# نشریهٔ فنی

سال ۳، شمارهٔ ۱و۲، مرداد ۱۳۶۹

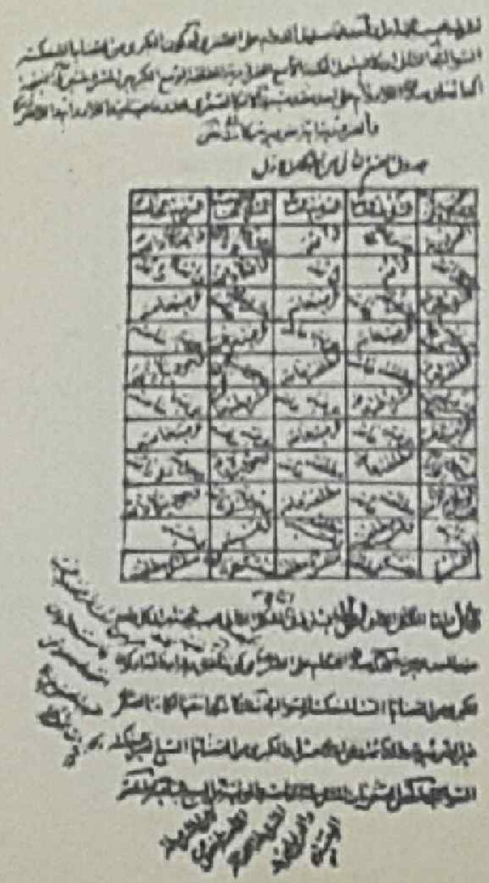
## ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ

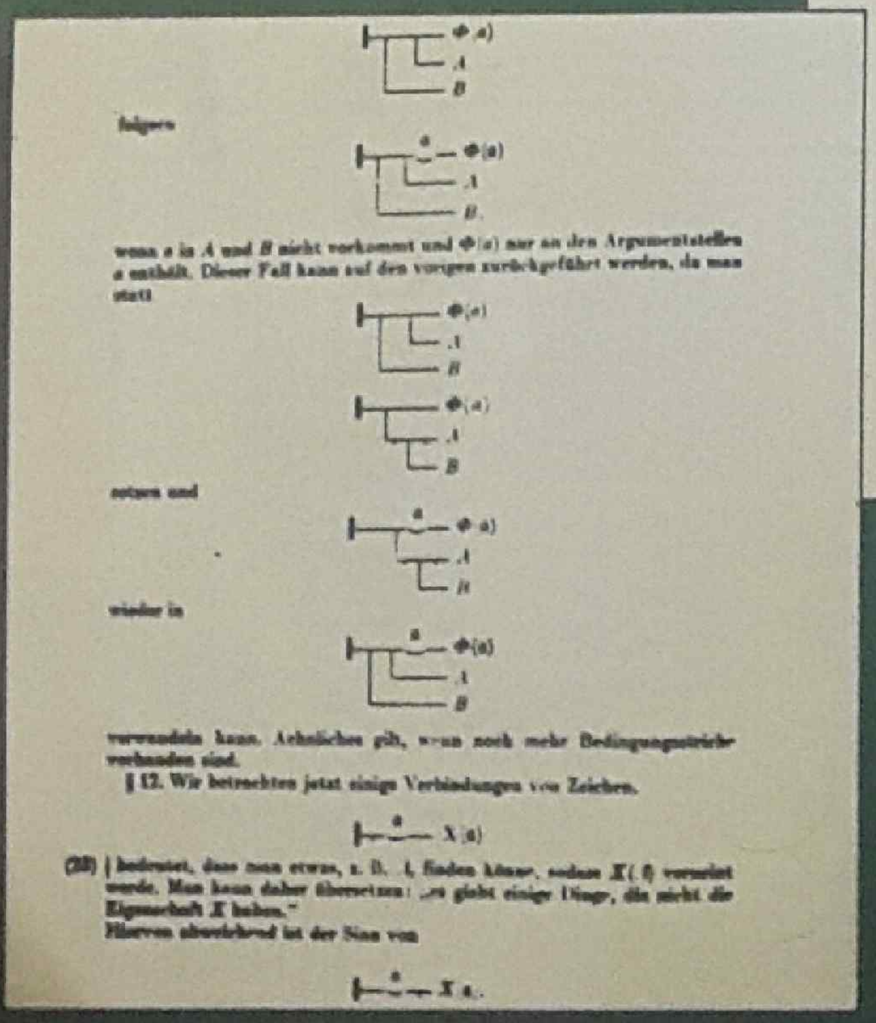
### Α

Ι. Πρῶτον εἰπεῖν περὶ τί καὶ τίνος ἐστὶν ἡ σκέψις, ὅτι περὶ ἀπόδειξιν καὶ ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς· εἶτα διορίσαι τί ἐστι πρότασις καὶ τί ὅρος καὶ τί συλλογισμός, καὶ ποῖος τέλειος καὶ ποῖος ἀτελής, μετὰ δὲ ταῦτα τί τὸ ἐν ὅλῳ εἶναι ἢ μὴ εἶναι τόδε τῷδε, καὶ τί λέγομεν τὸ κατὰ παντὸς ἢ μηδενὸς κατηγορεῖσθαι.

Πρότασις μὲν οὖν ἐστι λόγος καταφατικὸς ἢ ἀποφατικὸς τινὸς κατά τινος· οὗτος δὲ ἢ καθόλου ἢ ἐν μέρει ἢ ἀδιόριστος. λέγω δὲ καθόλου μὲν τὸ παντὶ ἢ μηδενὶ ὑπάρχειν, ἐν μέρει δὲ τὸ τινὶ ἢ μὴ τινὶ ἢ μὴ παντὶ ὑπάρχειν, ἀδιόριστον δὲ τὸ ὑπάρχειν ἢ μὴ ὑπάρχειν ἄνευ τοῦ καθόλου ἢ κατὰ μέρος, οἷον τὸ τῶν ἐναντίων εἶναι τὴν αὐτὴν ἐπιστήμην ἢ τὸ τὴν ἡδονὴν μὴ εἶναι ἀγαθόν.

Διαφέρει δὲ ἡ ἀποδεικτικὴ πρότασις τῆς διαλεκτικῆς, ὅτι ἡ μὲν ἀποδεικτικὴ λῆψις θατέρου μορίου τῆς ἀντιφάσεώς ἐστιν (οὐ γὰρ ἐρωτᾷ ἀλλὰ





Folgere

wenn $a$ in $A$ und $B$ nicht vorkommt und $\Phi(a)$ nur an den Argumentstellen $a$ enthält. Dieser Fall kann auf den vorigen zurückgeführt werden, da man statt

$\Phi(a)$, $A$, $B$

und

$\Phi(a)$, $A$, $B$

setzen und

$\Phi a)$, $A$, $B$

wieder in

$\Phi(a)$, $A$, $B$

verwandeln kann. Ähnliches gilt, wenn noch mehr Bedingungsstriche vorhanden sind.

§ 12. Wir betrachten jetzt einige Verbindungen von Zeichen.

$X(a)$

(38) | bedeutet, daß man etwas, z. B. $A$, finden kann, sodaß $X(A)$ versteht wurde. Man kann daher übersetzen: „es gibt einige Dinge, die nicht die Eigenschaft $X$ haben."
Hiervon abweichend ist der Sinn von

$X a$.

مرکز نشر دانشگاهی

# نشر ریاضی

سال ۳، شمارهٔ ۱و۲، مرداد ۱۳۶۹



● مشاوران:

غلامرضا برادران‌خسروشاهی (در مرخصی)
احمد شفیعی‌ده‌آباد
سیاوش شهشهانی
منوچهر وصال

● ویراستاران:

یحیی تابش
محمدرضا درفشه
سیامك کاظمی
حسین معصومی‌همدانی



● مسؤول فنی: فرید مصلحی
● طراح و صفحه‌آرا: آزاده اصغری
● ناظر چاپ: علی صادقی

با همکاری لاینوترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی: کیان
چاپ و صحافی: علامه‌طباطبائی


## فهرست


**دیدگاه**

دورهٔ دکتری ریاضی پس از دو سال ۲
منطق، مبانی، و فلسفهٔ ریاضی ۳

**مقاله‌ها**

گروههای ماتیو — محمدرضا درفشه، غلامرضا برادران‌خسروشاهی ۱۳
آندری نیکولایویچ کولموگوروف — و. م. تیهومیروف ۲۳
قضیهٔ جداسازی ژوردان ـ براوئر برای ابر رویه‌های هموار — الون لیما ۲۸
سیصدوپنجاهمین سال معادلات دیفرانسیل — گرهارت وانر ۳۱
مجموعهٔ کانتور و ترسیم هندسی — مارکو پاون ۴۱
قانون قوی اعداد کوچك — ریچارد گای ۴۵
ریاضیات کاربردی، بد ریاضیاتی است — پال هالموس ۵۴
شکوفا شدن ریاضیات کاربردی در آمریکا — پیتر لکس ۶۰

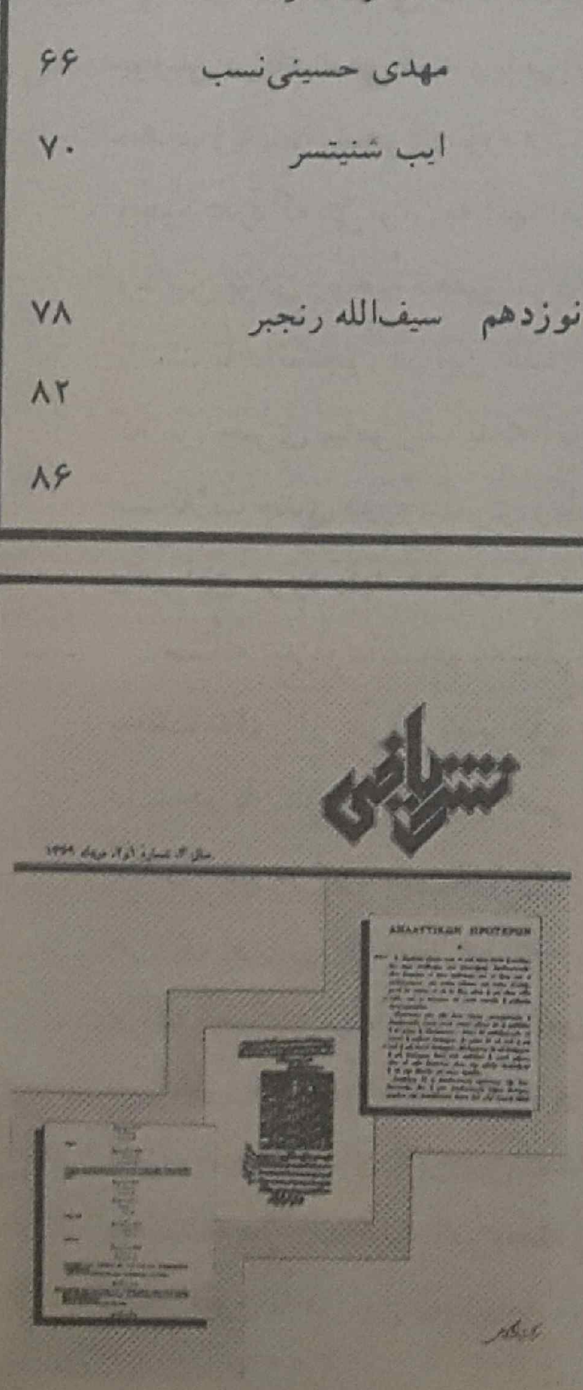
**آموزش و مسأله**

مسأله برای حل — محمدرضا درفشه ۶۶
پنج مسأله از مجلهٔ اینتلیجنسر با حل — مهدی حسینی‌نسب ۶۶
یك درس چند موضوعی در ریاضیات — ایب شنیتسر ۷۰

**کتاب**

فلیکس کلاین و رشد ریاضیات در قرن نوزدهم — سیف‌الله رنجبر ۷۸
پنجاه سالگی متمتیکال ریویوز ۸۲

**اخبار و گزارشها** ۸۶


**روی جلد**

بالا: صفحه‌ای از *آنالوتیکای اول*، اثر ارسطو
وسط: صفحه‌ای از شرح *رسالهٔ شمسیّه*
پایین: صفحه‌ای از رسالهٔ *مفهومنگاشت فرگه*
[به مناسبت تشکیل نخستین کنگرهٔ منطق در ایران. ر. ك. «منطق، مبانی، و فلسفهٔ ریاضی» و «اخبار و گزارشها»]

# گروههای ماتیو

محمدرضا درفشه، غلامرضا برادران خسروشاهی*

## ۰. مقدمه

نظریهٔ گروهها با مطالعهٔ گروههای جایگشتی آغاز شد. اول‌بار، اواریست گالوا به‌هنگام کوشش برای حل‌معادلات درجهٔ پنج به‌بالا به‌وسیلهٔ رادیکالها، چنین گروههایی‌را به‌کار گرفت، هرچند وی آنها را گروه ننامید. گالوا به‌هرچندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f(x)$ روی اعدادگویا مجموعه‌ای مانند $G$ نسبت داد به‌طوری‌که عناصر آن ریشه‌های $f(x)$ را به‌یکدیگر تبدیل می‌کرد. به‌علاوه مجموعهٔ $G$ دارای ویژگیهای دیگری‌نیز بود که باعث می‌شد، به‌زبان امروزی، دارای ساختار گروهی باشد.

یک **گروه جایگشتی** روی مجموعهٔ $\Omega$ عبارت است از زیرمجموعه‌ای از نگاشتهای وارونپذیر $\Omega$ در $\Omega$ به طوری که تحت قانون ترکیب نگاشتها دارای ساختار گروهی‌باشد. درحالت خاص، مجموعهٔ تمام‌نگاشتهای وارونپذیر $\Omega$ در $\Omega$ دارای‌ساختار یک‌گروه است که‌گروه متقارن مجموعهٔ $\Omega$ نامیده و با $S_\Omega$ نمایش داده می‌شود. درحالتی که $\Omega$ یک‌مجموعهٔ متناهی‌است و $|\Omega| = n$، گروه متقارن روی $\Omega$ را با $S_n$ نمایش می‌دهند. درواقع می‌توان گفت که‌یک گروه جایگشتی عبارت است‌اززیر گروهی از $S_\Omega$. اگر $G$ یک گروه جایگشتی روی $\Omega$ باشد، یعنی $G \leqslant S_\Omega$، آنگاه عمل $G$ روی $\Omega$ را با $(G|\Omega)$ نشان می‌دهیم و به‌جای‌اینکه بگوییم $G$ یک گروه جایگشتی روی $\Omega$ است زوج $(G, \Omega)$ را یک‌گروه جایگشتی می‌نامیم. هر عنصر $\Omega$ یک حرف نامیده‌می‌شود. به ازای $\omega \in \Omega$ و $g \in G$ اثر $g$ بر $\omega$ را به‌صورت $\omega^g$ نمایش می‌دهیم و توجه‌داریم که $\omega^g \in \Omega$. هرعنصر $G$ یک جایگشت روی $\Omega$ نامیده می‌شود و معمول است که ترکیب جایگشتها ازچپ به‌راست‌نوشته شود. یعنی اگر $\omega \in \Omega$ و $g, h \in G$، آنگاه $\omega^{gh} = (\omega^g)^h$. عضو خنثای $G$ را با ۱ نمایش‌می‌دهیم و توجه‌داریم که $\omega = \omega^1$ به‌ازای تمام $\omega \in \Omega$.

برخی از مفاهیم اساسی مربوط به‌گروههای جایگشتی را که دراین مقاله ازآنها صحبت خواهد شد در اینجا می‌آوریم ولی خواننده را برای مطالعهٔ مفصلتر بمرجع [۱۷] ارجاع می‌دهیم. فرض‌کنیم $(G, \Omega)$ یک‌گروه جایگشتی است. به‌ازای $\omega \in \Omega$ و $g \in G$ اگر $\omega = \omega^g$، آنگاه می‌گوییم $g$ پایدارساز $\omega$ است. مجموعهٔ $K$ متشکل از عناصر $g \in G$ به‌طوری‌که تمام عناصر $\omega \in \Omega$ را پایدار می‌سازند، هستهٔ عمل $(G|\Omega)$ نامیده می‌شود. $K$ زیرگروهی‌از $G$ است و اگر $K = \{1\}$، آنگاه عمل $G$ بر $\Omega$ **وفادار** نامیده می‌شود. مجموعهٔ عناصر $G$ را که عنصرداده شدهٔ $\omega \in \Omega$ را پایدار می‌سازند، با $G_\omega$ نمایش می‌دهیم وپایدارساز $\omega$ می‌نامیم. واضح است که $G_\omega$ زیرگروهی از $G$ است. به‌طور کلی اگر $\Delta$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\Omega$ باشد، آنگاه دو نوع پایدارساز برای $\Delta$ درنظر می‌گیریم. یکی پایدارساز **مجموعه‌ای** $\Delta$، یعنی مجموعهٔ عناصر $g \in G$ به‌طوری‌که $\Delta = \Delta^g$ و دیگری پایدارساز **نقطه به نقطهٔ** $\Delta$، یعنی مجموعهٔ عناصر $g \in G$ به‌طوری که $\omega = \omega^g$ به‌ازای هر $\omega \in \Delta$. اولی را با $G_{(\Delta)}$ و دومی را با $G_{\{\Delta\}}$ نمایش می‌دهیم. در اینجا منظور از $\Delta^g$ این است: $\Delta^g = \{\omega^g | \omega \in \Delta\}$. درحالتی‌که $\Delta = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$ یک مجموعهٔ متناهی است قرارمی‌دهیم $G_{(\Delta)} = G_{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}$.

اکنون اگر $\omega \in \Omega$، آنگاه $\omega^G = \{\omega^g | g \in G\}$ یک مدار $G$ روی $\Omega$ نامیده می‌شود. واضح است که $\omega^G$ زیرمجموعه‌ای از $\Omega$ است. اگر فقط یک‌مدار داشته باشیم، آنگاه گروه جایگشتی $(G, \Omega)$ را متعدی می‌نامیم و می‌گوییم عمل $G$ روی $\Omega$ متعدی است. مدار $\omega^G$ دارای این ویژگی است که اگر دوعنصر $\omega^g$ و $\omega^h$، $g, h \in G$، را درآن درنظر بگیریم آنگاه داریم

$$(\omega^g)^{g^{-1}h} = (\omega^{gg^{-1}})^h = \omega^h$$

که دراینجا $g^{-1}h \in G$. بنابراین می‌توان گفت که گروه جایگشتی $(G, \Omega)$ متعدی است اگر و فقط اگر به‌ازای هردوعنصر $\omega_1$ و $\omega_2$ از $\Omega$، عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\omega_2 = \omega_1^g$. مفهوم متعدی‌بودن را می‌توان به‌مفهوم $k$-متعدی‌بودن تعمیم داد. فرض کنید $G$ روی $\Omega$ عمل کند و $k$ عددی طبیعی باشد به‌طوری که $k \leqslant |\Omega|$. مجموعهٔ زیرمجموعه‌های مرتب $k$ عضوی $\Omega$ را با $\Delta$ نمایش می‌دهیم. واضح است که عمل $G$ بر $\Omega$ یک‌عمل $G$ بر $\Delta$ القا می‌کند به‌این‌صورت که اگر $X \in \Delta$ و $g \in G$، آنگاه $X^g = \{x^g | x \in X\}$. اگر $(G, \Delta)$ یک گروه جایگشتی متعدی باشد آنگاه $(G, \Omega)$ را یک گروه جایگشتی $k$-متعدی می‌نامیم. درحالت خاص $k = 1$، گروه ۱-متعدی همان گروه متعدی است. به‌این ترتیب اگر $(G, \Omega)$ یک گروه $k$-متعدی باشد آنگاه به‌ازای هردو $k$تایی $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ و $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$، $\alpha_i$ها متمایز و $\beta_i$ها متمایز، عنصر $g \in G$ وجود دارد به‌طوری که $\alpha_i^g = \beta_i$، $1 \leqslant i \leqslant k$.

اکنون اگر مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های $k$عضوی $\Omega$ را با $\Gamma$ نمایش دهیم (توجه داشته باشید که در این حالت زیر مجموعه‌های $k$عضوی متعلق به $\Gamma$ مرتب نیستند) آنگاه گروه $G$ روی $\Gamma$ عمل می‌کند. در این‌حالت، اگر $(G, \Gamma)$ متعدی باشد، می‌گوییم $(G, \Omega)$ یک گروه جایگشتی $k$-همگن است.

گروههای $S_n$ به ازای تمام $n$ها روی مجموعهٔ $n$عضوی $\Omega$ به‌طور $n$-متعدی عمل می‌کنند درصورتی که گروههای متناوب $A_n$، $n \geqslant 3$، متشکل از تمام‌جایگشتهای زوج در $S_n$، روی $\Omega$ به‌طور $(n-2)$-متعدی عمل می‌کنند. اینها دومثال‌از گروههای‌جایگشتی‌اند که درجهٔ متعدی بودن آنها اصطلاحاً بالاست. هرگروه $k$-متعدی، $k \geqslant 2$، را یک گروه چندمتعدی می‌نامیم. گروههای $S_n$ و $A_n$ گروههای چندمتعدی بدیهی نامیده می‌شوند.

ای. ماتیو هنگامی‌که در سال ۱۸۶۰ مشغول مطالعهٔ گروههای جایگشتی چندمتعدی بود دو گروه ۵-متعدی روی ۱۲ حرف و ۲۴ حرف کشف کرد [۱۳، ۱۴ و ۱۵] و توانست جایگشتهایی بنویسد که دو گروه فوق‌الذکررا تولید کنند. بعدها این گروهها موردمطالعهٔ بیشتری قرار گرفتند و ای. ویت [۱۸] روش‌هماهنگی برای‌ساختن این گروهها ارائه کرد. او گروه ۵-متعدی روی ۱۲ حرف را با $M_{12}$ و گروه ۵-متعدی روی ۲۴ حرف‌را با $M_{24}$ حرف نشان‌داد. درطول بیش از صد سال، ریاضیدانان کوشش کردند گروههای ۵-متعدی دیگری بجز اینها کشف کنند ولی‌موفق نشدند. هنگامی‌که قضیهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی ثابت شد، ریاضیدانان به‌این نتیجه رسیدند که این دو گروه ماتیو تنها گروههای ۵-متعدی غیربدیهی‌اند.

درعملِ $M_{12}$ روی ۱۲ حرف، پایدارساز یک‌حرف با $M_{11}$ نمایش داده می‌شود و درعملِ $M_{24}$ روی ۲۴ حرف، پایدارساز $i$ حرف، $1 \leqslant i \leqslant 2$، با $M_{24-i}$ نمایش داده می‌شود. پنج گروه $M_{11}$، $M_{12}$، $M_{22}$، $M_{23}$، و $M_{24}$ گروههای‌ماتیو نامیده‌می‌شوند. این گروهها هم درنظریهٔ گروههای ساده و هم درنظریهٔ کدگذاری بسیار با اهمیت هستند. هنگامی‌که کول [۲] مشغول تعیین همهٔ گروههای جایگشتی متعدی‌روی ۱۰ حرف و ۱۱ حرف بود موفق شد ثابت‌کند $M_{11}$ گروهی ساده است. بعدها میلر [۱۶] ثابت‌کرد که چهار گروه دیگرماتیو نیز گروههایی ساده‌اند.

ویت به‌این‌ترتیب گروه $M_{24}$ را ساخت که ابتدا مشاهده‌کرد پایدارساز ۳ حرف درعملِ $M_{24}$ روی ۲۴ حرف، گروه سادهٔ $PSL(3, 4)$ است که روی ۲۱ حرف باقیمانده به‌طور ۲-متعدی عمل می‌کند. او سپس شرایط کافی‌را برای‌اینکه یک گروه ۲-متعدی بتواند دارای توسیع متعدی باشد، ثابت‌کرد و نشان داد که این شرایط می‌توانند سه‌بار روی‌گروه $PSL(3, 4)$ اعمال شوند تا گروههای $M_{22}$، $M_{23}$، و $M_{24}$ حاصل گردند. مشابه همین‌شیوه‌را می‌توان برای ساختن گروههای $M_{11}$ و $M_{12}$ نیز به‌کار گرفت.

در این مقاله رهیافت ویت را مناسب تشخیص داده‌ایم و جزئیات ساختن‌گروههای ماتیو را با استفاده از توسیع متعدی گروههای معلوم شرح خواهیم داد. همچنین ارتباط‌گروههای ماتیو را با سایرگروههای سادهٔ پراکنده و کاربرد آنها را درنظریهٔ طرحهای بلوکی و نظریه‌کدگذاری تشریح می‌کنیم.

## ۲. قضیهٔ ویت

قبل از بیان قضیهٔ ویت، تعریف زیر را در ارتباط با گروههای جایگشتی یادآوری می‌کنیم.

**تعریف.** فرض‌کنیم $(G, \Omega)$ یک گروه جایگشتی‌است. نیزفرض‌کنیم $\infty$ حرفی است که در $\Omega$ نیست و قرار دهیم $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$. گوییم $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ توسیع متعدی $(G, \Omega)$ است اگر $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ متعدی باشد و $\bar{G}_\infty = G$.

توجه داشته‌باشید که اگر $(G, \Omega)$ یک گروه‌جایگشتی $k$-متعدی باشد، آنگاه $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ یک گروه جایگشتی $(k+1)$-متعدی خواهد بود.

**قضیهٔ ۱.** گیریم $(G, \Omega)$ یک گروه جایگشتی $k$-متعدی باشد $(k > 1)$. فرض‌کنیم $\infty \notin \Omega$ و $h$ جایگشتی از مجموعهٔ $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ باشد به‌طوری‌که $\infty^h \in \Omega$. همچنین‌فرض کنیم $g \in G$ و $\omega \in \Omega$ با شرایط زیر وجود داشته باشند

الف) $g \notin G_\omega$

ب) $h^2 = (gh)^3 = 1$

پ) $hG_\omega h = G_\infty$

دراین صورت، گروه $\bar{G}$ وجود دارد به‌طوری‌که $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ توسیع متعدی $(G, \Omega)$ است؛ و $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ یک گروه‌جایگشتی $(k+1)$-متعدی است.

برهان. می‌توان عناصر گروه $G$ را به‌عنوان‌جایگشتهایی‌از $\bar{\Omega}$ درنظر گرفت که $\infty$ را پایدار می‌سازند. چون $k > 1$ فرض شده است پس $(G|\Omega)$ حداقل ۲-متعدی است و درنتیجه تعداد همدسته‌های مضاعف $G_\omega$ در $G$ برابر ۲ است. چون $g \notin G_\omega$ لذا می‌توان نوشت $G = G_\omega \cup G_\omega g G_\omega$. اگر نشان دهیم که $\bar{G} = G \cup GhG$ یک گروه است آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ یک توسیع متعدی $(G, \Omega)$ است.

$\bar{G}$ دارای عضوخنثای ۱ است وچون $h = h^{-1}$، لذا به‌ازای هر $y \in \bar{G}$ داریم $y^{-1} \in \bar{G}$. چون عناصر $\bar{G}$ جایگشتهایی از $\bar{\Omega}$ هستند، عمل ترکیب در $\bar{G}$ شرکتپذیر است. بنابراین کافی است

ثابت کنیم $G$ تحت عمل ترکیب بسته‌است و برای این کار کافی‌است نشان دهیم $hGh \subseteq G$ زیرا دراین‌صورت خواهیم داشت

$$GhG \cdot GhG = G(hGh)G \subseteq GGG \subseteq G .$$

حال از $(gh)^۳ = ۱$ نتیجه می‌شود

$$hgh = (ghg)^{-۱} = g^{-۱}hg^{-۱} .$$

و با درنظر گرفتن $hG_ωh = G_ω$ حاصل می‌شود

$$hGh = h(G_ω \cup G_ω gG_ω)h = hG_ωh \cup hG_ωgG_ωh$$
$$= G_ω \cup hG_ωhhghhG_ωh$$
$$= G_ω \cup G_ωg^{-۱}hg^{-۱}G_ω \subseteq G \cup GhG = G$$

و به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

## ۳. گروههای $PGL(n, q)$

فرض کنید $GF(q)$ هیأت گالوای $q$ عضوی‌است، و $q = p^l$ توانی از عدد اول $p$ است. فضای برداری $n$ بعدی روی $GF(q)$ را با $V(n, q)$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ تمام ماتریسهای وارونپذیر (تبدیلات خطی ناتکین) روی $GF(q)$ را با $GL(n, q)$ نشان‌داده **گروه خطی عام** می‌نامیم. مرکز این گروه $Z$ عبارت است از مجموعهٔ تمام‌ماتریسهای‌اسکالر $\lambda I$ که در آن $\lambda \in GF(q)^*$. گروه

$$PGL(n, q) = \frac{GL(n, q)}{Z}$$

را **گروه تصویری خطی عام** می‌نامیم.

مجموعهٔ تمام‌ماتریسهای‌وارونپذیر با دترمینان ۱ در $GL(n, q)$ تشکیل زیر گروهی می‌دهدکه آن را با $SL(n, q)$ نمایش‌می‌دهیم و **گروه خطی خاص** می‌نامیم. مرکز این گروه $Z \cap GL(n, q)$ عبارت است ازمجموعهٔ تمام ماتریسهای اسکالر $\lambda I$، $\lambda \in GF(q)^*$ به‌طوری‌که $\lambda^n = ۱$، وبنابراین گروهی‌است ازمرتبهٔ $(n, q-۱)$. **گروه تصویری خطی خاص** عبارت است از $\frac{SL(n, q)}{Z \cap GL(n, q)}$ که آن‌را با $PSL(n, q)$ نمایش می‌دهیم. گروههای $PSL(n, q)$ ساده هستند مشروط بر اینکه $(n, q) \neq (۲, ۲)$ و $(۲, ۳)$. مرتبهٔ این گروهها عبارت است از

$$|PGL(n, q)| = q^{\binom{n}{۲}} \prod_{i=۲}^{n} (q^i - ۱)$$

$$|PSL(n, q)| = \frac{۱}{(n, q-۱)} q^{\binom{n}{۲}} \prod_{i=۲}^{n} (q^i - ۱)$$

گروههای تصویری فوق روی‌مجموعهٔ تمام زیرفضاهای‌ناصفر $V(n, q)$ عمل‌می‌کنند. مجموعهٔ تمام زیرفضاهای ناصفر $V(n, q)$ همراه با رابطهٔ شمول $\subseteq$ را **هندسهٔ تصویری** $(n-۱)$ بعدی می‌نامیم و با $\mathcal{P}(n-۱, q)$ نمایش‌می‌دهیم. تعداد زیرفضاهای یک‌بعدی $V(n, q)$ برابراست با $\frac{q^n - ۱}{q - ۱}$ و هرزیرفضای یک‌بعدی یک نقطه نامیده‌می‌شود. یک خط عبارت است از یک زیرفضای دوبعدی.

