شیرازه

سال ۱، شماره ۲، مرداد ۱۳۶۷





مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم





مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است

بهای هر شماره ۴۰۰ ریال
حق اشتراك سالانه برای داخل کشور ۱۲۰۰ ریال

وجه اشتراك به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانك ملی شعبهٔ خیابان پارك تهران به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یك بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبك مقاله‌های چاپ شده در **نشر ریاضی** باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حك و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یك طرف کاغذ، یك خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، پخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در **نشر ریاضی** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱، شمارهٔ ۲، مرداد ۱۳۶۷

مدیر مسؤول: مهدی بهزاد

● هیأت ویراستاران: غلامرضا برادران خسروشاهی
مهدی بهزاد
یحیی تابش
محمد جلوداری ممقانی
مهدی رجبعلی‌پور
سیاوش شهشهانی
سیامك کاظمی

● مشاوران: محمدمهدی ابراهیمی، شاپور اعتماد، اسماعیل بابلیان، محمد باقری، مگردیچ تومانیان، احمد حقانی، محمدهادی شفیعیها، کریم صدیقی، علی عمیدی، امید علی کرمزاده، عبادالله محمودیان، حسین معصومی همدانی، اسدالله منجمی، رضا منصوری، منوچهر میثاقیان، محمدعلی نجفی، منوچهر وصال

● مسؤول فنی: نادر کثیری
● طراح و صفحه‌آرا: آزاده اصغری
● ناظر چاپ: علی صادقی

با همکاری لایتوترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات

فهرست

دیدگاه

مسألهٔ پژوهشکده ۷۸
اقتراح: ریاضیات و کامپیوتر ۷۹

مقاله‌ها

خمهای جبری — سیاوش شهشهانی ۸۵
جان کلام در نظریهٔ اندازه — جوزف کویکا ۹۷
می‌خواهم ریاضیدان به حساب آیم — پال هالموس ۱۰۵
مسألهٔ دهم هیلبرت — مارتین‌دیویس، روبن‌هرش ۱۰۹
تا چه حد استاد ریاضی خوبی هستید؟ — ریچارد گای ۱۱۷
سیستمهای دینامیکی گسسته ـ جانشینی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال؟ — جیمز ساندفر ۱۱۹
نظراتی دربارهٔ ریاضیات دورهٔ کارشناسی — اندروگلیسون، آرتور راستین ۱۲۱
صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات (۲) — آرتور جفی ۱۲۸

هنر حل مسأله

اردیش و مسأله — محمد جلوداری‌ممقانی ۱۳۵

کتاب

تاریخ و ریاضیات؛ تاریخ ریاضیات؛ تاریخهای ریاضیات — حسین معصومی‌همدانی ۱۴۰
کتابشناسی ریاضیات — فرخ امیرفریار، غلامرضا برادران خسروشاهی ۱۴۷
ترکیبیات شمارشی — جورج اندروز ۱۴۸

اخبار و گزارشها

یحیی تابش ۱۵۱



روی جلد

راست: پال اردیش
ر.ك. "اردیش و مسأله"

چپ: پال هالموس
ر.ك. "می‌خواهم ریاضیدان به‌حساب آیم"

اقتراح
ریاضیات و کامپیوتر

شاید چشمگیرترین کاربرد ریاضیات در قرن اخیر را در پیدایش و پیشرفت کامپیوترهای الکترونیکی بتوان مشاهده کرد. کامپیوتر که امروزه ابزاری ضروری در علم، تکنولوژی، و زندگی روزمره است از یک عملگر خاص به‌ابزاری همه منظوره تحول‌یافته است. بسیاری بر این اعتقادند که این گذار صرفاً یک تحول مهندسی نیست بلکه ریاضیات نیز در آن نقش‌مهمی دارد. پیشرفت کامپیوتر و افزایش کاربردهای آن به‌طور بنیادی به‌روشها، و ایده‌هایی وابسته است که خاستگاه آنها ریاضیات است. در واقع کامپیوتر ثمرهٔ پیوند دانش تحلیلی و دانش ترکیبی است.

جامعهٔ دانشگاهی ما در این مورد با پرسشهای مشخصی روبرو است، ازجمله اینکه، سازماندهی مناسب برای رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاه چگونه باید باشد؟ آیا رشتهٔ کامپیوتر بخشی از دانشکده‌های علوم و گروههای ریاضی است، یا در گروههای الکترونیک و دانشکده‌های مهندسی جای دارد، و یا هیچکدام؟ و پرسش دیگر اینکه، تأثیر متقابل ریاضیات و کامپیوتر، چه در زمینهٔ آموزش و چه در زمینهٔ پژوهش، چیست؟ از این‌رو دو سؤال زیر را با جمعی از صاحبنظران و عده‌ای از اعضای هیأت ویراستاران نشریه ریاضی درمیان گذاشتیم و ازایشان تقاضا کردیم که برحسب نوع علاقه و تخصص خود به‌این پرسشها ــ تماماً یا جزئاً ــ پاسخ دهند.

۱. جایگاه رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاه با توجه به‌نکاتی ازقبیل سیر تاریخی، آینده‌نگری، برنامه‌های آموزشی، و ارتباط نرم‌افزار و سخت‌افزار، کجاست؟

۲. تأثیر کامپیوتر و ریاضی بر یکدیگر ــ چه ازلحاظ آموزش وچه ازلحاظ پژوهش ــ چیست؟

صاحبنظرانی که در این بحث شرکت کرده‌اند، عبارت‌اند از:

- دکتر غلامرضا انصاری، رئیس مرکز محاسبات و رئیس دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف؛
- دکتر غلامرضا برادران خسروشاهی، دانشیار گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه تهران؛
- دکتر پروین جبه‌دار مارالانی، استادگروه الکترونیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تهران؛
- دکتر سیاوش شهشهانی، استاد و رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف؛
- دکتر کارولوکس، رئیس گروه الکترونیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تهران؛
- آقای ابراهیم تقیب‌زادهٔ مشایخ، رئیس انجمن انفورماتیک ایران.

با تشکر ازاین استادان گرامی، پاسخهای آنان را می‌خوانیم.

غلامرضا انصاری

امروز کمتر رشته‌ای وجود دارد ــ حتی در زمینهٔ علوم انسانی ــ که کامپیوتر را به‌عنوان یک ابزار به‌کار نگیرد و طبیعی است که در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات از قبیل معادلات دیفرانسیل، محاسبات عددی، معادلات با مشتقات جزئی وغیره نیز کامپیوتر مورد استفاده قرار داشته باشد. علم کامپیوتر از نظر تاریخی از ریاضیات و برق و الکترونیک نشأت می‌گیرد و در واقع می‌توان این دو رشته را والدین تاریخی کامپیوتر دانست ولی پیشرفت خود کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار تکنولوژیک، به‌شدت متکی برمعیارهای تکنولوژیک یعنی معیارهای فیزیکی و اقتصادی وحتی کاربردی ــ مثل سرعت و قدرت و مصرف برق و نظایر اینها ــ بوده است. امروز در کشورهای پیشرفته کامپیوتر در آموزش، دفاع، صنعت، خدمات وانفورماتیک تأثیرات بسیار گذاشته وحتی اثرات آن در اخلاقیات و معیارهای اجتماعی نیز تحت بررسی است. ولی کشور ما از این حیث بسیار عقب‌مانده است و ما فعلاً مصرف کننده‌ایم. علم کامپیوتر و فن استفادهٔ مطلوب از کامپیوتر را باید ازهم متمایز کرد. به‌عنوان یک تمثیل، نسبت به‌این دو را به‌هم می‌توان مانند نسبت زیست‌شناسی به‌طب داخلی یا جراحی دانست. تکنولوژی کامپیوتر تأثیر عظیمی برپیشرفت آن داشته است و این پیشرفت جاذبهٔ عظیمی برای کامپیوتر در اغلب رشته‌ها ایجاد کرده من‌جمله در ریاضیات، که خودش از بنیانگذاران علوم کامپیوتر است؛ برای رفع بن‌بستهایی که به‌خصوص در ریاضیات غیرخطی، دینامیک غیرخطی، ریاضیات آشوب و غیره وجود داشته اکنون از کامپیوتر استفاده می‌شود. اگر بخواهیم از دید سیر تحول تاریخی نگاه کنیم، همان‌طور که اشاره شد، منشا کامپیوتر هم در ریاضی و هم درمهندسی برق (ساختن سخت‌افزار) است ولی به‌هرحال کامپیوتر، به‌موجود مستقلی تبدیل شده است. این موجود غول‌آسا، گرچه والدینش برق و ریاضی هستند، ولی دربطن هیچیک جا نمی‌گیرد. البته دست در دست هردو دارد و به‌هردومحتاج است، در دست راستش تئوری محاسبات و در دست چپش دیجیتال لاجیک و سایرموضوعها. درعین‌حال به‌هردورشته هم یاری می‌رساند. شما درهر کتاب درسی جدیدی، می‌بینید که واقعاً مرزی بین نرم‌افزار و سخت‌افزار نیست. فقط سیاست، اقتصاد، قابلیت اعتماد، وعواملی از این قبیل، مشخص می‌کنند که در هرکار یا پروژهٔ خاص، خط بین نرم‌افزار و سخت‌افزار را کجا باید کشید. اصولاً می‌توان گفت که سخت‌افزار، نرم‌افزاری است روی کامپیوتری از نسل قبل. امروز تکنولوژی نرم‌افزار مقولهٔ عظیمی است که در بعضی‌جاها دپارتمانهای خاص خود را دارد وحدود ۶۰ درصد نیروی انسانی شاغل درکامپیوتر به‌کارهای نرم‌افزاری مشغول‌اند. ما نمی‌توانیم تاریخ تحول کامپیوتر را مجدداً بازسازی کنیم وعیناً سیر تکامل کامپیوتر در کشورهای پیشرفته را تکرار کنیم.

در کشور ما که کامپیوتر بیشتر به‌عنوان یک ابزار مطرح شده، باید به‌جنبه‌های تکنولوژیک آن توجه بیشتری کرد. جنبه‌های تکنولوژیک، با اقتصاد، سرمایه‌گذاری و جنبه‌های فیزیکی وملموس، بیشتر درتماس است. چه درصنعت و چه درآموزش، اولویت را باید به‌تکنولوژی کامپیوتر داد. کامپیوتر در واقع یک ابزار تولیدی است، چه در زمینهٔ نرم‌افزار و چه درزمینهٔ سخت‌افزار، و فعالیتهای تولیدی‌هم تابع مسائل اقتصاد تولید هستند که درصورت نادیده گرفتن آنها، علم و کاربردهای کامپیوتر در ایران دچار نابهنجاری خواهد برد. ما فاقد تکنولوژی کافی برای ساخت، تعمیر اساسی، و بهتر کردن سیستمهایی که داریم، هستیم. به‌عبارت دیگر، ما اندکی زیست‌شناسی عمومی می‌دانیم، ولی از روشهای علاج کردن اندامهایی که به‌بیماریهای خاص دچارند،

عاجزیم. کامپیوترهای ما اکثراً قدیمی و نسبتاً مستهلك است و تازه از همین دستگاههایی هم که داریم، نمی‌توانیم استفاده کنیم. ابزارهای مهندسی پزشکی داریم که کسی نمی‌تواند آنها را تعمیر کند یا بدکار گیرد. بعضیها فکر می‌کنند که تسلط برنرم‌افزار، با خواندن یك کتاب فرترن عملی می‌شود درحالی که مسائل متعددی در نرم‌افزار، مانند طراحی، آزمون، و «امکان سنجی» جزو زمینه‌های تولیدی کار است. خلاصه برای تعمیر، نگهداری، و پشتیبانی مراکز کامپیوتری مملکت احتیاج به تخصصهای تکنولوژیکی داریم که الان فاقد آن هستیم. فارغ‌التحصیلان فعلی کامپیوتر جوابگوی نیازهای کشور نیستند.

متأسفانه مسألهٔ کامپیوتر و آموزش آن در ایران به‌بن‌بست عقاید و آرا برخورد کرده است. اینکه رشتهٔ کامپیوتر جزو کدام دانشکده باشد، به‌نظر من مسألهٔ اساسی نیست. البته شاید استقلال این رشته بهتر باشد. ولی مسألهٔ اساسی، رهیافت تکنولوژیك برای بهبود وضع کامپیوتر در کشور است. باید درنظر داشت که بازار کامپیوتر نیز عمدتاً در تکنولوژی است. از پایینترین سطح که تعمیر و نگهداری باشد تا سطح بعدی که راه‌اندازی دستگاههاست و بالاخره، طراحی، که فعلاً آموزش آن در ایران وجود ندارد. در واقع، مسألهٔ ما یك نوع بهینه‌سازی تحت محدودیتهای بسیار است. ما افراد معدودی داریم؛ محیط ما قابلیت جذب متخصصان کامپیوتر از خارج را ندارد. دستگاههای معدود و قدیمی و مستهلك داریم و تازه نفرات کافی برای نگهداری و اداره کردن آنها نداریم. شاید لازم باشد مقداری از ایده‌آلها را کنار بگذاریم. به نظر من باید تمام نفرات و امکانات و ابزارهای کامپیوتری معدود کشور را در دانشگاههای خاص و معدودی متمرکز کنیم و با پرهیز از پراکنده‌کاری، افرادی را که بتوانند برای نیازهای کشور به‌کامپیوتر واقعاً مؤثر باشند، تربیت کنیم.

غلامرضا برادران خسروشاهی

«انقلاب کامپیوتری صرفاً یك انقلاب کامپیوتری نیست. این یك انقلاب ریاضی است، زیرا منشأ ایده‌های اختراع و کاربرد روزانهٔ کامپیوتر، ریاضیات پیچیده است.»

آ. جفی، نشر ریاضی، ۱، ۱۳۶۷.

«کامپیوترها درکار پدیدآوردن انقلابی در پهنهٔ اندیشه‌هایند.»

ر. و. همینگ، جنگ ریاضی دانشجو، ۱، ۱۳۶۶.

ریاضیات یونان باستان، اساساً ریاضیاتی متناهی، مشخص، و خاص بوده است. درمقابل، ریاضیات جدید، ریاضیاتی غیرمتناهی، مجرد و عام است؛ ارسطو بینهایت بالفعل را نمی‌پذیرفت. قرنها بعد نیوتن و لایب‌نیتس روشهای محاسبه با بینهایت کوچکها را عرضه کردند، و وایرشتراس درابتدای این قرن، با تحویل آنالیز به‌حساب (حسابی‌سازی آنالیز) بر پارادوکسهای دنیای بینهایت کوچکها فائق آمد. کار وایرشتراس سازشی بین محدودیتهای موجود در بینش متناهی بشر و تصورات نامتناهی او برقرار کرد. حال کامپیوترها ما را مجدداً به‌دوران قبل از نیوتن، یعنی دنیای متناهی، خاص، و مشخص بر می‌گردانند. به‌زعم تامس کون، به پارادایم جدیدی وارد می‌شویم، و جا دارد آن‌را پارادایم «پیوند کامپیوتر و ریاضیات» نامگذاری کنیم. درنظریهٔ تامس کون، هر پارادایمی بعد از سپری کردن مراحل بحرانی و پر جوش و خروش اولیه، وارد یك دورهٔ سازندگی و آرامش می‌شود. ورود کامپیوتر به‌عالم ریاضی، سبب می‌شود که دورهٔ آرامش و باروری کاربردی پارادایم وایرشتراسی، خود به‌یك دوران بحرانی تبدیل شود، یعنی پارادایمی تمام نشده و تکامل نیافته، پارادایم جدیدی آغاز شود.

کامپیوترها هم آفریدهٔ ریاضیات و هم در کار آفرینش «ریاضیات» اند؛ آنها موجوداتی هستند که به‌زبان ریاضی سخن می‌گویند؛ آنها مشخص و خاص را دوباره به‌دنیای ریاضی بازمی‌گردانند. منتهی در نتیجهٔ سرعت و قدرت فوق تصور کامپیوترها، چنان مشخص‌های بسیار خاص و خاص‌های بسیار مشخصی درحیطهٔ معرفت انسانی قرار می‌گیرند که قبلاً به‌هیچوجه در تصور انسان نمی‌گنجیده است.

به‌طور کلی، کامپیوتر از نظر فلسفی-ریاضی دو کار بسیار مهم را برای انسان انجام می‌دهد:

۱. شهود انسان از عوالم متناهی را به‌طور سرسام‌آوری گسترش می‌دهد؛

۲. «تفکر الگوریتمی» را به صورت بسیار گسترده به ذهن انسان (ولو به‌طور ناخودآگاه) القا می‌کند.

از سوی دیگر، اولاً کامپیوتر ماشینی گسسته ومتناهی است ویکی ازاهداف آن یافتن بهترین نتیجه ازمهمترین مسائل ریاضیات کامپیوتری است. این هدف به‌مطالعهٔ گرافها، پیچیدگی محاسبه، و پژوهش در عملیات منجر می‌شود.

ثانیاً کامپیوتر ماشینی منطقی است و به‌مبحث اصلی منطق ریاضی یعنی حساب گزاره‌ها مجهز است. بنابراین، کامپیوتر در اثبات قضایا به‌ریاضیدان کمك می‌کند و همکار او در پژوهشهای ریاضی است. تجربیات چند سالهٔ اخیر نشان داده است که درحیطه‌هایی از ریاضیات کلاسیك مانند آنالیز و آنالیز تابعی، اثباتهای انجام‌گرفته بااستعانت ازکامپیوتر، بسیار مؤثر بوده است.

ثالثاً کامپیوتر، ماشین محاسبه است و می‌تواند با جذب و تبدیل و فشرده‌کردن حجم عظیمی از داده‌ها، واقعیت را شبیه‌سازی کند. مدلهایی که کامپیوتر برای علوم فیزیکی و مهندسی فراهم می‌آورد، ضرورت ساخت مدلهای پرهزینه و پرزحمت را تقریباً از بین برده است.

کامپیوتر با فراهم آوردن زمینه‌های لازم برای بررسی داده‌ها و نظریه‌ها، می‌تواند به معادلات دیفرانسیلی، روندهای احتمالی، تحلیل داده‌ها و آمار ریاضی کمکهای فراوانی بکند.

باتوجه به‌این روابط تنگاتنگ بین ریاضیات وکامپیوتر ازیك‌سو و اثرات وکاربرد کامپیوتر در کلیهٔ رشته‌های علوم محض و کاربردی از سوی دیگر، لازم می‌آید که حسابی ویژه در دانشگاهها برای کامپیوتر باز شود، و جایگاه آن در ارتباط با آموزش خود آن، وکاربرد آن درسایر رشته‌ها، دقیقاً مشخص شود. من دراینجا نظرات خودرا اجمالاً بیان می‌کنم.

۱. گروه جدیدی با نام خالص «کامپیوتر» باید دردانشکده‌های علوم تشکیل شود؛ درعین حال، گرایشهای کامپیوتر در گروههای ریاضی و الکترونیك دانشکده‌های علوم وفنی باید تقویت شوند. دلایل زیادی برای این نوع جایابی کامپیوتر درسازماندهی دانشگاهی وجود دارد. کامپیوتر موجودی است که جسمش برقی وفکرش ریاضی است؛ وجود گروه کامپیوتر در دانشکده‌های علوم باعث اعتلای علوم پایه و نیز اعتلای خود کامپیوتر خواهد شد؛ مهندسین محترم نباید از نفوذ خود در کمیته‌های برنامه‌ریزی استفاده کنند و کامپیوتر را به‌طرف خود بکشانند.

۲. در سایهٔ وجود کامپیوتر، در برنامه‌های گروه ریاضی باید

تجدیدنظر و بازنگری شود. «ریاضیات گسسته» رابط اصلی بین ریاضیات و کامپیوتر است. ریاضیات گسسته باید هرچه زودتر و با عمق و گستردگی هرچه بیشتر در ریاضیات دورهٔ لیسانس معرفی و آموخته شود و از طرف دیگر، درسهای جدیدی از قبیل نظریهٔ الگوریتمها، پیچیدگی محاسبه، بهیابی، تحلیل داده‌ها، پژوهش درعملیات، و آنالیز عددی باید به‌صورت درسهای اصلی برنامهٔ دورهٔ لیسانس ارائه شوند.

۳. دانشگاهها در سطح عام باید امکانات کامپیوتری را گسترش دهند و به‌طور مشاع دراختیار همگان قراردهند. با بیسوادی کامپیوتری باید مبارزه کرد. منظور ما از سوادکامپیوتری فقط آموزش یك زبان برنامه نویسی نیست، بلکه باید دانشجویان را به‌تفکر الگوریتمی عادت داد.

۴. با ورود کامپیوتر به‌کلاس درس، روش تدریس ریاضیات باید تغییرات کیفی و کمی بنیادی را پذیرا شود. همان‌طور که ماشین‌حساب اینك در تمام محاسبات عددی به‌کار گرفته می‌شود، کامپیوتر نیز باید به‌کمك درسهایی مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال، جبر خطی، معادلات دیفرانسیل وسایر دروس اساسی دورهٔ کارشناسی ریاضی وارد عرصه شود. باید روشهای جدیدی برای تدریس ریاضیات ابداع شوند و دانشجویان باید به‌جای آموزش تکنیکهای مختلف و وقتگیر ریاضی، روشهای «ریاضی اندیشیدن» را بیاموزند. همان گونه که ماشین جسم ما را از بسیاری مشقات کار یدی رهایی بخشید، کامپیوتر نیز در رهانیدن اندیشه و ذهن ما از مشقت به‌کارگیری تکنیکهای محاسباتی خسته کننده، نقش اساسی ایفا خواهدکرد. کامپیوتر می‌تواند در هنر «حدس زدن» و کشف و مکاشفهٔ قضایا به‌دانشجویان کمك وافری کند.

پرویز جبه‌دار مارالانی و کارولوکس

درطول چند دههٔ گذشته توسعهٔ قابل ملاحظه‌ای درعلوم کامپیوتر حاصل شده که برخلاف سایر زمینه‌های علم و تکنولوژی، کاملاً حالت انفجاری داشته است. درمورد این نکته چندان توافقی وجود ندارد که هستهٔ اصلی برنامهٔ آموزشی یك دورهٔ چهار سالهٔ تحصیل دانشگاهی درزمینهٔ کامپیوتر چه باید باشد؛ بخصوص که چنین برنامه‌ای درطول زمان پیوسته در حال تحول بوده و امروزه با پیدایش ریزپردازنده‌ها و ریزکامپیوترها بیش ازپیش دگرگون شده است.

ازلحاظ تاریخی اولین کامپیوترهای الکترونیکی در دانشگاه هاروارد، دانشگاه پنسیلوانیا، و آزمایشگاههای تلفن بل پا برعرصه نهادند. دانشگاههای هاروارد، پنسیلوانیا، ایلینوی، ومؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست اولین مؤسسات آموزشی بودندکه درسهایی در زمینهٔ کامپیوتر را در برنامهٔ خود گنجاندند.

در بدو امر دونوع درس دراین زمینه ارائه می‌شد: درسهایی در زمینهٔ طراحی منطقی که برمبنای نظریهٔ سویچینگ و مدار بودند و درسهایی در زمینهٔ برنامه‌نویسی به‌زبان ماشین واسمبلر. دروس نوع اول توسط استادان بخشهای مهندسی برق و دروس نوع دوم به‌وسیلهٔ متخصصان کامپیوتر زیرنظر استادان ریاضی تدریس می‌شد. با افزایش نیاز به مهندسان کامپیوتر و برنامه‌نویسان، به‌تدریج درسهای بیشتری عرضه می‌شد به‌طوری که الگوی مشخصی درعرضهٔ این درسها پدیدآمد. بخشهای مهندسی برق درسهای مربوط به‌طرح کامپیوتر و بخشهای ریاضی درسهای مربوط به‌برنامه‌نویسی ومحاسبات عددی را در برنامهٔ خود گنجاندند. کامپیوترهای اولیه برای براورده ساختن نیازهای ارتش آمریکا در زمینهٔ محاسبات مربوط به‌مسیرهای بالستیك ساخته شد. به این ترتیب، تقاضا برای فارغ‌التحصیلان دانشگاهی که در برنامه‌نویسی و محاسبات عددی مهارت داشته باشند، افزایش یافت و درنتیجه، بخشهای ریاضی به‌درسهای برنامه‌نویسی ومحاسبات عددی توجه بیشتری نشان دادند.

اولین بخشهای کامپیوتر در اواسط دههٔ ۱۹۶۰ به‌صورت منفك ازبخشهای ریاضی درچند دانشگاه به‌وجودآمد. همزمان با این جریان گرایش به‌کامپیوتر در بخشهای مهندسی برق آغاز شد.

درسال ۱۹۶۵ پروفسور زاده سرپرست وقت بخش مهندسی برق دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) در مقاله‌ای تحت عنوان «مهندسی برق و چهار راه» نگرانی خود را درمورد آیندهٔ مهندسی برق و ارتباط آن با کامپیوتر ابرازکرد و اظهار داشت که تنها با اضافه کردن چند درس در زمینهٔ طراحی منطقی و برنامه نویسی نمی‌توان ایفای نقش اصلی بخشهای مهندسی برق را درتوسعهٔ آموزش کامپیوتر میسر ساخت. این مقاله مورد توجه دست اندرکاران قرار گرفت و به‌دنبال آن کمیته‌ای به نام COSINE با دو وظیفهٔ زیر تشکیل شد: کمك به‌بخشهای مهندسی برق درتوسعهٔ برنامه‌های آموزشی مهندسی کامپیوتر؛ دگرگونسازی دروس سنتی مهندسی برق به‌منظور حداکثر استفاده از امکانات کامپیوترهای رقمی.

درحال حاضر در دانشگاههای عمده آموزش کامپیوتر یا به‌طور جداگانه دربخش مهندسی برق و بخش مستقل کامپیوتر انجام می‌شود یا دربخشی که ترکیبی از این دو است، صورت می‌گیرد. به‌علاوه اخیراً بعضی از بخشهای مهندسی برق، مهندسی کامپیوتر را به‌عنوان یکی ازگرایشهای برق درنظر گرفته ونام خود را به‌بخش مهندسی برق و کامپیوتر تغییر داده‌اند.

واژه‌های علوم کامپیوتر و مهندسی کامپیوتر بدون آنکه تعریف چندان دقیقی داشته باشند به‌کار می‌روند. درعلوم کامپیوتر، مباحثی چون محاسبات عددی، زبانهای برنامه‌نویسی، نظریهٔ اتوماتونها، نظریهٔ زبانهای صوری، نظریهٔ پیچیدگی محاسبه، نظریهٔ الگوریتمها، وساختمان داده‌ها مورد نظر هستند. درحالی که در مهندسی کامپیوتر طراحی، پیاده کردن، وکاربرد سیستمهای پردازش داده‌ها به‌طور عام یا خاص مورد توجه قرار می‌گیرد که هم شامل نرم‌افزار وهم شامل سخت‌افزار است. از این‌رو مهندسی کامپیوتر را می‌توان شاخه‌ای از مهندسی دانست. بررسیهای آماری نشان می‌دهد که در دانشگاههای آمریکا تعداد دانشجویان ثبت‌نام کرده در رشتهٔ کامپیوتر، دربخشهای ترکیبی برق و کامپیوتر افزایش بیشتری دارد.

اکنون بد نیست نظری نیز به برنامه‌های آموزشی پیشنهادی سه کمیتهٔ معتبر برای رشتهٔ کامپیوتر بیافکنیم: برنامهٔ ACM 68 به‌برنامه‌نویسی وجنبه‌های ریاضی ونظری کامپیوتر تأکید دارد؛ برنامهٔ کمیتهٔ COSINE گرایش کامپیوتر را در مهندسی برق توصیه می‌کند و ارائهٔ درسهایی در زمینهٔ ساختمان کامپیوتر، سیستمهای رقمی، و سیستمهای عامل را پیشنهاد می‌نماید؛ و بالاخره کمیتهٔ کامپیوتر IEEE برنامه‌ای مشتمل برچهار موضوع کلی زیر را توصیه می‌کند: لاجیك و دیجیتال، سیستمهای عامل ومهندسی نرم‌افزار، ساختمان و سازمان کامپیوتر، نظریهٔ محاسبات.

توسعهٔ رشته‌های مختلف مهندسی برق مانند الکترونیك، مخابرات، وکنترل تا حدود زیادی ناشی از پیشرفت روزافزون کامپیوتر و کاربردهای آن است به‌طوری که امروز تفکیك بعضی از رشته‌های مهندسی برق از رشتهٔ کامپیوتر امکانپذیر نیست؛ مثلاً رشته‌های مخابرات کامپیوتری، روبانیك، و مهندسی پزشکی امروزه در وضعیتی هستند که تمام فعالیتهای آموزشی و پژوهشی آنها در زمینه‌های ترکیب یافتهٔ برق وکامپیوتر، انجام می‌گیرد. پیشرفت الکترونیك امکان ساخت قطعاتی را فراهم کرده‌است که تمام یا قسمتی ازعملیات سنتی نرم‌افزاری

را انجام می‌دهند. وبه‌عکس، نرم‌افزار نیز این توانایی را یافته است که وظایف سنتی سخت‌افزاری را به‌صورت نرم‌افزاری انجام دهد و این روند هر روز ادامه دارد، و پیوند برق و کامپیوتر پیوسته محکمتر وقویتر می‌شود. بنابراین، به نظر می‌رسد که ادغام رشته‌های مهندسی برق وکامپیوتر به‌صورت یك رشتهٔ واحد دانشگاهی یکی از مناسبترین روشهای سازماندهی رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاه است که در پیشرفتهای بعدی این دو رشته اثری مثبت وسازنده خواهد داشت.

سیاوش شهشهانی

مسألهٔ جایگاه رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاه بخصوص در ارتباط با بخشهای ریاضی و موضوع اثرات کامپیوتر بر رشتهٔ ریاضی را باید به‌عنوان دو موضوع جداگانه بررسی کرد.

ارتباط اولیهٔ ریاضیات وکامپیوتر هرچندکه دربارهٔ آن سخنوری زیادی شده است، فی‌الواقع بیشتر امری تصادفی است تا ریشه‌ای. درست است که نظریهٔ محاسبات و ماشین‌تورینگ کار ریاضیدانان بود ولی ابداع این نظریات هیچیك مستقیماً منجر به‌ساختن کامپیوترنشد و نمی‌توانست بشود. کامپیوتر یك ماشین است و تکنولوژی آن را پدید آورده است. البته،درطرح کامپیوترهای رقمی از جبر بول استفاده می‌شود ولی این هم در سطحی نیست که اطلاعات عمیقی از این‌رشته بطلبد. آنچه واقعیت دارد این است که تعداد قابل‌ملاحظه‌ای از پیشکسوتان رشتهٔ کامپیوتر،درابتدا ریاضیدان بودند. البته به‌همین تعداد هم‌مهندسان برق وارد رشتهٔ کامپیوتر شدند و تعداد کمتری هم از سایر رشته‌های علوم ومهندسی. احساس‌من‌این است که شاید بتوان وفور ریاضیدانان را صرفاً به‌علت نفوذ و نقش اولیهٔ مهم فون‌نویمان توجیه‌کرد که ریاضیدان بزرگی بود وبه‌هررشتهٔ‌فعالیتی که وارد می‌شد تعدادی مرید وهمکاراورا دنبال می کردند. جالب‌توجه‌است که‌درآغاز نقش بسیاری از ریاضیدانان بیشتر در طراحی سخت‌افزار کامپیوتر بود ونه در آن چیزهایی که امروز نرم‌افزار خوانده می‌شود. با پیشرفت تکنولوژی الکترونیکی و نیمه‌هادیها، مسائل سخت‌افزاری به‌طور فزاینده‌ای به‌مسائل صنعتی تبدیل شدند و از اینرو رشتهٔ سخت‌افزار کامپیوتر نیز متناسباً پیوندی روزافزون با رشتهٔ الکترونیك پیداکرد. در این اثناء ظاهراً استدلالی‌دربعضی جاها پدید آمدکه طبعاً رشتهٔ نرم‌افزارکامپیوتر هم باید به‌نوعی‌با رشتهٔ ریاضی پیوند بخورد. البته قسمتهایی ازعلوم مربوط به‌کامپیوتر، مانند نظریهٔ پیچیدگی محاسبه و بخشی از نظریهٔ الگوریتمها ماهیت صد درصد ریاضی دارند و به‌عنوان شاخه‌هایی مشروع از ریاضیات مطرح‌اند. ولی نرم‌افزارکامپیوترعمدتاً این‌چیزها نیست. نرم‌افزارکامپیوتر با برنامه‌سازی عملی، بانکهای اطلاعاتی، سیستمهای‌تجاری وبرخی مقوله‌های دیگرنزدیك به‌سخت‌افزارسروکار داردکه اساساً سنخیتی با رشتهٔ ریاضی ندارند. این مباحث نظریه‌های ریاضی نیستند ونوع مهارتی که می‌طلبند بیشتر از تجربهٔ عملی، احاطه بر اطلاعات خاص، درك مشکلات کاربردی، و آشنایی با امکانات سخت‌افزاری ناشی‌می‌شود. به‌عقیدهٔ من گنجاندن این مقولات در رشتهٔ ریاضی و اصولاً در علوم پایه،وصله‌ای ناجور است که با اهداف و سیستمهای ارزشی حاکم برد و رشته سازگار نیست. اصولاً علوم پایه با مکاشفه سروکار دارند (در مورد ریاضیات، مکاشفه درساختارهای فکری) ولی رشتهٔ کامپیوتر(به‌استثنای یکی دوموضوع ذکرشده)کارش مکاشفه نیست، بلکه اهدافی عملی را پیگیری می کند وجایگاه آن در میان رشته‌های مهندسی است. این‌که باید یك بخش کامپیوتر جداگانه داشت یا باید رشتهٔ کامپیوتر را بین رشته‌های مختلف مثل مهندسی برق و مهندسی صنایع تجزیه‌کرد، مسأله‌ای است که باید درهر دانشگاه با درنظرگرفتن‌مقتضیات محلی حل کرد. ولی‌شکی نیست که نوعی‌هویت خاص‌برای رشتهٔ‌کامپیوتروعاملان‌آن درحال تکوین است یا هم‌اکنون تثبیت شده است. و به‌نظرمی‌آیدکه روندآینده به‌سوی‌تشکیل بخشهای مستقل‌کامپیوتر است.

در اینجا باید افزودکه در بعضی دانشگاههای جهان، نوعی‌رشتهٔ ریاضی‌کاربردی یا انفورماتیك ریاضی‌درست شده است که دانشجویان این رشته مخلوطی از درسهای ریاضی، آمار،کامپیوتر (نرم‌افزار) و مهندسی‌صنایع را مطالعه می کنند. فارغ‌التحصیلان این‌رشته می‌توانند افراد بسیارمفیدی‌درعرصهٔ عمل‌باشند. به‌نظرمن دایرکردن‌چنین‌رشته‌ای به‌عنوان یکی از شاخه‌های بخشهای ریاضی دانشگاهی بسیار بجاست به‌شرط اینکه با رشتهٔ ریاضی به‌معنای واقعی آن اشتباه نشود. مدت کوتاهی پس از انقلاب فرهنگی، رشته‌ای با این خصوصیات در دانشگاههای ما وجودداشت ولی‌متأسفانه قبل ازآنکه ارزیابی دقیقی از عملکرد آن صورت گیرد، بدون ذکر دلیل قانع کننده‌ای منحل‌شد.

حال می‌پردازم به‌سؤال دوم: یعنی اثرکامپیوتر بر رشتهٔ ریاضی. جالب توجه است که با وجود نقش اولیهٔ مهم تعدادی از ریاضیدانان در دوران اولیهٔ رشتهٔ کامپیوتر، ریاضیدانان خیلی دیر به‌سلك استفاده‌کنندگان ازکامپیوتر پیوسته‌اند. از یك نظر این عجیب نیست، چون کمتر در ریاضیات اتفاق می‌افتدکه کار مهمی درگرو نتیجهٔ یك محاسبهٔ خاص باشد و اولین استفاده‌های‌کامپیوتر، دقیقاً در انجام دادن چنین محاسبه‌هایی بود. ولی جنبهٔ دیگرکار این است که هرنظریهٔ مهم و ماندنی ریاضی برپشتوانه‌ای غنی از مثالها و حالات خاص استوار است و چه بسا نیاز به‌سازماندهی‌این مصادیق متفرقه،یك نظریهٔ جامع و فراگیر ریاضی را ایجاب‌کرده است. برخلاف تصور عمومی، ریاضیدانها هم‌آزمایشگر هستند، حیطهٔ آزمایش‌آنهامفاهیم ریاضی، و وسایل‌آزمایش‌آنها تا پیش‌ازدوران‌اخیر صرفاً قلم وکاغذ بوده است. مشاهده و تعمق در الگوهایی که‌مثالهای خاص ظاهر می‌سازند، منجر به‌حدسهای‌اولیه وبالاخره‌صورتبندی واثبات قضیه‌های‌ریاضی‌می‌شود. در ریاضیدانان میل‌به‌آزمایشگری شدت وضعف دارد. بعضی اویلر را بزرگترین آزمایشگرریاضیات در تاریخ قلمداد می کنند. به‌طورکلی، قبل از قرن اخیر،عموم ریاضیدانها محاسبه‌گرهای‌ماهری نیز بودندو بخصوص‌درزمینه‌هایی نظیرنظریهٔ اعداد وآنالیزکلاسیك حالات خاص و فرمولهای بخصوص را با دقت زیادی آزمایش می کردند، و به‌نظر می‌رسدکه‌قدرت آزمایش ومشاهدهٔ انسان غیرمسلح درقبل‌از قرن‌بیستم به‌اوج‌خود رسیده باشد. با ابداع کامپیوتر،نخست‌رشته‌هایی‌مانند نظریهٔ اعداد و حساب ترکیباتی حربهٔ نیرومندتری برای تجسس وآزمایش یافتند. در حال حاضر با به‌کار گرفتن کلیهٔ توانایی‌های‌کامپیوتر، حتی زمینه‌های هندسی نیزکم‌کم دارند از برکات آزمایش و تجربه متمتع می‌شوند. این پدیده نباید اینگونه تعبیر شود که کامپیوتر دارد جای ریاضیات را می گیرد. همان‌طورکه فیزیك تجربی، فیزیك نظری را منسوخ نکرده‌است، بلکه‌با کشف پدیده‌های‌جدیدوارزیابی‌پیش‌بینی‌های نظری، به‌رونق و غنای آن افزوده است، آزمایشهای ریاضی هم درآینده رشد ریاضیات نظری راتسریع خواهندکرد. البته درهرشاخه از ریاضیات که امکانات تجربیات‌کامپیوتری بیشتر باشد، امکان رشد وگسترش بیشتر فراهم است، ولی در حال حاضر نمی‌توان به‌وضوح پیش‌بینی کردکه‌کدام رشته‌های ریاضیات بیشترازاین پیشرفت بهره‌ور خواهند شد. بعضی از ریاضیدانان حرفهای افراطی در این زمینه می‌زنند وپیش‌بینی‌هایی از این‌قبیل می کنند که مجموعه‌ای‌ازریاضیات که تحت عنوان«ریاضیات گسسته»از آن یاد می‌شود، درآینده هیولایی خواهد شدکه‌برهمهٔ ریاضیات سایه خواهد افکند. این‌پیش‌بینی‌هاخیلی

خام است، بیشتر جنبهٔ تبلیغاتی وشعاری دارد،واساساً امکانات عظیمی راکه کامپیوتر در اختیار همهٔ رشته‌های ریاضی قرارداده است نادیده می گیرد.امروز دیگر کامپیوتر صرفاً یك‌دستگاه شمارش نیست که‌فقط‌در کارهای ترکیباتی‌ومحاسباتی به‌کار آید. به‌علاوه هرچقدرهم که‌امکانات استفاده ازکامپیوتر در «ریاضیات گسسته» زیاد باشد، رشد واقعی این رشته منوط به آن است که دست‌اندرکارانش نظریات واقعاً جامع و فراگیری ارائه کنند.

ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ

درکشور ما، رشتهٔ کامپیوتر ابتدا در جوار دانشکده‌های ریاضی و پس ازچندسال، در دانشکده‌های مهندسی برق‌دایر گردید. ولی‌در کشورهای صنعتی، درست عکس این اتفاق افتاد. دلیلش هم واضح است. آنها از ساخت کامپیوتر شروع کردند و بعد به‌کاربردهایش پرداختند و ما ابتدا کامپیوتر را از دید یك استفاده‌کننده شناختیم.

در هرصورت، هردومسیر به‌نتیجهٔ واحدی می‌رسند و آن، این‌است که سخت‌افزار ونرم‌افزار کامپیوتر (یا به‌عبارت دیگر، ساخت وکاربرد کامپیوتر) از یکدیگر قابل تفکیك نیستند و نمی‌توان یکی را بدون توجه به‌دیگری آموخت. به‌عنوان دلیلی بردرستی ادعای فوق،می‌توان به‌این نکته اشاره کرد که امروزه گرایش تکنولوژی کامپیوتر درجهت استفادهٔ هرچه وسیعتر از ریزکامپیوترهاست و این ماشینهای کوچك برخلاف دستگاههای بزرگ، توسط متخصصان گوناگون سخت‌افزار و نرم‌افزار احاطه نشده‌اند، بلکه عموماً به‌وسیلهٔ یك متخصص کامپیوتر اداره می‌شوند.

برای‌تعیین جایگاه صحیح‌رشتهٔ‌کامپیوتردرنظام آموزش‌دانشگاهی، باید ابتدا به‌دو سؤال زیرپاسخ داد:

۱. آیا رشتهٔ‌کامپیوتر یك رشتهٔ علمی است یا یك رشتهٔ مهندسی؟
۲. رشتهٔ‌کامپیوتر با سایر رشته‌ها خصوصاً ریاضیات و مهندسی برق چه رابطه‌ای دارد؟

سؤالات فوق و نظایر آنها تقریباً از بدو پیدایش رشتهٔ کامپیوتر مطرح بود و درکشور ما نیز طی سالهای اخیر مورد توجه قرارگرفته است. برای پاسخ دادن به‌سؤال اول، مروری برتعاریف متداول دو واژهٔ «علم» و «مهندسی» ضروری است.

علم: (۱) مجموعهٔ آگاهیهای حاصل ازمطالعهٔ سیستماتیك.
(۲) واقعیتها وحقایقی که به‌نظم درآمده وقوانین کلی را نشان دهند.
مهندسی: (۱) هنر استفاده از آگاهیهای علمی درکاربردهای عملی.
(۲) حرفهٔ ساخت وکاربرد دستگاهها و سیستمها.

با توجه به این تعاریف، شکی باقی نمی‌ماند که رشتهٔ کامپیوتردارای هردو جنبهٔ علمی ومهندسی است. متأسفانه یکی از عواملی که باعث سوءتعبیر دراین مسأله شده است،کاربرد اشتباه ولی بسیار رایج اصطلاحات «علوم‌کامپیوتر» و «مهندسی کامپیوتر» به‌عنوان معادلهایی برای «مباحث مربوط به‌نرم‌افزارکامپیوتر» و «مباحث مربوط به‌سخت‌افزارکامپیوتر» است. این‌غلط‌مصطلح، باعث‌شده تا «مهندسی‌کامپیوتر» همواره با رشتهٔ «الکترونیك رقمی» مترادف تلقی شده و بنابراین، بخشی ازرشتهٔ مهندسی‌برق درنظرگرفته شود. البته با رواج‌روزافزون اصطلاحات جدیدی چون «مهندسی نرم‌افزار» و «مهندسی‌اطلاعات»، این اشتباه به‌تدریج تصحیح خواهد شد.

اما دربارهٔ ارتباط کامپیوتر با سایر زمینه‌ها، بایدگفت رابطهٔ این رشته‌با دیگررشته‌ها بسیاروسیع است‌ودر بسیاری‌ازآنها تحولات‌اساسی به‌وجودآورده است.دراین میان،دو رشته بیش‌از بقیه با رشتهٔ‌کامپیوتر درارتباط‌اند: ریاضیات و مهندسی برق. دریك دیدکلی،می‌توان فصل مشترك رشتهٔ‌کامپیوتر با مهندسی برق را دربخشی ازالکترونیك رقمی و فصل مشترك‌آن را با ریاضیات، دربخشی از ریاضیات عملی گسسته دانست (درمورد اخیر، به‌تفصیل درپاسخ سؤال دوم بحث می کنم).

نکتهٔ بسیار قابل توجه، این است که «الگوریتم» (به‌مفهوم امروزی آن)، یعنی محور اصلی رشتهٔ کامپیوتر وچیزی که هم‌طرز کار سخت‌افزار و نرم‌افزار را تشریح می‌کند وهم علت وجودی آنها را تشکیل می‌دهد، خارج ازحیطهٔ ریاضیات ومهندسی برق قراردارد.

گسترش روزافزون مفاهیم‌خاص رشتهٔ‌کامپیوتر، به‌نحوچشمگیری درحال‌کاستن از فصول مشترك این رشته با ریاضیات و مهندسی برق است و می‌توان پیش‌بینی کرد که در آینده‌ای نه‌چندان دور، این سه رشته به‌صورت مستقل از یکدیگردرخواهند آمد. بنابر آنچه‌گفته شد، ارائهٔ تصویرکاملی از رشتهٔ‌کامپیوتر در قالب یکی ازدو رشتهٔ‌ریاضیات یا مهندسی برق مقدور نخواهد بود و روش ایده‌آل این است که‌رشتهٔ کامپیوتر را مستقلاً حول محور اصلی آن یعنی مفهوم «الگوریتم» بنا کرد و ازهم‌اکنون به‌پیشواز آینده رفت.

دراینجا، بی‌مناسبت نیست که درمورد ماهیت رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاههای کشورمان نیز مطلبی گفته شود. اگر بپذیریم که آشنایی با تکنولوژی‌کامپیوتر وکاربرد آن، برای براورده‌کردن نیازهای واقعی امروز وآمادگی برای‌حل‌مسائل فردای کشورمان لازم است،می‌توانیم هدف آموزش دانشگاهی در رشتهٔ کامپیوتر را آموزش افرادی بدانیم که:

الف) با پی‌ریزی تکنولوژی داخلی‌کامپیوتر، حرکت به‌سوی عدم وابستگی در زمینه‌های سخت‌افزار و نرم‌افزار را آغاز کنند.
ب) به‌نحو مؤثری از تکنولوژی کامپیوتر در خدمت تعالی و رفاه جامعه بهره‌گیری کنند.
پ) به‌طرح واجرای برنامه‌های آموزش اولیه و بازآموزی در سطوح وتخصصهای مختلف رشتهٔ کامپیوتر بپردازند.

مانند بسیاری از رشته‌های علمی و فنی دیگر، در رشتهٔ کامپیوتر نیز متخصصینی برای آیندهٔ نزدیك مورد نیاز کشور ما هستند که‌بتوانند با دید علمی وتجربهٔ عملی مناسب، مسائل تولیدی وکاربردی را که‌در عمل با آنها برخورد می کنند، به‌نحو رضایت‌بخشی تحلیل کرده و در جهت‌حلشان گام بردارند. به‌این جهت باید از به‌وجودآوردن تخصصهای محدود اجتناب کرد و برعکس، علاوه برتأکید بر هر دو جنبهٔ سخت‌افزار و نرم‌افزار به‌صورت نظری و عملی، کسب تجربه از طریق کارآموزی را نیز درآموزش دانشگاهی این رشته گنجاند.

ضمناً، بااغتنام از فرصت متذکرمی گردد که در کنار بررسی «جایگاه رشتهٔ‌کامپیوتر در نظام آموزش دانشگاهی» لازم است اصولاً بررسی جامعی نیزدرمورد «جایگاه انفورماتیك درجامعهٔ کنونی ما» به‌عمل آید. هم‌اکنون جای خالی آموزش مقدماتی این رشته درمقطع دبیرستان به‌وضوح به‌چشم می‌خورد و باید هرچه زودتر به‌این مهم پرداخته شود. همچنین آموزش کلی انفورماتیك در رسانه‌های همگانی مانند تلویزیون با توجه به‌سروکار داشتن ناگزیر کلیهٔ افراد اجتماع با کاربردهای مختلف کامپیوتر امری ضروری است. باید با آموزش سادهٔ اصول‌کار کردکامپیوترها به‌ازبین‌بردن جو رعب ازکامپیوتردراجتماع و القاء بینش‌صحیحی از طرزعمل این ماشینها به‌جامعه همت گماشت.

اما درمورد ارتباط علم‌کامپیوتر با ریاضیات، از آنجایی‌که علم

کامپیوتر نسبتاً جدید است، باید ابتدا روشن کنیم که این علم چه موضوعاتی را در برمی گیرد. به‌نظر می‌رسد که افراد مختلف غالباً تصورات متفاوتی از این رشته از علوم دارند. شاید حتی تنوان دو متخصص علوم کامپیوتر را پیداکرد که تعریف مشابهی از علم کامپیوتر ارائه نمایند. بهترین طریقه‌ای که برای تشریح علم کامپیوتر به‌نظر می‌رسد این است که آن را «مطالعهٔ الگوریتمها» بدانیم. شایدمهمترین دستاورد حاصل از پیدایش الگوریتمها این باشد که الگوریتم، به‌عنوان‌موضوعی برای‌مطالعه، فوق‌العاده غنی ودارای خواص جالبی است واین‌که دارا بودن یک دید الگوریتمی، به‌طور کلی به‌سازمان دادن اطلاعات کمك شایسته‌ای می کند.

باتوجه به‌این نکات، می‌توان نتیجه گرفت که قاعدتاً علم کامپیوتر باید خیلی پیش از اختراع کامپیوترها وجود می‌داشته است. از یك نظر، چنین نیز هست واین موضوع ریشهٔ تاریخی عمیقی دارد.

کلمه‌ای که فرانسویها وآلمانیها برای علم کامپیوتر به‌کارمی برند، انفورماتیك است. دانمارکیها آن را Datalogy (داده‌شناسی)می نامند. نروژیها اسم نسبتاً مناسبتری‌را انتخاب کرده‌اند: Databehandling (دستکاری‌داده‌ها) که تقریباً معادل‌داده‌پردازی‌یا پردازش‌داده‌ها است.

پدیده‌هایی که در پیرامون علم کامپیوتر وجود دارند، بی‌اندازه متفاوت و پیچیده‌هستندومانندالکتریسیته، به‌هردو شاخهٔ علوم ومهندسی تعلق دارند. الگوریتمها قبل از به‌وجود آمدن علوم‌کامپیوتر، توسط ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بنابراین با محدودکردن تعریف علم کامپیوتر به‌مطالعهٔ الگوریتمها، آیا می‌توان گفت‌که این هستهٔ مرکزی علم‌کامپیوتر بخشی از ریاضیات است؟ به‌عقیدهٔ من با استدلال مشابهی نیز می‌توان نتیجه گرفت که ریاضیات بخشی از علم کامپیوتر است! حال آن‌که فکر می کنم هیچکدام از این‌دو موضوع صحت ندارد. البته بسیار مشکل است که حد و مرز دقیقی بین این دو رشته قائل شد ولی می‌توان نظرگاههای مختلف ریاضیات و علم کامپیوتر را دقیقاً مشخص کرد. مثال زیررا درنظر بگیرید: قضیه‌ای‌در ریاضی بدین مضمون وجود دارد: هردو ماتریس A و B از اعداد صحیح با ابعاد n در n دارای «بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سمت راست» مانند D هستند. به عبارت دیگر، D مقسوم‌علیه سمت راست A و B است،یعنی $A=A'D$ و $B=B'D$ (A' و B' ماتریسهای متشکل از اعداد صحیح هستند) به‌طوری که هرمقسوم‌علیه مشترك سمت راست A و B، مقسوم‌علیه سمت راست D نیز هست.مسأله،چگونگی محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سمت راست دو ماتریس توسط‌کامپیوتر است: پاسخ و راه‌حل ریاضی این مسأله چنین است: «فرض کنیدکه R حلقهٔ ماتریسهای n در n متشکل از اعداد صحیح باشد.دراین‌حلقه، مجموع دو ایده‌آل اصلی سمت‌چپ، خود «اصلی» است. ماتریس D را طوری درنظر بگیریدکه داشته باشیم: $RA+RB=RD$ دراین صورت، D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سمت‌راست A و B است.»

فرمول فوق مطمئناً ساده‌ترین فرمولی است‌که می‌توان نوشت. برای نوشتن‌آن تنها به‌هشت علامت نیاز داریم! اما جواب فوق از نظرگاه متخصص کامپیوترجواب بی‌ارزشی است زیرا متضمن ساختن مجموعه‌های نامتناهی RA و RB، به‌دست آوردن مجموع آن‌دو و سپس جستجو دربین تعداد نامتناهی از ماتریسهای D به‌نحوی‌که مجموع قبلی با مجموعهٔ نامتناهی RD مطابقت‌کند، است.

امروزه‌علم‌کامپیوتر مانند ریاضیات، موضوعی‌پایه‌ای درآموزش عمومی است ومانند ریاضیات تاحدودی با سایرعلوم متفاوت است زیرا درآن، قوانین به‌وسیلهٔ انسانها وضع می‌گردند وقابل اثبات نیز هستند حال آنکه قوانین طبیعی هرگز به‌طورکامل شناخته نشده‌اند.

تفاوتی‌که بین ریاضیات وعلم‌کامپیوتر وجود دارد،درموضوعات مورد بحث ونحوهٔ عمل‌است. ریاضیات بیشتر با قضایا، فرارونده‌های نامتناهی، و روابط ایستا مواجه است ولی به‌عکس، علم کامپیوتر با الگوریتمها، ساختهای متناهی، و روابط پویا سروکار دارد.

به‌نظر من، ریاضیات بسیار شبیه شعر است. شعر ناب، شعری است‌که اندیشه‌های بسیار را با کلمات معدود بیان کند. به‌این اعتبار،فرمولهایی مانند

$$e^{\pi i}+1=0$$

یا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\pi$$

شعرند. براین اساس، به‌هرکسی می‌توان توضیح دادکه شعرچیست؛ ولی‌اگراو مثلاً انگلیسی نداند، نمی‌تواند شعر انگلیسی را خوب بفهمد چون شعر ناب ترجمه‌پذیر نیست. شخصی‌که در ادبیات کلاسیك یونان دستی دارد، به‌من می‌گفت‌که پیندارروس یکی از بزرگترین شاعران تمامی اعصار است. وقتی جویای ترجمهٔ خوبی از اشعار شاعر یونانی شدم پاسخ دادکه شعرپیندارروس‌را بایدبه‌یونانی خواندو یا به‌کلی ازآن چشم پوشید. این حرف در ریاضیات نیز صادق است: یا باید بتوانید ازنمادها استفاده‌کنید،ویا به‌کلی از مطالعهٔ ریاضی چشم‌بپوشید.

ازمصاحبهٔ لیپمن برس ریاضیدان امریکایی (که اصلاً از اروپای شرقی است) با مجلهٔ *The College Mathematics Journal*، شمارهٔ ۴، جلد ۱۸، سپتامبر ۱۹۸۷.

خمهـای جبـری

سیاوش شهشهانی*

همهٔ ما درهندسهٔ تحلیلی دبیرستان با خمهای جبری درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲ آشنا شده‌ایم. اگر $p(x, y)$ یك چندجمله‌ای با دومتغیر x و y باشد، مجموعهٔ نقاط (x, y) درصفحه که درمعادلهٔ $p(x, y) = 0$ صدق می‌کنند یك خم جبری خوانده می‌شود. مقصود از درجهٔ این خم، بالاترین درجه در بین درجات جمله‌های $p(x, y)$ است. مثلاً $3x^5y^2 - 4x^6 + x^2y^3 - x + 1 = 0$ یك خم درجهٔ هفت را تعریف می‌کند (توانهای جملات، به‌ترتیب از چپ به‌راست، عبارت‌اند از: $7 = 2 + 5$، ۶، $5 = 3 + 2$، ۱، ۰). هر خم درجهٔ یك، معادله‌ای به‌شکل $ax + by + c = 0$ دارد، یعنی یك خط راست است. خمهای درجهٔ دوم از تنوع بیشتری برخوردارند. دایره، بیضی، سهمی، و هذلولی، ونیز تعدادی موارد استثنایی، خمهای درجهٔ دوم را تشکیل می‌دهند (تابلوی ۱). این خمها را می‌توان از برخورد یك صفحه ویك مخروط به‌دست آورد وازاینرو به‌مقاطع مخروطی نیز معروف‌اند. معرفی مقاطع مخروطی به‌منایخموس[1] از آکادمی افلاطون نسبت داده می‌شود. آپولونیوس در قرن سوم پیش از میلاد به‌کشفیات مهمی در مورد مقاطع مخروطی دست یافت وکتاب مقاطع مخروطی او که دراسکندریه به‌رشتهٔ تحریردرآمد، از مهمترین آثار باقیمانده از ریاضیات یونان باستان است. بررسی عمیق مقاطع مخروطی توسط یونانیان ازبارزترین نمونه‌های فعالیت پیگیرانه در ریاضیات محض درعهد باستان است. یونانیان آتن‌واسکندریه تنها باتکیه زدن به‌روشهای استدلال‌هندسی، بسیاری از ویژگیهای مقاطع مخروطی را دریافتند. وبه‌نظرمی‌آیدکه هیچگونه انگیزهٔ کاربردی آنها را در این کوشش یاری نکرده باشد. (گواینکه ادعا شده که ممکن است مسائل مربوط به‌ساعتهای آفتابی توجه یونانیان را به‌ویژگیهای مقاطع مخروطی جلب کرده باشد.)

در واقع اولین کاربردهای علمی و صنعتی مقاطع مخروطی قرنها بعد در دورهٔ رنسانس اروپا مطرح شد. در آغاز قرن هفدهم میلادی کپلر به‌شکل بیضوی مدار سیارات پی‌برد، و در اواخر همان قرن قانون جاذبهٔ نیوتن مشخص ساخت که مسیر حرکت یك ذره در میدان جاذبهٔ مرکزی، باید یکی ازمقاطع مخروطی باشد. ویژگی بازتابی مقاطع مخروطی (تابلوی ۱) نیز درساختن تلسکوپهای بازتابی مورد بهره‌گیری قرارگرفت. اگراز یك نقطهٔ سهمی دوخط، یکی به‌موازات محور سهمی و دیگری به‌کانون سهمی، رسم شوند، این دوخط با مماس برسهمی در نقطهٔ ترسیم، زاویهٔ برابر می‌سازند. بدین‌ترتیب هرگاه آینهٔ سهموی تلسکوپ به طرف یك شیء سماوی دور دست گردانده شود، اشعهٔ آن شیء پس‌ازبرخورد با آینه، درکانون متمرکز شده و تصویر دقیقی به‌دست می‌دهند.

1. Menaechmus

تابلوی ۱. مقاطع مخروطی

کلیترین چند جمله‌ای درجهٔ دوم را در نظر بگیرید:

$$p(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

تنها محدودیتی که قائل می‌شویم این است که A، B، و C توأما صفر نباشند. مکان هندسی $p(x, y) = 0$ بدیکی از صورتهای زیر است:

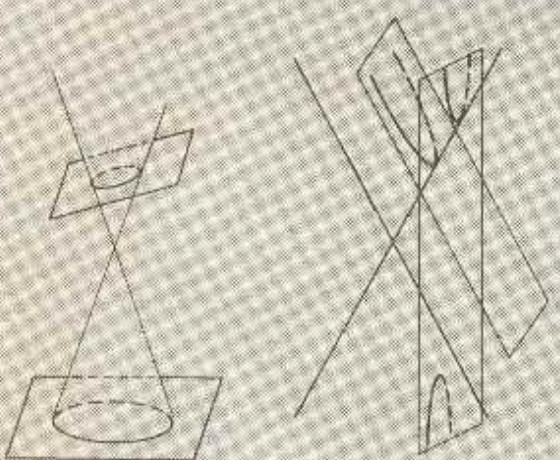
(الف) بیضی (شامل دایره)، هذلولی، و سهمی

این سه نوع خم، انواع اصلی (ناتباهیده، غیر استثنایی) مقاطع مخروطی محسوب می‌شوند.

(ب) دوخط متقاطع، دوخط موازی، یا دوخط منطبق برهم

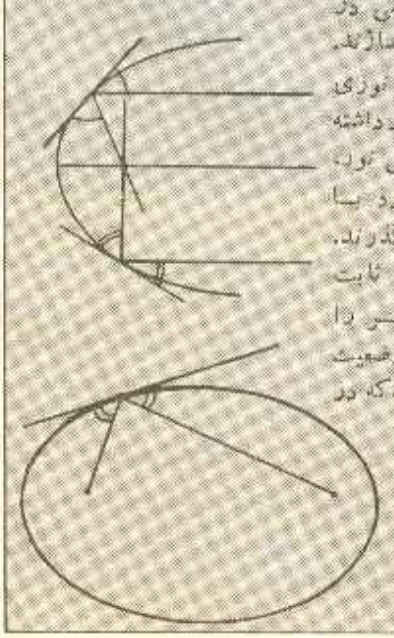
(ج) یك نقطه

(د) تهی



همهٔ حالات فوق به‌استثنای مکان هندسی تهی ودوخط موازی را می‌توان از برخورد یك صفحه با یك مخروط دوار دوپارچه به‌دست آورد.

ازمهمترین ویژگیهای مقاطع مخروطی، ویژگی بازتابی است که در زیر برای بیضی و سهمی نمایش داده شده است. اگر از یك نقطهٔ بیضی خطوطی به‌دوکانون بیضی رسم کنیم، این دو خط با مماس بر بیضی در آن نقطه زاویهٔ برابر می‌سازند. بدین‌ترتیب هرگاه منبع نوری در یك کانون بیضی قرارداشته باشد، بنابر قانون انعکاس نور، اشعهٔ آن پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر می‌گذرند. اگر یك کانون بیضی را ثابت نگاهداشته کانون دیگر را به‌نهایت سوق دهیم، وضعیت حدی سهمی پدید می‌آید که در متن تشریح شده است.



تابلوی ۲. پیچکوار دیوکلس

دایره‌ای به‌قطر واحد را در صفحهٔ دکارتی در نظر بگیرید که از دو نقطهٔ $O=(0,0)$ و $(1,0)$ می‌گذرد. از O خط l را رسم کنید تا خط $x=1$ را قطع کند. اگر R نقطهٔ برخورد باشد، نقطهٔ P روی خط l را طوری اختیار کنید که طول OP با طول QR برابر شود. (طبق شکل، Q نقطهٔ دیگر برخورد خط با دایرهٔ مفروض است.) با تغییر l، نقطهٔ P خمی رسم می‌کند که به پیچکوار دیوکلس معروف است. برای به‌دست آوردن معادلهٔ این خم، مختصات P را با (x,y) نمایش می‌دهیم. محاسبات زیر براساس ریاضیات دبیرستان انجام می‌شود

$$\cos\theta=\overline{OQ}=\overline{OR}-\overline{OP}$$
$$=\sec\theta-x\sec\theta$$

پس $\cos^2\theta=1-x$، یا $x^2/(x^2+y^2)=1-x$ که از آن معادلهٔ $x^3+xy^2-y^2=0$ نتیجه می‌شود. برای $x\neq 0$، این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{y}{1-x} \qquad (*)$$

برای ترسیم ریشهٔ سوم طول D، از نقطهٔ $(0,D)$ خطی به $(1,0)$ رسم می‌کنیم تا پیچکوار را در نقطهٔ (x,y) قطع کند. ادعا می‌کنیم که خط گذرنده از O و (x,y)، در نقطهٔ $(1,\sqrt[3]{D})$ خط $x=1$ را قطع می‌کند و بدین ترتیب $\sqrt[3]{D}$ برابر مختص y این نقطه است. محاسبه با استفاده از مثلثهای متشابه صورت می‌گیرد

$$\frac{D}{y}=\frac{1}{1-x}$$
$$\frac{z}{y}=\frac{1}{x}$$

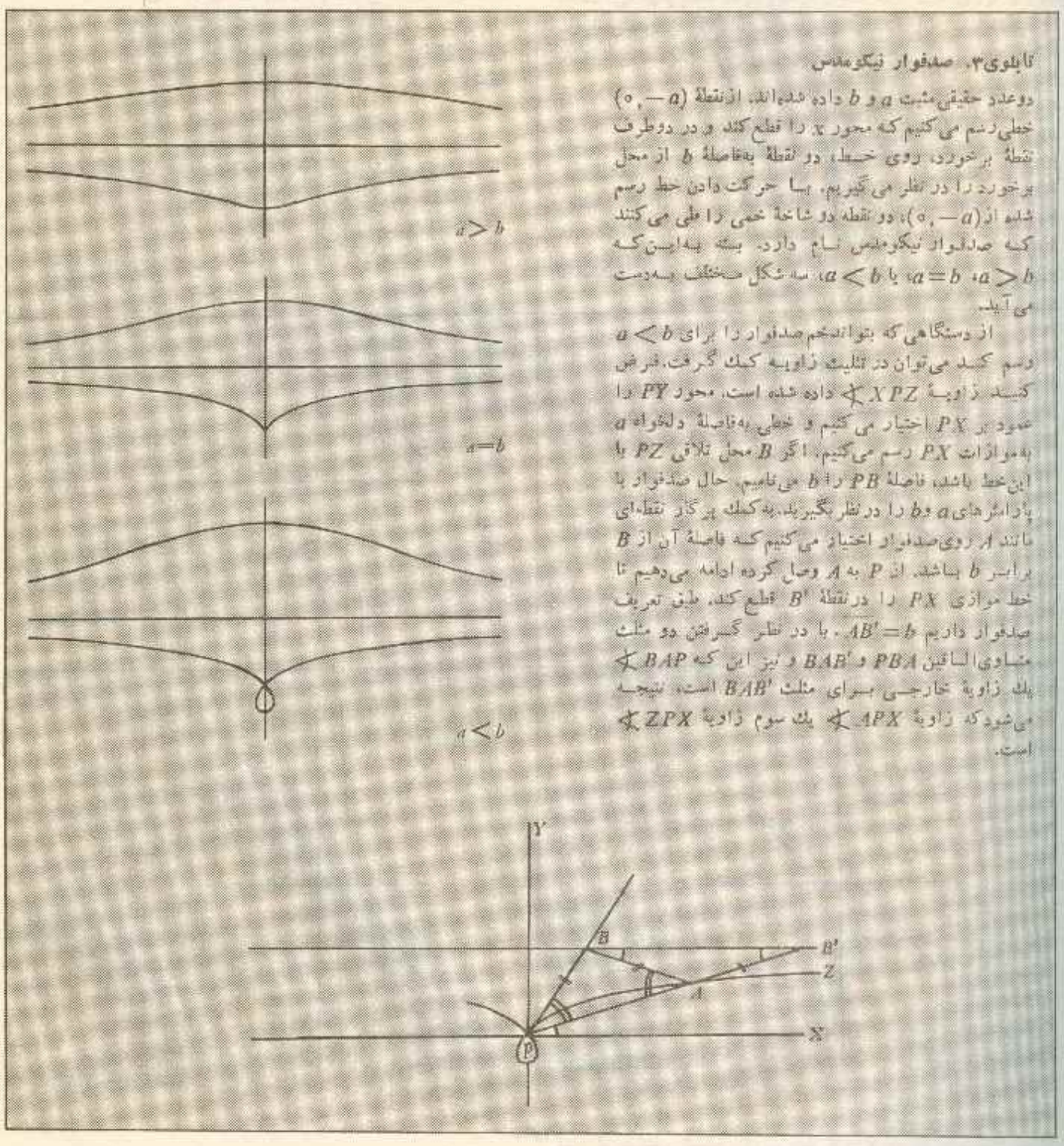
پس با توجه به $(*)$، نتیجه می‌شود که $z=\sqrt[3]{D}$.

شایان ذکر است که مفاهیم جبری بودن یک خم و درجهٔ یک خم جبری به‌طور صریح برای ریاضیدانان باستان مطرح نبودند و این مفاهیم بعدها با ابداع هندسهٔ تحلیلی صورتبندی شدند. یونانیان تعدادی خم جبری و غیرجبری را به‌خاطر ویژگیهای هندسی جالب توجهشان مد نظر قرار دادند. در اینجا، به‌طور خلاصه، دو خم جبری دیگر را نیز که در قرن دوم قبل از میلاد توسط ریاضیدانان اسکندریه مورد مطالعه قرار گرفتند تشریح می‌کنیم. «پیچکوار»[1] خمی است که دیوکلس[2] برای حل مسألهٔ «تضعیف مکعب» ابداع کرد. یکی از مسائل کلاسیک ریاضیات باستان، ساختن مکعبی است که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد. اگر طول ضلع مکعب داده شده را a بگیریم، طول ضلع مکعب مطلوب برابر $a\sqrt[3]{2}$ است، پس مسأله به ترسیم طول $\sqrt[3]{2}$ منجر می‌شود. (یونانیان از روش ساختن حاصلضرب دو طول، در اینجا a و $\sqrt[3]{2}$، آگاهی داشتند.) کوشش یونانیان برای ترسیم طول $\sqrt[3]{2}$ (با دردست داشتن طول واحد) به‌وسیلهٔ خط‌کش غیرمدرج و پرگار به‌جایی نرسید (که البته عدم امکان این امر قرنها بعد ثابت شد)، ولی دیوکلس نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از خم پیچکوار، ریشهٔ سوم هر طول را رسم کرد (تابلوی ۲). در صفحهٔ مختصات دکارتی، پیچکوار یک خم درجهٔ سوم با معادلهٔ $x^3+xy^2-y^2=0$ است. این معادله را می‌توان به‌شکل $(y/x)^3=y/(1-x)$، $x\neq 0$، نیز نوشت. با تعمیم این خم به خم درجهٔ nام

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n=\frac{y}{1-x},\quad x\neq 0$$

می‌توان به‌روشی مشابه با روشی که در تابلوی ۲ توصیف شد، ریشهٔ nام هر طول را رسم کرد.

1. cissoid 2. Diocles



تابلوی۳. صدفوار نیکومدس

دوعدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. از نقطهٔ $(0,-a)$ خطی رسم می‌کنیم که محور x را قطع کند و در دوطرف نقطهٔ برخورد، روی خط، دو نقطهٔ به‌فاصلهٔ b از محل برخورد را در نظر می‌گیریم. با حرکت دادن خط رسم شده از $(0,-a)$، دو نقطه دو شاخهٔ خمی را طی می‌کنند که صدفوار نیکومدس نام دارد. بسته به‌این‌که $a>b$، $a=b$ یا $a<b$، سه شکل مختلف به‌دست می‌آید.

از دستگاهی که بتوانخم صدفوار را برای $a<b$ رسم کند می‌توان در تثلیث زاویه کمک گرفت. فرض کنید زاویهٔ $\angle XPZ$ داده شده است. محور PY را عمود بر PX اختیار می‌کنیم و خطی به‌فاصلهٔ دلخواه a به‌موازات PX رسم می‌کنیم. اگر B محل تلاقی PZ با این خط باشد، فاصلهٔ PB را b می‌نامیم. حال صدفوار با پارامترهای a و b را در نظر بگیرید. به‌کمک پرگار نقطه‌ای مانند A روی صدفوار اختیار می‌کنیم که فاصلهٔ آن از B برابر b باشد. از P به A وصل کرده ادامه می‌دهیم تا خط موازی PX را در نقطهٔ B' قطع کند. طبق تعریف صدفوار داریم $AB'=b$. با در نظر گرفتن دو مثلث متساوی‌الساقین PBA و BAB' و نیز این که $\angle BAP$ یک زاویهٔ خارجی برای مثلث BAB' است، نتیجه می‌شود که زاویهٔ $\angle APX$ یک سوم زاویهٔ $\angle ZPX$ است.

