمی، که تقریباً خواننده‌ای ندارد در حق هیچکس منصفانه نیست.

نقد خوب کتاب برای عامتلی کدام است؟ مطلبی خواندنی و جالب دربارهٔ یك کتاب.

ترجمهٔ م. ه. شفیعیها

• Edmonds A., and Ewing J., "What's a good book review? An editorial comment", *Amer. Math. Monthly*, 88 (1981) 318-319.

ریاضیات عالیترین دستاورد فکری و اصیلترین ابداع ذهن آدمی است. موسیقی می‌تواند روح را برانگیزد یا آرام سازد؛ نقاشی می‌تواند چشم‌نواز باشد، شعر می‌تواند عواطف را تحریك کند، فلسفه می‌تواند ذهن را قانع و راضی سازد، مهندسی می‌تواند زندگی مادی آدمی را بهبود بخشد. اما ریاضیات همهٔ این ارزشها را عرضه می‌کند.

موریس کلاین

در شماره‌های آینده می‌خوانید

می‌خواهم رنگ‌سیدان بشوم — مال هالموس
منجنیقهای حربی — [illegible]
نظریه اندازه — جوزف کارکا
مسألهٔ دهم هیلبرت — [illegible]
اویلر — اندره ویل
صورتبندی نظم عالم (ادامه) — [illegible]
مصاحبه با رنه توم