گروه $GL(n, q)$ (و همین‌طور گروه $SL(n, q)$) روی مجموعهٔ نقاط هندسهٔ تصویری عمل می‌کند و هستهٔ این‌عمل عبارت است از $Z$ (یا $Z \cap GL(n, q)$ درمورد $SL(n, q)$). بنابراین گروههای $PGL(n, q)$ و $PSL(n, q)$ روی نقاط تصویری دارای‌اعمالی وفادار هستند. بنا به‌قضیهٔ اساسی‌هندسهٔ تصویری[۱] هرعضو $PGL(n, q)$ به‌وسیلهٔ یک ماتریس ناتکین القا می‌شود.

دراینجا حالتهای $n = ۲$ و $n = ۳$ را بیشترمورد بررسی قرارمی‌دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم $n = ۲$. یک‌نقطهٔ تصویری در $\mathcal{P}(۱, q)$ را می‌توان به‌صورت $\{\lambda v | \lambda \in GF(q)^*\} = \langle v \rangle$ نوشت که در آن $v \in V(۲, q)$، $v \neq ۰$. اگر $v$ بردار ناصفر دلخواهی در $V(۲, q)$ باشد آنگاه می‌توان $v$ را نسبت به پایهٔ معینی مؤلفه‌دار کرد و نوشت $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، که در آن $a, b \in GF(q)$ و هردو باهم صفر نیستند. اگر $b \neq ۰$، آنگاه

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} b^{-۱}a \\ ۱ \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ ۱ \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} z \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad z \in GF(q)$$

و اگر $b = ۰$، آنگاه

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ ۰ \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس $q+۱$ نقطهٔ تصویری عبارت‌اند از $q$ نقطهٔ $\begin{bmatrix} z \\ ۱ \end{bmatrix}$ و یک‌نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$. حال حرفی مانند $\infty$ را که در $GF(q)$ نباشد در نظر می‌گیریم و قرارمی‌دهیم $L = GF(q) \cup \{\infty\}$. تناظری یک‌به‌یک بین $\mathcal{P}(۱, q)$ و $L$ چنین برقرار می‌کنیم که به نقطهٔ $\begin{bmatrix} z \\ ۱ \end{bmatrix}$ عنصر $z$ را نسبت می‌دهیم و به $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ عنصر $\infty$ را. اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ماتریسی وارونپذیر و القاکنندهٔ عضوی از $PGL(۲, q)$ باشد، آنگاه عمل این ماتریس روی نقاط تصویری چنین است

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az+b \\ cz+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}.$$

با توجه به‌تناظر بین $\mathcal{P}(۱, q)$ و $L$ ملاحظه می‌شود که $A$ به‌عنوان جایگشتی از $L$، عنصر $z \in GF(q)$ را به‌عنصر $\frac{az+b}{cz+d}$ وعنصر $\infty$ را به $\frac{a}{c}$ تبدیل می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت

$$PGL(۲, q) = \left\{ x \to \frac{ax+b}{cx+d} \,\middle|\, ad - bc \neq ۰, \; a, b, c, d \in GF(q) \right\}.$$

همین‌طور گروه $PSL(۲,q)$ را می‌توان چنین نوشت

$$PSL(۲,q)=\left\{x\to\frac{ax+b}{cx+d}\,\middle|\,ad-bc\in GF(q)^{\square},\ a,b,c,d\in GF(q)\right\}$$

که در آن $GF(q)^{\square}$ مجموعهٔ تمام عناصر ناصفر و مربع کامل در $GF(q)$ است.

درمورد $n=۳$ یك نقطهٔ تصویری که به وسیلهٔ بردار $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ پدید می‌آید با $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود. اگر $a=b=۰$ آنگاه $\begin{bmatrix}۰\\۰\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}$ و اگر $a=۰$ و $b\neq۰$ آنگاه $\begin{bmatrix}۰\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۱\\b^{-۱}c\end{bmatrix}$ که نقطه‌ای است به‌شکل $\begin{bmatrix}۰\\۱\\x\end{bmatrix}$، $x\in GF(q)$، و درنتیجه برای آن $q$ انتخاب داریم. اگر $a\neq۰$ آنگاه $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\a^{-۱}b\\a^{-۱}c\end{bmatrix}$ که نقطه‌ای است به شکل $\begin{bmatrix}۱\\x\\y\end{bmatrix}$، $x,y\in GF(q)$، که برای آن $q^{۲}$ انتخاب داریم. درنتیجه، $۱+q+q^{۲}$ نقطهٔ تصویری همینهایی هستند که نوشتیم. درخاتمهٔ این بخش توضیح می‌دهیم که گروههای $PSL(n,q)$ و $PGL(n,q)$ روی نقاط تصویری به‌طور ۲-متعدی عمل می‌کنند.

## ۴. گروههای ماتیو

در این قسمت گروههای معینی را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم دارای توسیع متعدی هستند. یعنی در واقع نشان می‌دهیم شرایط قضیهٔ ویت درمورد آنها برقرار است. گروههایی که از توسیع متعدی آنها حاصل می‌شوند در واقع همان گروههای ماتیو هستند. ابتدا گروه معینی را که $M_{۱۱}$ از توسیع متعدی آن به‌دست می‌آید شرح می‌دهیم.

فرض کنید $p>۲$ عددی اول باشد و $f=۲m$. هیأت گالوای $GF(q)$ با $q=p^{f}$ عنصر را درنظر می‌گیریم. داریم

$$|PGL(۲,q)|=q(q^{۲}-۱)$$

$$|PSL(۲,q)|=\frac{۱}{۲}q(q^{۲}-۱).$$

در این حالت $\varphi:x\to x^{p^{m}}$ یك خودریختی مرتبهٔ ۲ از $GF(q)$ است. با توجه به‌شکل عناصر گروه $PGL(۲,q)$ که در بخش ۳ به‌آن اشاره کردیم، اگر قراردهیم $\infty=\infty^{\varphi}$، آنگاه $\varphi$ جایگشتی از $L$ خواهد بود و در نتیجه $G=PGL(۲,q)\langle\varphi\rangle$ یك گروه جایگشتی روی $L$ است که برای آن داریم $PSL(۲,q)\trianglelefteq G$. گروه $\frac{G}{PSL(۲,q)}$ گروهی است مرتبهٔ ۴ و یکریخت است با $\mathbf{Z}_{۲}\times\mathbf{Z}_{۲}$. بنابراین $G$ شامل ۳ زیرگروه با اندیس ۲ و شامل $PSL(۲,q)$ است. دوتا از این زیرگروهها عبارت‌اند از $PGL(۲,q)$ و $PSL(۲,q)\langle\varphi\rangle$. گروه سوم را با $M(q)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $M(q)$ گروهی است شامل $PSL(۲,q)$ و $[G:M(q)]=۲$. از آنجا که $PSL(۲,q)$ روی خط تصویری $L$ دارای عملی ۲-متعدی است، پس $M(q)$ نیز روی $L$ به‌طور ۲-متعدی عمل می‌کند. درواقع با توجه به‌شکل عناصر $M(q)$ می‌توان ثابت کرد که $M(q)$ روی $L$ به‌طور ۳-متعدی عمل می‌کند. درساختن گروههای $M_{۱۱}$ و $M_{۱۲}$ گروه $M(۹)$ مورد استفاده قرارمی‌گیرد ($p=۳$، $f=۲$ و $q=۹$) که دراین‌حالت مناسب است قراردهیم $M(۹)=M_{۱۰}$. هیأت $GF(۹)$ از توسیع هیأت $\mathbf{Z}_{۳}$ حاصل می‌گردد. چون چندجمله‌ای $x^{۲}+x-۱$ روی $\mathbf{Z}_{۳}$ تحویل‌ناپذیر است می‌توان $\alpha$ را صفری از $x^{۲}+x-۱$ درنظر گرفت و قرارداد

$$GF(q)=\mathbf{Z}_{۳}(\alpha)=\{a+b\alpha\,|\,a,b\in\mathbf{Z}_{۳}\}$$

**قضیهٔ ۲.** گیریم $G$ گروه ۳-متعدی $M_{۱۰}$ روی

$$L=GF(۹)\cup\{\infty\}$$

باشد. نیز فرض کنیم $\infty_{۱}$ و $\infty_{۲}$ دوعنصر متمایز باشند به‌طوری که $\infty_{۱},\infty_{۲}\notin L$. جایگشتهای $h_{۱}$، $h_{۲}$، و $h_{۳}$ روی

$$\bar{L}=L\cup\{\infty_{۱},\infty_{۲}\}$$

را درنظر می‌گیریم

$$h_{۱}:\begin{cases}z\to z^{-۱},\ z\in L\\ \infty_{۱}\to\infty_{۱}\\ \infty_{۲}\to\infty_{۲}\end{cases}$$

$$h_{۲}:\begin{cases}\infty\to\infty_{۱}\\ \infty_{۱}\to\infty\\ \infty_{۲}\to\infty_{۲}\\ a+\alpha b\to a-\alpha b,\ a,b\in\mathbf{Z}_{۳}\end{cases}$$

$$h_{۳}:\begin{cases}\infty\to\infty\\ \infty_{۱}\to\infty_{۲}\\ \infty_{۲}\to\infty_{۱}\\ z\to z^{۳},\ z\in GF(۹)\end{cases}$$

دراین‌صورت، $M_{۱۱}=\langle M_{۱۰},h_{۲}\rangle$ یك گروه ۴-متعدی درجهٔ ۱۱ روی $L=L\cup\{\infty_{۱}\}$ و $M_{۱۲}=\langle M_{۱۱},h_{۳}\rangle$ یك گروه ۵-متعدی درجهٔ ۱۲ روی $\bar{L}$ است.

برهان. ثابت می‌کنیم شرایط قضیهٔ ویت برقرار است. قرار

می‌دهیم $\Omega = L = GF(9) \cup \{\infty\}$ و $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty_1\}$ و $G = M_{10}$ و $\bar{G} = \langle M_{10}, h_2 \rangle$. واضح است که $h_2$ جایگشتی از $\bar{\Omega}$ است که برای آن داریم $\infty^{h_2} = \infty \in \Omega$، $\infty_1^{h_2} = \infty$. اما درمیان $h_1$ برابر است با ۱ — که در هیأت $GF(9)$ مربع کامل است و درنتیجه $h_1 \in G$. حال تجزیه‌های دوری $h_1$، $h_2$ و $h_3$ روی $\bar{\Omega}$ چنین‌اند

$$h_1 = (\infty_1)(1)(-1)(0\ \infty)(\alpha\ \alpha+1)(-\alpha\ -\alpha-1)$$
$$(\alpha-1\ -\alpha+1)$$

$$h_2 = (0)(1)(-1)(\infty\ \infty_1)(\alpha\ -\alpha)(\alpha+1\ -\alpha+1)$$
$$(\alpha-1\ -\alpha-1)$$

$$h_1 h_2 = (1)(-1)(0\ \infty_1\ \infty)(\alpha\ -\alpha+1\ -\alpha-1)$$
$$(-\alpha\ \alpha-1\ \alpha+1)$$

بنابراین دیده می‌شود که $h_2^2 = (h_1 h_2)^3 = 1$. چون $\infty^{h_1} = 0$ پس $h_1 \notin G_\infty$. ازطرف دیگر داریم

$$\infty^{h_2 G \infty^{h_2}} = (\infty^{h_2})^{G \infty^{h_2}} = \infty_1^{G \infty^{h_2}} = \infty_1^{h_2} = \infty.$$

بنابراین $h_2 G_\infty h_2 = G_\infty$. به‌این‌ترتیب تمام شرایط قضیهٔ ویت برقرار است و درنتیجه $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ توسیع متعدی $(G, \Omega)$ است. چون $(G, \Omega)$ به‌طور ۳-متعدی عمل می‌کند لذا $(\bar{G}|\bar{\Omega})$، ۴-متعدی است و باتوجه به‌مرتبهٔ $G$ داریم: $|\bar{G}| = 7920$. گروه ۴-متعدی $\bar{G}$ را $M_{11}$ می‌نامیم.

برای ساختن گروه $M_{12}$ گروه‌جایگشتی ۴-متعدی $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ را درنظرمی‌گیریم و ثابت‌می‌کنیم شرایط قضیهٔ ویت درمورد توسیع متعدی‌این گروه‌برقراراست. باتوجه به‌قراردادهای‌فوق‌قرارمی‌دهیم $\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \cup \{\infty_2\}$ و $\bar{G} = \langle \bar{G}, h_3 \rangle$. تجزیهٔ دوری عناصر $h_3$ و $h_2 h_3$ به‌عنوان جایگشتهایی از $\bar{\Omega}$ چنین است

$$h_3 = (\infty)(0)(1)(-1)(\infty_1\ \infty_2)(\alpha\ -\alpha-1)$$
$$(-\alpha\ \alpha+1)(\alpha-1\ -\alpha+1)$$

$$h_2 h_3 = (0)(1)(-1)(\infty\ \infty_2\ \infty_1)(\alpha\ \alpha+1\ \alpha-1)$$
$$(-\alpha\ -\alpha-1\ -\alpha+1).$$

داریم $h_2 \in \bar{G}$ و $\infty_1^{h_2} = \infty_1 \in \bar{\Omega}$ و $h_2^3 = (h_2 h_3)^3 = 1$.

چون $\infty_1^{h_2} = \infty$ پس $h_2 \notin \bar{G}_{\infty_1}$. همچنین

$$\infty_1^{h_2 \bar{G} \infty_1 h_2} = (\infty_1^{h_2})^{\bar{G} \infty_1 h_2} = \infty_2^{\bar{G} \infty_1 h_2} = \infty_2^{G h_2}$$
$$= \infty_2^{h_2} = \infty_1.$$

درنتیجه $h_2 \bar{G}_{\infty_1} h_2 = \bar{G}_{\infty_1}$ و لذا تمام شرایط قضیهٔ ویت برقرار است. بنابراین گروه جایگشتی $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ وجود دارد به‌طوری‌که توسیع‌متعدی $(G, \bar{\Omega})$ باشد. گروه ۵-متعدی $\bar{G}$ را $M_{12}$ می‌نامیم. مرتبهٔ این گروه برابر است با

$$|M_{12}| = 12 \times |M_{11}| = 95040.$$



حال‌که چگونگی ساختن گروههای $M_{11}$ و $M_{12}$ را با استفاده ازقضیهٔ ویت دیدیم، طرز ساختن دیگر گروههای ماتیو یعنی $M_{22}$، $M_{23}$ و $M_{24}$ را شرح می‌دهیم؛ شیوهٔ ساختن گروههای اخیر را نیز با استفاده ازقضیهٔ ویت بیان می‌کنیم. گروهی که با آن شروع کرده و $M_{22}$ را می‌سازیم عبارت است ازگروه خطی $PSL(3, 4)$ از مرتبهٔ ۲۵۱۶۰. می‌دانیم که این گروه روی ۲۱ نقطهٔ تصویری‌در $\mathcal{P}(2, 4)$ به‌طور ۲-متعدی عمل می‌کند. همان‌طور که قبلا توضیح دادیم نقطهٔ تصویری را که به‌وسیلهٔ بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ پدید می‌آید با $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ نمایش‌می‌دهیم. چون چندجمله‌ای $x^2+x+1$ روی $Z_2$ تحویل‌ناپذیر است لذا می‌توان $\alpha$ را صفری از این چندجمله‌ای فرض‌کرد و قرارداد $GF(4) = Z_2(\alpha)$.

**قضیهٔ ۳.** فرض می‌کنیم $G = PSL(3, 4)$ و $\Omega$ مجموعهٔ ۲۱ نقطهٔ تصویری در $\mathcal{P}(2, 4)$ باشد. قرارمی‌دهیم

$$\bar{\bar{\Omega}} = \Omega \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\}$$

که $\infty_1$، $\infty_2$ و $\infty_3$ سه حرف متمایز در خارج $\Omega$ اند، و جایگشتهای زیردوی $\bar{\bar{\Omega}}$ را درنظرمی‌گیریم

$$h_1 : \begin{cases} \infty_1 \to \infty_1 \\ \infty_2 \to \infty_2 \\ \infty_3 \to \infty_3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$h_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \infty_1 \\ \infty_1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \infty_2 \to \infty_2 \\ \infty_3 \to \infty_3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x^2+yz \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$h_۲ : \begin{cases} \infty_۱ \to \infty_۲ \\ \infty_۲ \to \infty_۱ \\ \infty_۳ \to \infty_۳ \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x^۲ \\ y^۲ \\ \alpha z^۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$h_۴ : \begin{cases} \infty_۱ \to \infty_۱ \\ \infty_۲ \to \infty_۲ \\ \infty_۳ \to \infty_۲ \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x^۲ \\ y^۲ \\ z^۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

دراین‌صورت

الف) $M_{۲۲} = \langle G, h_۲ \rangle$ یك‌گروه ۳-متعدی روی ۲۲ حرف $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty_۱\}$ است و $|M_{۲۲}| = ۴۴۳۵۲۰$.

ب) $M_{۲۳} = \langle M_{۲۲}, h_۲ \rangle$ یك گروه ۴-متعدی روی ۲۳ حرف $\bar{\bar{\Omega}} = \Omega \cup \{\infty_۱, \infty_۲\}$ است و $|M_{۲۳}| = ۱۰۲۰۰۹۶۰$.

پ) $M_{۲۴} = \langle M_{۲۳}, h_۴ \rangle$ یك گروه ۵-متعدی روی ۲۴ حرف $\bar{\bar{\bar{\Omega}}}$ است و

$$|M_{۲۴}| = ۲۴۴۸۲۳۰۴۴۰.$$

برهان. ابتدا مرتبهٔ جایگشتهای $h_i$، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، را پیدا می‌کنیم. واضح است که مرتبهٔ $h_۱$ برابر ۲ است. با توجه به‌تعریف $h_۲$ دیده می‌شود که $h_۲^۲$، عناصر $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\infty_۱$، $\infty_۲$ و $\infty_۳$ را به خودشان تبدیل می‌کند و $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} x^۴ \\ y^۴ \\ z^۴ \end{bmatrix}$ مبدل می‌سازد. چون به‌ازای هر $x \in GF(۴)$ داریم $x^۴ = x$ لذامرتبهٔ $h_۲$ نیز ۲ است. همین‌طور، مرتبهٔ $h_۴$ برابر ۲ می‌باشد. اما جایگشت $h_۴^۲$، عناصر $\infty_۱$، $\infty_۲$ و $\infty_۴$ را پایدار می‌سازد و $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} x^۴ \\ y^۴ \\ \alpha^۳ z^۴ \end{bmatrix}$ تبدیل می‌کند که چون $\alpha^۳ = ۱$، نتیجه‌می‌شود که مرتبهٔ $h_۴$، دو است. پس ثابت کرده‌ایم $h_i^۲ = ۱$، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$. عملیات مشابهی نشان می‌دهد که $(h_۱h_۲)^۳ = (h_۲h_۴)^۳ = (h_۴h_۲)^۳ = ۱$. حال به بررسی شرایط قضیهٔ ویت درهرمورد می‌پردازیم.

الف) قرار می‌دهیم $G = PSL(۳, ۴)$، $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty_۱\}$ و $\bar{G} = \langle G, h_۲ \rangle$. $h_۲$ جایگشتی از $\bar{\Omega}$ است و داریم

$$\infty_۱^{h_۲} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \in \Omega.$$

$h_۱$ جایگشتی روی $\Omega$ است و به‌وسیلهٔ ماتریس $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ القا می‌شود که ماتریسی است با درایه‌های در $GF(۴)$ و دترمینان ۱ پس $h_۱ \in G$. چون $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}^{h_۱} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ پس $h_۱ \notin G_{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}}$. حال از

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}^{h_۱ G_{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}} h_۲} = \infty_۱^{G_{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}} h_۲} = \infty_۱^{h_۲} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود $h_۲ G_{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}} h_۲ = G_{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}}$. و چون داریم

$$h_۲^۲ = (h_۱h_۲)^۳ = ۱$$

پس تمام شرایط قضیهٔ ویت برقرار است و درنتیجه $\bar{G}$ یك‌توسیع متعدی $G$ است. یعنی $\bar{G}$ یك‌گروه ۳-متعدی روی ۲۲ حرف است و $|\bar{G}| = ۲۲ \times |PSL(۳, ۴)| = ۴۴۳۵۲۰$. گروه ۳-متعدی $\bar{G}$ را $M_{۲۲}$ می‌نامیم.

ب) قرارمی‌دهیم $\bar{\bar{G}} = \langle \bar{G}, h_۳ \rangle$ و $\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega} \cup \{\infty_۲\}$. در این حالت $h_۳$ جایگشتی از $\bar{\bar{\Omega}}$ است و $\infty_۱^{h_۳} = \infty_۱ \in \bar{\bar{\Omega}}$. چون $h_۳ \in \bar{G}$ و $h_۳ \notin \bar{G}_{\infty_۱}$ پس $\infty_۱^{h_۳} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$. روابط

$$h_۳^۲ = (h_۲h_۳)^۳ = ۱$$

و $h_۳ \bar{G}_{\infty_۱} h_۳ = \bar{G}_{\infty_۱}$ نیز برقرارند و درنتیجه تمام شرایط قضیهٔ ویت صادق است. پس $\bar{\bar{G}}$ گروهی ۴-متعدی روی ۲۳ حرف است که $M_{۲۳}$ نامیده می‌شود و داریم

$$|M_{۲۳}| = ۲۳ \times |M_{۲۲}| = ۱۰۲۰۰۹۶۰.$$

پ) قرار می‌دهیم $\bar{\bar{\bar{G}}} = \langle \bar{\bar{G}}, h_۴ \rangle$ و $\bar{\bar{\bar{\Omega}}} = \bar{\bar{\Omega}} \cup \{\infty_۴\}$. $h_۴$ جایگشتی از $\bar{\bar{\Omega}}$ است و $\infty_۲^{h_۴} = \infty_۲ \in \bar{\bar{\Omega}}$. چون $h_۴ \in \bar{\bar{G}}$ و $h_۴ \notin \bar{\bar{G}}_{\infty_۲}$ لذا $\infty_۲^{h_۴} = \infty_۱$. چون روابط $h_۴^۲ = (h_۴h_۴)^۳ = ۱$ و $h_۴ \bar{\bar{G}}_{\infty_۲} h_۴ = \bar{\bar{G}}_{\infty_۲}$ برقرارند پس تمام شرایط قضیهٔ ویت صادق است. درنتیجه $\bar{\bar{\bar{G}}}$ گروهی ۵-متعدی روی $\bar{\bar{\bar{\Omega}}}$ است که $M_{۲۴}$ نامیده می‌شود و

$$|M_{۲۴}| = ۲۴ \times |M_{۲۳}| = ۲۴۴۸۲۳۰۴۴۰.$$

به‌این‌ترتیب ساختن ۵ گروه ماتیو تکمیل می‌شود. چون این گروهها از توسیع متعدی گروههای معینی حاصل می‌شوند می‌توان پرسید که آیا $M_{۱۲}$ و $M_{۲۴}$ دارای توسیع متعدی هستند؟ جواب این سؤال منفی است. یعنی نمی‌توان گروههای $M_{۱۲}$ و $M_{۲۴}$ را

به‌طور متعدی توسعه داد و از آنها گروههای دیگری به‌دست‌آورد. پنج گروه ماتیو ساده هستند یعنی دارای زیر گروه نرمال غیر بدیهی نمی‌باشند. این دوقضیه را بدون اثبات در زیر می‌آوریم

**قضیهٔ ۴.** گروههای ۵-متعدی $M_{12}$ و $M_{24}$ دارای توسیع متعدی نیستند.

**قضیهٔ ۵.** گروههای $M_{11}$، $M_{12}$، $M_{22}$، $M_{23}$ و $M_{24}$ ساده هستند.

## ۵. دستگاههای اشتاینر

برخی‌از گروههای سادهٔ پراکنده بااستفاده از ویژگیهای ترکیبیاتی گروههای ماتیو ساخته شده‌اند. دراین‌بخش به‌تشریح این‌ویژگیها می‌پردازیم. فرض‌کنید $\Omega$ مجموعه‌ای است متناهی با $|\Omega|=v$ عضو و $\mathcal{B}$ مجموعه‌ای‌از زیرمجموعه‌های $k$ عضوی $\Omega$ است. عناصر $\Omega$ را نقطه و عناصر $\mathcal{B}$ را بلوك می‌نامیم. زوج $(\Omega, \mathcal{B})$ یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح نامیده می‌شود اگرهر $t$ نقطه در دقیقاً $\lambda$ بلوك ظاهرشود. درحالتی که $\lambda=1$، $(\Omega, \mathcal{B})$ یك دستگاه اشتاینر نامیده می‌شود وآن را $S(t, k, v)$ نمایش می‌دهیم. دستگاههای اشتاینر برای اولین‌بار به‌وسیلهٔ وول‌هاوس [۱۹] مطرح‌شدند. او این‌سؤال را طرح‌کرد: به‌ازای چه‌مقادیری از پارامترهای $t$، $v$ و $k$ دستگاه اشتاینر $S(t, k, v)$ وجود دارد؟ اولین جواب به‌سؤال‌فوق توسط کرکمن ارائه شد [۱۰]. او دستگاه اشتاینر $S(3, 4, 2^n)$ را ساخت و نشان دادکه $S(2, 3, v)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $v \equiv 1$ یا $3 \pmod 6$. به‌ازای $t \leqslant 3$ خانواده‌های نامتناهی از دستگاههای اشتاینروجود دارد درصورتی‌که به‌ازای $t \geqslant 4$ برای مدتهای مدیدی فقط تعداد متناهی دستگاه اشتاینر شناخته‌شده بوده. این‌دستگاههای اشتاینر که به‌طرحهای ویت نیز معروفند عبارت‌اند از $S(4,5,11)$، $S(5,6,12)$، $S(4,7,23)$ و $S(5,8,24)$ که با گروههای ماتیو ارتباط نزدیك دارند. اخیراً دستگاههای اشتاینردیگری به‌ازای $t \geqslant 4$ پیدا شده‌اندکه از ذکرآنهاخودداری می‌کنیم.

در بخش قبل طرز ساختن گروههای ماتیو را شرح دادیم و دراین بخش شرح خواهیم‌دادکه چگونه طرحهای فوق با استفاده ازگروههای ماتیو به‌دست می‌آیند. ابتدا گروه خودریختی‌های یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح را شرح می‌دهیم. فرض‌کنید $D=(\Omega, \mathcal{B})$ یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح است. یك خودریختی از $D$ عبارت‌است از جایگشتی‌مانند $\pi$ از $\Omega$ به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $B \in \mathcal{B}$ داشته‌باشیم $B^\pi \in \mathcal{B}$. مجموعهٔ تمام خودریختی‌های $D$ تشکیل یك‌گروه می‌دهدکه‌آن‌را گروه خودریختی‌های $D$ نامیده وآن را با $\mathrm{Aut}\, D$ نمایش‌می‌دهیم. هرزیر گروه $\mathrm{Aut}\, D$ را یك‌گروه خودریختی‌های $D$ می‌نامیم. به‌این ترتیب گروههای خودریختی‌های $D$، که جایگشتهایی از $\Omega$ هستند، روی مجموعهٔ $\mathcal{B}$ یك‌گروه جایگشتی القا می‌کنند. ارتباط گروه خودریختی‌های $D$ با خود $D$ از قضیهٔ زیر که دارای اثباتی ساده است مشهود است.

**قضیهٔ ۶.** فرض‌کنید $(G, \Omega)$ یك‌گروه جایگشتی $t$-همگن است و $|\Omega|=v$، $v \geqslant t$ و $B \subseteq \Omega$ و $t \leqslant |B| = k$. آنگاه $D=(\Omega, B^G)$ یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح است که در آن $B^G=\{B^\pi \mid \pi \in G\}$. پارامتر $\lambda$ عبارت است از $\lambda=|G|\binom{k}{t}/|G_B|\binom{v}{t}$.

درقضیهٔ فوق $G_B$ پایدار ساز مجموعهٔ $B$ است. مجموعهٔ $B$ را یك **بلوك پایه** می‌نامیم. واضح است که در این حالت داریم $G \leqslant \mathrm{Aut}\, D$، یعنی $G$ یك‌گروه خودریختی‌های $D$ است.

حال مفهوم توسیع یك‌طرح را شرح می‌دهیم. طبق معمول فرض‌می‌کنیم $D=(\Omega, \mathcal{B})$ یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح است. همچنین فرض می‌کنیم $\omega \in \Omega$ نقطهٔ ثابتی است. نقطهٔ $\omega$ را از $\Omega$ و تمام بلوکهای $\mathcal{B}$ که $\omega$ را دربردارند حذف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\Omega'=\Omega-\{\omega\}$ و $\mathcal{B}'=\{B-\{\omega\} \mid B \in \mathcal{B}, \omega \in B\}$. در این حالت واضح است‌که $D_\omega=(\Omega', \mathcal{B}')$ یك

$$(t-1)\text{-}(v-1, k-1, \lambda)$$

طرح است که آن‌را **طرح مشتق‌شده در $\omega$** می‌نامیم. $D$ یك‌توسیع طرح $D_\omega$ نامیده می‌شود. قضیهٔ زیرمنسوب به‌هیوز [۸] است‌که بیان‌کنندهٔ ارتباطی است بین توسیع طرحها و توسیع گروهها.