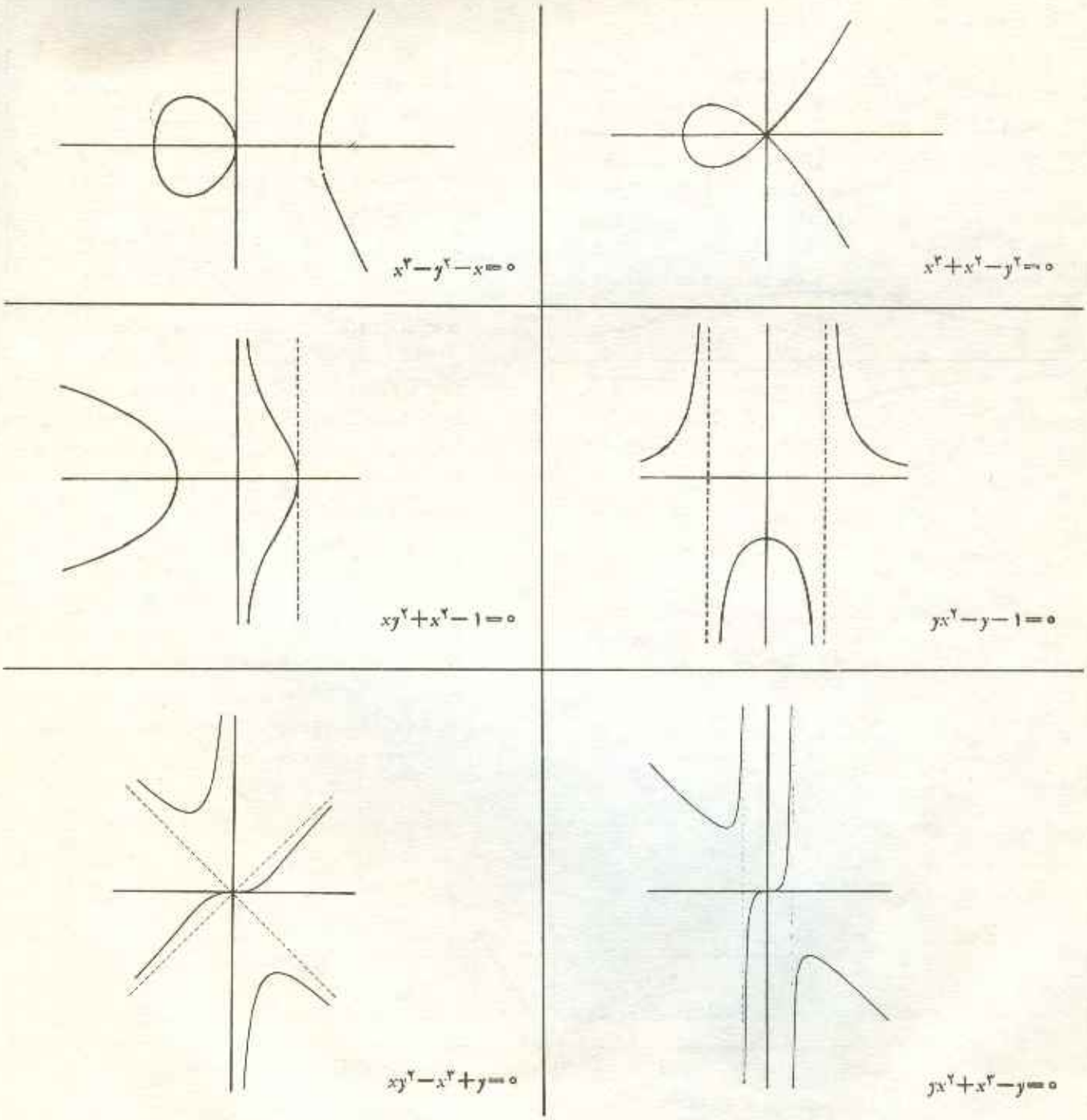
یکی دیگر ازمسائل معروف ریاضیات باستان، مسألهٔ «تثلیث زاویه» یا تقسیم زاویهٔ مفروض به‌سه زاویهٔ برابر است. این مسأله نیز با خطکش غیرمدرج و پرگار حل‌شدنی نیست، ولی نیکومدس[1] با اختراع خم صدفوار[2]، و ساختن دستگاهی برای ترسیم آن، روشی برای تثلیث زاویه ارائه کرد (تابلوی۳). صدفوار نیز یک خم جبری است از درجهٔ چهار، و با معادلهٔ

$$x^2y^2-(y+a)^2(b^2-y^2)=0$$

که در آن $a>0$ و $b>0$ پارامترهای دلخواه مفروض‌اند.

با کمی تجربهٔ ترسیم خم درهندسهٔ تحلیلی، به‌روشنی دیده می‌شود که با ازدیاد درجه، تنوع اشکال خمها نیز به‌سرعت بیشتر می‌شود. در شکل۱ شش نمونهٔ دیگر از خمهای درجهٔ ۳ نمایش داده شده‌اند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان با برگزیدن خصوصیاتی، یک رده‌بندی کامل از خمهای درجهٔ سه ودرجه‌های بالاتر ارائه کرد؟ به‌عبارت دیگر، همچنان که خمهای درجهٔ دوم همه مقاطع مخروطی هستند، آیا نظام مشترکی بر خمهای درجهٔ سه یا درجه‌های بالاتر حکمفرماست؟ برای جواب دادن به‌این سؤال باید از هندسهٔ افکنشی یاری بگیریم.

1. Nicomedes 2. conchoid



شکل ۱

هندسهٔ افکنشی

هندسهٔ افکنشی(یا هندسهٔ تصویری) درقرن هفدهم میلادی توسط معمار فرانسوی دزارگ[1] پایه‌گذاری شد و پس از آنکه بیش از یك قرن تقریباً فراموش شده بود، در قرن نوزدهم پونسله[2] آن را احیا کرد و تا اواخر آن قرن به‌اوج قوام خود رسید تاجایی که ریاضیدان بزرگ انگلیسی کیلی[3] برای آن جایگاهی مرکزی در کلیهٔ مباحث هندسی قائل شد. برای تشریح این نوع هندسه و درك ارتباط آن با مسائل مورد بررسی، فرض می‌کنیم که صفحهٔ مختصات موردبحث ما درواقع صفحهٔ $Z=1$ در فضای سه‌بعدی (X, Y, Z) است. بدین‌ترتیب‌همهٔ خمهای ذکر شده در فضای سه‌بعدی جای دارند هرچندکه به‌طور مسطح در صفحهٔ $Z=1$ قرارگرفته‌اند. منبع نوری را تصور کنیدکه ازمبدأ مختصات O، یعنی نقطهٔ $(0, 0, 0)$، نور می‌افکند. اکنون می‌توانیم سایهٔ هرخم در صفحهٔ $Z=1$ را روی صفحاتی که از O نمی‌گذرند بررسی کنیم. مثلاً دایرهٔ $X^2+Y^2=1$، $Z=1$، را در نظربگیرید. برای یافتن سایهٔ این خم روی صفحه‌ای مانند π، از O خطوط راستی به‌نقاط خم رسم می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا صفحهٔ π را قطع کنند. پس در واقع سایهٔ خم روی π، مکان برخورد π با

1. Desargues 2. Poncelet
3. Cayley

مخروط توری است که خطوط مرسوم از O به‌خم پدید می‌آورند، یعنی مقاطع مخروطی‌سایه‌های دایره هستند. معمولاً هردوبخش‌مخروط درنظر گرفته می‌شوند تا یك شاخهٔ هذلولی حذف نشود. این قرارداد را ما همواره اعمال خواهیم کرد.

مطالب هندسی فوق را به‌طور تحلیلی بیان می‌کنیم. اگرخم $p(X,Y)=0$، $Z=1$، داده شده باشد، نقاط واقع برخط رسم‌شده از O به نقطهٔ $(x, y, 1)$ از خم، مختصاتی به‌شکل $(X, Y, Z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda)$ دارندکه در آن، λ همهٔ مقادیرحقیقی را می‌گیرد. چون سایهٔ خم فقط روی صفحاتی‌که ازمنبع نورنگذرند معنی دارد، نقطهٔ O را از این خط حذف می‌کنیم، یعنی‌فرض می‌کنیم $\lambda\neq 0$. بدین‌ترتیب $p(x, y)=0$ تبدیل می‌شود به

$$p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)=0$$

اگر $p(x, y)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، دست‌کم یك جملهٔ $p(X/Z, Y/Z)$ دارای مخرج Z^n خواهد بود، بنابراین ملاحظه می‌شودکه $Z^n p(X/Z, Y/Z)$ یك چندجمله‌ای با متغیرهای X، Y، Z است‌که همهٔ جملات‌آن از درجهٔ n هستند. این چندجمله‌ای را به $p^*(X, Y, Z)$ نمایش خواهیم داد. به‌طور کلی، یك چندجمله‌ای‌که درجهٔ همهٔ جملات آن n باشد، یك چندجمله‌ای همگون درجهٔ n خوانده می‌شود.

بدین‌ترتیب، مشاهده می‌شودکه به‌هر نقطهٔ صفحهٔ $Z=1$، یك‌خط راست‌گذرنده از O (منهای خود O) نظیر می‌شودکه شامل کلیهٔ سایه‌های بالقوهٔ آن نقطه است. به‌عکس، هر خط گذرنده از Oکه در صفحهٔ $Z=0$ قرار نداشته باشد، یعنی موازی صفحهٔ $Z=1$ نباشد، صفحهٔ $Z=1$ را در نقطهٔ منحصر به‌فردی قطع می‌کند، و از اینرو تناظری یك‌به‌یك میان این خطوط ونقاط صفحهٔ $Z=1$ برقرار می‌شود. برای سهولت بیان، از این پس خطوط راست‌گذرنده از O را پرتو خواهیم نامید. با پرتوهای واقع در صفحهٔ $Z=0$ چه باید کرد؟ در زیرخواهیم دیدکه می‌توان هریك از این پرتوها را به‌گونه‌ای طبیعی با «نقطه‌ای بینهایت دور» از صفحهٔ $Z=1$ متناظر ساخت.

یك خط راست در صفحهٔ $Z=1$ درنظر بگیرید. پرتوهای‌نظیر نقاط این خط، یك صفحهٔ گذرنده از O را تشکیل می‌دهند. به‌همان ترتیبی‌که در بالا دیدیم، تناظری یك‌به‌یك میان خطوط راست واقع بر $Z=1$ و صفحات گذرنده از O (به‌استثنای صفحهٔ $Z=0$) برقرار می‌شود. صفحهٔ استثنایی $Z=0$ شامل پرتوهای موازی $Z=1$ است. توجه‌کنیدکه نقطهٔ مشترك دو خط متقاطع l و l' در صفحهٔ $Z=1$ متناظرمی‌شود با پرتویی‌که اشتراك صفحات نظیر به l و l' است. حال وضعیت دوخط موازی l و l' در صفحهٔ $Z=1$ را درنظربگیرید. این دوخط نقطهٔ مشترکی در $Z=1$ ندارند ولی صفحات متناظر با آنها در یك پرتو واقع در $Z=0$ یکدیگر را قطع می‌کنند. اکنون می‌توانیم صفحهٔ افکنشی را بدین‌صورت تعریف کنیم: این «صفحه» از دو دسته نقطه تشکیل شده است، یك‌دسته «نقاط عادی»که می‌توان آنهارا نقاط صفحهٔ $Z=1$ یامعادلاً پرتوهای غیرموازی با این‌صفحه تلقی کرد. و دستهٔ دیگر، «نقاط بینهایت دور»که متناظرند با پرتوهای واقع برصفحهٔ $Z=0$. هر«خط راست» در صفحهٔ افکنشی ازیك خط راست عادی به‌علاوهٔ یك نقطهٔ بینهایت دور (پرتو تلاقی صفحهٔ نظیر خط، و صفحهٔ $Z=0$) تشکیل شده است. هرنقطهٔ صفحهٔ افکنشی را به‌یك سه‌تایی $[X, Y, Z]$ نمایش می‌دهیم که نباید آن‌را با سه‌تایی (X, Y, Z) اشتباه‌کرد. مقصود از (X, Y, Z) یك نقطه درفضای سه‌بعدی است، ولی $[X, Y, Z]$ نمایش پرتویی است که از نقطهٔ (X, Y, Z) می‌گذرد. بدین‌ترتیب، $[X, Y, Z]$ وقتی معنی داردکه هرسه مؤلفهٔ آن، X، Y، و Z، توأماً صفر نباشند، و برای هر عدد حقیقی غیرصفر λ داریم

$$[\lambda X, \lambda Y, \lambda Z]=[X, Y, Z]$$

از نظر جبری، اگر $aX+bY+c=0$، $Z=1$، معادلهٔ یك خط راست باشد، معادلهٔ صفحهٔ نظیر با این خط عبارت است از $aX+bY+cZ=0$؛ پس تلاقی‌آن با $Z=0$ عبارت است ازخط راست $X/(-b)=Y/a=Z/0$، یعنی‌نقطهٔ بینهایت دور خط، نمایشی به‌صورت $[b, -a, 0]$ دارد. توجه‌کنیدکه این نقطه تنها به‌ضریب زاویه (شیب، یعنی نسبت a — به b) از خط راست بستگی دارد. پس‌هردسته خطوط موازی در $Z=1$ در واقع یك نقطهٔ مشترك بینهایت دور دارند. صفحهٔ افکنشی را با علامت $\mathbf{P}$ نمایش خواهیم داد.

به‌طورکلی اگر خم جبری $p(X, Y)=0$، $Z=1$، را درنظر بگیریم، مخروطی‌که با ترسیم خطوط از رأس O برنقاط این خم حاصل‌می‌شود معادله‌ای به‌شکل $p^*(X,Y,Z)=0$ دارد. باقراردادن $Z=1$دراین‌رابطه، نقاط عادی‌خم‌به‌دست‌می‌آیند، و به‌ازای $Z=0$، نقاط بینهایت دورخم حاصل‌می‌شوند. مکان هندسی $p^*(X,Y,Z)=0$ در صفحهٔ افکنشی، تکمیل‌افکنشی‌خم $p(x, y)=0$ خوانده می‌شود. آنچه تکمیل افکنشی اضافه بر خم جبری اولیه دارد، نقاط بینهایت دور خم است.

به‌عنوان مثال، سه مقطع مخروطی $x^2+y^2=1$ (دایره)، $x^2-y^2=1$ (هذلولی)، و $y=-x^2$ (سهمی) را درنظربگیرید. تکمیلهای افکنشی این سه خم به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$X^2+Y^2-Z^2=0$$

$$X^2-Y^2-Z^2=0$$

$$X^2-YZ=0$$

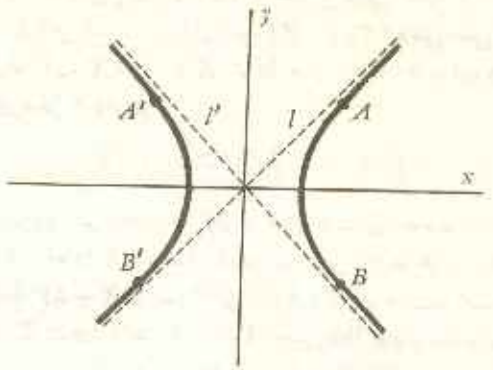
خم اول نقطهٔ بینهایت دور ندارد، خم دوم دو نقطهٔ بینهایت دور $[1, 1, 0]$ و $[1, -1, 0]$ را داراست، وخم سوم یك نقطهٔ بینهایت دور در $[0, 1, 0]$ دارد. به‌تعبیر این مطلب می‌پردازیم. درشکل ۲، چهار نقطهٔ A، A' و B' روی هذلولی $x^2-y^2=1$ مشخص شده‌اند. می‌توان A، B، A'، و B' را به‌ترتیب به $[X, Y, 1]$، $[X, -Y, 1]$، $[-X, Y, 1]$، و $[-X, -Y, 1]$ نمایش داد که درآن $X>0$ و $Y>0$. داریم

$$A=[X, Y, 1]=\left[1, \frac{Y}{X}, \frac{1}{X}\right]$$

$$B=\left[1, -\frac{Y}{X}, \frac{1}{X}\right]$$

$$A'=\left[1, -\frac{Y}{X}, -\frac{1}{X}\right]$$

$$B'=\left[1, \frac{Y}{X}, -\frac{1}{X}\right]$$



شکل ۲

حال این چهار نقطه را روی شاخه‌ای که بر آن قرار دارند تدریجاً از مبدأ مختصات دور می‌کنیم ($X \to \infty$ و $Y \to \infty$). می‌بینیم که A و B' به نقطهٔ بینهایت دور $[1, 1, 0]$ (= نقطهٔ بینهایت دور خط مجانب، l) نزدیک می‌شوند، و A' و B به نقطهٔ بینهایت دور $[1, -1, 0]$ (= نقطهٔ بینهایت دور خط مجانب دیگر، l') نزدیک می‌گردند. بدین ترتیب با افزودن دو نقطهٔ بینهایت دور به هذلولی، شاخه‌های مقابل هذلولی به‌یکدیگر وصل می‌شوند وهذلولی به‌یک خم بسته تبدیل می‌گردد! بررسی مشابهی نشان می‌دهد که تکمیل افکنشی $y = x^2$ نیز یک‌خم بسته است. (نقطهٔ بینهایت دور مهمی، دوسر آن‌را به‌هم وصل می‌کند.)

بحث فوق را که درمورد چند مقطع مخروطی خاص بود، می‌توان درمورد هر بیضی، هذلولی، و سهمی عنوان کرد و مشاهده می‌شود که تکمیل افکنشی هریک از این خمها، یک خم بسته است. به‌همین ترتیب[۱] با گذر به $\mathbf{P}$، تمایز میان دو خط متقاطع و دوخط موازی (دوحالت استثنایی تقاطع مخروطی) نیز ناپدید می‌شود زیرا که دو خط موازی یکدیگر را دریک نقطهٔ بینهایت دور قطع می‌کنند. بنابراین ملاحظه می‌شود که توسل به‌صفحهٔ افکنشی موجب می‌گردد که از تنوع اشکال خمهای درجهٔ دوکاسته شود.

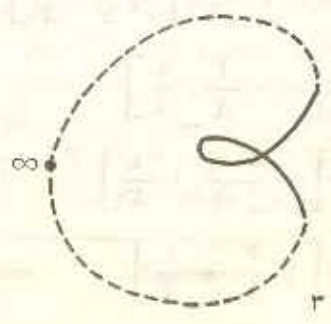
درمورد خمهای از درجات بالا نیز، تکمیل افکنشی به بسیاری از خمها که اشکال کیفی متفاوتی دارند، شکل واحدی می‌بخشد. به سه خم طرف راست شکل ۱ نگاه‌کنید. تکمیل افکنشی این سه خم، به‌ترتیب از بالا به‌پایین، عبارت‌اند از

$$X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0$$

$$YX^2 - YZ^2 - Z^3 = 0$$

$$YX^2 + X^3 - YZ^2 = 0$$

ملاحظه می‌کنیم که با تعویض اسامی متغیرها، این سه معادله دقیقاً به‌هم تبدیل می‌شوند: تکمیل افکنشی هرسه خم طرف راست، شکل واحدی است! این شکل واحد یک خم بسته است که خود را قطع می‌کند (شکل ۳).

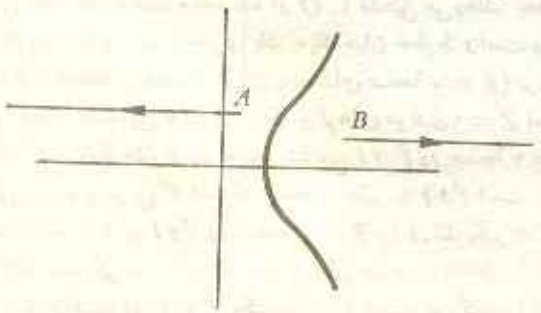


شکل ۳

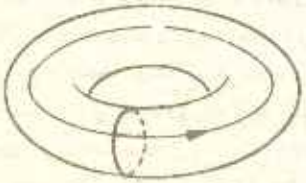
حال وحدت این سه شکل را از نظرگاه دیگری که مطرح شد، (پرتو به‌جای نقطه) مورد بررسی قرارمی‌دهیم. خم بالای سمت راست شکل ۱ را درصفحهٔ $Z = 1$ تجسم می‌کنیم. مخروطی که از رأس O روی این خم ساخته می‌شود دارای معادلهٔ $X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0$ است. سایهٔ خم روی صفحهٔ $X = 1$ عبارت است از $Y^2Z - Z - 1 = 0$، که اگر دراین عبارت به‌جای Y، حرف x و به‌جای Z، حرف y را قرار دهیم، خم دوم سمت راست شکل ۱ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب سایهٔ خم روی صفحهٔ $X = 1$، شکلی مانند خم پایین سمت راست است.

دراینجا ازخواننده دعوت می‌شود که به‌روشهای مشابه نشان دهد که سه خم سمت چپ شکل ۱ نیز هرسه‌تکمیلهای افکنشی متحدالشکل دارند. مشاهده خواهد شد که تکمیل افکنشی هر شکل از دو خم بستهٔ مجزا تشکیل شده است. درمورد خم $x^3 - y^2 - x = 0$، یکی از خمهای بسته در صفحهٔ دکارتی مشاهده می‌شود؛ دو سر بخش دیگر خم نیز با افزودن یک نقطهٔ بینهایت دور به‌یکدیگر وصل می‌شوند. نکتهٔ قابل‌توجه این‌است که خم بستهٔ دوم، علی‌رغم بسته بودن، صفحهٔ افکنشی را به دوجزء تقسیم نمی‌کند، یعنی مکمل آن در $\mathbf{P}$، در واقع یک مجموعهٔ همبند (به‌هم متصل) است! برای ملاحظهٔ این موضوع، به‌شکل ۴ توجه کنید که در آن دونقطهٔ A و B در دوطرف این شاخهٔ خم در نظر گرفته شده‌اند. حال هریک ازاین دونقطه را درجهت نمایش داده شده درطول خط افقی به‌بینهایت سوق می‌دهیم. دونیمخط افقی که موازی هستند در یک نقطهٔ مشترک بینهایت دور به‌هم می‌رسند. بدین‌ترتیب می‌توان A و B را با یک مسیر پیوسته به‌یکدیگر وصل کرد بی‌آنکه مسیر، منحنی بسته را (در $\mathbf{P}$) قطع کند. اینکه شهود هندسی ما حکم می‌کند یک خم بسته باید سطح محیط اطراف خود را به دوبخش تجزیه‌کند، در واقع نشانی از این است که توجه ما به‌صفحهٔ اقلیدسی و سطح کره محدود است که این ویژگی را دارند. مثالهای خلاف، بسیار فراوان‌اند و به‌صفحهٔ افکنشی محدود نمی‌شوند. لولهٔ نوار موبیوس (شکل ۵) یک‌نمونه است، دوایر «مدار» و «نصف‌النهار» روی یک چنبره (شکل ۶) مثالهای دیگرند.

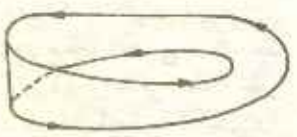
دراین بخش کوشش کردیم نشان دهیم که با گذر از صفحهٔ عادی (اقلیدسی) به‌صفحهٔ افکنشی، ازتنوع اشکال خمهای جبری کاسته‌می‌شود. آیا



شکل ۴



شکل ۶



شکل ۵

ایجادوحدت درمیان‌خمهای ظاهراً گوناگون در $\mathbf{P}$، به‌نوعی رده‌بندی کامل‌خمهای جبری منجر می‌گردد؟ مسألهٔ رده‌بندی کیفی (توپولوژیك) خمهای جبری در واقع محتوای (نیمی از) مسألهٔ شانزدهم هیلبرت است که درحال حاضر حل کامل آن در افق دیده نمی‌شود. قبل از پایان این مقاله مجدداً به این موضوع باز خواهیم گشت، ولی پیش از آن لازم است که گام مهم دیگری در وحدت بخشیدن به خمهای جبری برداریم.

صفحهٔ افکنشی مختلط

در بخش پیشین دیدیم که پنج نوع متمایز خم درجهٔ دوم در $\mathbf{P}$ وجود دارد: یك خم بسته (شامل بیضی، هذلولی، وسهمی)، دوخط متقاطع (که در واقع هرخط افکنشی یك خم بسته است)، دوخط منطبق برهم، یك نقطه، ومجموعهٔ تهی. در اینجا دوحالت آخر به گونه‌ای نسبتاً قصتر از انواع دیگر می‌نمایند. تصویر ذهنی ما ازشکل خم، شیئی یك‌بعدی است که از تداوم کشیدن قلم روی کاغذ پدید می‌آید. مسلماً یك تك‌نقطه‌ای یا مجموعهٔ تهی را نمی‌توان خم نوعی تلقی کرد. دراین بخش می‌بینیم که وضعیت غیرعادی این دونوع مکان هندسی تنها ناشی از مشکلات جبری کارکردن با اعداد حقیقی است (به‌طور خلاصه، اینکه ۱ — جذر حقیقی ندارد!)، وچنانچه اعداد مختلط را جایگزین اعداد حقیقی کنیم، این دونوع خم درانواع دیگر جذب خواهند شد.

یادآوری می‌کنیم که نقاط صفحهٔ افکنشی به صورت سه‌تایی‌های $[X, Y, Z]$ نمایش داده می‌شوند که در آن اعداد حقیقی X، Y، و Z توأماً صفر نیستند، و به‌علاوه برای $\lambda \neq 0$، سه‌تایی‌های $[X, Y, Z]$ و $[\lambda X, \lambda Y, \lambda Z]$ برابر فرض می‌شوند. دراین بخش، X، Y، Z، و λ را اعداد مختلط می‌گیریم، مجموعهٔ حاصل را صفحهٔ افکنشی مختلط می‌نامیم و به $\mathbf{CP}$ نمایش می‌دهیم. سایرتعاریف و قراردادها به‌قوت خود باقی هستند. مثلاً یك «خط راست» در این صفحه، مجموعهٔ $[X, Y, Z]$ هایی است که در رابطه‌ای به شکل $aX+bY+cZ=0$ صدق کنند (a، b، و c اعداد مختلط مفروض و دلخواه‌اند، تنها با این محدودیت که هرسه توأماً صفر نباشند). یك خم جبری درجهٔ nام، مجموعهٔ $[X, Y, Z]$هایی است که در رابطه‌ای به‌شکل $p^*(X, Y, Z)=0$ صدق کنند، که دراینجا $p^*(X, Y, Z)$ یك چندجمله‌ای همگون درجهٔ n با ضرایب مختلط است.

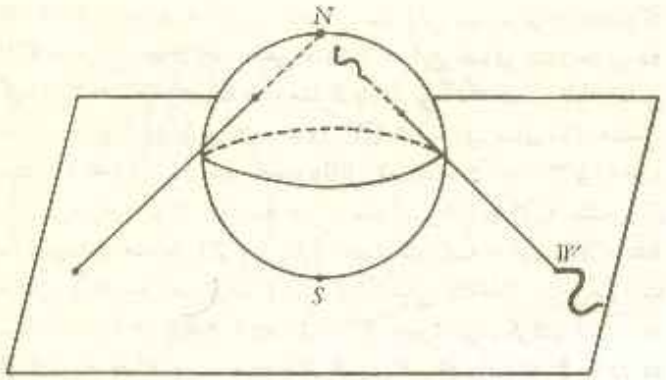
شکل یك خم در $\mathbf{CP}$ چگونه است؟ به‌عنوان ساده‌ترین مثال، شکل یك خط راست را بررسی می‌کنیم. در آغاز، خط $X=0$ را درنظر بگیرید. نقاط این خط به‌شکل $[0, Y, Z]$ هستند که در آن Y و Z اعداد مختلط‌اند و توأماً صفر نمی‌باشند. برای $Z=0$، لزوماً $Y\neq 0$، پس

$$[0, Y, 0]=[0, 1, 0]$$

یعنی تنها یك نقطه به‌شکل $[0, Y, 0]$ روی این خط وجود دارد (چون $Z=0$، این در واقع نقطهٔ بینهایت دور خط است). برای $Z\neq 0$، داریم

$$[0, Y, Z]=[0, Y/Z, 1]$$

حال با تغییر Y و Z درقلمرو اعداد مختلط، Y/Z کلیهٔ مقادیرمختلط را می‌پذیرد. پس درمجموع تاظری یك‌به‌یك میان نقاط خط $X=0$ ازیك‌سو، واعداد مختلط به‌اضافهٔ یك نقطهٔ بینهایت دور ازسوی‌دیگر، وجود دارد. به‌علاوه اگر Y/Z را به W نمایش دهیم، نقطهٔ $[0, Y, Z]$ را می‌توان به $[0, 1, 1/W]$ نیز نمایش داد، وملاحظه



شکل ۷

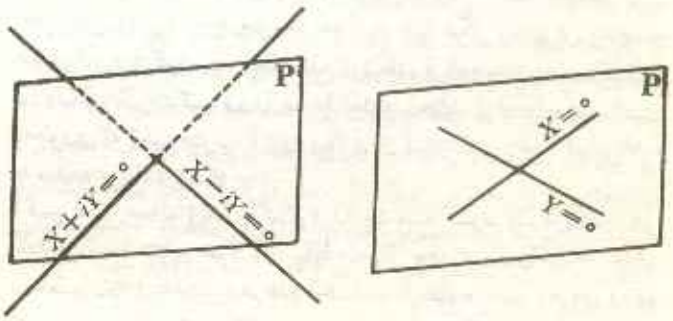
می‌شود که هرطور که عدد مختلط W به‌بینهایت میل کند (یعنی $|W|$ به‌طور بیکران بزرگ شود)، نقطهٔ $[0, Y, Z]$ به‌نقطهٔ بینهایت دور خط، یعنی $[0, 1, 0]$، میل خواهد کرد. تنها شکل (توپولوژیك) که متضمن این ویژگیهاست، شکل سطح کرهٔ معمولی (دوبعدی) است. کره‌ای را درنظر بگیرید که روی صفحهٔ اعداد مختلط قرار داده شده است به‌طوری که قطب جنوب آن روی O قرار گرفته‌است ونقطهٔ تماس کره با صفحه می‌باشد (شکل ۷).

اگر قطب شمال (N، درشکل) را یك منبع نور فرض کنیم، هر نقطهٔ کره، به‌استثنای خود N، سایهٔ منحصر به‌فردی روی صفحهٔ اعداد مختلط دارد؛ و به‌عکس، هرعدد مختلط سایهٔ نقطهٔ منحصر به‌فردی روی کره است. حال اگر نقطهٔ W روی صفحهٔ اعداد مختلط را به‌هرطریقی از مبدأ دورکرده به‌بینهایت سوق دهیم ($|W|\to\infty$)، نقطهٔ متناظر روی کره مسیری به‌سوی قطب شمال طی‌خواهد کرد. بدین‌ترتیب خط $X=0$ راکره‌ای فرض می‌کنیم که نقطهٔ بینهایت دور آن متناظر با قطب شمال است وسایر نقاط درتناظری یك به‌یك با مجموعهٔ اعداد مختلط قرار دارند. همین نوع بحث را می‌توان درمورد هرخط راست $aX+bY+cZ=0$ در $\mathbf{CP}$ مطرح کرد، ودیده‌می‌شود که‌مدل‌هندسی مناسب برای خطوط راست در $\mathbf{CP}$، سطح کرهٔ دوبعدی است.

اینکه «خط راست» در $\mathbf{CP}$ یك شیء دو بعدی است در نگاه اول غریب به‌نظرمی‌رسد. ولی‌باید توجه داشت که همچنان که مجموعهٔ اعداد حقیقی یك خط راست اقلیدسی را مدرج می‌کند، اگر قرار باشد که صفحهٔ اعداد مختلط یك خط راست $\mathbf{CP}$ (منهای یك نقطه) را مدرج کند، دوبعدی بودن «خط راست» دیگر دور از ذهن نیست. به‌طور کلی، می‌توان ثابت کرد که هر خم جبری $p^*(X, Y, Z)=0$ در $\mathbf{CP}$ یك رویهٔ دوبعدی است، وبا وضع کردن محدودیتهایی روی ویژگیهای خمها، می‌توان اشکال مجاز برای این رویه‌ها را به‌طور کامل رده‌بندی کرد.

درآغاز به‌مقاطع مخروطی می‌نگریم و بخصوص دو وضعیت «غیرعادی» (مکان هندسی تك نقطه‌ای وتهی درصفحهٔ اقلیدسی) را در $\mathbf{CP}$ بررسی می‌کنیم، به‌عنوان مثالهای خاص (و درعین حال نمونه)، دوخم جبری $x^2+y^2=0$ و $x^2+y^2+1=0$ را درنظرمی‌گیریم که تکمیلهای افکنشی آنها به‌ترتیب عبارت‌اند از $X^2+Y^2=0$ و $X^2+Y^2+Z^2=0$. در $\mathbf{P}$، خم $X^2+Y^2=0$ از تنها نقطهٔ $[0, 0, 1]$ تشکیل شده است، ولی عبارت X^2+Y^2 در مجموعهٔ اعداد مختلط به‌صورت $X^2+Y^2=(X+iY)(X-iY)$ تجزیه می‌شود، پس $X^2+Y^2=0$ ازاجتماع دوخط راست $X+iY=0$ و $X-iY=0$ تشکیل شده است که درنقطهٔ $[0, 0, 1]$ متقاطع‌اند. البته هرخط راستی شکل کروی دارد و تجسم دوکرهٔ متقاطع (تنها در

یك نقطه) درفضای سه‌بعدی ممکن نیست، ولی باید توجه داشت که **CP** در واقع چهار بعد حقیقی دارد و در این فضای چهاربعدی، دو کره می‌توانند فقط دریك نقطه مشترك باشند بی‌آنکه در آن نقطه مماس باشند. بدین ترتیب، می‌بینیم که در **CP** تمایزی میان مکان هندسی $X^2+Y^2=0$ و دو خط راست «قابل‌رؤیت»، مثلاً $XY=0$، وجود ندارد. می‌توانیم **P** را به عنوان یك زیرفضای **CP** متشکل از سه‌تاییهای مختلط $[X, Y, Z]$ تصورکنیم که برای عدد مختلط مناسب λ، هرسه عدد λX، λY، و λZ حقیقی باشند. دراین‌صورت تنها تفاوت $XY=0$ و $X^2+Y^2=0$ نحوهٔ قرارگرفتن آنها در **CP** نسبت به **P** است. $XY=0$ طوری قرار داردکه **P** را در دو خط متقاطع می‌برد، ولی $X^2+Y^2=0$ فقط یك نقطهٔ مشترك با **P** دارد. در شکل ۸ این مطلب به‌طور شمایی مشخص شده است (این نمودارها به‌علت اینکه محدود به‌فضای دوبعدی‌اند، لزوماً ناقص‌هستند).



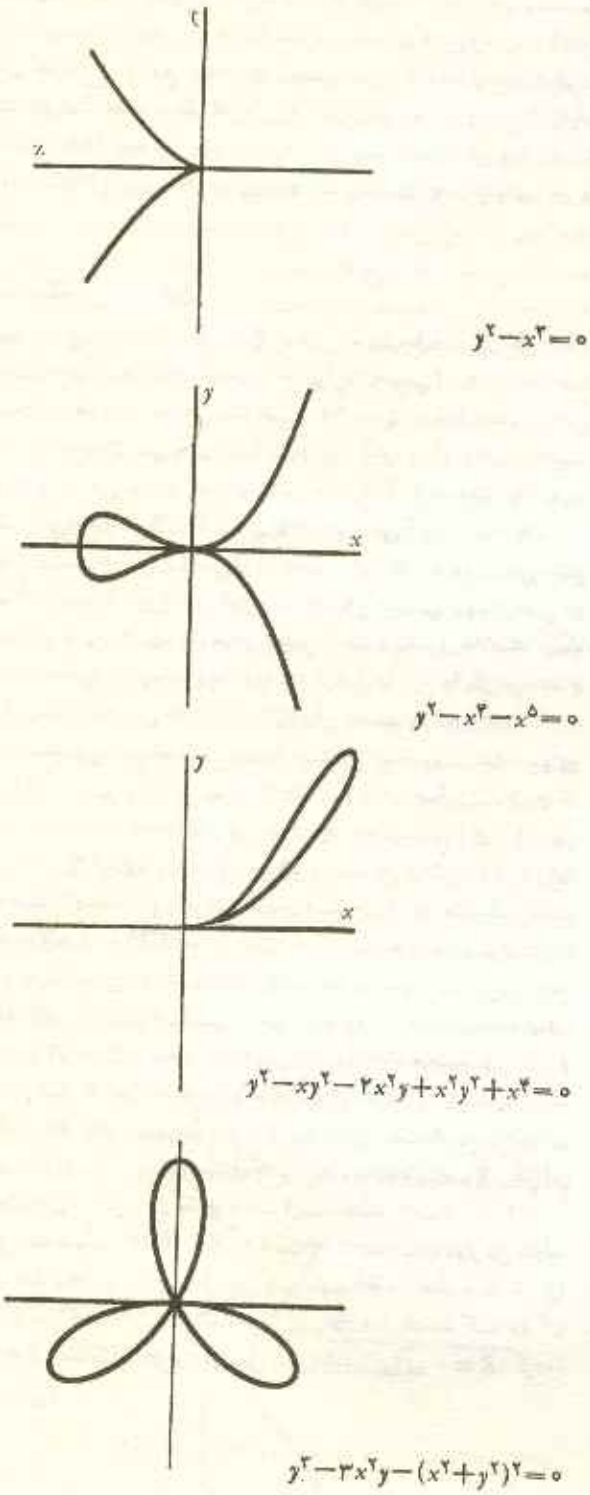
شکل ۸

مکان هندسی $x^2+y^2+1=0$ در صفحهٔ اقلیدسی، با متناظراً مکان هندسی $X^2+Y^2+Z^2=0$ در **P**، تهی است. ولی چنانچه X، Y، و Z مختلط فرض شوند، تمایز میان $X^2+Y^2+Z^2=0$ و $X^2+Y^2-Z^2=0$ (معادلهٔ دایره) ازمیان برداشته می‌شود زیراکه با قراردادن iW به‌جای Z درمعادلهٔ اول، این معادله تبدیل می‌شود به $X^2+Y^2-W^2=0$. با بحثی مشابه می‌توان نشان دادکه همهٔ موارد مقاطع مخروطی تك‌نقطه‌ای و تهی در **P** باگذر به **CP** ناپدید شده و به انواع دیگر مقاطع مخروطی می‌پیوندند. بزودی خواهیم دیدکه «شکل نوعی» یك مقطع مخروطی در **CP** یك کره است وحالت دوخط (کره) متقاطع یا منطبق برهم، به‌طور مجازی در زمرهٔ خمهای جبری درجهٔ دوم درمی‌آید. نکته این است که درموارد اخیر می‌توان عبارت درجهٔ دوم را به دوعبارت درجهٔ یك تجزیه کرد

$$p^*=q^*\cdot r^*$$

پس در واقع، مکان هندسی $p^*(X, Y, Z)=0$ اجتماع دو مکان هندسی $q^*(X, Y, Z)=0$ و $r^*(X, Y, Z)=0$ است که هریك یك خط راست (کره در **CP**) است. به طور کلی، یك چندجمله‌ای (یا خم جبری مربوط به‌آن) را تحویل‌ناپذیر روی هیأت K می‌نامیم هرگاه نتوان این چندجمله‌ای را به دو چندجمله‌ای از درجات پایینتر با ضرایبی در هیأت K تجزیه کرد. مثلاً X^2+Y^2 روی هیأت اعداد حقیقی تحویل‌ناپذیر است ولی روی هیأت اعداد مختلط به‌دوچندجمله‌ای $X+iY$ و $X-iY$ تجزیه می‌شود وتحویل‌ناپذیر نیست.

در بررسی خمهای از درجات بالاتر باید به‌پدیدهٔ دیگری که ظهور «نقاط تکین» است نیز توجه داشت. به‌خم «آلفا» (تصویر بالای سمت راست شکل ۱) توجه کنید. این خم خود را در نقطهٔ $(0, 0)$ قطع می‌کند ولی یك خم تحویل‌ناپذیر است. $(0, 0)$ یك «نقطهٔ تکین»



$y^2-x^3=0$

$y^2-x^4-x^5=0$

$y^2-xy^2-2x^2y+x^2y^2+x^4=0$

$y^3-3x^2y-(x^2+y^2)^2=0$

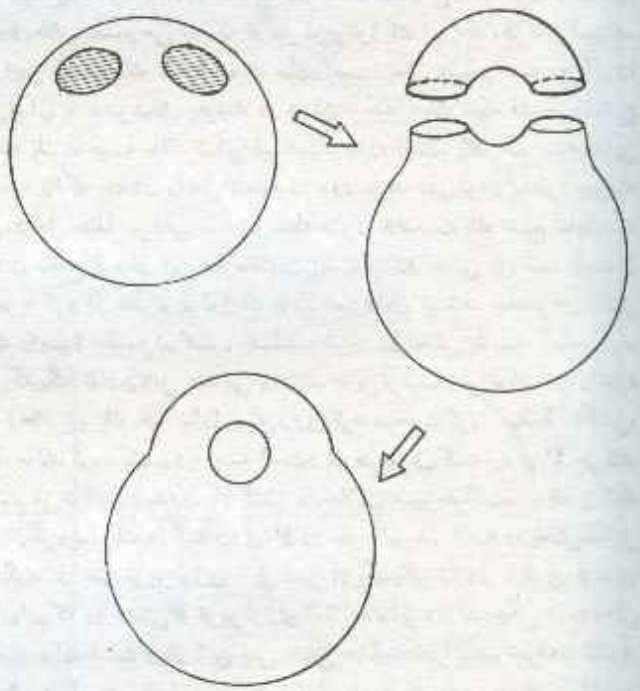
شکل ۹

برای خم محسوب می‌شود، واین در واقع ساده‌ترین نوع ازاین‌گونه نقطه‌هاست. نمونه‌های دیگری درشکل ۹ نمایش داده شده‌اند. تعریف کلی بدین‌صورت است: برای خم $p^*(X, Y, Z)=0$، نقطهٔ A واقع بر خم یك نقطهٔ تکین خوانده می‌شود اگرمشتقات p^* نسبت به هرسه متغیر X، Y، و Z در A صفر باشند

$$\frac{\partial p^*}{\partial X}(A)=\frac{\partial p^*}{\partial Y}(A)=\frac{\partial p^*}{\partial Z}(A)=0$$

برای خمهای $p(x, y) = 0$ درصفحهٔ دکارتی، شرط معادل این است که $\partial p/\partial x$ و $\partial p/\partial y$ درنقطهٔ موردبحث صفرشوند. یك خم جبری ناتکین‌خوانده می‌شود هرگاه فاقد نقاط تکین باشد. می‌توان به‌سادگی نشان دادکه هر خم درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر ناتکین است و از اینرو نقاط تکین درخمهای درجهٔ سه به‌بالا ظاهر می‌شوند.

در زیر قضیه‌ای بیان می‌کنیم به‌این مضمون که برخلاف خمهای حقیقی، کلیهٔ خمهای جبری تحویل‌ناپذیر ناتکین ازیك درجهٔ معین در **CP**، ازنظر توپولوژیك متحدالشکل هستند! برای این‌کار لازم است که به‌توصیف رویه‌هایی که از چسباندن نوعی «دسته» به‌کره پدید می‌آیند بپردازیم. مقصود ازیك «دسته»، استوانه‌ای با دو لبهٔ مدوراست (شکل ۱۰). روی سطح کره دوحفره ایجاد می‌کنیم و یك دسته را در طول لبه‌ها درمکان حفره‌ها به‌کره پیوند می‌زنیم. رویهٔ حاصل راکه



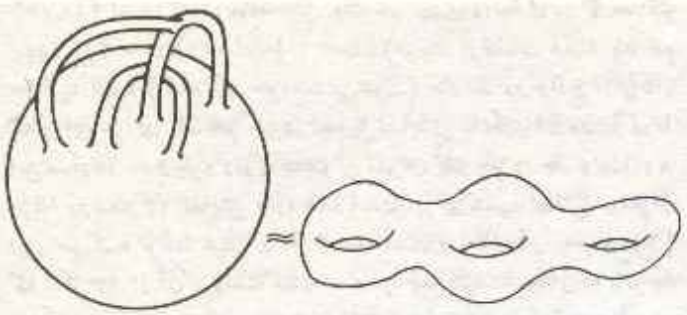
شکل ۱۰

می‌توان باکشاندن وصاف کردن به دلخواه هموار ساخت، یك کرهٔ یك دسته‌ای یا یك چنبره می‌نامند. می‌توان با تکرار این عمل، کرهٔ g دسته‌ای را با نصب g دسته درطول لبهٔ $2g$ حفره روی سطح کره ایجادکرد. توجه کنیدکه از نظر توپولوژیك، مکان ایجاد حفره‌ها و اندازهٔ آنها اهمیتی ندارد. کرهٔ g دسته‌ای، یك رویه ازگونهٔ g نیز نامیده می‌شود. درشکل ۱۱ دو رویه ازگونهٔ ۳ نمایش داده شده‌اند.

قضیهٔ موعود بدین صورت است: شکل توپولوژیك هرمنحنی تحویل‌ناپذیر ناتکین از درجهٔ d در **CP** یك رویه ازگونهٔ g است که در آن

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

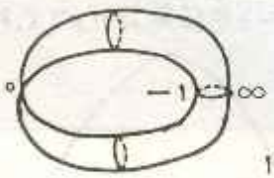
قبلاً اشاره‌کردیم که خمهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ دو فاقد نقطهٔ تکین هستند، پس برای $d = 2$ (و نیز $d = 1$)، $g = 0$، یعنی شکل توپولوژیك، یك‌کره (بدون دسته) است. این مطلب را در مورد



شکل ۱۱

$d = 1$ (خط راست) قبلاً دیده بودیم، وبرای $d = 2$ نیز می‌توان مطلب را مستقیماً با به‌هم‌چسباندن مقاطع خم با صفحات مختلف مشاهده کرد (به‌مثال ۱.۲، فصل اول مرجع [۱] نگاه‌کنید). شکل توپولوژیك خمهای تحویل‌ناپذیر ناتکین درجهٔ سه، یك چنبره است. در میان خمهای جبری، خمهای درجهٔ سه این امتیاز را دارندکه می‌توان آنها را به‌گونه‌ای طبیعی به یك گروه تبدیل کرد. وجود ساختار گروهی برای خمهای درجهٔ سه ارتباط تنگاتنگی با بررسی توابع بیضوی در آنالیزمتغیر مختلط ونظریهٔ اعداد دارد (مراجع [۳]، [۸]، و [۹]).

قضیهٔ بالا نقش ساده کننده و وحدت‌بخش گذر به صفحهٔ افکنشی و اعداد مختلط را بدروشنی بیان می‌کند. با این حال نباید مسأله را در **CP** تمام شده تلقی کرد زیرا که علاوه برمسائل متعددی که در این مقاله بدانها اشاره‌ای نشده است، وجود نقاط تکین در خمهای درجهٔ سه به‌بالا به‌هیچوجه یك امر استثنایی نیست وپدیده‌ای درخور بررسی می‌باشد. پیشرفتهای عظیمی که در رده‌بندی نقاط تکین وبررسی شکل خمهای تکین صورت گرفته است در این مقاله نمی‌گنجد. به‌عنوان نمونه، شکل منحنی آلفا را که در **CP** یك «چنبرهٔ تباهیده» است در شکل ۱۲ نمایش می‌دهیم. مطالعهٔ کاملتر این مبحث باید درچارچوب نظریهٔ رویه‌های ریمانی یا هندسهٔ جبری صورت گیرد.



شکل ۱۲

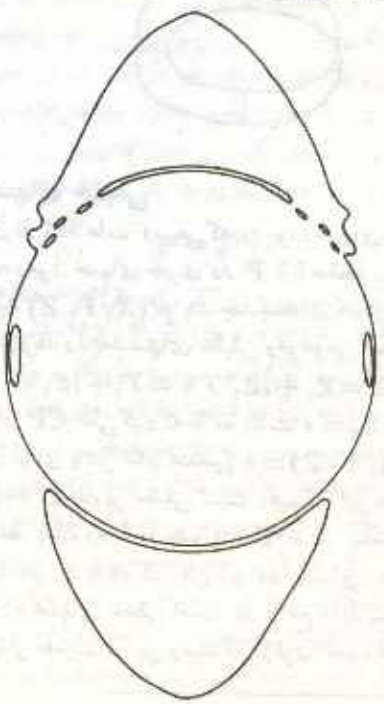
بازگشت به‌خمهای حقیقی

چگونه می‌توان از اطلاعات وسیعی که درمورد خمهای جبری در **CP** موجود است به رموز خمهای جبری در $\mathbf{P}$ (یا صفحهٔ دکارتی) دست یافت؟ فرض کنید $p^*(X, Y, Z)$ یك چندجمله‌ای همگون با ضرایب حقیقی باشد. متغیرها را به‌قسمتهای حقیقی وموهومی تفکیك می‌کنیم، $X = X_1 + iX_2$، $Y = Y_1 + iY_2$ و $Z = Z_1 + iZ_2$. می‌توان $\mathbf{P}$ را زیرفضایی از **CP** تلقی کردکه با معادلات $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ تعریف می‌شود. برای یافتن مکان هندسی $p^*(X, Y, Z) = 0$ در $\mathbf{P}$، باید به X، Y، و Z مقادیر حقیقی نسبت دهیم که این به‌منزلهٔ یافتن تقاطع خم مختلط (یك رویهٔ دوبعدی) با $\mathbf{P}$ است. متأسفانه بیان این مطلب بسیار ساده‌تر از به‌کار گرفتن آن در دستیابی به احکام کلی غیربدیهی درمورد خمهای حقیقی است. در واقع شاید بتوان ادعا کرد که تنها قضیهٔ حائز اهمیت دراین زمینه قبل‌ازقرن اخیر، قضیهٔ هارناك[1]

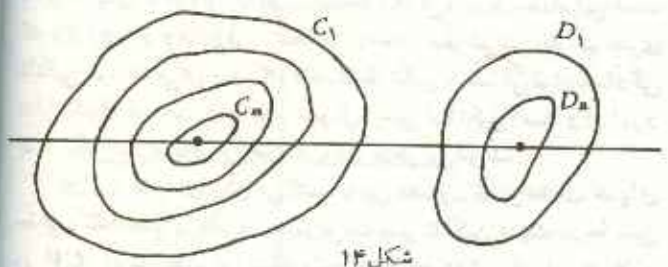
1. Harnack

(۱۸۷۶) است: تعداد مؤلفه‌های یك خم جبری درجهٔ d در $\mathbf{P}$ حداکثر برابر $(d-1)(d-2)/2+1$ است. (هریك از قطعات همبند یك خم حقیقی، یك «مؤلفهٔ» آن خوانده می‌شود.) هارناك در واقع نشان داد که برای هر d، یك خم جبری تحویل‌ناپذیر ناتکین از درجهٔ d با این تعداد مؤلفه وجود دارد. به‌عنوان نمونه، یك خم درجهٔ ۶ با ۱۱ مؤلفه درشکل۱۳ نمایش داده شده است. برای کسب اطلاع بیشتراز این خم که توسط هیلبرت ارائه شده است و امثال آن به‌مرجع[۱] که شکل۱۳ ازآن برداشته شده است مراجعه‌کنید. همچنان‌که باتوجه به‌شکل‌می‌توان حدس زد، روش ساختن این منحنی بدین‌صورت است: اگر $p(x,y)=0$ معادلهٔ یك دایره و $q(x,y)=0$ معادلهٔ یك بیضی متقاطع با آن باشد، معادلهٔ شکل‌داده شده به‌صورت $p^2q+r=0$ است که در آن r یك چندجمله‌ای درجهٔ ۶ با ضرایب کوچك حقیقی است.

در باقیماندهٔ این بخش خمهای جبری را تحویل‌ناپذیر وناتکین فرض‌می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، هرمؤلفهٔ یك‌چنین‌خم‌جبری در $\mathbf{P}$ یك خم سادهٔ بسته است (ساده یعنی‌اینکه خودرا قطع نمی‌کند)، ولی این مؤلفه‌ها خود بر دو قسم‌اند: برخی $\mathbf{P}$ را به‌دو بخش تجزیه می‌کنند (که از این پس هاگینه خوانده خواهند شد)، و برخی دیگر $\mathbf{P}$ راتجزیه نمی‌کنند. مؤلفه‌های شکل۱۳ همه هاگینه هستند ومشاهده می‌شودکه یك هاگینه ۹ هاگینهٔ دیگررا دربرگرفته است. مسألهٔ تعیین وضعیت نسبی‌هاگینه‌ها دریك خم جبری (مثلاً این‌که چه تعداد هاگینه می‌توانند درداخل یك هاگینهٔ دیگر قرارگیرند) به‌طور غیرمنتظره‌ای دشوار است. در اینجا باید اشاره‌کردکه در فهرست ۲۳ مسأله‌ای‌که هیلبرت در سال ۱۹۰۰ به‌ریاضیدانان قرن بیستم عرضه‌کرد، نیمی از مسألهٔ شانزدهم به‌تعیین توپولوژی توزیع مؤلفه‌های یك خم جبری در $\mathbf{P}$ اختصاص دارد. پیشرفت در حل این مسأله به‌نسبت‌کند بوده است. برای دست یافتن به‌خصوصیات تقاطع خم جبری مختلط با $\mathbf{P}$، نیازمند به‌استفاده از روشهای پیچیده‌ای در توپولوژی جبری هستیم و نتایج به‌دست آمده تاکنون بیشتر مربوط به خمهای از درجهٔ زوج است. اگر $p^*(X,Y,Z)$ از درجهٔ زوج باشد، علامت $p^*(X,Y,Z)$



شکل۱۳

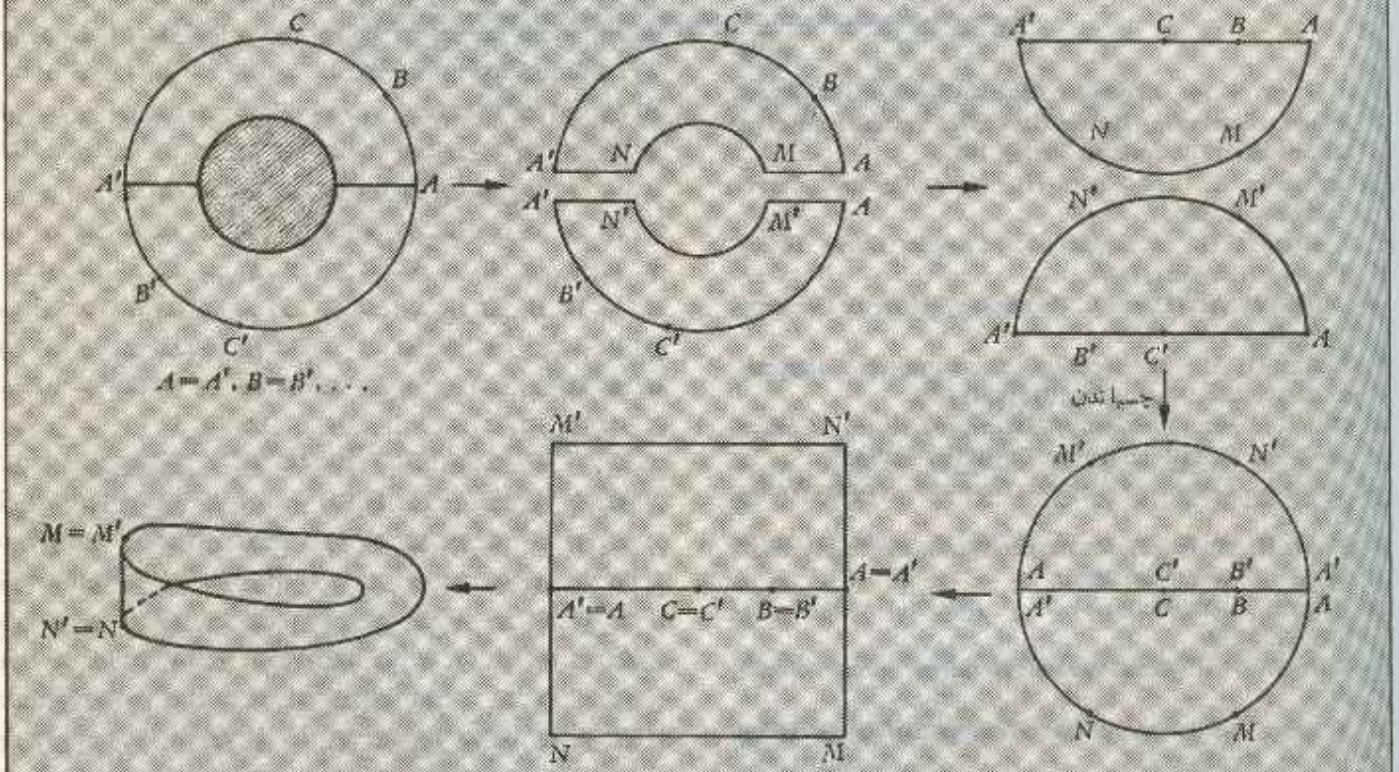


شکل۱۴

به‌طور ذاتی تعریف شده‌است یعنی با ضرب‌کردن X، Y، و Z در یك عدد حقیقی $\lambda\neq 0$ عوض نمی‌شود، پس می‌توان دو طرف هرمؤلفه را با توجه به‌علامت $p^*(X,Y,Z)$ ازهم تشخیص‌داد، یعنی‌هرمؤلفه یك هاگینه است. برای تشریح بعضی نتایج به‌دست آمده در مورد خمهای جبری حقیقی، لازم است نخست توجه بیشتری به‌توپولوژی $\mathbf{P}$ مبذول کنیم. هرخم سادهٔ بسته‌که در صفحهٔ دکارتی‌رسم شود، صفحه را به‌دو بخش تقسیم می‌کندکه ازنظر توپولوژیك از یکدیگرقابل‌تمیزند. «داخل خم» یك ناحیهٔ همبند ساده است، یعنی هرخم بسته در آن را می‌توان با تغییرشکل پیوسته در همان ناحیه به‌یك نقطه فشرد. «خارج خم» یك ناحیهٔ حلقه شکل غیرهمبند ساده است. یك خم بسته دراین ناحیه راکه یك‌بار داخل ناحیه را دور بزند نمی‌توان به‌طور پیوسته در داخل حلقهٔ بیرونی به‌یك نقطه فشرد. وضعیت یك خم سادهٔ بسته روی سطح‌کره از این نظرمتفاوت است‌که دو بخش به‌دست آمده از تجزیهٔ‌کره از نظرتوپولوژیك قابل تمیزدادن نیستند. بخصوص اگر یك دایرهٔ عظیمه ازکره حذف شود، دو بخش پدید آمده نسبت به‌یکدیگر تقارن‌کامل هندسی دارند. بدین‌ترتیب نمی‌توان از«داخل» یا «خارج» یك خم سادهٔ بسته روی‌کره صحبت‌کرد. صفحهٔ افکنشی، $\mathbf{P}$، مانندکره، یك رویهٔ بسته است: از هرطرف‌که روی $\mathbf{P}$ حرکت کنیم می‌توانیم بدون بازگشتن درخلاف مسیرحرکت، به‌همان نقطه بازگردیم. یك هاگینه روی $\mathbf{P}$ درنظربگیرید. آیا دوبخش مکمل هاگینه از نظر توپولوژی قابل تمیز ازیکدیگرند؟ در تابلوی ۴ نشان داده‌ایم‌که دو بخش $\mathbf{P}$ توپولوژی‌کاملاً متمایز دارند: یکی ازدوبخش همبند ساده است و از این پس داخل هاگینه خوانده خواهد شد، و بخش دیگر از نظر توپولوژی معادل یك نوار موبیوس است (!)، و از آن به عنوان خارج هاگینه صحبت خواهیم‌کرد. یك دنبالهٔ $C_1,\dots,C_m$ از هاگینه‌ها تشکیل یك زنجیره می‌دهند اگر هر C_{i-1} درناحیهٔ داخل C_i قرارگیرد. یك مسألهٔ عمده دربررسی خمهای جبری حقیقی، تعیین‌تعداد زنجیره‌ها و طول هریك است. در این مورد، نکتهٔ مقدماتی زیرمفید واقع می‌شود. یك خم (تحویل‌ناپذیر و ناتکین) از درجهٔ زوج $d=2k$ درنظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که تعداد هاگینه‌ها در هر زنجیره یا در هردو زنجیرهٔ متمایز نمی‌توانند از k تجاوز کند. برای مشاهدهٔ این واقعیت، دو زنجیرهٔ متمایز $C_1,\dots,C_m$ و $D_1,\dots,D_n$ را درنظر بگیرید و خط راستی ازیك نقطهٔ داخل C_m به‌یك نقطهٔ داخل D_n رسم کنید (شکل۱۴). این‌خط راست هاگینه‌های دو زنجیره را در $2(m+n)$ نقطه (دو برابر تعداد هاگینه‌ها) قطع می‌کند. ازآنجاکه تعداد نقاط مشترك یك خط راست (خم درجهٔ یك) با یك خم درجهٔ d حداکثر d است، نتیجه می‌گیریم‌که $m+n$ حداکثر برابر k است. با توجه به‌همین نکته، کلیهٔ اشکال ممکن‌خمهای درجهٔ چهار رده بندی می‌شوند. طبق قضیهٔ هارناك، یك خم درجهٔ چهار حداکثر چهار هاگینه دارد. وقتی تعداد هاگینه‌ها سه یا چهار باشد، طبق مشاهدهٔ بالا، این هاگینه‌ها باید دوبه‌دونسبت به‌یکدیگر منخارج باشند. درحالتی که فقط دوهاگینه وجود داشته باشد، دوامکان

تابلوی ۴. ناحیهٔ خارج یک هاگینه در صفحهٔ افکنشی، یک نوار موبیوس است

برای ملاحظهٔ این امر نخست متذکر می‌شویم که صفحهٔ دکارتی از نظر توپولوژی معادل ناحیهٔ داخل یک گوی است. مثلاً اگر نقاط صفحه را به $z = (x, y)$ نمایش دهیم، نگاشتی که z را به $z/(1+|z|)$ می‌فرستد همهٔ صفحه را به‌طوریک به‌یک بر داخل گوی واحد می‌نگارد. حال ناحیهٔ داخل گوی واحد را به‌عنوان صفحهٔ دکارتی در نظر می‌گیریم و به‌آن نقاط بینهایت دور را می‌افزاییم. دایرهٔ واحد حول این گوی به‌منزلهٔ خط واقع در بینهایت است با این تفاوت که چون روی هرخط گذرنده از O فقط یک نقطهٔ بینهایت دور وجود دارد، باید هردو نقطهٔ متقابل به‌قطر دایره را یک نقطه فرض کرد. یک هاگینه (مثلاً دایرهٔ بشعاع ۱/۲ حول O) وناحیهٔ داخل آن را از این مدل $\mathbf{P}$ حذف می‌کنیم ونشان می‌دهیم آنچه باقی می‌ماند از نظر توپولوژی معادل نوار موبیوس است. اشکال زیر مراحل بریدن و چسباندن لازم را نشان می‌دهند. درشکل ماقبل آخر نواری به‌دست آورده‌ایم که با چسباندن دو انتهای آن در جهت عکس نوار موبیوس به‌دست می‌آید.



موجود است: دو هاگینه یامتخارج‌هستند یایکی درداخل دیگری قرار دارد. برای کلیهٔ موارد بالا و نیز حالت تک هاگینه‌ای مثالهایی از خمهای درجهٔ چهاروجود دارد. وضعیت خمهای درجهٔ شش پیچیده‌تر است ولی دراین مورد نیز رده‌بندی کاملی به‌دست آمده است. ازجمله ثابت شده است که در صورت وجود یازده هاگینه (حداکثر تعداد ممکن)، این یازده هاگینه نمی‌توانند همگی نسبت به‌یکدیگر متخارج باشند. همچنین، در داخل یک هاگینه، تعداد هاگینه‌های بیرونی که همگی نسبت به‌یکدیگر متخارج باشند، همواره ۰، ۱، ۵ یا ۹ است. دربارهٔ خمهای درجهٔ زوج بالاتر از شش نیز نتایج بسیاری دردست است ولیکن هنوز رده‌بندی کاملی به‌دست نیامده است. گزارشهای مبسوطی از اطلاعات و روشهای موجود در این زمینه راکه عمدتاً توسط ریاضیدانان شوروی پتروفسکی[1]، رخلین[2]، خارلامف[3]، گودکف[4]، و آرنولد[5] به‌دست آمده‌اند می‌توان در [۱]، [۵]، و [۱۳] مطالعه کرد.

ارتباط با سایر شاخه‌های ریاضی

بحث را از مسائل ریاضیات باستان شروع کردیم، و امیدواریم خواننده را قانع کرده باشیم که علی‌رغم ظاهر ابتدایی وسادهٔ موضوع خمهای جبری، این مبحث هنوز مملو از مسائل حل نشده‌ای است که دستیابی به‌آنها مستلزم آگاهی از تازه‌ترین روشهای ریاضیات است. برای اینکه صحت این ادعا روشنتر شود، لازم است که دراین آخرین بخش، بعضی از روابط بررسی خمهای جبری با سایرشاخه‌های ریاضیات را به‌اختصار شرح دهیم.

بررسی خمهای جبری مختلط (یعنی در $\mathbf{CP}$) از دیدگاه آنالیز ریاضی، در واقع بررسی رویه‌های ریمانی فشرده است. در اواخر قرن نوزدهم، ریمان رویه‌هایی را تعریف کرد که جایگاه طبیعی بررسی توابع چند مقداری در آنالیز مختلط هستند. مطالعهٔ این رویه‌ها، که به‌رویه‌های ریمانی معروف‌اند، از غنیترین مباحث ریاضی است و هم اکنون نیز به‌سبب کاربردهایی که رویه‌های ریمانی درسایر بخشهای

1. Petrovskii 2. Rokhlin 3. Kharlamov
4. Gudkov 5. Arnold

ریاضی و نیز درفیزیك نظری(نظریهٔ ریسمان) دارند این موضوع با حرارت فراوان دنبال می‌شود. قضیهٔ زیبایی‌درنظریهٔ رویه‌های ریمانی نشان می‌دهدکه رویه‌های ریمانی بسته،کراندار و بی‌لبه، در واقع تکمیلهای افکنشی خمهای جبری مختلط هستند. اثرات متقابلی که این ارتباط، بین روشهای جبری و آنالیزی ایجادکرده است به‌پربار ساختن هردو رشته کمکهای فراوان کرده است.

تاکنون گفتگوی ما به‌خمهای تعریف شده توسط چندجمله‌ایهایی محدودبوده است که ضرایب آنها اعداد حقیقی یا اعداد مختلط هستند. اگر به‌جای هیأتهای اعداد حقیقی یا اعداد مختلط، از هیأتهای دیگری مانند هیأتهای متناهی، هیأت اعدادگویا و یا توسیعهای جبری اعداد گویا، استفاده‌کنیم، بدقلمرو نظریهٔ اعداد وارد می‌شویم. به عنوان مثال، خم $x^n+y^n=1$، n عدد صحیح مفروض، را در صفحهٔ اعدادگویا مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقصود از صفحهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد گویاست. نقاط روی این خم در صفحهٔ اعدادگویا به‌چه صورتی هستند؟ اگر (x, y) یك نقطهٔ خم باشد، هر یك از x و y نمایشی به‌صورت p/q دارد که در آن p و q اعداد صحیح هستند. حال با یافتن مخرج مشترك x و y را به‌ترتیب به‌صورت X/Z و Y/Z می‌نویسیم که در آن X، Y، و Z اعدادصحیح هستند. پس X، Y، و Z باید در معادلهٔ $X^n+Y^n=Z^n$ صدق کنند که این معادلهٔ معروف فرماست! بدین‌ترتیب قضیهٔ آخر فرما (که هنوز ثابت نشده است) حکم می‌کندکه برای $n>2$، خم جبری $x^n+y^n=1$ در صفحهٔ اعدادگویا تهی است. رابطهٔ نظریهٔ خمهای جبری و نظریهٔ اعداد در واقع از شناخته‌شده‌ترین ارتباطات نظریهٔ خمهای جبری با سایرشاخه‌های ریاضیات است. امروزه مشکل می‌توان مرزی میان نظریهٔ اعداد ونظریهٔ خمهای جبری روی هیأتهای عددی قائل شد. اثبات حدس موردل[1] توسط فالتینگز[2] که ازمهمترین رویدادهای نظریهٔ اعداد دراین قرن است با استفاده‌های عمیقی‌ازاین روابط صورت گرفت. مرجع [۹] یك بررسی خواندنی ازاین مقوله ارائه می‌کند. لازم است این‌نیزاضافه شودکه درسالهای اخیر به‌کمك خمهای درجهٔ۳ (که به‌سبب‌ارتباط پیشگفته با توابع بیضوی به‌خمهای بیضوی نیزمعروف‌اند) روی هیأتهای متناهی و حلقه‌ها، الگوریتمهای نیرومندی برای‌آزمودن اول بودن اعداد صحیح و نیز تجزیهٔ اعداد صحیح به‌اعداد اول به‌دست آمده است [۸] که از نظرسرعت محاسبه و میزان نیاز به‌حافظهٔ کامپیوتر، بر روشهای قبلی ارجحیت دارند. از چنین الگوریتمهایی در نظریهٔ رمزنگاری استفاده می‌شود.

1. Mordell 2. Faltings

بالاخره باید به‌این اشاره کردکه نظریهٔ خمهای جبری درواقع فصل اول از رشتهٔ هندسهٔ جبری است. در هندسهٔ جبری، به‌جای یك معادلهٔ جبری ۲ یا ۳ متغیری، یك دستگاه معادلات جبری چند متغیری روی هیأتهای مختلف یا حتی‌حلقه‌ها مورد بررسی‌قرارمی‌گیرد. برای اینکه به‌اهمیت جایگاه هندسهٔ جبری در ریاضیات جدید پی‌ببریم، کافی‌است به‌یك مقایسهٔ ساده بپردازیم. اهمیت جبرخطی در ریاضیات و درکاربردهای آن از واقعیتهای بلامنازع است. جبرخطی‌رامی‌توان به‌اعتباری بررسی‌نظام‌جوابهای یك دستگاه معادلات خطی(درجهٔ اول) تلقی‌کرد. در هندسهٔ جبری، نظام بسیار پیچیده‌تر مجموعهٔ جوابهای یك دستگاه معادلات از درجات بالاتر بررسی می‌شود.

مراجع

1. Á Campo N., *Sur la Première Partie du Seizième Problème de Hilbert*. Seminaire Bourbaki no 537. Lecture Notes in Mathematics, 770. Springer-Verlag, 1980.
2. Brieskorn E., and Knörr H., *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 1986.
3. Clemens C.H., *A Scrapbook of Complex Curve Theory*, Plenum, New York, 1980.
4. Griffiths Ph., and Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.
5. Gudkov D. A., "The topology of real projective algebraic varieties", *Russ. Math. Surv*, **29** (1974) 1-79.
6. Klein F., *Famous Problems of Elementary Geometry*, Chelsea, New York, 1962 (Reprint of the English translation).
7. Kendig K., *Elementary Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
8. Lenstra H., "Elliptic curves and number-theoretic algorithms", *Proc. Int'l. Cong. Math.* 1986.
9. Mazur B., "Arithmetic on curves", *Bull. Am. Math. Soc*, **14** (1986) 207-259.
10. Shafarevich I.R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
11. Springer H., *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, Reading 1957.
12. Walker R.J., *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, 1978 (Reprint of 1950 edition).
13. Wilson G., "Hilbert's sixteenth problem" *Topology*, **17** (1978) 53-73.

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف

ریاضیدان، مانند نقاش یا شاعر، نقش پرداز است. نقشهای او به این اعتبار ماندگارترند که از ایده، ساخته می‌شوند. نقاش نقشهای خود را با شکل و رنگ می‌سازد وشاعر تصویرهای خود را با کلام می‌آفریند... نقشهای ریاضیدان، همچون نقشهای نقاش یا تصویرهای شاعر، باید زیبا باشند. ایده‌های ریاضی نیز همچون رنگهای‌نقاشی یا واژه‌های شعر باید به‌گونه‌ای هماهنگ به‌هم‌پیوندند. نخستین محك، زیبایی است. ریاضیات زشت دراین جهان مقام ماندگاری ندارد.

گادفری هرلدهاردی

جان کلام در
نظریهٔ اندازه*

جوزف کوپکا*

I. ریشه‌ها

۱. نظریهٔ ریاضی اندازه چیست؟

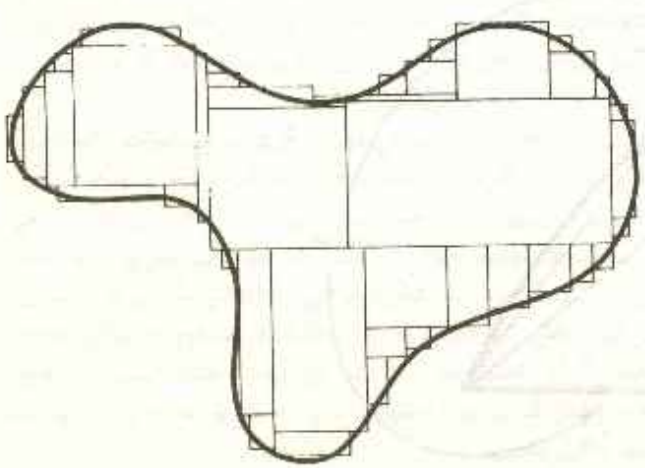
فن و دانش اندازه‌گیری ـ که همانا به‌کارگیری عدد برای توصیف میزان یک‌صفت یا کیفیت در یک شیء است ـ یکی از ستونهای اصلی علم جدید، و شاید هر جامعهٔ متمدن را تشکیل می‌دهد. طول، سطح، و حجم از جملهٔ اولین کیفیتهایی هستند که به‌طور اصولی مورد اندازه‌گیری قرار می‌گرفته‌اند. دانستن مساحت یک قطعه زمین به پیش‌بینی میزان محصول آن و یا تخمین نیروهای دشمنی که بر روی آن اردو زده است، کمک می‌کند.

اغلب تمدنهای قدیم به‌مفهوم اساسی واحدهای اندازه‌گیری دست‌یافته بودند. مثلاً، واحد طول مصریها ذراع نامیده می‌شد. مصریها در سرزمینهای وسیع نسبتاً همواری می‌زیستند، و به‌نظر می‌رسد که اکثر آزمینهای خود را به‌قطعات مستطیل‌شکلی تقسیم می‌کردند که مساحتهایشان اعداد صحیحی برحسب ذراع مربع بود. برخلاف آنان، یونانیان قدیم ساکن نواحی تپه‌ای بودند و زمینهای هموار اندکی برای کشاورزی دراختیار داشتند. آنها نیاز داشتند که مساحت زمینهای جوراجوری را که از قبل شکل گرفته بودند تعیین و آنهارا باهم مقایسه کنند. این وضعیت جغرافیایی توأم با تهدید نظامی مستمر اقوام پارسی از مشرق، علت عمدهٔ پیچیدگی بسیار زیاد ریاضیات یونانی نسبت به ریاضیات مصری به‌شمار می‌آید؛ و اندازه‌گیری، نه به‌مفهوم امروزی آن که انتساب یک عدد به‌یک شیء باشد، بلکه به‌مفهوم ایجاد روابط دقیق بین کمیتهای گوناگون (عمدتاً طول و سطح)، یکی از وجوه اساسی ریاضیات آنهاست. شاید در این زمینه، رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ در قضیهٔ فیثاغورث مشهورترین مثال باشد. یونانیها به‌این رابطه به‌عنوان تساوی دو مساحت می‌نگریستند.