**قضیهٔ ۷.** فرض‌کنید $D=(\Omega, \mathcal{B})$ یك $t$-$(v, k, \lambda)$ طرح است و $G \leqslant \mathrm{Aut}\, D$. همچنین فرض‌کنید $(G, \Omega)$ یك گروه جایگشتی $t$-متعدی و $(G, \mathcal{B})$ یك گروه جایگشتی متعدی است. به‌علاوه قرار می‌دهیم $\bar{\Omega}=\Omega \cup \{\infty\}$ و فرض می‌کنیم $(\bar{G}, \bar{\Omega})$ یك توسیع متعدی $(G, \Omega)$ است. به‌ازای بلوك ثابت $B \in \mathcal{B}$ قرار می‌دهیم $\bar{B}=B \cup \{\infty\}$ و $\bar{\mathcal{B}}=B^{\bar{G}}$. آنگاه $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}})$ یك

$$(t+1)\text{-}(v+1, k+1, \bar{\lambda})$$

طرح است که در آن

$$\bar{\lambda}=\frac{\lambda(k+1)|G_B|}{|\bar{G}_{\bar{B}}|}.$$

به‌علاوه طرح $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}})$ یك‌توسیع طرح $(\Omega, \mathcal{B})$ است‌اگروفقط‌اگر $\bar{\lambda}=\lambda$ و این درحالتی‌که $\bar{G}_{\bar{B}}$ روی $\bar{B}$ به‌طور متعدی عمل کند برقرار است.

حال گروه $M_{10}$ را که دربخش ۴ ازآن صحبت شد درنظر می‌گیریم. می‌توان ثابت‌کردکه عناصر این گروه عبارت‌اند از تبدیلات $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$، $ad-bc \in GF(9)^\square$، و

$$x \to \frac{ax^3+b}{cx^3+d}$$

$ad-bc \notin GF(9)^\square \neq 0$؛ در هرمورد $a$، $b$، $c$ و $d$ عناصری از $GF(9)$ هستند. قبلا توضیح دادیم که $M_{10}$ روی خط تصویری $\Omega=GF(9) \cup \{\infty\}$ به‌طور 3-متعدی عمل می‌کند و $|M_{10}|=720$. عمل $M_{10}$ روی زیر مجموعه‌های 4 عضوی $\Omega$ را درنظر گرفته و $B=\{\infty, 0, 1, -1\}$ را به‌عنوان بلوك پایه انتخاب‌می‌کنیم. بنابه‌قضیهٔ 6 زوج $(\Omega, B^{M_{10}})$ یك $3$-$(10, 4, \lambda)$ طرح است. از آنجایی که‌شکل عناصر $M_{10}$ مشخص است، می‌توان پایدارساز $B$ یعنی $M_{10(B)}$ را پیدا کرد. ما جزئیات محاسبه را نمی‌نویسیم ولی توضیح می‌دهیم که $|M_{10(B)}|=24$

و گروه $M_{10(B)}$ وقتی که روی $B$ عمل می‌کند همریخت است با $S_4$.
بنابه‌قضیهٔ ۶ داریم

$$\lambda=\frac{|M_{10}|\binom{4}{3}}{|M_{10(B)}|\binom{10}{3}}=10$$

بنابراین $(\Omega, B^{M_{10}})$ یك $(15, 4, 1)$-۳ طرح است و به‌عبارت دیگر یك دستگاه اشتاینر $S(3, 4, 15)$ است.

بنابه‌قضیهٔ ۲ می‌دانیم $M_{11}=\langle M_{10}, h_2\rangle$ و اگر قراردهیم $\bar{\Omega}=\Omega\cup\{\infty_1\}$، آنگاه $(M_{11}, \bar{\Omega})$ یك توسیع متعدی $(M_{10}, \Omega)$ است. بنابراین اگر قراردهیم $\bar{B}=B\cup\{\infty_1\}$ آنگاه بنابه‌قضیهٔ ۷، زوج $(\bar{\Omega}, B^{M_{11}})$ یك $(11, 5, \bar{\lambda})$-۴ طرح است، اما گروه $M_{11(\bar{B})}$ گروه $M_{10(B)}$ را دربردارد و لذا $M_{11(\bar{B})}$ هردونقطهٔ دلخواه $B$ را به یکدیگر تبدیل می‌کند. با توجه به‌ساختمان گروه $M_{11}$ درقضیهٔ ۲ دیده‌می‌شود که $h_2\in M_{11(\bar{B})}$. اما $\infty^{h_2}=\infty_1$ و در نتیجه $M_{11(\bar{B})}$ روی $\bar{B}$ به‌طور متعدی عمل می‌کند. بنابه‌قضیهٔ ۷ باید داشته‌باشیم $\bar{\lambda}=\lambda=1$ و درنتیجه $(\bar{\Omega}, B^{M_{11}})$ یك توسیع طرح $(\Omega, B^{M_{10}})$ است. به‌این‌ترتیب $(\bar{\Omega}, B^{M_{11}})$ یك دستگاه اشتاینر $S(4, 5, 11)$ است. به‌همین‌روش، دستگاه اشتاینر فوق‌را درنظر می‌گیریم و با توجه به اینکه $M_{12}$ یك توسیع متعدی $M_{11}$ است با استفاده از قضیهٔ ۷ دستگاه اشتاینر $S(5, 6, 12)$ را می‌سازیم که در اینجا از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم.

حال گروه $M_{21}=PSL(3, 4)$ را درنظر بگیرید. این گروه روی ۲۱ نقطهٔ تصویری به‌طور ۲-متعدی عمل می‌کند. اگر $B$ یك خط تصویری باشد آنگاه $|B|=5$ و بنابه‌قضیهٔ ۶، زوج $(\Omega, B^{M_{21}})$ یك $(21, 5, 1)$-۲ طرح است. علت $\lambda=1$ این‌است که هردونقطهٔ تصویری روی یك خط تصویری یکتا هستند. به‌این ترتیب دستگاه اشتاینر $S(2, 5, 21)$ را داریم که گروه خودریختی‌های آن $M_{21}$ است. بنابه‌قضیهٔ ۳ گروه $M_{21}$ را می‌توان به گروه $M_{22}$ توسعه داد و لذا اگر قرار دهیم $\bar{B}=B\cup\{\infty_1\}$ آنگاه $(\bar{\Omega}, \bar{B}^{M_{22}})$ یك $(22, 6, \bar{\lambda})$-۳ طرح است که می‌توان نشان‌داد $\bar{\lambda}=1$. بنابراین دستگاه اشتاینر $S(3, 6, 22)$ حاصل می‌شود که توسیع $S(2, 5, 21)$ است. مشابهاً دستگاه اشتاینر $S(3, 6, 22)$ قابل توسیع به $S(4, 7, 23)$ و دستگاه اخیر قابل توسیع به $S(5, 8, 24)$ است.

در واقع دستگاههای اشتاینر فوق یکتا هستند و می‌توان گروه خودریختی‌های آنها را به‌عنوان تعریف گروههای ماتیو درنظر گرفت. داریم

$$\mathrm{Aut}\,S(2, 5, 11)=M_{11}$$
$$\mathrm{Aut}\,S(5, 6, 12)=M_{12}$$
$$\mathrm{Aut}\,S(3, 6, 22)=M_{22}$$
$$\mathrm{Aut}\,S(2, 7, 23)=M_{23}$$
$$\mathrm{Aut}\,S(5, 8, 24)=M_{24}.$$

در بالا $M_{22}$ گروه خودریختی‌های $M_{22}$ است و

$$[M_{22}: M_{22}]=2.$$

از دیگرویژگیهای ترکیبیاتی گروههای ماتیو ارتباط آنها با نظریهٔ جبری کدگذاری است. کد خارق‌العادهٔ $(11, 23)$ و توسیع آن $(12, 24)$ که به کدهای گولای معروف‌اند با گروه‌ماتیوی $M_{24}$ ارتباط دارند. همچنین کد $(5, 11)$ و توسیع آن $(6, 12)$ با گروه $M_{12}$ مرتبط‌اند. در اینجا کد $(12, 24)$ را شرح می‌دهیم و از رهیافتی که در [۳] آمده است استفاده می‌کنیم. یك کد عبارت است از زیرمجموعه‌ای مانند $C$ از فضای برداری $V(n, q)$. اگر $C$ زیرفضایی از $V(n, q)$ باشد آن‌را یك کد خطی می‌نامیم. هیأت گالوای $GF(23)$ را درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$\Omega=GF(23)\cup\{\infty\},\ Q=\{x^2\mid x\in GF(23)\},\ N=\Omega\setminus Q.$$

$\mathcal{P}(\Omega)$، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های $\Omega$، با جمع متقارن، یك گروه آبلی است که به طور معمول دارای ساختار یك فضای برداری روی $GF(2)$ است. بنابراین $\mathcal{P}(\Omega)$ یك فضای برداری با بعد ۲۴ روی $GF(2)$ می‌باشد. واضح است که $M_{24}$ روی $\mathcal{P}(\Omega)$ عمل می‌کند. کانوی در [۳] نشان‌داده‌است که درعمل $M_{24}$ روی $\mathcal{P}(\Omega)$، یك‌زیرفضای ۱۲ بعدی $\mathcal{C}$ ناوردا است که همان کد دوتایی گولای است. این کد به‌وسیلهٔ ۲۴ مجموعهٔ $N_i$، $i\in\Omega$، تولید می‌شود

$$N_i=N-i=\{n-i\mid n\in N\},\quad N_\infty=\Omega$$

عناصر $\mathcal{C}$ که آنها را $\mathcal{C}$-مجموعه می‌نامیم عبارت‌اند از ۷۵۹ زیرمجموعهٔ ۸عضوی $\Omega$ که اکتاد نامیده می‌شوند، ۷۵۹ زیرمجموعهٔ ۱۶ عضوی $\Omega$ که مکمل اکتادها هستند، ۲۵۷۶ زیر مجموعهٔ ۱۲عضوی $\Omega$ بنام دودکاد، مجموعهٔ $\phi$، ومجموعهٔ $\Omega$. درواقع ۷۵۹ اکتاد $\mathcal{C}$ تشکیل دستگاه اشتاینر $S(5, 8, 24)$ را می‌دهند.

## ۶. ارتباط گروههای ماتیو با سایرگروههای پراکنده

گروههای متناوب $A_n$، $n\geqslant 5$، همگی ساده هستند. می گوییم که گروههای سادهٔ $A_n$، $n\geqslant 5$، تشکیل یك خانوادهٔ نامتناهی از گروههای سادهٔ متناهی می‌دهند. گروه ساده‌ای که عضو هیچ خانوادهٔ نامتناهی از گروههای سادهٔ متناهی نباشد **گروه سادهٔ پراکنده‌نامیده** می‌شود. گروههای سادهٔ ماتیو پراکنده‌اند و قریب به یك قرن تنها گروههای سادهٔ پراکندهٔ شناخته شده بودند. دراهمیت‌این گروهها همین‌بس که بگوییم‌اولین گروه سادهٔ پراکنده، بجز گروههای‌ماتیو، با استفاده از تشابه ساختار داخلی گروه ماتیوی $M_{12}$ ساخته شد. امروزه ثابت شده است که تنها ۲۶ گروه سادهٔ پراکنده وجود دارد [۵]. در این بخش برخی گروههای ساده را که مستقیماً با گروههای ماتیو ارتباط دارند ذکر می‌کنیم.

در گروه‌ماتیوی $M_{12}$ یك‌عضو مرتبهٔ ۲ووجود داردبه‌طوری که مرکزساز آن، گروهی است یکریخت با $S_4$. $(Q_8 * Q_8)$، که در اینجا $Q_8$ گروه کواترنیون مرتبهٔ ۸، و $*$ و $.$ به‌ترتیب حاصلضربهای مرکزی و نیم‌مستقیم دوگروه است. یانکو این‌سؤال را مطرح کرد که آیا یك گروه سادهٔ متناهی‌وجود دارد به‌طوری که مرکزساز یك عضو مرتبهٔ ۲ی آن مشابه مرکزساز عضوی مرتبهٔ ۲ در گروه ماتیو باشد؟ به‌زبان دقیق، او به‌عنوان مرکزساز عضومرتبهٔ

۲، گروهی به‌شکل $A_5 . (Q_8 * Q_8)$ را انتخاب کرد و قضیهٔ زیر را ثابت نمود.

**قضیهٔ ۸** [۹]. اگر $G$ گروهی ساده باشد و مرکزساز عضوی مرتبهٔ ۲ در $G$ یکریخت باشد با گروه $A_5 . (Q_8 * Q_8)$، آنگاه

الف) $G$ دارای ۲ کلاس تزویج اعضای مرتبهٔ ۲ است و $|G| = ۲^۷ . ۳^۳ . ۵^۲ . ۷ .$

ب) $G$ دارای یک کلاس تزویج اعضای مرتبهٔ ۲ است و $|G| = ۲^۷ . ۳^۵ . ۵ . ۱۷ . ۱۹ .$

بعداً هلد با درنظرگرفتن مشابه عضوی مرتبهٔ ۲ در گروه $M_{۲۴}$ قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

**قضیهٔ ۹** [۶]. اگر $G$ گروهی ساده و متناهی باشد و مرکزساز عضوی مرتبهٔ ۲ در آن یکریخت باشد با گروه

$$(D_8 * D_8 * D_8) . GL(۳, ۲)$$

آنگاه

الف) $G$ یکریخت است با $M_{۲۴}$ یا $GL(۵, ۲)$.

ب) $G$ دارای دوکلاس تزویج اعضای مرتبهٔ ۲ است و $|G| = ۲^{۱۰} . ۳^۳ . ۵^۲ . ۷^۳ . ۱۷ .$

می‌دانیم گروه ماتیوی $M_{۲۲}$ روی نقاط و بلوکهای دستگاه اشتاینر $S(۳, ۶, ۲۲)$ به‌طور متعدی عمل می‌کند. اگر مجموعهٔ نقاط را $\Omega$ و مجموعهٔ بلوکها را $\mathcal{B}$ فرض کنیم آنگاه $|\Omega| = ۲۲$ و $|\Omega| = ۷۷$. به‌این‌ترتیب $M_{۲۲}$ روی مجموعهٔ $\Omega \cup \mathcal{B}$ دارای عمل غیرمتعدی است. هیگمن و سیمز [۷] ثابت کردند $M_{۲۲}$، درعمل روی $\Omega \cup B$، دارای یک توسیع متعدی چون $G$ است. $G$ گروهی است ساده و درجهٔ آن عبارت است از $۱۰۰ = ۷۷ + ۲۲ + ۱$. مرتبهٔ $G$ برابر است با ۱۰۰ برابر مرتبهٔ $M_{۲۲}$. این گروه ساده، گروه هیگمن-سیمز نامیده می‌شود و آن را با $HS$ نمایش می‌دهند.

اما گروههای دیگری که با استفاده ازویژگیهای ترکیباتی گروههای ماتیو پیدا شدند، گروههای سادهٔ کانوی هستند. در سال ۱۹۶۹ کانوی [۴] سه‌گروه سادهٔ پراکنده با استفاده از گروه خودریختی‌های شبکهٔ لیچ پیداکرد. در اینجا مختصری از رهیافت کانوی را شرح می‌دهیم.

فرض کنید $\mathbf{R}^n$ فضای اقلیدسی $n$بعدی با حاصلضرب داخلی $(,)$ است. یک‌شبکهٔ $\Lambda$ در $\mathbf{R}^n$ عبارت‌است ازمجموعهٔ‌تمام ترکیبات خطی، با ضرایب در $\mathbf{Z}$، از بردارهای $v_1, \ldots, v_n$ در $\mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای‌از $\mathbf{R}^n$ باشد و $(v_i, v_j)$ به‌ازای تمام $i$ و $j$ها اعداد صحیحی باشند. حال فرض کنید $\{e_i \mid ۱ \leqslant i \leqslant ۲۴\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbf{R}^n$ است. شبکهٔ $\Lambda$ یک شبکهٔ صحیح نامیده‌می‌شود اگرمؤلفه‌های $v_i$، $۲۴ \leqslant i \leqslant ۱$، نسبت به‌پایهٔ فوق اعداد صحیح باشند. گروه خودریختی‌های شبکهٔ $\Lambda$، که با $\mathrm{Aut}\,\Lambda$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ تمام دورانهای $\mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که $\Lambda$ را پایدار سازند. لیچ در ارتباط با کره‌بندی فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^{۲۴}$ شبکهٔ خارق‌العاده‌ای پیدا کرد که به‌شبکهٔ لیچ معروف است [۱۲ و ۱۱] و آن را می‌توان چنین توضیح داد.

فرض می‌کنیم $\Omega$ یک‌مجموعهٔ ۲۴ عضوی است و $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ کدگولای است. دستگاه اشتاینر $S(۵, ۸, ۲۴)$ را که بلوکهای‌آن اکتادهای $\mathcal{C}$ هستند درنظرمی‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\{v_i \mid i \in \Omega\}$ یک پایهٔ متعامد یکانی برای $\mathbf{R}^{۲۴}$ است و مؤلفه‌های بردارهارا نسبت به‌این‌پایهٔ ثابت‌می‌نویسیم. به‌ازای هرعدد صحیح $m$ و هرزیرمجموعهٔ $S$ از $\Omega$ قرارمی‌دهیم

$$[S, m] = \left\{(x_1, \ldots, x_{۲۴}) \mid x_i \in \mathbf{Z},\ \sum_{i=1}^{۲۴} x_i = ۴m,\right.$$
$$\left. x_i \equiv m \pmod ۴ \text{ اگر } i \notin S, x_i \equiv (m+۲) \pmod ۴ \text{ اگر } i \in S\right\}$$

شبکهٔ لیچ عبارت است از $\Lambda = \cup [S, m]$، که درآن، اجتماع روی‌تمام $m \in \mathbf{Z}$ و $S \in \mathcal{C}$ درنظرگرفته می‌شود. به‌سادگی‌می‌توان بررسی کرد که به‌ازای هر $x \in \Lambda$ داریم $(x, x) \in ۱۶\mathbf{Z}$. اگر $(x, x) = ۱۶n$ آنگاه $x$ را یک‌بردار ازنوع $n$ می‌نامیم. مجموعهٔ بردارهای نوع یک تهی است و بردارهای نوع دوعبارت‌اند از:

$۲^۲ \times ۷۵۹$ بردار به‌شکل $(۲^8, ۰^{۱۶})$، که درآن هشت‌مؤلفهٔ ناصفر درمکان یک اکتاد جا دارند و تعداد ۲ها عددی زوج است.

$۲^{۱۲} \times ۲۴$ بردار به‌شکل $(۳, ۱^{۲۳})$، که درآن، مؤلفه‌هایی که همنهشت با ۱ — به‌پیمانهٔ ۴ هستند در مکان یک $\mathcal{C}$-مجموعه قرار دارند.

$۲^۲ \times \binom{۲۴}{۲}$ بردار به‌شکل $(۴^2, ۰^{۲۲})$.

مجموعهٔ تمام بردارهای‌نوع $n$ را با $\Lambda_n$ نمایش‌می‌دهیم. بنابراین، در بالا بردارهای $\Lambda_۲$ نوشته‌شده‌است و داریم $|\Lambda_۲| = ۱۹۶۵۶۰$.

کانوی‌درمرحلهٔ بعدی گروه خودریختی‌های $\Lambda$ را با «$۰$» نمایش داد و ثابت‌کرد که گروهی متناهی است. اما ابتدا زیر گروههایی از $۰$. به ترتیب زیر ساخت. اگر $S$ یک $\mathcal{C}$-مجموعه باشد آنگاه دوران $\epsilon_S$ که در زیرتعریف می‌شود عضوی از $۰$. است

$$\epsilon_S(v_i) = \begin{cases} -۱ & i \in S \\ ۱ & i \notin S \end{cases}$$

مجموعهٔ تمام $\epsilon_S$ها یک گروه آبلی مرتبهٔ $۲^{۱۲}$ را تشکیل می‌دهدکه باگروه جمعی $\mathcal{C}$ یکریخت‌است. این گروه‌را با $D$ نمایش‌می‌دهیم. هرعضو $\pi$ از $M_{۲۴}$ به ترتیب زیرعضوی از $۰$. القا می‌کند: $\pi(v_i) = v_{(i)\pi}$. به‌این ترتیب $M_{۲۴}$ در $۰$. نشانده می‌شود. به‌راحتی می‌توان نشان داد که رابطهٔ $DM_{۲۴} = M_{۲۴}D$ برقرار است و در نتیجه $M = D . M_{۲۴}$ زیر گروهی از $۰$. است. او نشان داد $M$ یک زیر گروه سرهٔ $۰$. است و قضیهٔ زیر را ثابت‌کرد.

**قضیهٔ ۱۰** [۴]. گروه $۰$. روی $\Lambda_۲$ به طور متعدی عمل می‌کند و اگر $x$ و $y$ دوبردار متعامد در $\Lambda_۲$ باشند آنگاه $(۰_{[x,y]}, ۰)$، پایدارساز $x$ و $y$ در $۰$.، گروهی است متناهی‌به‌شکل $M_{۲۲} . ۲^{۱۰}$ و بنابراین $۰$. گروهی است متناهی و

$$|۰.| = ۱۹۶۵۶۰ \times ۹۳۱۵۰ \times ۲^{۱۰} \times |M_{۲۲}| .$$

گروه $۰$. ساده نیست زیرا $Z(۰.) = \langle \epsilon_\Omega \rangle$ یک زیر گروه

نرمال آن است اما گروه $\frac{\circ\circ}{Z(\circ\circ)}$ ساده است که کانوی آن را با ۱۰ نشان داد. گروه ۰۰ روی $\Lambda_{\gamma}$ و $\Lambda_{\gamma}$ به طور متعدی عمل می‌کند و پایدارساز یك‌حرف در هرمورد گروهی ساده است که به‌ترتیب با ۲۰ و ۳۰ نمایش داده می‌شوند. گروههای ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ گروههای سادهٔ پراکنده هستند.

## مراجع


1. E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York (1957).
2. F. N. Cole, "List of the transitive substitution groups of ten and of eleven letters," *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **27** (1895) 39-50.
3. J. H. Conway, "Three lectures on exceptional groups," *Finite Simple Groups*, ed. M. B. Powel and G. H. Higman, Academic Press, London, New York (1971).
4. J. H. Conway, "A group of order 8315553613086720000," *Bull. London Math. Soc.*, **1** (1969) 79-88.
5. D. Gorenstein, *Finite Simple Groups*, Plenum Press, New York and London (1982).
6. D. Held, "The simple groups related to $M_{24}$," *J. alg.*, **13** (1969) 253-296.
7. D. Higman, S. Sims, "A simple group of order 44352000," *Math Z.*, **105** (1968) 110-113.
8. D. R. Hughes, "Combinatorial analysis, t-designs and permutation groups," *Proc. Symp. Pure Math.*, **6** (1962) 39-41.
9. Z. Janko, "Some new finite simple groups of finite order," *First Naz. Alta Math. Symposia Math.*, **1** (1968)25-65.
10. T. P. Kirkman, "On a problem in combinatorics," *Cambridge and Dublin Math. J.*, **2** (1947) 191-204.
11. J. Leech, "Some sphere packings in higher space," *Canad. J. Math.*, **16** (1964) 657-682.
12. J. Leech, "Notes on sphere packings," *Canad. J. Math.*, **19** (1967) 251-267.
13. E. Mathieu, "Memoire sur le nombre de valeurs que peut acquerir une fonction quand on y permut ses variables de toutes les manieres possibles," *Crelle J.*, **5** (1860) 9-42.
14. E. Mathieu, "Memoire sur l'etude des fonctions des plusieures quantites, sur la maniera de les formes, et sur les substitutions qui les laissent invariables," *Crelle J.*, **6** (1861).
15. E. Mathieu, "Sur la fonction cinq fois transitive des 24 quantities," *Crelle J.*, **18** (1873) 25-46.
16. J. A. Miller, "On the simple groups which can be represented as substitution groups that contain cyclical substitutions of a prime degree," *Amer Math. Monthly*, **6** (1899) 102-103.
17. H. Wielandt, *Finite Permutation Groups*, Academic Press, New York and London (1964).
18. E. Witt, "Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **12** (1938) 256-264.
19. W. S. B. Woolhouse, Prize questions 1733, *Lady's and Gentleman's Diary* (1844).


* محمدرضا درفشه و غلامرضا برادران خسروشاهی، بخش ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران؛ مرکز فیزیك تئوری و ریاضی سازمان انرژی اتمی ایران

# آندرِی نیکولایویچ کولموگوروف•

و.م. تیهومیروف*
ترجمهٔ محمدباقری

در روز بیستم اکتبر ۱۹۸۷ [۲۸ مهر ۱۳۶۶] یکی از بزرگترین دانشمندان عصرما، آندری‌نیکولایویچ کولموگوروف، درگذشت. آ. ن. کولموگوروف درسال۱۹۰۳ به‌دنیا آمد. مادرش به‌هنگام وضع حمل درگذشت و پدرش در بزرگ‌کردن وی نقشی به‌عهده نگرفت. با وجود این، دوران کودکی کولموگوروف در محیطی سرشار ازمحبت، مراقبت و توجه سپری شد. خاله‌اش تربیت او را تقبل کرد و نخستین سالهای کودکیش در املاك پدربزرگ مادریش‌که زمانی زمیندار بزرگی‌بود، گذشت. اطرافیان پسربچه می‌کوشیدند تا عشق به دانش، کتاب و طبیعت را در جان وی بنشانند. خود او گفته است: «خیلی زود، یعنی در سن پنج یا شش سالگی به لذتی که درکشفیات ریاضی نهفته است پی‌بردم. به رابطه‌های $۱^۲=۱$، $۲^۲=۳+۱$، $۳^۲=۵+۳+۱$، $۴^۲=۷+۵+۳+۱$، و غیره توجه یافتم.» بستگانش در خانه که‌محل پرورش او بود مدرسهٔ کوچکی برپا کردندکه اندیشه‌های تربیتی جدید آن زمان بر آن حاکم بود. آنها نشریه‌ای به نام پومتوی بهادِ «منتشر» می‌کردند که پسرك پنج ساله مسؤول بخش ریاضی آن بود. وی کشف خود را در این نشریه درج کرد.

وقتی پسرك شش‌ساله شد، به‌همراه خاله‌اش به‌مسکو کوچ کرد. وی‌را درآموزشگاهی‌پذیرفتند که‌یکی ازپیشرفته‌ترین‌آموزشگاههای آن‌دوران به شمار می‌آمد. این‌آموزشگاه را گروهی‌از روشنفکران بنیادگرا تأسیس کرده بودند. اجرای بسیاری تجربیات تربیتی جالب در جوار درسهای معمولی، موجب تمایز این آموزشگاه نسبت به‌اغلب آموزشگاههای آن‌زمان بود.

آندری‌کوچك ضمن تحصیل به‌موضوعهای فوق‌العاده متنوعی علاقه نشان می‌داد. زیست‌شناسی و فیزیك را به طور جدی مطالعه می‌کرد؛ در ۱۲ سالگی به مطالعهٔ ریاضیات عالی از روی یك دایرةالمعارف پرداخت؛ به‌شطرنج علاقه داشت و مسائل اجتماعی توجهش را جلب می‌کرد ( و به‌خصوص، یك قانون اساسی برای حکومت‌کمون در مدینهٔ فاضله‌ای‌واقع دریك‌جزیرهٔ خیالی تدوین کردکه درآن اصول عدالت متعالی پیاده شود). درسال ۱۹۱۷در رأی‌گیری‌برای‌مجلس مؤسسان شرکت‌کرد،وعمیقاً به‌مطالعهٔ تاریخ پرداخت. شدیداً شیفتهٔ تاریخ شد. وی بعدها نقل کرده است که: «اولین سخنرانی علمی من‌که در سن ۱۷سالگی در دانشگاه مسکو ایراد کردم گفتاری بود که در سمینار پروفسور س. و. باهروشین راجع به‌زمینداران نووگورود عرضه شد.» کولموگوروف دراین مورد کشفی‌کردکه به‌توسط باهروشین‌که خود یکی‌از تاریخدانان پیشرو روس درآن‌زمان بود، تأیید شد. کولموگوروف جوان از استاد خواست که نتیجهٔ تحقیقش منتشر شود. پاسخی که دریافت کرد چنین بود: «چنین چیزی نخواهید، جوان. شما تنها یك دلیل عرضه کرده‌اید و این برای تاریخدان کافی نیست. دست‌کم پنج دلیل باید آورده‌شود.» شایدسرخوردگی‌دراین‌مورد روی‌سرنوشت آینده‌اش تأثیر گذاشته‌باشد. او ترجیح‌داد به‌ریاضیات روی‌آورد که در آن یك دلیل کفایت می‌کند.

بااین‌حال تصمیم وی‌برای‌آنکه سرنوشت‌خودرا با ریاضیات گره بزند، به‌طور آنی گرفته نشد. در دانشگاه مسکو (به سال ۱۹۲۰) در بخش متالورژیِ انستیتوی تکنولوژیِ شیمیایی نیز ثبت‌نام‌کرد زیرا می‌خواست رشتهٔ مفید مهندسی را دنبال کند. ولی اندکی‌بعد یکسر به‌بخش فیزیك-ریاضی دانشگاه‌پیوست و تا پایان عمر ارتباط خود را با این دانشگاه حفظ کرد.

حال وهوای سازنده و متعالی‌دانشگاه سریعاً اورا جذب کرد. در کلاس درس دانشمندان برجسته، به‌خصوص استاد آینده‌اش نیکولای نیکولایویچ لوسین، حاضر می‌شد و با دوتن ازشاگردان لوسین‌به‌نامهای‌پاول سرگیویچ آلکساندروف و پاول‌ساموییلوویچ اوریسون‌که بعدها در پیشبرد توپولوژی نقش عمده‌ای یافتند مراودهٔ علمی فعالی برقرارکرد.