نظریهٔ ریاضی‌اندازه، شاخه‌ای است از ریاضیات جدید، راجع به قواعد اصولی اندازه‌گیری اشیاء پیچیده یا نامنظم، درحالتی که نحوهٔ اندازه‌گیری اشیاء ساده از قبل معلوم باشد. ایدهٔ اصلی نهفته در آن، ریشهٔ عمیق تاریخی دارد که به‌یک روش ابداعی یونانیان برمی‌گردد.

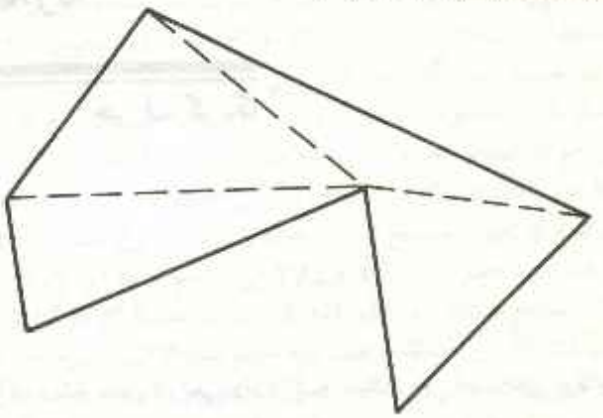
۲. از اقلیدس تا ارشمیدس: روش سنگفرشی

اصول هندسهٔ اقلیدس، اولین اثر بزرگ ریاضی، حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شد. این کتاب حاوی نتایج بسیاری در بارهٔ مساحت مستطیل و مثلث (یا به‌زبان دقیقتر، دربارهٔ نواحی محصور به‌این شکلها) است. اینها «اشیاء سادهٔ» مبحث اندازه‌گیری مساحت‌محسوب می‌شدند. ریاضیدانان یونانی برای تعیین مساحت نواحی پیچیده‌تر تعمیمی ماهرانه و طبیعی از یک روش قدیمی را به‌کار گرفتند که به طولها یا فواصل، مقادیر صحیحی از واحدهای (گوناگون) طول را نسبت می‌داد (همانند یک «مسافت پنج ذراعی» یا یک «مسافت بیست فرسنگی»). ایدهٔ آنها، که ما آن‌را «روش سنگفرشی» می‌نامیم، عبارت بود از قرار دادن اشیاء ساده به‌جای واحدها، به‌کار گرفتن اشیاء مزبور به‌عنوان «سنگهای سنگفرش»، و نتیجتاً فرش کردن ناحیهٔ مفروض با بیشترین دقت ممکن با سنگهای متنوع انتخاب شده؛ مثلاً به‌این‌صورت:



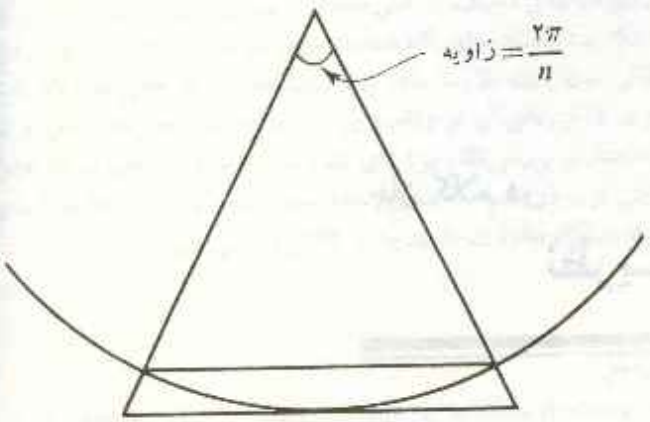
بنابراین، مساحت مجهول تقریباً با مساحت مفروش، یعنی مساحتی که واقعاً با سنگها پوشیده شده، برابر است. تساوی کل با مجموع اجزاء خود، یکی از خصلتهای ذاتی مساحت محسوب می‌شده (و می‌شود)، و بنابراین مساحت فرش شده به‌نوبهٔ خود با مجموع مساحتهای معلوم تک‌تک سنگها (که باهم اشتراک ندارند) مساوی است.

مسلماً ممکن بود که دقت چنین تقریباتی را به‌حدی برسانند که جوابگوی نیازهای عملی‌زمان باشد. پیچیدگی بیشتر ریاضیات یونانی از تمایل آنان به‌دقت کامل ناشی می‌شد. بنابراین مثلث، به‌عنوان سنگ سنگفرش، بیشتر از مستطیل مورد توجه قرار گرفت زیرا هر ناحیهٔ محصور به‌خطوط مستقیم را همواره می‌توانستند با تعدادی متناهی از مثلثها دقیقاً فرش کنند، مثلاً:



نبوغ واقعی یونانیان در استخراج اطلاعات دقیق در مورد نواحی محصور به خطوط خمیده بود. این نواحی را نمی‌توانستند با سنگهایی که اضلاع مستقیم داشتند، دقیقاً بپوشانند. لذا یك «روش افنا» ابداع کردند که مساحت دقیق را از تعداد زیادی سنگفرش غیردقیق استخراج می‌کرد. این روش آنها معادل «استدلال به روش حد» امروزه است. در کتاب دوازدهم اقلیدس از روش مزبور برای کشف این‌واقعیت‌استفاده شده‌است که نسبت‌مساحت هردایره به‌مساحت مربع ایجاد شده روی شعاع آن دایره، ثابت است. این‌نسبت مشهور را (که می‌دانیم عدد π است) بعدها ارشمیدس کمتر از ۲۲/۷ و بیشتر از ۲۲۳/۷۱ تقریب زد؛ وما امروزمی‌دانیم که عدد π گنگ است.

برای اینکه ببینیم چگونه می‌توان اندازهٔ دقیق مساحت را از سنگفرشهای غیردقیق استخراج کرد، به‌محاسبهٔ دو گانه‌ای از مساحت یك دایره، A، برحسب شعاع آن، r، دست می‌زنیم. دراین محاسبه، مثلث‌بندی (یعنی فرش کردن با سنگهای مثلثی‌شکل) دقیقاً به‌همان صورتی است که اقلیدس انجام می‌داد، ولی نمادگذاری و استدلال به روش حد، کاملاً جدید است. نکتهٔ اصلی، تجزیهٔ دایره به تعداد دلخواه n قطاع مساوی است. به‌هرقطاع، مثلثهای محاطی و محیطی معمول را متناظر می‌سازیم؛ به‌این‌صورت:



مثلث محاطی دارای قاعدهٔ $2r\sin(\pi/n)$، ارتفاع $r\cos(\pi/n)$، و نتیجتاً مساحت $r^2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$ است. n مثلث محاطی را به عنوان یك سنگفرش (یك مثلث‌بندی غیردقیق از دایره) درنظر می‌گیریم. از اینجا، مساحت کل فرش شده برابر با

$$I_n = n r^2 \sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$$

است؛ وچون ناحیهٔ سنگفرش‌شده کاملاً در درون دایره قرار می‌گیرد، بنابراین $A \geqslant I_n$. پس درحد:

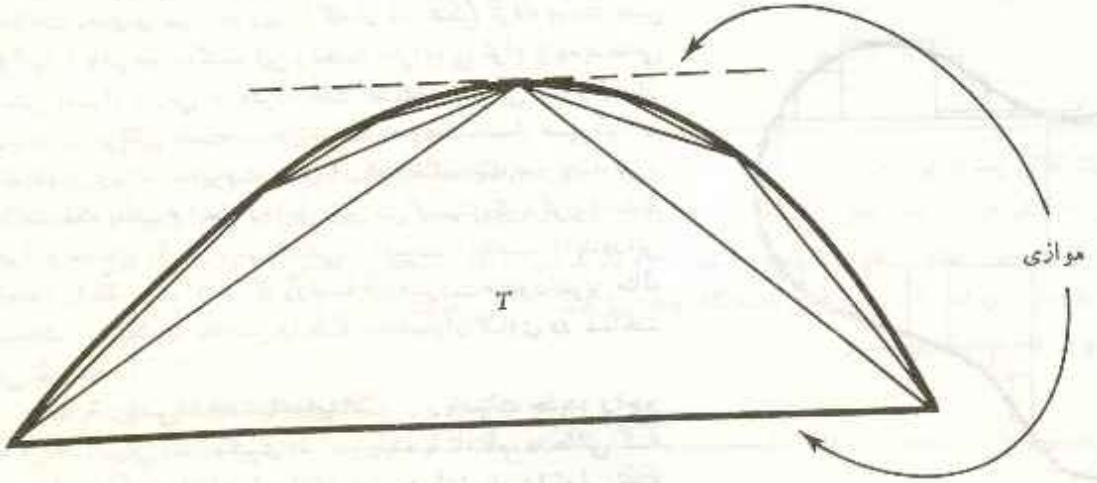
$$A \geqslant \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \left(\frac{\sin \pi/n}{\pi/n}\right)\cos(\pi/n) = \pi r^2$$

مثلث محیطی‌دارای‌قاعدهٔ $2r\tan(\pi/n)$، ارتفاع r، ونتیجتاً مساحت $r^2\tan(\pi/n)$ است. n مثلث محیطی، ناحیه‌ای به مساحت کل $u_n = n r^2 \tan(\pi/n)$ را فرش می‌کنند که ناحیهٔ داخل‌دایره را کاملاً می‌پوشاند، و از آنجا $A \leqslant u_n$. پس، مثل قبل:

$$A \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \left(\frac{\sin \pi/n}{\pi/n}\right)\frac{1}{\cos(\pi/n)} = \pi r^2$$

اینك استدلال کامل است. ما همهٔ اعدادی را که می‌توانستند مقدار واقعی A باشند در کرده‌ایم مگر یك و فقط یك عدد را: $A = \pi r^2$. توجه کنید که برای نیل به‌این نتیجهٔ دقیق به بینهایت مثلث‌بندی نیاز داشتیم.

ارشمیدس، در استدلالی که از این هم ماهرانه‌تر است، مساحت یك قطعهٔ سهموی را با ملاحظهٔ مثلث‌بندیهایی به‌شکل زیر کشف کرد

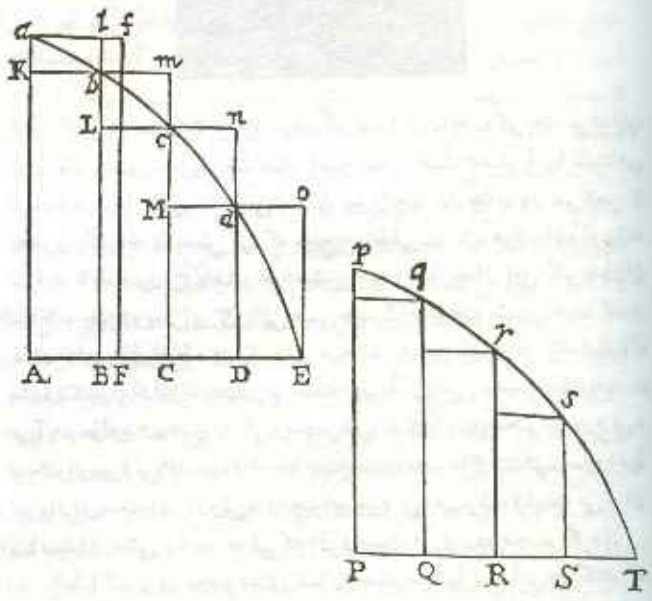


رأس بالایی مثلثی که نام T برآن گذاشته شده، درنقطه‌ای قرار دارد که مماس بر سهمی، با قاعدهٔ قطعه موازی است. ارشمیدس نشان داد که مساحت قطعه دقیقاً ۴/۳ مساحت T است.

مرگ تأسف‌بار ارشمیدس درسال ۲۱۴ قبل‌از میلاد به‌دست یك سرباز رومی، نشانهٔ مرحلهٔ نهایی پیروزی روم بریونان بود. گرچه بعدها کوششهای بسیار زیادی در زمینهٔ تقریبات انجام شد، ولی می‌بایست حدود دو هزار سال بگذرد تا بسیاری از نتایج دقیقی که قبلاً بر یونانیها نامعلوم بود کشف شوند. شاید دوچیز لازم بود تا پیشرفت دیگری ممکن شود: (۱) مفهوم تکامل یافته‌تری از عدد، عدد برای اندازه‌گیری، مانند پول برای تجارت است؛ و به‌مثابهٔ «پول رایج» برای توصیف و مقایسهٔ مساحتها و سایر انواع اندازه به‌کار می‌رود، درحالی که «سیستم مبادلاتی» یونان فقط مقایسهٔ (مبادلهٔ) مستقیم یك‌مساحت بامساحت دیگر را اجازه می‌داد. (۲) کنارگذاشتن سنگفرشهای مثلثی. این روش موجب پیچیدگی زیاد محاسبات می‌شد و یافتن مثلث بندیهای مورد نیاز هرحالت خاص، مستلزم ابتکارات بسیار زیادی بود. بدون‌شك چنین اقدامی ازنظر روانی بسیار دشوار بود. کنار گذاشتن مثلث، ترك سنت یونانی بود.

۳. از نیوتن تا ریمان: قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

درهمان اوایل کتاب اصول (ریاضی) (۱۶۸۷) آیزك نیوتن به‌شکلهای زیر برمی‌خوریم



این شکلها نمایشگر یك موفقیت چشمگیر در کاربرد سنگفرش برای یافتن اندازهٔ عددی دقیق مساحت هستند. هیچ‌جا اثری از سنگفرش مثلثی به‌چشم نمی‌خورد. نیوتن مثلث را با مستطیل تعویض کرده است و مزید بر آن، اینك مستطیلهای باریك همچون کاغذ دیواری (یاکفپوشهای چوبی) ناحیهٔ مفروض‌را پوشانده‌اند. دراین‌روش، اگر سنگفرش‌دقیقتری‌لازم می‌شد،مستطیلهارا، بی‌آنکه به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای کوتاه‌تر کنند، باریکتر می‌کردند. قسمت خمیدهٔ مرز ناحیه را دقیقاً بایك تابع ریاضی f بیان می‌کردند؛مساحت‌ناحیه‌راصریحاً به‌صورت یك حد ریاضی از مساحتهای سنگفرش شده به‌دست می‌آوردند، وحد مزبور را انتگرال تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ یا به‌اختصار $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نامیدند. از همه مهمتر، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (در اکثر اوقات) امکان محاسبهٔ دقیق این انتگرال را فراهم می‌کرد وبه‌علاوه، دراین محاسبه توجه چندانی به سنگفرشها نمی‌شد. فقط کافی بود که یك تابع اولیهٔ F برای f به‌دست آید و آنگاه، مساحت مجهول دقیقاً $F(b)-F(a)$ بود. فقط درموارد نادری که F در دسترس‌نبود، ملاحظهٔ سنگفرشها(ونتیجتاً «انتگرالگیری‌عددی») لازم می‌شد. بدین‌ترتیب، روشهای «موردی» گذشته جای خود را به‌یك روش اصولی باقدرت و دامنهٔ گسترده داد.

همهٔ این ایده‌ها در آثار نیوتن نمایان هستند ولی تا شروع کار کوشی در دههٔ ۱۸۲۰ به‌صورت‌دقیقی بیان‌نشدند. این درواقع کوشی بود که، با پایه‌گذاری مفاهیم مشتق و انتگرال براساس ایدهٔ ریاضی حد، آن مفاهیم را روشن و عاری از ابهام ساخت. کار کوشی را ریمان در دههٔ ۱۸۵۰ بسط داد، و انتگرال حاصل‌نام ریمان‌را برخود دارد؛ این همان انتگرالی است که در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال جدید ظاهر می‌شود.

گرچه انتگرال در بدو امر به‌عنوان وسیله‌ای برای محاسبهٔ مساحت شکل گرفت، ولی در دستان کوشی و ریمان بیشتر به فن مجردی برای‌محاسبه تبدیل‌شد. (دانشجوی حساب‌دیفرانسیل وانتگرال هنگام تقریب انتگرال با «مجموعهای ریمانی» متوجه می‌شود که «مساحت» برخی‌از مستطیلها منفی به‌حساب می‌آید.) این‌تجرید امکان می‌دهدکه کاربردآن ازیك مورد فراتر رود. آن‌را می‌توان درمحاسبهٔ مساحت، حجم، طول قوس، و بسیاری دیگر از کمیتهای فیزیکی به‌کار برد. سرعت، انتگرال شتاب نسبت به‌زمان است؛ کار، انتگرال نیرو نسبت به مسافت است، و غیره. بااین‌حال، روح حاکم برهمهٔ این کاربردها همان روش سنگفرشی است. درواقع، ابتکار یونانیان باستان در به‌کار گرفتن واحدهای اندازه‌گیری کوچکتر و کوچکتر (چه‌سنگهای یك سنگفرش و چه درجات یك‌وسیلهٔ اندازه‌گیری) برای سنجیدن یك‌کمیت فیزیکی بادقت معین، عملاً اساس هرسنجش عددی در علم جدید را تشکیل می‌دهد.

خود ریمان انتگرالگیری را به‌عنوان یك روش میانگین‌یابی در آنالیز ریاضی سریهای مثلثاتی به‌کار گرفت. این کار او شاید اولین صدایی بود که ازریاضیات‌جدیدبه‌گوش رسید. ریاضیدان سنتی می‌گفت: «چیز جالبی می‌بینم. لازم است خاصیتهای آن‌را مطالعه کنم.» چیز جالبی‌که کوشی می‌دید تابع پیوسته بود. انتگرال آن، یکی‌از خاصیتهایش بود. ریاضیدان جدید می‌گوید: «خاصیت جالبی می‌بینم. لازم است همهٔ چیزهایی را که دارای این خاصیت هستند مطالعه کنم.» لذا یك «تابع انتگرال‌پذیر ریمانی»، صرفاً تابعی است ــ هرچند عجیب و نامأنوس ــ که انتگرال آن بنابه‌تعریف کوشی‌معنی داشته باشد. برخوردستنی‌ها بامتجددین دراین‌نوشتهٔ هرمیت ریاضیدان خلاصه می‌شود: «من از وحشت این بلای مصیبت‌بارکه توابع بدون مشتق نام دارد، به‌خود می‌لرزم.»

دیدگاه جدید منشأ نوعی قهرمانیگری در ریاضیات شده است، نوعی صعود از کوه، زیرا هدف در ارتفاعات بالاست. ماحصل آن، ریاضیات مجردی است باعمومیت، عمق، زیبایی، وکاربردهای واقعی بسیار. دیدگاه جدید همچنین باعث رشد سرطانی تجرید شده است. این بیماری، مشهور به تجریدگرایی، نشانه‌اش مغلق‌نویسی عمدی، محرکش عطش نومیدانه به چاپ مقاله، و تداوم دهنده‌اش تعصب تخصص‌گرایی است. خوب یا بد، این دیدگاه‌جدید است‌که برتکامل مبحث اندازه‌گیری در ریاضیات سنتی به نظریهٔ اندازه در ریاضیات جدید حکمفرماست.

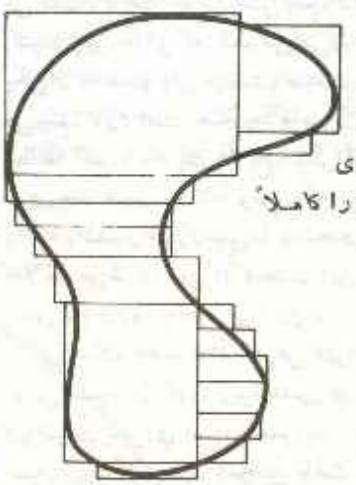
II. تولد

۴. از پئانو تا کاراتئودوری: ظهور اندازهٔ مجرد

مبادی جدید نظریهٔ ریاضی اندازه به‌آثار پئانو در دههٔ ۱۸۸۰ برمی‌گردد. تا آن‌هنگام ریاضیدانان تصور می‌کردند که مفهوم مساحت یك ناحیهٔ مسطح را درك می‌کنند. واتگهی، عموماً احساس می‌شد که در واقع هر زیرمجموعه‌ای از صفحه مساحت دارد. اگر زیرمجموعه «اهلی» بود، مساحتش فوراً ازقضیهٔ اساسی حساب‌دیفرانسیل وانتگرال قابل حصول بود. درغیراین‌صورت، حداقل می‌شد مساحت‌را به‌نحوی یا نواحی‌سنگفرش‌شده تقریب‌زد. ماهیت دقیق این‌تقریب درحالت کلی روشن‌نبود ولی به‌احتمال زیاد این‌مسأله چندان موردتوجه ریاضیدان سنتی قرار نداشت. این‌تمایل‌جدید به مطالعهٔ «همهٔ چیزهای دارای یك خاصیت جالب» بود که پئانو را به ملاحظهٔ مساحت درجایگاه خود، جداازانتگرال، رهنمون گردید. گرچه پئانواز «کاغذ دیواریهای» نیوتن (هم «درونی» و هم «بیرونی») و از آثاردیمان الهام گرفت ولی یقیناً یونانیها می‌توانسته‌اند ادعا کنند که تعریف پئانو از مساحت دقیقاً تجدیدبیانی به‌زبان امروزی از ایدهٔ آنهاست. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از صفحه باشد. پئانو همهٔ سنگفرشهای مستطیلی روی S (ونه‌فقط‌سنگفرشهای متشکل‌از توارهای دراز و باریك) را که کاملاً در درون S قرار می‌گیرند درنظر گرفت. مثلاً به‌این‌صورت:

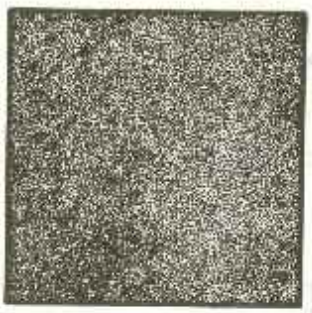


مساحتی که توسط چنین سنگفرشی پوشانده می‌شود باید نابیشتراز A، مساحت S، باشد. درنتیجه ماکسیمم (یا اگر وجود ندارد، «ماکسیمم تعمیم یافته» یا سوپریمم) همهٔ این مساحتهای سنگفرش شده یك تقریب نقصانی برای A است، یعنی عددی است نابیشتر از A. عدد مزبوررا محتوای درونی S می‌نامند وآن‌را با $c_*(S)$ نمایش می‌دهند. درعین‌حال، پئانو همهٔ سنگفرشهای مستطیلی را درنظر گرفت که S را کاملاً می‌پوشانند؛ مثلاً به‌این‌صورت:



مینیمم (یا اگر وجود ندارد، اینفیمم) مساحتهایی که توسط این گونه سنگفرشها پوشانده می‌شود، یك تقریب‌اضافی برای A است، یعنی عددی است ناکمتر از A. این عدد را محتوای بیرونی S می‌نامند و آن‌را با $c^*(S)$ نمایش می‌دهند. بنابراین $c_*(S) \leqslant A \leqslant c^*(S)$. اگر اتفاقاً $c^*(S) = c_*(S)$، آنگاه A باید دقیقاً مساوی مقدار مشترك $c^*(S)$ و $c_*(S)$ شود. این تعریف پئانو از A، مساحت S، بود که آن‌را محتوای S نیز می‌نامند و با $c(S)$ نمایش می‌دهند. اگر اتفاقاً $c_*(S) < c^*(S)$، آنگاه، تا جایی که مورد نظر پئانو بود مجموعهٔ S دارای مساحت نبود. چنین مجموعه‌ای «اندازه‌پذیر نبود. دستاورد پئانو مجدداً توسط ژوردان به‌طور مستقل در دههٔ ۱۸۹۰ کشف و (به‌ویژه به‌تعریف متناظری از حجم) تعمیم داده شد، وامروزه مفاهیم عام محتوا تام ژوردان را برخود دارند.

اگر هر مجموعه‌ای چون S به‌مفهوم موردنظر پئانو یا ژوردان دارای محتوا بود، ماجرا باکار آنها به‌پایان می‌رسید. ولی به‌آسانی می‌توان مجموعه‌ای تعریف کرد که درمورد آن $c_*(S) < c^*(S)$، و با این‌حال، احساس‌عمومی این باشدکه باید مساحتش موجود باشد. گردایه‌یاخانواده‌ای‌ازاشیاء، چون O، را شمارا گوییم‌هرگاه بتوان‌آن اشیاء را بااعداد طبیعی‌اندیس گذاری کرد: یعنی O_1، O_2، O_3، و ... (دوشی، مختلف دواندیس مختلف می‌گیرند.) لذا هر گردایهٔ متناهی از اشیاء، شماراست و برخی از گردایه‌های نامتناهی نیز شمارا هستند. حال فرض کنیم که مثلاً S مربعی است با مساحت ۱ که گلوله‌باران شده است؛ به‌این‌صورت:



فرض کنید که سوراخ ناشی ازهر گلوله را فوق‌العاده کوچك گرفته‌ایم، در واقع به‌صورت یك تك‌نقطه. اما تصورکنید تعداد آنها نامتناهی شماراست. با کمی دقت می‌توان سوراخها را چنان در سرتاسر S به‌طور یکنواخت پخش کردکه هیچ مستطیلی در S، هراندازه‌کوچك، نتواند فاقد سوراخ باشد. خواهید پرسید: آیا بعداز این گلوله‌باران سفاکانه چیزی برای S باقی می‌ماند؟ جواب مثبت است: تعداد نامشمارایی از نقاط، در S باقی می‌ماند. این نتیجه از یك استدلال مشهورکانتور، اولین متخصص برجستهٔ نظریهٔ ریاضی مجموعه‌ها، به‌دست می‌آید. حال بدون‌هیچ‌مشکلی دیده‌می‌شودکه S دارای محتوای درونی ۰ ومحتوای‌بیرونی ۱ ونتیجتاً فاقدمساحت‌است. مجموعهٔ B متشکل‌ازسوراخها نیزدارای‌محتوای درونی ۰ ومحتوای بیرونی ۱ می‌باشد (اینك می‌توان ریاضیدان سنتی را در حالی که از وحشت می‌لرزد، مجسم کرد).

اما اکنون B مجموعه‌ای شمارا ست. خیلیها احساس می‌کنند که هرمجموعهٔ شمارا باید دارای مساحت باشد و این مساحت‌هم باید صفر باشد. می‌توان نشان داد که اگر مستطیلی به تعداد شمارایی از مستطیلهای کوچکتر تجزیه شود، مساحت آن همواره با مجموع مساحتهای مستطیلهای کوچکتر برابر است ولوآنکه تعداد مستطیلهای کوچکتر نامتناهی باشد. (این واقعیت را بعداً شمارا - جمعی بودن اندازهٔ مساحت خواهیم نامید.) به‌همین‌ترتیب، مجموعهٔ B را نیز می‌توان به‌تعداد شمارایی از تك نقطه‌ها تجزیه کرد. یك تك‌نقطه، بنا به هرتعریفی، مساحت صفر دارد. بنابراین، مساحت B هم باید صفر باشد و نتیجتاً مربع گلوله باران شده باید مساحتی برابر با ۱ داشته باشد. ازاینرو، احساس‌شهودی ریاضیدانان تعمیمی از تعریف مساحت پئانو-ژوردان را می‌طلبید. ولی چگونگی کار به‌آن زودی روشن نبود.

جرقهٔ الهام در ذهن امیل بورل در حوالی شروع این قرن زده شد:

در سنگفرش، بینهایت سنگ به‌کار ببرید!

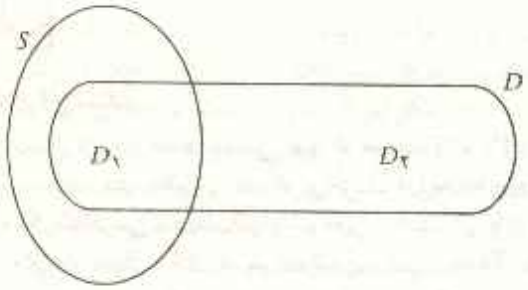
به‌بیان دقیقتر، یک مجموعهٔ دلخواه S را با تعداد بینهایت مستطیل بدون اشتراک بپوشانید، نه با تعدادی متناهی آن‌سان که پثانو و ژوردان عمل کرده بودند (البته بینهایت مزبور، به علت اینکه مستطیلها باهم اشتراک ندارند، باید شمارا باشد). بینهایت سنگ، اغلبشان بسیار ریز، بدون شك بهتر می‌توانند گوشه‌ها، درزها، سوراخها، و یا سایر ناهمواریهای موجود درشکل S را بپوشانند. درنتیجه، برازش بهتری بین S و ناحیهٔ سنگفرش شده ممکن خواهد بود.

اندیشهٔ بورل را شاگردش هنری لبگ به‌خوبی دریافت و او آن‌را به‌یك نظریهٔ ریاضی به‌معنای واقعی تبدیل کرد. تعریف $m^*(S)$، اندازهٔ بیرونی لبگ متعلق به مجموعهٔ مسطح S، دقیقاً مشابه محتوای بیرونی S ارائه می‌شود بجز اینکه علاوه بر سنگفرشهای متناهی از سنگفرشهای نامتناهی‌هم استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب، تعداد نواحی سنگفرش شدهٔ تحت‌بررسی افزایش می‌یابد ونتیجتاً مینیمم (یا اینفیمم) مساحتهای متناظر کوچکتر می‌شود، یعنی $m^*(S) \leqslant c^*(S)$.

لبگ امیدوار بود که $m^*(S)$ نمایانگر اندازهٔ «واقعی» مساحت S باشد. اما این امید احتیاج به‌توجیه منطقی داشت، چه‌درغیراین‌صورت $m^*(S)$ چیزی جز یك «تجریدی‌معنی» باجاذبه‌ای زودگذر نمی‌بود. شواهد اولیه دلگرم‌کننده بود. اگر S بنا به هریك از تعاریف قبلی دارای مساحت A می‌بود، درهمهٔ حالات ثابت می‌شد که $A = m^*(S)$. این تساوی، حالت یك مجموعهٔ بیکران S را نیز شامل می‌شد، مجموعه‌ای که «تا بینهایت گسترده است» ولذا بنا به‌تعریف، نمی‌توان آن‌را با تعدادی متناهی مستطیل پوشاند. اغلب این‌گونه مجموعه‌ها، ازجمله خودصفحه، دارای مساحتی (واندازهٔ بیرونی) برابر با $+\infty$ هستند. اما به‌برخی از آنها، باکمك انگشرالهای به‌اصطلاح نامرهٔ ریمان، مساحتهایی متناهی نسبت داده می‌شد. در این حالات نیز A مساوی اندازهٔ بیرونی مجموعه بود. وانگهی، همان‌گونه که به‌طور شهودی انتظار می‌رفت، اندازهٔ بیرونی مربع گلوله‌باران شده ۱ و اندازهٔ بیرونی مجموعهٔ B، متشکل از سوراخها، ۰ بود.

اما یك مسألهٔ کوچك باقی بود. درمورد اندازهٔ بیرونی لبگ نه واضح بود و نه‌صحیح، که کل همواره مساوی مجموع اجزاء خود باشد. لبگ این معضل را به‌همان شیوهٔ پثانو و ژوردان حل کرد. وی مفهوم جدید اندازهٔ درونی $m_*(S)$ را (مفهومی که مشابه با محتوای درونی $c_*(S)$ نیست و حال متروك است) ابداع کرد؛ مجموعهٔ S را به‌شرط $m_*(S) = m^*(S)$ اندازه‌پذیر (لبگی) اعلام، و برای یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر S مقدار مشترك $m_*(S)$ و $m^*(S)$ را به‌عنوان اندازهٔ (لبگی) آن، $m(S)$، تعریف کرد. او همچنین شمارا-جمعی بودن اندازهٔ بیرونی روی مجموعه‌های اندازه‌پذیر را اثبات نمود ــ یعنی، نشان داد که اگر یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر S به تعداد شمارایی از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر بدون اشتراك تجزیه شود، آنگاه $m^*(S)$ دقیقاً مساوی مجموع اندازه‌های بیرونی آن زیرمجموعه‌هاست. یعنی برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر، کل برابر با مجموع اجزاء است.

ایدهٔ اندازه‌پذیری لبگ را بعدها کاراتئودوری بدون استفاده از اندازهٔ درونی مجدداً صورتبندی کرد، واین روایت کاراتئودوری است که امروزه در کتب درسی نظریهٔ اندازه ظاهر می‌شود. روایت مزبور چنین است: همراه با مجموعهٔ مفروض S، مجموعهٔ دلخواه D را در نظر بگیرید. مجموعهٔ S را به‌مثابهٔ چاقوبی بپندارید که برای بریدن D به‌دو قطعهٔ $D_1 = D \cap S$ و $D_2 = D \setminus S$ به‌کار می‌رود؛ به‌این‌صورت:



حال ممکن است تساوی $m^*(D) = m^*(D_1) + m^*(D_2)$ درست یا نادرست باشد. اگر تساوی درست باشد و، بلکه بیشتر، اگر تساوی صرفنظر از نحوهٔ انتخاب D همواره درست باشد، آنگاه S اندازه‌پذیر است. اگر تساوی حتی فقط به‌ازای یك مجموعهٔ D برقرار نباشد، آنگاه S اندازه‌پذیر نیست؛ واین تعریف کاراتئودوری از اندازه‌پذیری است. این تعریفی مجرد است و تنها با این هدف صریح ارائه شده است که کل را مجبور به‌برابری با مجموع اجزاء خود کند.

تجرید بیشتر نظریهٔ لبگ تا حدودی موجب دور شدن و بریدن آن نظریه از واقعیات شد. دانشمند علوم تجربی به‌راحتی می‌تواند $c^*(S)$ را وقتی که $c^*(S) = c_*(S)$، به عنوان مساحت S بپذیرد. اما آیا درصورت «اندازه‌پذیری» S، به‌این مفهوم بسیار تکنیکی، می‌توان حقیقتاً گفت که $m^*(S)$ مساحت واقعی S است؟ برخورد ریاضیدان به‌سؤال مزبور، برخورد توأم با آرامش کسی‌است که می‌داند دربحث برنده می‌شود؛ او می‌پرسد: «منظورتان از «مساحت‌واقعی» S چیست؟» دانشمند علوم تجربی نمی‌داند. ریاضیدان هم نمی‌داند. تنها کاری که ریاضیدان می‌تواند بکند این است که شواهدی به‌صورت قضایا و مثالهای ریاضی اقامه کند تا دانشمند علوم تجربی تشویق شود که اندازهٔ لبگ را به‌عنوان تعریف مساحت بپذیرد. شواهد مثبت (در این‌زمینه) قوی است. مساحت در مورد مستطیلها، شمارا-جمعی است. این را می‌توان ثابت کرد. اگر دانشمند علوم تجربی براساس این اثبات ایمان بیاورد که مساحت در حالت کلی نیز شمارا-جمعی خواهد بود، آنگاه می‌توان ثابت کرد که اندازهٔ لبگ یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر، دقیقاً همان مساحت آن مجموعه است. هیچ قرینهٔ نفی‌کننده‌ای وجود ندارد. هیچ‌کس مثالی از یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر پیدا نکرده‌است که به‌طور شهودی بتوان به‌غیر از اندازهٔ لبگ آن، مساحتی برایش در نظر گرفت (و این حکم همهٔ مجموعه‌هایی را هم که قبلاً برایشان مساحت تعریف شده بود دربرمی‌گیرد). همچنین هیچ‌کس مثالی از یك مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر پیدا نکرده‌است که درمورد مساحتش هیچ تصور شهودی موجود باشد. به‌این نکته مجدداً بازخواهیم گشت.

بدزودی معلوم شد که روش لبگ در ساختن اندازه به‌عنوان یك «تابع مجموعه‌ای شمارا-جمعی» کلیت تام دارد. در حالت یك بعدی می‌توان بازه‌ها را به‌عنوان سنگها به‌کار گرفت ومفهوم تعمیم‌یافته‌ای از طول به‌دست آورد. (این اندازهٔ واقعی لبگ است، اندازه‌ای که خود او برای اولین‌بار به‌ساختنش اقدام کرد.) در حالت سه‌بعدی می‌توان مکعب مستطیلها را به‌عنوان سنگها به کاربرد تا مفهوم تعمیم‌یافته‌ای از حجم به‌دست آید، وبه‌همین ترتیب نتایجی مشابه در ابعاد بالاتر. در واقع، همان‌گونه که بعدها کاراتئودوری تبیین کرد، می‌توان اشیائی را که طبیعت کاملاً مجردی دارند، به‌عنوان سنگهای سنگفرش به‌کار گرفت. باوضع چندشرط ساده می‌توان هر اندازه‌گیری (شمارا-جمعی) روی این سنگهای مجرد را، به‌روش لبگ در ساختن اندازهٔ بیرونی، با استفاده از سنگفرشهای نامتناهی به‌انواع متعددی از اشیاء پیچیده‌تر تعمیم داد. بدین‌طریق نظریهٔ جدید اندازهٔ مجرد تولد یافت، نظریه‌ای که می‌رفت غنایی باورنکردنی از لحاظ کاربرد داشته باشد.

III. بلوغ

۵. انتگرال لبگ

انتگرال ریمان دارای همان نقائصی بود که تعریف پانوـژوردان از مساحت. حس‌شهودی حکم می‌کرد که برخی از توابع خاص، هرچند تعریف انتگرال کوشی ـ ریمان برایشان معنی ندارد ولی باید دارای نوعی انتگرال باشند. لبگ، همچون ریمان، بیشتر به انتگرالگیری علاقه‌مند بود تا به اندازه‌گیری، وچنین به‌نظر می‌رسد که هدف اصلی وی از ایجاد اندازهٔ اولیه، تعمیم تعریف قبلی انتگرال بود. او نهایتاً به‌نتایج بیشتری دست یافت: وی تصور جدیدی از مفهوم کلی انتگرال ارائه کرد. انتگرال او در واقع تعمیمی از انتگرال ریمان بود، ولی اثبات این نکته کار مشکلی است. از همه مهمتر، انتگرال لبگ (از یك تابع ریاضی) فقط به‌اندازهٔ مورد نظر بستگی داشت. لذا انتگرال مزبور را می‌شد در هر نهاد کاملاً مجردی تعریف کرد و تنها شرط لازم برای این کار وجود یك اندازه (برای اشیاء مجرد آن نهاد) بود. در حالی که مفهوم انتگرال ریمان نمی‌توانست خود را از محدودهٔ فضاهای سنتی اقلیدسی (خط، صفحه، و غیره) رها سازد.

باید اذعان کرد که انتگرال لبگ هیچ فرمول ساده و سحرآمیزی برای مساحت و حجم عرضه نمی‌کند که امکان حصول آن از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود نداشته باشد. درواقع، لبگ نخست از ترس اینکه مبادا نظریهٔ جدیدش چیز فوق‌العاده عجیبی جلوه کند در انتشار آن تعلل می‌ورزید. نگرانی او بیمورد بود. نظریهٔ مجرد اندازه و انتگرال همان‌قدر در آنالیز ریاضی جدید فراگیر شده است که انتگرال ریمان در علوم تجربی جدید. حتی ریاضیدانان سنتی نیز وقتی دیدند که، علاوه بر تعمیم نظریهٔ قبلی، بسیاری از نکات آن ساده‌تر و واضحتر می‌شود (تاحدی) نظریهٔ جدید را پذیرفتند. به‌عنوان نمونه، یك تابع کراندار انتگرال ریمان دارد اگر و تنها اگر «تقریباً همه‌جا» پیوسته باشد. این حکم قبل از لبگ قابل اثبات نبود زیرا بدون نظریهٔ لبگ معنی ندارد. این مطلب به‌خوبی روشن می‌سازد که تعریف کوشی از انتگرال دقیقاً تا چه حد توسط ریمان تعمیم یافته بود. به‌عنوان مثالی دیگر، اثبات دقیق این مطلب که انتگرالهای به‌اصطلاح دوگانه و سه‌گانه را می‌توان درمحاسبهٔ برخی از مساحتها و حجمها به‌کار برد، با درنظر گرفتن انتگرالهای لبگ به‌جای انتگرالهای ریمان، بسیار آسان می‌شود.

آخرین تجلیل از نظریهٔ لبگ در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ به عمل آمد که حاکی از شیوع اندکی تجریدگرایی نیز بود. در نتیجهٔ آن یك «بلای مصیبت‌بار» (گرچه کوچك) از هیولاهای فوق مجردی که شبیه انتگرال بودند ظهور کرد که خوشبختانه امروزه اکثر آنها به‌محاق فراموشی سپرده شده‌اند.

در بخش بعد به‌بیان یکی از ماجراهای موفقیت‌آمیزی که از نظریهٔ لبگ به‌وجود آمده است اکتفا خواهد شد؛ نظریه‌ای که شکل مجرد آن را امروزه نظریهٔ اندازه می‌نامند.

۶. از لاپلاس تا کولموگوروف: اندازه و احتمال

نظریهٔ احتمال در قرن هفدهم با تعدادی مسألهٔ ریاضی ملهم از قماربازی پا به عرصهٔ وجود نهاد. کارهای اولیه را لاپلاس در اوایل قرن نوزدهم سازمان و گسترش داد؛ هم او نوشت: «نظریهٔ احتمال همان ادراك متعارف است که به‌صورت فرمول درآمده باشد.» به‌نظر می‌رسد که آن روزها احتمال را به‌عنوان یك شاخهٔ اصیل ریاضیات نمی‌پذیرفتند بلکه آن را رشتهٔ مجزایی می‌دانستند که ابزارهای ریاضی را به‌کار می‌گیرد. (شاید بی‌مهری نسبت به‌این رشته در آن زمان، ناشی از ارتباطش با قماربازی بوده باشد.) به‌هرحال، آنهایی که در احتمال کار می‌کردند تحت تأثیر بحرانی که در حوالی ۱۹۰۰ ریاضیات را فراگرفته بود، قرار نگرفتند. در آن زمان، توجه ریاضیدانان به کل همهٔ اشیاء دارای یك خاصیت معین، به پارادوکس (یا گزارهٔ ناقض‌خود) مشهوری دربارهٔ «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» منجر شده بود. از این پارادوکس ظهور «ریاضیات جدید» نتیجه شد، ریاضیاتی که کلاً مبتنی بر نظریهٔ (بازنگری شدهٔ) مجموعه‌ها و برخوردار از استانداردهای سطح بالاتری از لحاظ صحت براهین منطقی بود. در مقابل همهٔ اینها، احتمالدانان می‌گفتند: «چنین چیزی برای ما اتفاق نمی‌افتد.» ولی اتفاق افتاد.

در دههٔ ۱۹۲۰ نظریهٔ احتمال با پارادوکسی در درون خویش مواجه شد که مشهور است به پارادوکس زمان انتظار. مسأله این بود: اتوبوسهایی در زمانهای تصادفی مختلف به یك ایستگاه وارد می‌شوند. با این فرض که ورودهای آتی کاملاً مستقل از ورودها (یا عدم ورودها)ی قبلی هستند. هر دو اتوبوس متوالی به‌طور متوسط به فاصلهٔ یك ساعت وارد می‌شوند. من رأس ساعت ۹ وارد ایستگاه می‌شوم. به‌طور متوسط چه مدت باید منتظر اولین اتوبوس باشم؟ یك راه استدلال بدین منوال بود که چون ورودهای قبلی بی‌تأثیرند، لذا به‌طور متوسط باید یك ساعت تمام منتظر بمانم. راه دوم استدلال این بود که چون من به‌طور متوسط در وسط فاصلهٔ زمانی بین دو اتوبوس متوالی وارد می‌شوم لذا می‌توانم امیدوار باشم که فقط نیم ساعت منتظر بمانم. این استدلالها متناقض یکدیگر بودند. پس حداقل یکی از آنها غلط بود. ولی اشتباه قابل ردیابی نبود. هر دو استدلال با موازین منطقی حاکم بر احتمال در آن زمان درست بودند.

تأکید بر جدی بودن این وضع نباید اغراق‌آمیز به‌نظر برسد؛ زیرا با این وضع، چگونه می‌توانستند قضاوت کنند که در نظریهٔ احتمال استدلالی صحیح است یا نه؟ این فکر پیش آمد که چه بسا قرنها جستجوی پرتلاش برای دستیابی به‌حقایق احتمالاتی دربارهٔ دنیای ما که مملو از عدم حتمیت است، به‌چیزی جز یك مهمل فاحش منتهی نشده باشد.

نظریهٔ احتمال در دههٔ ۱۹۳۰ توسط آندری کولموگوروف نجات یافت. او یك‌تنه نظریهٔ احتمال را به‌شاخهٔ دقیقی از ریاضیات مبتنی بر مفاهیم نظریهٔ اندازه تبدیل کرد. با این کار، وی چنان به‌مفاهیم این موضوع روشنی بخشید که هرگز سابقه نداشت. و بدین ترتیب، امکان آن به‌وجود آمد که اشتباه ظریف در استدلال مسألهٔ زمان انتظار معلوم شود (استدلال اول درست بود)، و نظریهٔ احتمال در مسیر گسترش سریع به‌سوی کشفیات مهیجی کشانده شود، کشفیاتی که در تصور بنیادگذاران این نظریه هم نمی‌گنجید.

مفهوم اساسی در نظریهٔ سنتی احتمال پیشامد بود، حادثه‌ای در دنیای واقعی یا پیشامدی انتزاعی در یك الگوی فرضی از دنیای واقعی. بسیاری از پیشامدها قابل تصور هستند (مثلاً، اینکه شخصی ممکن است فردا بمیرد) ولی فقط برخی از آنها واقعاً اتفاق می‌افتند. لذا چنین فرض می‌شد که هر پیشامد E دارای کیفیت ظریفی است، چیزی از قبیل امکان رخ دادن آن (در یك زمان معین)، که کمیت آن را می‌توان دقیقاً با $P(E)$ (عددی در $[0,1]$) بیان کرد. این عدد را احتمال می‌نامیدند. همانند اندازه‌گیری مساحت، در کلیهٔ محاسبات عددی احتمال چنین فرض می‌شد که احتمال برخی از پیشامدهای «اساسی» از قبل معلوم است. (دانشجویان احتمال اغلب به‌این نکتهٔ حیاتی توجه ندارند، مخصوصاً اگر در اشاره به احتمالهای معلوم، تنها «تصادفی‌بودن» پیشامد ذکر شود.) یك مشکل عمده در نظریهٔ اولیه این بود که، تقریباً در هیچ حالتی نمی‌شد احتمال یك پیشامد «اساسی» را، به‌همان سادگی که مساحت مستطیل محاسبه می‌شود، عملاً پیدا کرد. آن مشخصهٔ خاص E که قرار بود $P(E)$ مقدار دقیق آن باشد، علی‌رغم همهٔ تلاشهای

جدیی که قبلاً برای تثبیت مفهوم آن انجام گرفته بود، در پردهٔ ابهام باقی‌مانده بود. روایت نه‌چندان موثقی حاکی از آن است که درخلال بحران ناشی از پارادوکس زمان انتظار همواره می‌شد با این سؤال خوتسردانه یك احتمال‌دان سنتی را به‌معنای واقعی تحریك کرد: «منظور شما از «احتمال» یك پیشامد چیست؟» احتمال‌دان قدیمی با حرکت شدید دستها وصورتی برافروخته شروع به‌ایراد سلسلهٔ بی‌پایانی از جملات قالبی می‌کرد: «شانس» است، «امید» است، «فراوانی نسبی در دراز مدت» است، «میزان اطمینان» است ــ و حتی ممکن بود در صورتی که به‌اندازهٔ کافی تهییج شود، به‌قلدری روشنفکرانه متوسل‌شود: «شماخودمی‌دانید منظورمن‌چیست!» با دیدن‌این نمایش، شما باید حتماً می‌دانستید! اماحقیقت‌این‌بودکه‌هیچ‌کس‌نمی‌دانست مگردنباله‌روان‌متعصب.

کولموگوروف آن‌جنبه از احتمال راکه واقعاً طبیعت ریاضی دارد آشکار ساخت، یعنی این نکته را که احتمال شکل اصیلی از اندازه‌گیری است وکل برابر با مجموع اجزاء خود است. اگریك پیشامدکلی E به‌پیشامدهای ساده‌تریا خاصتر E_1، E_2، ...، تجزیه شود و اگراین پیشامدهای ساده‌تر دو به دو ناسازگار باشند (یعنی امکان روی دادن همزمان هیچ دوتایی از آنها موجود نباشد)، آنگاه $P(E)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots$. نبوغ کولموگوروف درتشخیص این واقعیت بودکه پیشامدهای اساسی را که احتمالهای آنها از قبل معلوم باشد می‌توان (در اغلب حالات) به‌عنوان «سنگهای سنگفرش» به‌کار گرفت. لذا می‌توان روش‌سنگفرشی اقلیدس ـ ارشمیدس-نیوتن-دیمان-پئانو-ژوردان-بورل-لبگ-کاراتئودوری رابه‌همان شیوهٔ اندازهٔ بیرونی لبگ به‌کاربرد و احتمالهای گردایهٔ وسیعتری از پیشامدهای «اندازه‌پذیر» راکاملاً تعیین کرد. احتمال به‌مثال ساده‌ای از اندازهٔ مجرد تبدیل شد.

یك مفهوم اساسی دیگر در نظریهٔ سنتی، متغیر تصادفی بود؛ در اوایل «متغیری بودکه به‌طور تصادفی تغییر می‌کرد»، ولی بعدها به‌عنوان مثالی از یك تابع ریاضی شناخته شد. متغیرهای تصادفی به‌طور طبیعی ازتوصیف عددی جنبه‌های‌غیراحتمالاتی‌پیشامدها نشأت گرفتند (مثلاً تعداد شیرهایی که در ده مرتبه پرتاب یك سکه رو می‌شود). هرمتغیر تصادفی، آدایه یا توزیعی از احتمال پیشامدهایی‌را که آن متغیر نمایندهٔ عددی آنها بود بهمراه داشت (به‌عنوان مثال، این پیشامدکه ۵ شیر دردهبار پرتاب سکه رومی‌شود). درحالات ساده می‌توانستند توصیف عددی را به‌طور طبیعی با آرایهٔ احتمالها ترکیب کنند و مفهومی از مقدار متوسط یا امید ریاضی متغیر تصادفی راپدید آورند. امید ریاضی‌یك متغیرتصادفی X را به‌صورت EX می‌نویسند. انگیزهٔ اولیهٔ تعریف EX از قماربازی آمده است: اگر X مقدار پولی باشدکه من‌به‌طور بالقوه‌می‌توانم در یك بازی قماربرم، برای شرکت درآن بازی باید مقدار EX بپردازم تا بازی عادلانه باشد.

متغیرهای تصادفی درابتدا در دونوع متمایز «گسسته» و«پیوسته» ظاهرشدند. برای هرکدام نظریهٔ جداگانه‌ای وضع شد. احتمال‌دانان قدیمی به‌طور مبهمی از وجود نوعی متغیرهای تصادفی عجیب یا «تکین» آگاه بودندکه در رسته‌های موجود نمی‌گنجید، ولی یقین داشتندکه این استثنائات هرگز «در عمل پیش نخواهند آمد». (ولی پیش‌آمد.) کولموگوروف تشخیص دادکه درکلیهٔ حالات بررسی‌شدهٔ قبلی، EX دقیقاً انتگرال لبگ مجرد تابع X نسبت به‌اندازهٔ احتمال P است. وی با توجیه شهودی قابل‌ملاحظه‌ای EX را درکلیهٔ حالات به‌عنوان همین‌انتگرال تعریف کرد. بدین طریق، او دونظریهٔ جداگانه را یکپارچه ساخت و حوزهٔ متغیرهای تصادفی (از جمله متغیرهای تکین) را به‌طور وسیعی، تا آنجاکه صحبت از EX (و نیز سایر «گشتاورهای» X مانند واریانس) معنی داشت، گسترش داد. از نظر تأثیر، تعمیم مزبور با تعمیم لبگ از انتگرال ریمان قابل‌مقایسه بود.

به‌این ترتیب، کولموگوروف فرهنگ کوچکی از اصطلاحات پدید آوردکه در آن، مفاهیم ریاضی‌مجموعه، اندازه، تابع، وانتگرال به‌طور متقن به‌مفاهیم احتمالاتی پیشامد، احتمال،متغیر تصادفی، وامید ریاضی پیوند داده‌شده بود. این فرهنگ در حکم سنگ‌نبشتهٔ روزتا[1] برای نظریهٔ احتمال است. به‌کمك آن می‌توان آنچه را که واقعاً در نظریهٔ مزبور می‌گذرد به‌صورت جملات دقیق ریاضی استخراج کرد. نظریهٔ ریاضی جدید احتمال، استانداردهای منطقی آثارقبلی را ارتقاء داد (مثلاً در محاسبهٔ $P(E)$ وقتی‌که سنگفرش شامل بینهایت سنگ بود)، و همهٔ تصورات راجع به«طبیعت واقعی» احتمال را به‌حوزهٔ تأملات فلسفی‌انتقال داد. امروزه نتیجه‌ای‌که مبتنی بر چنین تصوراتی باشدفقط‌به‌عنوان‌یك حدسی پذیرفته می‌شودکه‌به‌اثبات دقیق نیازدارد.

احتمال به‌عنوان یك ابزار اصلی در آمار ریاضی نقش دارد؛ هدف آمار ریاضی به‌دست آوردن اطلاعات دقیق دربارهٔ یك جامعه، پس ازمشاهدهٔ نمونهٔ نسبتاً کوچکی از آن جامعه، می‌باشد. (معروفترین نمونه‌گیریها، نظرخواهی ازافکارعمومی‌است.) بدین‌منظورآماردانان بر متغیرهای تصادفی خاصی تکیه می‌کنندکه به آماره‌های آزمون مشهورند. برخی از آنها احتمالاً اطلاعاتی بیشتر از بقیه دربارهٔ جامعه به‌دست می‌دهند، ومی‌توان این سؤال را مطرح کردکه‌آیاآمارهٔ آزمون خاصی وجود داردکه به بهترین‌وجه‌کار فوق را انجام دهد یا خیر. احتمال مبتنی بر نظریهٔ اندازه موارد زیر را تأمین می‌کند: (۱) حوزهٔ وسیعتری از متغیرهای تصادفی که «بهترین» آمارهٔ ممکن ازبین‌آنهاانتخاب شود، (۲) ابزارهای منطقی‌دقیقتربرای‌اینکه به‌طرز قانع‌کننده‌ای اثبات شودکه یك آمارهٔ مفروض، بهترین آماره است، و (۳) چشم‌انداز تازه‌ای از برخی محکهای سنتی برای «نیکویی» یك آمارهٔ آزمون. به‌ویژه، معلوم شده است‌که مفهوم یك آمارهٔ بسنده را نمی‌توان بدون استفاده از زبان نظریهٔ اندازه به‌نحو شایسته‌ای فرمولبندی کرد.

تصادفی نیست‌که جرزی نیمن «پدر آمار جدید» رسالهٔ اولین شاگرد مهم خود را به‌تشریح انتگرال لبگ‌که در آن هنگام نوظهور بوداختصاص داد. او در ابتدا تصمیم داشت‌که زندگی علمی خود را وقف نظریهٔ مجرد اندازه‌کند، ولی‌سرنوشت اوچنین بودکه درعوض نقش برجسته‌ای‌در گسترش‌نظریهٔ ریاضی آزمون فرضهای‌آماری داشته باشد. این‌نظریه،نهایتاً امکان آن‌را فراهم‌ساخت‌که راهی‌معقول‌وتجربی (با به‌کار گرفتن آماره‌های آزمون) برای «اندازه‌گیری» احتمالها در دنیای واقعی به‌دست آید، لااقل به‌این مفهوم علمی و عملی که مقدار واقعی ایده‌آلی احتمالها براورد شود.

۷. مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر

آنهایی‌که با نظریهٔ اندازه سروکار دارند (به‌ویژه احتمال‌دانان) باید همواره مواظب مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر باشند. حتی امروزه در بسیاری از افراد جامعهٔ ریاضی آثار نوعی ترس غریزی از این موجودات دیده می‌شود. گویی آنان همچون گرگهای کمین کرده در جنگل، صبورانه منتظرند تا مسافر ماجراجو را در آرواره‌های پارادوکس بیرحم خود به‌دام اندازند.

---

۱. روزتا نام شهری است در مصرکه به‌عربی به‌آن رشید گویند وسنگ‌نبشتهٔ معروفی دارد‌که‌کاهنان بطلمیوس‌پنجم نوشته‌اند ــ این‌سنگ‌نبشته کلید فهم خط هیروگلیف مصری بوده است.ــم.

باید فرض کرد که یك زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر در فضای اقلیدسی نوع پیچیده‌ای از مربع گلوله‌باران شده است. سرتاسر مجموعهٔ مزبور چنان سوراخ سوراخ، آبله‌رو، ویا «بید خورده»، شده است که حتی با تعداد بینهایتی از سنگهای متنوع نیز نمی‌توان به‌نحو مناسبی خلل وفرج آن را پوشاند. برخلاف مربع گلوله‌باران شدهٔ معمولی، هیچ گاه نمی‌توان چنین مجموعه‌ای را صریحاً توصیف کرد. اصولاً اثبات وجود آن فقط با کمك اصل موضوع انتخاب امکان دارد، اصلی که زمانی مورد مناقشه بوده ولی اکنون به‌عنوان یك اصل موضوع الحاقی به‌نظریهٔ اساسی مجموعه‌ها پذیرفته شده‌است. گفته می‌شود که لبگ تا واپسین دم هرگز اصل موضوع انتخاب را نپذیرفت. او می‌خواست براین باور بماند (و ظاهراً هم ماند) که هر زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی اندازه‌پذیر است.

ریشه‌های نارضایتی از اندازه‌ناپذیری را باید در تصورات شهودی نیرومند آن عصر جستجو کرد. اگر طول قد برای یك نفر معنی داشته باشد پس برای هر فرد دیگری نیز باید معنی داشته باشد. اگر یك پیشامد دارای احتمال باشد، هر پیشامد دیگری نیز باید چنین باشد. اگر یك قسمت از دنیای ما دارای حجم باشد، پس هر قسمت دیگر نیز باید دارای حجم باشد. برای اندازه‌گیری حجم یك مجموعهٔ سه‌بعدی از نقاط کافی است مجموعه را با آب پر کنید(؟)، آب را در یك لیوان مدرج خالی کنید و اندازهٔ حجم را بخوانید. این کار کاملاً ساده به‌نظر می‌رسد.

تصور اندازه‌ناپذیری، موجد شبحی از مجموعه یا شیء بس شگفت‌آوری شد که امکان وجود حجم برایش نیست. نه اینکه اندازه‌گیری حجم آن غیرممکن یا غیرعملی باشد، بلکه اصولاً حجمی در کار نیست. به‌این شبح، آلفرد تارسکی متخصص منطق ریاضی، موجودیت ملموس بخشید. وی با اثبات کاملاً دقیقی نشان داد که یك گوی صلب به‌شعاع ۱ را می‌توان به‌تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های بدون اشتراك تجزیه و سپس آنها را مانند معمای چینی چنان جابه‌جا کرد که یك گوی صلب به‌شعاع ۲ حاصل شود. به‌این ترتیب، زیرمجموعه‌ها در معرض هیچ گونه انبساط، انقباض، خمیدگی، پیچیدگی، و یا هیچ تغییر شکل دیگری قرار نگرفتند. فقط آنها را به‌طور صلب در فضا حرکت دادند تا به‌وضعیت جدید برسند. شهود ما ایجاب می‌کند که حجم یك شیء هنگامی که به‌طور صلب در فضا جابه‌جا می‌شود نباید تغییر کند. همچنین شهود ما ایجاب می‌کند که در مورد اندازهٔ حجم، کل مساوی مجموع اجزاء خود باشد. با این حال، حجم گوی دوم هشت برابر حجم اولی است. این یك پارادوکس است، یك نوع عدم امکان منطقی است. ریاضیدانان برای حل پارادوکس «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» بالاخره به‌این توافق رسیدند که «ردهٔ» همهٔ مجموعه‌ها خود یك مجموعه نیست. ملهم از این تجربهٔ قبلی، در مورد پارادوکس جدید نیز به‌این توافق رسیدند که مجموعه‌ای بدون حجم وجود دارد. از نظر منطقی مسأله رفع می‌شود، ولی از نظر روانی پذیرش آن هنوز خیلی مشکل است.

نظریهٔ ریاضی اندازه رسماً در مورد وجود یا عدم وجود مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر اظهار بی‌اطلاعی می‌کند، درست همان‌طوری که در مورد «طبیعت واقعی» احتمال اظهار بی‌اطلاعی می‌کند. یك مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر چیزی نیست مگر مجموعه‌ای که دربارهٔ آن هیچ اطلاعی از به‌کار گرفتن سنگفرشها حاصل نمی‌شود. اگر به‌نحوی به‌یك مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر N اندازهٔ مستقلی نسبت داده شود و اگر اندازهٔ مزبور با سایر اندازه‌ها سازگار باشد (و به‌ویژه مقدار آن بین $m_*(N)$ و $m^*(N)$ قرار گیرد)، آنگاه نظریه این امکان را می‌دهد که، درهنگام ساختن اندازه، مجموعهٔ N نیز به‌سنگهای مورد استفاده در سنگفرش اضافه گردد. همهٔ سنگهای سنگفرش اندازه‌پذیرند (این یك قضیه در نظریهٔ اندازه است)، ولذا N نیز باید رسماً اندازه‌پذیر باشد. «کسی که قصد رام کردن این حیوان سرکش را دارد، نخست باید اندازهٔ واقعی آن را بیابد.» چنین به‌نظر می‌رسد که به‌خصوص احتمال‌دانان جدید همواره با کمبود پیشامدهای اندازه‌پذیر روبرو هستند، و تلاشهای قابل‌ملاحظه‌ای برای یافتن طرق معقول تعمیم برخی از اندازه‌های احتمال اولیهٔ کولموگوروف به‌عمل آورده‌اند. شاید روزی یك متخصص منهور فیزیك ریاضی به‌فکر تعمیم مفیدی از مفهوم حجم بیفتد به‌طوری که یك شیء عجیب بتواند، در حین حرکت آرام خود در فضا، حجم خود را عملاً تغییر دهد.

۸. ختام

یکی از شخصیتهای نسبتاً مهم نظریهٔ احتمال در مقدمهٔ یك کتاب درسی چاپ ۱۹۶۵، که هنوزهم مورد استفاده است، چنین نوشت: «کار اصلی نظریهٔ اندازه ... عبارت است از توجیه ... حدگیریهایی که هیچگاه برای یك غیر ریاضیدان مورد سؤال نیست. لذا خوانندگانی که عمدتاً به‌نتایج عملی علاقه‌مندند هیچ نیازی به‌نظریهٔ اندازه احساس نخواهند کرد.» این گفته، منعکس کنندهٔ برخورد محتاطانهٔ ریاضیدان سنتی (و برخی از متخصصین امروزی ریاضیات کاربردی) با شاخه‌های مجردتر ریاضیات جدید است. شور و اشتیاق نسبت به این موضوع، احتمالاً از دو طریق قوت می‌گیرد: (۱) از این طریق که استاد به‌استعانت نفوذ شخصی و درك عمیق خود از مطلب قادر باشد در ذهنهای خودرا تبلیغ کند و یا (۲) از این طریق که ریاضیات قبلی (که در مورد نظریهٔ اندازه شامل حساب دیفرانسیل و انتگرال و احتمال سنتی می‌شود) در حدی مطالعه شود که دانشجو بتواند به‌ارزشهای اصیل شیوهٔ اصلاحی نظریهٔ جدید پی برد. طریقهٔ دوم ممکن است مستلزم مطالعهٔ برخی از مطالب مهجور و منسوخ باشد، ولی در عوض دانشجو در موضع بهتری قرار می‌گیرد تا گوهرهای واقعی ریاضیات جدید را از جار و جنجال تب‌آلود تجریدهای پیشرفته تمیز دهد.

ترجمهٔ مهدی رجبعلی‌پور

مراجع

1. Bell E. T., *Men of Mathematics*, 2 vols, Penguin, London, 1953.
2. Cohn D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.
3. Davis P. J., and Hersh R., *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.
4. Halmos P. R., *Measure Theory*, D. Van Nostrand, Princeton, 1950.
5. Hawkins T., *Lebesgue's Theory of Integration*, Chelsea, NewYork, 1975.
6. Heath T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols, Cambridge, 1908.
7. Lebesgue H., *Oeuvres Scientifiques*, 5 vols, University of Geneva, 1972.
8. Newton I., *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Translated by A. Motte, revised by F. Cajori), University of California Press, 1934.
9. Wagon S., *The Banach- Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• Kupka J., "Measure theory: the heart of the matter", *The Mathematical Intelligencer*, (4)8(1986)47-56.

• جوزف کوپکا، دانشگاه موناش استرالیا

می‌خواهم ریاضیدان به‌حساب آیم

پال هالموس

معمولاً کار ریاضیدان نویسندگی نیست. از اینرو بیشتر زندگینامه‌هایی که ریاضیدانان بنام نوشته‌اند برای خوانندهٔ ناآشنا یا نویسنده هـلال‌آور و برای آشنایان دلسردکننده است. پال هالموس از معدود ریاضیدانانی است که خوب می‌نویسد و نوشته‌های ریاضی و جنبی‌اش همواره به‌نکته‌های ظریف و جذاب آراسته است. او علاوه بر آثار تحقیقاتی متعددی که در زمینهٔ آنالیز تابعی، نظریهٔ اندازه، و منطق جبری دارد، تعدادی کتاب و مقالهٔ توصیفی نیز در سطوح مختلف تألیف کرده است. هالموس درسال ۱۹۸۵ زندگینامهٔ ریاضی‌اش را زیر عنوان می‌خواهم ریاضیدان به‌حساب آیم[1] به‌چاپ رساند که ترجمهٔ قطعاتی از آن به‌نظرتان می‌رسد. دو قطعهٔ اول را از صفحهٔ پیش درآمد و از صفحات ۳ و ۴، و سه قطعهٔ بعدی را که دربارهٔ سه رکن فعالیت دانشگاهی، یعنی تدریس، پژوهش، وخدمات است به‌ترتیب از صفحات ۱۳۳–۱۳۴، ۳۲۱–۳۲۴، و ۲۱۹–۲۲۱ انتخاب کرده‌ایم.

از «پیش درآمد»

... این کتاب قطعاً یك کتاب ریاضی نیست، و داستان منشأ خانوادگی وزندگی من هم نیست. من یقیناً پدر و مادری داشته‌ام، همسرداشته‌ام (دوتا، هربار یکی، واین یکی را چهل سال است که دارم)، گربه داشته‌ام (هشت تا، هر بـار دوتا، و دوتای فعلی را سه سال است کـه دارم)، اشتباهات فراوانی کرده‌ام و فکر می‌کنم چندتـایی صفت خـوب هم داشته‌ام. همهٔ ایـن حرفها درست است، اما به‌شما مربوط نمی‌شود– این کتاب راجع به‌این قضایا نیست.

موضوع این کتاب کار و کردار یك ریاضیدان حرفـه‌ای از دههٔ ۱۹۳۰ تا دههٔ ۱۹۸۰ است. مطالبش کم و بیش به‌ترتیب زمانی عرضه شده، اما ترتیب مطالب درهربخش برحسب موضوع است نه‌برحسب زمان...

پنجاه سال پیش ازاین، از خود راضی، سنت‌شکن، جسور، بلندپرواز، شتابزده، جاهل، ومتزلزل بودم. امروزه‌شتابم کمترشده، پخته‌تر شده‌ام (راستی؟) وچیزهایی آموخته‌ام. از یك جهت، این کتاب پیامی است ازمن امروز به‌من سالها پیش، و برخی از اسراری راکه درآن زمان با سرسختی تمام دربی دانستنشان بودم فاش می‌کند.

کلمات

من کلمات را بیش ازاعداد دوست می‌دارم، وهمیشه هم بیشتر دوست داشته‌ام. ممکن است بپرسید که پس چرا ریـاضیدان شده‌ام. راستش نمی‌دانم. به‌گمانم برخی ازدلایل این امر در داستان زندگی من باشد، وفکرمی‌کنم که تصادف دراین‌میان به‌اندازهٔ انتخاب شخص من‌دخالت داشته است، وسعی می‌کنم ضمن این کتاب این‌موضوع را به تـدریج توضیح دهم. فقط می‌دانم که گاهی مطمئن نبودم کـه می‌خواهم چکاره بشوم.

جملهٔ سرآغـاز این نوشته نظر مرا در بارهٔ بسیاری از چیزهـا بیان می‌کند و نیز بیان می‌کند که چرا این نظر را دارم. مثلاً ازاین جمله می‌توان دریافت، یا دست‌کم قصد من ازنوشتن آن تذکر ایـن نکته بوده است، که من در ریاضیات مفاهیم را بیش ازامورمحاسباتی دوست می‌دارم. به‌نظرمن، تعریف گروه بسیار روشنتر ومهمتر وزیباتر از فرمول انتگرال کوشی است. اما شایـد مقایسهٔ یك مفهوم بـا یك واقعیت بی‌انصافی باشد. بسیارخوب، به‌نظر من این امر که اگر تابع مختلطی یك بار مشتق‌پذیر باشد بینهایت بار مشتق‌پذیر است،از لحاظ زیبایی وعمق بسیار برتر از فرمول معروف کمبل–پیکرهـاوسدورف دربارهٔ تابع نمایی عملگرهای تعویض‌ناپذیر است.

جملهٔ سرآغاز نوشته همچنین متضمن این معنی است که علاقهٔ من به‌فهمیدن ریاضیات و روشن‌کردن آن برای خود و دیگران، بیش از علاقهٔ من به‌کشف ریاضیات است. برای من لذت‌آموختن نـاگهانی رازی‌که تاکنون برمن پوشیده بوده با لذت کشف ناگهانی حقیقتی که تاکنون نـاشناخته مانده یکسان است: هردو نـاگـاه چیزی را برمن روشن‌می‌کنند، دیدم را به‌صورتی‌که باور کردنش مشکل است گسترش می‌دهند، وحالت خلسه ونشاطی درمن پدید می‌آورندکه از رهایی از کشاکشها حاصل‌می‌شود. با این حال،کشف یك حقیقت جدید، هرچند ازلحاظ لذت درونی فرقی با فهم یك حقیقت کهن ندارد، ازیك‌جهت با آن بسیارمتفاوت است: فرق این دو درغرور و احساس پیروزی و رضایت خاطر خبیثانـه‌ای است کـه از اول نفر شدن به‌انسان دست می‌دهد. اول نفرشدن به‌این معنی است که دیگری نفردوم است، به‌این معنی است که انسان می‌خواهد جایش را در سلسله مراتب تعیین کند. ممکن‌است حرف من به‌این‌صورت تعبیرشودکه به‌نظرمن روشن کردن مطالب ریاضی موجود اخلاقیتر ازکشف مطالب جدید ریاضی است. پیداست که این حرف ابلهانه است، پس بهتراست به‌جای آن بگویم که بصیرتی‌عاری ازخودپسندی وتحقیر دیگران بهتر از بصیرتی‌است که با این دوهمراه بـاشد. شاید هم منظور من جز این نباشدکـه در صیقل زدن [به اندیشه‌های دیگـران] بیشتر مهارت دارم تـا درشکار [اندیشه‌های جدید]، وبنابراین‌کاری راکه ازدست من‌بهترساخته است بیشتردوست دارم.

1. Halmos P. R., *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1985.



تدریس

این قضیه صادق است یا کاذب: کسی که واقعاً مطلبی را بداند می‌تواند آن‌را تدریس کند؟ از فهم متعارف دلایل محکمی در تأیید و رد این نظر به‌دست می‌آید، ومن‌هم دلایلی در تأیید و دلایلی در رد آن دارم.

مشکل تا حدودی از اینجا پدید می‌آید که درست بودن عکس این قضیه بدیهی است (کسی که بخواهد چیزی را تدریس کند باید آن را خوب بداند) و غلبه بر این وسوسه که عکس را یك بار دیگر می‌توان معکوس کرد، دشوار است. اما ماجرا به اینجا ختم نمی‌شود. اگر کسی نظریهٔ پتانسیل را به‌خوبی باب مارتین[1] بداند، یا مثال معروفتری بیاوریم، اگر کسی به اندازهٔ نوربرت وینر از آنالیز فوریه اطلاع داشته باشد چرا ما را از آن بی‌خبر بگذارد؟ چرا آن را به‌ما نیاموزد؟ چه‌طور ممکن است که این کار از او ساخته نباشد؟ حقیقت تلخ این است که بعضیها از توضیح دادن مطالب عاجزند، هرچند موضوع را بهتر از دیگران بدانند واین نکته هم واضح ومدلل باشد.

من باب مارتین را می‌شناختم، نوربرت وینر را می‌شناختم، و بسیاری آدمهای دیگر ازاین سنخ را می‌شناختم، ونمی‌توانم این معما را حل کنم. با این حال، بیشتر به‌این نظر گرایش دارم که اگر کسی چیزی را واقعاً بداند از عهدهٔ تدریس آن هم برمی‌آید. می‌خواهم بگویم که نوربرت وینر به‌یك اعتبار «نمی‌فهمید» که چه می‌کند، یا دست‌کم به‌خوبی غالب نویسندگانی که بیست سال پس از او دربارهٔ آنالیز همساز کتاب درسی نوشته‌اند، نمی‌فهمید. وینر قلباً اهمیت ایده‌آلها را درك می‌کرد، اما (تا آنجاکه به‌یاد دارم) هیچ وقت این واژه را به‌کارنمی‌برد. اوهیچ وقت سعی‌نمی‌کرد که میان آن‌شیوه‌های نیرومند آنالیزی که به‌کمك آن نتایج هیجان‌آوری به‌دست می‌آورد، وآن مفاهیم کلی جبری که این شیوه‌ها را به‌صورتی شفاف نمایش می‌دهند، رابطه‌ای ایجاد کند. او دلش می‌خواست که منظورش را بفهماند وسعی هم می‌کرد، اما معنی سعی کردن را درست نمی‌دانست. فکر می‌کرد که معنی آن این‌است که به‌جزئیات بپردازد، و بین‌بسیاری علامتهای انتگرال دوگانه را با معادلات بسیار پر کند، و با گامهای کوچك از یك معادله به معادلهٔ دیگر برسد. البته او گاهی در تشخیص اینکه مردم به‌چه چیزی «کوچك» می‌گویند، اشتباه می‌کرد، اما مشکل اصلی این نیست. دشوارفهم بودن نوشته‌های او به این علت است که درست بیان نمی‌کند که «واقعاً» چه اتفاقی دارد می‌افتد. آیا او «واقعاً» می‌دانست؟ به‌اعتقاد من نمی‌دانست. به اعتقاد من او نابغه‌ای بود برخوردار از بصیرتی ژرف. او می‌توانست حقیقت را «ببیند»، اما از آن بینش وشیعی که باعث می‌شود انسان حقیقت را «بفهمد» و «بشناسد» بی‌بهره بود.