همدوره‌های او تعریف می‌کنندکه یك بار (در سال ۱۹۲۰)



وقتی دانشجوی سال اول بود هنگام گوش دادن به درس لوسین، یکی‌از نظرهای استاد را ردکرد. با ارائهٔ این موضوع در محافل ریاضی، برای نخستین بار توجه دیگران را به‌خود جلب‌کرد و اوریسون به آندری نیکولایویچ پیشنهاد کرد که شاگرد او بشود. کولموگوروف دست به ایجاد نظریه‌ای عمومی درمورد اعمال روی مجموعه‌ها زد، با این قصد که مبحث مزبور را از وضعیتی که آلکساندروف و سوسلین به‌جاگذاشته‌بودند پیشتربرده. در فوریهٔ ۱۹۲۲ رسالهٔ مفصلی در این باب نوشت. او درسمینار و. و. استپانوف راجع به‌سریهای مثلثاتی شرکت کرد. در آنجا یکی‌از مسائل مطرح‌شده از سوی لوسین را حل‌کرد و به‌دنبال آن لوسین «با تشریفات خاصی» (به‌قول خود کولموگوروف) به‌وی پیشنهادکرد که‌شاگردش‌بشود. درتابستان۱۹۲۲ آندری‌نیکولایویچ به‌نتیجهٔ چشمگیری دست‌یافت (رساله‌ای به‌تاریخ ۱۹۲۲/۶/۲): او یك سری فوریه به‌دست‌آورد که همه‌جا واگرا بود. این نتیجه بلافاصله در سطح جهانی نظرها را به‌او جلب کرد. این مقطع را می‌توان آغاز خلاقیت بی‌همتای وی به‌شمار آورد.

کولموگوروف درسال۱۹۲۵ ازدانشگاه مسکو لیسانس گرفت و دانشجوی فوق لیسانس لوسین شد. همین سال آغاز دورهٔ تأثیر گذاری وی برنظریهٔ احتمال بود. درسال۱۹۲۹ به‌نخستین‌سفر طولانی‌خود روی رود ولگا به‌اتفاق پاول سرگیویچ آلکساندروف دست زد و ازهمین‌جا دوستی استواری پایه‌ریزی‌شدکه تا واپسین روزهای زندگی پاول سرگیویچ ادامه یافت (آلکساندروف در شانزدهم نوامبر۱۹۸۲ درگذشت). درسال ۱۹۳۵ کولموگوروف وآلکساندروف، خانه‌ای‌برکنارهٔ رود «کلیازما» درمحلی نه‌چندان دور از مسکو تهیه‌کردند، که اغلب اوقات خلاق زندگیشان در آنجا سپری می‌شد. طی پنجاه‌سال پس از آن، نسلهای متعددی از ریاضیدانان با این خانه آشنا شدند.

در سال ۱۹۳۱ کولموگوروف استاد دانشگاه مسکو شد. در سال ۱۹۳۹ به عضویت کامل فرهنگستان علوم شوروی در آمد. آندری نیکولایویچ در دانشگاه، بخش نظریهٔ احتمال را بنا نهاد (خودش ازسال۱۹۳۸ تا۱۹۶۶سرپرست آنجابود)؛ همچنین «آزمایشگاه احتمال وروشهای آماری»(که ازسال۱۹۶۶تا۱۹۷۶ سرپرست آن بود) و بخش آمار ریاضی (که از سال ۱۹۷۶ تا ۱۹۸۰ ریاست آن را داشت) به‌دست وی در دانشگاه تأسیس‌شد. از سال ۱۹۸۰ تا ۱۹۸۷ سرپرستی بخش منطق ریاضی‌را برعهده داشت. وی ازسال ۱۹۳۳ تا ۱۹۳۹ در دانشگاه مسکو رئیس انستیتوی ریاضیات بود و از سال ۱۹۵۱ تا ۱۹۵۳ مجدداً این سمت را داشت. از سال ۱۹۵۴ تا ۱۹۵۸ رئیس بخش «مکانیك‌ـریاضی» دانشگاه مسکو بود.

کولموگوروف دبیر بخش علوم فیزیك ـ ریاضی فرهنگستان علوم (۱۹۳۹ تا ۱۹۴۲)، رئیس بخش نظریهٔ احتمال انستیتوی ریاضی استکلف درفرهنگستان علوم (۱۹۳۹تا۱۹۵۸) وسرپرست آزمایشگاه اختلالات‌جوی درانستیتوی‌ژئوفیزیك فرهنگستان علوم (۱۹۲۶ تا ۱۹۲۹) بود. از دسامبر ۱۹۶۲ تا دسامبر ۱۹۶۶ و از نوامبر ۱۹۷۳تا اکتبر ۱۹۸۵ کولموگوروف رئیس انجمن ریاضی مسکو بود.

کولموگوروف ازژوئن ۱۹۳۵تامارس ۱۹۳۱ درگوتینگن، مونیخ وپاریس به‌سر برد و طی‌این‌اقامتها با هیلبرت، کاراتئودوری، ای. لاندائو، پ. لوی، فرشه، لبگ، بورل، ه. وایل و ریاضیدانان برجستهٔ دیگر ملاقات کرد. در سال ۱۹۵۴ به‌مدت دو ماه استاد مدعو دانشگاه هومبولت واقع‌دربرلین بود و درترم بهاری۱۹۵۸ به عنوان استاد مدعو در دانشگاه پاریس حضور یافت.

کولموگوروف دربرگزاری کنگره‌های بین‌المللی ریاضیات در آمستردام (۱۹۵۴)، استکهلم (۱۹۶۲)، مسکو (۱۹۶۶)، و نیس (۱۹۷۰) شرکت فعال داشت. وی افتخار آن را یافت که سخنران جلسهٔ پایانی کنگرهٔ آمستردام باشد. وی دراین‌جلسه گفتاری پیرامون دستگاههای دینامیکی عرضه‌کرد (کنگره با سخنرانی فون نویمان آغاز شده بود).

بیش‌ازبیست انجمن علمی آندری نیکولایویچ کولموگوروف را به عضویت خود پذیرفتند. از آن جمله‌اند: فرهنگستان سلطنتی علوم هلند (۱۹۶۳)، انجمن سلطنتی لندن (۱۹۶۴)، فرهنگستان ملی علوم‌ایالات متحدهٔ آمریکا (۱۹۶۷)، فرهنگستان علوم پاریس (۱۹۶۸)، فرهنگستان علوم رومانی (ازسال۱۹۵۷عضو مکاتبه‌ای، از سال ۱۹۶۵ عضو افتخاری)، فرهنگستان علوم لهستان (۱۹۵۶، به‌عنوان عضوخارجی)، وفرهنگستان‌علوم‌مجارستان(۱۹۶۵، به‌عنوان عضو افتخاری). وی از دانشگاههای پاریس، استکهلم، ورشو و

بوداپست، انجمن ریاضی کلکته[1] و انجمن سلطنتی آمار لندن و چندین جای دیگر دکتری افتخاری دریافت کرد.

وی شایستهٔ دریافت جوایز و نشانهای متعددی شناخته شد که برخی از آنها عبارت‌اند از: جایزهٔ دولتی اتحاد شوروی (درسال ۱۹۴۱ به‌همراه یا. خینچین)، جایزهٔ چبیشف از فرهنگستان علوم اتحاد شوروی (در سال ۱۹۴۹ همراه با ب. و. گنه‌دنکو)، جایزهٔ لنین (درسال۱۹۶۵ به‌اتفاق آرنولد)، جایزهٔ لباچفسکی (۱۹۸۶)، جایزهٔ بین‌المللی بنیاد بولتسان (در سال۱۹۶۳ که همزمان با وی، جوایز رشته‌های دیگر به‌پاپ یوآنس بیست‌وسوم، موریسون تاریخدان، ك. فریش زیست شناس و پ. هیندمیت آهنگساز داده شد)، جایزهٔ ولف، نشان زرین از انجمن هواشناسی آمریکا، نشان هلمهولتس.

آری، کولموگوروف به‌چنین مدارج عالی وارزنده‌ای دست یافت.

آ. ن. کولموگوروف در دنیای علوم ریاضی جایگاه بی‌نظیری دارد. غنای مجموعهٔ آثار علمی او بی‌همتاست و او را از لحاظ تنوع اشتغالات ذهنی در ردیف حکیمان عهد باستان درآورده است. دستاوردهای او هم شامل نتایج اساسی و بنیادی وهم مشتمل بر نظرها و قضایای کامل و قطعی است. او مسائلی مطرح کرده که موجب تحرك زیادی در پژوهشهای جدید شده‌است.

دوران خلاقیت زندگی آندری نیکولایویچ نزدیك به پنجاه سال تداوم یافت. در اینجا دوره‌های دهسالهٔ این دوران را با هم مرور می‌کنیم.

دهسالهٔ اول (دههٔ ۱۹۲۰). آندری نیکولایویچ پیش‌از هرچیز روی مسائل ویژهٔ مکتب لوسین در نظریهٔ توابع کارکرد (نظریهٔ سریهای مثلثاتی و متعامد، اعمال روی مجموعه‌ها، نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری). ولی درهمین‌ایام یك‌دورهٔ پژوهش دربارهٔ نظریهٔ احتمال را آغاز کرد و دو رساله راجع به‌منطق ریاضی نوشت، حتی دراین‌مقطع که سرآغاز سالهای خلاقیت او بود، آفرینش مفاهیم تازه، با حل مسائل بنیادی دشوار در کار او با یکدیگر آمیخته شده‌بود.

او دراین زمان چهارقضیهٔ زیر را در زمینهٔ آنالیز همساز و نظریهٔ احتمال عرضه کرد.

الف) وی یك تابع $x \in L_1([-\pi, \pi])$ ساخت که سری فوریه‌اش همه‌جا واگراست. تقریباً پنجاه‌سال بعد کارلسون و هانت ثابت کردند که اگر $x \in L_p([-\pi, \pi])$ و $p > 1$، آنگاه سری فوریهٔ تابع تقریباً همه‌جا همگراست.

ب) برهان این‌حکم که تبدیل هیلبرت، به‌بیان‌امروزی، ازنوع ضعیف (۱،۱) است. یعنی اگر $x \in L_1([-\pi, \pi])$ و $\tilde{x}$ تابع مختلط مزدوج باشد آنگاه $\|\tilde{x}\|_{1,\infty} \leqslant \alpha^{-1}\|x\|_1$ اندازهٔ $\{t : |\tilde{x}(t)| \geqslant \alpha\}$. این‌قضیه یکی‌ازپایه‌های آنالیز همساز است. قضیهٔ مزبور مبنای پژوهشهای بعدی ریاضیدانانی‌چون‌ریتس، مارسین‌کیویچ، زیگموند، کالدرون و دیگران‌شد.

پ) یافتن شرطهای لازم و کافی برای قانون اعداد بزرگ، مسأله‌ای‌که چبیشف و مارکوف مطرح کرده‌بودند.

ت) یافتن شرایط فراوان قانون لگاریتمهای مکرر.

کولموگوروف علاوه بر اینها، نظریهٔ عمومی اعمال روی مجموعه‌ها را پدیدآورد و روشی عمومی راجع به‌دریافت اساسی ما از اندازه و انتگرالگیری عرضه‌کرد. (کولموگوروف بارها اظهار امیدواری می‌کرد که پژوهشهای دههٔ بیست و سی او راجع به‌نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری‌جایگاه مناسب خود را درپیشرفتهای بعدی نظریهٔ توابع به‌دست آورد). از همهٔ اینها گذشته، منطق کلاسیك را در بطن منطق شهودی (یعنی منطق بدون قانون طرد شق ثالث) جای داد و بااین‌حال ثابت کرد که کاربرد قانون طرد شق ثالث به خودی خود نمی‌تواند به‌تناقض بینجامد. در اثر دوم ثابت شده بود که منطق شهودی همچون منطق ساختنی مهار شدنی است. آثار این‌دورهٔ او راجع به‌منطق ریاضی ازمدتها پیش جزو مبانی این‌رشته درآمده است.

دومین دههٔ مورد بررسی دههٔ ۱۹۳۰ است. این‌دوره یکی‌از دو دورهٔ دهساله‌ای است که کولموگوروف بیشترین کارایی را داشته است. گرچه معروفترین کارهای کولموگوروف در زمینهٔ نظریهٔ احتمال به این دوره تعلق دارد ولی او علاوه بر این، در زمینه‌هایی‌چون‌هندسه، آنالیز تابعی، توپولوژی جبری، توپولوژی عمومی، نظریهٔ تقریبها، معادلات دیفرانسیل وآنالیز ریاضی نیز کارکرد. دراین‌دوره، مفاهیم تازه، نظرهای‌بنیادی، قضایای اساسی و صورتبندی مسائل جدید سهم عمده را داشتند.

در سال ۱۹۳۳، رسالهٔ کولموگوروف تحت عنوان «مفاهیم بنیادی نظریهٔ احتمال» انتشار یافت، که همراه با آثار یاکوب برنولی و لاپلاس به‌عنوان اثری کلاسیك درنظریهٔ احتمال پذیرفته شد. این رساله بیانگر مرحلهٔ تازه‌ای در تکوین نظریهٔ احتمال به عنوان یك دانش ریاضی بود و نظریهٔ اصل موضوعی احتمال تا حدی درآن شکل گرفته‌بود.

در همین سال، رسالهٔ تحسین برانگیز «روشهای تحلیلی در نظریهٔ احتمال» منتشر شد. در این‌اثر، نظریهٔ فرایندهای مارکوف تکمیل شده و فرایندهای مارکوف و معادلات دیفرانسیل سهموی برای نخستین‌بار با هم درآمیخته بود. معادلات پیشرو و پسروی کولموگوروف دراین‌اثر مطرح شده بود. قبلاً معادلات پیشرو تا حدی در آثار اینشتین، فوکر، پلانك، اسمولوچوفسکی و سایر فیزیکدانان برجسته ظاهر شده بود. بعد از انتشار رسالهٔ کولموگوروف، نظریهٔ فرایندهای مارکوف به‌صورت ابزارعلمی نیرومندی درآمد.

در پایان این‌دورهٔ دهساله، نظریهٔ فرایندهای مانای تصادفی عملاً به‌توسط کولموگوروف به‌وجودآمد. اندکی بعد، نوربرت وینر مستقلاً به‌همان نتایج دست یافت که آنها را جزو عالیترین یافته‌های خود دانسته‌است. اما علاوه‌برهمهٔ اینها، کولموگوروف (همتراز با فون نویمان) یکی‌از پیشگامان نظریهٔ فضاهای توپولوژیك خطی بودکه قضیه‌ای بنیادی نیز درآن عرضه کرده است: معیاری برای وجود هنج [نورم] در فضاهای توپولوژیك خطی. وی آغازگر هندسهٔ توپولوژیك بود وهندسهٔ تصویری پیوسته را روی میدانهای موضعی تشریح کرد. او همزمان با آلکساندر که از توپولوژیدانان

---

۱. برای آشنایی بیشتر با تاریخچه وشرح فعالیتهای این انجمن نگاه کنید به مقالهٔ مندرج در شمارهٔ دوم نشریهٔ فرهنگ‌واندیشهٔ ریاضی (پاییز ۱۳۶۱)، از انتشارات انجمن ریاضی ایران.



پیشرو آمریکایی است، به‌یکی از مهمترین مفاهیم توپولوژی جبری که تمامی توپولوژی را دگرگون کرده دست یافت، یعنی مفهوم کوهمولوژی و ایجاد نظریهٔ اعمال کوهمولوژیك. او نظریهٔ تقریبها را با عرضهٔ مسائل نو و مطرح کردن مفاهیم تازه غنیتر کرد. این کار شور وجنبش فراوانی در این رشته از آنالیز پدید آورد، چنانکه صدها نفر را به‌کار روی این زمینه کشاند. کولموگوروف به‌همراه ای. گ. پتروفسکی و ن.س. پیسکونوف نظریه‌ای ریاضی دربارهٔ پایداری جواب موج رونده برای معادلات پخش [دیفوزیون] باطرف دوم غیرخطی پدید آوردند (در کتابشناسی آثار مربوط به این موضوع بیش از هزار منبع را می‌توان ذکر کرد). نظریهٔ زنجیرهای مارکوف با حالات شمارا نیز پدید آورده شد و خیلی کارهای دیگر هم صورت گرفت.

نتایج زیر حاصل همین دوره‌اند:

الف) ساختن نگاشت بازی که بعد را افزایش می‌دهد.

ب) برهان قضیهٔ بنیادی مربوط به انحراف تابع توزیع تجربی نسبت به‌تابع توزیع واقعی.

پ) حل مسألهٔ آدامار راجع به‌نابرابری مربوط به‌مشتقها.

دههٔ چهارم از لحاظ تغییر علائق کولموگوروف به سمت کاربردها، شایان توجه است. او در این‌دوره یك‌سری آثار مهم راجع به‌نظریهٔ تلاطم[1] منتشر کرد. کارهای کولموگوروف این‌رشته را دگرگون کرد و بر همهٔ تحولات آتی این‌حوزهٔ جدید از علوم طبیعی تأثیر چشمگیری گذاشت. یکی‌از معروفترین نتیجه‌گیریهای مشخص او وقانون دوسوم» است. کشف این‌قانون مرحلهٔ مهمی‌از پیشرفت درمطالعهٔ طبیعت بود. طبق این‌قانون: دریك‌جریان‌متلاطم، میانگین مجذور تفاضل سرعت دونقطه به‌فاصلهٔ $r$ از یکدیگر (اندازهٔ متوسط) متناسب با $r^{2/3}$ است.

کولموگوروف در این سالها پرتاب‌شناسی [بالستیك] را

1. turbulence

تکامل بخشید، کارهایی در مسائل زیست‌شناختی انجام‌داد، ومسائلی در حوزهٔ زمین‌شناسی، هواشناسی، کنترل آماری و بلورشناسی مطرح کرد.

در قلمرو ریاضیات، نظریهٔ فرایندهای انشعابی را پایه‌گذاری کرد و نظریهٔ درونیابی و برونیابی دنباله‌های تصادفی را پدید آورد. وی در این سالها (به‌همراه ب. و. گنه‌دنکو) اثر کلاسیك مربوط به‌توزیعهای حدی برای‌مجموعهای متغیرهای تصادفی مستقل را نوشت.

درمیان همهٔ نتایج مشخصی که کولموگوروف به‌دست آورد، یك قضیه راجع به‌کامل‌بودن نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروهها (که آن‌را منتشر نکرد) نیز مشاهده می‌شود.

دههٔ بعد، یعنی دههٔ ۱۹۵۰ دورهٔ بروزجهش غیرعادی درنیروی خلاقیت اوست. دراین‌دوره نیز همچون دوره‌های گذشته، آفرینش مفاهیم مهم و تازه با حل مسائل بنیادی و رام‌نشدنی همراه بود.

در اینجا باید پیش‌از هرچیز به‌یك سری کارهای او در زمینهٔ مکانیك کلاسیك اشاره‌کنیم. کولموگوروف درکنگرهٔ آمستردام که قبلاً ذکرش رفت، مروری کلی بر این نتایج را ارائه کرد. تاریخچهٔ مسألهٔ شکل‌گیری‌مدارها درمسألهٔ سه جسم به‌زمان نیوتن و لاپلاس برمی‌گردد. پوانکاره مسألهٔ رفتار دستگاههای همیلتنی تحت اختلالهای کوچك تابع همیلتنی را «مسألهٔ اساسی دینامیك» نامیده است. این‌مسأله درحالت‌کلی به‌ازای اغلب شرایط اولیه به‌وسیلهٔ کولموگوروف حل‌شد. روشهای اثباتی که کولموگوروف دراین‌مورد ابداع کرده نقش عظیمی در آنالیز کلاسیك، مکانیك و سایر حوزه‌های علوم طبیعی داشته‌است. این‌روشها بعداً به‌توسط آرنولد و موزر تکمیل و به نظریهٔ کام (نظریهٔ کولموگوروف-آرنولد-موزر) معروف شد.

در این‌سالها کولموگوروف به‌نتیجهٔ اساسی زیر دست‌یافت: هر تابع پیوسته روی مکعبی $n$بعدی ($n$ هرچه باشد) را می‌توان به‌صورت برهم‌نهش تابعهای پیوستهٔ سه متغیره نشان‌داد. این‌قضیه، مسألهٔ سیزدهم هیلبرت را به‌مسألهٔ مشخص نمایش توابع روی درختهای عمومی در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌کند. مسألهٔ اخیر را آرنولد (با راهنمایی کولموگوروف و به‌عنوان کار دانشجویی سال سوم) حل‌کرد و به‌این‌ترتیب فرض هیلبرت رد شد.

سپس کولموگوروف به‌این نتیجهٔ قطعی‌دست‌یافت که: هر تابع پیوسته روی‌مکعبی با هرتعداد بعد را می‌توان به‌صورت برهم‌نهش توابع پیوسته و عمل جمع نشان داد.

کولموگوروف با استفاده ازنظریهٔ ارگودیك یك ناوردای متری جدید یعنی آنتروپی دستگاههای دینامیکی را مطرح کرد. به این ترتیب از یك سو مسألهٔ کلاسیك مربوط به نایکریختی خوددریختی‌های برتولی حل‌شد واز سوی دیگر قلمرو کاملاً تازه‌ای برای پژوهش گشوده‌شد که بعدها به پیدایش نظریهٔ آشوب منتهی گشت.

وی گذشته‌ازاین‌کارهای‌فوق‌العاده مهم، روشهای شگفت‌انگیز تازه‌ای برای‌نظریهٔ‌الگوریتمها یافت، اصول پایه‌ای نظریهٔ‌شمارش را تبیین کرد، اثری بنیادی در زمینهٔ آمار (براوردهای نااریب) نوشت؛ قضیهٔ حد یکنواخت‌را برای‌حاصلجمع اجزاء مستقل اثبات کرد (کولموگوروف خود به‌این‌نتیجه بسیار می‌بالید)؛ مفهوم

آنتروپی را مطرح کرد و بدین ترتیب شیوهٔ جدیدی در نظریهٔ تقریبها پدید آورد، کارهای مهمی در زمینهٔ نظریهٔ آگاهی انجام داد و ثابت کرد که فضاهای تابعی تحلیلی با تعداد متغیرهای متفاوت، نمی‌توانند یکریخت باشند.

دههٔ ۱۹۶۰، آخرین دهه‌ای‌است که کولموگوروف درخلال آن فعالانه به مطالعهٔ ریاضیات صرف پرداخت. وی در این دوره اغلب توجه خود را روی مسائل آموزشی متمرکز می‌کرد. به‌علاوه، گاه و بیگاه روی مسائل علم عروض کار می‌کرد.

کولموگوروف در آخرین دوره از زندگی خلاقه‌اش برنامهٔ بلندپروازانه‌ای را پیش می‌برد که شامل مطالعهٔ همزمان پیچیدگی، ویژگیهای تصادفی فرایندهای تعینی و تعین ناپذیری فرایندها و پدیده‌های تصادفی بود. عملاً تجربهٔ همهٔ سالهای خلاقیتش در این برنامه تبلور یافت. کولموگوروف طی مقاله‌هایی که درسالهای ۱۹۶۵ و ۱۹۶۹ در نشریهٔ «مسائل انتقال آگاهی» منتشر کرد پایه‌های حوزهٔ جدیدی از دانش را که نظریهٔ الگوریتمی آگاهی خوانده می‌شود گذاشت و شیوهٔ تازه‌ای دربرخورد با مبانی منطقی نظریهٔ احتمال عرضه کرد.

اینها شمه‌ای از فرازهای زندگینامهٔ سرشارازخلاقیت اوست.

کولموگوروف بر دانشمندان پرشماری تأثیر گذاشته است. حدود شصت دانشجوی فوق‌لیسانس و دکتری زیرنظر او کار کردند که خیلی‌ازآنها بعدها رهبران رشته‌های علمی گوناگون شدند[۱].

احتمالاً هیچ شخص دیگری بر چنین مجموعهٔ پر تنوعی از رشته‌های علمی اشراف نداشته است. کولموگوروف طی بیست و پنج سال پایانی زندگیش همهٔ تلاشهای خود را صرف پیشبرد کیفی آموزش در دبیرستانها کرد.

در قلمرو هنر، بصیرت خاصی در معماری کهن روسی، تمامی شعر روسی، ومجسمه‌سازی و نقاشی سراسر جهان داشت. همه‌روزه (به‌خصوص در آخرین سالهای عمرش) وقت زیادی صرف گوش دادن به‌موسیقی می‌کرد.

کولموگوروف مسافرت را دوست‌داشت. درطول پنجاه‌سال، همه ساله به همراه دوستانش و بعدها با بسیاری از شاگردانش مسافرت می‌کرد. کشش خاصی نسبت‌به‌شمال روسیه، ولگا، کریمه و قفقاز در او وجود داشت. طبیعت به او بدنی فوق‌العاده سالم عطا کرده‌بودکه او را قادر می‌ساخت همواره ورزشکار فعالی باشد و حتی جوانهارا به‌دنبال خود بکشاند. متخصص اسکی درسرتاسر کشور بود و می‌توانست دوازده ساعت روی چوب اسکی خود بماند و مسافتهای طولانی را بپیماید. ضمناً به شنا، و اسکی در کوهپایه‌های شیبدار نیز می‌پرداخت.

سراسر زندگی او در راه پیشبرد فرهنگ بشر به‌وسیعترین معنای ممکن وقف شد. قدرت اندیشهٔ او، وگستردگی وگوناگونی دانش او در قلمرو علم، سیاست وهنر شگفتی آور بود.

آندری نیکولایویچ کولموگوروف را می‌توان در زمرهٔ آن دسته از نوابغ بی‌نظیر و روشن‌ضمیر دانست که صرف وجودشان به‌آدمی توان زندگی می‌بخشد.

---

۱. نویسندهٔ مقاله در اینجا سی‌نفر از شاگردان کولموگوروف را با ذکرزمینهٔ کارشان نام‌برده‌است که ازآن‌جمله‌اند آرنولد، گلفاند، و آلکسیف.[م]

• V.M. Tihomirov, "Andrei Nikolaevich Kolmogorov," *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **8** (1988) 493-499.

* و.م. تیهومیروف، بخش ریاضی دانشگاه مسکو

نشر ریاضی، سال ۳، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۶۹

# قضیهٔ جداسازی ژوردان ـ براوئر برای اَبَررویه‌های هموار*

الون لیما*

ترجمهٔ سعید ذاکری

در این مقاله برهان ساده‌ای از قضیهٔ زیر به‌دست خواهیم داد:

**قضیهٔ جداسازی ژوردان ـ براوئر.** فرض کنیم $M \subset \mathbf{R}^n$ یک ابررویهٔ هموار، همبند، فشرده، و جهت‌پذیر باشد. در این صورت متمم آن، $\mathbf{R}^n - M$، دومؤلفهٔ همبند دارد که $M$ مرز هریک از آنهاست.

زیرمجموعهٔ $M \subset \mathbf{R}^n$ یک ابررویهٔ هموار خوانده می‌شود هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ $x \in M$ مجموعه‌ای باز چون $U$ حاوی $x$، و تابعی هموار چون $\varphi : U \to \mathbf{R}$ با ویژگیهای زیر وجود داشته باشد: i) $\operatorname{grad}\varphi(x) \neq 0$؛ ii) $\varphi^{-1}(0) = M \cap U$. بردار $v \in \mathbf{R}^n$ را قائم بر $M$ در نقطهٔ $x$ می گوییم هرگاه مضربی از $\operatorname{grad}\varphi(x)$ باشد. فضای مماس بر $M$ در نقطهٔ $x$ عبارت است ازمجموعهٔ $T_xM$ مرکب ازهمهٔ بردارهای $\mathbf{R}^n$ که بر $\operatorname{grad}\varphi(x)$ عمود باشند. نگاشت $f : M \to \mathbf{R}^n$ هموار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in M$، $f$ تحدید نگاشتی هموار چون $F : U \to \mathbf{R}^n$ به $U \cap M$ باشد، که‌در آن $U$ مجموعه‌ای باز شامل $x$ است. مشتق نگاشت هموار $f : M \to \mathbf{R}^n$ تبدیلی خطی چون $f'(x) : T_xM \to \mathbf{R}^n$ است که از تحدید $F'(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ به‌دست می آید. (به‌یاد آورید که ماتریس $F'(x)$، ماتریس ژاکوبی $F$ است.) هر نگاشت هموار که وارونش نیز هموار باشد، یک دیفئومرفیسم[1] نام دارد. قضیهٔ نگاشت وارون حکم می کند که اگر $f'(x) : T_xM \to \mathbf{R}^{n-1}$ یک‌بختی خطی باشد، آنگاه همسایگی $V$ از نقطهٔ $x$ در $M$ وجود دارد به‌طوری که تحدید $f$ به آن، یک دیفئومرفیسم از $V$ به‌روی زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbf{R}^{n-1}$ است. (برای ملاحظهٔ تفصیل بیشتر، مرجع [۲] را ببینید.)

ابررویهٔ هموار $M \subset \mathbf{R}^n$ را جهت‌پذیر می‌خوانیم هرگاه میدان همواری از بردارهای واحد قائم را به‌خود بپذیرد، یعنی نگاشت هموار چون $v : M \to \mathbf{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in M$، $|v(x)| = 1$ و $v(x)$ در نقطهٔ $x$ قائم بر $M$ باشد.

فرض جهت‌پذیری در قضیهٔ بالا زائد است، چرا که هر ابررویهٔ فشرده لزوماً جهت‌پذیر است. (برای دیدن برهان کوتاهی از این مطلب در حالت هموار، مرجع [۱] را ببینید.) لکن آوردن این فرض دراینجا به ما امکان می‌دهد که برهان را ساده کنیم. در بسیاری حالات (همچون وقتی که $M = S^{n-1}$ [کرهٔ $m-1$ بعدی در $\mathbf{R}^n$]) جهت‌پذیری نوعی پیش‌فرض تلقی می‌شود.

منظور ما از «هموار» همان $C^\infty$ است. اثبات ما کلمه به کلمه برای رویه‌های $C^2$ نیز برقرار است، و با اندك اصلاحات فنی (با بهره‌وری از میدانهای قاطع[1] به‌جای قائم) می‌توان آن را برای رویه‌های $C^1$ نیز به‌کار بست.

برای اثبات قضیهٔ بالا می‌توانستیم از روش ساملسن نیز استفاده کنیم، اما گمان می کنیم که دریافت ما مقدماتیتر باشد. به‌جای به‌کاربستن قضیهٔ تقاطع[2] و رده‌بندی خمینه‌های یک‌بعدی، از این حکم مشهور استفاده می کنیم که هرمیدان برداری هموار $X : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$، $X(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$، که در شرایط انتگرال‌پذیری $\partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ صدق کند، گرادیان تابعی هموار چون $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ است.

یک‌بار و برای همیشه، میدانی هموار از بردارهای واحد قائم چون $v : M \to \mathbf{R}^n$ را مفروض می گیریم، و نگاشت هموار $h : M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ را با $h(x, t) = x + t.v(x)$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، $h_\epsilon : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}^n$ نمایانگر

1. diffeomorphism

1. transverse  2. transversality

تحدید $h$ خواهد بود.

نتیجهٔ استاندارد زیر را برای کامل بودن بحث یادآوری می‌کنیم.

**لم.** فرض کنیم $M \subset \mathbf{R}^n$ یک ابر رویهٔ هموار، جهت‌پذیر، فشرده، باشد. در این صورت به‌ازای $\varepsilon$ی مثبت، $h_\varepsilon : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^n$ یک دیفئومرفیسم به‌روی زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbf{R}^n$ است.

برهان. به‌ازای هر $x \in M$، مشتق $h'(x, 0): T_xM \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ یک‌یکریختی خطی است، زیرا هر بردار افقی $(w, 0)$ را به $w$، و هر بردار قائم $(0, t)$ را به $t \cdot v(x)$ (که بر $w$ عمود است) می‌فرستد. بنابر قضیهٔ نگاشت وارون، می‌توانیم $\delta_x > 0$ و همسایگی باز $V_x$ از $x$ در $M$ را چنان بیابیم که $h$ مجموعهٔ $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ را به‌طور دیفئومرفیک به‌روی یک همسایگی باز $x$ در $\mathbf{R}^n$ بنگارد. تنها چیزی که برای اثبات باقی می‌ماند آن است که نشان دهیم $h_\varepsilon$، برای $\varepsilon$ی مثبت، یک به‌یک است. هرگاه چنین نباشد، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ می‌توان جفتهای متمایز $(x_n, s_n)$ و $(y_n, t_n)$ را در $M \times (-1/n, 1/n)$ چنان یافت که $h(x_n, s_n) = h(y_n, t_n)$. چون $M \times [-1, 1]$ فشرده است، می‌توانیم (درصورت لزوم، با در نظر گرفتن زیردنباله‌ها) فرض کنیم $x_n \to x \in M$ و $y_n \to y \in M$، $s_n \to 0$، و $t_n \to 0$. در این صورت

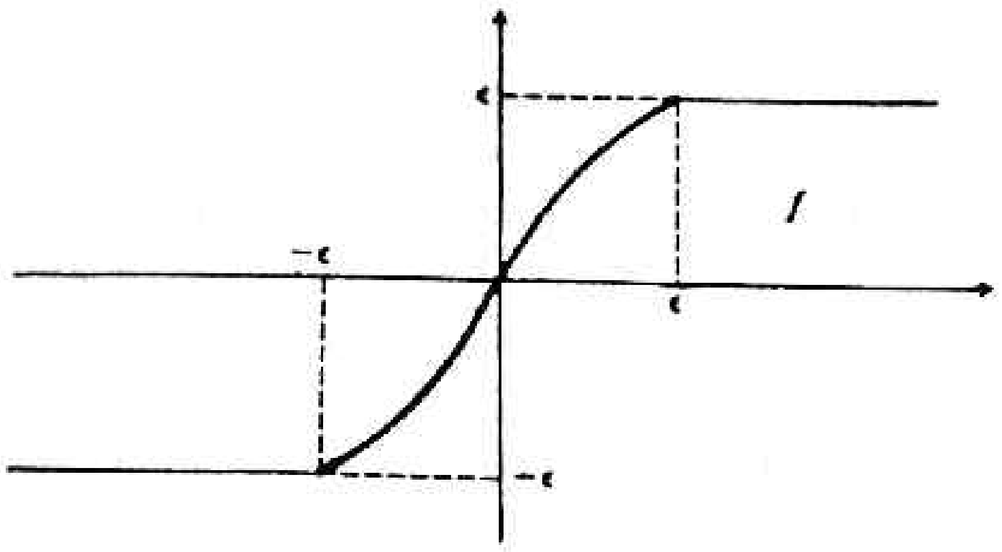
$$x = h(x, 0) = \lim h(x_n, s_n) = \lim h(y_n, t_n)$$
$$= h(y, 0) = y.$$

بنابراین، $\lim (x_n, s_n) = \lim (y_n, t_n) = (x, 0)$. برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $n$، $(x_n, s_n)$ و $(y_n, t_n)$ متعلق به مجموعهٔ $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ خواهند بود، و در چنین حالتی $h(x_n, s_n) \neq h(y_n, t_n)$. این تناقض، لم را به اثبات می‌رساند.

ما تصویر $h_\varepsilon$ را با $V_\varepsilon(M)$ نشان می‌دهیم و آن را یک همسایگی لوله‌ای[1] $M$ می‌خوانیم. همچنین می‌نویسیم $V_\varepsilon[M] = h(M \times [-\varepsilon, \varepsilon])$.

برهان قضیه. کار را با نشان دادن اینکه $\mathbf{R}^n - M$ ناهمبنداست آغاز می‌کنیم. به طور دقیقتر، تابع هموار $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ چون $M = \varphi^{-1}(0)$، و به‌ازای هر $x \in M$، $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$. در این صورت مجموعه‌های باز $A = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) > 0\}$ و $B = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) < 0\}$ ناتهی و از هم جدا هستند و داریم $\mathbf{R}^n - M = A \cup B$. نحوهٔ تعریف $\varphi$ به‌قرار زیر است.

فرض کنیم $V_{2\varepsilon}(M)$ یک همسایگی لوله‌ای $M$ باشد. تابع هموار $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را چنان می‌گیریم که $f(0) = 0$، $f'(t) > 0$ برای $-\varepsilon < t < \varepsilon$، $f(t) = \varepsilon$ برای $t \geqslant \varepsilon$، و $f(t) = -\varepsilon$ برای $t \leqslant -\varepsilon$.




هر نقطهٔ $V_{2\varepsilon}(M)$ را می‌توان به‌طور یکتایی به‌شکل $x + t \cdot v(x)$ نوشت، که در آن $x \in M$ و $|t| < 2\varepsilon$. تابع $g : V_{2\varepsilon}(M) \to \mathbf{R}$ را با $g(x + t \cdot v(x)) = f(t)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $g$ هموار است، $M = g^{-1}(0)$، $g(x + t \cdot v(x)) = \varepsilon$ برای $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon)$ و $g(x + t \cdot v(x)) = -\varepsilon$ برای $t \in (-2\varepsilon, -\varepsilon]$.

فرض کنیم $X : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ میدانی برداری باشد که بر $V_{2\varepsilon}(M)$ برابر $\operatorname{grad} g$ و در خارج آن صفر است. مجموعهٔ $V_\varepsilon[M]$ فشرده، و بنابراین در $\mathbf{R}^n$ بسته است. $X$ بر هریک از مجموعه‌های باز $V_{2\varepsilon}(M)$ و $\mathbf{R}^n - V_\varepsilon[M]$ هموار است (درواقع بردومی متحد با صفر است). پس $X$ یک میدان برداری هموار در $\mathbf{R}^n$ است، که به وضوح شرایط انتگرالپذیری را برمی‌آورد. بنابراین می‌توانیم تابع هموار $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ را چنان اختیار کنیم که $\operatorname{grad} \varphi = X$.

درصورت لزوم، با افزودن مقداری ثابت به $\varphi$، می‌توان فرض کرد که برای هر $x$ در $V_{2\varepsilon}(M)$، $\varphi(x) = g(x)$، زیرا $V_{2\varepsilon}(M)$ مجموعه‌ای باز و همبند است که $\varphi$ و $g$ بر آن گرادیانهای یکسان دارند. به‌علاوه، $\varphi$ بر هر مؤلفهٔ همبند $\mathbf{R}^n - V_\varepsilon(M)$ ثابت است، زیرا گرادیانش در آنجا صفر است. اکنون توجه کنیم که هر چنین مؤلفه‌ای، $V_{2\varepsilon}(M)$ را قطع می‌کند. [به‌ازای هر $y \notin V_{2\varepsilon}(M)$ مفروض، $p$ را نقطه‌ای در مجموعهٔ بستهٔ $V_\varepsilon[M]$ بگیرید که فاصله‌اش تا $y$ کمترین باشد. قطعه خط $[y, p]$ در $\mathbf{R}^n - V_\varepsilon(M)$ (و بنابراین در مؤلفهٔ $y$ در این مجموعه) قرار می‌گیرد و $V_{2\varepsilon}(M)$ را در همهٔ نقاط نزدیک به $p$ قطع می‌کند.] در این صورت $M = \varphi^{-1}(0)$، و در خارج $V_\varepsilon(M)$ داریم $\varphi = \pm\varepsilon$. هرگاه $x \in M$، به‌ازای $c$ی حقیقی خواهیم داشت $\operatorname{grad} \varphi(x) = c \cdot v(x)$، زیرا گرادیان بر سطح تراز $M$ عمود است. این نشان می‌دهد که

$$c = \langle \operatorname{grad} \varphi(x), v(x) \rangle = \frac{d}{dt} [g(x + t \cdot v(x))]_{t=0}$$
$$= f'(0) > 0$$

بنابراین، در هر نقطهٔ $x \in M$، $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$.

اکنون نشان می‌دهیم که مجموعه‌های باز $A$ و $B$ که در ابتدای برهان تعریف شدند، همبندند. درحقیقت، $A$ شامل مجموعهٔ همبند

1. tubular

$P=h(M\times(0,2\varepsilon))=\{x+t.v(x)\,;\,x\in M,\,0<t<2\varepsilon\}$ است. به‌علاوه، هر $y\in A$ یا در $P$ است یا می‌توان با قطعه‌خطی چون $[y,p]\subset A$ به نقطهٔ $p\in P$ وصلش کرد: تنها کافی است (مانند پیش) $p$ را نقطه‌ای درمجموعهٔ بستهٔ $h(M\times[0,\varepsilon])$ بگیریم که فاصله‌اش تا $y$ کمترین باشد. استدلال مشابهی همبندی $B$ را ثابت می‌کند.

سرانجام، ثابت می‌کنیم که $M$ مرز هریك از مؤلفه‌های همبند $A$ و $B$ ازمجموعهٔ $\mathbf{R}^m-M$ است.

به‌ازای هر $x\in M$، نقطهٔ $x+t.v(x)$ برای $0<t<\varepsilon$ به $A$، و برای $-\varepsilon<t<0$ به $B$ تعلق دارد. فرض کنیم $fr.S$ نمایانگر مرز مجموعهٔ $S$ باشد. این مطلب نشان می‌دهد که برای هر $x\in M$، $x\in fr.A\cap fr.B$. ازسوی دیگر هرگاه $x\in fr.A$ داریم $\varphi(x)\geqslant 0$، زیرا $x\in\bar{A}$. اما $\varphi(x)\leqslant 0$ زیرا $x\notin A$، پس $\varphi(x)=0$. یعنی $fr.A\subset M$، که نتیجه می‌دهد $fr.A=M$. به‌روش‌مشابهی خواهیم‌داشت $fr.B=M$، و اثبات به‌انجام می‌رسد.

**یادداشت.** استدلالی ازهمین نوع را می‌توان هنگامی که ابررویهٔ $M$ به‌جای فشرده بودن، تنها زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbf{R}^m$ فرض شود، به‌کاربست. بدین‌منظور تنها لازم است ام چنین اصلاح شود که به‌جای عدد ثابت $\varepsilon>0$، تابع پیوستهٔ مثبتی چون $\varepsilon: M\to\mathbf{R}$ بیابیم که ویژگی زیر را داشته باشد: هرگاه $x|y$ در $M$ باشند، آنگاه برای هر $s\in(-\varepsilon(x),\varepsilon(x))$ و هر $t\in(-\varepsilon(y),\varepsilon(y))$ داشته‌باشیم $x+s.v(x)|y+t.v(y)$. می‌توان حتی از این‌هم فراتررفت و $\mathbf{R}^m$ را با هرروبهٔ $m$ بعدی همبند سادهٔ $N$ که رویهٔ $m-1$ بعدی $M$ را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای بسته دربرداشته باشد عوض کرد. در اینجا هم همان ایده به‌کار می‌رود، به‌جز اینکه نحوهٔ ساختن همسایگی‌لوله‌ای $V_\varepsilon(M)\subset N$ ظریفترخواهد بود. (به‌جای‌قطعه خطهای‌راست می‌توان ژئودزیکها را درنظر گرفت.)

## مراجع


1. H. Samelson, Orientability of Hypersurfaces in $\mathbf{R}^n$, Proc. Am. Math. Soc., 22(1969) pp. 301-302.
2. J. A. Thorpe, Elementary Topics in Differential Geometry, Springer Verlag, New York, 1979.
3. B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, Géométrie Contemporaine, Mir, Moscow, 1979.


در صفحهٔ ۶۷ ازجلد ۲ی این کتاب مهم اتباتی ۱۰ سطری از قضیهٔ فوق آمده است. این اثبات غلط است.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆


• Elon L. Lima. "The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces," *Mathematical Monthly* (1) 95 (1988) 39-42.



★ الون لیما، مؤسسهٔ ریاضیات محض و کاربردی، برزیل


## گزارش کامپیوتر دوباره منتشر شد

*گزارش کامپیوتر* نشریهٔ انجمن انفورماتیك ایران پس ازسه سال توقف دوباره منتشر شد. شماره‌های ۱۰۰ و ۱۰۱ این نشریه حاوی مقاله‌هایی در زمینه‌های مختلف مربوط به کامپیوتر است. عناوین برخی از مقاله‌های شمارهٔ ۱۰۱ اینهاست: پیشگامان شمارش دودوئی، کدام شبکهٔ کامپیوتری بهتر است؟، نفر-ماه افسانه‌ای. برای انجمن انفورماتیك در اشاعه و اعتلای دانش انفورماتیك در ایران آرزوی موفقیت می‌کنیم.

# سیصد و پنجاهمین سال معادلات دیفرانسیل•

گرهارت وانر
ترجمهٔ منوچهر وصال

«پس، آقای لبگ شما در تاریخ علوم کار می‌کنید؟»
«نه دختر خانم، من درعلوم کار می‌کنم»
نقل قول از ل. فلیکس

در ۱۶۳۸، سیصد و پنجاه سال پیش[۱]، اولین مسائل معادلات دیفرانسیل پا به‌عرصهٔ وجود گذاشتند (دبون[۲]، گالیله). جا دارد به‌مناسبت سیصد و پنجاهمین سال پیدایش این معادلات، مسائلی‌را که درآغاز نشو و نمای معادلات دیفرانسیل مطرح شده‌اند و از مشهورترین‌مسائل قرن هفدهم هستند ازنظر بگذرانیم. اینها مسائلی جالب‌اند و آموزش معادلات دیفرانسیل را پربار می‌کنند. واقعاً کدام شاگرد کنجکاوی است که شکل زنجیر آویزان، یا شکل بهینهٔ یك سورتمه، یا معادلهٔ تراکتریس توجهش را جلب نکند؟

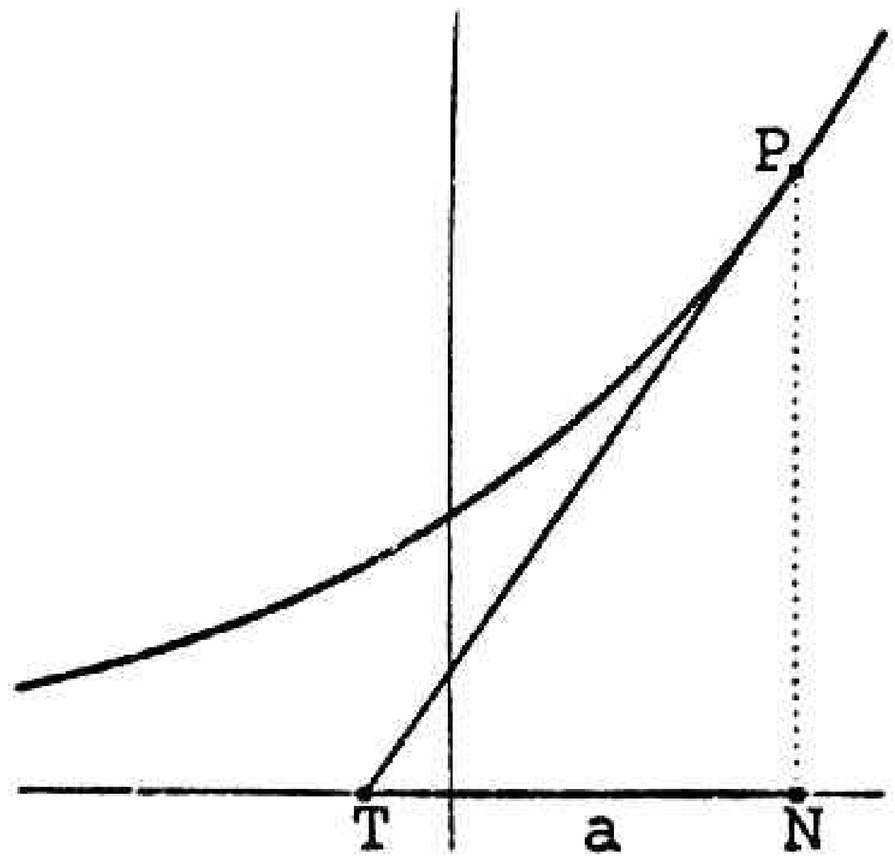
## مسأله‌های دبون

«گمان نمی‌کنم بتوان در حالت کلی عکس قاعدهٔ مرا برای مماسها به‌دست آورد، . . .»
(«ارادتمند مخلص شما، دکارت» ۱۶۳۹)

«پنج یا شش سال پیش، آقای دبون این سؤال را برای من و همچنین برای مشهورترین ریاضیدانان پاریس و تولوز مطرح کرد؛ اما تا آنجاکه من اطلاع دارم هیچ یك از آنها جواب سؤال او را نداده‌اند. . .»
(دکارت از هلندرشت، ژوئن ۱۶۴۵)

ف. دبون (۱۶۰۱–۱۶۵۲) اول کسی است که «هندسهٔ» دکارت‌را، که درسال ۱۶۳۷ منتشر شد، تدریس کرده است. درسال ۱۶۳۸ دبون مسائلی مطرح می‌کندکه دکارت و فرما از حل آنها عاجز می‌مانند. ازمیان این مسائل، مسائل زیر را بررسی می‌کنیم:

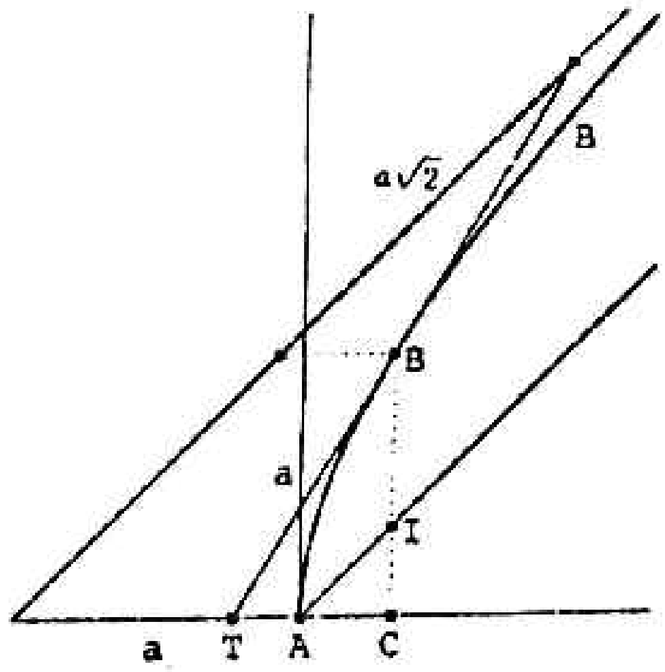
**مسألهٔ ۱.** («خط سوم دبون»). یك خم $y(x)$ پیدا کنید که در هر نقطهٔ $P$ی آن‌طول پاره‌خطی‌که ازنقاطع قائم $PN$ ومماس $PT$ با محور $x$ها به‌دست می‌آید همواره با عدد ثابتی مانند $a$ برابر باشد (شکل ۱).




**شکل ۱.** اولین مسألهٔ دبون

۱. این مقاله در سال ۱۹۸۸ میلادی نوشته شده است.
2. F. Debeaune

**مسالهٔ ۲.** («خط دوم دیون» یا بیان یوهان برنولی و لوپیتال[1]). «دو خط بینهایت $AC$ و $AI$ به‌گونه‌ای که زاویهٔ $CAI$ برابر $45°$ باشد مفروض‌اند؛ مطلوب است رسم خم $ABB$ به‌گونه‌ای که اگر ازیکی ازنقاط دلخواه آن مانند $B$، عرض $BC$ و مماس $BT$ را رسم کنند، نسبت $BC$ به $CT$ همواره برابر با نسبت $a$ به $BI$ باشد.» (شکل ۲ و نیز ر.ک. تمرین ۱).




**شکل ۲.** دومین مسألهٔ دیون

### «محاورات» گالیله

«آقای لایب‌نیتس به‌دو اشتباه بزرگ گالیله اشاره می‌کند. دو اشتباه این مرد که بی‌شك دوشن‌بین‌ترین مرد زمان خود دراین‌موضوع بوده، این‌است که حدس‌زده است، خم زنجیره، یك سهمی و خم سریعترین سقوط، یك دایره است.»
(یوهان برنولی، ۱۶۹۷)

بازهم در سال ۱۶۳۸: «محاورات و اثباتهای ریاضی[2]» مشهور گالیله، محاوره‌های بین «سالویاتی[3]»، «ساگردو[4]» و «زیمپلیسیو[5]»، منتشر می‌شود: این‌محاورات درعرض چندین «روز» انجام می‌شود. در بین موضوعهایی که مورد بحث قرار می‌گیرند به دو نکتهٔ زیر توجه می‌کنیم:

الف) (روز دوم، صفحهٔ ۱۸۶، روز چهارم، صفحهٔ ۳۱۵): یك زنجیر که به دو میخ یك دیوار آویزان شود «تقریباً... بالای یك سهمی قرار می‌گیرد».

ب) (روز سوم: قضیهٔ ۲۲ و تبصره): اگر جسمی بر اثر نیروی گرانش بلغزد، «سریعترین حرکت بین دو نقطه در طول کوتاهترین خم، یعنی در طول خط مستقیم، انجام نمی‌گیرد، بلکه روی قوسی از یك دایره انجام می‌شود».

---

۱. در زبان فارسی Hospital را به جای لوپیتال معمولا هوپیتال می‌نویسند.ـ م.

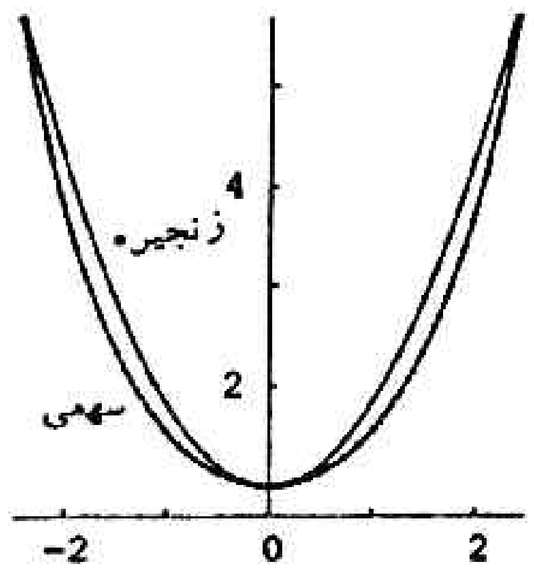
۲. نویسندهٔ مقاله فقط قسمت اول عنوان را آورده است، عبارت داخل پرانتز عنوان را کامل می‌کند:

Discorsi e Dimostrazioni Matematiche (Intorno a Due Nuove Scienze)

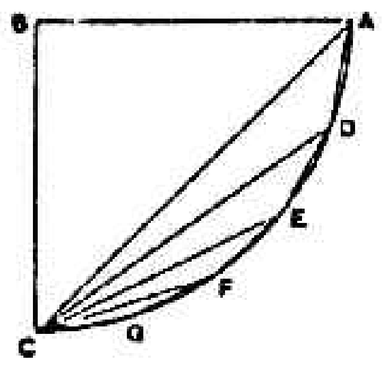
و عبارت داخل پرانتز به معنی (دربارهٔ دو دانش جدید) است. تکمیل و ترجمهٔ عنوان را مدیون ویراستار ارجمند آقای دکتر محمد هادی شفیعیها هستم.ـ م.

3. Salviati  4. Sagredo  5. Simplicio






**شکل ۳.** زنجیره و سهمی




**شکل ۴.** خم کوتاهترین زمان (رسم گالیله)

نکتهٔ اول مبهم است. کریستیان هویگنس در سال ۱۶۴۶، در سن ۱۷ سالگی با یك اثبات نظری محال بودن این نتیجه را ثابت می‌کند (تصور کنید چیزی را که دادگاههای تفتیش عقاید واتیکان پیوده در جستجویش بودند، یك نوجوان پروتستان کشف می‌کند: اشتباه گالیله را!).

نکتهٔ دوم درسال ۱۶۹۶ به‌مسألهٔ مشهور خم کوتاهترین زمان منجر می‌شود.

## نیوتن

«... و آنها به‌سریها هجوم می‌آورند، که در آن آقای نیوتن به‌راحتی از من پیشی گرفته است...»
(لایب‌نیتس)

نیوتن «روش فلوکسیون[1]» یعنی روش مشتقگیری را درسال ۱۶۷۱ نوشت امـا این اثر تا سال ۱۷۳۶ منتشر نشد [۴۵]. دراین اثر، از نظر نیوتن معـادلات دیفرانسیل نظیر معادلات چند جمله‌ایهای شامل مشتق هستند. در «روش فلوکسیون» هیچ رابطه‌ای با مسائل مکانیك، که البته به‌معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم مربوط می‌شوند، دیده نمی‌شود. نیوتن معادلات دیفرانسیل را از راه سریهای نامتناهی حل می‌کند و روش را با مثالهایی که به تصادف انتخاب می‌کند، مانند

$$\left(\frac{dy}{dx}=\right)\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1-3x+y+x^2+xy \qquad (1)$$

---

1. Methodus fluxionum

شرح می‌دهند[1](ر.ك. شکل ۵). برحسب اتفاق، این اولین معادلهٔ دیفرانسیلی است که حل نشده است، جواب [ناقص] آن (با شرط اولیهٔ $y(0)=0$) چنین است

$$y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6;\ \&\ c. \quad (2)$$

این معادله با هیچ مسألهٔ هندسه یا مکانیك رابطه‌ای ندارد. به‌آسانی امکان داشت این روش را برای حل مسألهٔ اول دبون

$$y'=\frac{y}{a} \quad (3)$$

به‌کار برند و به‌سری تیلر تابع نمایی دست یابند.

EXAMPLE I

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1-3x+y+xx+xy$, cujus Terminos $1-3x+xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate disposito vide in lateralem Seriem primo loco, & reliquos $y$ & $xy$ in finistrâ Columnâ.

| | $+1-3x+xx$ |
|---|---|
| $+y$ | $*+x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$; &c. |
| $+xy$ | $*\quad x+xx-x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{30}x^6$; &c. |
| Aggreg. | $+1-2x+xx-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{30}x^5$; &c. |
| $y=$ | $+x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$; &c. |

Numer.

**شکل ۵.** راه‌حل معادلهٔ (۱) که نیوتن ارائه‌کرده است.

(توجه کنید، «*» به‌معنی صفراست؛ درسطر «$xy+$» حرف «x» اشتباه است.)

## حل مسألهٔ اول دبون

«... پس بایـد فرمـا را کاشف واقعی حساب دیفرانسیل بشمار آوریم... لایب‌نیتس با ارائه نمادی‌که... به‌غنای حساب دیفرانسیل افزوده است...»

(لاپلاس، نظریهٔ تحلیلی احتمالات، ۱۸۲۰)

«... کوششی به‌عمل آمده ولی مسأله حل نشده است»

(لایب‌نیتس، ۱۶۸۴)

درپاییزسال۱۶۷۵،لایب‌نیتس‌حساب دیفرانسیل را،مستقل ازنیوتن، کشف می‌کند؛ و برای آن یك نماد عالی و یك روش استدلالی‌که بیشتر هندسی است، معرفـی مـی‌کند. امـا لایب‌نیتس فیلسوف، حقوقدان، دیپلمات، وعالم علم‌کلام به‌قدری گرفتار است‌که مجالی برای‌انتشار این کشف ندارد. تنها درسال۱۶۸۴ درآکتا ارودیتورم[2] [اعمال‌دانشوران] مطلبی[۱۲] منتشر می‌کند که‌حاوی اشارهٔ مبهمی به‌حساب دیفرانسیل، و شامل حل مسألـهٔ دبون است. (شکل ۶): اگر $x$ و $y$ به‌ترتیب طول وعرض‌نقطه‌ای برخم باشد و $z$ عرض نقطهٔ به‌طول $x+b$ و $b$ مقداری «بینهایت کوچك»، آنگاه بنابر قضیهٔ تالس

$$\frac{z-y}{b}=\frac{y}{a}$$

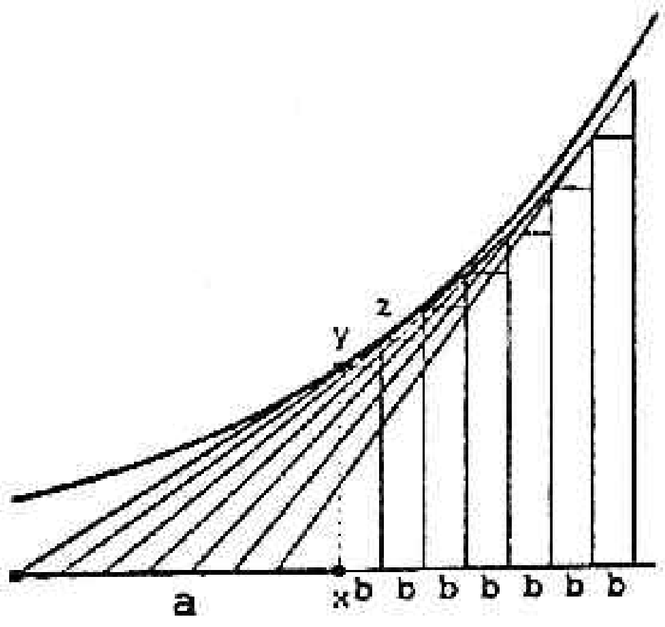
یا

$$z=\left(1+\frac{b}{a}\right)y$$

به‌دست می‌آیـد. پس «دنبالـهٔ حسابی» $x$، $x+b$، $x+2b$، $x+3b$، ... طولها به «دنبالهٔ هندسی»

$$y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^2y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^3y,\ \ldots \quad (4)$$

عرضها تبدیل می‌شود، و لایب‌نیتس نتیجه می‌گیرد «بنابراین خم مربوطه، لگاریتمی است.»