شك نیست که وینر مثلثات و هندسهٔ تحلیلی وحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را می‌فهمید، اما آیا می‌توان از این حرف استباط کرد که می‌توانست این موضوعات را خوب هم درس بدهد؟ متأسفانه تشخیص من، به‌عنوان روانشناس آماتور، این است که او و مردمی‌مثل او جزئیاتی را که این مطالب پیش‌پا افتاده را به‌هم ربط می‌دهند، و بین اهمیت آنها را برای بیشتر آدمهای معمولی، در نمی‌یابند، همچنان که دونده‌ها از جزئیات اعصاب و ماهیچه‌های پای خود غافل‌اند. دونده چیزی می‌داند، اما مربی دو و میدانی آن را، به‌یك اعتبار، بهتر از او می‌داند. مربی دو و میدانی واقعاً آن را «می‌فهمد» و برخلاف دونده می‌تواند آن را به دیگران هم بیاموزد.

خدمات

کار تحقیق مرا به‌هیجان می‌آورد و قضیهٔ گذرنامه[1] اسباب دلسردیم شده بود، اما کار معمولی دانشگاهی نه در اوج قله‌ها می‌گذشت و نه در قعر دره‌ها، بلکه در کوره راههای پیموده شدهٔ عرف و سنت با گامهای کند پیش‌می‌رفت. ریاضیات هم به‌آموختن نیاز دارد و هم به سازماندهی؛ کتابها و مقالات را هم باید نوشت و هم باید ویرایش کرد؛ و دانشجویان را هم باید تعلیم داد وهم باید راهنمایی کرد. من دوست داشتم، وحتی مشتاق بودم، که در همهٔ این کارها دستی داشته باشم وازانجام دادن هیچ‌کار کوچکی سر باز نمی‌زدم، وچنان قابلیت خودم را درلابرووی محیط علمی نشان داده بودم که هربار بیل‌تازه‌ای به‌دستم می‌دادند.

چرا این‌کارها را قبول می‌کردم؟ چرا مردم این کارها را قبول می‌کنند؟ دم زدن از وجدان‌کاری تکراری است وشاید هم انگیزه‌های واقعی‌را درست بیان نکند، اما چندان هم دوراز حقیقت نیست. دست کم تا این‌اندازه حقیقت دارد: ما معمولاً نابغه‌های عظیم‌الشأن واقعی یا سرخودی راکه درهیچ کمیته‌ای شرکت نمی‌کنند، داوری دربارهٔ نوشته‌ها را نمی‌پذیرند، و به نسلهای دانشجویانی که ازپس ایشان می‌رسند کمك چندانی نمی‌کنند نمی‌پسندیم. به‌خودمان می‌گوییم که کار اینها درست نیست، و همین که چنین قضاوتی بکنیم به اولین‌کار پیش پا افتاده‌ای که سر راهمان قرار بگیرد کمتر با دید تحقیرنگاه می‌کنیم. و اگر خدای ناکرده معلوم شود که کسی از پس خرده‌کاریها برمی‌آید، دیگرگیر افتاده است. ما همه دوست داریم کاری را انجام دهیم که خوب ازعهده‌اش برمی‌آییم. ماهمه احساس‌موفقیت را دوست می‌داریم، و این احساس همیشه فقط از کاری که به‌عرق ریختن نیاز داشته باشد، به‌دست می‌آید. کار پژوهش بدون عرق‌ریختن انجام نمی‌گیرد، اما گذشته ازآن به استعداد و انگیزه هم نیازدارد. تدریس هم تاحدودی چنین است. خدمتی که مدیران و ویراستاران به‌دانشگاه یا حرفهٔ خود می‌کنند به چیزی جز خردمندی و تجربه و حوصله نیاز ندارد وهمهٔ ما به‌داشتن چنین صفاتی خیلی بیشتر اطمینان داریم تا به داشتن بصیرت و قوهٔ ابداع و قریحهٔ خلاق. گذشته از این، معمولاً انسان درمقابل آن ساعات‌کار «بی‌اجر ومزد» اجر ومزد خوبی‌دریافت می‌کند: درمیان آدمهای درجهٔ دوم معروف می‌شود و خودش را آدم

---

1. Bab Martin

۱. دردوران مك‌کارتی، هالموس که‌ازسوی‌کمیتهٔ فعالیتهای‌ضدآمریکایی، مظنون شمرده می‌شد، نتوانست برای سفر به‌خارج از آمریکا گذرنامه بگیرد. تفصیل این‌ماجرا دراصل کتاب می‌خواهم ریاضیدان به‌حساب آیم آمده است.ـم.

مهمی می‌بینند. همهٔ این ماجرا را می‌توان در یك کلمه خلاصه کرد و آن واژهٔ «گریزگاه» است. انسان به این‌کارها می‌پردازد تا بتواند به خودش بگوید، یا توجیهی برای گفتن این‌حرف داشته باشد، که دیگر وقتی برای تحقیق و برای‌کار خلاق ندارد. چرا من روز به روز پاك کردن اصطبلهای تازه‌ای را برعهده می‌گرفتم؟ جوابش این است که داشتم پا به‌چهل سالگی می‌گذاشتم، چهل‌ساله شده بودم، سنم ازچهل سال می‌گذشت و کم‌کم، دانسته یا ندانسته، حس می‌کردم که دیگر نمی‌توانم‌کار تحقیق را ادامه بدهم. البته این چیزی نیست که آن روزها به‌خودم می‌گفتم، اما حالاکه بعد از گذشت بیست وپنج سال خودم را روانکاوی می‌کنم چنین نتیجه‌ای می‌گیرم.

سابقاً «خدمات» واژهٔ خوبی بود، اما این روزها به‌صورت پل خربگیری برای مدیران دانشگاهها در آمده است. سابقاً چنین تصور می‌شدکه اگرشخص گاه‌گاه سری به‌کتابخانه بزند یا هرچند وقت یك بارمقاله‌ای چاپ کند،عضوجمع مراجعه‌کنندگان به‌کتابخانه ویاچاپ‌کنندگان مقالات محسوب می‌شود ودرنتیجه فرض‌می‌شدکه باید انسان به‌کتابخانه‌کمك‌کند (مثلاً مراقب باشدکه چه‌کتابهایی ازچاپ بیرون می‌آید و به‌کتابخانه توصیه‌کند که بعضی از آنها را بخرد)، یا به ناشران مجلات یاری برساند (مثلاً ازاین راه‌که داور دقیق ومحتاطی باشد). اما همان طورکه شخص گاه‌گاه که حمام می‌کند یا در پایان ترم که نمره‌ها را تحویل می‌دهد نباید انتظار پاداش داشته باشد، در برابر این‌گونه‌کارها هم نباید انتظار پاداش داشت. این نوع‌کارها فی‌نفسه خوب نیست، فقط چاره‌ای ازانجام دادنش نیست، انجام ندادن آن‌گاهی آثار فاجعه‌آمیزی دارد.

شعار: «تحقیق، آموزش، خدمات» شعار ابلهانه‌ای است. عذری است‌که دانشمندان ناموفق برای کاغذبازیهای خود می‌آورند. علت وجودی دانشگاه ایجاد وانتقال علم است، کار دانشگاه برگزارکردن امتحانات کلاس‌بندی، تنظیم زمان و مکان‌کلاسها، تنظیم پروندهٔ دانشجویان، و حتی گرفتن بودجه و توزیع آن نیست. همهٔ این کارها کم وبیش لازم است، و هریك ازما باید برخی ازآنها را انجام‌دهد. این‌کارها جزء خدمات اجتماعی است، و اگر ما انجامشان ندهیم بار همکارانمان سنگینتر می‌شود، و بنابراین نپرداختن به این‌گونه‌کارها عملی ضداجتماعی است، اما این‌کارها را نمی‌توان‌کارهای واقعی و درخور پاداش‌دانست. معلم ضعیف (اگرآفرینندهٔ بزرگی باشد) جایی در دانشگاه دارد، و برای پژوهشگر درجهٔ دوم هم (اگرمعلم خوبی باشد) جایی در دانشگاه می‌توان یافت. اما معلم ناتوانی‌که ازعهدهٔ تدریس هم به‌خوبی برنیاید جایش درهیأت علمی دانشگاه نیست، همچنان‌که منشی‌ومستخدم ومتخصص تحلیل نظام بودجه ومسؤول امور آمریکای لاتین و معاون رئیس جمهور را نمی‌توان به هیأت علمی دانشگاه راه داد. کار این نوع افراد لازم است ــ یا در هرحال‌کار بعضی‌شان لازم است ــ اما کسی را نمی‌توان بدین‌دلیل مستوجب ترفیع و تکریم و دریافت اضافه حقوق دانست.

چگونه پژوهش کنیم؟

آیا کسی می‌تواند راه و رسم پژوهش کردن، خلاقیت، وکشف چیزهای تازه را به‌دیگران بیاموزد؟ بی‌شك نه. من مدتها سعی‌کرده‌ام که ریاضیات بیاموزم، آنرا درك کنم، حقیقتی را دریابم، قضیه‌ای را ثابت کنم، مسأله‌ای را حل کنم، و حالا می‌خواهم راه و رسم این‌کار را بیان کنم، بخش مهم ماجرا ذهنی است و به بیان در نمی‌آید، اما دست‌کم می‌توان جنبهٔ جسمانی مسأله را تا اندازه‌ای توضیح داد.

ریاضیات یك علم قیاسی نیست، و همه این را می‌دانند. وقتی



انسان در پی اثبات قضیه‌ای باشد ابتدا نمی‌نشیند اصلهای موضوع را ردیف کند و بعد به‌استدلال بپردازد. کار او آزمون وخطا، تجربه‌گری وحدس زدن است. می‌خواهد حقیقت را دریابد، وکاری‌که می‌کند از این جهت شبیه‌کار تکنیسین آزمایشگاه است ــ تفاوتی که هست در میزان دقت و اطلاع است. شاید فیلسوفان، اگرزحمت این‌کار را به خود بدهند، به ما ریاضیدانان به همان چشمی نگاه‌کنندکه ما به تکنیسینهای آزمایشگاه نگاه می‌کنیم.

من پژوهش را دوست می‌دارم، می‌خواهم پژوهش‌کنم، باید پژوهش‌کنم، اما از اینکه بنشینم وکار پژوهش را شروع‌کنم بیزارم. بنابراین سعی می‌کنم حتی‌المقدور این‌کار را به‌تعویق بیندازم.

من‌دوست دارم‌که زندگی‌خودرا وقف یك امر بزرگ وخارجی کنم، امری‌که از درون من سرچشمه نگیرد. گاوس وگویا وشکسپیر و پاگانی‌نی درکار خود کامل‌اند و من ازکمال آنها لذت می‌برم. ایشان را تحسین می‌کنم و به‌ایشان حسد می‌برم. اینها آدمهای سختکوشی‌هم هستند. کمال مختص عدهٔ معدودی است، اما سختکوشی صفتی است که هرکس می‌تواند، و باید، داشته باشد و بدون آن زندگی ارزشی ندارد.

با اینکه درگیری عاطفی من درکار بسیار شدید است، اما از شروع‌کردن کار بیزارم و هر بار باید با خودم جنگ کنم. آیا پیش ازآن نمی‌توانم (نباید) کار دیگری انجام بدهم؟ بهتر نیست‌که مدادهایم را بتراشم؟ البته من هیچ وقت ازمداد استفاده نمی‌کنم، اما عبارت «مداد تراشیدن» اسم رمزی است برای هرچیزی‌که رنج‌کار فشرده وخلاق را به‌تعویق بیندازد، مثل جستجوی منابع در کتابخانه، مرتب‌کردن یادداشتها، وحتی آماده‌کردن درس فردا ــ با این‌بهانه‌که وقتی این‌کارها تمام شد می‌توانم بدون مزاحمت به‌کارفشرده بپردازم.

وقتی کارمایکل[1] شکایت می‌کرد که در دوران ریاستش در هفته بیش از بیست ساعت وقت تحقیق نداشته است، من تعجب کردم، و هنوزهم تعجب می‌کنم. من درسالهای پربارعمرم به‌طورمتوسط‌هفته‌ای بیست ساعت با تمرکزخاطر به‌ریاضیات می‌پرداختم اما به‌ندرت پیش می‌آمد که بیشتر ازاین وقت برسر این کار بگذارم. این موارد معدود دوسه بار در زندگی من پیش‌آمد، و آن هم وقتی بودکه رشتهٔ

---

1. Carmichael

هالموس درقسمت دیگری ازکتاب می‌گوید هنگامی‌که او در دانشگاه ایلینوی دانشجوی دکتری بوده، کار مایکل سرپرستی دوره‌های فوق‌لیسانس و دکتری دراین دانشگاه را به‌عهده داشته است.ـم.

تفکرات طولانی من به نتیجه نزدیك می‌شد. گرچه من هیچ وقت سرپرست یك دورهٔ فوق لیسانس و دکترا نبودم، به نظرم می‌آمد که انرژی فکریم فقط برای سه چهارساعت کار، «کار واقعی» در روز، کفاف می‌دهد. باقی‌وقتم را به‌نوشتن، درس‌دادن، نقدکردن، کنفرانس دادن، اظهارنظرکردن، ویرایش وسخنرانی می گذراندم و خلاصه انواع مدادهایی راکه به ذهنم می آمد می‌تراشیدم. هرکسی که به‌کار تحقیق اشتغال داشته باشد، گاهی دچار دورانهای رکود می‌شود. من در دوره‌های رکود سایر فعالیتهای حرفه‌ای، حتی آموزش مثلثات، را بهانهٔ زندگی خود قرار می‌دادم. به‌خودم می گفتم که بله، شاید امروز هیچ قضیهٔ تازه‌ای اثبات نکرده باشم اما دست کم قانون سینوسها را خوب توضیح داده‌ام وخرج زندگیم را هم درآورده‌ام.

چرا ریاضیدانان پژوهش می‌کنند؟ به‌این سؤال پاسخهای مختلفی می‌توان داد. پاسخی که من ازهمه بیشتر می‌پسندم این است که ما کنجکاویم، یعنی نیاز به دانستن ما را به این‌کار وادار می‌کند. در واقع مثل این‌است که بگوییم «چون دلمان می‌خواهد»، ومن این‌پاسخ را هم می‌پذیرم. این هم پاسخ خوبی است، اما پاسخهای دیگری هم هست که بیشترجنبهٔ عملی دارد.

ما به مهندسان، فیزیکدانان، زیست شناسان،روانشناسان، اقتصاددانان ــ و ریاضیدانان ــ آینده ریاضیات می آموزیم. اگر ما به‌اینها یاد بدهیم که فقط مسائل توی کتابشان را حل کنند، چیزهایی که باد می گیرند قبل‌ازاینکه درسشان را تمام کنند کهنه شده‌است. حتی‌دیدگاه تنگ‌نظرانه و ساده‌اندیشانهٔ صنعتی و شغلی هم ایجاب می کند که دانشجویان خود را برای پاسخگویی به پرسشهایی که در دوران تحصیل ایشان اصلاً مطرح نبوده، و درآینده برای ایشان مطرح می‌شود، آماده کنیم. کافی نیست که دانسته‌ها را به‌ایشان یاد بدهیم، بلکه باید یاد بگیرند به‌آن چیزهایی هم که هنوز شناخته نشده است پی ببرند. به‌عبارت دیگر، باید راه‌حل مسائل، یعنی‌راه پژوهش کردن، را به ایشان یاد داد. معلمی که همیشه به‌فکرحل مسائل ــ یعنی مسائلی که هنوز پاسخشان را نمی‌داند ــ نباشد، از لحاظ روانی نمی‌تواند مسأله حل کردن را به‌دانشجویان خود بیاموزد.

یکی ازجنبه‌های کارپژوهش که اصلاً ازمن برنمی‌آید، وبنابراین علاقه‌ای هم به‌آن ندارم، رقابت است. سرعت من آنقدر زیاد نیست که دیگران را پشت سر بگذارم وبرنده بشوم. پس به جای کوشش برای اول نفرشدن، جهتی عمود برمسیر اصلی انتخاب می کردم به‌این امیدکه یك حوزهٔ کوچك اما عمیق برای خودم پیدا کنم. به جای این که وقتم را برسر اثبات فلان حدس معروف تلف کنم و آخر سر هم موفق نشوم، سعی می کردم که مفهومی فراموش شده پیدا کنم یاپرسشی پرثمر طرح کنم. توفیق دراین‌کار هم در طول زندگی چندان دست نمی‌دهد، و اگر آن مفهوم یا پرسش، مفهوم یا پرسش درستی باشد خیلی زود به‌دست دیگران می‌افتد وانسان در می‌یابد که در حوزهٔ‌کار خودش، دیگرانی که به‌روشهای نیرومندتر دسترسی دارند و بصیرت ژرفتری دارند او را پشت سر گذاشته‌اند. حقیقت این است که من از این موضوع زیاد هم ناراحت نیستم، بالاخره نوعی تقسیم‌کار منصفانه است. البته من دلم می‌خواست که قضیهٔ زیرفضای ناوردای زیرنرمال را ثابت کنم. اما همین که این مفهوم را معرفی کرده‌ام و راه را نشان داده‌ام، خودش‌کاری محسوب می‌شود.

یکی از نتایج دور بودن از میدان رقابت این بود که زیاد هم عجله نمی کردم. ازخودم می‌پرسیدم که چه اشکالی دارد انسان یکی دوسالی از آخرین تحولات عقبتر باشد؟ و به خودم جواب می‌دادم که هیچ اشکالی ندارد. اما این پاسخ همیشه برای من گره‌گشا نبود، و درمورد بعضی ازمردم، که ساختمان روانی‌شان با من فرق دارد، هیچ وقت درست نیست. وقتی خبر کشف لومونوسوف[1] (دربارهٔ زیرفضاهای توأم ناوردای عملگرهای فشردهٔ تعویض شونده) و کشف اسکات براون[2] (دربارهٔ عملگرهای زیرنرمال) برسرزبانها افتاد، من‌هم مثل‌هرمتخصص دیگرنظریهٔ عملگرها به‌هیجان آمدم، و دلم می‌خواست که جزئیات قضیه را هرچه زودتر یاد بگیرم، اما این گونه تحولات بنیادی چنان به‌ندرت پیش می آیدکه من هنوزهم بیشتر زندگیم رابا رضایت خاطرعقبتر از زمانه می گذرانم.

خیلی خوب، دراین وضع ــ دور ازمیدان رقابت، عمود برمسیر اصلی، و عقب‌تر از زمانه ــ عملاً چه‌کار می کنم؟ پاسخ این است‌که می‌نویسم. پشت میزم می‌نشینم، یك خودکارسیاه به دست می گیرم و روی کاغذهای ۲۱ در ۲۸ سانتیمتری می‌نویسم. ابتدا در گوشهٔ بالایی سمت راست کاغذ یك عدد «۱» می گذارم و بعد شروع می کنم: «هدف از این یادداشتها مطالعهٔ تأثیر اغتشاشی از رتبهٔ ۱ بر یك ساخت شبکه‌ای... است» وقتی پاراگراف تمام شد، درحاشیه‌اش یك حرف «A»ی بزرگ سیاه می‌نویسم و نوشتن پاراگراف B را شروع می کنم. شماره‌های صفحات وحروف مشخص کنندهٔ پاراگرافها سیستم ارجاع نوشتهٔ مرا، که غالباً به چند صفحه بالغ می‌شود، تشکیل می‌دهد: C ۸۷ یعنی پاراگراف C درصفحهٔ ۸۷. این ورقها را توی کلاسورهای سه حلقه‌ای می گذارم و روی عطف آنها عناوینی چون «تقریب»، «شبکه»، «عملگرهای انتگرالی» وغیره می‌نویسم. اگریکی ازاین طرحها موفق ازکار درنیاید، یکی‌از این کلاسورها به یك مقاله تبدیل می‌شود، اما این کلاسورها راموفق یا ناموفق، دلم نمی‌آیدکه دوربیندازم، وهمیشه دهها کلاسور توی قفسه‌های کنار میزم هست. همیشه امیدوارم که‌کلاسورهای‌ناتمام بالاخره رشد خواهندکرد، وآنهایی که‌از توی‌شان‌مقاله‌ای‌بیرون‌آمده‌است حاوی آن گوهر بصیرتی‌هستند که‌برای حل‌مسألهٔ حل ناشدهٔ‌اصلی‌لازم است وتاکنون از نظرها دورمانده‌است.

تا وقتی که می‌توانم پشت میزم می‌مانم، یعنی تا وقتی که انرژیم تمام شود یا وقتم به پایان برسد. سعی می کنم کارها را طوری ترتیب بدهم که‌کارم دریك‌موقعیت پیروزمندانه،مثلاً بعد از اثبات یك قضیهٔ فرعی، یادربدترین‌حالت، بعد ازمواجهه با یك مشکل بررسی نشده‌که دشواریش آشکار نیست، متوقف‌شود. بدین‌طریق ضمیر ناخودآگاه من می‌تواندکاررا به‌دست بگیرد واگر بخت‌بامن یارباشد، درهمان‌حال‌که به دفترم می‌روم، یا درکلاس درس می‌دهم، یا حتی شبها در موقع خواب،کار را پیش ببرد. پاسخ گریزپا گاهی خواب را برمن حرام می کند، اما راهی برای کلاه‌گذاشتن برسرخودم پیدا کرده‌ام: بعد از اینکه مدتی دربستر می‌غلتم چیزی نمی گذردکه ــ معمولاً بعد ازچند دقیقه‌ای ــ مسأله را «حل» می کنم یا اثبات مثال نقیض آن در ذهنم جرقه می‌زند، و خوشحال و راضی به‌رو می‌افتم و به خواب می‌روم. اما تقریباً همیشه معلوم می‌شودکه آن جرقه دروغین بوده است: آن اثبات یك اشکال عمده دارد، یا آن مثال نقیض اصلاً نقیض چیزی نبوده است. اما اشکالی ندارد، چون تا وقتی خواب بیهوشم کند اعتقادم را به‌آن راه حل از دست نمی‌دهم. نکتهٔ عجیب این است‌که اصلاً به یاد ندارم که در شب، در بستر، در تاریکی، در درستی «بصیرت» خودم شك کرده باشم. فرارسیدنش برایم چنان مبارك است که بی‌هیچ تردیدی آن را می‌پذیرم. و درچند موردهم صائب ازکار درآمده است.

ترجمهٔ حسین معصومی همدانی

---

1. Lomonosov 2. Scott Brown

مسألهٔ دهم هیلبرت*

مارتین دیویس، روبن هرش*

آیا می‌توان روشی طرح کرد که نشان دهد یك معادلهٔ دیوفانتی (معادله‌ای‌که جوابهای صحیح آن مورد نظر است.) جواب دارد یا نه؟ به‌این سؤال که یکی از سؤالهای فهرست مشهور هیلبرت است، جواب داده شده است.

داوید هیلبرت، در ۸ اوت سال ۱۹۰۰ در پاریس با معرفی فهرستی از ۲۳ مسألهٔ اساسی به استقبال قرن جدید می‌رود، ریاضیدانان آینده را به‌مبارزه می‌طلبد و دومین کنگرهٔ ریاضیدانان را چنین مخاطب‌قرار می‌دهد: «در درون خود این ندای دایمی را می‌شنویم که: مسأله این است، جوابش را بیاب؛ می‌توان جواب را با استدلال محض به‌دست آورد، زیرا درریاضیات هرگز نخواهیم دانست معنی ندارد.» بعضی از مسائل هیلبرت هنوزهم حل‌نشده‌اند؛ وبعضی‌دیگر به‌چند نسل پژوهشگر ریاضی الهام بخشیده وآنان را به‌سوی نظریه‌های جدید ریاضی‌سوق داده‌اند. جدیدترین‌مسألهٔ حل‌شدهٔ هیلبرت، مسألهٔ دهم اوست که درسال ۱۹۷۰ به‌وسیلهٔ یوری ماتیاسویچ[1] ریاضیدان ۲۲ سالهٔ روسی حل‌شد.

داوید هیلبرت درسال ۱۸۶۲ در کونیگسبرگ[2] متولد شد و از سال ۱۸۹۵ تاسال ۱۹۴۳ که مرگش‌فرا رسید استاد دانشگاه گوتینگن بود. بعد از مرگ هانری پوانکاره درسال ۱۹۱۲، عموماً او را بزرگترین ریاضیدان عصرخودش می‌دانستند. هیلبرت درچندین زمینهٔ ریاضی سهم اساسی‌دارد، ولی از اوبیشتر به‌خاطرتوسعهٔ روش تجریدی به‌عنوان ابزاری نیرومند درریاضیات یاد می‌شود.

مسألهٔ دهم هیلبرت به‌آسانی بیان می‌شود. این‌مسأله، به‌ساده‌ترین و اساسیترین مبحث ریاضی، یعنی حل‌معادلات، مربوط است. معادلاتی که باید حل شوند، معادلات چند جمله‌ای هستند، یعنی معادلاتی مانند $x^2 - 3xy = 5$، که از جمع وضرب ثابتها و متغیرها و با به‌کاربردن توانهای صحیح ومثبت تشکیل می‌شوند. به‌علاوه هیلبرت تصریح کرد که در این معادلات، تنها باید اعداد صحیح مثبت یا منفی به‌کار رود. هیچ‌عدد گنگ یا موهومی، وحتی‌عدد گویا، مجاز به‌ورود درمعادلات‌و یا درجوابهای آنها نیست. معادلاتی‌ازاین گونه را، به‌یاد دیوفانتوس اسکندرانی[1] که درقرن سوم میلادی کتابی‌دراین‌باب تألیف کرده‌است، معادلات دیوفانتی می‌نامند.

مسألهٔ دهم هیلبرت این است: شیوه‌ای مکانیکی ارائه دهید که باآن بتوان هرمعادلهٔ دیوفانتی را آزمود و دید که جواب دارد یا نه. به‌بیان هیلبرت: «معادله‌ای دیوفانتی با تعدادی دلخواه مجهول و با ضرایب صحیح مفروض است؛ روشی ارائه‌کنیدکه طبق آن باتعدادی متناهی عمل بتوان تعیین‌کرد که معادله جواب دارد یا نه.» هیلبرت جویای روشی که جوابها را پیدا کند، نبود، بلکه صرفاً در جستجوی روشی بودکه مشخص کند معادله جواب دارد یا نه. این فرایند باید شیوهٔ صوری‌بدون ابهامی باشدکه بتوان آن را به‌صورت برنامه‌ای برای ماشین محاسبه درآورد، و کارایی آن در تمام حالات قابل تضمین باشد. چنین فرایندی را یك الگوریتم می‌نامند.

اگرمسألهٔ هیلبرت به‌صورت ساده‌ای بیان می‌شود، بیان جواب ماتیاسویچ ازآن هم ساده‌تر است: هرگز نمی‌توان چنین‌فرایندی طرح کرد؛ چنین الگوریتمی وجود ندارد. با این شیوهٔ بیان، جواب ماتیاسویچ نومید کننده و منفی به‌نظر می‌رسد. باوجود این، کار ماتیاسویچ کاری است مهم و مفید که خواص اعداد را به‌ما بهتر می‌شناساند.

کار ماتیا سویچ، گسترش یك رشته پژوهش است‌که به‌وسیلهٔ سه آمریکایی به‌عمل آمده است: دیویس (یکی ازنویسندگان این مقاله)، جولیارابینسون[2]، وهیلری پاتنام[3]. کاراین گروه به‌نوبهٔ خود مبتنی بود بر پژوهشهای پیشین چند نفر از بنیانگذاران منطق جدید و نظریهٔ محاسبه پذیری[4]: آلن تورینگ[5]، امیل پست[6]، آلونسوچرچ[7]، استفن کلین[8]، وکورت گودل‌که به‌خاطرکار درزمینهٔ سازگاری دستگاههای اصل موضوعی (مسألهٔ دوم هیلبرت) و فرضیهٔ پیوستار[9] کانتور (مسألهٔ اول هیلبرت) معروف است.

اکنون بانظری به‌چند معادلهٔ دیوفانتی بررسی مسألهٔ دهم هیلبرت راآغازمی‌کنیم. اصطلاح «معادلهٔ دیوفانتی» تاحدی گمراه‌کننده است، زیرا ماهیت معادله به‌اندازهٔ ماهیت جوابهای قابل قبول آن دارای اهمیت‌نیست. مثلاً، هرگاه معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2 = 0$ را به‌عنوان یك معادلهٔ دیوفانتی‌درنظرنگیریم، این‌معادله بینهایت‌جواب دارد. جوابها،

---

1. Diophantus of Alexandria
2. Julia Robinson
3. Hilary Putnam
4. computability
5. Alan Turing
6. Emil Post
7. Alonzo Church
8. Stephen Kleene
9. continuum hypothesis

1. Matyasevich
2. Konigsberg

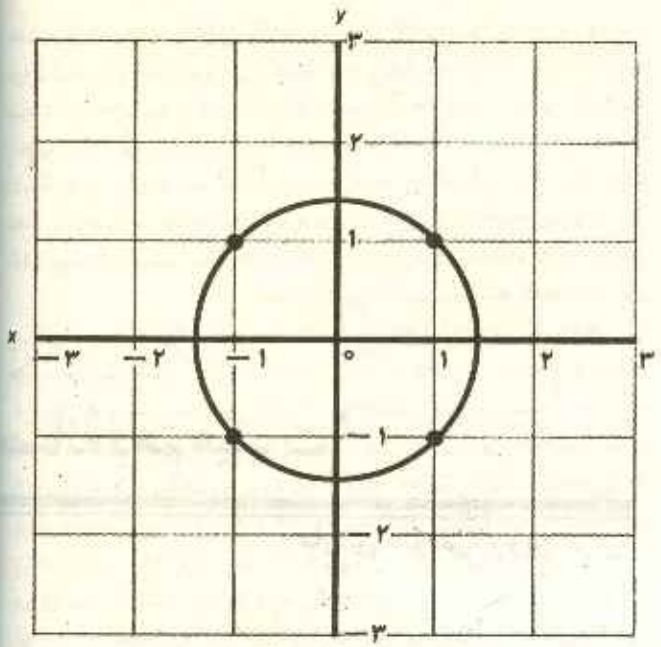
به‌وسیلهٔ نمودارمعادله نمایش‌داده می‌شوند، که دایره‌ای است واقع در صفحه‌ای که توسط محورهای x و y ساخته می‌شود: مرکزاین دایره، دارای مختصات $x=0$ و $y=0$ است. این نقطه مبدأ نامیده می‌شود وبه‌صورت $(0,0)$ نمایش‌داده می‌شود. شعاع دایره برابر $\sqrt{2}$ است. (شکل ۱). مختصات هر نقطهٔ دایره در معادله صدق می‌کند، و تعداد این‌گونه نقاط بینهایت است. ولی، اگر معادله را به‌عنوان یك معادلهٔ دیوفانتی درنظربگیریم، تنهادارای این چهارجواب است: (۱) $x=1$، $y=1$؛ (۲) $x=-1$، $y=1$؛ (۳) $x=1$، $y=-1$؛ و (۴) $x=-1$، $y=-1$.

فرض کنید این معادله، به‌معادلهٔ $x^2+y^2-3=0$ تغییر یابد. معادلهٔ اخیر به‌عنوان یك معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد، اما به عنوان یك معادلهٔ دیوفانتی، ابداً جواب ندارد. دلیلش این است که اکنون نمودارمعادله،دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{3}$ است واین خم هیچ‌نقطه‌ای نداردکه هر دومختص آن عدد صحیح باشد.

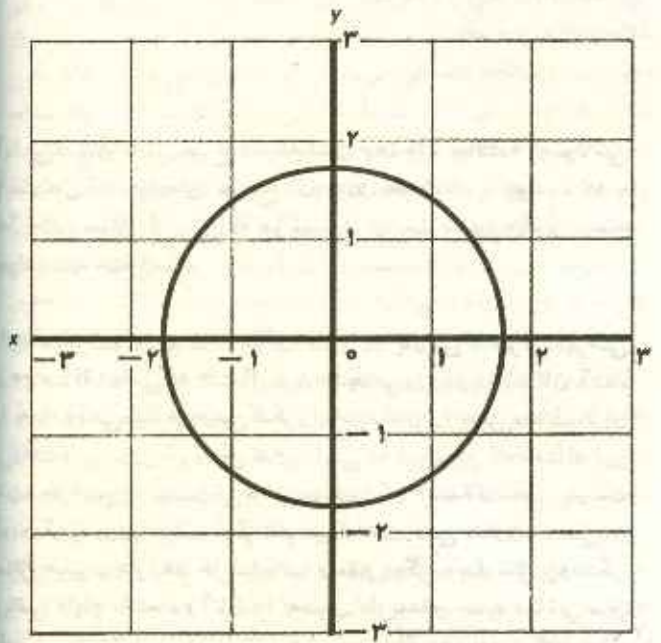
دستهٔ معروفی ازمعادلات دیوفانتی به‌صورت $x^n+y^n=z^n$است، که در آن n می‌تواند ۲، ۳، ۴ یا هرعدد صحیح بزرگتری باشد. اگر n برابر ۲ باشد، طول اضلاع هرمثلث قائم‌الزاویه‌ای درمعادله صدق می‌کند ــ معادله به‌قضیهٔ فیثاغورث موسوم است. یك دسته از این جوابها اعداد $x=3$، $y=4$، $z=5$ است. اگر n برابر ۳ یابزرگتر ازآن باشد، معادله همان چیزی است که به معادلهٔ فرما مشهور است. پیردوفرما، ریاضیدان قرن هفدهم فرانسه، فکرمی‌کرد ثابت کرده است که‌این‌معادلات دارای‌جوابهای صحیح مثبت نیستند: وی‌درحاشیهٔ نسخهٔ خود ازکتاب دیوفانتوس نوشته است که «اثباتی شگفت‌انگیز» برای این موضوع یافته است، اما متأسفانه این اثبات به‌قدری طولانی‌است که دراین حاشیه جا نمی‌گیرد. این اثبات (اگرواقعاً فرما چنین‌اثباتی داشت) هرگزپیدا نشد. شاید این مساله، که به‌آخرین قضیهٔ فرما معروف است، قدیمیترین و معروفترین مسألهٔ حل نشدهٔ ریاضی باشد. این مثالها نشان می‌دهندکه نوشتن معادلات دیوفانتی آسان ولی حل آنها مشکل است. حل این معادلات مشکل است، زیرا درمورد نوع اعدادی‌که به‌عنوان جواب می‌پذیریم، محدودیت قائلیم.

درمورد معادلات درجهٔ اول، یعنی معادلاتی که درآنهامجهولهادر هم ضرب نشده‌اند وهمهٔ توانها برابر با یك‌اند، همچون معادلهٔ $7x+4y-3z-99t+13u-10=0$، وجود یا عدم وجود جوابها را می‌توان به‌وسیلهٔ یك فن تقسیم، که از قدیم به الگوریتم اقلیدس معروف است، تعیین کرد. در مورد معادلات درجهٔ دوم دو مجهولی، مانند $3x^2-5y^2+7=0$ یا $x^2-xy-y^2=1$، با نظریه‌ای‌که در اوایل قرن نوزدهم به وسیلهٔ کارل فریدریش گاوس کبیر توسعه یافت، می‌توان وجود یا عدم وجود جوابها را تعیین کرد. کار اخیر ریاضیدان جوان انگلیسی، آلن بیکر[1] روی معادلات دومجهولی که درجهٔ آنها بیش از ۲ است، موضوع را تا حد زیادی روشن کرده است. درمورد معادلات با بیش‌ازدومجهول که‌درجهٔ آنها بیش‌ازیك‌است، درمقابل‌دریای عظیمی ازبی‌اطلاعی، تنهاچند حالت خاص رامی‌توان با شگردهای ویژه حل کرد.

به‌چه دلیل به دست آوردن فرایندی ازآن‌گونه‌که هیلبرت می‌خواست، بسیار مشکل است؟ سرراست‌ترین راه برای به‌دست آوردن جواب، آن است که تمام مقادیر ممکن مجهولها را یکی پس از دیگری بیازماییم تا وقتی که جوابی پیدا شود. برای مثال، اگر معادله دارای دومجهول باشد، می‌توان فهرستی ازتمام جفتهای اعداد



$x^2+y^2-2=0$



$x^2+y^2-3=0$

شکل ۱. نمودارهای دو معادله تفاوت بین یك معادلهٔ معمولی ویك معادلهٔ دیوفانتی راکه تنها به‌جوابهای صحیح آن علاقه‌مندیم، روشن می‌کند؛ این تفاوت، محورمسألهٔ دهم هیلبرت‌است. معادلات موردنظر، $x^2+y^2-2=0$ (بالا) و $x^2+y^2-3=0$ (پایین) هستند، که به‌وسیلهٔ دایره‌هایی به‌مرکز مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ به‌مختصات $x=0$، $y=0$، نمایش داده شده‌اند. درمورد $x^2+y^2-2=0$، شعاع دایره $\sqrt{2}$ است. این معادله، به‌عنوان یك معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد ولی به‌عنوان یك‌معادلهٔ دیوفانتی، تنها چهار جواب، (۱) $x=1$، $y=1$؛ (۲) $x=-1$، $y=1$؛ (۳) $x=1$، $y=-1$ و (۴) $x=-1$، $y=-1$ دارد. این جوابها باخالهایی نمایش داده شده‌اند؛ این‌خالها محل تلاقی‌نمودار و چهار نقطه به‌مختصات فوق‌الذکر در شبکهٔ دکارتی هستند. درمورد $x^2+y^2-3=0$، شعاع دایره $\sqrt{3}$ است. این معادله به‌عنوان یك معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد، ولی به‌عنوان یك معادلهٔ دیوفانتی، ابداً جواب ندارد.

1. Alan Baker

صحیح تشکیل داد. سپس با مرور این فهرست و آزمودن یك جفت پس از جفتی دیگر، دید که کدام در معادله صدق می‌کند. مسلماً این روش، روش مکانیکی بدون ابهامی است که می‌توان آن را به ماشین هم داد. نتیجه چه خواهد بود؟

اگر معادله، نخستین معادله‌ای باشد که ذکر کردیم، یعنی $x^2+y^2-2=0$، پس از آزمودن (۰, ۰)، (۰, ۱)، (۱, ۰)، (۱, ۱)، (۰, −۱)، (−۱, ۰)، همه را کنار می‌گذاریم. نام زوج بعدی، (۱, ۱)، یك جواب است. شانس آوردیم زیرا تنها شش جفت را باید در نظر می‌گرفتیم. اما اگر معادله $x^2+y^2=200000$ باشد، قبل از یافتن جواب باید هزاران جفت عدد را بیازماییم. بازهم روشن است که اگر جوابی وجود داشته باشد، در تعدادی متناهی مرحله به‌دست می‌آید.

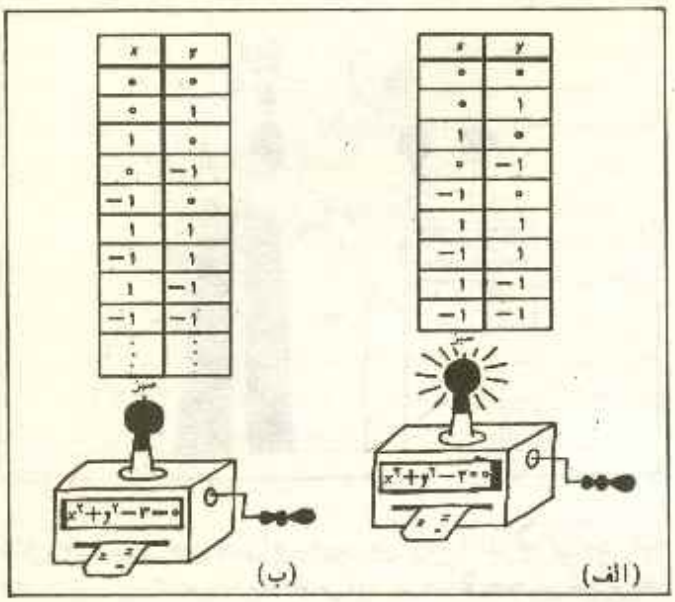
از طرف دیگر دربارهٔ معادلهٔ $x^2+y^2-3=0$ چه می‌توان گفت؟ می‌توان الی‌الابد جفتهای اعداد را آزمود؛ تنها چیزی که معلوم خواهد شد آن است که هنوز جوابی به‌دست نیامده است. هیچگاه مسلم نیست که آیا جفت بعدی که به نوبهٔ آزمایش گذاشته می‌شود، جواب است یا خیر. درمورد این مثال خاص می‌توان ثابت کرد که جواب وجود ندارد. اما اثبات به‌ایدهٔ تازه‌ای نیازمنداست؛ و نمی‌توان صرفاً با قراردادن اعداد صحیح درمعادله، یکی پس ازدیگری، چنین اثباتی را به‌دست آورد.

ابزاری که فرایندی از نوع فرایند پیشنهادی هیلبرت را اجرا می‌کند، باید ضرایب یك معادلهٔ دیوفانتی دلخواه را به‌عنوان ورودی بپذیرد؛ و به‌عنوان خروجی، اگر معادله دارای جواب باشد، یك چراغ سبز و درصورتی که دارای جواب نباشد، یك چراغ قرمز روشن کند. چنین ماشینی را می‌توان ماشین‌هیلبرت نامید. درمقابل، وسیله‌ای راکه جوابها را با بینهایت آزمایش متوالی جستجو می‌کند، می‌توان ماشین «سبزچراغ» نامید. اگرمعادله جواب‌داشته باشد، بعداز تعدادی متناهی مرحله، چراغ‌سبز روشن می‌شود؛ و اگر معادله جواب نداشته باشد، محاسبه الی‌الابد ادامه می‌یابد؛ برخلاف ماشین هیلبرت، ماشین سبزچراغ زمانی برای توقف نمی‌شناسد (شکل ۲).

ساختن ماشین سبزچراغ برای معادلات دیوفانتی آسان است. مؤال این است که آیا می‌توان کار بهتری انجام داد و یك ماشین هیلبرت، یعنی یك ماشین سبزچراغ-قرمز چراغ ساخت که همواره بعداز چندمرحلهٔ متناهی، توقف کند و یك جواب قطعی بله یا نه ارائه دهد؟ آنچه ماتیاسویچ ثابت کرد، این است که این‌کار هیچگاه عملی نیست. حتی اگراجازه دهیم که حافظهٔ ماشین و زمان محاسبه نامحدود باشد، هیچ برنامه‌ای نمی‌توان نوشت وهیچ ماشینی نمی‌توان ساخت که خواست هیلبرت را عملی سازد. ماشین هیلبرت وجود ندارد.

هیلبرت درخطابهٔ خود درسال ۱۹۰۰ چنین ادامه داد: «گاه اتفاق می‌افتد که تحت فرضهایی ناکافی ویا به‌معنایی نادرست درپی جواب هستیم، و به همین دلیل موفق نمی‌شویم. بنابراین؛ این مسأله مطرح می‌شود: نشان دادن امکان‌ناپذیری حل با فرضهای داده شده یا به‌معنای موردنظر» این درست همان چیزی است که درمورد مسألهٔ دهم اتفاق افتاده است.

برای اینکه توضیح دهیم که چگونه می‌فهمیم ماشین هیلبرت وجود ندارد، چند نکتهٔ ساده دربارهٔ محاسبه‌پذیری باید مورد بحث قرار گیرد. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد. S «فهرست‌پذیر[1]» است هرگاه یك ماشین سبزچراغ بتوان‌ساخت که وظیفهٔ زیر را انجام دهد: به‌عنوان ورودی هرعدد صحیح را بپذیرد و بعداز



شکل ۲. جفتهای اعداد صحیح را می‌توان یك به‌یك به‌وسیلهٔ ماشین سبز چراغ آزمود تا معلوم شود که آیا جواب معادلات دیوفانتی هستند یانه. درمرحلهٔ ششم آزمایش وخطا جوابی‌برای معادلهٔ $x^2+y^2-2=0$ به‌دست می‌آید (شکل الف). ولی ماشین‌سبزچراغی که معادلهٔ $x^2+y^2-3=0$ را بیازماید، زمانی‌برای توقف نمی‌شناسد، زیرا جواب صحیح برای این معادله وجود ندارد (شکل ب). تنها چیزی که این ماشین می‌داند، این است که هنوز جوابی به‌دست نیاورده است.

تعدادی متناهی مرحله، چراغ‌سبزی را روشن کند اگر و تنها اگر (عدد صحیح) ورودی متعلق به S باشد. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد زوج فهرست‌پذیر است. دراین حالت، ماشین، ورودی را بر ۲ تقسیم می‌کند و درصورتی که باقیمانده صفر باشد، چراغی سبز را روشن می‌نماید. در متون‌ریاضی، این‌گونه مجموعه‌ها را بازگشتی‌شمارشپذیر می‌نامند. واژهٔ فهرستپذیر معادل غیر رسمی آن است.

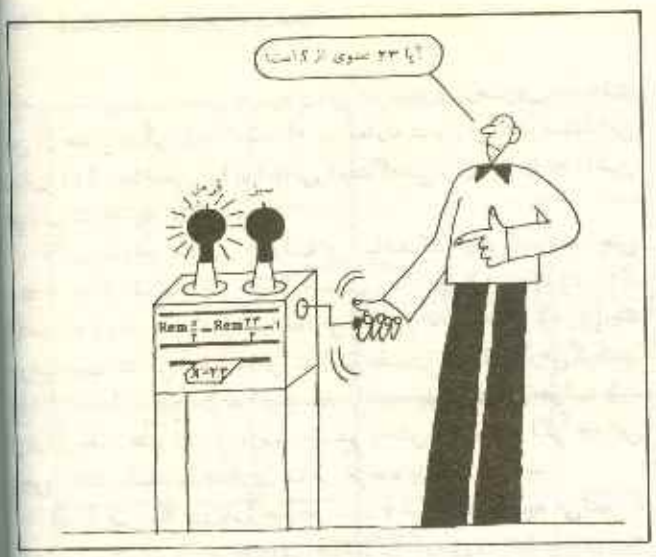
مجموعهٔ S «محاسبه‌پذیر» است هرگاه یك ماشین سبزچراغ-قرمز چراغ (شبیه ماشین هیلبرت برای‌معادلات دیوفانتی) بتوان ساخت که وظیفهٔ مشکلتری را انجام دهد: هرعدد صحیحی را به‌عنوان ورودی بپذیرد، و بعداز تعدادی متناهی مرحله، اگر عدد متعلق به S باشد، یك چراغ‌سبز و درصورتی که متعلق به S نباشد، یك چراغ قرمز روشن کند. برای مثال، مجموعهٔ اعداد زوج، محاسبه‌پذیر است. ماشین، ورودی را بر ۲ تقسیم می‌کند؛ اگر باقیمانده صفر باشد، چراغ سبز و اگر ۱ باشد چراغ‌قرمز را روشن می‌کند (شکلهای ۳ و ۴).

بین این دوتعریف ارتباط نزدیکی وجود دارد. برای روشن‌شدن مطلب فرض کنید $\bar{S}$متمم Sباشد، یعنی‌مجموعهٔ‌تمام‌اعدادصحیحی باشد که متعلق به S نیستند. اگر در دو مثال فوق S مجموعهٔ اعداد زوج باشد، آنگاه $\bar{S}$ مجموعهٔ اعداد فرد است. می‌توان ثابت کرد که اگر S محاسبه‌پذیر باشد، S و $\bar{S}$ هر دوفهرستپذیرند. به‌عبارت دیگر اگر، یك ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ برای S وجود داشته باشد، آنگاه یك ماشین سبزچراغ برای S و یك ماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$ وجود دارد. اثبات ساده است. جهت ساختن یك ماشین سبز چراغ برای S، کافی است لامپ قرمز ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ را باز کنیم و جهت ساختن‌یك‌ماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$، کافی است‌لامپ سبزماشین هیلبرت را باز کنیم و آن را در سرپیچ لامپ قرمز قرار دهیم (شکل ۵).

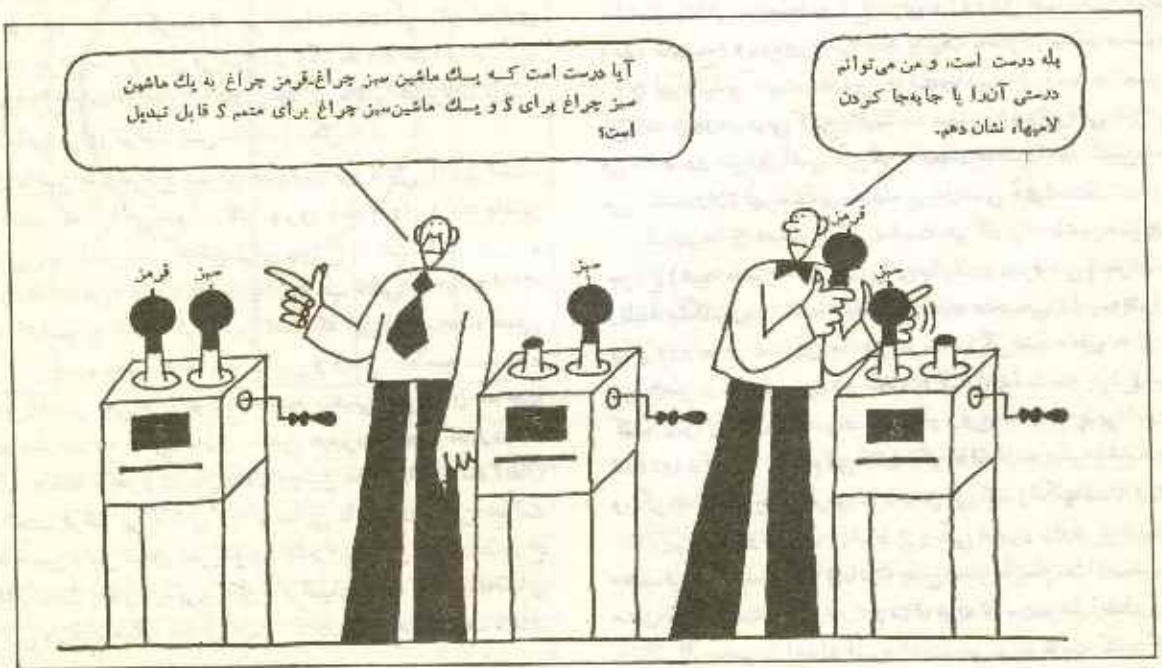
1. listable



شکل ۳. ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ وسیله‌ای خیالی است که تعلق اعداد را به یک مجموعهٔ مفروض می‌آزماید. مسألهٔ دهم هیلبرت می‌پرسد: آیا می‌توانیم یک ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ، «ماشین هیلبرت»، بسازیم تا با آن مشخص کنیم که یک معادلهٔ دیوفانتی جواب دارد یا نه؟ درمورد آزمودن عضویت اعداد در یک مجموعه، اگر ماشین بتواند در تعدادی متناهی مرحله تعیین کند که ورودی داده شده عضوی از مجموعه است، چراغ سبز روشن می‌شود. فرض کنید S مجموعهٔ اعداد زوج باشد. برای آزمودن ورودیها می‌توان الگوریتمی برای تقسیم هر ورودی x بر ۲ طرح کرد. اگر باقیماندهٔ تقسیم صفر باشد (می‌نویسیم $\text{Rem } x/2 = 0$)، ماشین برای اعلام عضویت x در S چراغ سبز خود را روشن می‌کند.



شکل ۴. اگر ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ بتواند تعیین کند که ورودی، عضوی از مجموعه نیست، چراغ قرمز آن روشن می‌شود. فرض کنید ورودی x عدد ۲۳ باشد؛ ۲ در ۲۳ چندین بار می‌گنجد و ۱ باقی می‌ماند، که حاکی از این است که ۲۳ عضوی از S نیست. متمم مجموعهٔ S، $\bar{S}$، مجموعهٔ اعداد فرد است، و لذا ۲۳ عضوی از $\bar{S}$ است. چون می‌توان ماشینی سبز چراغ ـ قرمز چراغ برای جدا کردن اعضای S و $\bar{S}$ ساخت، مجموعهٔ S را محاسبه‌پذیر می‌نامند.



شکل ۵. ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ ـ برای مجموعهٔ S را می‌توان به ماشینی سبز چراغ (یعنی، ماشینی که وقتی روشن می‌شود که ورودی متعلق به S باشد) برای S و ماشینی سبز چراغ برای $\bar{S}$، متمم S، تبدیل کرد. اثبات ساده است. جهت ساختن یک ماشین سبز چراغ برای S، لامپ قرمز ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ را باز می‌کنیم. جهت ساختن یک ماشین سبز چراغ برای $\bar{S}$، لامپ سبز ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ را باز می‌کنیم، و آن را در سر پیچ لامپ قرمز می‌پیچیم. این نکته را می‌توان به روش دیگر نیز بیان کرد. اگر مجموعه‌ای (مانند S) محاسبه‌پذیر باشد، آنگاه این مجموعه و متمم آن ($\bar{S}$) فهرست‌پذیرند. یعنی عضوهای S (در این حالت مجموعهٔ اعداد زوج) را می‌توان جداگانه فهرست کرد و آنها را از اعضای $\bar{S}$ (مجموعهٔ اعداد فرد) جدا ساخت.

عکس این مطلب نیز درست است: اگر S و $\bar{S}$ فهرستپذیر باشند، S محاسبه‌پذیر است. معادل این گزاره این است: اگر یك ماشین سبز چراغ برای هر یك از S و $\bar{S}$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌توان یك ماشین‌سبزچراغ-قرمز چراغ برای S ساخت. این کار به‌آسانی‌صورت می‌گیرد. درماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$، به‌جای لامپ سبز لامپ قرمز قرار می‌دهیم؛ سپس دو ماشین را به‌طور موازی به‌هم وصل می‌کنیم، به‌طوری که ورودی به‌طور همزمان بـه هردو برود. روشن است که حاصل کار یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ است (شکل ۶).

با آگاهی از همهٔ این مطالب اکنون می‌توان یکی از احکام مهم نظریهٔ محاسبه‌پذیری را بیان کرد ــ حکمی که درحل مسألهٔ دهم هیلبرت نقشی اساسی دارد: مجموعه‌ای چون K وجود دارد که فهرستپذیـر است ولی محاسبه‌پذیر نیست! یعنی یك ماشین‌سبزچراغ برای K وجود دارد، ولی ساختن یـك ماشین سبزچراغ برای K که متمم K است ممکن نیست.

برای اثبات این حکم به‌ظاهر شگفت‌انگیز، فرض کنید هرماشین سبزچراغ دریك جزوهٔ «راهنمای مصرف کننده» به‌طورمشروح به‌زبان انگلیسی توصیف شده باشد وجزوه، چگونگی ساخت ماشین را دقیقاً شرح بدهد، همهٔ ایـن جزوه‌ها را می‌تـوان مرتب کرد و آنها را پشت سرهم ۱، ۲، ۳، وغیره نامید. بـه‌این تـرتیب همهٔ مـاشینهای سبز چراغ شماره‌گذاری می‌شوند؛ M_1 ماشین اول است، M_2 ماشین دوم و الی‌آخر. دراینجا نکته‌ای ظریف پنهان است. درمورد جزوات راهنمای مـاشینهای‌سبزچراغ-قرمزچراغ تدوین چنین فهرست مرتبی امکانپذیر نیست. مشکل در این است که بااستفاده از راهنما، نمی‌توان گفت که به‌ازای هر ورودی ماشین مربوطه، چراغ‌سبزروشن خواهد شد یا چراغ‌قرمز.

مجموعهٔ K، بنابه‌تعریف، مجموعهٔ تمام اعدادی چون n است‌که ماشین nام بـه‌محض دریافت خـود n به‌عنوان یـك ورودی، روشن می‌شود. به‌عبارت دیگر، عدد ۱ متعلق بـه K است اگر و تنها اگـر هنگامی که «۱» به ورودی M_1 می‌رسد، چراغ‌سبز M_1 روشن شود.

۲ متعلق به K است اگر و تنها اگر هنگامی که «۲» در ورودی M_2 قرار داده می‌شود، چراغ‌سبز M_2 روشن شود و الی‌آخر (شکل ۷).

جهت ساختن یك ماشین سبزچراغ برای K، علاوه بر مجموعهٔ شامل تمام جزوات، به‌آدمکی نیز نیازمندیم که بتواند آنهارا بخواند ودستورات آنها را اجراکند. آدمك‌ممکن است صاحب شعور وادراك باشد، ولی به‌هرحال باید موجودی مطیع باشد که هرچه را می‌شنود دقیقاً همان را انجام دهـد. به این آدمك عـددی چون ۳۷۸۱ داده می‌شود، وی جزوهٔ شمارهٔ ۳۷۸۱ را مطالعه می‌کند وبـاخواندن آن می‌تواند ماشین سبزچراغ M_{3781} رابسازد. وقتی‌که این عمل انجام شد، عـدد صحیح ۳۷۸۱ را بـه عنوان ورودی بـه ماشین M_{3781} می‌دهد. اگرچراغ سبز روشن‌شود، ۳۷۸۱ متعلق‌به K است. بنابراین برای K یك ماشین سبزچراغ داریم.

دربارهٔ $\bar{K}$ چه می‌توان گفت؟ چگونه می‌توان مطمئن شدکه برای آن ماشین‌سبز چـراغ وجود ندارد؟ خوب، فرض کنید چنین ماشینی وجود می‌داشت. چون $\bar{K}$ متمم K است، این ماشین باید به ازای هر ورودی، مثلاً ۲۹۷، روشن شود اگر وتنها اگر M_{297} به‌ازای ۲۹۷ روشن نشود. (روشن شدن M_{297}، به‌این معناست که ۲۹۷ متعلق به K است و در K نیست.) بنابراین ماشین مربوط به K، به‌طور حتم با M_{297} یکـی نیست (شکل ۸). به‌همین دلیل این ماشین، به‌ازای هر مقدار دیگر n، با M_n یکی نیست. استدلال فوق درموردهرعدد دیگر نیز به‌همین صورت به‌کار مـی‌رود و نشان می‌دهد کـه در مجموعهٔ جزوه‌های‌راهنما، هیچ ماشین‌سبز چراغی‌برای $\bar{K}$ ظاهر نمی‌شود. چون همهٔ ماشینهای سبزچراغ، الزاماً در فهرست ما ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که هیچ ماشین سبزچراغی برای K نمی‌تواند وجود داشته باشد. یعنی $\bar{K}$ فهرستپذیر نیست.

این‌نتیجه به‌طور قطع مهم است، و سزاوار تفکر و تأمل. خوب می‌دانیم که مجموعهٔ K چیست؛ اصولاً[۲] با کامپیوتر می‌توانیم هرقدر که بخواهیم برای‌آن عضو تولیدکنیم. بااین وصف، برای جداکردن K از $\bar{K}$ هرگز شیوه‌ای صوری (الگوریتم یا برنامه‌ای برای ماشین)



شکل ۶. ماشین سبزچراغ مربوط به هر یك از S و $\bar{S}$ را می‌توان جهت ساختن یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ برای S به‌کار برد. این گزاره، عکس گزارهٔ مربوط به‌شکل ۵ است. درماشین‌سبزچراغ مربوط به $\bar{S}$، لامپ قرمز را به‌جای لامپ‌سبز قرار می‌دهیم. آنگاه ماشینها را به‌طور موازی چنان به‌هم وصل می‌کنیم که ورودی به‌طور همزمان به هردو ماشین برود. حاصل کار مسلماً یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ است. این‌ادعارامی‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان کرد: اگر مجموعه‌ای و متمم آن فهرستپذیر باشند، آن مجموعه محاسبه‌پذیر است.



شکل ۷. مجموعهٔ K فهرست‌پذیراست، یعنی برای K یك ماشین سبز چراغ وجـود دارد. بیایید تمام مـاشینهای سبز چراغ را شماره‌گذاری کنیم، M_1 ماشین اول، M_2 ماشین دوم، M_3 ماشین سوم و به‌همین ترتیب تاماشین nام. بنا به‌تعریف، K مجموعهٔ تمام اعدادی چون n است که وقتی خود n به‌عنوان یك ورودی وارد ماشین nام می‌شود، چراغ سبزآن روشن می‌شود. درشکل، آدمکی ۳۷۸۱ را به‌عنوان ورودی به ماشین $M_{۳۷۸۱}$ داده و چراغ سبز ماشین روشن شده است، و این بدان معناست که ۳۷۸۱ عضوی از K است.



شکل ۸. مجموعهٔ $\bar{K}$، متمم K، محاسبه‌پذیر نیست، یعنی هیچ ماشین سبز چراغی برای $\bar{K}$ وجود ندارد. فرض کنید یك ماشین سبز چراغ برای $\bar{K}$ وجود می‌داشت. چون K متمم $\bar{K}$ است، این ماشین به‌ازای هر ورودی، مثلا ۲۹۷، باید روشن‌شود اگر وتنها اگر $M_{۲۹۷}$ به‌ازای ۲۹۷ روشن نشود. بنابراین ماشین $\bar{K}$ به‌طورحتم با $M_{۲۹۷}$ یکی نیست. به‌همین‌دلیل این‌ماشین، هیچ M_nای، n دلخواه، یکی‌نیست. بنابراین هیچ ماشین سبزچراغی برای $\bar{K}$ وجودندارد. واین به‌معنای فهرست‌ناپذیر بودن $\bar{K}$ است. مجموعه‌ای‌فهرست‌پذیر که‌متمش‌فهرست‌ناپذیراست، محاسبه‌پذیر نیست، یعنی‌هیچ ماشین سبزچراغ-قرمزچراغی بـرای آن نمی‌تـوان ساخت. پس هیچ الگوریتمی برای جداکردن K از $\bar{K}$ وجود ندارد.

نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین دراینجا بامثالی از یـك مسأله روبرو هستیم کـه به‌طور دقیق بیان شده ولـی با ابزارهای مکانیکی قابل حل نیست.

البته، بحث ماغیر رسمی وغیر دقیق‌بود. باوجود این،صورتبندی مجدد تمام ایـده‌ها و استدلالهای ذکـر شده، با تعاریف و اثباتهای دقیق ریاضی، امکانپذیر است. در واقع، ایـن مطالب درشاخه‌ای از منطق ریاضی، به‌نام نظریهٔ تابعهای بازگشتی، صورتبندی شده‌اند، که این‌نظریه راگودل، چرچ، پست، کلین و تورینگ درسالهای ۱۹۳۰ بنیان گذاشته‌اند.

خوب، همهٔ اینها چه ارتباطی‌با معادلات دیوفانتی دارند؟ جواب ساده است: ماتیاسویچ ثابت‌کرده است کـه هر مجموعهٔ فهرستپذیر، یك معادلـهٔ دیوفانتی متناظر دارد. به‌زبان دقیقتر، اگر S مجموعه‌ای فهرستپذیر باشد، آنـگاه متناظر با آن یك جندجمله‌ای P با ضرایب صحیـح و متغیرهـای $x, y_1, \cdots, y_n$ وجـود دارد کـه بـا $P(x, y_1, \cdots, y_n)$ نمایش داده می‌شود. عددی صحیح چون ۱۷، بـه S تعـلق دارد اگـر و تنهـا اگـر معادلـهٔ دیوفانتـی $P(17, y_1, \cdots, y_n) = 0$ دارای جواب باشد.

ممکن است به‌نظر آیدکه در مورد بعضی از مجموعه‌ها مجبوریم به‌چندجمله‌ایهای خیلی‌پیچیده روی‌آوریم، ولی چنین نیست. درجهٔ P لازم نیست از چهـار تجاوز کنـد؛ و لازم نیست تعـداد متغیرهـای $y_1, \cdots, y_n$ بیش از ۱۴ باشد. (هنوزکسی نمی‌داند که آیا به‌این هردوکران به‌طور همزمان می‌توان رسید یا نه.)

از این نتیجهٔ ماتیاسویـچ، سریعاً می‌رسیم به‌این مطلب‌که‌ماشین هیلبرت نمی‌تواند وجود داشته باشد. مجموعهٔ فهرستپذیر K راکه در چند پاراگراف قبل ساختیم، به‌خاطر بیاورید. بنابرنتیجهٔ ماتیاسویچ، وابسته به‌این‌مجموعه، یك معادلهٔ دیوفانتی $P_K(x, y_1, \cdots, y_n) = 0$ وجود دارد. اگر ساختن ماشین هیلبرت، یعنی مـاشین سبزچراغ-قرمز چراغ، بـرای آزمودن معادلات دیوفانتی از لحـاظ داشتن جواب، امکانپذیر می‌بود، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح x، می‌توانستیم تعیین کنیم‌که‌آیا اعدادی صحیح چون $y_1, y_2, \cdots, y_n$ وجود دارندکه معادله جواب داشته باشد یا خیر. ولی، درموقع معلوم‌کردن این‌مطلب، تعلق یا عدم تعلق x به K نیز معلوم می‌شود. بـه‌عبارت دیگر، ماشین هیلبرتی‌که در مورد معادلـهٔ دیوفانتی توصیف کنندهٔ K به‌کار گرفته می‌شود، می‌تواند بـه عنوان یك ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ برای K به‌کار رود. ولی ثابت‌کرده‌ایم که K محاسبه‌پذیر نیست، بنابراین هیچ مـاشین‌سبز چراغ-قرمز چراغی نمی‌تواند برای K وجود داشته باشد. تنها راه خروج از این بن‌بست این نتیجه‌گیری است‌که ماشین هیلبرت‌وجود ندارد، به‌عبارت‌دیگرمسألهٔ دهم هیلبرت حل‌ناپذیر است!

این واقعیت‌که به‌هرمجموعهٔ فهرستپذیریك معادلهٔ دیوفانتی‌وابسته است، نتیجـهٔ مثبتی است‌کـه به‌خودی خود، صرفنظر ازکاربردش در مسألهٔ دهم هیلبرت، خیلی جالب است. یك زیرمجموعهٔ بسیار مهم و جالب ازاعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد اول‌است. یك عدد اول عددی است‌کـه تنها بر ۱ و خودش تجزیه‌پذیر (تقسیمپذیر) باشد. مثالهایی از اعداد اول عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، و ۱۷. این‌موضوع‌که مجموعـهٔ اعداد اول فهرستپذیر است، تـا حـدی واضـح می‌باشد. الگوریتمی، موسوم بـه‌غربال اراتستن، برای فهرست‌کردن این اعداد از یونانیها به ما رسیده است. نتیجهٔ ماتیاسویچ همراه با ابزاری که تـوسط پاتـام توسعـه یافتـه است، یـك معـادلـهٔ دیوفـانتـی $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z$ را به‌دست می‌دهدکه در آن عدد مثبت z اول است اگـر و تنهـا اگـر معادله دارای جواب صحیـح و مثبت

y_n ، $y_1, y_2, \cdots$ باشد. (صورت دقیق چندجمله‌ای Q پیچیده‌تر از آن است که به‌طور کامل در اینجا آورده شود.)

با ترکیب قضیهٔ ماتیاسویچ و کار گودل در زمینهٔ تصمیم‌ناپذیری، نتیجهٔ مهم دیگری را می‌توان ثابت کرد. اگر دستگاهی دلخواه از اصول موضوع وجود داشته باشد که از آن بتوان اطلاعاتی دربارهٔ معادلات دیوفانتی به‌دست آورد، همواره می‌توان یك معادلهٔ دیوفانتی با ویژگیهای زیر به‌دست آورد: (۱) معادله هیچ جواب صحیح ومثبت نداشته باشد، و (۲) این واقعیت را که معادله هیچ جواب صحیح و مثبت ندارد، نتوان به‌طور منطقی ازمجموعهٔ اصول موضوع داده شده، استنتاج کرد. البته، همین که معادلهٔ دیوفانتی به‌دست آید، می‌توان مجموعهٔ جدیدی از اصول موضوع ساخت و با استفاده از آنها ثابت کرد که معادلهٔ دیوفانتی مزبور جواب ندارد. اما در این صورت این مجموعهٔ جدید اصول موضوع، معادلهٔ دیوفانتی دیگری را به‌وجود خواهد آورد که در مورد آن همین حکم برقرار است.

در اثبات قضیهٔ ماتیاسویچ چه چیزهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند؟ علاوه بر نتایج نظریهٔ کلاسیك وحتی نظریهٔ قدیمی اعداد که به‌آنها اشاره شد، نتیجه‌ای کلیدی به‌نام قضیهٔ ماندهٔ چینی هم به‌کار می‌رود. قضیهٔ ماندهٔ چینی را به‌وسیلهٔ یك مثال عددی توضیح می‌دهیم.

فرض کنید یافتن عددی موردنظر است که باقیماندهٔ تقسیم آن براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب ۴، ۲، ۳ و ۱ باشد (شکل ۹). قضیهٔ ماندهٔ چینی ما را مطمئن می‌سازد که چنین عددی باید وجود داشته باشد. (در واقع در این حالت ۵۸۴ چنین عددی است.) تنها شرط لازم برای کاربرد قضیهٔ ماندهٔ چینی، آن است که هیچ جفتی از مقسوم‌علیه‌های مورد استفاده نباید عامل مشترك (البته بجز ۱) داشته باشند. تعداد مقسوم‌علیه‌ها دلخواه است و باقیمانده‌های موردنظر می‌توانند هرعدد مثبت دلخواهی باشند.

درسال ۱۹۳۱ گودل نشان داد که چگونه می‌توان قضیهٔ ماندهٔ چینی را به‌عنوان یك شگرد کدگذاری به‌کار برد؛ در این شگرد، یك دنبالهٔ متناهی دلخواه از اعداد را می‌توان به‌صورت تنها یك عدد، به‌عنوان کد، نوشت. با استفاده از عدد کد، به‌همان روشی که در مثال فوق اعداد ۴، ۲، ۳ و ۱ به‌عنوان باقیمانده‌های تقسیمات متوالی از عدد ۵۸۴ به‌دست آمدند، می‌توان دنباله را دوباره به‌دست آورد. مقسوم‌علیه‌ها را می‌توان به‌صورت یك تصاعد حسابی انتخاب کرد.

نخستین گام برای اثبات عدم وجود ماشین هیلبرت درسال ۱۹۵۰ در تز دکتری یکی از ما (دیویس) برداشته شد. در این گام تکنیك گودل در مورد استفاده از قضیهٔ ماندهٔ چینی به‌عنوان یك وسیلهٔ کدگذاری، برای نسبت دادن یك معادلهٔ دیوفانتی $P_S(k, x, z, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ به مجموعهٔ قهرستپذیر دلخواه S به کار گرفته شد. متأسفانه رابطهٔ بین معادله و مجموعه، بسیار پیچیده‌تر از آن شد که برای مسألهٔ دهم هیلبرت موردنیاز بود. مشخصاً،

مسأله: مطلوب است کوچکترین عدد صحیح ومثبت x که درتقسیم براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب دارای باقیمانده‌های ۴، ۲، ۳ و ۱ باشد.

حل: فرض کنیم x عدد مورد نظر باشد. نماد «Rem» مخفف «باقیماندهٔ...» است. بنابراین مسأله را می‌توان به صورت زیرهم نوشت

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{x}{10}\right)=4 \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{x}{7}\right)=3$$

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{x}{3}\right)=2 \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{x}{11}\right)=1$$

برای یافتن x، باید چهارمسألهٔ کمکی برحسب مجهولهای جدید y_1، y_2، y_3 و y_4، حل کرد. در هرمورد صورت از ضرب سه تا ازمقسوم علیه‌ها به‌دست می‌آید وچهارمین مقسوم علیه درمخرج قرارمی‌گیرد. به‌عنوان مثال در معادلهٔ اول که مربوط به y_1 است، ۲۳۱ راکه برابراست با $11 \times 7 \times 3$ درصورت کسر و ۱۰ را در مخرج آن قرار می‌دهیم

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{231\,y_1}{10}\right)=4, \quad y_1<10 \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{330\,y_2}{7}\right)=3, \quad y_2<7$$

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{770\,y_3}{3}\right)=2, \quad y_3<3 \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{210\,y_4}{11}\right)=1, \quad y_4<11$$

کوچکترین اعداد صحیحی که جواب این معادلات کمکی هستند، عبارت‌اند از $y_1=4$، $y_2=1$، $y_3=3$ و $y_4=1$.

برای به‌دست آوردن x (عدد اصلی موردنظر) صورتهای چهارمعادلهٔ کمکی را باهم جمع می‌کنیم

$$\begin{aligned} x &= (231\,y_1)+(770\,y_2)+(330\,y_3)+(210\,y_4) \\ &= (231\times 4)+(770\times 1)+(330\times 3)+(210\times 1) \\ &= 924+770+990+210 \\ &= 2894 \end{aligned}$$

بنابراین ۲۸۹۴ یکی ازمقادیر x است. اگرحاصلضرب تمام مقسوم علیه‌ها را ازاین عددکم کنیم، جواب کوچکتری به‌دست می‌آید

$$2894-(10\times 3\times 7\times 11)=2894-2310=584$$

بنابراین، ۵۸۴ کوچکترین جواب مسأله است.

شکل ۹. درحل مسألهٔ دهم هیلبرت ازقضیهٔ ماندهٔ چینی استفاده می‌شود. دراینجا این قضیه برای پیداکردن عددی به‌کار رفته است که باقیمانده‌های تقسیم آن براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب عبارت‌اند از ۴، ۲، ۳ و ۱. عدد ۵۸۴ کوچکترین جواب مسأله است.

۱. ۱
۲. ۱
۳. ۱+۱=۲
۴. ۱+۲=۳
۵. ۲+۳=۵
۶. ۳+۵=۸
۷. ۵+۸=۱۳
۸. ۸+۱۳=۲۱
۹. ۱۳+۲۱=۳۴
۱۰. ۲۱+۳۴=۵۵
۱۱. ۳۴+۵۵=۸۹
۱۲. ۵۵+۸۹=۱۴۴
۱۳. ۸۹+۱۴۴=۲۳۳
.
.
.
n $\approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

شکل ۱۰. اعداد فیبوناتچی‌را درسال ۱۲۰۲ میلادی لئوناردوی پیزایی مشهور به فیبوناتچی کشف کرد. این دنباله از ۱ و ۱ آغاز می‌شود و به‌طور متوالی از مجموع آخرین دو عدد، عدد بعدی به‌دست می‌آید. این دنباله به‌طور نمایی رشد می‌کند: جملهٔ n ام دنباله تقریباً با توان nام عدد حقیقی $(1+\sqrt{5})/2$ متناسب است.

I. $u+w-v-2=0$
II. $l-2v-2a-1=0$
III. $l^2-lz-z^2-1=0$
IV. $g-bl^2=0$
V. $g^2-gh-h^2-1=0$
VI. $m-c(2h+g)-3=0$
VII. $m-fl-2=0$
VIII. $x^2-mxy+y^2-1=0$
IX. $(d-1)l+u-x-1=0$
X. $x-v-(2h+g)(e-1)=0$

شکل ۱۱. حل مسألهٔ دهم هیلبرت توسط ماتیاسویچ شامل معادله‌ای دیوفانتی است که ازمجذور کردن هریك ازاین ده معادله وجمع کردن آنها ومساوی با صفرقراردادن چندجمله‌ای پیچیدهٔ حاصل، به‌دست می‌آید. دراین معادلات مقادیر n و x درجوابها، چنان به‌هم مربوط هستند که، x عدد $(2n)$ام فیبوناتچی است. از جواب این نتیجه به‌دست می‌آید که به‌هر مجموعهٔ فهرستپذیر یك معادلهٔ دیوفانتی وابسته است. چون مجموعه‌های فهرستپذیری وجود دارندکه متمم آنها فهرستپذیر نیست، پس هر مجموعهٔ فهرستپذیری نمی‌توانـد یك ماشین سیزچراغ-قرمز چراغ داشته باشد. چون داشتن یك ماشین سیزچراغ-قرمز-چراغ برای یك مجموعه، معادل داشتن یك ماشین‌هیلبرت برای معادلات دیوفانتی است. نتیجهٔ ماتیاسویچ بدین‌معنی‌است‌که برای‌آزمودن‌معادلات‌دیوفانتی، نمی‌توان‌ماشین‌هیلبرت‌ساخت.

رابطه چنین بود: عدد صحیح و مثبت x به مجموعهٔ S تعلق دارد اگر وتنها اگربه‌ازای مقدارصحیح ومثبتی از z، یافتن جوابی‌برای هریك از معادلات دیوفانتی حاصل از قراردادن $k=1$، بعد $k=2$ و غیره تـا z در معادلهٔ $P_S(k, x, z, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0$، امکانپذیر باشد. گرچه نتیجه به‌طور امیدوارکننده‌ای نزدیك به نتیجهٔ مورد نیاز به‌نظر می‌رسید، ولی این تازه اول کار بود.

تقریبـاً در همان زمـان رابینسون پژوهش خودش را در باب مجموعه‌هایی کـه می‌توانند به‌وسیلهٔ معادلات دیوفانتی تعریف شوند، آغاز کرد؛ اوچندین تکنیك هوشمندانه ابداع کردکه با استفاده از آنها بتوان معادلاتی راکـه رفتار جوابهایشان شبه‌نمایی است (شبیه توان رشد می‌کنند) بررسی کرد. درسال ۱۹۶۰، او، دیویس و پاتنام برای اثبات نتیجهٔ دیگری به‌همکاری پرداختند. این گروه هم ازکار او وهم ازنتیجهٔ دیویس‌استفاده کردند ونشان دادندکه به‌هرمجموعهٔ فهرستپذیر، یك معادلهٔ دیوفانتی از یك نوع «گسترده» متناظر است. گسترده به‌این معنا کـه متغیرهای معادلـه مجازند به‌عنوان نما ظاهرشوند؛ مثالی از این گونه‌معادلات $x^3+z^3=y^4+2$ است. دیویس،رابینسون وپاتنام کارهای خود را با بعضی از نتایج پیشین رابینسون درهم آمیختند و کشف کردندکه: حتی اگرتنها یك معادلهٔ دیوفانتی یافت شودکه رفتار جوابهایش به‌معنای خاصی نمایی باشد، آنگاه توصیف هر مجموعـهٔ فهرستپذیر به‌وسیلهٔ یك معادلـهٔ دیوفانتی امکانپذیر خواهـد بود. این به‌نوبهٔ خود نشان خواهد دادکه مسألهٔ دهم هیلبرت حل‌ناپذیراست.

یافتن معادله‌ای دیوفانتی کـه جوابهایش به‌معنای مناسبی به‌طور نمایی رشدکنند، یك دهه طول کشید. در سال ۱۹۷۰ ماتیاسویچ بـا استفاده از اعدادی که به‌اعداد فیبوناتچی شهرت دارنـد (شکل ۱۰) چنین معادله‌ای را پیداکرد. این اعداد مشهور، درسال ۱۲۰۲ میلادی به‌وسیلهٔ لئوناردوی پیزایی، که به فیبوناتچی هم معروف است، کشف شده‌اند. وی این‌اعداد را بامحاسبهٔ تعدادکل جفتهای اخلاف یك‌جفت خرگوش به‌دست آورد، بـا این شرط کـه جفت اصلی و هرجفت از اخلاف آنها هرماه یکبار تولید مثل کنند. دنبالهٔ فیبوناتچی از ۱ و ۱ آغاز می‌شود و بـه‌طور متوالی ازمجموع دو عدد قبلی عدد بعدی حـاصل می‌شود: اولین‌عدد فیبوناتچی ۱ و دومی‌هم ۱ است، سومی $2=1+1$، چهارمی $3=2+1$، پنجمی $5=3+2$ و الی آخر. ویژگی اعداد فیبوناتچی که در ارتباط با مسألهٔ دهم هیلبرت اهمیت دارد آن است که این اعداد به‌طور نمایی رشد می‌کنند. یعنی عدد n ام فیبونـاتچی تقریباً متناسب است باتوان n ام یك عدد حقیقی ثابت ومعین.

اگرکسی می‌توانست معادله‌ای دیوفانتی بیابدکـه جوابهایش n را به‌عدد nام فیبوناتچی مربوط کند، این معادله، مثالی مطلوب ازیك معادلهٔ دیوفانتی می‌بودکه جوابهای آن رفتارنمایی دارند؛ و حل‌مسألهٔ دهم هیلبرت، از این مثال نتیجه می‌شد. کاری که ماتیاسویچ انجام داد، ساختن یك معادلهٔ دیوفانتی ازاین نوع بود (شکل ۱۱). وقتی که وی نشان داد که مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی به این طریق بـا یك معادلـهٔ دیوفانتی متناظر است، بیدرنگ از قضیهٔ دیویس، رابینسون و پاتنام نتیجه شدکه بـا هر مجموعهٔ فهرستپذیر، ازجمله مجموعهٔ خاص K که محاسبه‌پذیر نیست، یك معادلـهٔ دیوفانتی متناظر است؛ و به‌این ترتیب داستان مسألهٔ دهم هیلبرت خاتمه می‌یابد.

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

• Davis Martin, Hersh Reuben, "Hilbert's 10th problem", *The Chauvent Papers*, The Mathematical Association of America, 1978, 555-571.

• مارتین‌دیویس،دانشگاه‌نیویورك‌آمریکا-روبین‌هرش،دانشگاه‌نیومکزیکوی‌آمریکا

تا چه حد استاد ریاضی خوبی هستید؟*

• ریچارد گای

«من از تحقیق کردن لذت می‌برم، امـا تدریس این روزهـا خیلی کسالت‌آور است؛ درسها غالباً مربوط به‌سال اول‌اند.»

«من روی نظریهٔ نمایش کار می‌کنم. همگام بودن با همهٔ کارهایی که دراین زمینه انجام می‌شود مشکل است، و لذا وقت زیادی برای پرداختن به‌سایر شاخه‌ها باقی نمی‌ماند.»

«این روزها سطح معلومات بچه‌هایی که مدرسه را تمام می‌کنند، واقعاً اسفناک است. باهوشترین آنها نیز هیچ قضیه‌ای درمورد مثلثهای متشابه ویا دایره نمی‌دانند.»

«درمقایسه با دوازده سال‌پیش، تعداد دانشجویان دوره‌های بالاتر از لیسانس ما تقریباً نصف شده‌است وکلاً، کم‌اندکسانی‌که در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کنند. درهر هفته تقریباً نود و نه درصد تدریس ما برحسب ساعت‌دانشجو مربوط به‌درسهای سرویس است.»

آیا هنگامی‌که عنوان مقاله را خواندید، ارزیابی سریعی از آثار منتشر شدهٔ اخیر خودکردید، و آیا براساس نتیجهٔ آن احساس نوعی غرور یا اعتماد به‌نفس نمودید؟ منظور من ازعنوان مقاله این است‌که «تـا چه حـد زندگی ریاضی شما کامل و همه‌جانبه است؟» و آیـا سعی می‌کنید دور تسلسلی را که نقل قـولهای بـالا نشان می‌دهند، بشکنید؟

برای جذب دانشجویـان خوب به بخش خود چه اقدامی انجام می‌دهید؟ آیا هیچ‌یك از دانشجویان خوب را تشویق‌کرده‌اید درلذتی که خود از ریـاضیات می‌برند دیگران را هم سهیم‌کنند، یـا حرفهٔ تدریس را برگزینند؟

آیاکتابهایی ازقبیل: ریاضیات چیست، کوران و راین؛ اینجا و آنجا در ریاضیات، اشتاین هاوس؛ لذت بودن از ریاضیات، رادماخر و تویلیتس، راههای برنده شدن، کانوی و گای؛ سرگرمیها و نکته‌های ریاضی، روز بال؛ آثار مارتین گاردنر؛ مجموعهٔ دولچیانی ومجموعهٔ جدید کتابهای ریاضی[1] را خود می‌خوانید و دیگـران را تشویق بخواندن آنها می‌کنید؟ آیا این‌کتابها را به‌عنوان هدیه و یا جایزه بدانشجویان ویا دانش‌آموزان بالقوه علاقه‌مند می‌دهید؟

چه ارتباطی بـا دانشکدهٔ علوم تربیتی دانشگاه خود دارید؟ یك معلم آیندهٔ ریاضی دبستان، دورهٔ اول ویا دورهٔ دوم دبیرستان از بخش شما چند درس باید بگیرد؟ این درسها چگونه انتخاب می‌شوند؟ چند درس ازحساب دیفرانسیل و انتگرال جـزء این درسها هستند؟ آیـا دروس تحقیق در عملیات، مدلسازی، احتمال، آمار، ترکیبیات، نظریهٔ گرافها، نظریهٔ بازیها، آنالیزعددی، ونظریهٔ الگوریتمهاارائه‌می‌شوند؟ پیشنیاز درسها چه‌هستند، وآیا این‌پیشنیازها دانشجویان‌را می‌گریزانند؟

آیـا به بـازدید مدارس منطقهٔ خود می‌روید، و آیـا درمورد ریاضیات، کاربرد وشیوهٔ تدریس آن صحبت می‌کنید؟ آیا ریاضیات درنمایشگاههای علمی منطقهٔ شما وجود خارجی دارد؟ دربرنامه‌هـای تلویزیونی محلی چطور؟

چندکتاب درسی ریاضی نوشته‌اید؟ مخاطب این‌کتابها چه‌کسانی هستند؟ آیا نوشتن آنها صرفـاً برای پول بوده است؟ آیـا واقعاً از اصالت کامل برخوردارند؟ و اگر چنین است، چگونه موفق به‌انتشار آنها شده‌اید؟ ازبین‌پیشنهادهای ناشر چه‌نوع تغییراتی را پذیرفته‌اید؟ آیا ازپذیرفتن این پیشنهادها متأسف هستید؟

آیـا برای دانش‌آموزان علاقه‌مند دبیرستانی و دبیران آنهـا داوطلبانه‌کلاس تقویتی تشکیل می‌دهید؟ چه‌کسی بیشتر یاد می‌گیرد؟ شما، دانش‌آموزان و یا دبیران؟

آیـا دانشگاه شما کاری درمورد آموزش ضمن خـدمت معلمان شاغل ریاضی ویا معلمان احتمالی آینده انجام می‌دهد؟ چه درسهایی ازبخش شما جزئی ازبرنامه را تشکیل می‌دهد؟

آیا برنامهٔ مشترکی با بخش زمین‌شناسی دانشگاه خود داریدکه بـه‌ایجاد دوره‌ای در ژئوفیزیك منجر شود؟ برای اینکه مطمئن شوید دانشجویان بـه‌نقش ریـاضیات در رشتهٔ خود، در دوران چهارسالهٔ تحصیل، پی‌می‌برند وبراساس آن می‌توانند تصوری ازنقش ریاضیات در دوران چهل سالـهٔ خدمت خود پیداکنند، بـا چه بخشهای دیگری همکاری می‌کنید؟

آیا بـا شورای برنـامه‌ریزی مدارس در مـورد برنامه‌هـای تحصیلی و ریـز مواد دروس هیچ تماسی گرفته‌ایـد؟ آیـا در چنین شوراهایی، یادرشوراهای معلمان فعالیت می‌کنید؟ آیا می‌دانیدکه چه هندسه‌ای درمدارس منطقهٔ شما تدریس می‌شود؟ آیا از وضعیت‌موجود

---

* ترجمهٔ سی جلد ازکتابهـای این مجموعه به‌زودی توسط مرکز نشر دانشگاهی منتشر خواهد شد. ـ م.

خشنود هستید؟

آیا در سازماندهی، و یا تربیت افراد برای مسابقات ریاضی شرکت می‌کنید؟ در چه سطحی؟ کلاس ششم؟ کلاس نهم؟ کلاس دوازدهم؟ مسابقات پاتنام؟

آیا در انجمن ریاضی محلی خود فعال هستید؟ آیا فعالیتهای آن مورد توجه محصلین ومعلمین مدارس و مؤسسات آموزش عالی هست؟ مورد توجه ریاضیدانان حرفه‌ای وآماتور چطور؟

چند تا از متون زیر را مطالعه کرده‌اید؟

۱. دستوری برای کار[1]

۲. راهنماییهایی برای تربیت معلمان ریاضی[2]

۳. ما همه معلم ریاضی هستیم[3]

۴. نامه به‌سردبیر مجلهٔ ماتنلی[4]

۵. افراد در آیینهٔ اخبار[5]

۶. توصیه‌هایی برای تربیت معلمان ریاضی[6]

۷. ملتی در مخاطره[7]

۸. گزارشی درمورد دوره‌های کارشناسی[8]

آیا مقاله‌ای توصیفی نوشته‌اید که بخشی از ریاضیات را به‌مخاطبان بسیاری که قبلاً با آن آشنا نبوده‌اند، معرفی کند؟ آیا در مورد داوری، نقد و ویرایش مقالات، سهم خود را ادا می‌کنید؟ آیا در داوری و نقد مقالات همان اندازه دقت می‌کنید که در نوشتن ویا ویرایش آنها؟

هنگامی که همسر من پیش‌نویس این مقاله را تایپ می‌کرد، از من پرسید «چه مقداری از این کارها را خودت انجام می‌دهی؟» مسلماً نه به اندازهٔ کافی! من بسیار خوشحالم که مردم برای انجام کارهایی که احتمالاً درهرصورت آنها را انجام می‌دادم به‌من پول هم پرداخته‌اند ــ همان کارهایی که حالا هم می‌کنم، ولی هیچکس به‌من پولی نمی‌دهد. شعار جامعهٔ ریاضی بریتانیای کبیر را در نظر بگیرید: «همه به حرفهٔ خود مدیون‌اند.»[9]

به‌عنوان اصل می‌پذیریم که ریاضیات برای ما اهمیت دارد و برای همه اهمیت دارد. چگونه این پیام را به‌دیگران برسانیم؟ چگونه روابط عمومی خوبی ایجاد کنیم؟ می‌خواهم بگویم «چگونه تصوری را که ازما در اذهان وجود دارد، بهبود بخشیم؟»

اگر ریاضیات مهم است، آموزش ریاضی نیز مهم است. متأسفانه، آموزش غالباً کلمهٔ بدی به شمار می‌رود. اخیراً تام بخش آموزش ریاضی مجلهٔ ماتنلی را «تدریس ریاضیات» گذاشته‌اند. نام آن هرچه باشد، بخشی است مهم که نیاز به‌توجه بیشتر و به‌منزلت بالاتر دارد.

بخشهای ریاضی دانشگاهها بجز از طریق انجام پژوهش قابل انتشار چگونه می‌توانند پیشرفت کنند؟

به‌عنوان یك عضو باسابقه وبدبین کمیته‌ها، شاهد صرف هزاران شخص‌ـساعت وقت برای تهیهٔ گزارشهایی عالی بوده‌ام که جز اعضای کمیته، افراد معدودی آنها را خوانده‌اند، وتنها معدودی از آنها به‌کار گرفته شده‌اند. در حال حاضر عضو کمیتهٔ کامت[1]، کمیتهٔ آموزش ریاضی معلمان، هستم. ما می‌خواهیم سطح ریاضی جامعه را یا تربیت معلمان ریاضی بهتر و بیشتر بهبود بخشیم. ما می‌خواهیم دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی تعداد بیشتری ازفارغ‌التحصیلان خود را به‌طرف تدریس هدایت کنند. ما مشغول تنظیم برنامه‌هایی برای آموزش ضمن خدمت معلمان فعلی هستیم. ما خواهان همکاری بیشتر بین مدارس، مؤسسات آموزش عالی، و دانشگاهها هستیم.

ما ریاضیدانان باید مقامات مسؤول محلی وکشوری را هدایت و راهنمایی کنیم؛ فوراً تماس بگیریم و اقدام کنیم که گفته‌اند: دوصد گفته چون نیم کردار نیست!

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی

•Guy R. K., "How good a mathematician are you?", *The Mathematical Intelligencer*, (3)8(1986)54-55.

• ریچارد گای، دانشگاه کالگری کانادا

نشر ریاضی: دراین یادداشت، مؤلف نکاتی راکه به‌نظر او هر استاد ریاضی باید کم و بیش مورد توجه قرار دهد وحتی‌المقدور در اعمال آنها بکوشد، به‌طور مجمل ذکر می‌کند. گرچه خود ریاضیات از قید واسبتگی به‌مکان و زمان و خصوصیات فرهنگی ملتها آزاد است، ولی فضای علمی و دانشگاهی، مسائل آموزشی و برنامهٔ کار ومطالعهٔ استادان ریاضی در کشورهای گوناگون تفاوتهایی دارد. آشنایی با مسائل و علائق دست‌اندرکاران حرفهٔ ریاضی درکشورهای پیشرفته، می‌تواند برای ریاضیکاران ما نیز سودمند باشد و در واقع، دلیل اصلی چاپ این مقاله کمك به چنین هدفی است؛ ولی اگر یك استاد ریاضی ایرانی چنین مقاله‌ای می‌نوشت،چه‌بسا باتوجه به‌شرایط ومقتضیات محیط خود ضرورتها و اولویتهای دیگری را در نظر می‌گرفت ومثلاً ازهمکارانش می‌پرسید:

* آیا کتابهای ریاضی قبل از دانشگاه را دقیقاً بررسی کرده و اشکالات وکاستیهای آنها را به اطلاع مقامات مسؤول یا جامعهٔ دبیران و آموزگاران رسانده‌اید؟
* آیا افت شدید سطح معلومات ریاضی فارغ‌التحصیلان دبیرستانها را که درنمرات آزمون ورودی آنها نیز منعکس است ریشه‌یابی کرده‌اید وچاره‌ای برای آنها درنظر گرفته‌اید؟
* آیا گزینش علمی دانشجو به‌بهترین نحو ممکن انجام می‌شود؟ تست چهارجوابی شیوهٔ مناسبی برای آزمودن معلومات ریاضی داوطلبان هست؟

اینها نمونه‌هایی هستند از انبوه سؤالات اساسی که دراین مورد مطرح می‌باشد. یافتن پاسخ مناسب برای چنین پرسشهایی بهیچوجه کار آسانی نیست ولی طرح وبحث این مسائل وپرداختن بزوایای مختلف آنها از دیدگاههای گوناگون، لااقل می‌تواند سرآغازی برای پیداکردن بهترین پاسخهای ممکن باشد. نشر ریاضی از نوشته‌های مستند و دقیق و موشکافانه‌ای که یك یا چند تا ازاین مسائل را مورد بحث قرار دهند، استقبال می‌کند.

---

1. *An Agenda for Action*, NCTM, Reston, 1980.
2. *Guidelines for the Preparation of Teachers of Mathematics*, NCTM, Reston, 1981.
3. Hilton Peter, "We are all teachers of mathematics", *Focus*, **3**(1983)3.
4. "Letter to the editor", *Amer. Math. Monthly*, **91**(1984) 598-600.
5. "People in the news", *Focus*, **4**(1984)6.
6. *Recommendations on the Mathematical Preparation of Teachers*, MAA, Washington, 1983.
7. *A Nation at Risk*, Nat. Commission on Excellene in Educ., Washington, DC, **4**(1983)26.
8. "Report on excellence in undergraduate education", *The Chronicle of Higher Education*, **10**(1984)24.
9. *Tibi creditum debes*

1. COMET

دستگاههای دینامیکی گسسته ـ جانشینی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال؟

جیمز ساندفر*

سالهاست به‌این می‌اندیشم که افراد ناآشنا با رشتهٔ ریاضی نمی‌دانند یك ریاضیدان چه می‌کند و نیز، به‌گمان بسیاری، ریاضیات چندان ارتباطی باجهان دور و برما ندارد. چرا دانشجویانمان را درك نمی‌کنیم؟ فکر می‌کنم مسألهٔ اصلی برنامهٔ درسی ماست.

بیشتر درسهای ریاضی مقدماتی مباحثی را عرضه می‌کنند که برای درسهای ریاضی پیشرفته‌تر ضروری‌اند. حساب دیفرانسیل و انتگرال، به‌صورتی که فعلاً تدریس می‌شود، مجموعه‌ای از تکنیکهاست که آنها را برای دانشجویانی که بعداً درسهایی درمعادلات دیفرانسیل یا آنالیز حقیقی خواهند گذراند، لازم می‌دانیم. ولی، دانشجویی که قصد ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی را ندارد، احساس می‌کند که بهترین کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترسیم نمودار تابع و تعیین مساحت زیرمنحنی است.

اجازه دهید تصریح کنم که من مخالفتی با اصل حساب دیفرانسیل و انتگرال ندارم. آنچه که مورد انتقاد من است، دورهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرالی است که در بیشتر دانشگاهها تدریس می‌شود.

در خلال چند سال گذشته، عده‌ای پیشنهاد می‌کرده‌اند که به‌جای حساب دیفرانسیل و انتگرال یا همراه با آن، ریاضیات گسسته را تدریس کنیم. برخی از دلیلهای ارائه شده به این شرح است. (۱) دانشجو ریاضیات گسسته را بهتر لمس می‌کند؛ (۲) ریاضیات گسسته کاربردهای جالبی دارد، و (۳) کامپیوتر، ریاضیات گسسته را به‌صورت رشتهٔ مهمتری درآورده است.

من با این استدلالها به‌نفع ریاضیات گسسته موافقم. مع‌الوصف، با محتوای درسهای ریاضیات گسستهٔ موردنظر این افراد، به‌شدت مخالفم. این درسها دارای همان اشکالی هستند که درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دچار آن است ـ آنها متشکل از مباحثی هستند که به‌نظر ما برای دانشجویانی که در تدارك ادامهٔ تحصیل در ریاضیات یا علوم کامپیوتری‌اند، لازم است. در بیشتر موارد، این درسها در ارتباط با یکدیگر نیستند، و جاذبه‌ای برای دانشجو ندارند. به‌نظر نمی‌رسد که کاربردهایی مانند تعیین تعداد حرکتهای لازم برای حل معمای برج هانوی، مناسبتر از کاربردهایی باشند که در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مطرح می‌شوند.

آخرین انتقاد من از درسهای مقدماتی حساب دیفرانسیل وانتگرال و ریاضیات گسستهٔ فعلی این است که ریاضیات واقعی را به‌دانشجو نمی‌آموزند. بسیاری ازدانشجویان به‌جای اینکه یاد بگیرند فکر کنند، این درسها را با حفظ کردن مطالب می‌گذرانند.

آنچه که لازم داریم، درسی است که تکنیکهای ریاضی را بیاموزد، کاربردهای جالب این تکنیکها را به‌دانشجو نشان دهد، او را به‌تفکر وادار کند، و مهمتر از همه، قدرت و محدودیتهای ریاضیات را به دانشجو نشان دهد. به عبارت دیگر، باید درسی در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی تدریس شود که برخی از انگیزه‌هایی را که باعث ریاضیدان شدن ما شد، به‌دانشجو القا کند. این شیوه شاید سبب ایجاد علاقه در دانشجویانی بشود که قریحهٔ ریاضی دارند ولی، جذب رشته‌های کاربردیتر می‌شوند.

پیشنهاد من این است که درسی در دستگاههای دینامیکی گسسته تدریس کنیم. بسیاری از ریاضیدانها فکر می‌کنند که تدریس چنین درسی به‌دانشجویانی که فقط ازپایهٔ جبری (خوبی) برخوردارند ممکن نیست. مع‌الوصف، من این درس را هم به‌دانش‌آموزان دبیرستانی و هم به دانشجویان رشته‌های غیرعلمی دانشگاه جورج تاون با موفقیت تدریس کرده‌ام. هدف از ارائهٔ این درس آموزش معادله‌های تفاضلی و بازگشتی است؛ و اساساً، درسی است در زمینهٔ کاربرد معادلات دیفرانسیل بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال.

در شروع درس، مطلبی را به‌بحث می‌گذارم که همهٔ دانشجویان نسبت به‌آن احساس آشنایی کنند، مثلاً بهرهٔ مرکب را؛ این مبحث مثالی ازساده‌ترین معادلهٔ تفاضلی ـ معادله‌ای خطی‌ومرتبهٔ اول ـ به‌دست می‌دهد. از اینجا به‌بعد، حسابهایی نظیر درآمد سالانه و رهن را، که در خلال هر دوره مبالغ دیگری به طور مرکب به‌آنها افزوده یا از آنها کاسته می‌شود، به‌بحث می‌گذارم و به این ترتیب، مضمون درس پیچیده‌تر و جدیتر می‌شود.

سریهای هندسی وهمساز، که درآنها مقدارهای غیرثابتی به‌مقدار قبلی افزوده می‌شود، مثالهای دیگری ازاین گونه مسأله‌ها(ی ناهمگن) هستند.

با مطالعهٔ این مدلها، دانشجویان نحوهٔ ساختن معادله‌هایی را که منعکس کنندهٔ اوضاع دنیای واقعی هستند، می‌آموزند. سپس یاد می‌گیرند که جوابهای این معادله‌ها را پیداکنند و رفتار کیفی این جوابها را تحلیل نمایند. به علاوه، تکنیکهایی را می‌آموزند که در حساب دیفرانسیل‌وانتگرال مفید است؛ یعنی طرزکار با دنباله، سری، و حد را فرا می‌گیرند.

همچنین، معادله‌های تفاضلی از مرتبه‌های بالاتر را نیز که مشابه معادله‌های دیفرانسیل‌خطی‌مرتبهٔ دوم هستند، تدریس می‌کنم. روشهای تعیین جوابها در هردو حالت یکسان هستند ـ چندجمله‌ای مشخصه‌ای بیابید و آن را تجزیه‌کنید. هنگامی که ریشه‌ها موهومی باشند، دانشجو می‌بیند که ازعددهای موهومی برای محاسبهٔ جوابهای حقیقی می‌توان استفاده کرد. بسیاری از دانشجویان تا وقتی که درسی در آنالیزمختلط نگذرانند، اهمیت عددهای موهومی را به‌خوبی درك نمی‌کنند.

در چنین درسی می‌توان مسأله‌های غیر خطی مانند معادلهٔ منطقی رشد جمعیت را مطرح کرد. چون معمولاً نمی‌توان برای مسائل غیرخطی جوابهای دقیقی پیدا کرد، دانشجو تکنیك خطی‌سازی، یعنی تعیین «بهترین» تقریب خطی‌یك مدل غیرخطی، را می‌آموزد. درواقع، دانشجو محاسبهٔ مشتق، و در بیشترموارد مشتق چندجمله‌ایهای ساده، را می‌آموزد. بنابراین، به‌جای تدریس تکنیکهای متعدد مشتقگیری، یکی ازمهمترین وکارامدترین کاربردهای مشتق را، که بسیاری ازدانشجویان

رشتهٔ ریاضی هرگز با آن مواجه نمی‌شوند یـا آن را درك نمی‌کنند، به‌نمایش می‌گذارم.

به‌نظرمن، تدریس بخش کوچکی از نظریهٔ انشعاب درخلال تعلیم معادله‌های تفاضلی‌غیرخطی‌مفید است. دراین‌بخش‌ازدرس، به‌دانشجو نشان داده می‌شود که وقتی پارامتری تغییر می‌کند، رفتار کیفی‌جوابها نیز می‌تواند تغییر کنـد. بررسی معادلهٔ رشدگونه‌ای از موجودات، مثلاً ماهی، مثالی از این دست است. پارامتر می‌تواند تعداد اعضای آن گونه که در هردورهٔ زمانی تولید می‌شود، باشد. شیوهٔ تحلیل کاملاً جبری است و با محاسباتی سروکار دارد که از تعیین نقطه‌های تلاقی یك منحنی، مانند یك سهمی، با خط $x = r$ چندان فراترنمی‌رود.

درس دستگاههای دینامیکی گسسته باید مباحث استانده‌ای نظیر احتمال و جبر خطی را نیز دربر بگیرد. برخلاف آنچه در درسهای ریاضیات متناهـی معمول است، این مبحثها به‌طـور جداگانه مطرح نمی‌شوند، بلکه، از طریق مطالعهٔ معادله‌های تفاضلی به‌یکدیگرمربوط می‌شوند. نظریهٔ احتمال با معادله‌های تفاضلی همراه می‌شود تامباحثی مانند فلاکت قمارباز، و انتخاب، جهش، و ازدیـاد نسل در ژنتیـك مورد بررسی قرارگیرند. جبرخطی برای مطالعهٔ دستگاههای معادله‌ها به‌کار می‌رود. این معادله‌هـا می‌توانند خطـی (رشد سنی جمعیت) یا غیرخطی (روابط صید و صیاد) باشند. مطالعـهٔ زنجیرهای مارکوف معمولی وجاذب، به‌ترکیبی ازجبرخطی، احتمال، و معادله‌های‌تفاضلی نیازمند است.

بالاخره، می‌توان معادله‌هایی راکه درآنها آشوب وربایندههای غریب مطرح‌اند، مورد مطالعه قرارداد. چنین معادله‌هایـی به‌آسانی به‌کمك میکروکامپیوترها قابل بررسی هستند. همچنین، این قسمت از درس‌زمینه‌هایی‌ازتحقیقات جاری ریاضی‌را به‌دانشجویان می‌شناساند و آنها را به‌برخی از محدودیتهای ریاضیات واقف می‌سازد.

چه‌کسی باید چنین درسی را بگیرد؟

برای دانشجویانی‌که معمولاً درس حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی را می‌گـذرانند، گـذراندن درسی در دستگاههای دینامیکی‌گسسته سودمند است. چنین درسی آنها را بـا علل‌آموزش بسیاری از تکنیکهای مطروحه در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا خواهدکرد.فایدهٔ دیگرش این است‌که شاید بتوانیم دانشجویان بیشتری را به ریاضیات جلب‌کنیم. احتمالاً، این دو درس را می‌توان به‌صورت درس واحدی در هم ادغام کرد.

به‌عقیدهٔ من، درسی در دستگاههای دینامیکی گسسته می‌تواند از درسهای مختصری که امروزه بیشتر دانشجویان علوم انسانی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال یا ریاضیات متناهی می‌گـذرانند، برای آنها مفیدتر باشد. تکنیکهایی‌که در درس دستگاههای دینامیکی گسسته مطرح می‌شوند به‌میزان بسیار گسترده‌ای در علوم اجتماعـی کاربرد دارند. دانشجویانی‌که این درس را می‌گذرانند قادر خواهند بود در رشتهٔ مورد علاقهٔ خود تحلیل مدلهای ریاضی را به‌خوبی درك کنند.

به‌عقیدهٔ من‌تفاوت زیادی درقابلیت دانشجویانی‌که در دبیرستان درس حساب دیفرانسیل وانتگرال راگذرانده‌اند وجود دارد. قسمتی (یـا بیشتر) دروسی کـه این دانشجویان در دانشگاه در ایـن زمینه می‌گیرند، تکرار مطالبی است‌که در دبیرستان دیده‌اند. درآغازدرس دانشکـده نیازی به‌مطالعه حس نمی‌کنند، ولی‌ناگهان رشتهٔ درس از دستشان در می‌رود. همچنین، به‌نظر من‌گرچه بسیاری از آنها اندکی از حساب دیفرانسیل و انتگرال سر در می‌آورند، ولی در زمینهٔ جبر دچارمشکل‌هستند. آیا برای این‌دانشجویان بهترنخواهد بودکه درسی، مثلاً در دستگاههای دینامیکی گسسته، بگذرانند کـه در عین تقویت ادراك ریاضی‌آنها به‌مهارتهای جبری آنها نیز بیفزاید؟

یکی ازمشکلهایی‌که درتدریس چنین درسی پیش می‌آید، کمبود مطلب است. درابتدا، منابعی مانندگرافها، مدلها و ریاضیات متناهی[1]؛ ریاضیات متناهی‌مقدماتی همراه با محاسبه[2]؛ ومدولهایUMAP(از شرکت COMAP) را به‌کار می‌بردم. اخیراً از جزوهٔ درسی خودم تحت عنوان ریاضیات‌گسسته همراه با معادله‌های تفاضلی‌متناهی[3](که می‌توان‌آن‌را ازبخش ریاضی دانشگاه جورج تاون درخواست‌کرد)، استفاده می‌کنم.

جامعهٔ ریاضی از ما انتظاردارد‌که در برنامه‌های درسی ریاضی تجدیدنظرکنیم. ولی بیشتر پیشنهادها به‌همان معایب برنامه‌های درسی فعلی دچارند. پیشنهاد من این است‌که ازتدریس آن دسته ازدرسهای مقدماتی که عمدتاً مجموعه‌ای از شگردهای ریاضی هستند، صرف‌نظر کنیم و به‌تدریس درسی‌که مبتنی بر ریاضیات واقعی باشد بپردازیم. فایدهٔ این امر، گسترش دانش ریاضی درجامعه خواهد بود.

ترجمهٔ محمد صادق منتخب

•Sandefur J. T., "Discrete dynamical system-an alternative to calculus?", *Siam News*, (3)**20**(1987)3.

• جیمز ساندفر، دانشگاه جورج تاون آمریکا

---

1. Malkevitch J., and Meyer W., *Graphs, Models & Finite Mathematics*, Prentice-Hall.
2. Dorn W. S., and McCracken, *Introductory Finite Mathematics with Computing*, Wiley.
3. Discrete Mathematics with Finite Difference Equations

نظراتی دربارهٔ ریاضیات دورهٔ کارشناسی*

یکی از کمیته‌های هیأت ملی علوم ایالات متحدهٔ آمریکا ویژهٔ بررسی و ارزیابی برنامه‌های دورهٔ کارشناسی علوم و مهندسی است. مطالبی که در زیر می‌خوانید متن سخنرانی دوتن از استادان صاحبنظر ریاضی آمریکا، گلیسون از دانشگاه هاروارد و استین از کالج سیمت‌اولاف است که در یکی ازجلسات این کمیته درسال ۱۹۸۵ ایراد شده است.

سخنان اندرو گلیسون

آقای رئیس، اعضای کمیته، مدعوین:

نام من اندرو گلیسون[1] است. استادکرسی ریاضی و فلسفهٔ طبیعی هولیس[2] در دانشگاه هاروارد هستم. همچنین یکی از رؤسای سابق انجمن ریاضی آمریکا می‌باشم، اما امروز در اینجا نمایندهٔ کسی جزخودم نیستم.

خوشوقتم که توانستم به واشینگتن بیایم و عقایدم را دربارهٔ آموزش ریاضیات بیان کنم، زیرا مدت زمانی است ـ از دههٔ ۱۹۶۰ که فعالیت خود را در «گروه بررسی ریاضیات مدرسه»[3] آغاز کردم تا بحال ـ به‌این موضوع علاقه‌مند هستم. با این حال تنها چیزی که در بیست‌وپنج سال اخیر آموخته‌ام این است که آموزش مسألهٔ ساده‌ای نیست وبرای آن راه حل آسانی وجود ندارد. هرگونه تغییری که درنظر داشته باشید، وقتی تغییر در دستگاهی به‌وسعت و پراکندگی دستگاه آموزشی آمریکا مطرح است، باید به‌قدری سنجیده وقابل انعطاف باشد که بتواند تعدیلهای لازم را حین اجرا تحمل کند.

باکمی نگرانی می‌بینم که درنام کمیتهٔ شما واژه‌های «علوم» و «مهندسی» آمده‌اند اما در آن ذکری از «ریاضی» نیست. البته متوجه هستم که «علوم» به‌معنایی درنظر گرفته شده است که ریاضی را هم دربرمی‌گیرد، وهیأت ملی علوم[4] وبنیاد ملی علوم[5] در تاریخ طولانی خود، ریاضی را به‌عنوان یک علم شناخته‌اند، وبنیاد همواره از آن پشتیبانی کرده است. باوجود این اگر ریاضی وسایر علوم دائماً دریک‌رده قرار گیرند به‌نظر من این خطر وجود دارد که بنیاد خط‌مشیی را اتخاذ کند که ریاضیات از پشتیبانی لازم برخوردار نشود. ریاضی تفاوت زیادی با سایر علوم دارد؛ این اختلاف احتمالاً به‌اندازهٔ اختلاف بین علوم و مهندسی است. هرپروژهٔ مهندسی تاحدودی به‌علوم پایه وریاضی وابسته است؛ همچنین هررشته از علوم پایه تاحدودی به مهندسی و ریاضی بستگی دارد؛ وریاضی نیز به‌علوم ومهندسی که منبع مسأله والهام آن هستند، وابسته است. همبستگی کل این دستگاه قابل توجه است؛ نمی‌توانیم بگوییم کجا مهندسی شروع وکجا علم ختم می‌شود ونیز نمی‌توانیم مرز بین ریاضی و سایر علوم را مشخص کنیم، اما از این نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که مهندسی، ریاضی، ورشته‌های مختلف علوم همه باید به‌یک نحو پشتیبانی شوند.

تفاوت اساسی بین ریاضی و سایر علوم این است که ریاضی نه‌مانند شیمی یک علم تجربی است و نه مانند نجوم مبتنی برمشاهده است. با ظهور کامپیوتر، خدشه‌دار شدن این تمایز آغاز شده است. اما ازمیان رفتن این تمایز، اگر اصولاً از بین برود، در آینده‌ای بس دور خواهد بود. این تمایز برای برنامه‌ریزی آموزشی و برای مسألهٔ کلیتر روشهای مناسب پشتیبانی، حائز بسی اهمیت است.

درهیچ‌جا تفاوت بین ریاضی وعلوم دیگر روشنتر ازدورهٔ آموزش پیش‌دانشگاهی نیست. ما آموزش ریاضی را در کودکستان شروع می‌کنیم وانتظارداریم که در دبستان بچه‌ها معلوماتی به‌دست آورند که پایهٔ تمامی کارهای آینده‌شان در ریاضی باشد. چون معلوم شده است که حساب درحکم پایهٔ دائمی معلومات ریاضی محصل است و چون

---

1. Andrew M. Gleason

۲. تامس هولیس (Thomas Hollis) درسال ۱۷۲۱ اولین کرسی استادی وشش‌سال بعد اولین کرسی استادی ریاضی و فلسفهٔ طبیعی را در دانشگاه هاروارد تأسیس کرد.

3. School Mathematics Study Group

4. National Science Board

5. National Science Foundation

تشخیص درستی یا نادرستی مسأله‌های حساب بسیار آسان است، معمولاً روی این درس تأکید زیادی می‌شود و در تدریس آن فشار فوق‌العاده‌ای به بچه‌ها وارد می‌شود به‌طوری که در طرز تلقی بچه‌ها از ریاضی غالباً آثار سوء بـه‌جـا می‌گذارد. علوم دیگری هـم در دبستان تدریس می‌شوند، اما به‌صورتی بسیار سطحی‌تر و نه به‌منظور برخورد قطعی با موضوع در این مقطع از آموزش. من فکر نمی‌کنم که هیچ یک از معلمین زیست‌شناسی دبیرستان یا کالج روی معلومات زیست‌شناسی که بچه‌ها در دبستان به‌دست آورده‌اند، حساب کند.

همه می‌گویند که ریاضی باید در ارتباط با کاربردهایش تدریس شود؛ ولی تقریباً همیشه مهارت ریاضی بچه‌ها از معلوماتشان در زمینه‌هایی که کاربرد واقعی دارند بسی پیشرفته‌تر است. مثلاً بچه‌ها فرمولهای مساحت مثلث و محیط دایره را پیش از آنکه این مفاهیم در زندگیشان معنایی داشته باشد یاد می‌گیرند. دانشجویان هم گرفتار همین مشکل هستند، تا جایی که مثلاً به‌خاطر اهمیت زیاد قضیهٔ استوکس در برخی از مباحث فیزیک، گـروه فیزیک اصرار می‌ورزد کـه در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، این قضیه در اوایل نیمسال اول سال دوم تدریس شود.

من معتقدم که بالاخره لازم است برنامهٔ آموزشی علوم ـ ریاضی ـ تکنولوژی کاملاً بررسی شود. اما مسلماً تمام تغییرات را نمی‌توان یکجا اعمال کرد. من طرفدار گامهای انقلابی در آیندهٔ نزدیک نیستم، امـا دلیلی نمی‌بینم باور کنم که برنامهٔ آموزشی حاضر بهترین برنامه است. اگـر واقعاً برنامهٔ حاضر بهتریـن باشد، مشکلات فعلی مـا به‌مراتب وخیمتر از آن‌حدی است که تا به‌حال به‌نظر ما رسیده است.

هر کس ریاضی تدریس کرده باشد می‌داند که در سبک و سرعت یادگیری محصلان تفاوت بسیار زیادی وجود دارد. احتمالاً در هر موضوع دیگری هـم تفاوت به‌همین اندازه است. اما به‌دلیل آسانی نسبی تشخیص، و به‌خاطر ارتباط قوی مطالب ریاضی با یکدیگر، این تفاوتها در ریاضی بهتر از اکثر رشته‌های دیگر دیده می‌شوند. به هر جهت این تفاوتها در آموزش بسیار اهمیت دارند. برای اینکه محصلان کندذهـن از کلاس عقب نمانند با سرعتی بیش از حـد به‌جلو رانده می‌شوند و نتیجهٔ آن عجز، ترس و تنفر آنهاست، در حالی که محصلان تیزهوش از کندی پیشرفت خسته می‌شوند و عدم رقابت موجب بی‌علاقگی آنها به‌درس می‌شود. نهایتاً نظام آموزشی باید ترتیبی دهد که کودکان بتوانند در موضوعهای مختلف با سرعتهای گوناگون پیشرفت کنند.

بنابراین توصیه می‌کنم که بنیاد ملی علوم به‌حمایت خـود ادامه دهـد و از پژوهش در مسائل واقعـاً اساسی آموزش ریاضی ـ علوم ـ تکنولوژی پشتیبانی بیشتری به‌عمل آورد. من بررسی مسائل زیـر را پیشنهاد می‌کنم، بدون آنکه بخواهم بگویم اینها تنها مسائل مهم یـا حتی مهمترین آنها هستند:

* آیا بهتر نیست کودکان را بیشتر به‌جنبه‌های کیفی ریاضی توجه دهیم تا به‌جنبه‌های صرفاً کمی آن؟
* کودکان (و محصلان بزرگتر) عملاً ریاضی و علـوم را چگـونه می‌آموزند؟
* آیا مطلوب است که در این زمینه‌ها یک برنامهٔ واحد داشته باشیم؟
* آیا برای وفق دادن برنامه بـا سبکها و سرعتهای متفاوت یادگیری راهی هست؟

تحقیق دربارهٔ این مسائل و بسیاری از مسائل دیگر باید به‌عنوان تحقیق اساسی شناخته شود، و باید اعتراف کنیم امیدی نیست که ایـن تحقیق فوراً به‌نتیجهٔ قطعی برسد. به‌هرحال بیست سال طـول خواهد کشید تا بچهٔ کودکستانی امروز به‌درجهٔ دکتری برسد و در ساختار علمی ایالات متحده مؤثر واقـع شود. در نظام آموزشی فاصلهٔ زمانی بیـن تصمیم و نتیجه‌گیری بسیار زیاد است. اگر بخواهیم نظـام آموزشی خود را با زمان به‌پیش ببریم، باید جداً و با عزمی راسخ از تحقیقات بنیادی آموزشی حمایت کنیم؛ مـا نمی‌توانیم یـک سال یـا حداکثر به‌تحقیق اساسی بپردازیم و سال بعـد به‌آن توجه نکنیم یا بـا تغییر دولت، سیاست پژوهشی خود را تغییر دهیم.

در این جلسات قبلاً بسیاری از صاحبنظران به‌ارزش بورسهای پژوهشی کالجها در تشویق دانشجویان به‌اینکه در زمرهٔ دانشمندان آینده قرار گیرند، اشاراتی کرده‌اند. در یک آزمایشگاه علمی می‌توان به‌یک دانشجوی بی‌تجربه کار کوچکی داد که برای موضوع در دست تحقیق ارزش داشته باشد و به‌تدریج که دانشجو آزموده می‌شود کار مهمتری به‌او محول کرد. بورسهای تحقیقاتی در علوم آزمایشگاهی و مشاهده‌ای، کمک و مشوق دانشجو در هر سطحی است، از دانشجوی مبتدی گرفته تا شخصی که در دورهٔ فوق دکتری تحقیق می‌کند. امـا در ریاضیات استفاده از دانشجوی مبتدی اساساً امـکان ندارد؛ در اکثر پروژه‌های پـژوهشی ریاضی، دانشجوی مبتدی به‌علت نداشتن معلومات کافـی نمی‌تواند به‌هیچ‌وجه مفید واقع شود. در آینده وقتی کامپیوتر از ریاضیات علمی نسبتاً تجـربی بسازد، ممکن است این وضع کمی تغییر کند، اما مدت مدیدی طول خواهد کشید تا این پدیده به‌صورت یکی از راههای مهم جلب دانشجو به‌ریاضیات درآید. این یک تفاوت قابل توجه دیگر بین ریاضیات و سایر علوم است.

در گذشته برنامه‌های تابستانی کـه برای شاگردان بـا استعداد دبیرستانی ترتیب داده می‌شد، مانند برنامه‌های کالج همپشایر و دانشگاه شیکاگو، به‌جلب دانشجو به‌ریاضیات کمک می‌کرد، سابقاً برنامه‌های پژوهشی تابستانی خاصی برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی طرح‌ریزی می‌شد، و برنامه‌های بازآموزی زیادی بـرای دبیران سالهای آخـر دبیرستان وجود داشت. حمایت از این برنامه‌ها در ده‌سال اخیر کاهش یافته است، و من توصیه می‌کنم که این پشتیبانی بیشتر شود.

دربارهٔ کامپیوتر و تأثیـر آن در تدریس خیلی صحبت شده است. من کاملاً یقین دارم که کامپیوتر تأثیر عمیقی در آموزش ریاضی خواهد داشت، اما به‌هیچ‌وجه مطمئن نیستم که تأثیر آن چه خواهد بود. به‌عنوان فردی که در حاشیه ناظر طلوع فرهنگ کامپیوتری است، می‌دانم کـه اساساً در هر زمینه‌ای که کامپیوتر وارد شده تأثیری بیش از حد انتظار داشته است. بیست سال پیش در مورد آموزش به‌کمک کامپیوتر ادعاهای فوق‌العاده‌ای می‌شد. این ادعاها کمتر شده اما آموزش به‌کمک کامپیوتر از بین نرفته‌است و بالاخره جای خود را در نظام آموزشی بازخواهد کرد. اکنـون برگرافیک کامپیوتری به‌عنوان یک وسیلهٔ آموزشی زیاد تأکید می‌شود، امـا هنوز نه‌می‌دانیم برنامه‌های گرافیکی را چگونه بنویسیم که برای تحقق اهدافمان انعطاف کافی داشته باشد و نه مطمئنیم که این برنامه‌ها در حد انتظارمان مفید باشد.

ما تازه شروع کرده‌ایم ببینیم کامپیوتر چگونه می‌تواند از ریاضیات یک علم تجربـی بسازد، و ضمناً آغاز نظام کارآموزی در ریاضیات را هم داریم می‌بینیم. دلیل این پدیـده آن است کـه یک دانشجوی کارشناسی که در برنامه‌نویسی ماهر باشد، می‌تواند سهم بسزایی در یک پروژهٔ ریاضیات تجربی داشته باشد.

پیشنهاد پروفسور استین این است[1] که همهٔ استادان ریاضی باید بتوانند

---

۱. سخنرانی استین که در همین جلسه ایراد شده، بعداز سخنرانی گلیسون می‌آید.

به‌اندازهٔ کافی از کامپیوتر استفاده کنند. به‌نظر من این پیشنهاد به‌چندین دلیل جالب است. اول اینکه، استادان ریاضی را وامی‌دارد که دربارهٔ چگونگی استفاده از کامپیوتر در تدریس خود بیندیشند. دوم اینکه، این پیشنهاد مسلماً برنامه‌های آموزشی واقعاً مفیدی را به‌وجود خواهد آورد. سوم اینکه، وقتی بسیاری از ریاضیدانان به‌روش تجربی به‌کار پژوهش بپردازند هم ریاضیات پیشرفت می‌کند و هم فرصت بیشتری برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی فراهم می‌شود تا درگیر کار پژوهش شوند. و دلیل آخر اینکه مطمئناً روزی کامپیوتر در دسترس همگان قرار خواهد گرفت، و دراین باره گفتنی زیاد است.

پروفسور استین همچنین به‌کاهش سریع تعداد دانشجویان امریکایی که در دوره‌های بالاتر ازکارشناسی در رشتهٔ ریاضی به تحصیل ادامه می‌دهند، اشاره کرده است. من معتقدم یکی ازعلتهای این کاهش، فقدان نسبی کمك به‌دانشجویان ریاضی درمقایسه با دانشجویان علوم دیگر است. منظورم هم کمك مستقیم مالی ازطریق دادن بورس و استخدام موقت برای تحقیق است وهم کمك غیرمستقیم به‌صورت تشویق و تقویت ارزش اجتماعی ریاضیات. اخیراً روزنامه‌ها کمبود معلم واجد شرایط ریاضی ونتیجه‌های شوم این کمبود را به‌کرات تذکر داده‌اند. من براین عقیده‌ام که صرف انتشار همین مطالب، گامی است در جهت احیای ارزش اجتماعی تحصیل ریاضیات، ارزشی که به‌کلی محوشده بود؛ و گمان می‌کنم هم اینك دانشجویانی که وارد دانشگاه می‌شوند علاقهٔ بیشتری به‌ریاضیات به‌عنوان یك حرفه نشان می‌دهند. به‌نظر من تدرشناسی جامعه، تأثیر بسزایی در جلب افراد به‌حرفه‌های ریاضی و علوم، ونیز به‌بیشتر حرفه‌های دیگر دارد.

برنامهٔ بورس ترومن، برنامهٔ مهمی است که برای تشویق دانشجویان به‌قبول شغلهای خدمات عمومی طرح‌ریزی شده است. این برنامه با برگزاری مسابقه بین دانشجویان سال دوم که مایل‌اند چنین شغلهایی را درآینده بپذیرند، دوبورس به‌هر ایالت اعطا می‌کند. مدت بورس چهار سال است، دوسال برای اتمام دورهٔ کارشناسی و دوسال هم برای تحصیل در دوره‌های بالاتر؛ این امر، بورس ترومن را بسیار جذاب می‌سازد. اما آنچه ازجنبه‌های مالی مهمتر است، وجود خود این برنامه است که به‌دانشجو می‌گوید خدمات عمومی حرفه‌هایی بس محترم هستند؛ این پیام بدون شك باعث شده است که بسیاری از دانشجویان، خیلی بیش‌ازتعدادی که بورس گرفته‌اند، به‌خدمات عمومی روآورند. من توصیه می‌کنم که بنیاد ملی علوم برنامه‌ای نظیر برنامهٔ ترومن برای ریاضیات و علوم تدوین کند.

نوع دیگری از سیاست کمك به دانشجو که باید دولت مرکزی درپیش بگیرد، اعطای وام «بخشودنی» به‌دانشجویانی است که شغل علمی را انتخاب می‌کنند. نیروهای مسلح درمقابل چهار سال خدمت بعداز فراغت‌ازتحصیل، تقریباً تمام هزینه‌های دانشجویان دانشکدهٔ افسری را می‌پردازند. درواقع نیروهای مسلح تضمین می‌کنند که به‌هردانشجوی بالیاقت مبلغی در حدود چهل‌هزار دلار بپردازند. با اینکه کمتر از نصف دانشجویانی که به‌این ترتیب استخدام می‌شوند، بعد از پایان چهار سال تعهد خدمت به‌کار ادامه می‌دهند، مطمئناً وزارت دفاع این برنامه را باصرفه می‌داند. اگر جداً بخواهیم کیفیت تدریس درمدرسه‌ها بالا برود، به‌نظر من اعطای وام بخشودنی، ازآن نیز باصرفه‌تر است. مثلاً فرض کنید که برای هر سال تدریس در دبیرستان یا در کالج، پنجهزار دلار از وام دانشجو بخشوده شود ــ این موجب خواهد شد که برای بسیاری ازکسانی که مجبورند به علت سنگینی دیون دوران تحصیل وارد شغلی شوند که درآمدش خیلی بیشتر باشد، تدریس، شغل جالبی شود. اجرای چنین برنامه‌ای در حد امکانات بنیاد ملی علوم نیست، اما امیدوارم که شما براین فکر صحه بگذارید. مدت مدیدی است که این فکر به‌صورتهای مختلف مطرح بوده است؛ باشد که با پشتیبانی هیأت ملی علوم این فکر وارد مرحلهٔ عمل شود.

سخنان لین آرتور استین[1]

آقای رئیس، اعضای کمیته، مدعوین:

خیلی خوشوقتم که هیأت ملی‌علوم بررسی آموزش دورهٔ کارشناسی را به عهده گرفته است؛ و به‌خصوص خوشحالم که به‌عنوان رئیس جامعهٔ ریاضی امریکا دعوت شده‌ام که دربارهٔ ریاضیات دانشگاهی اظهارنظر کنم. اکثر اعضای جامعهٔ بیست هزارنفری ما در کالجها و دانشگاهها به تدریس ریاضیات مشغول‌اند؛ و قسمت اعظم آموزش ریاضیات دورهٔ کارشناسی این کشور برعهدهٔ اعضای جامعهٔ ماست. من همچنین به‌عنوان عضوی ازشورای رؤسای انجمنهای علمی، شما را به‌خاطر این بررسی می‌ستایم: به‌خصوص به‌این دلیل که از بهار گذشته این شورا به‌اتفاق آرا تصمیم گرفته است ازبنیاد ملی علوم مصراً بخواهد که کمك به برنامه‌های دانشگاهی وپیش دانشگاهی آموزش علوم و مهندسی را ادامه دهد. ما علاقهٔ شما را به‌ریاضیات دانشگاهی و به‌رابطهٔ آن با آموزش علوم ومهندسی، تحسین می‌کنیم.

من استاد ریاضی کالج سینت‌اولاف[2] در نورثفیلد[3] مینسوتا هستم، سینت اولاف یکی ازکالجهای ادبیات وعلومی[4] است که درعلوم قوی است و فرددیك استار درهمین کمیته به آن اشاره کرده است. سه‌هزار دانشجو دارد؛ رشتهٔ اصلی ده درصد ازفارغ‌التحصیلان سالانهٔ آن ریاضی است. در دههٔ گذشته با کمك برخی از برنامه‌های علمی بنیاد ملی علوم، کیفیت کار ما وکار بسیاری ازکالجهای مشابه بالارفته است: این برنامه‌ها عبارت‌اند از: شرکت دانشجویان دورهٔ کارشناسی در تحقیق؛ تأمین تجهیزات علمی کمك‌آموزشی، اعطای بورس به استادان رشته‌های علوم، کمك همه‌جانبه به‌آموزش علوم در دورهٔ کارشناسی.

این برنامه‌های بنیاد ملی علوم در زمان خود نتایج خوبی به بار آوردند، ومن با تجربهٔ دست اولی که دارم می‌توانم بگویم که این برنامه‌ها به‌تقویت برنامه‌های ریاضی وعلوم مؤسسه‌ای که من در آن کار می‌کنم فوق‌العاده کمك کرده‌اند. اما من امروز دربارهٔ این برنامه‌ها یا دربارهٔ کالجهای ادبیات وعلوم صحبت خاصی ندارم بلکه می‌خواهم دربارهٔ نیازهای ریاضی کالجها ودانشگاههای سراسر کشور صحبت کنم.

ریاضیات

یقین دارم که می‌دانید درحرفه‌های مربوط به‌علوم ومهندسی، ریاضیات هم نیرویی است که توان پرداختن به‌آن حرفه‌ها را فراهم می‌آورد و هم در حکم یك صافی است. بدون آموزش خوب در ریاضیات نمی‌توانیم شالودهٔ محکمی برای علوم و مهندسی بریزیم. برنامهٔ کار بنیادملی‌علوم‌درآموزش‌علوم ومهندسی ــ در دوره‌های پیش‌دانشگاهی و دانشگاهی ــ باید برمبنای این واقعیت اساسی تنظیم شود: ریاضی تنها یکی از رشته‌های علوم نیست، بلکه پایهٔ علوم و مهندسی است.

همواره بین ریاضیات و علوم دیگر رابطه‌های نزدیکی وجود داشته است. اما چون کامپیوتر تحلیل ریاضی بسیاری از فرایندهای علمی و مهندسی را ممکن ساخته است، اینك این رابطه‌ها هم‌نافذتر و هم برمعنی‌تر از زمانهای گذشته هستند. اگر در گذشته تنها علوم نظری

---

1. Lynn Arthur Steen 2. St. Olaf 3. Northfield
4. liberal arts colleges

به ریاضیات پیشرفته نیاز داشتند، امروز تمام رشته‌هایی که پایهٔ علمی دارند از الگوهای پیچیدهٔ ریاضی استفاده می‌کنند. این نکته واقعیت دیگری را مطرح می‌کند که برنامهٔ آموزشی دورهٔ کارشناسی را سخت تحت‌تأثیر قرار می‌دهد: ریاضیات از نظر محتوا، دامنه، و کاربرد به‌شدت در حال تغییر است؛ نه تنها کاربردهایش متنوعتر می‌شود بلکه بردامنهٔ مفاهیم آن نیز افزوده می‌شود.

چند بررسی جدید توجه ما را به‌پیشروی ناگهانی مرزهای علوم ریاضی کاربردی جلب می‌کنند؛ این پیشروی، نیاز مبرم به‌افرادی را به‌وجود آورده است که قادر باشند ابزارهای علمی مبتنی بر ریاضیات تولید کنند و آنها را به‌کار ببرند. دراین بررسیها به‌موضوعهایی نظیر: نظریهٔ ارتباطات، شارش فراصوتی، واکنشهای شیمیایی، پیچیدگی محاسبه، نظریهٔ میدان کوانتومی، آمارمحاسباتی، بهینه‌سازی ترکیباتی، تشخیص الگو، مسائل بدطرح، معادلات غیرخطی، و محاسبهٔ موازی اشاره می‌شود.

این رشد ریاضی وکاربردهایش ما را وادار می‌کند که دربرنامهٔ آموزش ریاضیات به‌طور اساسی تجدید نظر کنیم. با این حال چون آموزش ریاضیات فرایندی متشکل از مراحل متوالی است که از دبستان تا دوره‌های بعدازکارشناسی را دربرمی‌گیرد، تغییر درهرقسمت برنامه، هم درقسمتهای دیگرآموزش ریاضی و هم در درسهای مراحل بعدی علوم و مهندسی عواقب مهمی به‌دنبال دارد. نتایج پژوهشهای عالی دربرنامهٔ کلیهٔ مقاطع تحصیلی تأثیر می‌گذارند، و در عین‌حال آموزش ریاضی پژوهش آینده را بنیاد می‌نهد. این رابطه‌های نزدیک بین آموزش و پژوهش موجب به‌وجودآمدن پیوندهای جدید نو پدید بخشی درجامعهٔ ریاضی کشور ما شده است، پیوندهایی مبتنی بر این عقیدهٔ همگانی که‌ریاضیات از آموزش تا پژوهش، یك کل تفکیک‌ناپذیر است.

ریاضیات دانشگاهی

در علوم ریاضی، ریاضیات دانشگاهی مرز بین مقوله‌های آموزشی و پژوهشی محسوب می‌شود. وظایف مدرسان ریاضی کالجها و دانشگاهها به شرح زیر است: تدریس درسهایی به‌دانشمندان و مهندسان آینده؛ ترتیب‌دادن برنامه‌هایی برای معلمان آیندهٔ دبستانها و دبیرستانها؛ تقویت پایهٔ درسی آنهایی که می‌خواهند وارد دوره‌های بالاتر از کارشناسی بشوند؛ ارائهٔ درسهای تقویتی برای دانشجویانی که بدون آمادگی در ریاضی وارد کالج و دانشگاه می‌شوند؛ عرضهٔ درسهای عمومی‌ریاضی برای دانشجویانی که رشتهٔ اصلی آنها یکی ازرشته‌های علمی نیست؛ و ارائه درسهای سرویس گوناگونی از آمار مقدماتی گرفته تا تحقیق در عملیات پیشرفته. علاوه براین دراغلب کالجها و دانشگاهها، ریاضیدانها بعضی ازدرسهای برنامه‌نویسی کامپیوتری و درسهای مقدماتی علوم‌کامپیوتری را نیز تدریس می‌کنند.

کیفیت آیندهٔ علوم و تکنولوژی کشور بستگی به‌توانایی استادان ریاضی امروز در انجام این وظایف متنوع دارد. ایده‌های سازنده برای نوآوری دربرنامه‌های ریاضیات دورهٔ کارشناسی، موجب شتاب گرفتن پیشرفتهای مهیج درعلوم ریاضی می‌شود. آمارمربوط به‌سالهای اخیر حاکی است که استادان ریاضی ما تحت فشاری سنگین هستند و ناتوانی آنها در رفع نیازهای کشور در ریاضیات دانشگاهی رو به تزاید است.

مثلاً تقاضا برای درسهای ریاضی دورهٔ کارشناسی ازسال ۱۹۷۰ تاکنون دو برابر شده است، اما در همین مدت تعداد مدرسان ریاضی کالجها و دانشگاههای کشور فقط در حدود پنجاه درصد افزایش یافته است. درهر ترم درحدود سی‌هزار معلم تقریباً به سه میلیون دانشجو درس ریاضی می‌دهند. علی‌رغم این افزایش تقاضا برای درسهای ریاضی، تعداد دانشجویان رشتهٔ ریاضی بیش از پنجاه درصد کاهش یافته است و تعدادکسانی که درسهای ریاضیات پیشرفته (ریاضیات بعد از حساب دیفرانسیل و انتگرال) را می‌گیرند از بیست درصد دانشجویان درسهای ریاضی دورهٔ کارشناسی به پنج درصد کاهش یافته است. درواقع، درحدود سه چهارم تمام واحدهای ریاضی ارائه شده از طرف کالجها و دانشگاهها، مربوط به‌درسهایی است که با برنامهٔ دبیرستان تناسب بیشتری دارند. ازاین بدتر اینکه، هرسال درحدود صد هزار کتاب تمرین در موضوع «حساب برای دانشجویان کالج» به‌فروش می‌رسد.

درسهای کمکی، مقدماتی وسرویس، نیرو و وقت مدرس را می‌گیرند. افزایش تعداد ثبت‌نام‌کنندگان در ریاضیات مقدماتی‌همراه باکاهش تعداد دانشجویان ریاضی، هم برنامه را نامتعادل کرده وهم روحیه، نیرو، و علاقهٔ مدرس را پایین آورده است. دربسیاری از گروههای ریاضی نتیجهٔ این فرایند، افزایش تعداد مدرسان مستعفی، کسالت‌آورشدن تدریس، وبی‌علاقه شدن دانشجو بوده است.

هرچند سایر نشانه‌های نامناسب بودن وضع را به‌سختی می‌توان به‌صورت کمّی بیان کرد، اما از اهمیت کمتری برخوردار نیستند. گروههای ریاضی، جز در موارد استثنایی به قدر کافی به‌سیستمهای محاسباتی مناسب برای استفادهٔ عملی از ریاضیات در دنیای علمی و صنعتی امروز، دسترسی ندارند. درنتیجه،کامپیوتر بر برنامهٔ ریاضیات ازاین‌لحاظ که چه باید تدریس شود وآنچه تدریس می‌شود چگونه باید تدریس شود— تأثیر بسیار اندکی داشته است. دراین زمان، ریاضیات دورهٔ کارشناسی را باید در ارتباط فعال با کامپیوترهای نیرومند ارائه کرد و برای عملیات نمادی، نمایش گرافیکی، آنالیز عددی وشبیه‌سازی ازاین وسیله باید کمك گرفت.

کامپیوتر ابزار مهمی برای الگوسازیهای علمی و مهندسی است: به‌این دلیل که با کمك آن می‌توان ریاضیات را به‌طور مؤثر به‌کار گرفت. کامپیوتر به‌عنوان موتور ریاضیات کاربردی، تکنیکهایی قوی برای تقریب‌زدن پدیدآورده است، و در نتیجه‌حوزهٔ الگوهای‌ریاضی را بسیار وسعت بخشیده است: آنچه قبلاً به‌صورت نظری وجود داشت، اکنون هرروز در هر آزمایشگاهی در جلوی چشمانمان رخ می‌دهد. انقلاب‌کامپیوتر فقط نقطهٔ نمایان یك انقلاب خیلی عمیقتر در ریاضیات‌کاربردی است.

دسترسی به‌کامپیوتر وتقاضا برای‌کاربردهای جدید ما را وادار می‌کند که درمورد اولویتهای آموزش ریاضی درتمام مقاطع‌تحصیلی دوباره بیندیشیم. برای اینکه دانشجوی امروز ما بتواند درقرن‌بیست و یکم وظایفش را خوب انجام دهد، باید برنامه‌های ریاضیات دورهٔ کارشناسی، مباحث زیر را نیز دربرگیرند: اصول اساسی‌علم‌کامپیوتر (الگوریتمها، ساختهای داده‌ها، نظریهٔ پیچیدگی)؛ روشهای عددی و تکنیکهای تقریب زدن با دید جدید؛ روشهای آماری قوی مبتنی برکامپیوتر؛ تکنیکهای گرافیکی برای تحلیل اکتشافی داده‌ها؛ و الگوریتمهای‌کامپیوتری برای‌مسائل‌بهینه‌سازی. مجموعهٔ این‌موضوعها را امروز بیشتر به‌عنوان «علوم ریاضی» می‌شناسند، ولی غالباً هنوز هم واژهٔ «ریاضیات» را به‌عنوان مترادف مخفف آن به‌کار می‌برند. حقیقت نهفته درپشت این‌نام هم ساده است وهم تکان‌دهنده: ریاضیات دورهٔ کارشناسی باآنچه که بیست سال پیش تدریس می‌شد، کاملاً متفاوت است.

متأسفانه در بسیاری از گروههای ریاضی کالجها و دانشگاهها،

درسهای ریاضی هم ازجنبهٔ طرزنگرش وهم از نظر محتوا کهنه هستند ــ به‌این‌دلیل اصلی که مدرسان فرصت‌کافی نداشته‌اند معلومات خود را بالا ببرند. برنامهٔ درسی ریاضیات دانشگاهی وقتی پویاست که در هرده سال نیمی‌از آن تغییر کند. مثلاً، درسهای منطق‌ریاضی، ریاضیات گسسته، تحقیق درعملیات، نظریهٔ محاسبه، وترکیبیات که ده‌سال پیش به‌ندرت تدریس می‌شدند، امروز عموماً در هر گروه خوب علوم ریاضی تدریس می‌شوند. دایر کردن این درسها ــ ودرسهای بعدی برای دههٔ آینده ــ بخشی‌مهم از وظایف مدرسان کالج و دانشگاه است، اما توجه کافی به‌آن نمی‌شود.

ریاضیات برای دانشجویان علوم انسانی

ارائهٔ درسهای ریاضی مناسب برای دانشجویان علوم انسانی، مسألهٔ مهمی است که به‌آن توجه‌کافی نشده است. دانشجویان علوم‌انسانی و هنر، ناخودآگاه از ریاضیات وحشت دارند، ازآن اجتناب‌می کنند و در نتیجه‌آن رادرست نمی‌فهمند. در بسیاری از موارد این‌دانشجویان مجبور می‌شوند درسهای‌دبیرستانی را،که تنها به‌منظور به‌دست‌آوردن مهارت در محاسبه تدریس می‌شوند، دوباره بگیرند، حال‌آنکه در این زمان‌کامپیوتر محاسبات را به‌مراتب بهتر انجام می‌دهد. ناآشنایی با ریاضیات، سبب ناآشنایی با علوم وتکنولوژی می‌شود، و درنتیجه دو فرهنگ بازهم از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

در جامعه‌ای‌که نظامهای پیچیده‌ای بر آن حکمفرماست، ما باید خیلی برکوشش خود بیفزاییم تا رهبران آیندهٔ جامعه ــ دانشجویان امروز ــ را آگاه‌کنیم‌که ریاضیات جادوگری نیست وحتی آنهایی‌که آموزش علمی پیشرفته‌ای ندیده‌اند، لازم است روش پرسیدن سؤال مناسب وبه‌دست آوردن پاسخ صحیح را بدانند. ما در دنیای«غوغای اندیشه‌ها» زندگانی می‌کنیم که ابزارهای ریاضیات‌کاربسته از قبیل آدمکهای مصنوعی، الگوهای اقتصادی، بازیهای جنگی، و سیستمهای ماهر،آن را به‌وجود آورده‌اند، و با این‌حال دنیایی است‌دچارمسائل اخلاقی ناشی ازفرضیات نهانی وتأثیرات‌جنبی ناخواسته. در بعضی‌از سیستمها، نظم بی‌نظمی به‌وجود می‌آورد، در حالی‌که در سیستمهای دیگری عکس‌آن درست است. سیستمهای پیچیده، چه درزیست‌شناسی یا اقتصاد، وچه در مهندسی یاپزشکی، پراز پارادوکس، بی‌تکلیفی، و عدم‌قطعیت هستند. به‌موازات‌آنکه‌کامپیوتر شروع به‌تسخیر عرصه‌های یقین‌ــ‌محاسبات‌ــ کرده است،ما باید انسانها‌ــ‌دانشجویانمان‌ــ‌راطوری پرورش دهیم‌که برای‌پذیرش ابهام ودرک عدم قطعیتی‌که درالگوهای علمی وریاضی زندگانی روزمرهٔ ما فراوان‌اند، آمادگی داشته باشند. این نیز وظیفهٔ مهم دیگری است که بر سایر وظیفه‌های بسیار سنگین مدرسان افزوده می‌شود.

بازارکار ریاضیات

کسادی‌بازارکار ریاضیات‌در دههٔ ۱۹۷۰ سبب شدبسیاری‌ازدانشجویان به‌شغل تدریس ریاضیات روی نیاورند؛ اینک جاذبهٔ صنعت و علم کامپیوتر این نقش‌را ایفا می‌کند. درنتیجه متوسط سن‌مدرسان‌ریاضی، به سمت بالا متمایل است: بیش از سه چهارم مدرسان ریاضی کشور در سالهای قبل از ظهور کامپیوتر تربیت شده‌اند. با وجود افزایش‌نیاز کالجها و دانشگاهها به‌استخدام‌مدرسان‌ریاضی، دانشجویانی که برای احراز این‌مقام دربی اخذدرجهٔ دکتری هستند، بسیارنادرند. درحال حاضر، تعداد دکترهای ریاضی تبعهٔ ایالات متحده که می‌توان آنها را درگروههای ریاضی‌کالجها ودانشگاهها استخدام‌کرددرحدود دوران قبل از اسپوتنیک است (زیرچهارصدنفردرسال گذشته) ویک‌سوم آنها جذب صنعت می‌شوند. بیش ازچهل درصد دکترها، و در بعضی گروهها بیش از دوسوم دانشجویان بالاتر ازکارشناسی، ازکشورهای دیگرهستند. بازهمان‌طورکه دریک‌نسل پیش به‌دلیلهای دیگری پیش‌آمد، ریاضیات ایالات متحده عنقریب به صورت جزئی از مشخصات فرهنگی مهاجرین درمی‌آید.