**شکل ۶.** مسألهٔ اول دبون

## مسألهٔ همزمانی

هیچکس بجز یاکوب برنولی از مقالـهٔ سال ۱۶۸۴ لایب‌نیتس چیزی دستگیرش نشد.او وبه‌خصوص برادرکوچکش یوهان منشاء افزایشی شگفت‌انگیز در ارائهٔ نتایج ریاضی هستند که از ۱۶۹۰ آغاز می‌شود. ازاین تاریخ تمام مسائل قدیمی یکی پس‌ازدیگری حل می‌شوند. «کار استادانهٔ» یاکوب حل مسألهٔ همزمانی است‌که درسال ۱۶۹۰ در آ. ا.[1] منتشر شده است [۱]:

مطلوب است خم $y(x)$ که «وی‌آن جسمی تحت‌تأثیر نیروی گرانش با یك سرعت قائم ثابت بلغزد.

این مسأله‌را لایب‌نیتس در ۱۶۸۷مطرح می‌کند و کریستیان هویگنس[2] آن را در همان سال ۱۶۸۷ حل می‌کند. امـا روشهایی که هویگنس به‌کارمی‌برد روشهای حساب دیفرانسیل نیستند. به‌این جهت لایب‌نیتس (در آ. ا. ی سال ۱۶۸۹، صفحهٔ ۱۹۶) خواهان

---

۱. توضیح نیوتن برای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱) تقریباً چنین است: فرض کنید $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=1-3x+y+xx+xy$؛ عبارت $1-3x+xx$ را که به تابع بستگی ندارد در سطر اول بنویسید، و $y$ و $xy$ را در ستون سمت چپ قرار دهید.

2. Acta Eruditorum

۱. حروف اول *آکتا ارودیتوروم*

۲. در متن مقاله نام هویگنس به صورت تجلیل‌آمیز

«Vir Celeberrimus *Christianus Hugenius*»

که در قرن هفدهم معمول بوده، نوشته شده است.

«اثبات ترکیبی»[1] آن است.

برای فهمیدن «اثبات ترکیبی» یاکوب برنولی، یادآور می‌شویم که سرعت جسمی که از مبدأ بیفتد با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2gy \quad (s=\text{طول قوس}) \qquad (۵)$$

«که آن را **هاگنیله** اولین‌بار معرفی و اثبات کرد». چون می‌خواهیم $dy/dt=-b$، از قضیهٔ فیثاغورس $(ds^2=dx^2+dy^2)$ معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

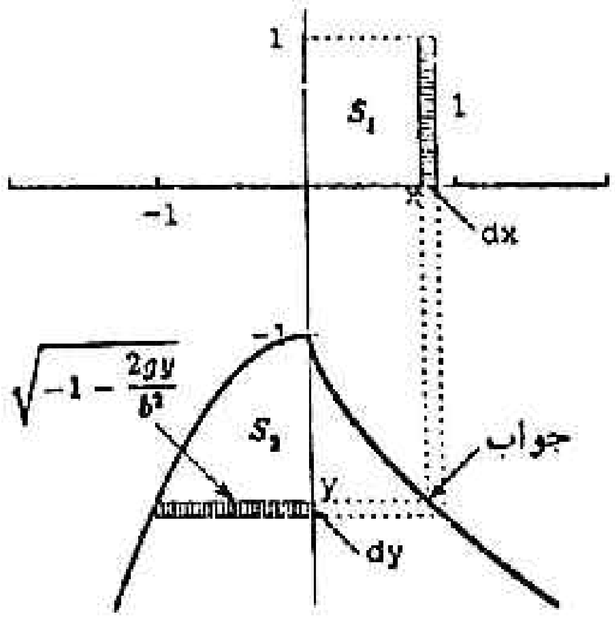
$$dx=-\sqrt{-1-\frac{2gy}{b^2}}\,dy. \qquad (۶)$$

ازاین نتیجه می‌شود که دو سطح هاشور خوردهٔ «بینهایت کوچک» در شکل ۷ به‌ازای هر $x$ با هم برابرند. در این هنگام است که یاکوب عبارت‌مشهور «وبنابراین انتگرالهای آنها برابرمی‌شوند[2]» را می‌نویسد، که در آن واژهٔ «انتگرال» برای نخستین‌بار در تاریخ ریاضیات ظاهر می‌شود. به‌عبارت دیگر، دو سطح $S_1$ و $S_2$ در شکل ۷ نیز باید باهم برابر باشند. پس از انتگرالگیری جواب

$$x=\frac{b^2}{3g}\left(-1-\frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2} \qquad (۷)$$

به‌دست می‌آید و لایب‌نیتس می‌نویسد «جواب، سهمیوار از درجهٔ ۳/۲ است...».

پس مسألهٔ همزمانی اولین معادلهٔ دیفرانسیلی را که با «انتگرالگیری» حل شده است، فراهم کرده است.




**شکل ۷.** خم همزمانی لایب‌نیتس

## زنجیره [خم زنجیری]

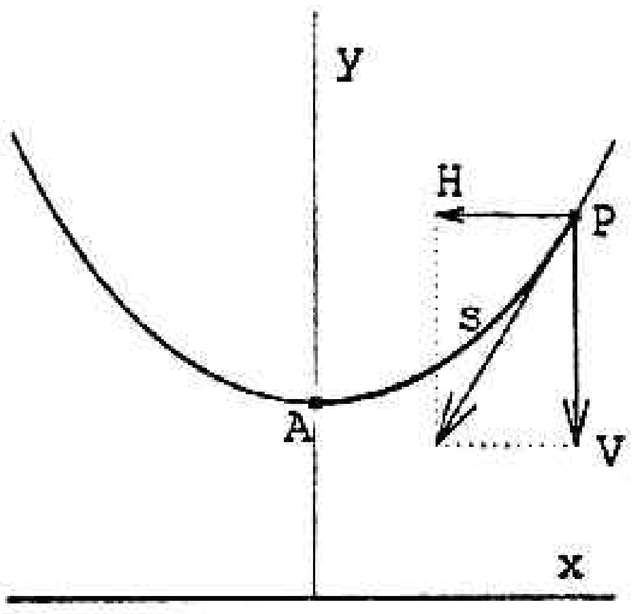
«من در اینجا اصلاً برهان آن را نمی‌آورم، زیرا آنهایی که این موضوعها را می‌فهمند به آسانی برهان را پیدا خواهند کرد و برای فهماندن مطلب به دیگران، باید بیش‌از حد توضیح دهم.»

(یوهان برنولی، ۱۶۹۲)

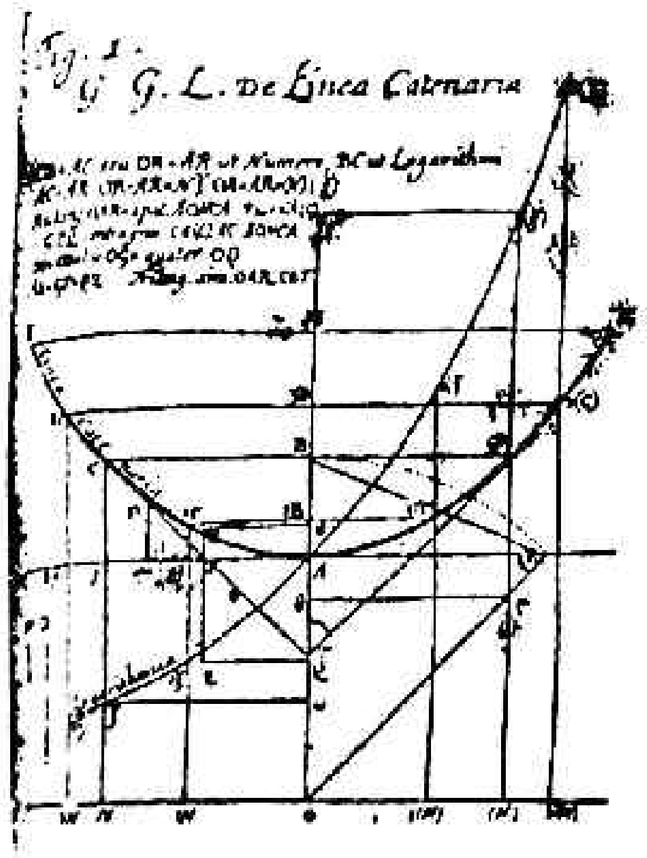
یاکوب در ۲. ۸. درسال ۱۶۹۰ درآخرمقاله‌اش [۱] به‌خوانندگان دانشمند حل مسألهٔ زنجیره یعنی وضع یك نخ (یا یك زنجیر) قابل انعطاف را پیشنهاد می‌کند. مسأله را در عرض سال ۱۶۹۰، لایب‌نیتس، هویگنس و یوهان برنولی، برادر کوچك یاکوب، حل می‌کنند. نوشته‌های لایب‌نیتس (۲. ۸. ۱۶۹۱) [۱۸] و یوهان برنولی [۴] در آکتا اروديتورم جوابها و بعضی ویژگیهای این‌خم (طول، گرانیگاه، کاربرد در محاسبهٔ لگاریتمها، و غیره) را شامل است اما یك‌کلمه راجع به‌اینکه این‌خم چگونه پیدا شده، درآنها نیست. خوشبختانه یوهان برنولی در درسهایی‌که به‌لوپیتال داده، [۵] شرح بیشتری دراین باره داده است: در نقطهٔ $P$ از خم، نیروی افقی $H$ و نیروی قائم $V$ را درنظربگیریم(شکل ۸). پس

$$H=a, \quad V=q\,.\,s$$

که درآنها $a$ و $q$ ثابت هستند (زیرا نیروی افقی خارجی وجود




**شکل ۸.** زنجیره




**شکل ۹.** زنجیره (رسم لایب‌نیتس)

ندارد) و $V$ وزن زنجیر $AP$ را نشان می‌دهد. چنین به‌دست می‌آید

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{V}{H}=\frac{qs}{a}$$

1. Demonstratio Synthetica
2. Ergo & horum Integralia aequantur

($y'$، شیب خم، را $p$ نامیده‌ایم.) یا بعد از دیفرانسیلگیری

$$c\,dp = ds = \sqrt{1+p^2}\,dx. \qquad (۸)$$

از اینجا به بعد، محاسبات یوهان خیلی پیچیده است. ما امروز با توابع هذلولوی آشنا هستیم و بی‌درنگ به‌دست می‌آوریم

$$c\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arcsinh}(p) = \frac{x-x_0}{c}$$

پس

$$p = \sinh\left(\frac{x-x_0}{c}\right) \Rightarrow y = K + c\cosh\left(\frac{x-x_0}{c}\right). \qquad (۹)$$

## مسالهٔ دوم دبون

«این مسأله را آقای مارکی دلوپیتال و آقای برنولی مشترکاً حل کرده‌اند. بدین جهت هریك ازاین دو فکر کرده‌اندکه حق دارند آن را به‌خود نسبت دهند...»
(کرامر، ۱۷۴۲)

یوهان در سال ۱۶۹۲ به پاریس سفر می‌کند و در آنجا با گیوم فرانسوا مارکی دلوپیتال (۱۶۶۱–۱۷۰۴) آشنا می‌شود. لوپیتال درعوض درسهای ریاضی به او پول‌کلانی می‌دهد. یوهان برای تحت‌تأثیر قرار دادن شاگردش بی‌درنگ حل مسألهٔ دوم دبون را شروع می‌کند و چنین به‌دست می‌آورد ([۶])

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y-x}. \qquad (۱۰)$$

با فرض $z = y - x$، پیدا می‌کند

$$\frac{z\,dz}{a-z} = dx. \qquad (۱۱)$$

پس جواب با به‌دست آوردن سطح هذلولی $z/(a-z)$ تعیین می‌شود. بنابراین اگر بخواهیم که $z(0) = 0$، به‌دست می‌آوریم

$$x = -z + a\log\frac{a}{a-z}. \qquad (۱۲)$$

## تراکتریس

«کلود پرو[1]، پزشك برجستهٔ پاریسی، فردی فوق‌العاده در مطالعات مکانیك و معماری... و عضو انجمن سلطنتی‌علوم درفرانسه به‌من و پیش ازمن به‌بسیاری دیگر حل‌این مسأله را پیشنهادکرده است...»
(لایب‌نیتس، ۱۶۹۳)

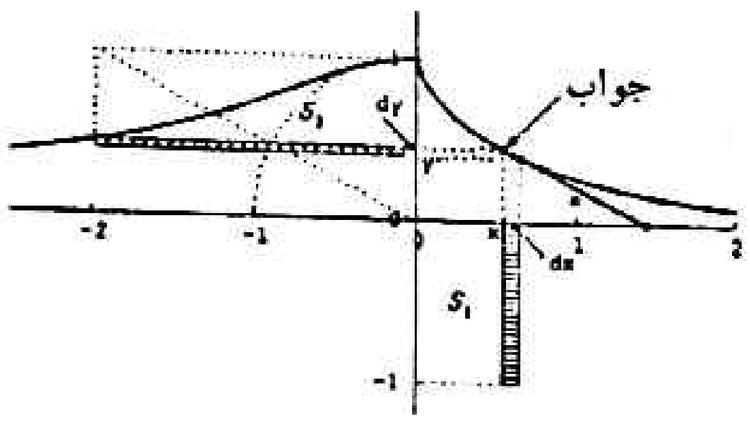
هنگام اقامت لایب‌نیتس در پاریس (۱۶۷۲–۱۶۷۶)، کالبدشناس و معمار مشهور، کلود پرو، حل مسأله زیر را از او می‌خواهد:

کدام خم است که در هر نقطهٔ $P$ ی آن طول قطعه‌ای ازمماس‌واقع بین $P$ و محور $x$ها (شکل ۱۰) برابر با مقدار ثابت $a$ است؟ برای روشن‌کردن این سؤال از جیب جلیقه‌اش یك ساعت بغلی قاب نقره‌ای درمی‌آورد و آن را روی میز می‌لغزاند. تا جایی‌که او اطلاع داشت، هیچ ریاضیدان دیگری نتوانسته بود فرمول آن را پیدا کند. لایب‌نیتس جوابش را درسال ۱۶۹۳ در ۲. ۱. منتشر می‌کند [۱۹]، و تأکید می‌کند که مدتی مدید است که آن را می‌داند: چون

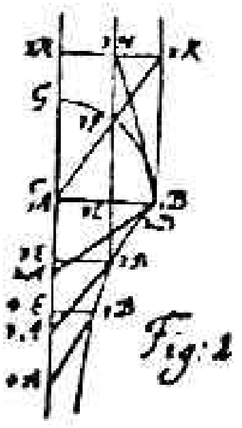
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} \qquad (۱۳)$$

یعنی

$$-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = dx$$




**شکل ۱۰.** تراکتریس



**شکل ۱۱.** تراکتریس
(رسم لایب‌نیتس)

جواب با انتگرالگیری از $y/\sqrt{a^2-y^2}$ به دست می‌آید (شکل ۱۵). داریم (ر.ك. تمرین ۴):

$$x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy \qquad (۱۴)$$

$$= -\sqrt{a^2-y^2} - a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

## معادلهٔ دیفرانسیل برنولی

پاکوب درضمن تعمیم مسألهٔ دبون بمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\cdot y + q(x)y^n \qquad (۱۵)$$

1. Claude Perrault (Claudius Perraltus)

برمی‌خورد و بـرای حـل آن «زحمت زیادی متحمل می‌شود». برادرش را به‌مبارزه می‌طلبد و رسماً این‌مسأله را در ۲. ۱. درسال ۱۶۹۵ ([۲]) مطرح می‌کند. «از بخت بد» بلافاصله دو راه‌حل عالی به‌فکر یوهان می‌رسد ([۸]). راه‌حل اول درتمرین ۷ آمده است. راه‌حل دوم این است کـه $y(x)$ را حاصلضرب دو تابع می‌گیرد: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. (درنوشتهٔ اصلی، $y=m\cdot z$). ازاین تساوی به‌دست می‌آید

$$\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u=p(x)\cdot u\cdot v+q(x)\cdot u^{n}\cdot v^{n}.$$

اینك می‌توان جمله‌ها را جداگانه برابر گرفت و به‌دست آورد

$$\frac{du}{dx}=p(x)\cdot u \qquad \text{برای } u، \qquad (۱۶\text{ الف})$$

$$\frac{dv}{dx}=q(x)u^{n-1}\cdot v^{n} \qquad \text{برای } v، \qquad (۱۶\text{ ب})$$

در حالت خاص $n=0$، فرمول (۱۵) معادلهٔ خطی ناهمگن است و فرمولهای (۱۶ الف) و (۱۶ ب) به «فرمول تغییر ثابتها» تبدیل می‌شوند.

## خم کوتاهترین زمان

«دقیقاً یك سال پیش مسألـهٔ سریعترین سقوط را به عنوان مسأله‌ای کاملا جدید در مجلـهٔ اکت دلایپزیك[1] مطـرح کردم، بی‌آنکه بدانـم گالیله روی این مسألـه کار کرده بوده است.»

(یوهان برنولی، ژوئن ۱۶۹۷)

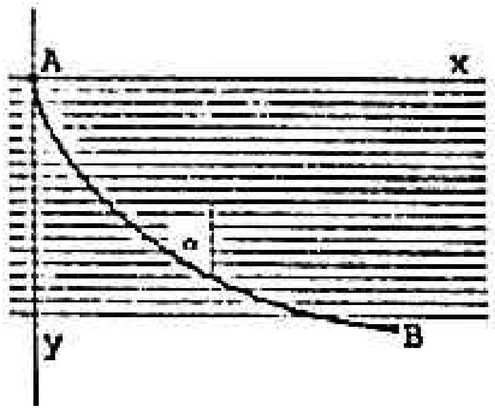
«. . . ودریافتن دلیل انکسار ازروی اصل کلی ماکه‌می‌گوید طبیعت همواره از کوتـاهترین و آسانتریـن راهها عمل می‌کند.»

(فرما به دلا شامبر[2]، ۱۶۵۷)

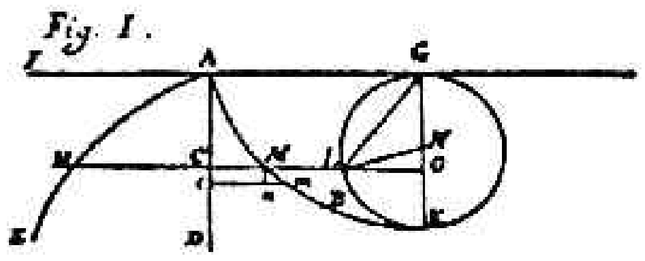
«اما چون تصور می‌کردم که کشف آن خیلی مشکل ومستلزم رفع موانع زیاد است، (زیرا این مسائل ماکسیمم و مینیمم معمولاً به‌عملیات خسته‌کنندهٔ طولانی منجر می‌شوند وعدم تقارنهای بسیار زیادی کـه در سر راه به‌آنها برمی‌خوریم به‌آسانی موجب درهم برهم‌شدن عملیات می‌شوند)، چندین سال دنبال آن را نگرفتم به‌انتظار اینکه شاید هندسه‌دانی فعالتر آن را کشف یا اثبات کند. هیچکس پیدا نشد کـه به‌این‌کار بپردازد. . . .»

(فرما، ۱۶۶۴)

درپاییز سال ۱۶۹۶ یاکوب برنولی درمطالعات شخصیش به‌مسألهٔ خم کوتاهترین زمان می‌پردازد و مانند گالیله فکر می‌کند که جواب آن دایره است. این‌فرصت مناسبی است برای یوهان که برادرش را در انظار دیگـران کوشمالـی دهـد؛ در ۲. ۱. ی سال ۱۶۹۶ برگزاری مسابقه‌ای بزرگ را به‌منظور حـل این مسألـه اعـلام می‌کند ([۷]). در ژوئن ۱۶۹۷ مجله، جواب نیوتن را (که بدون نام است اما از «بیان نیشدارش» نویسندهٔ آن شناخته می‌شود) و همچنین جوابهای لایب‌نیتس، یوهان، لوپیتال و جواب یاکوب را که متأسفانه درست‌است، دریافت می‌کند. جواب یوهان زیباتر از همه است. یوهان مسألـه را از راه قیاس بـا نورشناسی حل می‌کند (شکل ۱۲):




**شکل ۱۲.** خم کوتاهترین زمان




**شکل ۱۳.** خم کوتاهترین زمان (رسم یوهان برنولی)

او به‌لایه‌های متعدد اجسام کـه در آنها «سرعت نور» بـا فرمول $v=\sqrt{2gy}$ مشخص می‌شود می‌انـدیشد (ر. ك. [۴]). سریعترین راه، راهی است کـه همواره از قـانـون انکـسار پیروی می‌کند (اصل فرما)

$$\frac{v}{\sin\alpha}=K.$$

ازاین رابطه با توجه به $\sin\alpha=1/\sqrt{1+y'^{2}}$ به‌دست می‌آید

$$\sqrt{1+y'^{2}}\cdot\sqrt{2gy}=K$$

یا

$$dx=\sqrt{\frac{y}{c-y}}\cdot dy. \qquad (۱۷)$$

همواره بنابر «و انتگرالهای آنها برابر می‌شوند»، با تبدیل متغیر

$$y=c\cdot\sin^{2}u=\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\cos 2u \qquad (۱۸\text{ الف})$$

به‌فرمول

$$x=cu-\frac{c}{2}\sin 2u+K \qquad (۱۸\text{ ب})$$

می‌رسیم. پس جواب یك چرخزاد[1] است.

1. *Actes de Leipsic*

2. De La Chambre

1. cycloïde

## مسائل برابرمحیطی

«با تمام دشواریهای ظاهری این مسائل، در همان لحظه‌ای که آنها را خواندم به‌آنها علاقه‌مند شدم، و ببینید که به‌چه موفقیتی دست یافتم. به‌جای سه ماهی‌که برای یافتن سرنخ به‌من فرصت داده بودند و به‌جای پیدا کردن جواب دربقیهٔ سال، برای‌یافتن راه، شروع‌کار و رسیدن به‌عمق‌تمام معما من در کل‌فقط سه‌دقیقه وقت صرف‌کردم، و حتی‌فراتر ازآن، زیرا جوابهایی‌خواهم داد که هزاربار کلیتر ند...»
(یوهان برنولی، ۱۶۹۷)

**اظهارنظر** دربارهٔ مسائلی‌که درشمارهٔ دوم دسامبر ۱۹۶۷ ژورنال د ساوان[1] ذکر شده است. **آقای برنولی**، استاد دانشگاه بال، واضع این‌مسائل، ادعا می‌کند که جواب‌قسمت اصلی‌که به‌شکلهای برابرمحیط مربوط است‌کاملاً با حقیقت وفق ندارد. بدین‌جهت می‌خواهد... به‌سه چیز بپردازد... اولاً حدس بزندکه دقیقاً چه تجزیه و تحلیلی برادرش را به‌جوابی‌که درمجله‌آمده رسانیده است. ثانیاً... مغالطه‌های آنرا نشان دهد... ثالثاً جواب واقعی همهٔ اجزاء مسأله را به‌دست آورد.

(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

**پاسخ** آقای **برنولی**، استاد دانشگاه گرونینگن، به‌اظهارنظر مندرج‌درشمارهٔ ۷ژورنال د ساوان مورخ ۱۷ فوریهٔ ۱۶۹۸.
من در این اظهارنظر برادرم به‌خوبی می‌بینم که او به‌احتمال زیاد، چندان مایل نیست تسلیم منطق شود، بدون شك از ترس اینکه مجبور شود به‌عهدش وفا کند. در غیراین‌صورت پیشنهاد مرا می‌پذیرفت که آقای لایب‌نیتس، یکی از بزرگترین هندسه دانان این زمان، را حکم قرار دهیم. برای این منظور جوابهایم را به‌امانت نزد او فرستاده بودم، و بایستی جایزه را دراختیار او می‌گذاشتیم. یا اگر برادرم این ریاضیدان شایسته را قبول ندارد دلیلش را بگوید و دیگری را نام ببرد. زیرا من حاضرم قضاوت هرشخص بی‌طرفی را که به‌این‌موضوعها وارد باشد بپذیرم. والا هرچه اعتراض کند به‌هیچ‌وجه جوابی نخواهم داد، و به‌تمام‌مخالفتهایی‌که با من‌خواهند کرد اصلاً اعتنا نمی‌کنم، و به‌خوبی آنها را ازحالا پیش‌بینی می‌کنم...
(یوهان برنولی، ۱۶۹۸)

**اظهارنظر** آقای **برنولی**، استاد ریاضیات دانشگاه بال، دربارهٔ جواب برادرش که ۲۱ آوریل ۱۶۹۸ دراین مجله درج شده است. قبل‌از انتشار پاسخم به راه‌حلهای برادرم، از او خواهش می‌کنم‌که راه‌حل آخرش را دوباره کاملاً مرور کند و تمام نکاتش را به‌دقت بررسی‌کند و بعد به‌ما بگوید‌که نقصی ندارد، به‌او اخطار می‌کنم‌که بعداز اینکه جوابم را دادم بهانهٔ شتابزدگی دیگر مسموع نخواهد بود.
(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

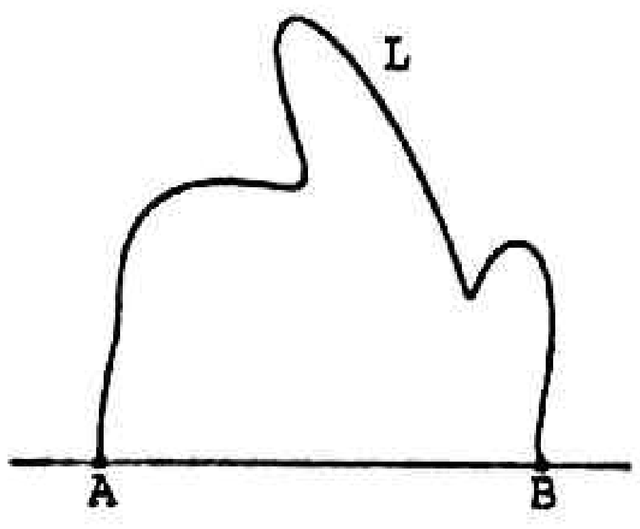
**پاسخ آقای برنولی**، استاد دانشگاه گرونینگن، به‌اظهارنظر مندرج‌درشمارهٔ ۷ژورنال د ساوان مورخ ۱۷ فوریهٔ ۱۶۹۸.
من دراین اظهارنظر برادرم به‌خوبی می‌بینم‌که او به‌احتمال زیاد، چندان مایل نیست تسلیم منطق شود، بدون شك از ترس اینکه مجبور شود به‌عهدش وفا کند. در غیراین‌صورت پیشنهاد مرا می‌پذیرفت که آقای لایب‌نیتس، یکی از بزرگترین هندسه دانان این زمان، را حکم قرار دهیم. برای این منظور جوابهایم را به‌امانت نزد او فرستاده بودم، و بایستی جایزه را دراختیار او می‌گذاشتیم. یا اگر برادرم این ریاضیدان شایسته را قبول ندارد دلیلش را بگوید و دیگری را نام ببرد. زیرا من حاضرم قضاوت هرشخص بی‌طرفی را که به‌این‌موضوعها وارد باشد بپذیرم. والا هرچه اعتراض کند به‌هیچ‌وجه جوابی نخواهم داد، و به‌تمام‌مخالفتهایی‌که با من‌خواهند کرد اصلاً اعتنا نمی‌کنم، و به‌خوبی آنها را ازحالا پیش‌بینی می‌کنم...
(یوهان برنولی، ۱۶۹۸)

**اظهارنظر دربارهٔ جوابی** که در ۲۳ ژوئن ۱۶۹۸ دراین مجله درج شده است. من، هرگز باور نداشتم که برادرم روش واقعی حل مسألهٔ برابر محیطها را یافته باشد؛ اما حالا با اشکالی‌که برای مرور مجدد آنها می‌تراشد بیش‌از پیش دراین باره مشکوك می‌شوم. زیرا علت‌گردن‌نگذاشتن او به‌چیزی که به‌چنین وقت‌کمی نیاز دارد جز بی‌اعتمادی به روش خودش چه می‌تواند باشد؟ اگر همان‌طور که می‌گوید برای یافتن راه، شروع کار و رسیدن به‌عمق تمام معما فقط سه‌دقیقه وقت صرف کرده است، واضح است‌که مرور چیزی که پیدا کرده است بیش‌از این وقت او را نخواهد گرفت. علاوه براین به‌فرض آنکه دوبرابر آن وقت صرف کند، آیا شش‌دقیقه‌که برای این بررسی صرف می‌شود خیلی از تعدادکشفهای جدیدش می‌کاهد؟...
(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

در حل مسألهٔ خم‌کوتاهترین زمان، نحوهٔ تفکر یاکوب ظرافت کمتری دارد اما کلیتر است. برای اینکه ازبرادرش انتقام بگیرد، در همان مقاله ([۳]) به او حل مسألهٔ برابر محیطها را پیشنهاد می‌کند: بر دو نقطهٔ مفروض $A$ و $B$ خمی به‌طول مفروض $L$ بگذرانید به‌گونه‌ای‌که

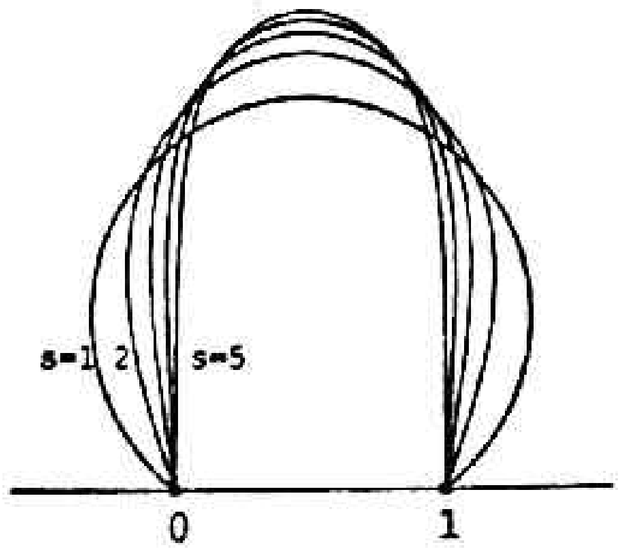
$$\int_A^B y^n dx$$

ماکسیمال شود (شکل۱۴). این‌را هم می‌افزاید که درمقابل‌جواب صحیح، برادرش ۵۰سکهٔ طلای «سلطنتی» دریافت خواهد کرد. یوهان، که بیش از اندازه به‌خود مطمئن شده بود، بی‌درنگ جوابش را، که «در سه‌دقیقه پیدا کرده بود» برای لایب‌نیتس و برای مجله می‌فرستد. چون جواب یوهان غلط است، یاکوب در ژورنال دساوان برضد برادرش به‌یك سری جدال قلمی می‌پردازد: این پرخاشهای شدید و جوابهای برادرش به‌آنها که از شدت کمتری برخوردار نیستند به‌تناوب درمجله منتشر می‌شوند.