در هیچ زمانی نیاز به‌کارشناس وکارشناس ارشد ریاضی بیش‌از امروز نبوده است. ما همه می‌دانیم که در سطح‌کشور به‌قدرکافی کارشناس‌ریاضی‌نداریم‌که بتوانند ریاضیات‌دبیرستانی‌راخوب‌تدریس کنند؛ اما آنچه ممکن است خیلی واضح نباشد افزایش قابل توجه نیاز بخش‌صنعت به‌فارغ‌التحصیلانی از دوره‌های‌کارشناسی‌وکارشناسی ارشد در رشته‌های علوم ریاضی است‌که به گروههای دست اندرکار مسائل محاسباتی، آماری یا مدیریت بپیوندند. نیازمندیهای بخش صنعت به کارمندانی‌که برای کار با الگوهای مجرد،کمی، و نمادی آموزش دیده باشند، موجب‌تشدید توجه دانشگاهها به‌این علوم«ذهنی» یا «مصنوعی» (در مقابل علوم طبیعی) می‌شود. ارقام حقوق این‌افراد، که شاخص غیرمستقیم تقاضاست، تأیید می‌کندکه تقاضابرای‌استخدام این گونه افراد در بخشهای‌گوناگون بسیار زیاد است.

صرفنظر ازآموزش، درصنعت ودفاع نیزاحتیاج به‌نیروی‌انسانی فوق‌العاده زیاد است. تنها نصب هریك از سوپرکامپیوترها،که در اوایل دههٔ ۱۹۹۰ تعدادشان تقریباً به‌سالی دویست دستگاه خواهد رسید، حدوداً به‌دوازده دانشمند که قادر باشند محاسبات علمی را بفهمند و دراین زمینه به‌پژوهش بپردازند نیاز خواهد داشت. گرچه این دانشمندان در بسیاری از موارد دارای مدارکی عالی در علوم، کامپیوتر یا مهندسی خواهند بود، حداقل به‌همین تعداد فارغ‌التحصیل دورهٔ‌کارشناسی رشتهٔ ریاضی نیز نیاز خواهد بود.

برای درك حقیقت مطلب، باید بدانیدکه در ایالات‌متحده‌درسال تنها ده‌هزارنفر در ریاضی مدرك کارشناسی می‌گیرند وتنها ده‌درصد این عده برای اخذ درجهٔ دکتری در رشته‌های مختلف ادامهٔ تحصیل می‌دهند. [پس تنها] برای تأمین نیازهای محاسبات علمی، صرفنظر از نیازدبیرستانهاودانشگاهها به‌تدریس، تعداددانشجویان دورهٔ‌کارشناسی ریاضی در ایالات‌متحده باید دوبرابر شود. و همه می‌دانیم‌که‌کل افرادی‌که درسن‌دانشگاه رفتن هستند، تا یك دههٔ دیگر همچنان‌کاهش خواهد یافت.

اما افزودن‌تعداد دانشجویان‌رشته‌های علوم‌ریاضی دورهٔ‌کارشناسی به‌خودی خود پاسخگوی نیازهای جامعه به نیروی انسانی نیست. پایین‌آوردن سطح‌کیفی پذیرش دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی به‌هیچوجه مفید نخواهد بود. به‌جای آن، برای جلب بهترین‌مغزهای جوان به‌ریاضیات دورهٔ‌کارشناسی به‌یك بسیج همگانی نیازمندیم تا نه‌تنها برتعداد کاندیداهای دورهٔ دکتری ریاضی بیفزاییم، بلکه تمام رشته‌هایی از علوم ومهندسی را که بر مبنای آموزش قوی ریاضیات دورهٔ‌کارشناسی‌استوارند، تقویت‌کنیم. ادعا می‌کنم که تنها راه مؤثر برای انجام این امر، این است‌که مطمئن شویم در سراسرکشور در هرکالجی، کوچك یا بزرگ، مدرسان ریاضی واجد شرایطی وجود دارندکه درحرفهٔ خود فعال، با تحولات رشتهٔ خود همگام، از پیشرفتهای جدید ریاضیات کاربردی آگاه، و با بسیاری از مسائل مشکلی‌که در پیش روی ماست، آشنا هستند.

استراتژیهای نوسازی

خلاصه اینکه، ملت مادرمورد ریاضیات دورهٔ‌کارشناسی برای‌رشته‌های مختلف، با مسائلی جدی روبروست. اعضای هیأت علمی گروههای

ریاضی ما تا حدود زیادی از همگامی با تأثیرات عظیم کامپیوتر عقب مانده‌اند، ورابطهٔ آنها، به‌سبب نداشتن وقت مطالعه برای توسعهٔ معلومات تخصصی، با مرزهای سریعاً پیشروندهٔ حوزهٔ تخصصشان قطع شده است. در نتیجه برنامه‌ای را تدریس می‌کنند که بیشتر درسهایش یا بیش ازحد ابتدایی هستند ویا زیاده قدیمی شده‌اند. گرچه این توصیف، اغلب دانشگاههای پژوهشی وکالجهای خوب ادبیات وعلوم را شامل نمی‌شود، اما معتقدم که ارزیابی منصفانه‌ای است از وضع ریاضیات در اکثریت قابل توجه کالجهای دو وچهارسالهٔ کشور، که در آنها بخش عظیمی از دانشجویان ما آموزش می‌بینند.

برای اینکه ریاضیات دورهٔ کارشناسی دوباره جان بگیرد، لازم است در کالجها ودانشگاههای سراسر کشور برنامه‌هایی اجرا شوند که بامرزهای پیشرفتهٔ ریاضیات محض وهمچنین کاربسته ارتباطی نزدیک داشته باشند. درهرمؤسسه‌ای ــ نه‌تنها دربرکلی یاهاروارد، سینت‌اولاف یا هرکالج خوب دیگری ــ لازم است دانشجویان ببینند که ریاضیات یك نظام فکری فعال و درحال رشد است ودرآن مسائل حل نشدهٔ مشکلی وجود دارند که شایان بذل توجه جدی هستند. این هم مربوط به‌دانشمندان ومهندسین آینده است وهم به‌ریاضیدانان آینده؛ هم مربوط به‌وکلا و پزشکان است و هم به مسؤولین آموزش و وزرا. لازم است تحصیل‌کرده‌ها بدانند که‌ریاضیات پویاست وکاربردهایش واقعاً اهمیت‌دارند.

به تمام آن دلایلی که از قدیم تدریس خوب را بسر مطالعه کافی و تحقیق استوار کرده است، ضروری است که اعضای هیأت علمی دورهٔ کارشناسی درحرفهٔ خود همواره فعال بمانند. اگر بخواهیم واقع‌بین باشیم باید اعتراف کنیم که تنها معدودی از افراد ممتاز به راستی مرزهای پژوهش ریاضی را پیش می‌برند ــ و امکان استفاده از حمایتهای معمول بنیاد ملی علوم وسایر سازمانها را دارند. از بررسیهای اخیر نتیجه شده است که درحدود ده‌درصد اعضای تمام‌وقت گروههای ریاضی کالجها با جدیت به‌تحقیقات قابل انتشار، قابل رقابت،ودرجه اول مشغول‌اند. دادن بورس ریاضی به‌اکثریت قابل توجه هم لازم‌تر است و هم بیشتر مناسبت دارد، زیرا انگیزه‌ای است برای اندیشیدن، مشوقی است برای خوب درس دادن، عاملی است برای‌جلب دانشجو به‌حرفهٔ ریاضی، وهم‌وسیله‌ای است برای گنجانیدن پیشرفتهای جدید در برنامهٔ دورهٔ کارشناسی.

تحقیق‌در ریاضیات شبیه به‌تحقیق درعلوم تجربی نیست. درحالی که تحقیق در دورهٔ کارشناسی در اکثر پروژه‌های آزمایشگاهی شیمی، زیست‌شناسی، یا فیزیك می‌تواند موفق باشد، تحقیق در ریاضیات به‌قدری از برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی دور شده است که از بورسهای پژوهشی معمول بنیاد ملی علوم بهرهٔ مستقیم بسیار اندکی عاید دورهٔ کارشناسی می‌شود. بررسی انتشارات ریاضی، برهان قاطعی براین مدعاست: به‌ندرت می‌توان مقاله‌ای در ریاضی یافت که یکی از نویسندگانش‌دانشجو باشد ــ خواه از دورهٔ کارشناسی،خواه ازدوره‌های بالاتر. استثناهای کمی در ریاضیات کاربردی، درآمار، ودرزمینه‌های جدید ریاضیات ترکیبیاتی وجود دارند. اما قاعدهٔ کلی این است که دانشجویان دورهٔ کارشناسی نه‌قادرند به‌صورتی فعال درتحقیق استادان خود شرکت کنند، ونه‌آن را می‌فهمند. برنامه‌های حمایت‌ازریاضیات دانشگاهی باید این تفاوت اساسی را درنظر داشته باشد.

کلید جان‌تازه بخشیدن به‌ریاضیات دانشگاهی،وجود یك هیأت‌علمی است که از نظرذهنی زنده باشد. این برای‌بعضی به‌معنای تحقیق کردن و برای بعضی دیگر به‌معنای مسأله حل کردن است. عده‌ای هم ممکن است به‌نوسازی برنامه بپردازند، پیشرفتهای جنبی را به رشته‌های جدیدی تبدیل کنند،به‌معرفی روشهای کامپیوتری بپردازند،یامؤسسه‌های تربیت معلم ایجاد کنند. آنچه بیش از همه اهمیت دارد این است که هیأت علمی‌محیطی به‌وجودآوردکه درآن دانشجو بتواند باریاضیات به‌صورت یك نظام فکری زنده وپیشرو روبرو شود.

لزوم اقدام بنیاد ملی علوم

ریاضیات دانشگاه و کالج به‌دو دلیل ساده به‌کمك بنیاد ملی علوم نیاز دارد. نخست اینکه، ریاضیات یك سرمایهٔ مهم ملی است که دیگر به‌میزانی که بتواند جوابگوی نیازهای آیندهٔ ملت ما باشد، نوسازی نمی‌شود. دوم اینکه، بدون حمایت جدی بنیاد ملی علوم، نوسازی‌لازم احتمالاً به‌وقوع نخواهد پیوست.

دیگران در این جلسات استماع نظرها، گفته‌اند که نیازهای اساسی آموزش علوم و مهندسی، حمایت از هیأت علمی، و تأمین امکانات ووسایل است. درمورد ریاضیات دانشگاهی من نظر متفاوتی دارم: آنچه لازم‌است: کمك به‌هیأت علمی، هیأت علمی، وهیأت علمی است. برای آموزش دانشگاهی هیچ چیز مهمتر از داشتن یك هیأت علمی نیست که‌ازنظر ذهنی زنده وفعال باشد: آجر، سیمان یا سیلیسیوم به‌هر مقدار که باشد، جای انرژی، پندار، یا ارادهٔ هیأت علمی را نمی‌گیرد.

پیشرفت سریع رشتهٔ ریاضی وافزایش دائمی بار تدریس، بیشتر اعضای هیأت علمی مجال آن را نمی‌دهد که کیفیت کارخود را در آموزش بالا ببرند. اما نداشتن وقت تنها علت نیست؛ علت دیگر فقدان انگیزهٔ درونی است. اگر تأکید گذشتهٔ بنیاد ملی‌علوم‌بربورسهای تحقیقی همچنان ادامه یابد، این تمایل طبیعی رؤسای دانشکده‌ها و کمیته‌های رسمی کردن اعضای هیأت علمی تقویت می‌شود که‌به‌عنوان محك ارزش افراد دانشگاهی، بر تحقیقات چاپ شده بیش از هرچیز دیگر تأکید کنند. اگر بخواهیم آموزش دورهٔ کارشناسی بهتر شود، باید معیار سیستم پاداش دانشگاهی را چنان تعیین کنیم که تعادل‌بهتری بین تحقیق وآموزش برقرار شود.

تحقیق به‌خاطر ذات تحقیق، مستقیماً به‌پیشرفت بنیادی دانش منجر می‌شود. اما صحبت من دربارهٔ بورسهای درخدمت آموزش است، دربارهٔ پلی بین دو وظیفهٔ اساسی نظام آموزشی ماست که غیر مستقیم ما را به‌سوی تحقیقات آینده می‌برد. به‌ویژه در ریاضیات ما نیازمند برنامه‌هایی از بنیاد ملی علوم هستیم که این پلها را بسازند.

پیشنهادهای عملی

نخست پیشنهاد می‌کنم که اعطای بورسهای بنیاد ملی علوم به‌هیأت علمی براساس نظام رقابت باشد؛ از این بورسها به‌تعدادکافی اعطا شود تا متقاضیان زیادی را جلب کند، و برای منظورهای متنوعی در نظر گرفته شود تا موجب پشیرد اهداف متعددی گردد، از قبیل: برنامه‌ریزی، پروژه‌های دانشجویی، مسافرتهای علمی، کمك به‌تحقیق، نیازهای کامپیوتری، این بورسها بایداختصاصاً به‌پروژه‌هایی تعلق گیرند که هدفشان بهبود آموزش دورهٔ کارشناسی است؛ شکی نیست که این بورسها در سراسر کشور تأثیر عمده‌ای برکیفیت‌کار هیأت علمی ریاضیات دانشگاه خواهد داشت.

صرف درخواست بورس، آغاز خوبی است برای اجرای یك برنامهٔ صحیح درجهت ارتقای کیفیت کار هیأتهای علمی؛ درموارد بسیاری می‌توان بورسهای محلی اعطا کرد، حتی اگردرخواست‌کننده چندان واجد شرایط نباشد. پرداختهای ثابت، آنهایی را که سخت نیازمند حمایت هستند ــ اعضای‌جوانتر هیأت علمی‌مؤسسات کوچکتر ــ یاری خواهد کرد. با استانداردکردن بورسهای مالی وتعیین جزئیات

فرایند انتخاب (شاید با انعقاد قراردادهای خاص با انجمنهای علمی)، بنیاد می‌تواند افراد زیادی را مورد حمایت قرار دهد و بدین وسیله سبب شود تعداد زیادی از افراد مبادرت به درخواست بورس کنند. ایده‌آل این است که بورسهای زیادی اعطا شوند ــ حتی به گروههایی که‌چنین بورسهایی را به‌یاد ندارند ــ محلهایی که این بورسها بیشترین تأثیررا به‌جا می گذارند.

راه دیگری هست که تأثیرش روی استادان کشور درارائهٔ برنامهٔ آموزشی جدید وجذاب،فوری‌وفوق‌العاده است: روی میزهمهٔ مدرسان ریاضی کالجهاودانشگاهها یك پایانهٔ کامپیوتری قدرتمند بگذارید. استادان ریاضی کالجها آن‌قدر وارد هستند که‌خود طرزاستفاده از آن‌رابیاموزند وازآن پس به‌طریقی دیگر و باتأثیری بیشتر آن را به‌دانشجویان‌درس دهند. من این را نه به‌عنوان یك برنامهٔ تکمیل تجهیزات آموزشی، بلکه به‌عنوان راهی ابتکاری که اثری حیاتی و فوری برتعالی هیأت علمی دارد، پیشنهاد می کنم. در یك برنامهٔ درازمدت، هرمؤسسه باید همان‌طور که امروز میز و ماشین تحریر فراهم می کند، کامپیوتر در اختیار استادان خود بگذارد. اما فعلاً بنیاد می‌تواند با یك حرکت دلیرانه، بدون بررسی سختگیرانه و بدون قبول تعهد دائمی، توان آموزشی همهٔ استادان ریاضی این کشور را افزایش دهد.

سوم، برای‌افزودن قدرت‌منابع‌محدود بنیاد ملی علوم، ودسترسی به‌استادان زیادی که هیچگاه با سازمانهای دولتی کاری ندارند به‌نظر عاقلانه می‌رسد که ازتجارب سازمانهای حرفه‌ای موجود (نظیرانجمن ریاضی امریکا وغیره) که گردهماییها، انتشارات، وفعالیتهای خدماتی آنان هم‌اینك از تشکیلات وسیع و مؤثری برخوردار است، استفاده شود. برنامهٔ کنونی دورهٔ کارشناسی ریاضی که تقریباً در تمام مؤسسات اجرامی‌شود، نتیجهٔ کوششی است که با حمایت بنیاد ملی علوم، در دوران بعد از اسپوتنیك،برای استفاده از نفوذ انجمنهای حرفه‌ای در تنظیم یك برنامهٔجدید به‌عمل آمده است. حالا هم برای‌اینکه مدرسان سراسر کشور رادرگیرکاری کنیم که باکمترین هزینه بیشترین سودعاید شود، لازم است به‌عملی مشابه دست بزنیم.

بالاخره برای اینکه هر یك از این پیشنهادها عملاً مؤثر باشند، بنیاد باید تصدیق کند که ریاضی با علوم دیگر تفاوت دارد، و توجه کندکه آموزش دورهٔ کارشناسی با پژوهش متفاوت است. رابطهٔ بین پژوهش‌وتدریس در ریاضی،نظیر رابطهٔ بین این‌دو درعلوم‌دیگرنیست؛ نقش ریاضی به‌عنوان شالودهٔ علوم ومهندسی نظیر ندارد؛ و اهمیت مطلق آموزش ریاضی (در دانشگاه وقبل از آن)، به آن مقامی ممتاز می‌دهد. به‌این‌دلیلها،لازم‌است که‌بنیاد از اشخاصی که‌در ریاضیات‌دورهٔ کارشناسی تجربهٔ زیادی دارند، پیوسته نظرخواهی کند. نه‌مهارت در تحقیق، قضاوت صحیح در مسائل را تضمین می کند، نه‌تجربه در علوم آزمایشگاهی راهنمای خوبی برای تشخیص نیازهای علوم ریاضی است. بنابراین چهارمین و ضروریترین توصیه‌ام این است: اطمینان حاصل کنید که بررسی کنندگان طرحهای بنیاد ملی علوم، اعضای کمیته‌های‌مشورتی وکارمندان اداری، طوری انتخاب شوندکه‌بتوانند نظری صائب و منصفانه بدهند، و در بین آنها تعداد مناسبی از افراد باتجربه در ریاضیات دورهٔکارشناسی وجود داشته باشند.

نتیجه

جامعهٔ ریاضی خود این ضرورت را دریافته است که باید با اقدامی هماهنگ توجه انظار را به‌واقعیات اساسی ریاضی وآموزش ریاضی جلب کرد: ریاضیات در علوم نقش بنیادی دارد، درحال تغییر سریع است، و ازدبستان تا بالاترین سطح ساختاری یکپارچه دارد. متأسفانه جدایی تاریخی آموزش از پژوهش هنوز در نحوهٔ تخصیص کمکهای مالی بنیاد و همچنین در روش رسمی کردن و ارتقای هیأت علمی دانشگاهها ادامه دارد. این تقسیم‌بندی، در زمانی که سازمانهای مختلف ریاضی با شدت می‌کوشندکه شکاف بین پژوهش و آموزش علوم ریاضی را پرکنند، هم یك اشتباه تاریخی است و هم یك مانع. بزرگترین خدمتی که بنیاد ملی علوم می‌تواند برای ریاضیات دورهٔ کارشناسی انجام دهد، این است که به‌رفع این جدایی کمك کند.

ترجمهٔ منوچهر وصال

• "NSB: Issues in undergraduate mathematics", *Notices of the American Mathematical Society*, (2) 33 (1986) 239-246.

روزگاری مردی می‌زیست که کشتن اژدها می‌آموخت؛
ودراین راه، زحمت فراوان می‌کشید؛
پس‌از سه سال استاد این فن شد؛
اما دریغ که اژدهایی نیافت.

ازیك متن قدیم چینی

وناچار، به‌تدریس فن اژدهاکشی پرداخت.

رنه توم

صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۲)

آرتور جفی*

۳. فیزیك ریاضی

درفیزیك نظری نوین به‌روشنی دیده می‌شود که چگونه فیزیك و ریاضی مکمل یکدیگرند. حوزه‌هایی از ریاضیات به‌تمامی از بطن تلاشهایی زاده شده‌اند کـه بـرای درك قوانین فیزیك صورت گرفته است. و برعکس، ریاضیات به‌زبان فیزیك تبدیل شده است. در یك نگاه کلی می‌توان دراین دوموضوع پیشرفتهایی موازی را مشاهده کرد. دراینجا چند مورد از کامیابیهای فیزیك ریاضی‌را توصیف می کنیم.

نظریهٔ گروهها و مکانیك کوانتومی

نظریهٔ نمایشهای گروه بانظریهٔ کوانتومی، و به‌طور کلیتر با فهم تقارنهای طبیعت، ارتباط گسترده‌ای داشته است. شیئی را متقارن گویند که تحت تبدیلی اساساً بدون تغییر باقی بماند. مثلاً، اگرمثلث متساوی‌الاضلاعی به‌اندازهٔ ۱۲۰ درجه حول مرکزش بچرخد، بدون تغییر باقی می‌ماند. نظریهٔ گروهها پیش‌ازآنکه مطالعهٔ یك شیء باشد مطالعهٔ تبدیلهایی است که آن شیء را بدون تغییر نگه می‌دارند.

در اواخر قـرن هیجدهم، لژاندر به اهمیت (گروه) جایگشتهای ریشه‌ها برای فهم معادلات درجهٔ سوم و چهارم پی بـرد. اما، چندین سال گذشت تا اینکه درسال ۱۸۳۲ گالوا اهمیت مطالعهٔ ساختار کلی جایگشتهای ریشه‌ها را برای‌تمام معادلات چندجمله‌ای دریافت. عموماً کشف گروه گالوا را تولد نظریهٔ گروهها می‌دانند.

همین که مفهوم مجرد گروه فرمولبندی شد، چندین‌تحول عمده‌پیش آمد. فلیکس کلاین تشخیص داد که گروهها ابزار طبیعی مطالعهٔ تقارن هندسی هستند. تقریباً درهمان زمان، سوفوس لی[1] ارتباط بین گروهها و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل راکشف کرد. دراین ضمن نظریهٔ نمایشهای گروه باکار فروبنیوس، الی‌کارتان، و سایرین که‌نظریهٔ تجریدی گروهها را به‌گروههای ماتریسی مشخص ربط دادند، به تدریج به‌وجود آمد؛ گفته می‌شد ماتریسها گروه را «نمایش» می‌دهند.

اما، به‌یاد داشته باشیدکه در دوره‌ای ۱۰۰ ساله‌که درخلال آن نظریهٔ گروهها پدید آمد وتکامل‌یافت، فیزیکدانان و دانشمندان‌تجربی عملاً آن را نادیده گرفتند. با این حال نظریهٔ گروهها به‌طور معجزه‌آسایی برای فیزیك، هم فیزیك کلاسیك و هم حتی به طور اساسیتری برای فیزیك کوانتومی، مناسب بود.

1. Lie

در مکانیك کلاسیك، نوتر[1] ارتباط کلی میان گروههای تقـارن و قوانین‌بقای مکانیك کلاسیك، مانند بقای‌انرژی یا بقای تکانهٔ زاویه‌ای، را نشان داد. این ارتباط در مکانیك کوانتومی خیره‌کننده‌تر بـود. بین کشف اسپین الکترون در ۱۹۲۵ و کار ویگنر[2] و وایل[3] که اسپین را به‌صورت نمودی از نظریهٔ گروهها تعبیر کردند، تنها اندك زمانی فاصله بود. مسأله، نحوهٔ توضیح وجود دوحالت الکترون—اسپین بالا واسپین پایین — بود؛ این حالتها بـه‌نوبهٔ خود شکافتگی خطوط طیفی نور را وقتی که‌اتمهای نور گسیل، درمیدانی مغناطیسی قرارمی‌گرفتند، توضیح می‌دادند. پاسخ این‌مسأله در گـروه فهم گروهی است به‌نام $SU(2)$، کـه به‌طور طبیعی به‌گروه تقارنهای دورانی فضای سه‌بعدی که درآن زندگی‌می کنیم، ارتباط پیدا می کند. دوحالت اسپینی‌الکترون به‌عنوان عناصر یك «نمایش بنیادی» $SU(2)$ تعبیر می‌شوند.

پس‌ازاین کشف، نظریهٔ گروهها به‌ابزاری محوری درفیزیك وشیمی تبدیل شد. مثلاً، رده‌بندی طیفهای گسیلی و جذبی اتمها و مولکولها (از جمله تحلیل کیفی و کمی طیف‌نمایی اتمی و مولکولی) به‌مطالعهٔ نمایشهای گروه جایگشتی و گروه $SU(2)$ تبدیل‌شد. درفضای سه‌بعدی پتانسیل کولنی دراثر دوران دستخوش تغییر نمی‌شود. نمایشهای گروه دقیقاً توصیف می کنندکـه چگونه‌گاهی یك حالت فیزیکی نمی‌تواند تقارن کامل دورانـی نیروی مربوطه را داشته باشد. زیـر گروههای تقارنهای دورانی با بعد متناهی (گروههای نقطه‌ای)، تقارنهای بلوری و بسیاری از دیگر تقارنهای فیزیك و شیمی مـادهٔ چگال را توصیف می کنند.

پائولی در۱۹۲۶ تقارن‌دیگری درنیروی کولنی کشف کرد، تقارنی متفاوت با تقارن دورانی کـه در بالا پیرامون آن بحث کردیم. این تقارن ازبرداشتی ازنظریهٔ لی، وقتی که بر «خروج ازمرکز» یك مدار بیضوی کلاسیك اعمال شود، ناشی‌می‌شد. (این‌خروج ازمرکز ناوردای حرکت، که لاپلاس، رونگه[4]، و لنز[5] آن‌را بررسی کرده بودند، نشان می‌دهد که چقدر بیضی‌مورد‌نظر یادایره تفاوت‌دارد.) خواص‌این‌تقارن اضافی، پائولی را به‌تصویری ساده و زیبا ازاتم هیدروژن درمکانیك کوانتومی راهبری کـرد. نکتهٔ مهمتر اینکه، این کار راهگشای ایـدهٔ مطالعهٔ تقارن فضا-زمان درارتباط با سایر انواع تقارن بود.

1. Noether 2. E. Wigner 3. Weyl
4. Runge 5. Lenz

وقتی درسال ۱۹۳۹ ویگنر نمایشهای انرژی مثبت نسبیت خاص، یعنی، نمایشهای گروه اینشتین، لورنتس، و پوانکاره را تحلیل کرد، گامی بزرگ به پیش برداشته شد. برای حل این مسأله لازم بود ابزارهای ریاضی آن روز تعمیم یابد، و ویگنر کار کلاسیك فروبنیوس را شالوده قرار داد. یکی از نتایج تحلیل او این است که هر نمایش گروه نسبیت با دوعدد ذاتی، «جرم» و «اسپین» آن، مشخص می‌شود. بدین‌ترتیب، جرم و اسپین از یك تقارن بنیادی، یعنی نسبیت خاص، استنتاج می‌شوند. پس‌ازاین کشف، می‌توان‌هرذرهٔ فیزیکی را در نظریهٔ کوانتومی به‌عنوان یك شیء ریاضی، یعنی یك‌نمایش گروه، تعبیر کرد.

بعداً در نظریهٔ ریاضی گروههای لی و نمایشهای آنها، پیشرفت حیرت‌آوری رخ‌داد. این پیشرفتهای‌محض‌ریاضی، به‌نوبهٔ خود نقشی محوری را در نظریهٔ نوین اعداد، هندسه، نظریهٔ ارگودیك، و مانند آنها، ایفا کردند. این روند، نه تنها در زمینهٔ گروههای لی بلکه در حوزهٔ گروههای با بعد نامتناهی، مانند گروههای دیفئومرفیسم، گروه وایل، و گروههای پیمانه‌ای، ادامه دارد.

این‌نظریهٔ نمایشها بعداً درپدیدآوردن ایده‌های‌انقلابی درفیزیك نقشی‌ایفاکرد. نظریهٔ گروهها، ابتدا برای توصیف قوانین‌طبیعت به‌کار رفت. بعداً دیدگاه نوینی پدید آمد که به‌موجب آن گروهها عملاً ابزاری برای بیان این قوانین شدند. زمان زیادی سپری نشده بود که‌فیزیکدانان‌تقارنهای دیگری‌را به‌جای تقارنهای فضا-زمان به‌عنوان تقارنهای بنیادی طبیعت پذیرفتند. نیروهای هسته‌ای به بار الکتریکی ذرات مربوطه بستگی ندارند. هایزنبرگ این‌عدم بستگی را به‌عنوان تقارن‌نیروی هسته‌ای‌تحت‌تبدیلی که‌پروتونها ونوترونهارا به‌هم‌مربوط می‌سازد، توصیف کرد. او این را «اسپین ایزوتوپی» نامید و پروتون و نوترون‌را دوحالت مختلف ازیك‌ذره، یعنی نوکلئون، درنظر گرفت. این دوحالت با یك نمایش دوبعدی SU(۲) مشخص می‌شود.

این دیدگاه نه تنها به‌صورت دیدگاه رایج درآمده است، بلکه به طور چشمگیری هم توسعه یافته است. فیزیکدانان معتقد بودند که قوانین‌طبیعت تحت تقارنهای بازتابی‌معینی ناوردا هستند. تااواخردههٔ پنجاه،وقتی لی[1] و یانگ خاطرنشان ساختندکه تقارن‌بازتاب‌آینه‌ای در فضای‌سه‌بعدی‌باید آزموده شود، وجود این‌تقارن‌مسلم پنداشته می‌شد. لی و یانگ‌آزمایشهایی‌را طراحی‌کردندکه‌نشان می‌داد پاریته یکی‌از تقارنهای دقیق طبیعت نیست! در پی این دستاورد عظیم، این مسأله‌که کدام یك از تقارنهای ظاهری گسسته درطبیعت یافته می‌شوند در خط مقدم تحقیقات فیزیك جای داشته است.

چرا گاهی تقارنی‌که انتظارش می‌رود درطبیعت پیش‌نمی‌آید؟ هرچند ممکن است معادلات متقارن ساختار ساده‌ای داشته باشند، با این حال ممکن است طبیعت تقارن مورد نظر را نداشته باشد. ازسوی دیگرامکان‌جالبتری هم وجود دارد: قوانین،خودشان تقارنی‌را دارند، اما جواب خاصی که مورد نظر ماست دارای آن تقارن نیست. مثلاً، پتانسیل گرانشی نیوتن تقارن دورانی دارد، اما مدارسیاره‌ای‌کلاسیك ضرورتاً دایره‌ای نیست ــ می‌تواند بیضوی یا هذلولوی باشد. با این حال، انتظار داریم که پایینترین‌حالت انرژی یك‌سیستم تمام تقارنهای خود قوانین را داشته باشد. در غیر این صورت، می گویند تقارن «شکسته» است.

تقارن شکسته نخستین بار درفیزیك مغناطش و درشیمی تبدیلهای فاز (مانند جوشیدن یا یخ زدن آب) ظاهر شد. تقارن شکسته در مدلی به وجود می‌آید که لنز و آیزینگ[2] درست‌کردند و درکار مشهور پیرلس[1] در ۱۹۳۶ و اونساگر[2] در ۱۹۴۴ مورد مطالعه قرار گرفت. تقارن شکسته برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها درفیزیك آماری به‌مکانیسم استانده‌ای تبدیل شده است. فیزیکدانان نمی‌دانند که آیا نقض‌بقای پاریته را می‌توان به‌عنوان تقارن شکسته توصیف کرد یا خیر، اما در حقیقت تقارن شکسته در توصیف سایرجنبه‌های ذرات نقش تعیین‌کننده‌ای یافته است.

درآغاز دههٔ ۱۹۵۰ شتابدهنده‌های‌بزرگ دهها ذرهٔ جدید تولید کردند. بنابراین لازم بود، یا دست‌کم خیلی مطلوب بود،که آنها را به‌طور منسجمی‌توضیح دهند. چگونه می‌شدجرم، اسپین، وسایرخواص این‌ذرات را، مانند برهمکنشهای‌آنها با یکدیگر، توضیح داد؟ یك‌بار دیگر فیزیکدانان برای ساده‌کردن این مسأله به‌تقارن بازگشتند.

ریاضیدانان به‌دلایل مربوط به‌حوزهٔ کار خودشان نظریهٔ مجرد نمایش گروههای فشرده را تکامل بخشیده بودند. به‌طوری‌که دیده شد، این درك ازنمایشهای‌گروه دقیقاً اطلاعاتی را فراهم‌آورده است که درجستجوی قوانین طبیعت ضروری‌اند. در ۱۹۶۱، گلمان[3] و نیمن[4] گسترش‌تقارن پروتون-نوترون هایزنبرگ‌را به‌گروه‌بزرگتر SU(۳) پیشنهاد کردند. آنها درکنار توضیح استقلال بار از نیروی هسته‌ای وردهبندی زیبای بسیاری ازذرات جدید به‌اعتبار خواص‌آنها، مطلب جدیدوشگفت‌انگیزی‌را هم اضافه‌کردند. تمام‌ذرات قابل‌مشاهدهٔ آشنا (پروتونها، نوترونها، مزونها، و مانندآنها) را می‌توان با حاصلضرب دونمایش بنیادی‌نمایش‌داد. هرمؤلفهٔ آن نمایشهای‌بنیادی، یك «کوارك» لقب گرفت.

این مدل ریاضی‌برای‌ذرات بنیادی مرکب از کوارکها، وجود و جرم ذرهٔ جدیدی به‌نام امگا را، که می‌بایست کیفیتی به‌نام «شگفتی» هم داشته باشد، پیشگویی‌کرد. پس‌از آنکه در ۱۹۶۴ ذرهٔ امگا را یافتند، تقارن SU(۳) پذیرفته‌شد، و همچنین کوارك نادیده به صورت مؤلفه‌ای بنیادی از قوانین طبیعت درآمد.

در بیست وپنج سال اخیر روشن شده است‌که گروهها و نمایشهای آنها برای فیزیك جدید ذرات‌همانقدراساسی‌اندکه ابزارهای‌سنتی‌تر آنالیز مختلط و معادلات دیفرانسیل جزئی. آدمی وسوسه می‌شودکه گاهی فکرکند برخی از جدیدترین پیشرفتهای‌نظریهٔ گروهها به‌فیزیك مربوط می‌شود. دونظریهٔ زیبای ریاضی عبارت‌اند از رده‌بندی گروههای متناهی (در ارتباط با کشف اخیر یك گروه «غول‌آسا») و ابرتقارن. فقط زمان است‌که روشن خواهدکرد آیا طبیعت به‌نحو مناسبی این مفاهیم ریاضی را می‌پذیرد یا خیر.

هندسهٔ دیفرانسیل و فیزیك

مراحل اولیهٔ تاریخ هندسهٔ دیفرانسیل به‌کار فرما در زمینهٔ منحنیها در قرن هفدهم، و به‌گاوس که درقرن نوزدهم انحنای رویه‌ها را مورد مطالعه قرار داد، مربوط می‌شود. دیدگاه گاوس را می‌توان رهیافت ملموس و واقعی نامید، زیرا او رویه‌های غوطه‌ور در یك فضای اقلیدسی با بعد بالاتر را مورد مطالعه قرار داد. ریمان هندسهٔ ذاتی رویه‌ها را در سال ۱۸۵۴ فرمولبندی کرد. سرانجام هندسه، مفاهیم جبری تقارن وگروهها را وحدت بخشید. آنچه‌که ظاهر شد آنالیز تانسوری بود، مبحثی که بیانکی[5]، لوی‌چیویتا[6]، کریستوفل، ریچی[7]، و سایرین آن را بنیاد نهادند.

---

1. Lee 2. Ising

---

1. Peierls 2. Onsager 3. Gell-Mann
4. Neeman 5. Bianchi 6. Levi-Civita
7. Ricci

اینشتین با پیشنهاد نظریهٔ نسبیت عام در ۱۹۱۵، همین چارچوب فکری را برای توضیح ایده‌های بنیادی خود دربارهٔ گرانش اختیار کرد. معادلهٔ اساسی اینشتین انحنای فضا را متناسب با چگالی انرژی قرار می‌دهد؛ ثابت بنیادی این تناسب، بنا به تعریف، ثابت گرانشی است. از این دیدگاه، نیروی گرانشی نتیجهٔ انحنای فضاست. نظریهٔ نسبیت، قانون نیروی نیوتن دربارهٔ گرانش را به‌عنوان حالت حدی یک فضا-زمان با انحنای ناچیز نتیجه می‌دهد.

نیروی بنیادی دیگر فیزیک کلاسیک، الکترومغناطیس است. در ۱۹۱۸ هرمان وایل[1] که ریاضیدان بود، به‌این نتیجه رسید که می‌توان درصورت لزوم نیروهای الکترومغناطیس را از هندسهٔ فضا استنباط کرد. او مطالعات خود را بر پایهٔ تبدیلات مقیاس فضا بنانهاد؛ به‌همین دلیل او الکترومغناطیس را «نظریهٔ پیمانه‌ای» نامید.

در آن زمان به‌این پیشرفت مفهومی ارج زیادی ننهادند؛ اما تصویر پیمانه‌ای عاقبت به‌تلاش جدید ما در راستای وحدت بخشیدن چهار نیروی بنیادی: گرانش، الکترومغناطیس، قوی، وضعیف، انجامید. آنچه که چهل سال بعد فیزیکدانان را حیرت‌زده کرد تعمیم ساده و ژرفی بود از الکترودینامیک (آن‌طور که از ۱۸۷۳ به‌کمک معادلات اساسی ماکسول توصیف شده بود و با تعبیرمجددی که وایل از آن می‌کند، و به‌همراه معادلات دیراک). در ۱۹۵۴، یانگ و میلز اظهار داشتند که گروه تقارن پایهٔ الکترومغناطیس، برای آنکه گروه توصیف کنندهٔ تقارن نیروهای قوی را در برگیرد، باید گسترش یابد. آنها ساده‌ترین معادلاتی را که با این ناوردایی سازگار بود، ودرمورد نیروهای صرفاً الکترومغناطیسی به‌معادلات ماکسول کاهش می‌یافتند، مورد نظر قرار دادند. این مبحث را امروزه «نظریهٔ پیمانه‌ای غیرآبلی» می‌گویند، زیرا گروه تقارن پایه، گروهی تعویض‌ناپذیر است. در اینجا انتخاب گروه ویژه‌ای از تقارنها برای فیزیک اهمیت اساسی دارد؛ و این مثال صریحی است از این فلسفه که کشف گروه تقارن، جزئی از یافتن قوانین طبیعت است.

مفهوم نظریهٔ پیمانه‌ای یانگ-میلز اصلاً تازگی نداشت. چندسالی پیش از آن، ریاضیدانان مفهوم هندسی همه‌جایی کلاف تار را معرفی کرده و هندسهٔ ریمانی را در نظریهٔ کلاف تار درقالبی نو ریخته بودند. کلاف تار فضایی است متشکل از تعداد زیادی فضای مشابه که به هم چسبانده‌شده‌اند. مثلاً، چنبره (دونات) را می‌توان با چسباندن متوالی مقاطع دایره‌ای به‌هم به‌وجود آورد. ریاضیدانان مفهوم «هموستار» را به‌عنوان کمیتی برای اندازه‌گیری پیچش موضعی ناشی از انحنای چنین فضایی، معرفی کردند. نظریهٔ خارق‌العاده‌ای پرداخته شد، که مطالعهٔ توپولوژی (خواص همه‌جایی) فضاهای مجرد با انحنا را دربرداشت. بسیاری از ناورداهای جبری و هندسی، مانند اعداد چرن[2]، رده‌های استیفل-ویتنی[3]، ناورداهای شاخصی آتیا[4]، سینگر، هرتسبروخ[5]، ویل[6]، بوت[7]، و سایرین، به‌عنوان جزئی از این نظریهٔ کلی کشف شدند. آنچه فیزیکدانان به این تصویر افزوده‌اند مفهوم یافتن چنین ساختارهایی به عنوان جوابهای دستگاهی از معادلات وردشی بود. این معادلات دیفرانسیل غیرخطی که هموستار در آنها صدق می‌کند، تعمیم طبیعی معادلهٔ لاپلاس در چارچوب هندسهٔ دیفرانسیل هستند.

با یک شرح تکنیکی روشن، موضوع را بازگویی می‌کنیم. در معادلات اصلی ماکسول، میدان الکتریکی $E(x,t)$ و میدان مغناطیسی $B(x,t)$ بردارند، یعنی اشیایی سه‌مؤلفه‌ای هستند. هرکدام از مؤلفه‌های این بردارها تابعی است حقیقی روی فضا-زمان؛ دیدگاه نوین نظریهٔ پیمانه‌ای، توابع مؤلفه‌ای $E_i(x,t)$ را به‌عنوان عناصر جبر لی گروه پیمانه‌ای در نظر می‌گیرد. درمورد الکترومغناطیس، این گروه، $U(1)$ است که جبر لی آن صرفاً خط حقیقی است، و توابع حقیقی معمولی $E_i(x,t)$ را به‌همان ترتیبی که در نظریهٔ ماکسول آمده است، به‌دست می‌دهد. تعمیم یانگ و میلز، عبارت بود از اینکه گروه ماتریسی فشردهٔ بزرگتری که جبر لی آن مشتمل بر ماتریسهای تعویض‌ناپذیر است، به‌جای $U(1)$ قرار گیرد. بدینسان هرمؤلفهٔ میدان الکتریکی و مغناطیسی، به‌جای عدد، ماتریس است. همچنان که حرکت در فضا و زمان صورت می‌گیرد، این ماتریس از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند. درحالی که فیزیکدانان هنوز هم مطمئن نیستند که کدام گروه را به‌عنوان گروه بنیادی برگزینند، یک نامزد نوعی می‌تواند $SU(3)$ یا $SU(2)$ یا $SU(1)$ باشد، که به‌ترتیب، تقارنهای شناخته شدهٔ نیروهای قوی، نیروهای ضعیف، و نیروهای الکترومغناطیسی را مشخص می‌کنند.

آنالیز و میدانهای کوانتومی

فیزیکدانان بیش از شصت سال است به‌این اعتقاد رسیده‌اند که نظریهٔ کوانتومی چارچوب صحیحی را برای توصیف ذرات بنیادی به‌دست می‌دهد. بنابراین، فیزیک نوین باید نظریه‌ای ریاضی بیابد که نظریه‌های پیمانه‌ای، و همچنین مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص را دربرداشته باشد. چنین ترکیبی را نظریهٔ میدان کوانتومی می‌گویند. سایر مثالهای مربوط به‌معادلات میدان عبارت‌اند از معادلات دیراک درمورد الکترون، معادلات موج اسکالر غیرخطی، و معادلات اینشتین دربارهٔ گرانش.

جستجوی سرشار از تلاش و پیچیده در پی بنیان ریاضی فیزیک کوانتومی، منبع الهام ریاضیات جدیدی بوده و باعث شده است قدمهای مهمی درراه افزایش بصیرت ما نسبت به‌فیزیک برداشته شود. درحال حاضر این جستجو، فرصت مهیجی برای متحدکردن این دوعلم بنیادی فراهم آورده است.

درهمان دههٔ ۱۹۲۰ که مکانیک کوانتومی زاده شد، بسیاری از بزرگترین ریاضیدانان دنیا، مثل هیلبرت، فون‌نویمان، و وایل، سخت مجذوب این فیزیک جدید شدند. ریاضیات انتشار موج، معادلات انتگرالی، معادلات دیفرانسیل، مسائل ویژه‌مقدار، آنالیز خطی، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ گروهها، جملگی درفهم نظریهٔ کوانتومی غیرنسبیتی سهیم بودند. این حوزه‌های ریاضیات برتمام حوزه‌های فیزیک و مهندسی جدید نیز تأثیر ژرفی داشته‌اند.

حال توجه خود را روی معمایی درفیزیک ریاضی متمرکز می‌کنیم که در دههٔ ۱۹۳۰ باتلاش برای واردکردن پدیده‌های معینی در نظریهٔ کوانتومی پدیدارشد. این پدیده‌ها ناشی از این‌اند که ذرات می‌توانند به‌طور غیرمستقیم، از طریق اثرانشان برسایر ذرات، برخودشان تأثیر گذارند. مثلاً، به‌کمک آزمایشی معمولی می‌توان بسامد (طیف رنگ) نورگسیلیده از یک اتم برانگیخته را اندازه گرفت. در این فرایند، نور با اتم برهمکنش دارد، درحالی که اتم نیز به‌نوبهٔ خود با نور برهمکنش دارد. در اثر این چرخهٔ تأثیرات، نور می‌تواند برخودش تأثیر بگذارد، و گفته می‌شود این پدیده غیرخطی است. اما، هر تلاشی برای استنتاج انتقالهای بسامدی قابل مشاهده از این سیستم غیرخطی، به‌پاسخهای نامتناهی منجر می‌شود!

---

1. H. Weyl
2. Chern
3. Steifel-Whitney
4. Atiyah
5. Hirzebruch
6. Weil
7. Bott

در ۱۹۴۷، کنفرانسی در شلتر آیلند[1] تشکیل شد که توجه آن معطوف به‌مسائل حل نشدهٔ عمدهٔ فیزیک نظری و جهت‌دادن به‌تحقیقات پژوهشگران در دورهٔ بعد از جنگ بود. این کنفرانس از آن بابت مشهور شد که موجب فرمولبندی و کاربرد مجموعه‌ای از قواعد برای انجام محاسبات غامض شد؛ در این قواعد کمیتهایی بی‌معنی چون بینهایت یا تقسیم بر صفر، یعنی ۱/۰، به‌طور سیستماتیک نادیده گرفته می‌شد. با این حال جوابهای معینی به‌دست می‌آمد.

توجه فیزیکدانان به درک تصحیح اندکی در طیف نور گسیلیده به‌وسیلهٔ هیدروژن معطوف شده بود. این تصحیح که به‌تازگی مشاهده شده بود، امروزه جابه‌جایی لمب نامیده می‌شود. اثر دیگر برهمکنش غیرخطی به‌مقدار انرژی یک تک‌الکترون در میدانی مغناطیسی مربوط می‌شود. بنا بر نظریهٔ دیراک، مقدار این انرژی مغناطیسی، یا «گشتاور مغناطیسی»، برحسب یکاهای بدون بعد استانده باید دقیقاً برابر ۲ می‌بود. درواقع قواعد نظریهٔ میدان کوانتومی عدد ۲٫۰۰۲ را پیشگویی کرده بودند، و انحراف ۰٫۰۰۲ از ۲ را گشتاور مغناطیسی «بی‌هنجار» نام نهادند.

درسی و پنج سال گذشته، تعداد بیشماری از فیزیکدانان کار کشته استفاده از این قواعد را در چند جملهٔ اول یک سری توانی در روابط مربوط به‌بارالکتریکی مجاز دانسته‌اند. این محاسبات تعیین مقدار دقیق هزاران انتگرال را ممکن می‌سازند. این برنامه چندان گسترده است که تنها برای انجام عملیات جبری آن از کامپیوترهای بزرگ یاری گرفته شد. نتیجه، دقیقاً گشتاور مغناطیسی الکترون را پیشگویی می‌کند. در قلمرو آزمایش، انجام اصلاحاتی در طی سالها، به‌مقدار مشاهده‌ای کنونی یعنی ۲٫۰۰۲۳۱۹۳۰۴، که یکی از دقیقترین کمیتهای اندازه‌گیری‌شده در فیزیک است، منجر شد. عدد محاسبه‌شده تا آخرین رقم اعشار با مشاهده سازگار است. به علت این تطابق خارق‌العاده میان آزمایش و پیشگویی، قواعدی که اساس محاسبه هستند جدی گرفته می‌شوند. به زبان دیگر، قواعد نادیده گرفتن بینهایتها در فیزیک به‌عنوان «نظریهٔ الکترودینامیک کوانتومی» شناخته شد.

توانایی نظریهٔ کوانتومی در توضیح جابه‌جایی لمب و گشتاور مغناطیسی بی‌هنجار، زمینه را برای آغاز دوران جدیدی در فیزیک کوانتومی مهیا کرد. تکامل این ایده‌ها سرانجام به‌نظریه‌های یانگ-میلز انجامید که آنها را در بخش پیش تشریح کردیم. فیزیکدانان، در پرتو کارهای دیگری که بیست سال به‌درازا کشید، به‌اینجا رسیدند که گروه تقارن $SU(2)\times SU(1)$ را برای توصیف کردن و وحدت بخشیدن دو نیروی بنیادی طبیعت: نیروهای الکترومغناطیسی و نیروهای ضعیف، برگزینند. گلاشو[2]، عبدالسلام، و واینبرگ به‌خاطر کاری که در این زمینه کردند، به‌جایزهٔ نوبل ۱۹۷۹ دست یافتند. نظریهٔ پیمانه‌ای $SU(5)$ نیز، طی پیشنهادی جالبتر، نیروهای قوی را نیز وارد اتحاد می‌کند. این نظریهٔ «وحدت بزرگ» پیشگویی می‌کند که پروتون ناپایدار است ــ یعنی، پروتون سرانجام واپاشیده خواهد شد.

در آزمایشهای بزرگی که برای تحقیق در مورد چنین واپاشیی در جریان است، تاکنون این پدیده مشاهده نشده است. در هر حال، نظریهٔ میدان کوانتومی به‌صورت شالودهٔ فیزیک کوانتومی پذیرفته شده است.

اما، در اینجا «نظریه» به‌معنی سنتی آن به‌کار نمی‌رود، و دست‌کم با استانده‌های توضیح علمی که پیش از عصر میدانهای کوانتومی در فیزیک معمول بود منطبق نیست. به علت وجود کمیتهای نامتناهی (یا بد تعریف) که فیزیکدانها در ابتدا در جریان فرمولبندی قواعد خود از آنها چشم پوشیدند، این سؤال مطرح می‌شود که آیا این روش در واقع دارای فرمولبندیی هست که از لحاظ ریاضی سازگار باشد؟ به‌بیان دیگر: «آیا نسبیت با نظریهٔ کوانتومی می‌تواند به‌صورت بخشی از ریاضیات سنتی ترکیب شود؟»

قواعد مربوط به‌کمیتهای نامتناهی که در بالا توصیف کردیم، در فیزیک «بازبهنجارش» نامیده می‌شوند. امروزه، بعد از حدود چهل سال، تنها جزئی از این مسأله را فهمیده‌اند. اما پیشرفتهای ریاضیات به‌درک نظریهٔ میدان کوانتومی کمک کرده است و به‌فرمولبندیی انجامیده‌است که ما معتقدیم موفق خواهد شد. این فرمولبندی، تعمیمی از هردو حساب دیفرانسیل و انتگرال است تا حالتی را که توابع مجهول به‌تعداد نامتناهی متغیر وابسته‌اند، در بر گیرد.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، از توابعی چون $f(x)$ مشتق و انتگرال می‌گیرند، که x نقطه‌ای است در فضایی با بعد متناهی. این تعمیم به توابع $f(x)$ ی نظر دارد که در آن تعداد راستاهای مختصاتی متغیر x بینهایت است. مبحثی که با مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از تعدادی نامتناهی راستای مختصاتی سروکار دارد «حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی» نام گرفته است.

حساب دیفرانسیل تابعی از کارهای ویتو ولترا[1]، ریاضیدان مشهور ایتالیایی، درمطالعاتی که اوایل این قرن در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی عام انجام داد، آغاز می‌شود. پیشرفتهای گستردهٔ این ایده‌ها تاکنون ادامه یافته است، و حوزهٔ آنالیز تابعی همچنان نقش محوری خود را در فیزیک حفظ کرده است.

درسالهای اخیر حساب انتگرال تابعی نیز نقشی عمده ایفا کرده است. ایده‌های اولیه در این حوزه، در نظریهٔ احتمالی که نوربرت وینر ارائه کرد، ظاهر شد. او درجریان تلاش برای فهمیدن پخش و حرکت براونی به‌تجرید انتگرالهای تابعی دست یافت و به این ترتیب، وینر توانست جواب معادلهٔ پخش گرما را به‌صورت انتگرالی روی مسیرهای کلاسیک ذره نشان دهد. در فیزیک، در دههٔ ۱۹۴۰، بر پایهٔ کارهای پل آدرین موریس دیراک و ریچارد فاینمن دیدگاهی مرتبط با این موضوع ظاهر شد؛ و امروز این دیدگاه را در فیزیک، رهیافت «جمع‌روی تاریخها» به‌نظریهٔ کوانتومی می‌نامند. ارتباط میان این دو ایده به‌درک این نکته انجامیده است که چگونه انتگرال وینر برای فیزیک مناسب است. این ارتباط راه را برای تکامل ریاضی «انتگرالهای تابعی» گشود؛ راهی که آغازگر آن در دههٔ ۱۹۵۰، کاک[2]، گفاند[3]، و چند تن دیگر بودند.

سرانجام حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی اخیراً تا آنجا پیش رفته است که می‌توانند در نظریهٔ میدان کوانتومی و برای غلبه بر نامتناهیهای بازبهنجارش به‌کار روند. این قلمرو نسبتاً نوین ریاضیات و فیزیک، درشکل جدیدش، «نظریهٔ میدان ساختنی» نام گرفته است.

اتحاد مجدد ریاضیات با فیزیک

بحث بالا آشکارا به پیشرفت و تکامل مهیجی اشاره دارد که هم‌اکنون درحال وقوع است، یعنی اتحاد مجدد ریاضیات با فیزیک نظری. پس از ظهور نظریهٔ کوانتومی در دههٔ ۱۹۲۰، ریاضیات و فیزیک نظری از هم دور شدند. شاید فیزیکدانان عقیده داشتند که ارائهٔ توضیحی کامل در چارچوب سنتی، و درهمان حال دست‌یافتن به‌بینشی نسبت به‌مجموعهٔ پدیده‌های فیزیکی که هردم پیچیده‌تر می‌شود ناممکن است. ازسوی دیگر، ریاضیدانان فهم فیزیک را دشوار می‌یافتند زیرا مبانی آن، از

1. Shelter Island 2. Glashow

1. Vito Volterra 2. M.Kac 3. I. Gelfand

دیدگاه ایشان به‌طور مناسبی تبیین نمی‌شد. به‌دلایلی، هر کدام از این دوموضوع، واژگان خاص خود را پدید می‌آورد که اشراف بر آنها برای متخصص موضوع دیگر دشوار بود. آنچه شرایط را بدتر می‌کرد، این بود که مطالعهٔ یکی از این دوموضوع توسط متخصصین شاخهٔ دیگر، عموماً به‌سرخوردگی می‌انجامید.

چند دههٔ گذشته شاهد پدید آمدن تغییرات ژرفی در هر دو موضوع به‌دلیل وحدت درونی هریك از آنها بوده است. ریاضیدانان روابط عمیقی را میان نظریهٔ گروهها، توپولوژی، هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، آنالیز، و نظریهٔ اعداد، کشف کردند. در این ضمن فیزیکدانان به وجود ارتباطهای روشنی میان فیزیك ذره، فیزیك مادهٔ چگال، و سرانجام اخترفیزیك، پی‌بردند. بیست سال پیش از این یك استاد ریاضی ویك استاد فیزیك که در دانشگاه واحدی تدریس می‌کردند، به‌ندرت تماس علمی با یکدیگر داشتند. ولی امروز، ما از به‌هم پیوستن نظامهای ریاضیات و فیزیك احساس هیجان می‌کنیم.

برای روشن کردن این پدیده، دراینجا چندین مورد از کارهای جاری را به‌صورت نمونه ذکر می‌کنیم. نظریهٔ میدان ساختنی، که آن را گلیم[1]، یافه[2]، وسایرین پرداختند، قسمت عمدهٔ اسرار پنجاه سالهٔ مبانی نظریهٔ میدان را فاش ساخته است. قلمرو جدیدی در ریاضیات پیدا شده است که چارچوبی کلی، ملهم از فیزیك، فراهم می‌کند که در آن چارچوب می‌توان پرسشها را پاسخ داد. نظریه‌ای کامل، شامل بازبهنجارش، برای چندین مثال میدان کوانتومی پرداخته شده است. علت عمدهٔ این نکته که پاسخهای کنونی ناکامل‌اند این است که این مثالها معادلات از پیش فرض شدهٔ فیزیك را ساده می‌کنند.

از دیدگاه حساب انتگرال تابعی، نظریهٔ میدان کوانتومی را می‌توان مطالعهٔ یك توزیع احتمال برای میدانهای کلاسیك دانست. به‌این ترتیب، تعمیمی از نظریهٔ احتمال، با ویژگیهای جدید و جالب ریاضی، پا به‌عرصه می‌گذارد؛ مسائل ریاضی مشابهی در فیزیك آماری کلاسیك پدید می‌آید. رابطهٔ میان این مباحث در سطحی بنیادی علت این موضوع را هم توضیح می‌دهد که چرا پدیده‌های شناخته شده در فیزیك آماری ــ گذارهای فاز وشکستن تقارن ــ در فیزیك کوانتومی هم ظاهر می‌شوند.

کرنل گرمایی $\exp(-tH)$ فرایندی تصادفی به‌وجود می‌آورد که با زمان برچسب گذاری می‌شود. این فرایندهای تصادفی هم در ریاضیات محض (هندسه و توپولوژی، و آنالیز) به‌وجود می‌آیند، و هم در بسیاری از حوزه‌های کاربردی، مانند مهندسی برق، نظریهٔ کنترل استوکاستیك، و احتمالاً در اقتصادسنجی و زیست‌شناسی جمعیت. میدان تصادفی را (که با فضا وزمان برچسب گذاری می‌شود)، لاپلاسی H که دارای بعد نامتناهی است تولید می‌کند. تصور می‌کنیم که نظریهٔ مجرد وکاربردهای آن به‌همان میزان نظریه وکاربردهای فرایندی تصادفی که تنها با زمان برچسب گذاری می‌شود، غنی باشد. مثلاً، روشهای انتگرال تابعی ــ و مسائل مربوط به آنها در معادلات دیفرانسیل استوکاستیك ــ در ارتباط نزدیك با نظریهٔ نمایش مربوط به گروههای با بعد نامتناهی، مانند «گروههای حلقه‌ای»، ظاهر می‌شوند.

موضع‌یابی سلول فاز و گروه باز بهنجارش، دو ایدهٔ مفید؛ در مطالعهٔ ریاضی بازبهنجارش هستند؛ این دو ایده در راه فهم گذارهای فاز درفیزیك نیز کاربردهای سودمندی داشته‌اند. در ریاضیات، مفاهیم مربوطه در نظریهٔ آنالیز ریزموضعی[3] و درآنالیز همساز، مانند بررسی

1. Glimm 2. Jaffe 3. microlocal analysis

فقرمن[1] دربارهٔ طیف لاپلاسی با استفاده از «اصل عدم قطعیت» هایزنبرگ، ظاهر می‌شوند. انتظار داریم چنین روابطی به‌موقع خود روشنتر شوند.

قبلاً از توجه محوری به‌مسائل هندسی در فیزیك یاد کرده‌ایم. یکی از معماهای اخیر در نظریهٔ نسبیت کلاسیك، چگونگی تعیین «انرژی» کل کیهان بود. فیزیکدانان در مورد فضاهایی که انحنای آنها در بینهایت به‌سرعت از بین می‌رود تعریفی برای انرژی پیشنهاد کرده‌اند. خاصیت مهم مثبت بودن انرژی (که در نظریهٔ کوانتومی نیز در قلب کارهای مربوط به نظریهٔ میدان ساختنی قرار دارد) دو دههٔ بعد، در حدود سال ۱۹۸۰، به وسیلهٔ هندسه‌دانانی چون شوئن[2] و یاتو[3]، ارائه شد. روش آنها برای حل این مسألهٔ فیزیکی، نظریهٔ ریاضی رویه‌های مینیمال را به‌شیوه‌ای تکامل بخشید که برای مطالعهٔ آتی نگاشتهای همساز تکین و معادلات دیفرانسیل غیرخطی اهمیت داشت.

در ده یا پانزده سال اخیر ریاضیدانان و فیزیکدانان دریافته‌اند که هندسهٔ جدید در واقع چارچوب ریاضی طبیعی برای نظریهٔ پیمانه‌ای است. پتانسیل پیمانه‌ای فیزیك، هموستار ریاضیات است. میدان پیمانه‌ای همان انحنای ریاضی است که به‌وسیلهٔ هموستار تعریف می‌شود؛ بعضی از «بارهای» فیزیك، ناورداهای توپولوژیکی‌اند که توسط ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

درحالی که ریاضیدانان و فیزیکدانان به‌طور جداگانه پیرامون ایده‌هایی مشابه کار می‌کردند، صرفاً کار یکدیگر را تکرار نمی‌کردند. ریاضیدانان نظریه‌های عام، و گسترده‌ای را به‌وجود آوردند و انشعابها و فرعیات آنها را مورد پژوهش قراردادند. فیزیکدانان به‌جزئیات مثالهای مشخصی پرداختند که معلوم شد طبیعت را به‌گونه‌ای زیبا و ظریف توصیف می‌کنند. وقتی این دو گروه بار دیگر با هم روبه‌رو شدند، نتایجی حاصل شد که بیش از حد انتظار قوی بود.

اکنون، ما در ریاضیات انگیزهٔ جدیدی داریم تا بصیرتهای مشخصی را که از بعضی کارهای فیزیکدانان حاصل می‌شود به‌کار گیریم. این امر نشانه‌ای است از بازگشت به یك سنت باستانی. درفیزیك، این بازگشت به‌صورت توجه به‌مسائل هندسی تجلی کرده است. یکی از جنبه‌های نظریهٔ ریاضی، کوانتش مشاهده شدهٔ شار مغناطیسی در ابررساناها را توضیح می‌دهد. جنبهٔ دیگر که در نظریهٔ پیمانه‌ای به‌خوبی موردمطالعه قرار گرفته وجود پیشگویی‌شدهٔ یك بار مغناطیسی بنیادی، یا تك‌قطبی، است، یعنی مغناطیسی با یك قطب شمال یا جنوب، اما نه هر دو، قسمتی از آزمایشهای جاری در جستجوی چنین ذره‌ای هستند، اما آن را پیدا نکرده‌اند.

فریدمن[4]، در سال ۱۹۸۱ حدس پیوانکاره را در حالت چهار بعدی ثابت کرد؛ این مسأله حدود شصت سال حل نشده باقی مانده بود. در آن زمان انتظار می‌رفت که رده‌بندی توپولوژیك فضاهای چهار بعدی توسط فریدمن، درحالتی نیز که نوعی «هموار بودن» به‌فضا اعمال می‌شود، برقرار است؛ دست‌کم شهود این طور می‌گوید. ولی، قضیهٔ اخیر دانلدسن[5] می‌گوید که این انتظار باطل است. بعداً معلوم شد که نتایج ریاضی دربارهٔ نظریه‌های پیمانه‌ای کلاسیك، که تعبیر فیزیکی جوابها محرك آنها بود، بسیار مهم‌اند. به‌عنوان یك نتیجهٔ فرعی، درمی‌یابیم که، یك ۴-فضای اقلیدسی «نامتعارف» وجود دارد. بسیاری از توپولوژیدانها هم‌اکنون سرگرم مطالعهٔ نظریه‌های

1. Fefferman 2. R. Schoen 3. St. T. Yau
4. M. Freedman 5. S. Donaldosn

پیمانه‌ای‌اند؛ فیزیکدانان اینك توپولوژی مطالعه می‌کنند. به نظر می‌رسد که از این ستنز، بینشهای غنی و نوینی نسبت به‌توپولوژی چهار بعدی حاصل خواهد شد.

پیشرفت جالب توجه دیگر درخلال همین چند سال گذشته مطالعهٔ جبرهای «ابر تقارن» و ساخت ابرخمینه‌هاست. ریاضیدانان ابرجبرها را به‌عنوان جبرهای مدرج شناخته‌اند، ویکی‌از راههای درك ابرتقارن استفاده ازهمبافت‌استانهٔ دورام[1] است. فیزیك با ساختن ابر دروهها، ابرخمینه‌ها و ابرمیدانهای مربوط به‌این جبرها، مفاهیم نوینی را پدید آورد. عملگر لاپلاس (همیلتنی) را می‌توان به عنوان تابعی از ابرمیدانها نمایش داد. قضیهٔ شاخص آتیا ـ سینگر ـ یکی از کارهای مشعشع ریاضیات نوین که ایده‌هایی از توپولوژی، هندسه، و آنالیز را وحدت می‌بخشد ـ به‌کمك این روش قابل اثبات است. ابرتقارن دیدگاه نوینی نسبت به قضیهٔ شاخص ارائه می‌کند و آن را با برهمکنشها (لاگرانژیها)ی فیزیك جدید پیوند می‌دهد.

عجیب نیست که این کشف تخیل‌هندسه‌دانان وفیزیکدانان نظری، هردو، را برانگیخته است. کشف دیگر این است که «بی‌هنجاریها»ی فیزیك کوانتومی‌ـ‌معادلات کلاسیکی که درنظریهٔ کوانتومی‌اعتبار خود را از دست می‌دهند‌ـ‌را می‌توان به‌صورت جنبه‌ای ازنظریهٔ K، همان ماشین مجرد در توپولوژی وهندسهٔ مدرن، نگریست. در واقع نظریهٔ K ظاهراً حتی به‌طیف عملگرهای شرودینگر باپتانسیلهای شبه‌دوره‌ای مرتبط می‌شود. چنین معادلاتی ضمن توصیف خواص مغناطیسی مواد که دارای نقص تصادفی‌اند، ظاهر می‌شوند.

ما فقط لایهٔ نازکی از سطح ایده‌هایی را برداشته‌ایم که محمل طبیعی آنها فیزیك و ریاضیات، هردو، است. ظاهراً در آستانهٔ ورود به‌عصری هستیم که مرزهای ریاضیات و فیزیك نظری عملاً از میان می‌رود.

ترجمهٔ بهرام معلمی

1. De Rham

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of Mathematics", *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washington D. C. 1984, 117-162.

• آرتور جفی، دانشگاه هاروارد

کتاب عالم را به‌زبان ریاضی نوشته‌اند. این‌کتاب را جز با آموختن زبان و دانستن الفبایش نمی‌توان خواند.
گالیله‌و گالیله

تعمق درطبیعت، پربارترین منبع اکتشافات ریاضی است.
ژان باپتیست فوریه

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات (ولو انتزاعی‌ترین آنها) نیست که روزی درپدیده‌های عالم واقع به‌کار نرود.
نیکولای لباچفسکی

معلمان ریاضی دارالفنون*

دارالفنون مطابق دارالفنون و پلی‌تکنیك وین دارای شش شعبه: ریاضیات و مهندسی و طب و دواسازی و طراحی و امور معدن‌شناسی و زبانهای خارجه و نقاشی و نظام بود. و تمام لابراتوارها عیناً با همان اسبابهای لابراتوار وین مجهز بود. بعداً شعبه خاصی هم برای ادبیات و فقه و فلسفه و غیره بر آن افزودند.

معلمان اولیه از اطریش و آلمان می آمدند. سپس چند نفر از تربیت یافتگان دوره اول خود بمقام استادی رسیده زمام تعلیمات دارالفنون را بدست گرفتند. در اینجا به معرفی اینان، سپس بمعرفی استادان بعدی میپردازیم.

از شاگردان دوره اول دارالفنون عبدالغفار خان، حاج نجم‌الدوله فرزند ملاعلی محمّد بود. نجم‌الدوله مقدمات ریاضی را نزد پدر آموخته، بعداً داخل دارالفنون شده زبان فرانسه را بخوبی فرا گرفته، از استاد اروپائی هم استفاده کرده، روزبروز دائره معلومات خود را وسعت میداد تا بحدی که از استادان مسلم زمان خویش، و مورد تعظیم و تقدیر استادان اروپایی قرار گرفته بود.

برنامه تحصیلی ریاضیات دارالفنون چندی باعموزاده دانشمند این بزرگوار، آقای محمود نجم‌الملك بود که بفرموده استادم عبدالرزاق بغایری، بزرگترین قدم توفیقات علمی را نجم‌الملك برداشته. و نجم‌الدوله هم گذشته از مراتب قومیت و بزرگی وی، او را بعلت مقام علمیش بسیار گرامی میداشت، و او را استاد خود خطاب میکرد. پس از محمودخان نجم‌الملك، ریاست کرسی ریاضیات دارالفنون حقاً به حاج نجم‌الدوله مسلم شد. و تا چندی استادان ریاضی دارالفنون تحت نظر او ایفای خدمت میکردند. حاج نجم‌الدوله از نوابغ عصر ناصری و استاد مسلم ریاضیات بود.

این دانشمند علاوه بر مقامات علمی از عرفان و حقیقت هم بهره وافی داشته، اهل سیر و سلوك بود. از تالیفات وی آنچه نویسنده فعلا اطلاع دارم ـ هندسه هشت مقاله بطرز تحریر اقلیدس ـ کتاب مثلثات ـ کتاب هیئت ـ کفایة‌الحساب ـ رساله تطبیقیه سنوات میلادی و هجری ـ چهار جلد کتاب فلاحت (ترجمه از فرانسه) نقشه بزرگ تهران ـ اصول علم جغرافی ـ چندین نقشه بزرگ از اطراف تهران.

این دانشمند شاگردان ارجمندی تربیت کرده بود، که همگی وجودشان برای مملکت بسیار ذیقیمت بوده است. عزیزترین شاگردانش ولینعمت روحانی و قبله و مربی نویسنده، استاد عبدالرزاق خان سرتیپ بغایری بود، که در ذیحجه سال ۱۳۱۷ ق، بتأسیس مدرسه «خرد» توفیق یافته و براستی از بزرگترین خدمتگذاران فرهنگ ایران است. و تمام ملکات فاضله استاد خود حاج نجم‌الدوله را بارث برده، سی سال در خانه‌اش هفته‌یی چهارشب کلاس درس مجانی برای ریاضیات داشت. و تا چندی کتب و لوازم درسی شاگردانرا هم برایگان عنایت میفرمود. و از مفاخرنویسنده راه‌یافتن به آن محفل علمی و استفاده از فیوضات آن ذات ملکوتیست.

گفتیم دارالفنون معلمین عالیقدری برای ایران تربیت و تهیه کرده است. از جریانی که بیان میشود میتوان به پایه معلومات شاگردان آن دوره دارالفنون پی برد.

پس از آنکه کنترات استخدام یك هیئت از معلمین اروپائی بپایان رسید، مقرر شد هیئت دیگری استخدام کنند. بدین منظور شش نفر از دانشمندان اطریشی و آلمانی برای تدریس ریاضی از اروپا استخدام شده بایران آمدند. استاد بغایری و همدرسانش گفتند اول ما باید آقایان را امتحان کنیم که اگر از عهده بر آمدند، باستادیشان بپذیریم. پس از این امتحان تاریخی از آن شش نفر، دو نفر مسیو بوهلر، و مسیو کریشیش که حقیقتاً دانشمند بودند پذیرفتند. آن چهار نفر دیگر چون در مقابل حادثه غیرمترقبه قرار گرفته مغلوب شده بودند، پاسپورت خود را از سفارت گرفته، دست از پا درازتر بوطن خود بازگشتند.

اما آن دو دانشمند مسیو بوهلر و مسیو کریشیش بسیار محترم میزیستند، و از هر یك یك جلد کتاب ریاضی باقیست. از اولی حساب استدلالی و از دومی کتاب مخلوط از جبر و حساب بسیار مبسوط و مفصل.

چنانکه گذشت، تعلیمات علوم ریاضی دارالفنون کلاً تحت نظر حاج نجم‌الدوله اداره میشد. یکی از شاگردان بسیار باهوش و قابل دارالفنون علیخان بود که بعدها بلقب ناظم‌العلوم ملقب شد. علیخان دوره دارالفنون را به پایان رسانیده برای تکمیل تحصیلات عازم فرانسه میشود. و دارالفنون پاریس را از کلاس اول می بیند. اگرچه بظاهر چند سالش را گم کرده است، ولی خوانده‌ها را دوباره با تتبعات تازه دانشمندان زبردست و معلمین دیگر با اصول و سلیقه دیگر خوانده، بسیار مسلط و ورزیده دارالفنون پاریس را به پایان رسانده، علماً و عملا در شمار پلی‌تکنیسین‌های خوب پاریس درآمده، با سرمایه فراوان از علم و آشنائی کامل باصول تازه، وارد ایران، و وارد تهران و وارد دارالفنون میشود. و بحق یا غیرحق، زمام تعلیمات علوم ریاضی را یکف میگیرد. حاج نجم‌الدوله از آن پس توقفش را در دارالفنون مقتضی ندیده، بیرون می‌آید. عبدالرزاق خان بغایری هم، با اینکه سال آخر تحصیل و نزدیك به دیپلم گرفتنش بود، رفتن استاد را تحمل نتوانسته، و برخلاف میل استاد خود دارالفنون را ترك گفت، و در خانه مشغول ترسیم نقشه ایران بزرگ ۱۴۰×۱/۴۰ شد. و مدت هشت سال زحمت ترسیم آنرا تحمل کرده است.

علی‌خان ناظم‌العلوم هم مثل حاج نجم‌الدوله، مورد احترام تمام استادان ریاضی داخلی و خارجی بود، و حقاً شایسته این احترام هم بوده است.

از اولین دوره شاگردانی که دوره تعلیمات ناظم‌العلوم را دیده فارغ‌التحصیل شده بودند، بهترین و قابل‌ترینشان شادروان حاج میرزا محمدخان رزم‌آرا بود که در سال ۱۳۱۵ قمری، معلم ریاضیات مدرسه رشدیه بود، و کتاب «ارشاد الحساب» را جهت شاگردان آن مدرسه تالیف فرموده بود. و بعدها بموجب خواهش حاج مخبرالسلطنه از رشدیه، بمدرسه «علمیه» رفته تدریس ریاضیات آنجا را بعهده گرفت. مقام حاج میرزا محمدخان پیش ناظم‌العلوم، عیناً مقام عبدالرزاق خان بود پیش حاج نجم‌الدوله. از تالیفات ناظم‌العلوم، حساب علیخان، حکمت ریاضی، فیزیك علیخان که بسیار مشروح و مبسوط نوشته شده است.

از معلمین و استادانیکه در دارالفنون تربیت شده، در فن خود بمقام استادی رسیده‌اند چندنفری‌را اسم میبریم، که بدوران ما بودند و وجودشان نوربخش محفل دانش و فرهنگ و محضرشان تربیت گاه اکثر استادان امروزی بوده است. اول و دوم عبدالرزاق بغایری و حاج میرزا محمد خان رزم‌آرا که ذکرشان گذشت، و حاج نجم‌الدوله و محمود نجم‌الملك، و میرزا رضاخان قراجه‌داغی که یك قطعه نقشه‌ایران بسیار شیوائی از او بیادگار است، و از تربیت یافتگان قدیم دارالفنون است.

میرزا رضاخان نجمی، مهندس‌الملك تبریزی، که بعد از ناظم‌العلوم زمامدار تعلیمات علوم ریاضی دارالفنون شد. تالیفاتش هندسه هشت مقاله، ساده‌تر از تالیف استادش نجم‌الدوله، حساب استدلالی هیئت و جغرافی (ناتمام)، و چند کتاب ریاضی و جغرافی برای دوره دبستان. این استاد در زبان فرانسه هم تسلطی داشت و از مترجمین بنام این زبان بوده است. اواخر عمرش را با زندگی بسیار محقر گمنام میزیست.

از دیگر معلمان استاد غلامحسین رهنما بود، که در هوش وذکاوت بسیار ممتاز، تحصیلاتش ابتداتاً در مدرسه علمیه انجام یافته زبان آلمانی را هم خوب فراگرفته از کتب آلمانی استفاده کامل میکرد، و معلم ریاضی مدرسه آلمانی هم بود. از کتب ریاضی کتابخانه مدرسه نامبرده استفاده فراوان میبرد، و بوسیله معلمین آلمانی مدرسه با معلمین ریاضی دارالفنون برلن هم رابطه داشت. مردی بود کاملا خودساخته و در کشور ما از استادان درجه اول ریاضیات بشمار میرفت.

---

* نقل با تلخیص از: شمس‌الدین رشدیه، سوانح عمر، نشر تاریخ ایران، ۱۳۶۲. (نحوهٔ نگارش متن اصلی کاملاً حفظ شده است.)

اردیش و مسأله

بخش **هنرحل مسأله** به‌موضوعهای، طرح وحل مسأله، معرفی دست‌اندرکاران طرح و حل مسأله، مسابقات ریاضی، معرفی منابع مسائل ریاضی، بررسی کتابهای حل مسأله ومطالب دیگری در اطراف «حل مسأله» می‌پردازد. مطلب شمارهٔ حاضر به‌پال اردیش ومسائلی از وی اختصاص یافته است. از آقایان دکتر بهزاد و دکتر شهشهانی که در تهیهٔ این مطلب از راهنماییهای بیدریغ آنان بهره‌مند شده‌ام، سپاسگزاری می‌کنم.

محمد جلوداری ممقانی

جا دارد که بخش هنرحل مسألهٔ این شماره از نظر ریاضی را به‌پال اردیش[1] اختصاص دهیم که بعضی او را هنرمندترین طراح و حلال مسأله درتاریخ ریاضیات می‌پندارند. در عصری که با مقالات تحقیقی چند ده صفحه‌ای و حتی چند صد صفحه‌ای سروکار داریم، گوهرهای چند خطی اردیش تنوعی خوشایند ایجاد می‌کنند، هر چند که وحدت نظری در ارزیابی منزلت نهایی آنها وجود ندارد؛ با این حال، اگر درمیان صفات آثارهنری برزیبایی‌وسادگی تأکید کنیم،هنرمند خواندن اردیش توصیفی است که در آن بحث ومناقشه‌ای نیست. این‌که اردیش می‌تواند بی‌وقفه مضامینی تازه و دلچسب در ریاضیات مقدماتی کشف کند، حکایت از ذوق وچیره دستی خارق‌العاده‌ای دارد.

البته اردیش فقط مسأله‌پرداز نیست. او نویسنده یا نویسندهٔ مشترك بیش‌از هزار مقالهٔ تحقیقی ریاضی است که این خود بالاترین رقم مقالاتی است‌که تاکنون یك ریاضیدان به‌چاپ رسانده است. مقالات تحقیقی اردیش نیز از همان خصوصیات ظرافت و ابتکار برخوردارند. فعالیت تحقیقی‌اردیش عمدتاً در زمینهٔ نظریهٔ مقدماتی اعداد، احتمال ترکیباتی وکاربرد آن درنظریهٔ اعداد،حساب‌افرازها، وکلیهٔ شاخه‌های ریاضیات ترکیباتی مانند نظریهٔ گرافها، هندسهٔ ترکیباتی ونظریهٔ رمزی[2] است.اگر همنوایی خاصی درآثار متعدد و متنوع اردیش دیده می‌شود، تجلی عشق‌او به‌شمارش هوشمندانه، یعنی قدیمیترین، وشاید معضلترین، فن ریاضی است. برگزیده‌ای از آثار اردیش‌که درسال ۱۹۷۳ انتشار یافت، عنوان هنر شمارش را دارد. بعضی اردیش را یك نظریه‌ساز مهم بشمار نمی‌آورند و بر او خرده می‌گیرند که خیلی زود ازپیگیری تحولات ریاضی در زمینه‌های جدید دست کشیده و هنوز از اندوخته‌های دوران جوانی‌اش تغذیه می‌کند. ولی نباید ازنظر دور داشت که بسیاری از نظریه‌های غنی ریاضی باکندوکاو عمیق و ابتکاری در مسائل خاص و مقدماتی پدید آمده‌اند و ایده‌های بدیع و اصیل نهفته درآثار اردیش الهام‌بخش جریانهای نیرومندی در رشته‌های گوناگون بوده‌اند. به‌علاوه مسلماً اردیش از بنیانگذاران نظریهٔ افرازها واز پیشگامان نظریهٔ رمزی و استفاده از احتمال درنظریهٔ اعداد است.

پدیده‌ای‌که چند بار درطول حیات علمی اردیش تکرار شده است، موفقیت وی در ارائه‌کردن اثباتهای «مقدماتی» (یعنی بدون استفاده از روشهای پیشرفته) برای قضایایی است‌که تحقیق درصحت آنها خارج از محدودهٔ ریاضیات مقدماتی محسوب می‌شده‌است. ذکر دو مورد خالی از لطف نیست. اردیش فقط هیجده سال داشت‌که توانست اثباتی ساده از حدس برتراند[1] (اینکه به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، عددی اول بین n و $2n$ وجود دارد) ارائه کند. سادگی این اثبات در مقایسه با اثبات پیچیده و دشواری که ریاضیدان معروف روسی‌چبیشف[2] قبلاً از این حدس عرضه‌کرده بود، نام اردیش را سر زبانها افکند. درسال ۱۹۵۰ اردیش وریاضیدان معروف سوئدی آتله‌سلبرگ[3] موفق شدندکه برای اولین بار یك اثبات مقدماتی برای «قضیهٔ اعداد اول» ارائه کنند. گاوس حدس زده بودکه اگر $\pi(n)$ تعداد اعداد اول میان اعداد صحیح ۱ تا n باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}=1$$

در سال ۱۸۹۶ آدامار[4] و دولاواله پوسن[5] مستقل از یکدیگر اثباتی از این حدس (که به «قضیهٔ اعداد اول» معروف شده است) عرضه کردندکه هردو اثبات مبتنی براستفاده از آنالیزمختلط بخصوص‌تابع زتای ریمان بود (دراین خصوص به‌مقالهٔ «نگاهی به‌فرضیهٔ ریمان» در شمارهٔ ۱ نشر ریاضی مراجعه کنید). تا قبل از ظهور اثبات اردیش و سلبرگ، نظر عمومی براین بود که اثبات این قضیه بدون استفاده از روشهای پیشرفته میسر نیست.

1. Paul Erdös 2. Ramsey

1. Bertrand 2. Chebyshev 3. Atle Selberg
4. Hadamard 5. C.J.de la Valleé Poussin



پال اردیش ۷۵ ساله و زادهٔ مجارستان است و هرچندکه آدرس رسمی او آکادمی علوم آن کشور است، ولی از جوانی خانه به‌دوش بوده و اکنون نیز علی‌رغم کهولت مرتباً درحال حرکت از کشوری به‌کشور دیگر و از قاره‌ای به‌قارهٔ دیگر است. به‌همین دلیل، بعضی او را «ریاضیدان مشایی» لقب داده‌اند. گفته می‌شود که مایملك اردیش یك جامه‌دان متوسط و یك کیف دستی است.[1] این سبك زندگی نه‌تنها مانعی در پیشرفت کار علمی اردیش نیست، بلکه تدریجاً به‌عادت کاری وی تبدیل شده‌است. اردیش با سخاوت کم نظیری افکار خودرا با همکاران بیشماری که درسراسر جهان دارد درمیان می‌گذارد و بسیاری اوقات، اقامت کوتاه مدت وی درشهرهای دانشگاهی مختلف منجر به نگارش یك اثر تحقیقی یادست‌کم طرح یکی‌دومسأله یاحدس می‌شود. حدود نیمی‌ازمقالات اردیش راآثارمشترك او با ریاضیدانان دیگر تشکیل می‌دهند. «عدد اردیش» یك ریاضیدان بدین‌صورت تعریف می‌شود: اگر برای ریاضیدانی چون M، دنباله‌ای ازریاضیدانهای $M_0, M_1, \ldots, M_n$ وجودداشته‌باشدکه $M_0=\text{Erdös}$، $M_n=M$، هر M_{i+1} با M_i مقاله‌ای مشترك نوشته باشد، و n کوچکترین عدد صحیح مثبت با این ویژگیها باشد، آنگاه عدد اردیش ریاضیدان M برابر n است. تاآنجاکه می‌دانیم کسی تعداد ریاضیدانانی راکه عدد اردیش دارند و یا بزرگترین عدد اردیش موجود را براورد نکرده است!

***

حال وقت آن است‌که به اردیش مسأله‌پرداز نظری بیفکنیم و منتخبی از مسائل وی را در اینجا عرضه کنیم. در آغاز یك مسألهٔ معروف را با حلی که خود او ارائه کرده است نقل می‌کنیم؛ در این مسأله مقصود از ردهٔ هم‌ارزی، ردهٔ هم‌ارزی نسبت به رابطهٔ همنهشتی است.

مسأله. فرض‌کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی ازاعداد طبیعی باشد. ثابت کنیدکه همواره می‌توان از دنبالهٔ مضاعف $\{a_i+a_j\}$ یك زیردنبالهٔ نامتناهی چنان انتخاب کردکه هیچ جملهٔ آن جمله‌های دیگر را تقسیم نکند.

حل: مسأله را در دوحالت حل می‌کنیم.

حالت اول. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر زیردنبالهٔ نامتناهی $\{b_n\}$ از دنبالهٔ داده شده، دست‌کم یك مجموع b_i+b_j و زیردنبالهٔ $\{b_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متناظر با آن باشرایط زیر وجود داشته باشد

$$2b_{i_k} \not\equiv 0 \pmod{(b_i+b_j)}$$

بنابراین، بینهایت جمله از b_{i_k}ها دریك ردهٔ هم‌ارزی قرار دارند.

به‌عبارت دیگرمجموعی به‌صورت $a_{i_1}+a_{j_1}$ و زیردنباله‌ای نامتناهی از aها وجود دارد (این زیر دنباله را به $\{a_n^{(2)}\}$ نمایش می‌دهیم) به‌قسمی که

$$2a_k^{(2)} \not\equiv 0 \pmod{(a_{i_1}+a_{j_1})},$$

$$a_1^{(2)} \equiv a_2^{(2)} \equiv \cdots \pmod{(a_{i_1}+a_{j_1})} \qquad (*)$$

به‌همین نحو $a_{i_2}^{(2)}+a_{j_2}^{(2)}$ و زیردنباله‌ای از $a_i^{(2)}$ها (مثلاً $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots$) وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$2a_k^{(3)} \not\equiv 0 \pmod{(a_{i_2}^{(2)}+a_{j_2}^{(2)})},$$

$$a_1^{(3)} \equiv a_2^{(3)} \equiv \cdots \pmod{(a_{i_1}^{(2)}+a_{j_2}^{(2)})}$$

از رابطهٔ (*) نتیجه می‌شود که

$$a_{i_2}^{(2)}+a_{j_2}^{(2)} \equiv 2a_{i_2}^{(2)} \not\equiv 0 \pmod{(a_{i_1}+a_{i_2})}$$

به‌همین ترتیب جمله‌های دیگر زیر دنباله، یعنی

$$a_{i_2}^{(3)}+a_{j_2}^{(3)}, \quad a_{i_4}^{(4)}+a_{j_4}^{(4)}, \ldots$$

را به‌دست می‌آوریم. فرایند ساختن این زیر دنباله نشان می‌دهدکه هیچ جملهٔ آن سایر جمله‌ها را تقسیم نمی‌کند.

حالت دوم. زیردنبالهٔ نامتناهی $b_1, b_2, \ldots$ از aها وجود دارد به قسمی که به‌ازای هر b_i+b_j رابطهٔ $2b_i \not\equiv 0 \pmod{(b_i+b_j)}$ تنها به‌ازای تعدادی متناهی b_k برقراراست. از اینرو برای همهٔ nهای به‌قدر کافی بزرگ داریم

$$2b_n \equiv 0 \pmod{(b_i+b_j)}$$

اینك دنبالهٔ $b_1+b_{n_1}, b_1+b_{n_2}, \ldots$ را درنظر می‌گیریم که در آن، دنبالهٔ $n_1 < n_2 < \cdots$ با چنان سرعتی به‌بینهایت میل می‌کند که

$$2b_{n_k} \equiv 0 \pmod{(b_1+b_{n_i})} \qquad i<k$$

چون $0 < 2b_1 < b_1+b_{n_i}$، پس

$$2b_1 \not\equiv 0 \pmod{(b_1+b_{n_i})}$$

و لذا داریم

$$2(b_1+b_{n_k}) \equiv 2b_1 \pmod{(b_1+b_{n_i})}$$

---

۱. اردیش مبالغی در ازای سخنرانیهایش دریافت می‌کند، به‌عنوان عضو آکادمی مقرری دارد، و برندهٔ جوایز هنگفتی نیزشده است، ولی بیشتر دریافتی‌اش را صرف امور خیریه یا پرداخت جایزه به حل‌کنندگان مسائلش می‌کند. مقارن باشرکت اردیش در سومین کنفرانس ریاضی ایران درسال ۱۳۵۱، زلزله‌های قیر و کازرزین در استان فارس روی داد و اردیش پولی راکه بابت سخنرانیهایش درایران دریافت کرده بود، جهت کمك به‌زلزله‌زدگان اهدا کرد.

واضح‌است که هیچ جمله‌ای از این زیردنباله سایر جمله‌ها را تقسیم نمی‌کند.

در اینجا حل مسأله پایان می‌پذیرد. جا دارد ابتکارهایی را که در این راه‌حل به‌کار رفته است اندکی بررسی کنیم. درزیر تنها به‌بررسی حل مسأله در حالت اول می‌پردازیم. خوانندهٔ علاقه‌مند با مراجعه به‌بخش هنرحل مسأله در شمارهٔ ۱ نشر (ریاضی، صفحهٔ ۵۵، و با توجه به آنچه که می‌آید، می‌تواند همهٔ ابتکارها و نکته‌های حل اردیش را فهرست کند.

به‌نظر می‌رسد که الگوی اردیش در حل این مسأله به‌کار بردن فرایندی نظیر غربال اراتستن است. دراین فرایند اعداد صحیح ناکمتر از ۲ را دریك جدول می‌آرایند و بجز خود ۲، همهٔ مضارب ۲ را حذف می‌کنند؛ آنگاه تمام مضارب نخستین عدد بزرگتر از ۲ را که از جدول حذف نشده است، بجز خود آن عدد، حذف می‌کنند. اگر این فرایند بینهایت‌بار تکرارشود، آنچه که درجدول می‌ماند مجموعهٔ اعداد اول است.

اینك جمله‌های دنبالهٔ داده شده‌را از چپ به‌راست وازبالا به‌پایین به‌عنوان اضلاع افقی وقائم یك جدول درنظر بگیرید. دراین صورت مجموعهٔ $\{a_i+a_j|_{j=1,2,\dots}^{i=1,2,\dots}\}$ را می‌توان در جدول مثلثی زیر نمایش داد. بنابراین مطلوب مسأله، انتخاب دنباله‌ای از عناصر این‌جدول، با شرایط موردنظر است.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1+a_1	a_1+a_2	a_1+a_3	a_1+a_4	$\dots$
a_2		a_2+a_2	a_2+a_3	a_2+a_4	$\dots$
a_3			a_3+a_3	a_3+a_4	$\dots$
$\vdots$				a_4+a_4	

به‌طورکلی مهمترین ابتکاری که اردیش ازآن استفاده می‌کند، حالتبندی مسأله است. یکی از حالتها نقیض دیگری است و بنابراین بیش از دوحالت وجود ندارد. درحالت اول، با توجه به‌فرضهایی که قبول می‌کند، زیردنبالهٔ bها را از دنبالهٔ اصلی، و مجموعی چون b_i+b_j و زیردنباله‌ای‌چون $\{b_{n_k}\}$ از bها را چنان انتخاب‌می‌کند که

$$2b_{n_k}\not\equiv 0 \pmod{(b_i+b_j)} \quad k=1,2,\dots$$

اینك ردهٔ ماندهٔ یکی از جمله‌های دنباله $\{b_{n_k}\}$ را درنظر می‌گیرد. این‌ردهٔ مانده، زیردنباله‌ای از $\{b_{n_k}\}$ است؛ این زیردنباله را با $\{a_i^{(2)}\}$ و b_i و b_j را که دربه‌وجودآمدن $\{a_i^{(2)}\}$ نقش‌مهمی داشتند به‌ترتیب با a_{i_1} و a_{j_1} نشان می‌دهد. و با توجه به نمادگذاری فوق به‌دست می‌آورد

$$2a_i^{(2)}\not\equiv 0 \pmod{(a_{i_1}+a_{j_1})} \qquad (**)$$

$$a_k^{(2)}\equiv a_l^{(2)} \pmod{(a_{i_1}+a_{j_1})} \quad k=1,2,\dots \quad l=1,2,\dots$$

و $a_{i_1}+a_{j_1}$ را نخستین جملهٔ دنبالهٔ مطلوب می‌نامد. اینك از جدول مثلثی یاد شده، تمام جمله‌ها بجز جمله‌هایی که توسط (**) به‌هم مربوط هستند و جملهٔ $a_{i_1}+a_{j_1}$ را حذف می‌کند و فرایند حل را با گذاشتن دنبالهٔ $\{a_i^{(2)}\}$ به‌جای دنبالهٔ اصلی ادامه می‌دهد.

***

در زیر ۲۰ مسألهٔ دیگر از اردیش می‌آوریم که درك صورت آنها نیاز چندانی به‌توضیح ندارد. برخی از این مسائل هنوز حل نشده‌اند که دراین‌صورت با علامت (*) مشخص‌شده‌اند. اردیش برای حل بعضی از این مسائل جایزه تعیین کرده است، مقدارجایزه درانتهای صورت مسأله درج شده است.

۱. ثابت کنید به‌ازای هرعدد طبیعی $n>1$، دربین اعداد صحیح $1,2,\dots,2n$ همواره دوعدد متمایز i و j وجود دارند که $i|j$.

۲. p، r، و m به‌ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی، شعاع دایرهٔ محاطی، و بزرگترین ارتفاع درمثلثی با زاویه‌های حاده هستند. ثابت کنید $p+r\leqslant m$.

۳. مربعی به‌ضلع واحد را درنظر بگیرید. فرض کنید A و B دومربع در داخل این مربع باشند و دارای نقطهٔ مشترکی هم نباشند. ثابت کنید مجموع طول یك‌ضلع A و یك‌ضلع B کمتر از واحد است.

۴*. n نقطه در صفحه چنان قرار دارند که هیچ پنج‌تایی از آنها روی یك خط راست واقع نیستند. تعداد خطوط متمایزی را که هرکدام شامل چهار نقطه از نقاط داده شده است به $g(n)$ نشان دهید. آیا تساوی $\lim_{n\to\infty} g(n)/n^2=0$ درست است؟ (۱۰۰ دلار)

۵*. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ n نقطهٔ متمایز درصفحه باشند. تعداد فواصل متمایز راکه توسط جفتهای این نقاط به‌وجود می‌آیند به $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان دهید. قرار دهید

$$g(n)=\min_{x_1,\dots,x_n} D(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

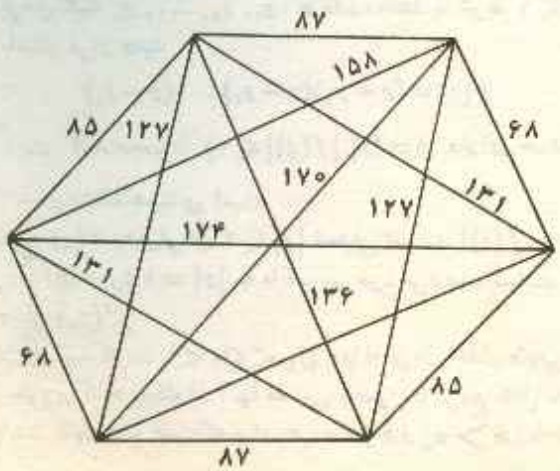
یکی از حدسهای قدیمی من این است که

$$c_1\frac{n}{(\log n)^{1/2}}<g(n)<c_2\frac{n}{(\log n)^{1/2}}$$

که درآن c_1 و c_2 اعداد ثابت ومثبت هستند. اثبات نامساوی‌طرف راست با به‌کار بردن نقاط شبکه‌ای (نقاطی‌که مختصاتشان صحیح است) آسان‌است. این نامساویها را اثبات یا رد کنید. (۵۰۰ دلار)

۶*. n نقطه در صفحه داده شده‌اند. $f(n)$ را بزرگترین عدد صحیح و مثبت بگیرید به‌قسمی‌که برای هر انتخاب از n نقطه، لزوماً $f(n)$ تا از آنها موجود باشد که فاصلهٔ هیچ جفتش مساوی با ۱ نباشد. ثابت‌شده است که $n/5<f(n)\leqslant 2n/7$. $f(n)$ را دقیقاً تعیین کنید. به‌ویژه معلوم کنید نامساوی $f(n)\geqslant n/4$ صحیح است یا نه.

۷*. آیا به‌ازای هر n، n نقطه وجود دارد که هیچ سه تا ازآنها روی یك خط وهیچ چهار تا ازآنها روی یك دایره نباشند و فاصلهٔ بین هردوتا ازآنها عدد صحیح باشد؟ برای $n=6$ شکل زیر به دست آمده است.



۸۰. S یك مجموعهٔ نامتناهی از نقاط صفحه با این ویژگی است که فاصلهٔ هر دو تا از اعضای آن، صحیح است. ثابت کنید که S زیرمجموعه‌ای از یك خط راست است. [۸]

۹۰. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد، به‌قسمی که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\infty \qquad (**)$$

آنگاه این دنباله شامل یك تصاعد حسابی با طول دلخواه است. در حال حاضر این مسأله غیرقابل حل به نظر می‌رسد، اما شاید درقرن آینده حل شود. حتی معلوم نیست که اگر (**) برقرار باشد آنگاه معادلهٔ $a_i+a_j=2a_k$ روی دنبالهٔ $\{a_n\}$ جوابی داشته باشد؛ یعنی دنبالهٔ $\{a_n\}$ شامل یك تصاعد حسابی به طول سه باشد. (۳۰۰۰ دلار) برای رد این حدس.

۱۰۰. دنبالهٔ اعداد اول را با $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots$ نشان دهید. در سال ۱۹۳۸ ثابت شد که عدد مثبت c وجود دارد به قسمی که به‌ازای عدد نامتناهی k، نامساوی

$$p_{k+1}-p_k>\frac{c\log k\log\log k\log\log\log\log k}{(\log\log\log k)^2}$$

برقرار است. «چهار سال پیش من این نامساوی را بدون عامل $\log\log\log\log k$ ثابت‌کردم. حدس من این است که این نامساوی به‌ازای هر c درست است. من برای اثبات این حدس ۱۰۰۰ دلار و برای رد آن ۲۵۰۰۰ دلار جایزه خواهم داد. البته می‌توانستم برای اثبات‌درستی‌حدس ۱۰ دلار پیشنهاد کنم، چرا که این‌حدس به‌نظر من صحیح است. ولی اگرمن اشتباه کرده باشم، حتی از راه گدایی، قرض و دزدی هم که شده ۲۵۰۰۰ دلار را تهیه خواهم‌کرد.

۱۱۰. اگر p_kها مانند مسألهٔ ۹ باشند، ثابت کنید

$$p_{k+1}-p_k>\frac{\log k}{\log\log k}$$

۱۲۰. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای‌صعودی‌ازاعداد طبیعی باچگالی‌فوقانی مثبت باشد (یعنی $\liminf_{n\to\infty}(a_k/k)<\infty$) دراین‌صورت زیر دنباله‌ای نامتناهی از $\{a_n\}$ وجود دارد که هیچ جملهٔ آن سایر جمله‌هایش‌را تقسیم‌نمی‌کند. در واقع یك زیردنبالهٔ $\{a_{i_k}\}$ وجود دارد به‌قسمی که $\sum_{k=1}^{\infty}1/a_{i_k}=\infty$ و هیچ a_{i_k}ای سایر جملات زیردنباله را تقسیم نمی‌کند.

۱۳۰. فرض کنید $z_1, z_2, \cdots, z_n$، n عدد مختلط با شرط $|z_i|\leqslant 1$ باشند. قرار دهید

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

ثابت کنید مجموعهٔ $A=\{z\mid |f(z)|\leqslant 1\}$ دارای حداکثر $n-1$ مؤلفهٔ همبندی است.

۱۴۰. تابع $f(z)$ روی‌قرص $|z|\leqslant 1$ تحلیلی است و $|f(z)|$ در نقطهٔ z_0 روی دایرهٔ $|z|=1$ به ماکسیمم خود می‌رسد. ثابت کنید $f'(z_0)\neq 0$.

۱۵۰. فرض کنید که $Q_1<Q_2<\cdots$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی‌باشد به‌طوری‌که هیچیك از آنها مقسمی به‌صورت مربع کامل نداشته باشد. ثابت‌شده است که برای هر $\varepsilon>0$ و $n>n_0$، نامساوی $Q_{n+1}-Q_n<n^{(2/9)+\varepsilon}$ برقرار است. شکی نیست که این نامساوی به‌ازای ε به‌جای $\varepsilon+(2/9)$ نیز برقرار است، ولی اثبانی ازآن در دسترس نیست. شاید نامساوی $Q_{n+1}-Q_n<c\log n$ که درآن c عدد ثابت و مثبتی است نیز برقرار باشد، ولی من شك دارم.

۱۶۰. دنبالهٔ $Q_1<Q_2<\cdots$ مانند مسألهٔ ۱۵ است. ثابت کنید

(الف)

$$\limsup_{n\to\infty}(Q_{n+1}-Q_n)\log\log n(\log n)^{-1}\geqslant\pi^2/6$$

(ب) به‌ازای $0\leqslant\alpha\leqslant 2$، ثابت کنید [۱۵]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{Q_n<x}(Q_{n+1}-Q_n)^\alpha=C_\alpha$$

۱۷۰. به‌ازای هرعدد طبیعی $n\geqslant 3$، حدس‌من و اشتراوس این است که معادلهٔ

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$$

دراعدادصحیح حلپذیر است، دراینجا $x_1<x_2<x_3$.

۱۸۰. فرض کنید $1=r_1<r_2<\cdots<r_{\phi(n)}=n-1$، اعداد طبیعی کوچکتراز n و نسبت به n اول باشند. چهل‌سال پیش‌حدس زدم که عدد ثابت c وجود دارد به‌قسمی که

$$\sum_{i=1}^{\phi(n)-1}(r_{i+1}-r_i)^2<c\frac{n^2}{\phi(n)}$$

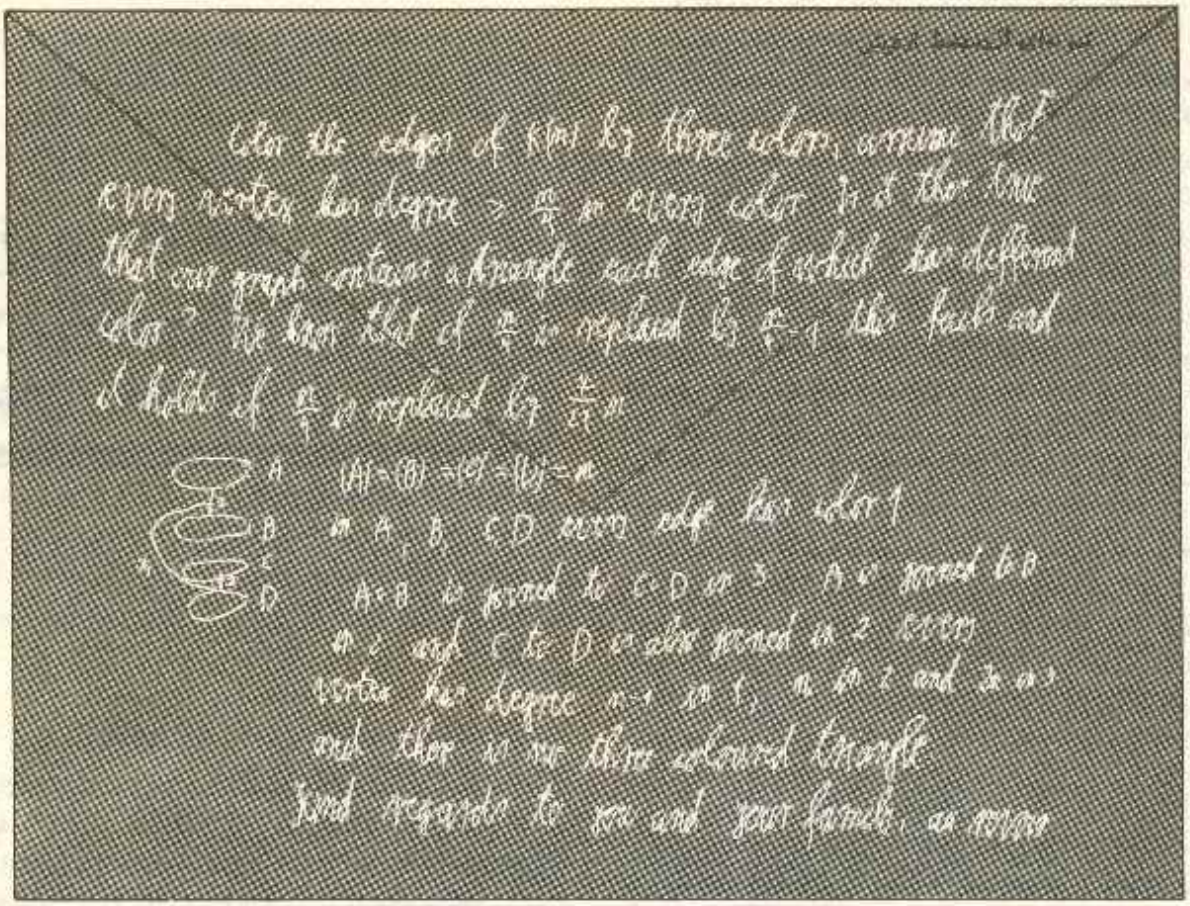
اثبات این نامساوی نباید زیاد مشکل باشد، ولی تاکنون اثباتی ارائه نشده است. (۲۵۰ دلار)

۱۹۰. خانوادهٔ مجموعه‌های $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ را یك Δ- سیستم می‌نامیم، اگر اشتراك هردوعضوآن مساوی با $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ باشد. فرض کنید $\{A_\alpha\}$ یك خانواده از m مجموعه باشد که تعداد عناصر هرکدام نابیشتر از n است. این مجموعه تحت چه شرایطی شامل یك Δ- سیستم با تعداد اعضای p است؟ این مسأله را در حالتی که m، n، و p بینهایت باشند، حتی بدون توسل به فرض پیوستار حل کردیم؛ و نتایج حاصل کاربردهایی در توپولوژی، نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق یافتند. اما اگر p، m، و n متناهی باشند، مشکلات عجیبی پیش می‌آید. فرض کنید $f(n,p)$ کوچکترین عدد صحیحی باشدکه هرخانوادهٔ $f(n,p)$ عضوی‌ازمجموعه‌های n عنصری‌شامل یك Δ- سیستم است که تعداد اعضای‌آن p است. به‌نظر می‌رسد که حتی برای $p=3$، مسأله بسیار مشکل باشد. نامساوی

$$f(n,3)<c^n$$

را اثبات یا ردکنید. در اینجا c عددی ثابت است. تنها ثابت شده است‌که $f(n,3)<2^n n!$ و $f(n,p)<(p-1)^n n!$، و $2^n<f(n,3)$. (۱۰۰۰ دلار)

۲۰۰. فرض کنید $G(2n+1)$ یك گراف منظم از درجهٔ $2n$ و با $4n+1$ رأس باشد. ثابت کنید G یك پنج‌ضلعی بدون قطر دارد. اگر $n=2$، این مطلب درست است. شاید این مسأله ساده (یا حتی غلط) باشد ولی ما نتوانستیم آن را حل کنیم.



پال اردیش نامه‌های زیادی به‌همکاران‌متعددش درسراسرجهان می‌نویسد و درآنها مسائلی را مطرح می کند.

مراجع

1. Erdös P., "Some combinatorial and metric problems in geometry", *Collquia Mathematica Societatis, Janos Bolyai 48*, 1985.
2. "Some problems and results in number theory", *Numer Theory and Combinatorics*, World Scientific Publishing Co, 1985, 65-87.
3. Sequence of integers no one of which divides another", *Am. Math. Monthly*, **57** (1950) 567-568.
4. "Some unconventional problems in number theory", *Mathematics Magazine* (2) **52**(1979).
5. Hoffman P., "The man who loves only numbers," ,*The Atlantic Monthly*, November 1987.
6. "List of publications of P. Erdös", *Combinatorica* (3-4) **3** (1983) 247-280.
7. Rado R., "Paul Erdös is seventy yeras old", *Combinatorica* (3-4)**3** (1983) 243-244.
8. Shockley J. E., *Introduction to Number Theory*, Holt Rinehart and Winston, INC. NewYork, 1967.
9. Spencer J. (ed.), *Paul Erdös: The Art of Counting*, MIT Press, 1973.
10. "The Otto Dunkel memorial problm book", *Am. Math. Monthly* (7) **64**(1975).
11. Straus E.G., "Paul Erdös at 70", *Combinatorica* (3-4) **3** (1983) 245-246.

تاریخ و ریاضیات
تاریخ ریاضیات
تاریخهای ریاضیات

حسین معصومی همدانی*

۱. مقدمه

«اگر یك بچهٔ مدرسه‌ای ناگهان به‌مدرسه‌ای در کشوری دیگر منتقل شود، طبعاً بسیاری ازمطالب برنامهٔ درسی اسباب شگفتی اوخواهد شد... اما درزمینهٔ علوم وریاضیات، احتمالاً، هیچ‌احساس‌ناراحتی نخواهدکرد؛ زیرا این‌دوموضوع ذاتاً بین‌المللی‌اند، هرچندترتیب ونحوهٔ ارائهٔ جزئیات ممکن است از جایی به‌جای دیگر تغییر کند.

«اما اگر آن بچه فرضاً نه‌فقط به‌کشوری دیگر بلکه به‌دورانی دیگر ــ مثلاً به یونـان دوهزار سال پیش یا به‌بابل چهار هزار سال پیش ــ منتقل‌شود، بایدزحمت فراوان به‌خود بدهد تا به‌چیزی دست بیابدکه از لحاظ صورت یا محتوی بتوان آن را علم نامید. آنچه در دوران ارسطو «فیزیك» نامیده می‌شد، با بحثهایی‌که در بـارهٔ مبادی اولیـه و ماهیت حرکت داشت، امروزه جزء فلسفه محسوب می‌شود وربط آن را با فیزیك امروزی جز با تحقیقی‌دقیق در تحول علوم فیزیکی نمی‌توان دریافت. تنها ریاضیات است کـه در چشم بچه مدرسه‌ای ما آشنا خواهد نمود؛ او بـا همکلاسیهای بابلیش به‌حل معادلات درجهٔ دوم وبا اقران یونانیش به‌ترسیمهای هندسی‌خواهد پرداخت. البته تفاوتهایی‌هم خواهد دید، اما تفاوتها درصورت است و نه در ماده؛ دستگاه عدد نویسی بابلیها با دستگاه عددنویسی ما فرق داشت، اما فرمول بابلی‌حل معادلات درجهٔ دوم هنوز هم به‌کار می‌رود.

دوام و ثبات و عمومیت بی‌نظیر ریاضیات، و استقلال آن از زمان و زمینهٔ فرهنگی، نتیجهٔ مستقیم ماهیت آن است... و من در اینجا توجه شما را به‌چند جنبه ازسرشت بی‌همانند ریاضیات جلب می‌کنم.

نخستین نکته‌ای که بایـد تذکر دهم این است که ریاضیات تجمعی (برهم فزاینده)[1] است؛ یعنی‌هیچگاه متصرفات خود را از دست نمی‌دهد و مرزهایش همواره در حال‌گسترش است. این امرتا حدودی به‌دلیل وجود معیارهای مطلقی است‌که باعث می‌شود اگر چیزی‌دوزگاری جزء ریاضیات معتبرباشد، همواره بدین‌حال بماند و به‌صورت بخشی زنده از پیکرهٔ دانش ریاضی درآیـد. این رشد مداوم فی‌المثل نقطهٔ مقابل پیشرفت فیزیك است‌که در طول عمر خود به‌چندین انقلاب دچار، یـا به‌عبارت بهتر از چندین انقلاب برخوردار، شده است. به‌همین دلیل‌فیزیك یونانی‌برای فیزیکدان امروزی فقط ارزش تاریخی دارد، امـا ریاضیات یونانی هنوزهم معتبراست و ریاضیدان امروزی چاره‌ای از آموختن آن ندارد...

جنبهٔ دیگری‌که باید متذکرشوم ماهیت قیاسی ریاضیات‌است: نظریات ریاضی به‌شیوه‌ای منظم و منطقی از اصولی‌که به‌صراحت بیان شده‌اند به‌دست می‌آید، و در نتیجه شناخت هر قضیه مستلزم شناخت همهٔ قضایایی‌است‌که برآن مقدم‌اند وآن را به‌اصول مربوط می‌کنند... بنابراین، مبتدی ریاضیات بایـدکار خود را ازمبادی ریاضیات آغازکند، و مبادی ریاضیات غالباً بسیار قدیمی‌اند...

بنابراین، ریاضیات گذشته خواه‌ناخواه معمولاً همراه ماست، و ریاضیدان بایـد خواه ناخواه‌کار خود را با فراگیری مطالبـی آغازکند که جزء ریاضیات قدیم محسوب می‌شوند؛ هر چند ممکن است ظاهر آن به‌مقتضای رسم روز عـوض شده باشد. ریاضیدانان نیز از اینکه به‌علمی چنین قدیمی اشتغال دارند برخود می‌بالند: ریاضیات آن‌قدر دیرینه سال است‌کـه حتی تحقیق در تاریخ آن، مدتها پیش ازغالب عـلوم، به‌صورت یك حـوزهٔ تحقیقی معتبر و مقبول درآمد...»

آنچه نقل‌شد بخشی از مقدمه‌ای است‌که یکی‌ازمورخان ریاضی برکنابی در تاریخ ریاضیات باستان برای جوانان نوشته است[1] و در عین اختصار وسادگـی آنچـه را بسیاری از مورخـان و فیلسوفان ریاضیات نمی‌گویند، یا آشکار نمی‌گویند، به‌صریحترین‌صورت بیان می‌کند، به‌طوری‌کـه می‌توان آن را بیانیـهٔ مکتبی در تاریخ‌نویسی ریاضیات دانست‌که بیشتر مورخان ریاضیات به‌آن تعلق دارند (و ما آن را «مکتب رسمی» در تاریخ‌نویسی ریاضیات می‌نامیم) و مشتمل برمجموعه‌ای از اصول است‌که میان پیروان این مکتب مشترك است. و هرچند میزان اعتقاد پیروان این مکتب به‌این اصول متفاوت است، مجموعهٔ این اصول باعث شده است‌کـه در چشم پیروان این مکتب تاریخ ریاضیات چیزی جدا از تاریخ علوم دیگر باشد.

ما در این مقاله این اصول را بـا تفصیل بیشتر بررسی‌می‌کنیم؛ آنگاه نشان می‌دهیم که چگونه تقید به‌این اصول، تاریخ ریاضیات را فقیر وفایدهٔ آن را محدود می‌کند؛ سپس به‌طرح این مسأله می‌پردازیم که منشأ این تنگ‌نظری چیست و راه بیرون آمدن از آن‌کدام است؛ آنگاه چند «تاریخ ریاضیات» را که به فارسی‌ترجمه شده‌اند از این دیدگاه بررسی می‌کنیم و خوبیها و بدیهای هریك را برمی‌شماریم.

۲. ریاضیات و تاریخ

درمتنی‌که دربالا نقل‌کردیم چند نظردربارهٔ ماهیت ریاضیات و رابطه ــ یا بی‌رابطگی ــ آن با تاریخ می‌توان تشخیص داد‌که یکدیگر را تکمیل می‌کنند وما در اینجا به‌توضیح آنها می‌پردازیم.

الف) خاصیت تجمعی ریاضیات

برطبق این نظر، هر نسلی از ریاضیدانان دستاوردهای نسلهای پیشین را حفظ‌کرده واگرتوانسته چیزی هم از خود برآن افزوده است. در ریاضیات چیزی نقض یـا ابطال یا رد نمی‌شود. البته روشها اصلاح

1. cumulative

1. Aaboe Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, 1964, pp1-2.

می‌شوند، اما این اصلاح به‌معنی تغییراساسی نیست، زیرا تغییراساسی روش ریاضی، کـه همـان روش استنتاج قیاسی و رسیدن از اصول به‌نتایج باشد، به‌معنای از میان رفتن ریاضیات یـا تغییر ماهیت آن است.

از این دیدگاه، سیردریاضیات یکی از بهترین نمونه‌های پیشرفت از طریق جذب واصلاح است. مثلاً پیشرفتی راکه در محاسبهٔ نسبت محیط دایـره به‌قطرآن (π) صورت گرفته درنظر بگیریـد؛ از زمان بنی‌اسرائیل که π را مساوی ۳ می‌گرفتند تا زمان ماکه به‌کمک کامپیوتر عدد π تا هزاران رقم بعد ازاعشار حساب شده، یك حرکت تدریجی وجود داشته است.[۱] هیچ‌یك از روشهایی راکه برای محاسبهٔ π به‌کار رفته «غلط» نمی‌توان خواند، بلکه این روشها که هر یك درحد خود کارآمد بوده به‌مرورزمان اصلاح شده‌اند، وموفقیت همهٔ آنها هم به‌این دلیل بوده است که ریشه در روش کلی ریاضیات، یعنی روش استنتاج قیاسی داشته‌اند.

مثال دیگری که برای توضیح مفهوم پیشرفت از طریق جذب و اصلاح مفید است رفتاری است که ریاضیدانان دوران قدیم با نام و آثار ریاضیدانان پیش از خود دارند، و تفاوتی است که این رفتار با رفتار علمای طبیعی روزگارقدیم با یکدیگر دارد. ارسطو، بزرگترین عالم طبیعی روزگار باستان، حافظ بخش بزرگی ازتاریخ علم پیش از خود است، زیرا در غالب آثار خود پیش از وارد شدن در بحث اصلی، عقاید پیشینیان را در آن مسأله نقل می‌کند. اما غرض او تنها نقل نیست زیرا درپی نوشتن تاریخ علم پیش از خودش نیست، بلکه منظور او از نقل آراء گذشتگان رد و نقض آن آراء است، و دراین کار حتی به‌استاد خود افلاطون هم رحم نمی‌کند، زیرا حقیقت را از افلاطون گرامیترمی‌داند. اما برخلاف ارسطوریاضیدانان دوران باستان یـا ازگذشتگان خود اصلاً نام نمی‌برند و یا بـا تکریم و تعظیم از ایشان یاد می‌کنند. نمونهٔ مورد اول، کتاب *اصول* اقلیدس و نمونهٔ مورد دوم، کتاب *مجسطی* بطلمیوس است.

شك نیست که اقلیدس بیشتر قضایای کتاب خود را از ریاضیدانان پیش از خودگرفته است، اما اگر او از هیچ منبعی نام نمی‌برد برای این نیست کـه دستاوردهای دیگران را به‌نام خودش کنـد. معاصران اقلیدس ونسلهای پس ازاوهمه از این حقیقت آگاه بودندکه اقلیدس چیزهای بسیاری را از دیگران گرفته است و او، حتی اگرمی‌خواست (کـه نمی‌خواست)، نمی‌توانست کسی را از این بابت فریب بدهد. علت اینکه اقلیدس ازکسی نام نمی‌برد شاید این باشدکه او، به‌حکم مشرب افلاطونی خود، حقیقت ریاضی را یك امر غیرشخصی می‌داند و بنابراین برایش فرقی نمی‌کندکـه کاشف آن حقیقت ریاضی مثلاً اثودوکسوس باشد یا تئایتتوس یا هرکس‌دیگر، بلکه نفس آن حقیقت برایش از هرچیز دیگر مهمتر است.

به‌خلاف اقلیدس، بطلمیوس درمجسطی خود مقام یکی‌ازمنجمان پیشین به‌نام هیپارخوس راکه تقریباً سه قرن قبل از او می‌زیسته چنان بالا برده است که بسیاری از مورخان علم،کار بطلمیوس‌را تکرار کار هیپارخوس پنداشته‌اند وازتوجه به‌این نکته غافل مانده‌اندکه بسیاری از مطالب مجسطی، و بسیاری از مـدلهای مهم ریاضی‌آن، ابـداع شخص بطلمیوس است و اوصرفـاً دنباله‌رو و تابع هیپارخوس نبوده است.

هرچند رفتار اقلیدس با پیشینیان خود با رفتار بطلمیوس تفاوت بارزدارد، سرچشمهٔ این دورفتارمتفاوت یکی‌است: اطمینان ریاضیدان از اینکه‌کار او ادامهٔ طبیعی کار ریاضیدانان پیشین است نـه‌ناقض و مخالف آن. به‌همین دلیل است کـه از دیدگاه پیروان مکتب رسمی تاریخ نویسی ریاضیات ودرنظراول

- در تاریخ ریاضیات هیچ تحولی که قابل مقایسه با «انقلاب علمی» قرنهای شانزدهم وهفدهم میلادی باشد رخ نداده است؛
- هیچ ریاضیدانی، بدان صورت که‌ارسطو به‌رد آراء اتمیستها برخاسته، آراء ریاضیدانان پیش از خود را رد نکرده است؛
- هیچ ریاضیدانی، بدان صورت که گالیله یا دکارت ارسطو را دست انداخته‌اند، به‌تمسخر ریاضیدانان دیگر نپرداخته است؛
- هیچ نظریهٔ ریاضی‌یاهیچ ریاضیدانی‌ازعوامل عقب‌ماندگی‌جامعه و ابزار یاهمدست نیروهای واپسگرای اجتماعی معرفی نشده است؛
- هیچ نظریهٔ ریاضی‌یا هیچ ریاضیدانی‌جزء نیروهای مترقی‌اجتماعی و از عوامل پیشرفت وغلبه بـر نیروهای واپسگرا به‌شمار نیامـده است...

ب) استقلال ریاضیات از زمان و زمینهٔ فرهنگی

به‌سخن‌دیگر، پای ریاضیات، مستقیم یا غیرمستقیم، به‌حوادث‌اجتماعی کشیده نشده است. البتـه ریاضیـات در تکنولوژی کاربـرد دارد و تکنولوژی هم می‌تواند مورد استفاده یا سوء استفاده قرارگیرد. امـا آنچه در تکنولوژی به‌کار می‌رود جزء «ریاضیات کاربردی» است که بیشتر جزء علوم تجربی محسوب می‌شود تا ریاضیات واقعی. همچنین هرچند حوادث اجتماعی وفرهنگی در تکوین نظریه‌های ریاضی‌مؤثر بوده‌اند، اما این‌حوادث را نمی‌توان «علت» پیدایش نظریه‌های ریاضی دانست، زیرا این نظریه‌هـا، به‌صورت‌کامل و یکپارچه، دردل اصول موضوع هرشاخه از ریاضیات خوابیده‌اند ودیریا زودآشکارمی‌شوند، و نقش حوادث اجتماعی و فرهنگی‌جز این نیست که این ظهور وبروز را تسریع‌کند یا به تعویق بیفکند. و این خصوصیت را ریاضیات از دیرباز دارا بوده است.

ریاضیات، برخلاف علوم طبیعی خیلی زود دوران طفولیت خود را پشت سر نهاد و به‌یك نظام علمی جا افتاده و بالغ تبدیل شد. در همان دوران کـه علـوم دیگر، به‌دلیل نداشتن روش مناسب، کورمال کورمـال و در تاریکی راه می‌پیمودند، و به‌همین سبب تحت تأثیـر ایدئولوژیهای مختلف قرارمی‌گرفتند و در پیکار میان گروهها وعلائق اجتماعی وفکری گوناگون آلت دست ایشان می‌شدند، ریاضیات به‌یك روش‌مناسب دست یافت وبه‌همین دلیل‌هم احکام آن از قطعیت وثبات برخوردار شد. ریاضیات زودتر از همهٔ علوم دیگر استقلال یافت و تکامل آن، بیش از آنکـه تابع بلهوسیهای زمانه یا منافع گروههای اجتماعی باشد، تابع یك منطق درونی شد. البته حوادث اجتماعی و مقتضیات فرهنگی و فکـری می‌توانست کشف یك حقیقت ریاضی را تسریع کند یا آن را به‌تعویق بیندازد، اما آن حقیقت از این حوادث یا مقتضیات زاده نمی‌شد بلکه ازدل یك نظام اصل موضوعی و به‌حکم منطق درونی آن نظام بیرون می‌آمد.

این‌رویداد، یعنی‌استقلال یافتن وبرسر پای خود ایستادن وازخود تغذیه‌کردن ریاضیات، به‌نظرغالب‌مورخان ریاضیات، اتفاقی است که در یونان باستان و با ظهور ریاضیات استدلالی، که نخستین وبهترین نمونـه‌اش هندسهٔ اقلیدسی است، رخ داد، و از آنجـا به‌سرزمینهای دیگر صادرشد وسرانجام، با تأخیر بسیار، به‌شاخه‌های دیگرریاضیات

---

۱. در این‌باره ر. ك. ایوز، هاورد و. ، آشنایی بـا تاریخ ریاضیات، ج۱، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳، ص۱۱۱ـ۱۲۵.

و به‌علوم دیگر راه یافت.

برطبق این تصور، آن مایه از استقلال و خودجوشی و خودکفایی که در علوم دیگر هست ناشی از، و متناسب با، بهره‌ای است که این علوم از ریاضیات دارند. مثلاً سیر فیزیك نظری از همهٔ علوم دیگر بسامانتر و منظمتر و از دستبرد و نفوذ حوادث دنیای خارج ایمنتر است.

ج) ماهیت قیاسی ریاضیات

این خصوصیت باید با آنچه تاکنون گفتیم روشن‌شده باشد: ریاضیات به‌این دلیل تحت تأثیر حوادث خارجی واقع نمی‌شود که ربطی و رابطه‌ای با این حوادث ندارد. ریاضیات مجموعه‌ای است از احکام که منطقاً و از طریق رشته‌ای از اعمال منطقی از مجموعه‌ای دیگر از احکام که اصول نام دارند به‌دست می‌آیند، و در این فرایند استخراج نتایج از اصول هیچ نیازی به‌توسل به‌دنیای خارج نیست. ریاضیات جهان خاص خود را دارد که در نظر بعضی جهان موجودات مثالی و بی‌زمان و مکان افلاطونی است و در نظر بعضی دیگر جهان ساخته‌های انتزاعی ذهنی ــ و این جهان، در هر دو حال، غیر از جهان ماست.

۳. تاریخ و ریاضیات

مجموعهٔ این تصورات دربارهٔ ریاضیات، هرچند ظاهراً به‌سود خود ریاضیات است زیرا آن را در مقامی رفیعتر ازهمهٔ علوم دیگر قرار می‌دهد، و هر چند غالب مورخان ریاضیات بنیان کار خود را بر آن می‌نهند، چندان به سود تاریخ ریاضیات نیست، و در واقع تاریخ ریاضیات را دچار یك تعارض اساسی می‌کند.

آن تعارض این‌است: به‌جز گروه بسیار کوچکی از ریاضیدانان، سایر ریاضیدانان و نیز کسانی که ریاضیدان نیستند به‌قصد فراگرفتن ریاضیات به‌تاریخ ریاضیات روی‌نمی‌آورند بلکه به‌این‌دلیل به‌مطالعهٔ تاریخ ریاضیات می‌پردازند که ریاضیات را یکی از اجزاء اصلی و مهم فرهنگ و تمدن بشری می‌پندارند و، شاید از روی ساده دلی، گمان می‌برند که تحولات ریاضی با تحولاتی که درسایرشئون فرهنگ و اجتماع و فکر بشری‌رخ می‌دهد رابطه دارد، ومطالعهٔ سیر ریاضیات بینش انسان را نسبت به‌حیات معنوی و اجتماعی بشر وسیعتر می‌کند. غالب کسانی هم که به‌تحقیق و تألیف درتاریخ ریاضیات می‌پردازند، همین داعی و انگیزه را دارند. به عبارت دیگر: از یك‌سو تاریخ ریاضیات به‌این‌قصد خوانده ونوشته می‌شود که ربط ومناسبت فرهنگی ریاضیات را نشان دهد و ازسوی دیگر، بیشتر تاریخهای ریاضیاتی که نوشته و خوانده می‌شوند براین اساس استوارند که ریاضیات هیچ‌گونه ربط و مناسبت فرهنگی ندارد.

البته هیچ کس این معنی را به این صراحت مدعی نمی‌شود. در بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات به‌عوامل‌سیاسی و اجتماعی و اقتصادی و فرهنگی هم اشاره می‌شود، اما این نوع اشاره‌ها یا خیلی کلی است و هیچ مسأله‌ای‌را توضیح نمی‌دهد و یا اگر نویسنده‌ای به‌کلیات اکتفا نکند و بخواهد وارد جزئیات شود، غالباً کارش به تصنع و تکلف و قیاس مع‌الفارق و توجیهات ناموجه می‌کشد.

نمونهٔ تعلیلها و توجیه‌های نوع اول، توجیه پیدایش ریاضیات یونانی براساس نظام اجتماعی‌یونان قدیم است. گفتن اینکه یونانیان بدین‌دلیل به‌ابداع‌ریاضیات استدلالی موفق شدند که نظام‌اجتماعیشان برده‌داری بود هیچ مسأله‌ای را حل نمی‌کند، زیرا در فراغتی که از سایهٔ سر نظام برده‌داری حاصل می‌شود اشخاص می‌توانند به هرکاری بپردازند؛ و به این وسیله به‌هیچ وجه نمی‌توان توضیح داد که چرا اشخاص باید به‌سراغ ریاضیات، وآن‌هم نوع خاصی از آن، بروند.

نمونهٔ توجیه‌ها و تعلیلهای نوع دوم این است که مثلاً بخواهیم پیدایش نظریهٔ گروهها را برحسب حوادث اجتماعی و سیاسی جامعهٔ قرن نوزدهم فرانسه یا انگلستان توضیح دهیم. ظاهراً یافتن یك‌رابطهٔ علت ومعلولی میان این دو به‌قدری دشوار است که کمتر کسی درصدد آن برمی‌آید.[۱]

به همین دلیل است که بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات در واقع کتابهای «تاریخ و ریاضیات» اند، یعنی موزاییکی‌از دوجزء تاریخی و ریاضی‌اند که هرکدام به‌راه خودش‌می‌رود و ساز خودش را می‌زند بی‌آنکه برهم‌کنشی میان آن‌دو وجود داشته باشد. دراین‌گونه‌کتابها، جزء تاریخی حکم‌کارگر صحنه را دارد که فقط زمینه را برای ظهور جزء ریاضی آماده می‌کند و وقتی بسازیگر اصلی، یعنی جزء ریاضی برروی صحنه آمد و هنرنمایی را آغازکرد صحنه را ترك می‌کند؛ و البته هرچه به ریاضیات دوران جدید نزدیکترمی‌شویم اهمیت و نقش جزء تاریخی در این‌گونه نوشته‌ها کمتر می‌شود.

۴. نقد نظر مکتب رسمی

آنچه ما نظر«مکتب رسمی» درتاریخ‌نویسی‌ریاضیات‌نامیدیم در اساس نوعی‌فلسفهٔ ریاضیات است ــ که معمولاً صورتگرایی‌نامیده می‌شود و ریاضیات را مجموعه‌ای از اصول موضوع و نتایج حاصل از آنها می‌داند. به این فلسفه عناصری هم از مکاتبی در تاریخ‌نویسی علم اضافه شده است، و به‌عبارت بهتر این عناصر (مثل اعتقاد به تجمعی بودن علم، و اعتقاد به‌استقلال علم از اوضاع زمانی و مکانی) اکنون که از تاریخ علم رانده شده‌اند آخرین پناهگاه خود را درتاریخ ریاضیات، ودر دامان آن فلسفه، می‌جویند.

اما امروزه شواهدی در دست‌است که این‌عناصر ناچار باید تاریخ ریاضیات را نیز ترك کنند و همراه با آن باید در فلسفه‌ای هم که این عناصر را به‌آغوش خود پذیرفته است تجدید نظر شود. به این طریق امید می‌رود که تاریخ ریاضیات از این تفرق شخصیت و بی‌هویتی که اکنون دچار آن است نجات یابد.

بسیاری از این شواهد امید بخش از خود تاریخ ریاضیات و نیز از نوعی نگرش «تاریخی‌تر» به‌ماهیت ریاضیات به‌دست آمده است.[۲] ما از این پس سعی می‌کنیم بی‌آنکه وارد جزئیات فنی شویم برخی از این شواهد را به‌زبان ساده و از طریق نقد مبانی مکتب رسمی بیان کنیم.

---

۱. نمونه‌هایی از کوشش ناموفق برای توجیه اجتماعی پیدایش و تکوین ریاضیات را می‌توان در نخستین فصلهای کتاب زیر دید:
آ.ک.ساندروف‌ودیگران. ریاضیات،محتوی، روش‌واهمیت‌آن، ج ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری، تهران،توکا، ۱۳۵۶.

۲. این جریان جدید با نام ایمره لاکاتوش وکتاب او، اثباتها و ابطالها
Lakatos Imare, *Proofs and Refutations*, Cambridge, 1976
پیوند دارد. درسالهای اخیر این نوع نگرش در میان ریاضیدانان حرفه‌ای هم طرفداران فراوان یافته است. وگویاترین و بهترین بیان آن را در کتاب
Davis Philip J. and Hersh Reuben, *The Mathematical Experience*, Boston, 1981
می‌توان یافت.

الف) مفاهیم، مسائل، روشها، و نتایج

اعتقاد به‌اینکه در ریاضیات هیچ‌چیز به‌دست آمده‌ای از دست نمی‌رود، نتیجهٔ یکی دانستن ریاضیات با نتایج (یا احکام) ریاضی است. آنچه ما نتایج نامیده‌ایم همان‌چیزی است که در پایان زنجیره‌ای از استدلالها یا رشته‌ای از محاسبات به دست می‌آید، و چنین می‌نماید که نتایج ریاضی به‌مرور زمان برهم افزوده می‌شوند. عدد π که قبلاً آوردیم مثال کاملاً گویایی است.

اما ریاضیات فقط منحصر به‌نتایج ریاضی نیست، بلکه اجزاء دیگری هم دارد که ما آنها را (۱) مفاهیم، (۲) مسائل، و (۳) روشها می‌نامیم. این سه جزء نه تنها آن حالت تجمعی ساده را ندارند بلکه اگر به‌نتایج ریاضی هم با درنظر گرفتن این سه نگاه کنیم می‌بینیم که نتایج هم، بدان صورت که در نظر اول گمان می‌رود، بر یکدیگر افزوده نمی‌شوند. همچنین توجه به‌این سه‌جزء پیوند ریاضیات را با آنچه غیر ریاضیات است آشکار می‌کند.

ب) همه چیز در ریاضیات تجمعی نیست

مفاهیم جدید ریاضی همواره از طریق تجدید نظر در مفاهیم پیشین و توسعه و تعمیم آنها به‌دست نمی‌آید، بلکه گاهی هم ریاضیدان ناچار می‌شود مفهوم کاملاً تازه‌ای را وارد کار کند. این نکته را دربارهٔ روشهای ریاضی هم می‌توان گفت و به‌همین سبب است که گاهی ریاضیدان استفاده از روشی را برای خود مجاز نمی‌داند.

تاریخ ریاضیات از این موارد فراوان دارد. یکی از گویاترین و معروفترین نمونه‌ها داستان ارشمیدس و مسألهٔ انتگرالگیری است. می‌دانیم (یعنی از سال ۱۹۰۶ میلادی به‌بعد می‌دانیم[1]) که ارشمیدس در رسالهٔ روش خود به‌روش لایب‌نیتسی درانتگرالگیری، که مبتنی بر اعتقاد به‌بینهایت کوچك بالفعل است، بسیار نزدیك شده بود، اما این روش را به‌عنوان یك روش «مجاز» ریاضی نپذیرفت و به‌روش افناء[2] که آن را دقیقتر می‌دانست، روی آورد. روش افناء روشی غیرمستقیم است که با آن نمی‌توان اندازهٔ هیچ سطح یا حجمی را به‌دست آورد، وبا این حال، به‌این دلیل که درآن نه عملی بینهایت بار تکرار می‌شود و نه بینهایت کوچکی وجود دارد، درنظر ارشمیدس برآن روش دیگر که مستقیماً به‌نتیجه می‌انجامید برتری داشت؛ در واقع تنها روش مجاز محسوب می‌شد.

البته نتیجهٔ عددی در دو حالت فرق نمی‌کند، اما روشها مانعةالجمع‌اند، یا دست‌کم از لحاظ ارشمیدس چنین‌اند، زیرا یکی مبتنی بر این فرض است که سطح مجموعه‌ای از خطوط است و خط مجموعه‌ای از نقاط، و دیگری براین فرض که سطح مجموعه‌ای از سطوح است و خط مجموعه‌ای از خطوط. این دومفهوم بنیادی باهم سازگار نیستند، و انتخاب یکی از این دونظر یك امر ریاضی صرف نیست بلکه یك انتخاب فلسفی است، و دلیل آن را جز با توجه به‌نظر یونانیان دربارهٔ بینهایت کوچك(و بینهایت به‌طور کلی) نمی‌توان دریافت ـ ومتأسفانه این نظر معمولاً در کتابهای فلسفه وتاریخ فلسفه موردبحث قرار می‌گیرد نه در کتابهای تاریخ ریاضیات.

ج) ریاضیات یك علم سفارش‌گیرنده است

بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات با بحث دراین باره آغاز می‌شود که چگونه‌حساب وهندسه ـ این دوشاخهٔ قدیمی ریاضیات ـ ازنیاز به‌شمارش و مساحی ساده پدید آمدند. ارتباط میان ریاضیات و نیازهای عملی یا نیازهای علوم دیگر تقریباً تا اوایل قرن بیستم میلادی روشن است و به‌همین دلیل ریاضیدان متخصص، یعنی ریاضیدانی که جز ریاضیات چیز دیگری نداند، پدیدهٔ جدیدی است. اما در دوران اخیر سررشتهٔ این ارتباط گم می‌شود و کمتر می‌توان ربط تحولات ریاضی را با آنچه در خارج از حوزهٔ ریاضیات می‌گذرد دریافت. دلیل این امر هرچه باشد، این پدیدهٔ جدیدی است ونباید آن را به‌دورانهای پیشین هم تعمیم داد. در سراسر تاریخ ریاضیات از نیازهای فنی و عملی بشر و نیز از علوم دیگر مسائل مهمی برای ریاضیات‌فراهم می‌آمده است.

د) دو نوع ریاضیات

صورتگرایی، اعتقاد به‌اینکه ریاضیات چیزی جز بازی بامشتی علائم تعبیر ناشده که از طریق اصول موضوع به‌هم مربوط می‌شوند نیست، هرچند بدین صورت فلسفهٔ جدیدی است و عمرش به‌یك قرن هم نمی‌رسد، اما ریشه‌های کهنی دارد. منشأ این اعتقاد، چنانکه قبلاً هم متذکر شدیم، به‌یونان باستان برمی‌گردد. ریاضیدانان یونانی دوست داشتند که همهٔ ردپاهایی راکه ممکن بود خواننده را به‌نحوهٔ کشف قضیه‌ای رهنمون شود از بین ببرند و به‌تعبیری همهٔ چوب‌بستها را برچینند[1] وساختمان ریاضی‌را طوری عرضه کنند که گویی از ازل‌بدان صورت وجود داشته است. آنچه درشاهکارهای ریاضی یونانی دیده می‌شودساختمان تمام‌شده‌است وخواننده جریان ساخته شدن ریاضیات را نمی‌بیند. شیوهٔ «ترکیبی» ریاضیدانان یونانی، یعنی آغازکردن از اصول و رسیدن به‌نتایج، مناسب‌ترین روش برای رسیدن به‌این منظور بود.

اما توفیق دراین کار فقط در هندسه دست داد. جبر یونانی جزء هندسه بود. حساب راهم یونانیان به‌دو بخش می‌کردند: بخشی که در واقع پیشاهنگ نظریهٔ اعداد امروزی است جزء ریاضیات استدلالی بود، اما بخشی دیگر که به‌محاسبات معمولی اختصاص داشت اصلاً شایستهٔ نام ریاضیات نبود و به‌همین دلیل اطلاع ما از این بخش از حساب یونانی بسیار ناقص است.[2]

به‌این ترتیب نام ریاضیات کم‌کم مترادف با هندسه (یعنی ریاضیات استدلالی و اصل موضوعی) شد و این وضع قرنها ادامه داشت، اما این امر باعث نشدکه آن بخش دیگر ریاضیات، بخش محاسباتی وکمتر دقیق آن، یکسره ازبین برود. نیازهای عملی این بخش را زنده نگاه می‌داشت: منجمان و مساحان و محاسبان به فنون عملی برای برآوردن نیازهای عملی خود، و به‌اصلاح این فنون، نیاز داشتند، و چون کار این بخش از ریاضیات حل مسائل بود و ادعایی بیش‌از این نداشت،ازلحاظ روش هم دست‌وپایش به‌آن اندازه بسته نبود. این بخش از ریاضیات در واقع مثل بندرآزادی بودکه مسائل

---

۱. در این سال هایبرگ (Heiberg) نسخه‌ای از رسالهٔ روش ارشمیدس را که تا آن زمان از دست رفته پنداشته می‌شد، در کتابخانه‌ای در استامبول کشف کرد.

2. exhaustion

۱. این تعبیر از باخنر است:

Bochner Salomon, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Boston, 1966, p. 76.

۲. یونانیها بخش اول را arithmetike techne (فن‌حساب) و بخش دوم را logistik (لوژیستیك) می‌نامیدند.

و روشهای جدید از طریق آن به‌بخش دیگر وارد می‌شد.[۱]

البته‌امروزه جبرهم، مثل هندسهٔ قدیم، یك ساختمان اصل‌موضوعی و قیاسی محکم یافته است. اما این امر بدان معنی نیست که همهٔ ریاضیات اصل موضوعی شده باشد یا بخشهایی از ریاضیات کاملاً اصل موضوعی شده باشد.

همهٔ ریاضیات اصل موضوعی نشده است. ریاضیات دائماً درحال پیشرفت‌است واین پیشرفت به‌صورتی که از کتابهای درسی برمی‌آید، یعنی ازطریق آغاز کردن ازاصول وحرکت گام‌به گام تارسیدن به‌نتایج، به‌دست نمی‌آید. سازوکار کشف ریاضی سازوکار پیچیده‌ای است و کمترین چیزی که دربارهٔ آن می‌توان گفت این است که به‌آن صورت شسته رفته ومنطقی کتابهای درسی نیست. ترکیبی است از استدلال و تخیل‌وآزمون وخطا ونوعی تجربه‌گری ذهنی وحتی عینی. ریاضیدان در جریان ساختن ریاضیات، در جریان کشف ریاضی، به‌هر روشی هرچند نادقیق متوسل می‌شود، واین یکی ازنکته‌هایی است که از بررسی دقیق تاریخ ریاضیات به‌دست می‌آید. تنهادرمرحلهٔ عرضهٔ نتیجهٔ کشف خود وبرای اطمینان یافتن ومطمئن کردن دیگران از درستی آن‌است که سعی می‌کند آن را به‌صورت یك ساختمان دقیق منطقی واصل موضوعی عرضه کند.

اما این عرضهٔ اصل موضوعی هم هیچ‌گاه کامل نیست. گذشته‌از موانع نظریی که برسراین راه وجود دارد، و گذشته ازاینکه این کار عملاً هم ناممکن است، اصولاً هدف ریاضیدان این نیست. در ریاضیات هم، مثل هرعلم دیگری، دقت به‌خودی خود هدف نیست. میزان دقت ریاضیدان بستگی به‌مسأله‌ای داردکه درصدد حل آن‌است و دقت از آن بیشتر، زائد ودست‌وپاگیر ومخل کار اوست.

۵. تاریخهای ریاضیات

ریاضیاتی که‌کاملاً تجمعی باشد، از زمان و زمینهٔ فرهنگی مستقل باشد، وساختمان کاملاً دقیق واصل‌موضوعی داشته باشد، ریاضیات کتابهای درسی است، یا آرمانی است که بعضی از نویسندگان کتابهای درسی وبعضی از فیلسوفان ریاضی دربی رسیدن به‌آن تلاش می‌کنند. در کنار این ریاضیات، ریاضیات زنده‌ای هم وجود داردکه همواره در حال ساخته شدن است، چیزی ازدست می‌دهد و چیز دیگری به‌دست می‌آورد، باجامعه وتکنولوژی و روانشناسی بشری ارتباط دائم دارد. می‌توان گفت که در واقع دونوع ریاضیات وجود ندارد، واین‌دو، دو وجه ازیك چیزاست. دراین صورت باید گفت که‌کار تاریخ ریاضیات بررسی وجه اخیر است.

درتاریخ علم به‌طورکلی، امروزه این اندیشه پذیرفته شده است که مورخ باید علم‌را درجریان ساخته شدن نشان دهد نه پس‌ازساخته شدن. نباید علم زمان خود و زبان علم زمان خود را ملاك قرار دهد بلکه باید بکوشد که دربارهٔ علم هر دورانی برحسب معیارهای خود آن دوران داوری کند. بخصوص باید امکان انقلابات علمی وزیرورو شدن مفاهیم علمی و حتی تغییرمعنای علم و تبیین علمی را ازنظر دور نداشته باشد، بلکه به‌سیرعلم به‌صورت مجموعه‌ای ازانقلابهای کوچك وبزرگ بنگرد.

ظاهراً این تصورهنوز به‌تاریخ ریاضیات راه نیافته‌است وموانع زیادی برسر راه ورود آن به‌تاریخ ریاضیات هست، ومتنی که‌در آغاز این‌مقاله نقل کردیم، گواه‌گویای این امر است. وبه‌همین دلیل درهمان حال که بازار تألیف کتابهایی‌باعنوان کلی‌تاریخ علم‌کاسدمی‌شود ظاهراً هنوز بازار تألیف کتابهای تاریخ ریاضیات، یعنی کتابهایی‌که به ریاضیات به‌چشم یك جریان واحد و مستمر و سلسله‌ای از پیروزیهای متوالی می‌نگرند، گرم است. ودرهمان حال‌که تاریخ علم به‌تاریخها و تاریخچه‌های مختلف وبه مجموعه‌ای از مطالعات موضعی تجزیه می‌شود، ظاهراً هنوز تاریخ ریاضیات وحدت و هویت یکپارچهٔ خود را تاحدودی حفظ کرده است.

ظاهراً گفتیم، زیرا تحت تأثیر تحولاتی که در دهه‌های اخیر به‌خصوص درفلسفهٔ ریاضی پدید آمده است، تصور جدیدی ازتاریخ ریاضیات درحال رشد یافتن است که مبانی نظری آن را دربخش قبل دیدیم. از نخستین دهه‌های قرن بیستم میلادی جنبشی در تاریخ نویسی ریاضیات آغاز شده است که به‌جای سعی در نوشتن تاریخ جامعی از ریاضیات، دربی بررسی دقیق منابع موجود و قرائت و تفسیر آنهاست. دستاوردهای این جنبش بسیار چشمگیر بوده است. توجه به‌تاریخ ریاضیات پیش‌از یونان و تمدنهایی که درمسیر حرکت تمدن غربی نیستند (مثل چین و ژاپن) و نیز توجه به ریاضیات در دوران پیش‌از تاریخ براساس مطالعه در آثار مادی بازمانده از آن دوران، حوزهٔ تاریخ ریاضیات‌را ازلحاظ تاریخی وجغرافیایی‌وسعت بخشیده‌است. توجه به‌تاریخ علومی چون نجوم وموسیقی وتورشناسی، که درتقسیم‌بندی یونانیان جزء ریاضیات محسوب می‌شدند و امروزه از شاخه‌های فیزیك به حساب می‌آیند، باعث شده است که مفهوم جدیدی از ریاضیات در دوران گذشته حاصل شود و منابع جدیدی به منابع تاریخ ریاضیات اضافه شود، و بالاخره مورخان ریاضیات دریافته‌اندکه باید منشأ بسیاری از تحولات ریاضی را در تحولات فلسفیی که همزمان باآنها یا مقدم برآنها رخ داده است سراغ کنند.