شکل ۱۴. مسألهٔ برابر محیطی

1. Journal des Savans




**شکل ۱۵.** جوابهای عددی برای $A=0$، $B=1$، $L=4$، $m=1, 2, \ldots, 5$.

### اویلر و لاگرانژ

جنگ بیرحمانهٔ دو برادر رقیب تا مرگ یاکوب درسال ۱۷۰۵ ادامه یافت. یوهان در دانشگاه بال جانشین او شد و چون مربی بسیار خوبی بود شاگردان استثنایی تربیت کرد: سه پسرش و به‌ویژه لئونهارت اویلر. اویلر به‌طور اصولی حل معادلات دیفرانسیل را بررسی می‌کند و، مستقل از ریکاتی، به‌حل اولین معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ بالاتر می‌پردازد. تمام این تحقیقات در جلدهای بیست و دوم و بیست و سوم مجموعهٔ آثار[1] او جمع‌آوری شده است (همچنین ر. ك. I.۳، I.۴، و I.۵). لاگرانژ اولین کسی است که به‌دستگاههای معادلات دیفرانسیل، در تحقیقاتش روی نظریهٔ صوت [۱۵] و به خصوص، در کتاب مکانیك تحلیلی مشهورش، می‌پردازد. (ضمناً این کتاب درسال ۱۷۸۸ منتشر شد و امسال دویستمین سال انتشار مکانیك لاگرانژ است!)

این قسمت را با این مطلب خاتمه می‌دهیم که اویلر درسال ۱۷۴۴ برای مسألهٔ کلی وردشها

$$\int_a^b F(x, y, y')dx = \min! \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y \equiv F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{y'x} - F_y = 0 \qquad (۲۰)$$

را به دست آورد و با این کشف (ر. ك. [۱۱]، «... یکی از زیباترین تحقیقات ریاضی که تا به‌حال نوشته شده است»، (کارانئودوری[2])) حساب وردشها را دگرگون کرد. در حالتی که $F$ به $x$ بستگی نداشته باشد معادلهٔ (۲۰) را می‌توان به‌صورت ساده‌تر

$$y'F_{y'} - F = K \qquad (۲۱)$$

درآورد. (با مشتقگیری از (۲۱) نسبت به $x$، درستی آن محقق می‌شود). در ۱۷۵۵، لاگرانژ در سن ۱۹ سالگی برهان جدیدی

1. Opera Omnia
2. C. Carathéodory



برای معادلات اویلر به‌دست می‌آورد ([۲۰]) و نظریه را به‌زیباترین صورتش درمی‌آورد. علاوه بر این برای مسائلی از نوع

$$\int_a^b F(x, y, y')dx = \min! \qquad (۲۲)$$

با شرط

$$\int_a^b G(x, y, y')dx = 0$$

با قراردادن

$$\int_a^b \mathcal{L}(\lambda, x, y, y')dx = \min! \ (\max!) \qquad (۲۳)$$

به‌جای (۲۲)، مفهوم «ضریبهای لاگرانژ»[1] را در ریاضیات وارد می‌کند (ر. ك. [۱۶]، قسمت اول بخش IV، بند ۱). «تابع لاگرانژ $\mathcal{L}$» در (۲۳) با

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')$$

تعریف می‌شود.

### مسائل برابر محیطی، دنباله

این فرمولها را که در (۲۱) واردکنیم، مسألهٔ برابرمحیطی یاکوب برنولی به‌صورت

$$y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{(K+y'')^2} - 1} \qquad (۲۴)$$

درمی‌آید. پس جواب با انتگرال زیر داده می‌شود

$$\int \frac{(K+y'')dy}{\sqrt{\lambda - (K+y'')^2}} = x + C. \qquad (۲۵)$$

مقادیر ثابت $C$، $K$ و $\lambda$ برای تطبیق جواب با شرایط مرزی و طول $L$ آمده‌اند. فقط به‌ازای $m=1$ این انتگرال را می‌توان حساب کرد (ر. ك. اویلر [۱۱] فصل ۵، مثال ۲؛ «که معادلهٔ کلی دایره است»).

به‌ازای $m>1$ با انتگرالهای «بیضوی» یا «فوق بیضوی» سروکار پیدا می‌کنیم و به‌روشهای عددی نیازمندیم. مثلا اگر فرض کنیم $A=0$، $B=1$ و $L=4$، ثابتهای $K$ و $\lambda$ در (۲۵) باید درشرطهای زیر صدق کنند (به‌دلیل تقارن خم کافی است نصف آن را که صعودی است درنظر بگیریم)

$$\int_0^{y_{max}} \frac{(K+y'')dy}{\sqrt{\lambda - (K+y'')^2}} = 0.5 \qquad (۲۶)$$

$$\int_0^{y_{max}} \frac{\sqrt{\lambda}\,dy}{\sqrt{\lambda - (K+y'')^2}} = 2$$

که در آن

$$y_{max} = (\sqrt{\lambda} - K)^{1/m}$$

1. multiplicateur de Lagrange

مقداری از $y$ است که به‌ازای آن مخرج صفر می‌شود. با یک‌روش تکراری (روش نیوتن) که با محاسبهٔ عددی انتگرالها (روش گاوس با نحوهٔ عمل خاص در مورد تکینگی در $y_{max}$) ترکیب شود مقادیر زیر به‌دست می‌آیند

| $m$ | $K$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| ۱ | —۰٫۶۳۲۹۹۳ | ۰٫۶۵۳۲۱۸ |
| ۲ | —۰٫۶۳۲۴۸۷ | ۳٫۸۲۵۱۹۲ |
| ۳ | —۰٫۶۰۷۷۴۷ | ۱۷٫۵۰۵۷۶۳ |
| ۴ | —۰٫۴۲۲۲۷۶ | ۷۳٫۲۹۱۸۵۸ |
| ۵ | ۰٫۱۰۵۴۳۲ | ۲۹۶٫۲۱۶۸۸۹ |

جوابهای متناظر معادلهٔ (۲۴) درشکل ۱۵ دیده می‌شوند.
یوهان جواب خاص زیر را به‌دست‌آورده است

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{a^{2n}-y^{2n}}} = x+C$$

که درست به نظر می‌رسد (ر. ك. (۲۵)). اما، جواب عمومیش غلط است و یاکوب به‌این‌نکته پی می‌برد و ابراز خشنودی می‌کند («... لااقل به‌ما بگویید که هیچ غلط چاپی در برابری او، $(dt^2-dy^2) : dv = ddy$، وجود ندارد. و... اگر برابری غلط است، چنان‌که من مدعی آن هستم، بگوید مگر اینکه نخواهد دست از ادعاهایش بردارد»).

### خاتمه

به‌خوانندگانی که به‌تفصیل بیشتری علاقه دارند توصیه می‌شود کتاب کوچك هوفمان ([۱۴]) را که کتابی است کاملاً مستند، مطالعه کنند. کارهای برادران برنولی، اویلر و لاگرانژ در «مجموعهٔ آثار» و در «آثار[1]» آنها در دسترس هستند. شرحی از کارهای کوشی، پثانو، پوانکاره، گرونوال دراین زمینه وشرحی از روشهای عددی (آدامس، رونگه، کوتا) درکتاب [۱۳] آمده است (ر. ك. به‌خصوص بندهای I.۴ تا I.۱۶، II.۱ و III.۱).

### تمرینها

۱. (دکارت ۱۶۳۹). نشان دهیدکه در دومین خم دبون، طول قسمتی از خط $y = x + a$ محدود به‌خط افقی و مماس بر نقطهٔ دلخواه $B$، برابر $a\sqrt{2}$ است (ر. ك. شکل ۲).
۲. جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را با شرط اولیهٔ $y(0) = 1$، با روش نیوتن به‌دست‌آورید.
۳. مسألهٔ اول دبون را با روشهای زیر حل کنید
الف) روش نیوتن
ب) جداکردن متغیرها و انتگرالگیری
پ) روش لایب‌نیتس (فرمول (۴))
آنگاه سری تیلر برای $e^x$ و فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

۴. خطوط مرسوم در شکل ۱۵ را که برای حل مسألهٔ تراکتریس کشیده شده است تعبیر کنید. انتگرال (۱۴) را با استفاده از تبدیل $y^2 = v^2 - a^2$ حساب کنید.
۵. آیا شکل آرمانی برای کمان حمال یك پل، زنجیرهٔ وادون است؟
۶. انتگرال (۲۵) را به‌ازای $m = 1$ حساب کنید و نشان دهیدکه جواب آن یك دایره است.
۷. (یوهان برنولی ۱۶۹۷). با تبدیل $y = v^{1/(1-n)}$ معادلهٔ برنولی (۱۵) را به‌یك معادلهٔ خطی تبدیل کنید.
۸. (آونگ همزمان). نیروی مماسی جسمی که تحت‌تأثیر نیروی گرانش برخمی می‌لغزد برابر است با

$$mg \cdot \sin\alpha = mg\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

که درآن $p = y'$. مطلوب، معادلهٔ‌خمی‌است که در آن‌این‌نیرو باکمان $s$ متناسب باشد، یعنی بخواهیم رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$s = c\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

درنتیجه، حرکت این‌جسم یك نوسان همساز محض خواهد بود و دورهٔ تناوب آن مستقل از دامنهٔ نوسان است.
راهنمایی: از (۲۶) (مانند (۸)) مشتق بگیرید و از

$$ds = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\cdot dy$$

استفاده کنید. به‌معادلهٔ (۱۷) می‌رسید («حرکتی که مسیر آن به‌طورغیرمنتظره برخم همزمانی هویگنس، خم کوتاهترین زمان خودمان، منطبق می‌شود» (یوهان برنولی)).
«این کشف کریستیان هویگنس، نابغه‌ترین ساعت‌ساز تمام دورانهاست» (ساعت نوسانی، پاریس ۱۶۷۳).
(زامرفلت، درس فیزیك نظری، جلد اول)
۹. خمی به‌طول $L$ بیابیدکه مرکز گرانش آن پایینترین نقطهٔ ممکن باشد، یعنی

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \min!$$

با شرط

$$\int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{L}{b-a}\right)dx = 0$$

نشان دهیدکه «جواب، یك زنجیره است» (اویلر [۱۱]، فصل

1. Œuvres

۷، بند ۷۳).

**۱۰. با استفاده از معادلهٔ اویلر (۲۱) معادلهٔ خم کوتاهترین زمان (۱۷) را بیابید.**

**۱۱. نشان دهید که جواب مسألهٔ برابر محیطی (۲۵)، وقتی $m \to \infty$، به‌یك مثلث همگرا می‌شود.**

**(تشکر و معذرت مترجم.** از همکاری و راهنماییهای برازنش آقای دکتر میرشمس‌الدین ادیب سلطانی در ترجمهٔ عبارتهای لاتین سپاسگزارم وازاینکه به‌علت ندانستن زبان لاتین ممکن است با وجود راهنماییهای بسیار مفید ایشان در ترجمه‌ام لغزشهایی وجود داشته باشد ازخواننده معذرت می‌خواهم.)

## مراجع

1. Jacob Bernoulli (1690). *Analysis problematis ante hac propositi. de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter. sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur. & alterius cujusdam Problematis Propositio.* Acta Eruditorum. MDCLXXXX. pp. 217-219.
2. Jacob Bernoulli (1695). *Explicationes. Annotationes et Additiones ad ea qua in Actis sup. anni de Curva Elastica. Isochrona Paracentrica. & Velaria. hinc inde memorata. & partim controversa leguntur: ubi de Linea mediarum directionum. aliisque novis.* Acta Eruditorum.MDCXCV. pp. 537-553.
3. Jacob Bernoulli (1697). *Solutio Problematum Fraternorum. Peculiari Programmate Cal. Jan. 1697 Groningae. nec non Actorum Lips. mense Jun. & Dec. 1696. & Febr. 1697 propositorum: una cum Propositione reciproca aliorum.* Acta Eruditorum MDCXCVII. pp. 211-217.
4. Johann Bernoulli (1691). *Solutio problematis funicularii. exhibita a Joh. Bernoulli. Basil. Med. Cand.* Acta Eruditorum MDCXCVI. p. 274.
5. Johann Bernoulli (1691). *Lectiones Mathematicae de Methodo integralium. aliisque. conscriptae in usum Ill. Marchionis Hospitalii. Cum Auctor Parisiis ageres Annis 1691 & 1692.* Opera Omnia. Tomus III. p. 384 (voir p. 426).
6. Johann Bernoulli et De L'Hospital (1692). *Solution du problème que Monsieur De Beaune proposa autrefois à Mr. Des Cartes. & que l'on trouve dans la 79. de ses Lettres. Tom. 3...* Journal des Savans. 1692. p. 401. voir aussi: Acta Erud. 1693. p. 234.



7. Johann Bernoulli (1696). *Problema novum Mathematicis propositorum.* Acta Eruditorum MDCXCVI. p. 269.
8. Johann Bernoulli (1697). *De Conoidibus et Sphaeroidibus quaedam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695. pag. 553 propositae.* Acta Eruditorum MDCXCVII. pp. 113-118.
9. Johann Bernoulli (1697). *Solutioque Problematis a se in Actis 1696. p. 269. proposit. de invenienda Linea Brachystochrona.* Acta Eruditorum MDCXCVII. p. 206.
10. R. Descartes (1639). Lettre à Debeaune du 20 Fév. 1639.
11. L. Euler (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausannae & Genevae. Opera Omnia (intr. by Caratheodory) vol. XXIV. pp. 1-308.
12. Galileo Galilei Linceo (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche. intorno à due nuoue scienze Attenenti alla mecanica & i movimenti locali.* MDCXXXVIII.
13. E. Hairer. S.P. Norsett. G. Wanner (1987). *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.* Springer Verlag. 480 pp.
14. Jos. E. Hofmann (1956). *Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik.* Monographies de l'Enseignement mathématique. No. 3. Univ. Genève.
15. J. L. De Lagrange (1759). *Recherches sur la nature et la propagation du son.* Miscell. Taurinensia t. I. Œuvres t. 1. pp. 39-148.
16. J.L. De Lagrange (1788). *Mécanique analytique.* Paris. Œuvres t. 11 et 12.
17. G. Leibniz (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis. itemque tangentibus. quae nec fractas. nec irrationales quantitates moratur. & singulare pro illis calculi genus.* Acta Eruditorum. MDCLXXXIV. p. 467.
18. G. Leibniz (1691). *De linea in quam flexile se pondere proprio curvat. ejusque usu insigni adinveniendas quoteunque medias proportionales & logarithmos.* Acta Eruditorum. MDCXCI. p. 277.
19. G. Leibniz (1693). *Supplementum geometriae dimensoriae. seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio linea ex data tangentium conditione.* Acta Eruditorum. MDCXCIII. p. 385.
20. I. Newton (1671). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum.* Edita Londini 1736. Opuscula mathematica vol. I. Traduit en français par M. de Buffon. Paris MDCCXL.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• G. Wanner. "Les equations différentielles ont 350 ans." *L' Enseignement Mathématique.* **34** (1988) 365-385.

# مجموعهٔ کانتور و ترسیم هندسی*

مارکوپاون*
ترجمهٔ علی عمیدی

## مقدمه

$C$، مجموعهٔ سه سه‌ای کانتور، متشکل از تمام آن اعداد حقیقی $x$ در $[۰,۱]$ است که در بسط سه سه‌ای آنها، $x=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n/۳^n$، $a_n$ هرگز ۱ نیست. $C$ را همچنین می‌توان به‌روشی صرفاً هندسی به‌دست آورد، بدین‌طریق که ابتدا از $[۰,۱]$، یک‌سوم میانی $(۱/۳, ۲/۳)$ را برمی‌داریم، سپس یک‌سومهای میانی $(۱/۹, ۲/۹)$ و $(۷/۹, ۸/۹)$ ازبازه‌های باقیمانده را برمی‌داریم، و این عمل را ادامه می‌دهیم ($C$، دقیقاً متمم اجتماع شمارای بازه‌هایی است که برداشته‌می‌شوند). اگر $x=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n/۳^n$ در $C$ باشد، تعبیر هندسی بسط سه‌ای آن این است که $x$ نقطه‌ای یکتا در $[۰,۱]$ است که اول با توقف در چپ یا در راست $(۱/۳, ۲/۳)$، به‌ترتیب اگر $a_۱=۰$ یا $a_۱=۲$، سپس با توقف درچپ یا راست بازهٔ برداشته‌شدهٔ بعدی، به‌ترتیب اگر $a_۲=۰$ یا $a_۲=۲$، و قس‌علی‌هذا، به‌آن می‌رسیم. از این شیوهٔ ساختن $C$ نتیجه می‌شود که $C$ زیرمجموعهٔ بستهٔ هیچ‌جا چگال $[۰,۱]$ است.

ویژگی معروف $C$ آن است که هرعدد حقیقی در $[۰,۲]$ را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد در $C$ نوشت. هدف این نوشته ارائه برهانی مقدماتی از $C+C=[۰,۲]$ است که در آن فقط ازتعریف هندسی $C$ استفاده می‌شود. با اصلاحاتی دراین برهان می‌توان نشان داد که درواقع به‌ازای هر $k$ در $[۰,۲]$، تعدادی متناهی یا ناشمارا از جفتهای $x$ و $y$ متعلق به $C$ وجود دارند که $x+y=k$. دربارهٔ تشابه بین این حکم تجزیه‌ای و برخی ویژگیهای کسرهای مسلسل نیز بحث خواهیم کرد.

## ترسیم هندسی

طبق معمول قرارمی‌دهیم: $C\times C=\{(x,y)\in \mathbf{R}^۲ : x,y\in C\}$. دراین صورت $C+C=[۰,۲]$ را می‌توان به‌طریق هندسی به‌صورت زیر ازنو بیان کرد.

(*) به‌ازای هر $k$ در $[۰,۲]$، خط $x+y=k$، $C\times C$ را درحداقل یک نقطه قطع می‌کند.

قرارداد می‌کنیم پاره‌خطی‌را در $\mathbf{R}^۲$ «افقی» یا «قائم» بنامیم که به‌ترتیب موازی با خط $x=y$ یا عمود برآن باشد. دنبالهٔ $L_۰, L_۱, L_۲, \cdots$ از خمهای چندضلعی پیوستهٔ واقع در $\mathbf{R}^۲$ با ویژگیهای زیر را درنظربگیرید (شکلهای ۱ تا ۳ را ببینید):

الف) $L_n$، به‌ازای‌تمام مقادیر $n$، مشمول‌در $[۰,۱]\times[۰,۱]$ است، و فقط مرکب از پاره‌خطهای افقی و قائم است.

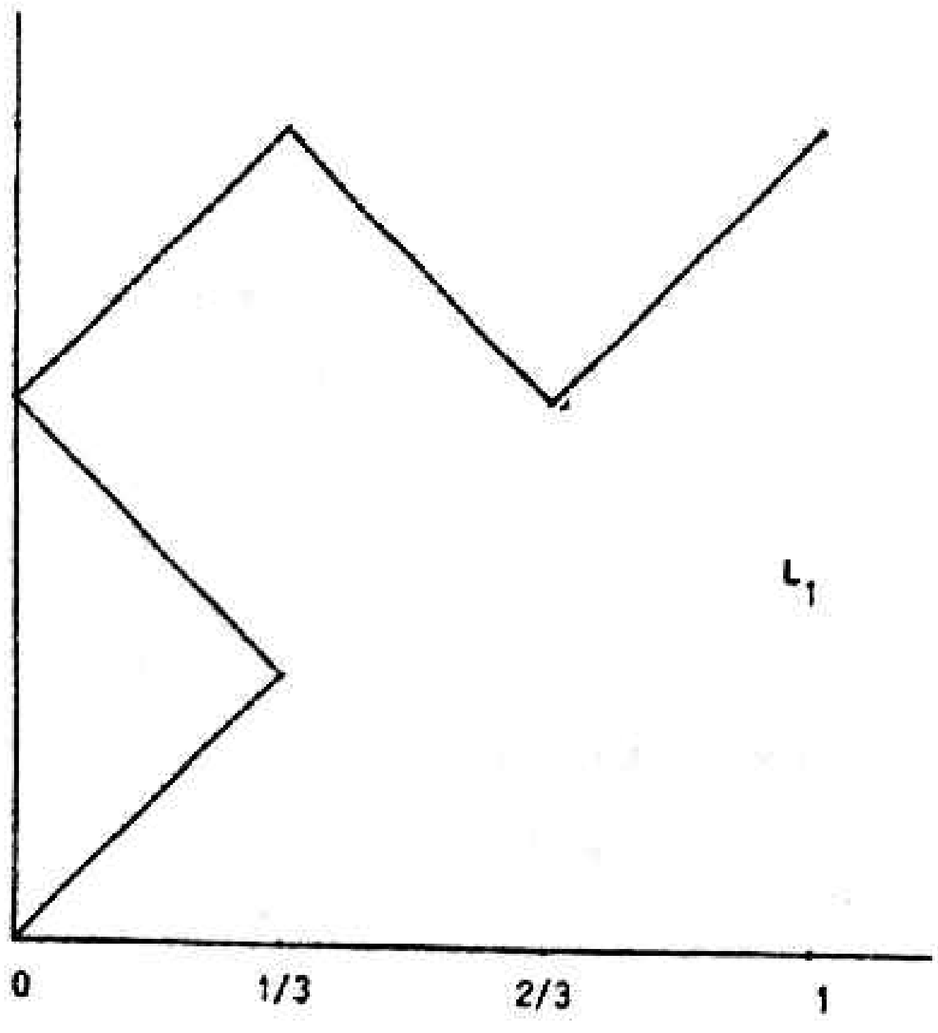
ب) رأسهای $L_n$ به‌ازای تمام مقادیر $n$، به $C\times C$ تعلق دارند.

پ) دوسر $L_n$، به‌ازای تمام مقادیر $n$، $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ هستند.

ت) هر $L_n$ شامل $۳^n$ پاره‌خط افقی است، که طول هریک برابر $۲^{۱/۲}/۳^n$ است.

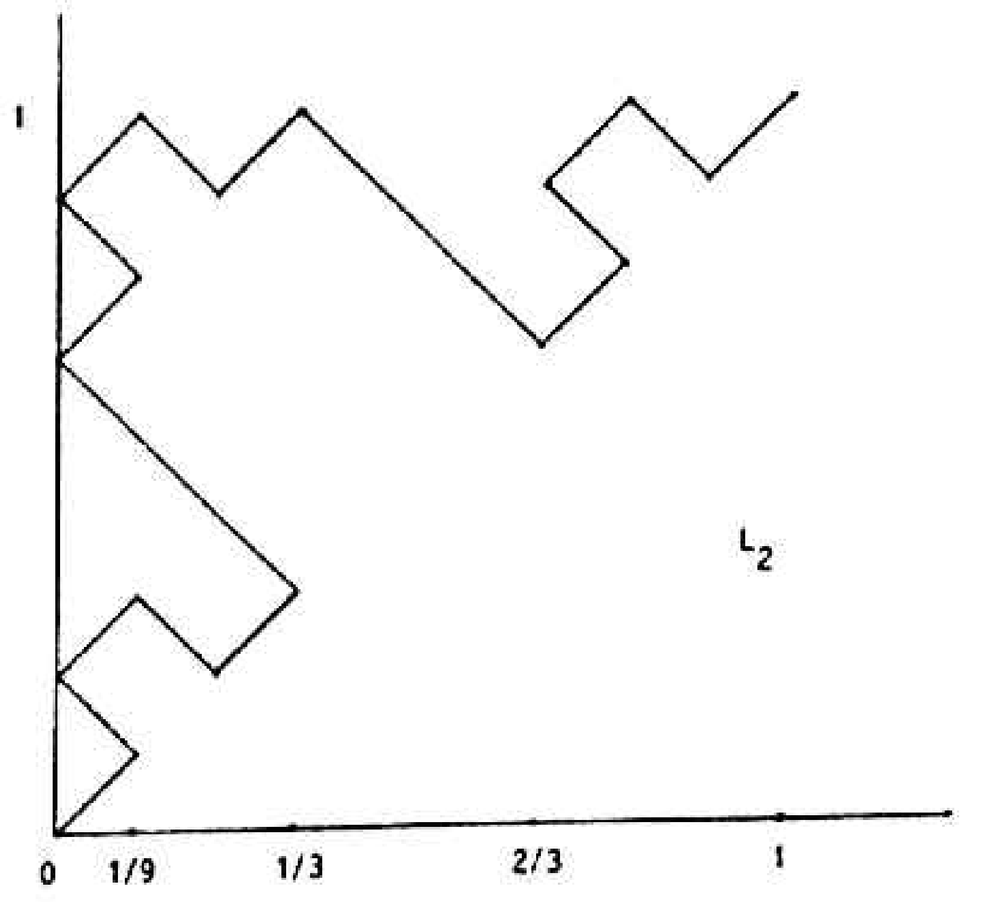
ث) به‌ازای تمام مقادیر $n$، و به‌ازای هر $k$ در $\{۰, ۲/۳^n, ۴/۳^n, \cdots, ۲\}$، خط $x+y=k$، شامل یک پاره‌خط قائم $L_n$ است.

ج) به‌ازای تمام مقادیر $n$، و به‌ازای هر $k$ که در $\{۰, ۲/۳^n, ۴/۳^n, \cdots, ۲\}$ نباشد، خط $x+y=k$ حداکثر با یک پاره خط افقی $L_n$ برخورد می‌کند.




شکل ۱

ابتدا فرض کنید که چنین دنباله‌ای وجود دارد. در این‌صورت ویژگی (*) برقرار است. $k$ را در $[0,2]$ تثبیت کنید و فرض کنید $r$ معرف خط $x+y=k$ است. اگر برای $n$ ی، $k$ در $\{2, \ldots, 4/3^n, 2/3^n, 0\}$ باشد، آنگاه $r$ بنابر (ت) و (ب) با $C\times C$ تلاقی می‌کند؛ در غیر این‌صورت، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $n$، بنابر (ج)، پاره‌خط افقی یکتای $L_n$ وجود دارد که با $r$ تلاقی می‌کند. نتیجه آنکه، بنابر (ت) و (ب)، به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت $n$، $\operatorname{dist}(r, C\times C) < 2^{1/2}/3^n$، یعنی $\operatorname{dist}(r, C\times C)=0$ [منظور از dist فاصله است]. پس $r$، بنابر استدلالی متعارف مبتنی بر فشردگی، $C\times C$ را تلاقی می‌کند (یادآور می‌شوم که $C$، زیرمجموعهٔ بستهٔ $[0,1]$ است).




شکل ۲

اکنون به‌اصل استدلال، یعنی ترسیم دنبالهٔ $\{L_n\}_0$ می‌پردازیم. آنچه نیاز داریم در واقع اولین مرحلهٔ یک فرایند استقراست. فرض کنید $L_0$ پاره‌خطی با دوسر $(0,0)$ و $(1,1)$، و $L_1$ چندضلعیی با رأسهای $(0,0)$، $(1/3,1/3)$، $(0,2/3)$، $(1/3,1)$، $(2/3,2/3)$ و $(1,1)$ باشد (شکل ۱ را ببینید). به‌طور کلی، فرض کنید بر هر پاره‌خط افقی $L_n$ همان فرایندی را اجرا کنیم که با انجام آن بر $L_0$، $L_1$ را نتیجه گرفتیم و بدین‌طریق خم $L_{n+1}$ را به‌دست آوریم. به‌بیان دیگر، به‌جای پاره‌خط افقی نوعی $L_n$ با دوسر $(x,y)$ و $(x+1/3^n, y+1/3^n)$، چندضلعیی را قرار می‌دهیم که از نقاط

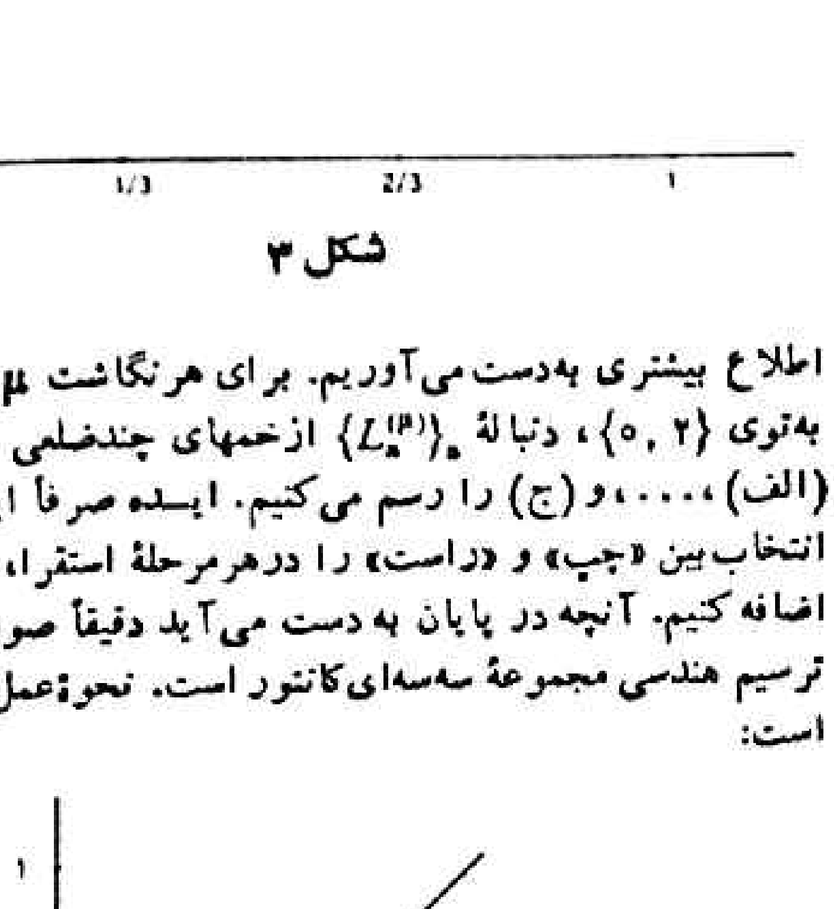
$$(x,y),\ (x+1/3^{n+1}, y+1/3^{n+1}),\ (x, y+2/3^{n+1}),$$
$$(x+2/3^{n+1}, y+2/3^{n+1}),\ (x+1/3^n, y+1/3^n),$$
$$(x+1/3^{n+1}, y+1/3^n)$$

و

$$(x+1/3^n, y+1/3^n)$$

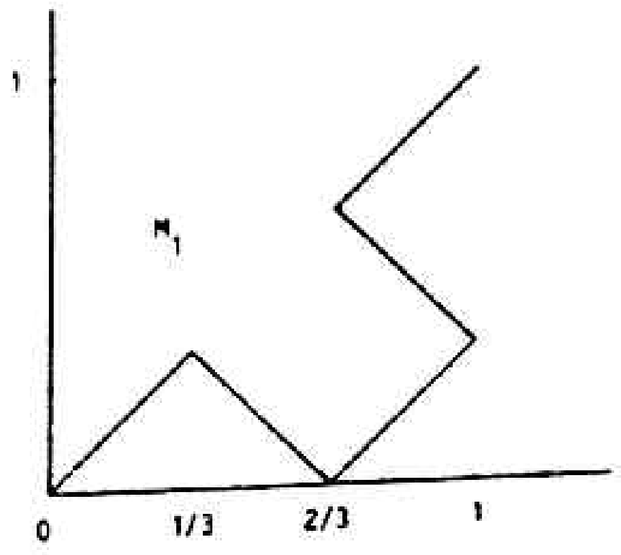
می‌گذرد (شکلهای ۲ و ۳ را ببینید). لذا، واضح است که $\{L_n\}_0$، فرضهای (الف)، ...، (ج) را که در بالا بیان کردیم برمی‌آورد.