اما بیشتر تاریخهای عمومی ریاضیات هنوز در برابر این جریان مقاومت می‌کنند و به‌همین دلیل است که این تاریخها غالباً بسیار ملال‌آورند. برای کسی که ریاضیات می‌داند جز مشتی اسم و تاریخ تولدومرگ وشرح وقایع سیاسی که به‌هیچ وجه ارتباطشان باریاضیات معلوم نیست، چیز دیگری ندارند؛ و برای کسی که ریاضیات نمی‌داند بیش از حد فنی و دشوارند. و به هرحال، غالب تاریخهای عمومی

---

۱. این تقسیم‌بندی تقریباً معادل است با تقسیم‌بندی هنریچی (P. Henrici) که‌ریاضیات‌رابه «ریاضیات الگوریتمی» و «ریاضیات دیالکتیکی» تقسیم می‌کند:

> ریاضیات دیالکتیکی یك علم دقیق منطقی‌است که‌گزاره‌هایش یا صادق‌اند و یا کاذب، و موجوداتی که درآن با خواص معینی تعریف می‌شوند یا وجود دارند یا وجود ندارند. ریاضیات الگوریتمی وسیلهٔ مسأله حل‌کردن است. دراین نوع ریاضیات ما نه‌فقط می‌خواهیم بدانیم که فلان شیء ریاضی وجود دارد یا نه، بلکه می‌خواهیم اوراق هویتش‌را هم بررسی کنیم. ریاضیات دیالکتیکی یك‌بازی فکری‌است برطبق قواعدی که درموردشان تااندازهٔ زیادی اتفاق‌نظروجود دارد. اماقواعد بازی ریاضیات الگوریتمی برحسب میزان مبرم بودن مسأله‌ای که در دست داریم فرق می‌کند. اگر اصرار می‌کردیم که مسیرها با دقت دیالکتیکی محاسبه شوند هیچگاه نمی‌توانستیم انسانی را بر سطح ماه پیاده کنیم. قواعد این بازی گاهی‌هم به‌مقتضای وسائل محاسبه تغییر می‌کنند. ریاضیات دیالکتیکی ما را به‌تأمل فرا می‌خواند و ریاضیات الگوریتمی به عمل. از ریاضیات دیالکتیکی بصیرت حاصل می‌شود و ریاضیات الگوریتمی ما‌را به‌نتیجه می‌رساند.
>
> (Davis and Hersh, *op.cit*, p. 183.)

ریاضیات نمی‌توانند تصویری از ریاضیات درچهارچوب زمان خود ترسیم کنند.

۶. ما و تاریخ ریاضیات

تاریخ ریاضیات در کشور ما سابقهٔ چندانی ندارد. جز آنچه در زندگینامه‌های قدیمی در بارهٔ زندگی و آثار ریاضیدانان آمده است وجز اشاراتی که درآثار دانشمندانی‌چون بیرونی به‌آثار ریاضیدانان پیشین دیده می‌شود، گذشتگان ما در این زمینه کار چندانی نکرده‌اند، و به‌این اعتبار تاریخ ریاضیات درکشور ما یك رشتهٔ وارداتی است.

این رشتهٔ وارداتی دو شاخه دارد: تاریخ ریاضیات به طورکلی، و تاریخ ریاضیات در ایران و تمدن اسلامی. در زمینهٔ اول کار ما بیشتر ترجمه بوده است و در زمینهٔ دوم ترکیبی از تألیف و ترجمه، و تعداد آثار مستقلی که دراین دو زمینه منتشر شده است دریك تخمین سردستی به‌پنجاه اثر نمی‌رسد. و این تعداد اندك هم محصول کار و همت افراد اندك شمارتری بوده است.

بحث دربارهٔ آثاری را که در بارهٔ تاریخ ریاضیات در اسلام و ایران به‌زبان فارسی وجود دارد، باید به‌فرصت دیگری موکول کرد. ازمیان کتابهای تاریخ ریاضیات عمومی که به‌فارسی ترجمه شده‌اند نیز فقط چهارکتاب‌را برای بررسی انتخاب کرده‌ایم. این چهارکتاب عبارت‌اند از:

۱. دانتزیگ، توبیاس. میراث‌یونان، ترجمهٔ عباس‌کرمان، تهران، نشر توکا، ۱۳۵۶؛
۲. اسمیت، دیوید یوجین. تاریخ ریاضیات، ج ۱، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار، تهران، نشر توکا، ۱۳۵۶؛
۳. ایوز، هاورد و. آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۱، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳؛
۴. استرویك دریك ج. تاریخ فشردهٔ ریاضیات، ترجمهٔ غلامرضا برادران‌خسروشاهی و حشمت‌الله کامرانی، تهران، نشر نو، ۱۳۶۶.

دراین بررسی، ما کاری باکیفیت ترجمهٔ این کتابها نداریم.

میراث یونان را البته نمی‌توان به‌معنای‌دقیق کلمه‌تاریخ‌ریاضیات نامید. این کتاب خواندنی، چنانکه ازنامش برمی‌آید، تحقیقی است در پاره‌ای از چیزهایی که از ریاضیات یونانی برای ما باقی‌مانده؛ و نقطهٔ عزیمت آن هم ریاضیات امروزی است. و هرچند نویسنده در مقدمه هدف خود را «نشان‌دادن صحنهٔ تاریخی» ریاضیات «که برنامهٔ دورهٔ متوسطه آن را مخدوش جلوه می‌دهد» ذکر کرده است، بیشتر سروکار این کتاب با نتایج‌ریاضی است تا با روشها یا مفاهیم ریاضیات یونانی. دوحسن عمدهٔ این کتاب یکی بیان شخصی و نکته‌سنجانهٔ نویسنده است و دیگر گزینشی بودن مطالب آن. نویسنده کتاب خود را با بیان نکته‌هایی در بارهٔ سرشت تمدن و فرهنگ و ریاضیات دلچسب‌تر کرده و به جای پرداختن سرسری به همهٔ «میراث یونان» چند مسألهٔ خاص را با تفصیل بیشتر بررسی کرده است.

تاریخ ریاضیات اسمیت کتابی است‌قدیمی ونمونه‌ای ازنوشته‌های مکتبی در تاریخ‌نویسی علم که تاریخ علم را با شرح حال و بیان کشفیات دانشمندان یکی می‌داند. نویسندهٔ این کتاب از راه خدمات جنبی خود حق بزرگی بر گردن تاریخ علم و تاریخ ریاضیات دارد، اما متأسفانه این حق از بابت نوشتن تاریخ ریاضیات نیست. این کتاب امروزه، هم از لحاظ روش و هم از لحاظ مطالب، بسیار کهنه شده است.

آشنایی با تاریخ ریاضیات ایوز هم البته کتاب‌تازه‌ای نیست اما از بدو انتشار (در ۱۹۵۳) تا کنون پنج بار درآن تجدید نظر شده. ترجمهٔ فارسی بخش اول‌کتاب از روی ویرایش چهارم (۱۹۷۶) صورت گرفته است. عیب کلی این کتاب همان عیب مشترك غالب تاریخهای عمومی ریاضی است که ظاهراً گزیری هم ازآن نیست: بیان همه‌چیز درحجم محدود یك‌کتاب. اما توجه بیش از حد نویسنده به‌جزئیات تاریخی چیزی هم براین عیب ذاتی افزوده و در بعضی جاها این کتاب را به‌جای تاریخ ریاضیات به‌سیاهه‌ای از حوادث تبدیل کرده است. ظاهراً نویسنده خود به این عیب وقوف داشته و به‌همین دلیل درآخر هرفصل قسمتی با عنوان «مطالعهٔ مسأله‌ای» اضافه کرده است. بزرگترین فایدهٔ‌کتاب ایوز هم در این مسأله‌هاست. اما متأسفانه، هرچند درمیان این مسائل هستند مسائلی‌که حساسیت نسبت به روشها و مفاهیم ریاضیات گذشته را در خواننده بیدار و او را مستقیماً در تاریخ ریاضیات گذشته درگیر می‌کنند، اما بسیاری دیگر ازاین مسائل تمرینهایی در ریاضیات متوسط‌اندکه ظاهراً به قصد «تشحیذ ذهن» خواننده، یا خشنود کردن او از اینکه بسیار بیشتر از ریاضیدانان قدیم می‌داند، طرح شده‌اند.

این عوامل باعث شده است که آشنایی با تاریخ ریاضیات، با وجود طرح‌بدیعی که دارد، نمونهٔ‌کتابهای«تاریخ و ریاضیات» باشد، و بیشتر معلومات ریاضی خواننده را افزایش دهد تا بینش تاریخی او را

تاریخ فشردهٔ ریاضیات استرویك نیز هرچند مثل سه‌کتاب دیگر قدیمی است (چاپ اول ۱۹۴۸؛ ترجمهٔ فارسی از روی ویرایش تجدیدنظر شدهٔ ۱۹۶۷ انجام شده است)، چند خصوصیت خوب و بد توأم دارد. یکی اینکه بسیار مختصر است و این اختصار گاه به‌حد ایجاز مخل می‌رسد. دیگر آنکه به‌دلیل این اختصار، آشنایی‌خواننده را با ریاضیات دانشگاهی مفروض می‌گیرد، و بنابراین، بخصوص بخشهای اخیر آن، برای خواننده‌ای که تا حدودی با ریاضیات دانشگاهی آشنا نباشد چندان سودمند نیست. سوم اینکه نویسنده به‌زمینه‌های اجتماعی و «خاستگاههای اجتماعی و فرهنگی» ریاضیات توجه داشته است، هرچند خوشبختانه این توجه او را به‌توجیهات بی‌پایه نمی‌کشاند و درغالب موارد از حد اشاراتی به‌تحولات کلی اجتماعی که اسباب رونق یا کساد بازار علم (و ازجمله ریاضیات) را فراهم آورده فراتر نمی‌رود. تنها در یك مورد است که نویسنده یك ارتباط علی میان یك رویداد ریاضی و زمینهٔ اجتماعی آن کشف کرده، و ظاهراً اهمیت این‌کشف در نظر او به‌حدی بوده است‌که در مقدمهٔ کتاب آن را یکی از اصول راهنمای خود دانسته است، و آن «وجود ارتباط میان‌گرایشهای دوگانهٔ ریاضیات‌رنسانس یعنی‌گرایش جبری-حسابی و گرایش فلوکسیونی، به‌ترتیب با علائق تجاری و مهندسی آن دوره» است. کتاب استرویك از لحاظ توجه به عوامل فرهنگی و فلسفی هم بردوکتاب دیگر برتری دارد.

۷. نتیجه

امروزه تاریخ ریاضیات یك دوران انتقالی را می‌گذراند. تاریخهای ریاضیاتی که به‌فارسی ترجمه شده‌اند به‌یك‌نوع تاریخ‌نویسی‌ریاضیات تعلق دارندکه دورانش دارد به‌سر می‌آید، و درجریان جدیدی‌که در تاریخ‌نویسی ریاضیات پدید آمده است به‌مطالعات خاص و موضعی بیشتر توجه می‌شود تا به نوشتن آثاری‌که همهٔ تاریخ ریاضیات را در برگیرند. از سوی دیگر، هیچ دانشجو و دوستدار ریاضیاتی از مطالعهٔ تاریخ ریاضیات بی‌نیاز نیست و مطالعهٔ جدی تاریخ ریاضیات را نمی‌توان بدون در دست داشتن یك تصویر کلی از آن آغاز

کرد، و این تصویر کلی فقط از تاریخهای عمومی ریاضیات به‌دست می‌آید.

بنابراین، درهمان حال که نیاز به‌تاریخهای عمومی ریاضیات بیشتر می‌شود، توجیه نوشتن این کتابها دشوارتر و تعداد آنها کمتر می‌شود.

ظاهراً چارهٔ این مشکل با کسانی است که تولیدکنندهٔ تاریخ ریاضیات (و ریاضیات)اند؛ ما چون دست‌کم در زمینهٔ تاریخ عمومی ریاضیات مصرف کننده‌ایم باید نیاز خود را، چه برای مطالعهٔ آزاد و چه در کار آموزش، با همین منابع موجود رفع کنیم و درعین حال درصدد برآییم که کمبودهای این منابع را با ترجمهٔ آثار معتبرتر جبران کنیم.

برای یك درس عمومی دو واحدی تاریخ ریاضیات، که طبعاً فقط می‌تواند تاریخ ریاضیات قدیم را شامل شود، نمی‌توان به‌هیچ یك ازاین سه چهارکتاب موجود اکتفا کرد. کتاب استرویك به‌لحاظ جمع و جور بودنش کتاب مناسبی است، اما باید اختصار بیش ازحد آن را با افزودن مقدار معتنابهی از مطالب کتاب ایوز، به‌خصوص پاره‌ای از مسائل مهم آن که ارزش تاریخی دارنـد، جبران کرد. از میراث یونان،و تاریخ ریاضیات اسمیت‌تنها می‌توان به‌عنوان کتابهای جنبی استفاده کرد.

اما بایـد منابع را از این‌که هست بیشتر و متنوعتر کرد. ترجمهٔ تاریخ ریاضیات نسبتاً معتدل و معتبری چون تاریخ ریاضیات[1] بویـر می‌تواند نخستین گام در این راه باشد. اما در درس تاریخ ریاضیات نمی‌توان دانشجو را فقط به‌خواندن کتابهای عمومی برانگیخت، بلکه باید در او شوق مراجعه به‌تحقیقهای دست اول‌تر و نزدیکتر به منابع اصلی را ایجاد کرد. چون همهٔ دانشجویان امکان مراجعه به این آثار را به‌زبانهای اصلی ندارند، ترجمهٔ آثارکسانی‌چون هیث[2] (در زمینهٔ تاریخ ریاضیات یونان) و نویگه باوئر[3] (در زمینهٔ تاریخ ریاضیات مصر و بابل) و وان در وردن[4] (درزمینهٔ تاریخ ریاضیات قدیم به‌طور کلی) امکان دسترسی دانشجو را به‌این‌گونه منابع فـراهم می‌آورد. اهمیت این آثار دراین است که خواننده را با شیوهٔ تحقیق درتاریخ ریاضیات و نحوهٔ قرائت متون گذشته و گویاکردن آنها آشنا می‌کند. شایـد از میان دانشجویانی که به‌این شیوه با تاریخ ریاضیات آشنا می‌شوند محققانی پدید آیندکه خود به‌کارتحقیق درتاریخ ریاضیات، به‌خصوص تاریخ‌ریاضیات دراسلام و ایران‌که بسیار به‌آن نیازمندیم، بپردازند.

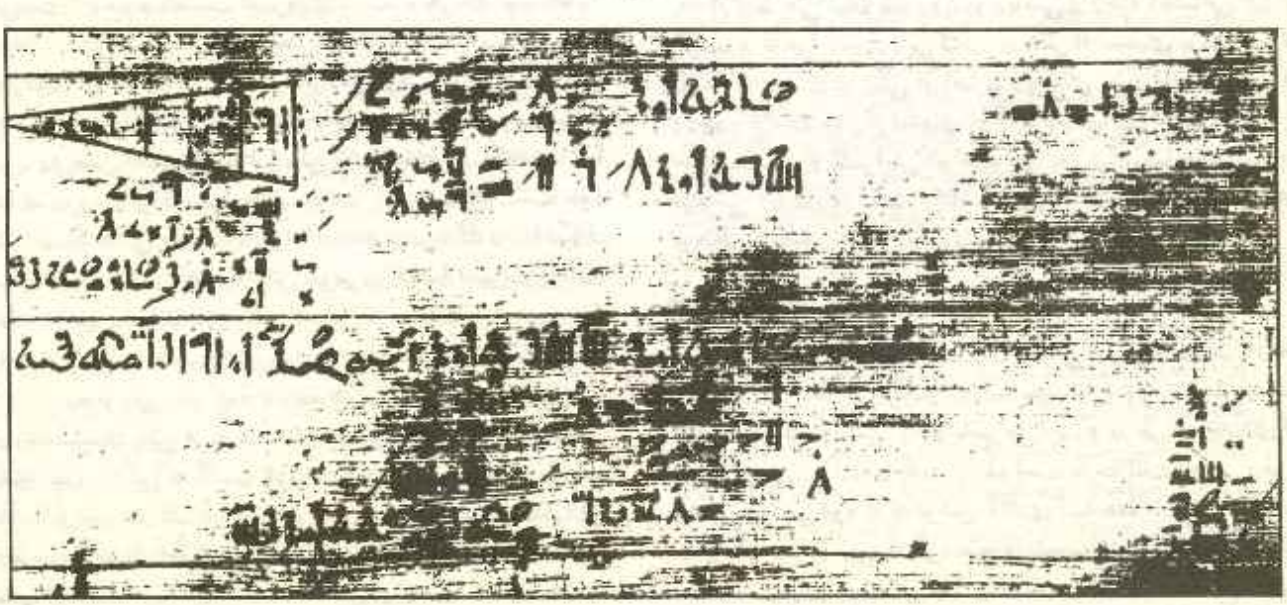
* حسین معصومی همدانی، دانشگاه صنعتی شریف

1. Boyer Carl B., *A History of Mathematics*, New York, 1968.
2. T. H. Heath 3. O. Neugebauer 4. B. L. Van der Waerden

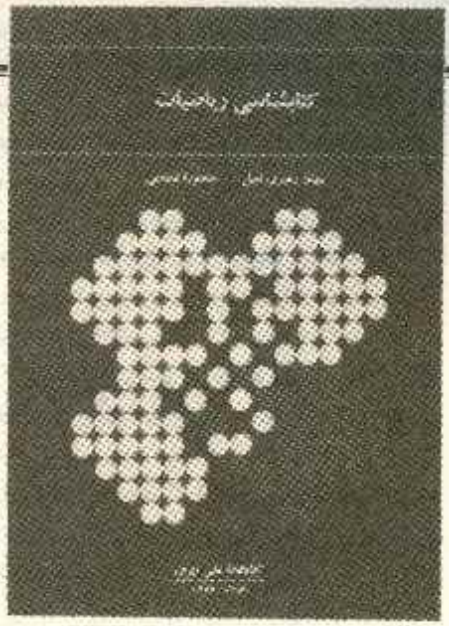
بخشی از پاپیروس رینـد

پاپیروس رینـد یکی از منابع اصلی دربارهٔ ریاضیات مصر باستان است که تاریخ تقریبی نگارش آن ۱۶۵۰ ق.م. است. این متن مشتمل بـر ۸۵ مسأله است و در حکم یك کتاب راهنماست.

این پاپیروس ۵٫۴ متر درازا و ۳۰ سانتیمتر پهنا دارد و توسط مصرشناس اسکاتلندی هنری رینـد (A. Henry Rhind) در سال ۱۸۵۸ در مصر خریداری شده واکنون در موزهٔ بریتانیا نگهداری می‌شود.



کتابشناسی ریاضیات



مهنار رهبری اصل [و] منصورهٔ شجاعی. کتابشناسی ریاضیات. تهران، کتابخانهٔ ملی ایران، ۱۳۶۶. بیست + ۴۵۴ ص. ۹۰۰ ریال.

از تقریباً پانزده‌سال پیش بدین‌سو، تدوین و انتشار کتابشناسیها در ایران آهنگی سریعتر یافته و در بسیاری از موضوعها، کتابشناسیها و فهرستهایی منتشر شده است. به تازگی، اولین کتابشناسی که تماماً به کتابهای ریاضی اختصاص دارد، به‌همت دوتن از کتابداران کتابخانهٔ ملی ایران منتشر شده است. انتشار کتابشناسی ریاضیات برای همهٔ کسانی که به‌هرنحوی با ریاضیات سروکار دارند مغتنم است و کسانی که به‌آن مراجعه کنند، یقیناً متوجه میزان علاقه، دقت و حوصله‌ای که برای این کار صرف شده خواهند شد و آن را ارج خواهند نهاد. لازم به یادآوری است که پیش از انتشار این کتابشناسی، آقای غلامحسین صدری‌افشار در کتابنامهٔ علوم ایران (تهران، مرکز مدارک علمی، ۱۳۵۰) مشخصات ۳۶۷ عنوان کتاب چاپی و خطی فارسی را ثبت کرده بودند.

یکی از مسائل مهمی که کتابشناسیها روشن می‌سازند، بیلان انتشارات درهر رشته است. این روشنگری کمک مؤثری به برنامه‌ریزی برای تألیف و ترجمهٔ کتاب می‌کند. مثلاً همین کتابشناسی نشان می‌دهد که درموضوع ریاضیات درچه زمینه‌هایی بیشتر کتاب منتشر شده و در چه زمینه‌هایی کتابی به‌فارسی منتشر نشده است.

دراین کتابشناسی مشخصات ۲۱۸۹ کتاب ریاضی آورده شده است که ۸۳۶ اثر در بخش عمومی (کتابهای غیردرسی ابتدایی، راهنمایی ومتوسطه) و ۱۱۳۵ اثر در بخش کتابهای‌درسی‌است. از ۸۳۶ عنوان کتاب عمومی، ۲۳۱ عنوان ترجمه و ۶۰۵ عنوان تألیف است. نخستین کتاب ریاضی درسال ۱۲۳۵ هـ. ش.، حدود چهارسال پس از افتتاح‌دارالفنون‌درتهران‌چاپ‌شده‌است. این کتاب شرح‌خلاصة‌الحساب شیخ بهایی است. در همان سال نخستین ترجمه از کتابهای فرنگی، کتاب هندسه نوشته الکساندر بهلر نیز در تهران به طبع رسیده است. اطلاعات فوق از بررسی تحلیلی کوتاهی که مؤلفان در بخشی از مقدمهٔ اثر آورده‌اند نقل شده است. به‌جا بودکه دراین تحلیل روند انتشار کتابهای‌ریاضی و افت وخیزهای‌آن نیز مورد بررسی قرارمی گرفت. یعنی نشان داده می‌شد که در سالها ویا دست‌کم دهه‌های مختلف‌میزان انتشار کتابهای ریاضی چه اندازه بوده است.

مشخصات کلیهٔ کتابهای چاپی منتشر شده‌ازآغاز تا سال ۱۳۶۴ دراین کتابشناسی‌ثبت‌شده‌است. زبان کتابها، به‌استثنای‌چندکتاب‌عربی، فارسی است. ناگفته نماند که فهرست کتابهای ریاضی ایران در سال ۱۳۶۵ که در واقع دنبالهٔ این کتابشناسی است در شمارهٔ گذشته نشر ریاضی منتشر شده است.

دربررسی کوتاهی که ازاین کتابشناسی کردیم چند نکته به‌نظرمان رسید که امیدواریم ذکر آنها دربهبود ویرایش بعدی این کتابشناسی مؤثر باشد.

۱. مؤلفان این کتابشناسی در جستجوی تعریف ریاضیات به بعضی از فرهنگهای فارسی مراجعه‌کرده‌اند. در این فرهنگها، تعاریف علمی دقیق و روزآمد نیست و اگر مراجعه‌کننده واقعاً نیازمند تعریف دقیقی باشد باید به دایرةالمعارفهای معتبر بین‌المللی رجوع کند. ولی دراین مورد خاص، نیازی‌هم به‌چنین استقصایی نبوده است؛ تا جایی که به‌کار تدوین کتابشناسی مربوط می‌شود، کافی است تصوری کلی ازریاضیات مدنظر باشد؛ مثلاً دراین حدکه ریاضیات شامل مباحثی است دربارهٔ عدد، کمیت، فرم، وشکل. تحصیلکرده‌ها وحتی دانش‌آموزان، باهمین تصور، کتاب ریاضی را از غیر ریاضی تمیز می‌دهند.

۲. تقسیم‌بندی کتابهای‌این کتابشناسی به«متون‌عمومی»و«کتابهای درسی» تقسیم‌بندی مناسبی نیست. شیوهٔ رده‌بندی دیویی نیز برای این کتابشناسی که در زمینهٔ علوم است چندان دقیق و جوابگو نیست. در سال ۱۹۸۵، انجمن ریاضی آمریکا (AMS) مباحث ریاضی را به‌حدود ۶۰ عنوان اصلی و صدها عنوان فرعی تقسیم‌کرده است. اگر این تقسیم‌بندی مبنا قرار می‌گرفت، رده‌بندی این کتابشناسی دقیقتر و قابل استفاده‌تر می‌بود.

۳. مشخصات کتاب تئوری مقدماتی اعداد مرحوم دکتر مصاحب برابر شماره ۳۷۸ دراین‌کتابشناسی ثبت شده است. اما نه درمقابل موضوع «اعداد» و نه دربرابر موضوع «حساب» به‌شمارهٔ آن ارجاع داده نشده است. معلوم نیست که‌کتاب از نظر تهیه‌کنندگان موضوع دیگری دارد یا اینکه شمارهٔ آن دربرابر موضوعها ازقلم افتاده است.

۴. معمولاً در هرکتابشناسی به‌دلیل دشواریهایی که پیداکردن کتابها و مشخصات آنها دارد (از جمله نقص مجموعهٔ کتابخانه‌ها، در دسترس نبودن فهرستهای‌کامل از ناشران، عدم ثبت‌کلیهٔ انتشارات در کتابشناسی ملی و . . .) تعدادی‌ازکتابها از قلم می‌افتد. این‌کتابشناسی نیز طبیعتاً مستثنی نیست. دراینجا به‌تعدادی‌ازکتابهایی که مشخصات آنها دراین کتابشناسی آورده نشده اشاره می‌کنیم: شرح ریاضیات جدید چهارم تألیف ارسلان‌شادمان و دیگران(علوی،۱۳۶۱)، اعداد مختلط و بازتابهای متشابه‌الزاویه نوشتهٔ مارکوشویچ (میر، ۱۹۸۵)،اسرار مکعب روبیک نوشتهٔ سیاوش‌شهشهانی (نشر نو، ۱۳۶۱)، توابع خاص فیزیک‌ریاضی ترجمهٔ غلامرضا برادران‌خسروشاهی [و دیگران] (مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲)، وهمچنین ده‌گزارش ازگزارشهای کنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی.

اشاره به چند نکتهٔ صوری نیز ضروری است. بجاست کسانی که می‌خواهند به‌کار تدوین و چاپ کتابشناسی بپردازند نگاهی به کارهای منتشر شدهٔ پیشین بکنند، و نقاط قوت و ضعف آنها را بشناسند. این توجه باعث بهتر شدن کیفیت کار بسا استفاده از تجربیات دیگران خواهد شد.

الف) کتابشناسیها معمولاً با حروف ریز چاپ می‌شوند و شکل صفحه‌آرایی‌شان اغلب دو ستونی است. این شیوهٔ حروف‌چینی و صفحه‌آرایی از حجم کتاب می‌کاهد و صفحات را زیباتر می‌کند. همچنین برخلاف تصور، بازیابی مطالب را ساده‌تر می‌کند. در این

کتابشناسی در هر صفحه حداکثر مشخصات هفت عنوان کتاب آورده شده، حال آنکه با رعایت نکات گفته شده،می‌شد درهرصفحه مشخصات حدود سی کتاب را آورد. یعنی حجم کتاب تقریباً به یك چهارم حجم فعلی آن کاهش می‌یافت.

ب) درنمایه، وقتی عددها بدون فاصله بدنبال هم می‌آیند، عدد آغازین و عدد پایانی با خط تیره (ـ) ازهم تفکیك می‌شوند و لازم نیست که تمام عددهایی که بین این دو عدد قرار دارند آورده شوند. مثلاً اگر بخواهیم به تمام شماره‌های ۱ تا ۲۰ ارجاع دهیم، به‌جای نوشتن ۱، ۲، ۳،... می‌توان نوشت ۱ـ۲۰. این قرارداد درنمایهٔ این کتابشناسی رعایت نشده و حجم آن با آوردن عددهای پی در پی قدری افزایش یافته است.

ج) در عنوان نمایهٔ پایانی کتاب واژهٔ «موضوع» از قلم افتاده و اگر خواننده‌ای مقدمه را نخوانده باشد نمی‌فهمد که نمایه حاوی موضوع کتابها نیز هست.

د) درنمایهٔ کتاب بهتر بود عنوان کتابها وموضوعها ونام‌نویسندگان و مترجمان با حروفی متمایز ازهم چاپ می‌شد.

ه) دربارهٔ تعداد کتابهایی که مشخصاتشان دراین کتابشناسی آمده، نوشته شده: «مشخصات ۲۱۸۹ عدد کتاب...» عدد واژهٔ دقیقی در این مورد نیست. بهتر بود به اقتضای شیوهٔ تنظیم از واژه‌های «جلد» یا «عنوان» استفاده می‌شد. اگر گفته‌شود دوهزار عنوان کتاب،یعنی اینکه کتابی که ده جلد دارد یك‌عنوان محسوب شده و ذیل یك شماره ثبت شده است و اگر گفته شود دوهزار جلد،یعنی هرجلد از آن کتاب ذیل یك شماره ثبت شده است.

بدیهی است که ذکر این نکته‌ها به‌هیچ روی از اهمیت و ارزش کار مؤلفان آن نمی‌کاهد. امیدواریم که‌فهرست نسخه‌های خطی فارسی ریاضی نیز کـه اهمیت ویـژه‌ای دارد، و همچنین فهرست مقاله‌های ریاضی مندرج درنشریه‌های فارسی به‌همت ایشان فراهم شود.

فرخ امیرفریار، غلامرضا برادران خسروشاهی

ترکیبیات شمارشی

جورج اندروز

Enumerative Combinatorics, Vol 1, Richard P. Stanley, Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey, xi+306 pp $ 42.95

پروفسور استانلی در ابتدای پیشگفتارش به‌اختصار شرح می‌دهد کـه ترکیبیات شمارشی کلاً دربارهٔ چیست:

> ترکیبیات شمارشی با شمارش تعداد اعضای یك مجموعـهٔ متناهی S سروکار دارد. این تعریف، به‌صورتی که بیان شد، مطلب چندانی در مورد موضوع بیان نمی‌کند، زیرا واقعاً هرمسألهٔ ریاضی را می‌تـوان در قالب چنین عباراتی بیان کرد. دریك مسألهٔ شمارشی‌واقعی، اعضای S معمولاً دارای تعریف ترکیبیاتی نسبتاً ساده‌ای هستند و ساختٔ اضافـی چندانی ندارند. بدیهی است که S دارای اعضای بسیاری است، و مسألـهٔ اصلی، شمارش (یا براورد) تعامـی این اعضاست و نه، مثلاً، پیداکردن عضو خاصی ازآن.

گرچه این‌تعریف یقیناً دقیق‌است،ولی احتمالاً برای‌افراد ناوارد روشن نیست که چرا دیگران به‌این موضوع علاقه‌مندند، و چرا بایـد این موضوع، مرکـز زمینهٔ گسترده‌ای ازتحقیقات ریاضی باشد. البته، در اغلب موارد جاذبهٔ ذاتی مسائل، انگیزهٔ تحقیقات ریاضی است، و مسلماً درمورد ترکیبیات شمارشی، این مطلب مصداق دارد. با وجود این، لازم به‌تذکر است کـه ترکیبیات شمارشی بازار مصرف وسیعی نیز دارد. بـرای مثال، تحلیل ریاضی زمـان لازم بـرای اجـرای الگوریتمهای کامپیوتری مسلماً یك مسألهٔ ترکیبیات شمارشی است.در واقـع در زمینهٔ تحلیل الگوریتمها، کتابهـای کنوث [۸]، کنوث و گرین [۹] و پوردوم و براون [۱۲] کتابهایی هستند کـه به‌جنبه‌های گوناگون ترکیبیات شمارشی اختصاص دارنـد. درفیزیك، ملاحظـه می‌کنیم که مسائل‌مکانیك آماری، درتحلیل نهایی، براوردهای مجانبی شمارشهای مربوط به‌ساختهای ترکیبیاتی است. ازاین‌بابت،کار اخیر در زمینهٔ الگوهای دقیقـاً حل‌شده عمدتاً بر ترکیبیات شمارشی متکی است. [۲، فصل ۱۳][۱۵]. بالاخره،عجیب نیست که مسائل ترکیبیات شمارشی‌جالبی دربسیاری‌ازشاخه‌های‌ریاضی‌ـازنظریهٔ نمایش گروهها [۱۰] گرفته تا آنالیز [۱] ـ مشاهده می‌شوند.

شاید بهترین‌راه نگرش به‌علم ترکیبیات‌جدید، بازگشت به‌مشاهدات یکی از پیشگامان آن، پرسی الکساندر مك‌ماثون، باشد. متن زیر از خطابهٔ مك ماثون درسال ۱۹۰۱ ـ زمانی که او به‌عنوان رئیس جامعهٔ بریتانیایی[1] انتخاب‌شده‌بود ـ گرفته شده است [۱۱، صفحه‌های ۸۸۹ـ۸۹۰]: مك ماثون با قدرت توضیح می‌دهـد کـه چگونه زمینه‌های توسعه نیافتهٔ ریـاضیات (وی یقیناً به موضوع ترکیبیات می‌اندیشیده است) ازشاخه‌های اصلی‌وکلاسیك‌ریاضیات بهره می‌گیرند و، به‌نوبهٔ خود، آنها را غنی می‌سازند.

> ممکن است مبحثی را محدود وگسترش نیافته قلمدادکنند خواه از این‌رو که به دلایلی محققین را جذب نکرده است ـ درحقیقت زمین بکری‌است که منتظر کشاورزماهری‌است ـ یا به‌این دلیل‌که مبحث فوق‌العاده مشکلی است و درمقابل کوششهایی کـه برای فهم آن انجام گرفته مقاومت کرده است. . . ولی محدود بودن یك مبحث به‌این معنی نیست‌که برای بررسی آن تنها بایـد از روشهای محدود و منحصر به آن مبحث استفاده کرد. نظریهٔ اعداد را شاهد می‌آورم که، تقریباً تا همین‌اواخر، موضوعی با دامنه‌ای کوچك بود ودرشاخه‌های دیگر علوم،کاربردی محدود داشت. مسائلی‌که به‌طور طبیعی پیش می‌آمدند ونیز مسائلی‌که‌زاییدهٔ تخیلات متفکران بزرگ بودند، مشکلات زیـادی در بـر داشتند. به نظر می‌رسید آن نوع نظم و قانون، جزئی یا کلی، کـه محققان عادت داشتند در عرصهٔ کمیات پیوسته ببینند، در این محدوده وجود نـدارد. گاه حین‌کشف منطقه‌ای معلوم می‌شد کـه در آنجـا دامهای بسیاری در انتظـار افـراد غیرمحتاط است. محققان بایستی درمورد خطرناشی ازتعمیم عجولانـه درسهای بسیاری می‌آموختند و آنها را به‌خاطر می‌سپردند. در بسیاری موارد، عقب‌گرد ازگامهای نادرست لازم می‌شد. راههای بسیاری کـه در بـررسی مقدماتی در

1. British Association

کتابشناسی در هر صفحه حداکثر مشخصات هفت عنوان کتاب آورده شده، حال آنکه با رعایت نکات گفته شده،می‌شد درهرصفحه مشخصات حدود سی کتاب را آورد. یعنی حجم کتاب تقریباً به یك چهارم حجم فعلی آن کاهش می‌یافت.

ب) درنمایه، وقتی عددها بدون فاصله بدنبال هم می‌آیند، عدد آغازین و عدد پایانی با خط تیره (ـ) ازهم تفکیك می‌شوند و لازم نیست که تمام عددهایی که بین این دو عدد قرار دارند آورده شوند. مثلاً اگر بخواهیم به تمام شماره‌های ۱ تا ۲۰ ارجاع دهیم، به‌جای نوشتن ۱، ۲، ۳،... می‌توان نوشت ۱ـ۲۰. این قرارداد درنمایهٔ این کتابشناسی رعایت نشده و حجم آن با آوردن عددهای پی در پی قدری افزایش یافته است.

ج) در عنوان نمایهٔ پایانی کتاب واژهٔ «موضوع» از قلم افتاده و اگر خواننده‌ای مقدمه را نخوانده باشد نمی‌فهمد که نمایه حاوی موضوع کتابها نیز هست.

د) درنمایهٔ کتاب بهتر بود عنوان کتابها وموضوعها ونام‌نویسندگان و مترجمان با حروفی متمایز ازهم چاپ می‌شد.

ه) دربارهٔ تعداد کتابهایی که مشخصاتشان دراین کتابشناسی آمده، نوشته شده: «مشخصات ۲۱۸۹ عدد کتاب...» عدد واژهٔ دقیقی در این مورد نیست. بهتر بود به اقتضای شیوهٔ تنظیم از واژه‌های «جلد» یا «عنوان» استفاده می‌شد. اگر گفته‌شود دوهزار عنوان کتاب،یعنی اینکه کتابی که ده جلد دارد یك‌عنوان محسوب شده و ذیل یك شماره ثبت شده است و اگر گفته شود دوهزار جلد،یعنی هرجلد از آن کتاب ذیل یك شماره ثبت شده است.

بدیهی است که ذکر این نکته‌ها به‌هیچ روی از اهمیت و ارزش کار مؤلفان آن نمی‌کاهد. امیدواریم که‌فهرست نسخه‌های خطی فارسی ریاضی نیز کـه اهمیت ویـژه‌ای دارد، و همچنین فهرست مقاله‌های ریاضی مندرج درنشریه‌های فارسی به‌همت ایشان فراهم شود.

فرخ امیرفریار، غلامرضا برادران خسروشاهی

ترکیبیات شمارشی

جورج اندروز

Enumerative Combinatorics, Vol 1, Richard P. Stanley, Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey, xi+306 pp $ 42.95

پروفسور استانلی در ابتدای پیشگفتارش به‌اختصار شرح می‌دهد کـه ترکیبیات شمارشی کلاً دربارهٔ چیست:

> ترکیبیات شمارشی با شمارش تعداد اعضای یك مجموعـهٔ متناهی S سروکار دارد. این تعریف، به‌صورتی که بیان شد، مطلب چندانی در مورد موضوع بیان نمی‌کند، زیرا واقعاً هرمسألهٔ ریاضی را می‌تـوان در قالب چنین عباراتی بیان کرد. دریك مسألهٔ شمارشی‌واقعی، اعضای S معمولاً دارای تعریف ترکیبیاتی نسبتاً ساده‌ای هستند و ساختٔ اضافـی چندانی ندارند. بدیهی است که S دارای اعضای بسیاری است، و مسألـهٔ اصلی، شمارش (یا براورد) تعامـی این اعضاست و نه، مثلاً، پیداکردن عضو خاصی ازآن.

گرچه این‌تعریف یقیناً دقیق‌است،ولی احتمالاً برای‌افراد ناوارد روشن نیست که چرا دیگران به‌این موضوع علاقه‌مندند، و چرا بایـد این موضوع، مرکـز زمینهٔ گسترده‌ای ازتحقیقات ریاضی باشد. البته، در اغلب موارد جاذبهٔ ذاتی مسائل، انگیزهٔ تحقیقات ریاضی است، و مسلماً درمورد ترکیبیات شمارشی، این مطلب مصداق دارد. با وجود این، لازم به‌تذکر است کـه ترکیبیات شمارشی بازار مصرف وسیعی نیز دارد. بـرای مثال، تحلیل ریاضی زمـان لازم بـرای اجـرای الگوریتمهای کامپیوتری مسلماً یك مسألهٔ ترکیبیات شمارشی است.در واقـع در زمینهٔ تحلیل الگوریتمها، کتابهـای کنوث [۸]، کنوث و گرین [۹] و پوردوم و براون [۱۲] کتابهایی هستند کـه به‌جنبه‌های گوناگون ترکیبیات شمارشی اختصاص دارنـد. درفیزیك، ملاحظـه می‌کنیم که مسائل‌مکانیك آماری، درتحلیل نهایی، براوردهای مجانبی شمارشهای مربوط به‌ساختهای ترکیبیاتی است. ازاین‌بابت،کار اخیر در زمینهٔ الگوهای دقیقـاً حل‌شده عمدتاً بر ترکیبیات شمارشی متکی است. [۲، فصل ۱۳][۱۵]. بالاخره،عجیب نیست که مسائل ترکیبیات شمارشی‌جالبی دربسیاری‌ازشاخه‌های‌ریاضی‌ـازنظریهٔ نمایش گروهها [۱۰] گرفته تا آنالیز [۱] ـ مشاهده می‌شوند.

شاید بهترین‌راه نگرش به‌علم ترکیبیات‌جدید، بازگشت به‌مشاهدات یکی از پیشگامان آن، پرسی الکساندر مك‌ماثون، باشد. متن زیر از خطابهٔ مك ماثون درسال ۱۹۰۱ ـ زمانی که او به‌عنوان رئیس جامعهٔ بریتانیایی[1] انتخاب‌شده‌بود ـ گرفته شده است [۱۱، صفحه‌های ۸۸۹ـ۸۹۰]: مك ماثون با قدرت توضیح می‌دهـد کـه چگونه زمینه‌های توسعه نیافتهٔ ریـاضیات (وی یقیناً به موضوع ترکیبیات می‌اندیشیده است) ازشاخه‌های اصلی‌وکلاسیك‌ریاضیات بهره می‌گیرند و، به‌نوبهٔ خود، آنها را غنی می‌سازند.

> ممکن است مبحثی را محدود وگسترش نیافته قلمدادکنند خواه از این‌رو که به دلایلی محققین را جذب نکرده است ـ درحقیقت زمین بکری‌است که منتظر کشاورزماهری‌است ـ یا به‌این دلیل‌که مبحث فوق‌العاده مشکلی است و درمقابل کوششهایی کـه برای فهم آن انجام گرفته مقاومت کرده است. . . ولی محدود بودن یك مبحث به‌این معنی نیست‌که برای بررسی آن تنها بایـد از روشهای محدود و منحصر به آن مبحث استفاده کرد. نظریهٔ اعداد را شاهد می‌آورم که، تقریباً تا همین‌اواخر، موضوعی با دامنه‌ای کوچك بود ودرشاخه‌های دیگر علوم،کاربردی محدود داشت. مسائلی‌که به‌طور طبیعی پیش می‌آمدند ونیز مسائلی‌که‌زاییدهٔ تخیلات متفکران بزرگ بودند، مشکلات زیـادی در بـر داشتند. به نظر می‌رسید آن نوع نظم و قانون، جزئی یا کلی، کـه محققان عادت داشتند در عرصهٔ کمیات پیوسته ببینند، در این محدوده وجود نـدارد. گاه حین‌کشف منطقه‌ای معلوم می‌شد کـه در آنجـا دامهای بسیاری در انتظـار افـراد غیرمحتاط است. محققان بایستی درمورد خطرناشی ازتعمیم عجولانـه درسهای بسیاری می‌آموختند و آنها را به‌خاطر می‌سپردند. در بسیاری موارد، عقب‌گرد ازگامهای نادرست لازم می‌شد. راههای بسیاری کـه در بـررسی مقدماتی در

1. British Association

فاصله‌ای کوتاه، مستقیم به نظر می‌رسیدند در بررسیهای بعدی معلوم می‌شد که ناگهان تغییر جهت می‌دهند و به مسیرهای متعددی منتقم می‌گردند که به شیوه‌ای نامنظم درسرزمینی با مشکلات‌طبیعی‌فزاینده‌گسترده‌اند. چندنقطهٔ کمرنگ هم از دور دیده می‌شدند. قله‌هایی که از آنها امکان تماشای بخش قابل‌ملاحظه‌ای از منطقه فراهم باشد اندك و نیز بی‌اهمیت بودند. ابزار موجود برای‌کاوش در سرزمینی با این ویژگیهای طبیعی، نامناسب بود. سرزمین نظریهٔ اعداد، منطقهٔ ممنوعه بود. مردان بسیاری ازاین پیکرد با دستی خالی مأیوس بازمی‌گشتند یا به‌سوی گردابی شبیه به‌گرداب مالستروم[1] کشیده و دلشکسته می‌شدند. ولی اوایل قرن‌گذشته طلیعهٔ روز روشنتری‌نمایان شد. عده‌ای از نوابغ بزرگ ــ اژاندر، گاوس، آیزنشتاین، استفن اسمیت و دیگران ــ موفق شدند با جرح و تعدیل برخی از ابزارهای تحقیق در کمیتهای پیوسته، آنها را در مورد کمیتهای ناپیوسته به‌طورمؤثر به‌کاربرند. این جرح و تعدیلها چنان ماهیت دشوار و استادانه‌ای داشتندکه امروز، درآغاز قرن جدید، باعث شگفتی هستند و، باید اضافه‌کنم که، مسبب شعف علاقه‌مندان نیز می‌باشند. واقعیت این است که علاقه‌مندان معدودند. نیل به‌موضع مساعدکار دشواری است که هم فداکاری می‌طلبد و هم شهامت. تشبیهی جغرافیایی از آبشارهای هامیلتون نزدیك خلیج هامیلتون در لابرادور به‌خاطرم می‌آید. اطلاع‌یافته‌ام که دیدن این‌منظرهٔ طبیعی‌شگفت‌انگیز، زمان و پیماکی‌زیادی‌می‌طلبد و به‌چنان تدارکات جنبی نیازمند است که چندسال قبل تنها چشمان نه سفیدپوست به‌جمال این آبشارها که زیباتر ازآبشارهای نیاگارا هستند روشن شد. تلاشهای ریاضیدانان نامبرده سبب شکل‌گیری قسمت بزرگی از اصول نظریهٔ اعداد شد. مشخص شدکه بیشتر مسائلی‌که در نظر ظاهر بنیان درسطح موضوع قرار دارند، در واقع ریشه درعمق‌آن دارند و تنها وقتی می‌توان با آنها پیکارکردکه مسائلی‌که در نگاه اول بسیارپیچیده‌تر به‌نظرمی‌آیند حل‌شده باشند. اینك سرایی که باعث بد جلوه دادن چشم‌انداز و تیره شدن دورنما بود تا حدی از بین رفته است، برخی از نقاط کمرنگ واضح گردیده‌اند، و چند قلهٔ مرتفع که دیدگاه وسیعی فراهم می‌آورند کشف یا ساخته شده‌اند. آنچه می‌خواهم متذکر شوم این است که این متخصصین نظریهٔ اعداد به‌این دلیل دراین‌کار موفق‌شدندکه، به‌معنای‌خاص‌کلمه، اصلاً متخصص نبودند. موفقیت آنها تنها به‌دلیل دانش‌گسترده، آگاهی دقیق از ابزارهایی‌که درشاخه‌های دیگر مؤثربوده‌اند، و ادراك آن اصول زیربنایی که سبب مؤثر واقع شدن این ابزارها درموارد خاص بوده، حاصل شده است.

مك‌ماثون سپس به‌ترکیبیات، موضوعی‌که درطول زندگی برآن مسلط بود، می‌پردازد [۱۱، صفحه‌های ۸۹۱–۸۹۲].

آنالیز ترکیبیاتی را می‌توان موضوعی دانست که ناحیهٔ وسیعی‌را بین‌جبر کمیتهای پیوسته و جبر کمیتهای ناپیوسته اشغال‌کرده است. این موضوع تا حدی علم شمارش، یعنی علم اندازه‌گیری با اعداد صحیح است، در صورتی که جبر کمیتهای پیوسته با اندازه‌گیری کمیتهایی سروکار دارد که با نمونه‌های بسیارکوچك تغییر می‌کنند. آنالیز ترکیباتی همچنین به‌آرایشهایی مربوط می‌شودکه درآنها اختلافهای کمیت و وضعیت نسبی در یك، دو یا سه بعد، عامل اصلی هستند. مسأله عمدهٔ آن یافتن راههای ارتباطی بین علم کمیتهای پیوسته و علم‌کمیتهای‌ناپیوسته است؛ ازیك‌طرف، ما را قادر می‌سازدکه با روشهای‌علم دکمیتها و وضعیتهایی که به‌طورپیوسته تغییر می‌کنند، کمیتهایی را مطالعه‌کنیم که، اندازه یا وضعیت آنها، قطعه‌قطعه تغییرمی‌کنند، و از طرف دیگر ما را قادرمی‌سازدکه برای‌حل مسائل‌پیوستگی از وسائل مربوط به‌ناپیوستگی استفاده‌کنیم.

نمی‌توان گفت که‌موضوع «ترکیبها» در روزهای‌نخستین احیای آموزش ریاضی در اروپا، برپایه‌ای علمی استوار بود. این موضوع به صورت تعدادی مسألهٔ منفرد مربوط به آرایش، که توسط شمارش صرف حل می‌شدند، عرضه گردید. حل آنها کمکی به پیشرفت کلی موضوع نمی‌کرد، بلکه صرفاً در رابطه با مسائل خاص ارزش داشت. ولی وقتی دمیزار، برنولی و دیگران تشخیص دادند که می‌توان علم احتمال را برپایهٔ شمارش و آرایش بنا نهاد، زندگی و فرم به‌هم درآمیختند. یاکوب برنولی در۱۷۱۳، درمقاله‌ای اصول بنیادی‌حساب احتمالات را بنیان نهاد. پیشرفت منظم واصولی در زمینهٔ برخی ازمسائلی‌که به‌افراز اعداد بستگی دارد، تنها وقتی امکان‌پذیر شد که اویلر نشان‌داد که اتحاد $x^{a+b}=x^a\cdot x^b$ جمع‌حسابی را به‌ضرب جبری، و به‌عکس، بدل می‌کند. براساس این مفهوم، اویلر نظریه‌ای دربارهٔ توابع مولد ایجاد کرد که جواب صوری بسیاری از مسائل، وابسته به گسترش آن بود. متعاقب آن و بر پایهٔ همین ایده، کیلی و سیلوستر کار خود را ارائه کردند که منجر به‌دستاوردهای پیشرفته‌تری شد. ترکیبهای تحت شمارش، کلاً به‌موضوعی مربوط است‌که می‌توان آن را آرایشهای تحت قوانین معین روی یك خط نامید. نتایج حاصل از نظرجبری‌اهمیت داشتند زیرا پرتویی از روشنایی برنظریهٔ سریهای جبری می‌افکندند. ولی دستهٔ بزرگ دیگری از مسائل [مربوط به‌آرایه‌ها] دست نخورده باقی ماند، وخارج ازحوزه و ورای توانایی این روش محسوب می‌شد... از تذکرات فوق چنین استنباط می‌شود که، من هرشته از کار علمی را، حتی اگرمحدود یا مهجور باشد، موضوع مناسبی برای‌تحقیق می‌انگارم. من اعتقاد ندارم‌که هیچ‌شاخه‌ای از علم، یاموضوعی از کار علمی، بی‌ارتباط با شاخه‌های دیگر باشد. اگر شاخه‌ای چنین به‌نظر برسد، وحدت علم ایجاب می‌کندکه مخصوصاً آن شاخه بررسی شود. بیایان برهوتی‌که ناحیه‌های متفاوت را ازیکدیگر جدا سازد و هیچ جاده‌ای از روی‌آن نگذرد،وجود ندارد. یکی‌از بخشهایی‌که چندسال قبل تا اندازه‌ای دراین‌حالت انزوا به‌سر می‌برد، بخشی بود که‌مسائلی ازنوع مربعهای‌سحرآمیز باستانی‌را شامل‌می‌شد و امروزه یك بخش ریاضیات محض است.

مك ماثون سخنان خود را با شرح مختصری ازکارش، که تعمیم نظریهٔ افراز و شمارش آرایه‌های مستطیلی است، به‌پایان می‌رساند.

در بیست‌سال گذشته، محققین بسیاری برنامهٔ ترکیبیاتی موردنظر مك‌ماثون را فوق‌العاده پیش برده‌اند. پیشقراول این‌کار «مکتب‌روتا در

---

۱. گرداب معروف ساحل غربی نروژ که کشتیها را به‌داخل خود می‌کشد.

مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست» است. جیان ـ کارلو روتا[1] مؤسس آن است و اینک آن را مشترکاً با همکاری دانشجویش، ریچارد استانلی، رهبری می‌کنند. استانلی احتمالاً بیش از هر ریاضیدان زندهٔ دیگری، کار بنیادی مك‌ماثون را درك کرده است و نظریه‌های ریاضی درخشانی را به‌وجود آورده که از بلندپروازترین رویاهای مك ماثون هم فراتر رفته است. احساس می‌کنم منصفانه است اگر بگوییم که سخنان شیوای مك ماثون دربارهٔ پیشرفتهای قرن نوزدهم نظریهٔ اعداد را اینك دربارهٔ ترکیبیات شمارشی هم می‌توان گفت.

به‌ویژه، وقتی مك ماثون اشاراتی به مربعهای سحرآمیز می‌کرد، مسلماً نمی‌توانست اثبات شگفت‌انگیز استانلی از حدس آنند ـ دومیر ـ گوپتا[2] در مورد مربعهای سحرآمیز [۱۴] را تجسم کند. ماحصل این جهش بزرگ، نظریه‌ای است با عمق فزاینده که جبر تعویض‌پذیر و مبحث ترکیبیات را به‌یکدیگر ارتباط می‌دهد؛ شاید برجسته‌ترین موفقیت در این زمینه، اثبات استانلی از «حدس کران بالا» باشد که جایزهٔ پولیا را نصیب او کرد.

از اقبال جامعهٔ ریاضی، اینك استانلی یك کتاب درسی بسیار خوب برای دوره‌های بالاتر از کارشناسی نوشته است که بسیاری از موضوعات مورد علاقهٔ مك ماثون را معرفی می‌کند.

فصل ۱ پاسخی بسیار خواندنی به عنوان این فصل، «ترکیبیات شمارشی چیست؟»، می‌دهد. این فصل شامل بررسی زیبایی است از آمار جایگشتی، موضوعی که مك ماثون آن را به‌طور مبسوط مورد بحث قرار داد. این فصل با شرح جذابی از «۱۲ دوازده لایهٔ روتا پایان می‌پذیرد.

فصل ۲، روشهای غربالی، نشان می‌دهد که از اصل کلاسیك «شمول ـ عدم شمول» تا چه اندازه فراتر رفته‌ایم. در اینجا نیز ایده‌های اولیهٔ مك ماثون (مثال ۴.۲.۲) عرضه می‌شود، و پیشرفتهای بعدی موضوع درمتن کتاب و در تمرینهای فراوان وجالب آن معرفی می‌گردد.

فصل ۳، ترکیبیات مجموعه‌های جزئاً مرتب را به‌طور مبسوط شرح می‌دهد. در اینجا نیز با سبکی بسیار خواندنی، موضوع به‌طور عمیق معرفی می‌شود. همان‌گونه که استانلی درصفحه‌های ۱۴۹ـ۱۵۰ متذکر می‌شود: «توسعهٔ منظم و اصولی مجموعه‌های جزئاً مرتب و مشبکه‌ها در قالب ترکیبیات، تا قبل از ارائه مقالهٔ روتا [۱۴] در ۱۹۶۴ آغاز نشد.»

فصل ۴، توابع مولد گویا، توصیف بسیار خوبی از این موضوع را که اکنون خود استانلی بسر آن تسلط دارد عرضه می‌کند. حدس آنند ـ دومیر ـ گوپتا هم در قضیهٔ ۱۹.۶.۴ صفحهٔ ۲۴۲ ارائه می‌شود.

بنابراین، کتاب به‌لحاظ تاریخی بسیار با اهمیت است و آشنایی با بسیاری از موضوعهای آنالیز ترکیباتی را برای همگان ممکن می‌سازد. در این کتاب تعدادی قله «که از فراز هریك می‌توان بخش قابل‌ملاحظه‌ای ازمنطقه را نظاره کرد» معرفی می‌شود. به‌علاوه، یقیناً این کتاب درزمینهٔ ترکیبیات به‌صورت کتاب استاندارد درسی مقدماتی برای دوره‌های بعد از کارشناسی در خواهد آمد. در این کتاب تعداد زیادی تمرین در ۲۵ صفحه و حل آنها در ۶۲ صفحه داده شده است.

ممکن است انتقاد شود که این کتاب تنها به‌یك جنبه از موضوع چندین جنبه‌ای ترکیبیات شمارشی می‌پردازد. استانلی به‌آسانی و به‌درستی درصفحهٔ ۱۵۱ به‌این انتقاد پاسخ می‌دهد:

برای وحدت بخشیدن به جنبه‌های گوناگون ترکیبیات شمارشی و توابع مولد، از میان جانشینهای متعدد مجموعه‌های جزئاً مرتب دو جمله‌ای، به ذکر نظریه‌های پیش‌ساخته‌ها [۳]، تقطیعها [۶]، مجموعه‌های مرتبط [۴]، و انواع [۱۷] می‌پردازیم. شاید قویترین نظریه، نظریهٔ انواع باشد که برپایهٔ نظریهٔ کانگوری استوار است. همچنین باید از کتاب گولدن و جکسون [۵] نام ببریم، که قسمت عمده‌ای از ترکیبیات شمارشی را که به‌شمارش دنباله‌ها و مسیرها مربوط است، به صورت نسبتاً یکپارچه‌ای بررسی می‌کند.

از قرار معلوم، جلد دوم این کتاب مباحث متعدد دیگری را دربردارد.

درخاتمه، می‌توان گفت که این کتاب فوق‌العاده خوب است. شاید بتوانیم نظرمان را با نقل جمله‌ای ازمقدمه‌ای که روتا بر کتاب نوشته است خلاصه کنیم:

بالاتر از هر چیز، استانلی موفق شده است موضوع را چنان به‌نمایش بگذارد که هر ریاضیدانی که صفحهٔ اول کتاب را باز کند، نتواند از آغاز تا پایان همه را نخواند.

ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مراجع

1. Askey R., and Ismail M., *The Rogers q-Ultraspherical Polynomials*, Approximation Theory III (Cheney E. W., ed.), Academic Press, NewYork, 1980.
2. Baxter R.J., *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London and NewYork, 1982.
3. Bender E. A., and Goldman J. R., "Enumerative uses of generating functions", *Indiana University Math. J.*, **20** (1971) 753-765.
4. Gessel I. M., *Generating Functions and Enumaration of Sequences*, thesis, MIT, 1977.
5. Goulden I. P., and Jackson D. M., *Combinatorial enumeration*, John Wiley, New York, 1983.
6. Henle M., "Dissection of generating functions", *Stud. Appl. Math.* **51** (1972)397-410.
7. Joyal A., "Une théorie combinatoire des séries formelles", *Adv. in Math.* **42**(1981)1-82.
8. Knuth D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol 3, Addison-Wesley, Reading, 1973.
9. Knuth D. E. and Greene D. H. *Mathematics for the Analysis of Algorithms*, Birkhäuser, Boston, 1981.
10. Littlewood D. E., *Theory of Group Characters*, Oxford University Press, London, 1940.
11. MacMahon P. A., *Collected Pupers*, Vol II (Andrews G. E. ed.), M.I.T. Press, Cambridge, 1986.
12. Purdom P. W. and Brown C.A., *The Analysis of Algorithms*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1985.
13. Rota G. C., "On the foundations of combinatorial theory I., Theory of Möbius function", *Z. Wahrsch verw. Gebiete*, **2** (1964)340-368.
14. Stanley R., "Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs", *Duke Math. J.*, **40**(1973) 607-632.
15. Viennot G., *Problèmes Combinatoires Posés Par la Physique Statistique*, Séminaire Bourbaki, no 626, 1983/1984.

• Andrews G.E., *Bulletin* (New Series) *of the American Mathomatical Society*, (2) **17** (1987) 360-365.

1. Gian-Carlo Rota 1. Anand-Dumir-Gupta

اخبار و گزارشها

نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور؛ بزرگداشت هزارهٔ کوشیار گیلانی

در روزهای هشتم تا یازدهم فروردین ۱۳۶۷ نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور از سوی انجمن ریاضی ایران و با همکاری و میزبانی دانشگاه گیلان در شهر رشت برگزار شد.

طی این چهار روز ۱۶ سخنرانی عمومی و ۴۴ سخنرانی تخصصی انجام شد که مجموعهٔ آنها به‌صورت گزارشنامهٔ کنفرانس منتشر خواهد شد. از این میان دو سخنرانی عمومی به‌شرح زندگی و آثار کوشیار گیلانی، ریاضیدان ایرانی قرن چهارم هجری، اختصاص داشت.

در مراسم افتتاح کنفرانس، رئیس دانشگاه گیلان، سرپرست کمیتهٔ برگزاری کنفرانس، وزیر فرهنگ و آموزش عالی، نمایندهٔ آیت‌الله العظمی منتظری در دانشگاه گیلان، و دبیر انجمن ریاضی ایران سخنانی ایراد کردند.

میزگرد انجمن ریاضی ایران با عنوان «بررسی کیفیت ریاضیات دانشگاهی و پیش‌دانشگاهی» در بعدازظهر دومین روز کنفرانس تشکیل شد. در روز سوم، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران برگزار شد که طی آن جوایز دانشجویان برگزیدهٔ مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کنفرانس سال قبل اهدا گردید. در این مجمع، ضمن برگزاری مراسم انتخابات انجمن ریاضی ایران، گزارش شورای اجرایی انجمن قرائت شد. در سومین روز کنفرانس نیز مسابقهٔ ریاضی دانشجویی با شرکت ۲۸ دانشجوی ممتاز از دانشگاههای کشور برگزار گردید.

در جوار کنفرانس، نمایشگاهی از کتابهای ریاضی و یک نمایشگاه صنایع دستی نیز تشکیل شده بود.

بیستمین کنفرانس ریاضی کشور در فروردین ۱۳۶۸ در دانشگاه تهران برگزار خواهد شد.

اولین سمینار آموزش ریاضی

اولین سمینار آموزش ریاضی به‌همت جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران در روزهای ۵ و ۶ اسفند ۱۳۶۶ در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران برگزار شد.

در این سمینار، آموزش ریاضیات دانشگاهی و پیش دانشگاهی به‌عنوان رشته‌ای خاص و مستقل مورد بررسی قرار گرفت و تجربیات و دستاوردهای نوین دست اندرکاران آموزش ریاضیات عرضه شد.

عناوین مقالات کوتاه و بلند ارائه شده در این سمینار عبارت بودند از: فرازونشیبهای آموزش ریاضی کشور؛ بزرگداشت پروفسور تقی فاطمی؛ بحثی پیرامون روش آموزش ریاضی؛ نقش حل مسأله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان؛ بحث کوتاهی دربارهٔ دانش ریاضی و روش ارائهٔ آن؛ استفاده از کامپیوتر در آموزش ریاضی؛ موضع هندسه در ریاضیات دبیرستانی؛ افت تحصیلی دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تألیف کتب ریاضی ابتدایی و راهنمایی؛ برنامهٔ ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات با مروری بر کنگرهٔ پنجم؛ اثبات عملی برخی قضایای جبر و هندسه و مثلثات؛ تحول آموزش ریاضی؛ پاره‌ای از مشکلات آموزش دبیران.

مدال براوئر

به‌یادبود ریاضیدان شهیر هلندی، براوئر از طرف جامعهٔ ریاضی هلند هرچند سال یکبار یک رشته سخنرانی در شاخه‌ای از ریاضیات تحت عنوان سخنرانیهای براوئر برگزار می‌شود و به‌سخنران مدعو جایزه‌ای تحت عنوان «مدال براوئر» اهدا می‌گردد. در سال ۱۹۸۷ مدال براوئر به‌یوری مانین از مؤسسهٔ استکلف آکادمی علوم شوروی تعلق گرفت. برندگان پیشین این مدال عبارت‌اند از: رنه توم (۱۹۷۵)، آبراهام رابینسون (۱۹۷۳)، آرمان بورل (۱۹۷۸)، هری کسن (۱۹۸۱)، و یودگن موزر (۱۹۸۴).

پروژهٔ هندسه- سوپر کامپیوتر

در دسامبر ۱۹۸۷ پروژهٔ هندسه-سوپرکامپیوتر در محل دانشگاه مینسوتای آمریکا افتتاح شد. هدف از انجام این پروژه که به‌وسیلهٔ سیزده تن از ریاضیدانان مشهور آمریکا، انگلیس، و فرانسه از یازده دانشگاه و مؤسسهٔ تحقیقاتی مختلف هدایت می‌شود، به‌کار گرفتن قدرت سوپرکامپیوترها در حل بعضی از مسائل غامض هندسی است. از جمله موضوعهای مورد بررسی، رده‌بندی خمینه‌های سه‌بعدی، بررسی رویه‌های مینیمال، برخالها، مجموعه‌های حدی در دستگاههای دینامیکی، و مدلهای ریاضی بینایی است. علاوه بر مرکز سوپرکامپیوتر دانشگاه مینسوتا که امکانات مورد نیاز را در اختیار این پروژه قرارداده است و ششصد ساعت از وقت سوپرکامپیوترهای کری ۲ خود را به‌این پروژه اهدا کرده است، بنیاد ملی علوم آمریکا، و شرکتهای کامپیوتری کری و سان نیز از این پروژه حمایت می‌کنند.

باز هم دربارهٔ آخرین قضیهٔ فرما

اخیراً یک ریاضیدان ژاپنی به‌نام یوئیچی میاکا[1] مدعی شده است که آخرین قضیهٔ فرما را با استفاده از روشهای هندسهٔ جبری و نظریهٔ پیمانه‌ای و با پیگیری کارهای پرشین[2] ریاضیدان شوروی اثبات کرده است.

این اثبات طولانی، تحت بررسی است و ظاهراً اشکالاتی در آن دیده شده است.

صدمین سال تأسیس انجمن ریاضی آمریکا[1]

انجمن ریاضی آمریکا در سال جاری صدمین سال تأسیس خود را جشن می‌گیرد و به‌این مناسبت مراسم ویژه‌ای برپا می‌دارد. این انجمن

---

1. Yoichi Miyooka 2. A.N. Parshin

1. American Mathematical Society

در سال ۱۸۸۷ با نام انجمن ریاضی نیویورک تأسیس شد.

از آغاز تأسیس این انجمن، یکی از فعالیتهای اصلی آن برگزاری کنفرانسها و گردهماییها بوده است. درچهارمین گردهمایی انجمن در سال ۱۸۹۲ فقط ده نفرحضور یافته بودند ولی در حال حاضر انجمن دوگردهمایی بزرگ سالانه، زمستانه و تابستانه، و چندین گردهمایی فصلی و محلی و دوره‌های آموزشی و پژوهشی متعدد دارد که در آنها هزاران نفرشرکت می‌کنند. انجمن ریاضی آمریکا در حال حاضر بیش از ۲۰۰۰۰ عضو از سراسر جهان دارد.

انتشارات نیز از فعالیتهای اصلی انجمن است؛ در حال حاضر نشریات ادواری انجمن ریاضی به‌قرار زیر است:

نشریات پژوهشی:

Bulletin of the American Mathematical Society; Journal of the American Mathematical Society; Mathematics of Computation; Memoirs of the American Mathematical Society; Proceedings of the American Mathematical Society; Transactions of the American Mathematical Society.

نشریات خبری:

Abstracts; Current Mathematical Publications; Mathematical Reviews; Notices

نشریات ترجمه‌ای:

Soviet Mathematics-Doklady; Mathematics of the USSR- Izvestiya; Mathematics of the USSR- Sbronik; Theory of Probability and Mathematical Stat.; Transactions of the Moscow Mathematical Society; Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.

انجمن علاوه بر نشریات ادواری فوق، کتابها، گزارشها، و رسالاتی نیز منتشر می‌کند که عموماً در عالیترین سطوح پژوهشی هستند.

اطلاع‌رسانی نیز یکی دیگر از نقشهایی است که این انجمن برعهده دارد. این هدف ازجمله در نشریهٔ *Mathematical Review* که از سال ۱۹۴۰ انتشار آن آغاز شد، تعقیب شده است. امروزه در این نشریه تقریباً کلیهٔ متون اصیل ریاضی منتشر شده در سرتاسر دنیا اعم از مقاله، کتاب، و غیره نقد و بررسی می‌شود. اکنون نظام اطلاع‌رسانی *MR* به کمک شبکه‌های کامپیوتری با سرعت بیشتری در اختیار خواستاران قراردارد. از سال ۱۹۸۲ از طریق شبکه‌های کامپیوتری می‌توان به‌فایل انجمن ریاضی آمریکا به‌نام MATHFILE دسترسی پیدا کرد و تحت موضوعبندیهای مشخص به‌مطالب *MR* دست یافت.

انجمن ریاضی آمریکا ازطریق اعطای جوایز گوناگونی به‌تشویق استعدادهای درخشانی که به‌پژوهش در ریاضیات مشغول‌اند، می‌پردازد. این جوایز به‌قرار زیر است:

Bôcher Memorial Prize; Frank Nelson Cole Prizes in Algebra and in Number Theory; Oswald Veblen Prize in Geometry; G.D. Birkhoff Prize in Applied Mathematics; Norbert Wiener Prize in Applied Mathematics; Leroy P. Steel Prizes.

درسال جاری میلادی(۱۹۸۸) به‌بهانهٔ صدمین‌سال تأسیس انجمن ریاضی آمریکا مراسم گوناگونی در سرتاسر ایالات متحده برگزار می‌شود (بعضی از این برنامه‌ها تاکنون به‌اجرا درآمده است). این مراسم مشتمل برجلسات ایراد سخنرانی، برگزاری نمایشگاهها و فعالیتهایی از این قبیل است. ولی مهمترین برنامهٔ آن، برگزاری سخنرانیهایی است که به‌ترسیم مسیرهای پژوهش در بیست وپنج سال آینده در آمریکا اختصاص دارند. سخنرانان مدعو از ریاضیدانان نسبتاً جوان هستند. موضوع سخنرانیها و سخنرانان به‌قرار زیرند:

Michael Aschbacher, California Institute of Technology; *the theory of finite simple groups*

Luis Caffarelli, Institute for Advanced Study, Princeton; *Nonlinear elliptic partial differential equations*

Persi Diaconis, Harvard University; *Probability and mathematical statistics*

Charles L. Fefferman, Princeton University; *Analysis and mathematical physics*

Michael H. Freedman, University of California, San Diego; *Low dimensional topology and mathematics, physics*

Harvey M. Friedman, Ohio State University; *Mathematical logic*

Benedict H. Gross, Harvard University; *Algebraic number theory*

Joseph Harris, Brown University; *Algebraic geometry*

Roger E. Howe, Yale University; *Representation theory of p-adic groups*

Vaughn F. R. Jones, University of California, Berkeley; *von Neumann algebras and knot theory*

Victor Kac, Massachusetts Institute of Technology

Andrew Majda, Princeton University; *Nonlinear hyperbolic equations and computation*

Charles S. Peskin, New York University-Courant Institute of Mathematical Sciences; *Mathematical biology*

Dennis P. Sullivan City University of New York Graduate School and University Center; *Dynamical systems and Kleinian groups*

Robert E. Tarjan, At & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ; *Theoretical computer science and combinatorics*

William P. Thurston, Princeton University; *Low dimensional topology and iteration*

Karen Uhlenbeck, University of Chicago; *Calculus of variations and mathematical physics*

Edward Witten, Princeton University; *Mathematical physics*

در سمینار دیگری، با توجه به ارتباط تنگاتنگ ریاضیات با علوم طبیعی و تأثیر کامپیوتر بر پژوهشهای ریاضی، برچهار زمینهٔ پژوهشی تأکید می‌شود: مدلسازی ریاضی با استفاده از کامپیوتر، مفهوم تقارن، توسعهٔ هندسهٔ ابعاد کوچك، وارتباط نزدیك فیزیك و ریاضی. سخنرانان این سمینار و موضوعات سخنرانی آنان به‌قرار زیر است:

George F. Carrier, Harvard University; *The modeling of fire spread*

John Conway, Princeton University; *Packing spheres*

Persi Diaconis, Stanford University; *The mathematics of mixing things up*

James G. Glimm, Caurant Institute of Mathematical Sciences; *Higher dimensional mixing and diffusion*

David A. Hoffman, University of Massachusetts, Amherst; *Soap films and soap bubbles: Surface interfaces in nature*

Robion C. Kirby, University of California, Berkeley; *Dimension 4: Not the place to do your calculus homework*

John Morgan, Harvard University and Columbia University; *A guide to the baffling fauna and flora of low dimensional topology*

George Daniel Mostow, Yale University; *Groups and symmerty*

David Mumford, Harvard University; *Mathematical models in the cognitive sciences*

Charles S. Peskin, Courant Institute of Mathematical Sciences; *A mathematical model of the heart and the computer-assisted design of prosthetic heart valves*

Daniel G. Quillen, Oxford University; Title to be announced

William P. Thurston, Princeton University; *Topology's quintessential problem, elusive as ever*

James A. Yorke, University of Maryland; *Obstructions to predictability in dynamical processes*

تهیه و تنظیم: یحیی تابش

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal

of

Iran University Press

Volume 1, Number 2, August 1988

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Jouranl are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Europe, and Middle East £10, elswhere £11.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

Editor-in-Chief
M. Behzad

Editorial Board
G. Baradaran Khosrovshahi
M. Jelodari Mamaghani
S. Kazemi
M. Radjabalipour
S. Shahshahani
Y. Tabesh

در شماره‌های آینده می‌خوانید

الگوریتم در ریاضیات جدید و علوم کامپیوتری	دونالد کنوت
پرنسیپیای نیوتن	ریچارد وستفال
در باب انتشارات ریاضی	پال هالموس و دیگران
ماهیت تفکر ریاضی	توریرت ویتر
اویلر	آندره ویل
صورتبندی نظم عالم (ادامه)	آرتور جفی
مصاحبه با رنه توم	