با اصلاحات ساده‌ای در ترسیم قبلی، دربارهٔ راهی که عددی از $[0,2]$ را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد در $C$ نوشت،



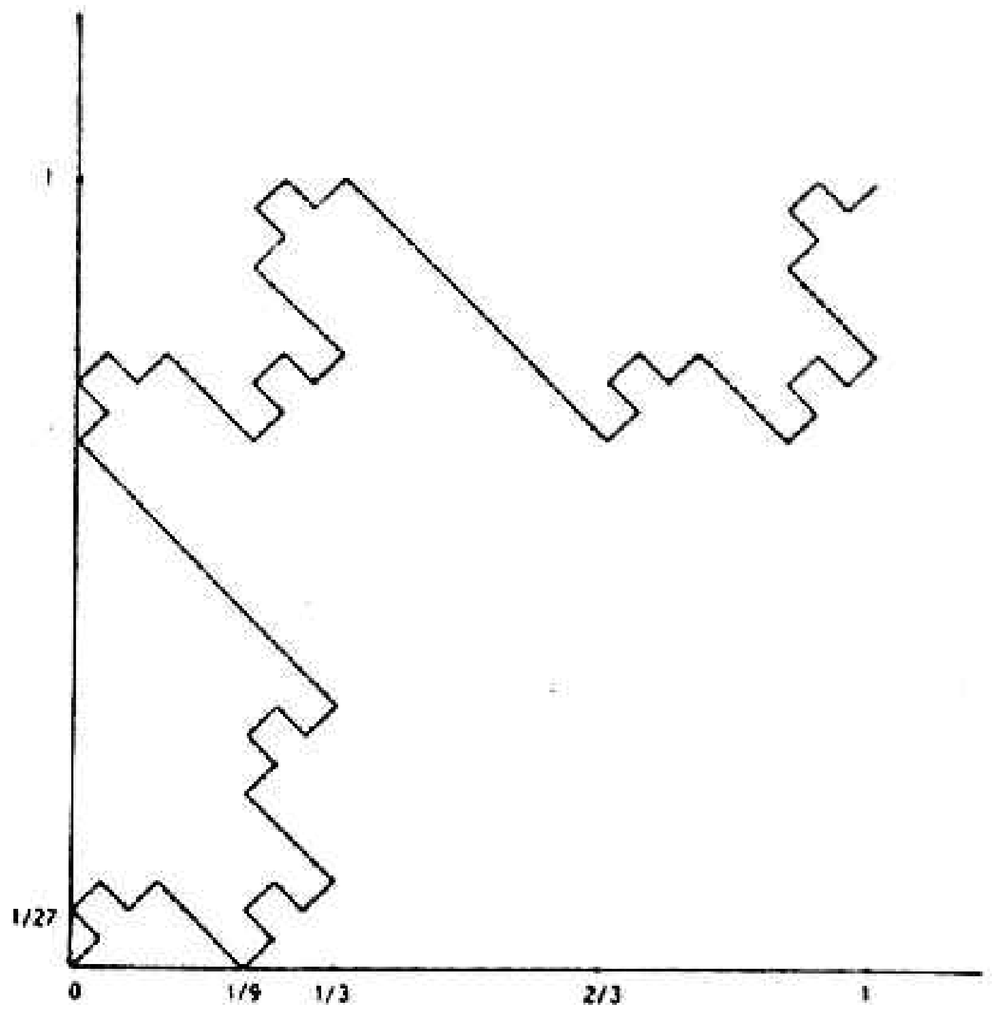

شکل ۳

اطلاع بیشتری به‌دست می‌آوریم. برای هر نگاشت $\mu$ از $\mathbf{N}\setminus\{0\}$ به‌توی $\{0,2\}$، دنبالهٔ $\{L_n^{(\mu)}\}_0$ از خمهای چندضلعی با ویژگیهای (الف)، ...، و (ج) را رسم می‌کنیم. ایده صرفاً این است که انتخاب بین «چپ» و «راست» را در هر مرحلهٔ استقرا، به‌ترسیم قبلی اضافه کنیم. آنچه در پایان به‌دست می‌آید دقیقاً صورت دوبعدی ترسیم هندسی مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور است. نحوهٔ عمل به‌شرح زیر است:




شکل ۴

فرض کنید $M_1$ تصویر آینه‌ای خم $L_1$ نسبت به خط $y=x$ باشد (شکل ۴ را ببینید). اگر $\mu$ نگاشتی از $\mathbf{N}\setminus\{0\}$ به‌توی $\{0,2\}$ باشد، $L_0^{(\mu)}=L_0$ را تعریف می‌کنیم، و به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی $n$ فرض می‌کنیم $L_{n+1}^{(\mu)}$ چندضلعیی باشد که از $L_n^{(\mu)}$ بدین‌طریق به‌دست می‌آید که به‌جای هر پاره‌خط افقی $L_n$، یک کپی (نرمالشدهٔ) $L_1$ یا $M_1$ را بر حسب اینکه به‌ترتیب $\mu(n+1)=0$ یا $2=\mu(n+1)$، قرار دهیم. مثلاً، اگر $\mu=\{0,0,0,\ldots\}$، دنبالهٔ اصلی $\{L_n\}_0$ را به‌دست می‌آوریم (شکلهای ۱ تا ۳)، و برای $\mu=\{2,2,2,\ldots\}$ تصویر آینه‌ای آن را نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آوریم. برای $\mu=\{0,2,0,2,\ldots\}$، چندضلعیهای قلعه مانندی نظیر شکل ۵ به‌دست می‌آوریم.




**شکل ۵**

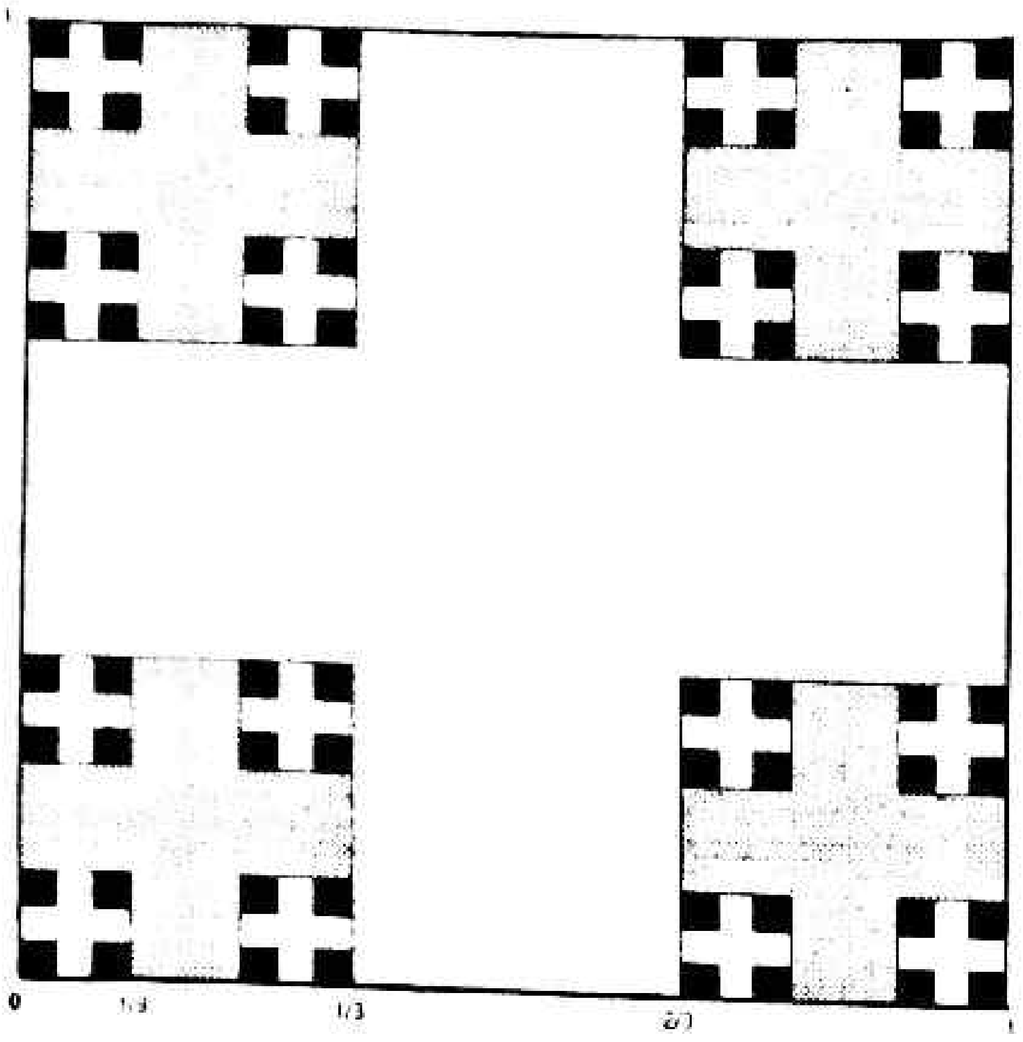
فرض کنید $L^{(\mu)}$ به ازای تمام $\mu$ها حد یکنواخت خمهای $L_n^{(\mu)}$ به‌ازای $n=0,1,\ldots$ را نشان دهد. دراین‌صورت $L^{(\mu)}$ خمی پیوسته در $[0,1]\times[0,1]$ با دوسر $(0,0)$ و $(1,1)$ و با این ویژگی‌است که به‌ازای هر $k$ در $[0,2]$، خط $x+y=k$ درنقطه‌ای از $C\times C$ خم $L^{(\mu)}$ را قطع می‌کند. برعکس، به‌ازای هر نقطهٔ مفروض $(x,y)$ در $C\times C$، یک‌دنبالهٔ $\mu$ وجود دارد که $(x,y)$ بر $L^{(\mu)}$ قراردارد.

برای درک این‌مطلب، توجه‌کنید که زیرتقسیم‌سه‌ای $[0,1]$ که $C$ را تولیدمی‌کند، یک‌زیرتقسیم متناظر از $[0,1]\times[0,1]$ به‌وجود می‌آورد که $C\times C$ را تولید می‌کند. در $n$امین مرحله، زیرمجموعهٔ $G_n$ از $[0,1]\times[0,1]$، که شامل نقاط $C\times C$ است، اجتماع $4^n$ مربع (مربعهای سیاه شکل ۶ به‌ازای $n=3$) است. واضح است‌که $G_n$ شامل رئوس خمهای $L_n^{(\mu)}$ به‌ازای تمام $\mu$هاست (شکلهای ۳ و ۶ را مقایسه کنید). اینک، نتیجه بی‌درنگ حاصل می‌شود.

توجه‌کنید که اگر $\hat{\mu}$، دنبالهٔ حاصل از $\mu$ با تبدیل تمام ۰ها به ۲ و برعکس باشد، آنگاه خط $x+y=k$ درنقطهٔ $(x,y)$، $L^{(\mu)}$ را قطع می‌کند اگروتنها اگر درنقطهٔ $(y,x)$، $L^{(\hat{\mu})}$ را قطع کند؛ به‌عبارت دیگر، $\hat{\mu}$ دربارهٔ تجزیهٔ $k$ به‌صورت‌مجموع اعدادی در $C$، هیچ اطلاع تازه‌ای به‌ما نمی‌دهد. بنابراین، توجهمان را به‌دنباله‌های $\mu$ با $\mu(1)=0$ (یعنی، به‌خمهای $L^{(\mu)}$ی بالای خط $x=y$) محدود می‌کنیم.

$k=2h$ را، با شرط $h>0$، در $[0,2]$ تثبیت، و فرض می‌کنیم $h=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/3^n$ بسط سه‌ای نامتناهی‌یکتای $h$ باشد. ادعا می‌کنیم معادلهٔ $x+y=k$ در $C\times C$ دارای $S(k)$ جواب است که $S(k)$ برحسب اینکه $c(k)$ یعنی عدد اصلی مجموعهٔ $\{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\};\ a_n=1\}$ متناهی یا نامتناهی‌باشد، به‌ترتیب عددی متناهی یا ناشماراست. در واقع فرمول دقیق آن عبارت است از






**شکل ۶**

اگر $c(k)=0$ یا $c(k)=1$، $S(k)=1$

درغیراین‌صورت، $S(k)=2(2^{c(k)-2})$.

فرض کنید $r$، خط $x+y=k$ و $n$، عدد صحیح مثبتی‌باشد. با مجموعهٔ نمادهای بالا، و به‌کمک شکل ۶، به‌آسانی می‌بینیم که $a_n=1$، اگر وتنها اگر تعداد مربعهای حاصل از تقاطع $G_n$ با $r$ دوبرابر تعداد مربعهای حاصل از تلاقی $G_{n-1}$ با $r$ باشد. هم‌ارز آن، $a_n=1$، اگر و تنها اگر، به‌ازای تمام $\mu$ها، $r$ دریک‌سوم میانی پاره‌خطهای افقی، $L_{n-1}^{(\mu)}$ را قطع نماید؛ به‌عبارت دیگر، $a_n=1$، اگروتنها اگر، در $n$امین مرحلهٔ ترسیم، تعدادنقاط تلاقی خمهای $L_n^{(\mu)}$ با $r$ دوبرابرتعداد نقاط تلاقی خمهای $L_{n-1}^{(\mu)}$ با $r$ باشد. اگر $a_n\neq 1$، انتخاب بین $\mu(n)=0$ و $\mu(n)=2$ در $n$امین مرحله، هیچ نقطهٔ تقاطع جدیدی را به‌وجود نمی‌آورد. این، نشان می‌دهد $c(k)$، بسته به‌اینکه $r$ خمهای $L^{(\mu)}$ را درتعداد متناهی یا تعدادی ناشمارا نقطه قطع کند، متناهی یا نامتناهی است، و ادعای ما ثابت می‌شود.

**مثال.** اگر $k=2h=28/27$ (به‌صورت سه‌ای و با رقم ۲ که بینهایت‌بار تکرار می‌شود، ۰٫۱۱۱۲۲۰۰۰...=$h$)، آنگاه $S(k)=6$ و تجزیه‌های ممکن (به‌صورت سه‌ای) عبارت‌اند از

$k=1+0.001$, $k=0.222+0.002$

$k=0.221+0.01$, $k=0.21+0.021$

$k=0.202+0.022$, $k=0.201+0.10$.

درحالتی که $c(k)$ نامتناهی است، دیدیم که هرظهور تازهٔ ۱ در دنبالهٔ $\{a_n\}$، انتخابی جدید بین $\mu(n)=0$ و $\mu(n)=2$ را سبب می‌شود. برحسب تجزیهٔ $k=x+y$، با ضوابط $x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n/3^n$ و $y=\sum_{n=1}^{\infty}c_n/3^n$، این دقیقاً متناظر

با انتخاب $b_n=c_n=0$ است اگر $a_n=0$ و متناظر با $b_n=c_n=2$ است اگر $a_n=2$، و سرانجام متناظر با $b_n=0$ و $c_n=2$ (یا $b_n=2$ و $c_n=0$) است اگر $a_n=1$ و $\mu(n)=0$ (یا $\mu(n)=2$). حالتی جالب، حالت $k=1$، یعنی $h=0.1111\ldots$ است. در این حالت، اگر $x+y=1$، تجزیه‌ای باشد که با انتخاب یك دنبالهٔ $\mu$ تعیین می‌شود، آنگاه دقیقاً داریم $x=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)/3^n$.

**قیصره.** ترسیم دنبالهٔ $\{L_n\}$ (شکلهای ۱ تا ۳)، مشابه با ترسیمهایی است که تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتقپذیر روی $[0,1]$ یا درخت همگن نامتناهی با درجهٔ متناهی را به‌وسیلهٔ استقرا تعریف می‌کنند. اینها مثالهایی از اشیایی هندسی فراهم می‌کنند که این روزها آنها را فرکتال می‌نامند. یك فرکتال دارای این ویژگی است که هریك از بخشهایش دقیقاً کپی کوچکی از کل آن است. این ویژگی «همگن‌بودن» غالباً دارای نظیری جبری است: درحالت مجموعهٔ سه‌ای کانتور، $N$امین مرحلهٔ ترسیم هندسیش با این واقعیت متناظر است که هر عدد به‌صورت $\sum_{n=1}^{N+1}a_n/3^n$، $a_n\in\{0,1,2\}$، از عدد $\sum_{1}^{N}a_n/3^n$، با انتخابی بین $a_{n+1}=0$، $a_{n+1}=1$ و $a_{n+1}=2$، به‌دست می‌آید. نکتهٔ اساسی آن است که ماهیت این انتخاب به‌عدد و به $N$ بستگی ندارد. در $\mathbf{F}_n$، آزادگروه با $n$ مولد، انتخابی که برای تشکیل واژه‌ای به‌طول $N+1$ از واژه‌ای به‌طول $N$ انجام می‌شود مستقل از واژه و $N$ است. بنابراین، نمودار $\mathbf{F}_n$، درختی همگن (از درجهٔ $2n$) است.

## مجموعه‌های کانتور کسرهای مسلسل

مجموعه‌های نقطه‌ای کانتور درنظریهٔ اندازه و درنظریهٔ کسرهای مسلسل نقشی مهم دارند. مجموعهٔ سه‌ای کانتور، $C$، مثالی پایه‌ای ازمجموعهٔ ناشمارای بورل-اندازه‌پذیری است که اندازهٔ آن صفر است (مثلاً، [۵]، صفحه‌های ۴۲ و ۶۳ را ببینید). مفهومی مهم درنظریهٔ کسرهای مسلسل، مجموعهٔ

$$F(n)=\{x\in[0,1]: x=[0;a_1,a_2,a_3,\cdots],$$

$$[\text{برای تمام مقادیر } i,\ a_i\leqslant n]\}$$

است؛ یعنی مجموعهٔ کسرهای مسلسل باکران $n$ ($n$ می‌تواند هرعدد صحیح مثبتی باشد). این واقعیت که $F(n)$، یك مجموعهٔ نقطه‌ای کانتور است به‌این ویژگی بستگی دارد که اگر

$$x=[0;a_1,\cdots,a_m,b_{m+1},b_{m+2},\cdots]$$

و

$$y=[0;a_1,\cdots,a_m,c_{m+1},c_{m+2}\cdots]$$

در $F(n)$ باشند، آنگاه $x<y$ $(x>y)$ اگر $b_{m+1}<c_{m+1}$، که $m$ فرد است ($m$ زوج است). به‌خصوص،

$$\min F(n)=[0;n,1,n,1,\cdots]$$

$$\max F(n)=[0;1,n,1,n,\cdots]$$

و $F(n)$ را می‌توان چنین به‌دست آورد که ابتدا بازه‌های باز $(0,[0;n,1,n,1,\cdots])$ و $([0;1,n,1,n,\cdots],1)$ را از $(0,1)$ برداریم، سپس بازه‌های

$([0;n,n,1,n,1,\cdots])$، $([0;n-1,1,n,1,n,\cdots])$

$([0;n-1,n,1,n,1,\cdots])$، $([0;n-2,1,n,1,n,\cdots])$

$([0;2,n,1,n,1,\cdots])$، $([0;1,1,n,1,n,\cdots])$، ...

را برداریم، و قس‌علی‌هذا. ([۳]، صفحهٔ ۹۷۱ را ببینید).

یکی ازقضایای هال می‌گوید که $F(2)+F(2)+\mathbf{Z}=\mathbf{R}$ ([۳]، قضیهٔ ۱.۳)، که‌شبیه $C+C=[0,2]$ است. در واقع، هال، قضایای عمومیتری را دربارهٔ ماهیت $L(A)+L(B)$ برای مجموعه‌های نقطه‌ای‌کانتور دلخواه $L(A)$ و $L(B)$ اثبات می‌کند. یکی از کاربردهای اصلی قضیهٔ هال این نتیجه است که طیف مارکوفی، شامل هرعدد حقیقی بزرگتر از ۶ است ([۱]، صفحهٔ ۴۵۴ را ببینید). با به‌کاربردن صورت اصلاح‌شده‌ای از قضیهٔ اصلی هال ([۲] را ببینید)، به‌جای عدد ۶ متوالیاً مقدار ممکن بهتری به‌نام شعاع هال ($\approx 4.5$) گذاشته شده است.

درمرجع [۴]، برای اثبات وجود شکافهایی درطیف مارکوفی پایینی، مجموعهٔ $F(2)+F(2)$ به‌کار رفته است. برهانی که در این مرجع وجود دارد، ترسیم هندسی بالارا دربدو امر به‌ما القا کرده است.

## مراجع


1. Cusick, T. W. The largest gaps in the lower Markoff spectrum. *Duke Math. J. 41* (1974), 453-463.
2. Freiman, G. A. Diophantine approximation and the geometry of numbers (Markov's problem). Kalin. Gosud. Univ., Kalinin, 1975.
3. Hall, M. Jr. On the sum and product of continued fractions. *Annals of Mathematics, vol. 48, No.4* (1947), 966-993.
4. Kinney, J. R. and T.S. Pitcher. On the lower range of Perron's modular function. *Canad. J. Math. 21* (1969), 808-816.
5. Royden, H. L. *Real Analysis*. 2nd edition, 1968, Collier Macmillan Publishers.



• Marco Pavone, "The Cantor set and a geometric construction," *L'Enseignement Mathématique*, 35 (1989) 41-49.

* مارکو پاون، دانشگاه برکلی آمریکا

# قانون قوی اعداد کوچک•

ریچارد گای*
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

این مقاله در دو قسمت است. قسمت اول آن شامل عملی است که انجام‌دادنش باشماست. در این قسمت، ۳۵ مثال از الگوهایی را نشان می‌دهم که بانگاه‌کردن به‌چندین مقدار کوچک $n$، در مسائل مختلفی که‌جوابهایشان به $n$ بستگی‌دارد،درنظرما جلوه‌گر می‌شوند. درهرمورد باید به‌این‌سؤال پاسخ دهید: آیا تصور می‌کنید الگو به‌ازای همهٔ $n$ها ادامه می‌یابد، یا فکر می‌کنیدکه این امر توهمی است‌ناشی‌ازکوچک‌بودن‌مقادیر $n$ی که درمثال به‌کار گرفته‌شده‌اند؟

هشدار: به‌مثالهایی از هردونوع برمی‌خورید؛ همهٔ آنها زادهٔ وهم وخیال نیستند!

درقسمت دوم جوابها را، تا آنجاکه می‌دانم، همراه با ذکر مراجع، می‌دهم.

بد نیست برگهٔ نمراتی برای خود داشته باشید: درمورد هر مثال، نظرخود را دراین‌باره که آیا ادامه‌یافتن الگوی مشاهده‌شده معلوم است، ادامه‌نیافتن آن معلوم است، یا اصلا چیزی دربارهٔ آن نمی‌دانیم، درآن واردکنید.

نخستین قسمت مقاله هیچگونه اطلاعاتی در برندارد، بلکه مقدار زیادی بی‌اطلاعی‌را شامل می‌شود. این‌قسمت شامل‌یك‌قضیه است:

**با نظرکردن نمی‌توان چیزی گفت**

این قضیه کاربردگسترده‌ای دربرون و درون ریاضیات دارد و آن را از راه‌نرساندن شما [از حساب نپذیرفتنش] ثابت می‌کنیم.

و حال چندمثال مشهور برای شروع بحث.

**مثال ۱.** اعداد $۳ = ۱ + ۲^۲$، $۵ = ۱ + ۲^۴$، $۱۷ = ۱ + ۲^۴$، $۲۵۷ = ۱ + ۲^۸$، $۶۵۵۳۷ = ۱ + ۲^{۱۶}$، اول‌اند.

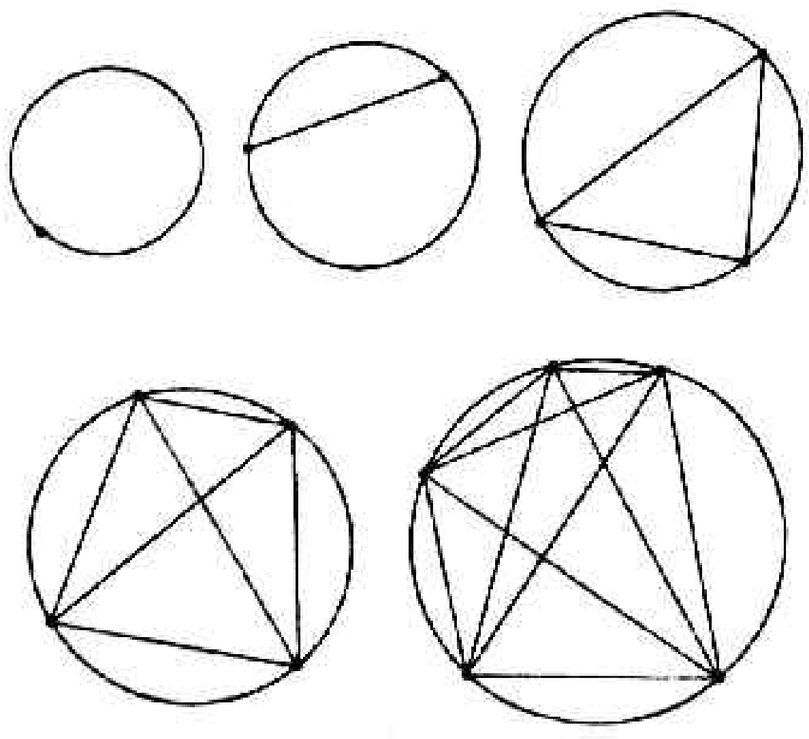
**مثال ۲.** اعداد $۲^n - ۱$ نمی‌توانند اول باشند مگر اینکه $n$ اول باشد، اما $۳ = ۲^۲ - ۱$، $۷ = ۲^۳ - ۱$، $۳۱ = ۲^۵ - ۱$، $۱۲۷ = ۲^۷ - ۱$، اول‌اند.

**مثال ۳.** صرف‌نظراز ۲،که غریبترین‌عدد اول است،کلیهٔ‌عددهای اول یا به‌شکل $۴k - ۱$اند یا به‌شکل $۴k + ۱$. تعدادعددهای اول به‌شکل $۴k - ۱$ درهر بازهٔ $[۱, n]$ دست‌کم به‌قدر عددهای اول به‌صورت $۴k + ۱$ است ($۴k - ۱$ «در مسابقهٔ اعداد اول» برنده می‌شود):



**مثال ۴.** چند عدد به‌تصادف انتخاب‌کنید (کافی‌است تنهاعددهای فرد را درنظر بگیرید). احتمال آن‌راکه تعداد مقسوم‌علیه‌های به شکل $۴k - ۱$ یك عدد از تعداد مقسوم‌علیه‌های به شکل $۴k + ۱$ آن بیشتر باشد، براوردکنید. مثلا عدد ۲۱ دومقسوم‌علیه (۳ و ۷) ازنوع اول و دومقسوم‌علیه (۱ و ۲۱) ازنوع دوم دارد، درحالی که‌کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های ۲۵ (۱، ۵، ۲۵) ازنوع دوم است.

**مثال ۵.** پنج دایرهٔشکل ۱، $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ نقطه برخوددارند. این نقطه‌ها در وضعیت‌کلی قرار دارند به‌این‌معنی‌که هیچ سه وتر از $\binom{n}{۲}$ وتری‌که آنهارا به‌هم وصل‌می‌کنند، ازیك‌نقطه‌نمی‌گذرند. تعداد ناحیه‌هایی کـه از افراز هردایره به‌توسط وترها به وجـود می‌آیند، چقدر است؟



**شکل ۱.** هریك از این دایره‌ها چند ناحیه دارند؟

سالهاست که درصدد تدوین قانون قوی اعداد کوچك هستم [۹]. بهترین نتیجه‌ای که توانسته‌ام تاکنون به‌دست آورم، این است:

تعداد اعداد
کوچك برای برآوردن انتظارات
فراوانی که از آنها داریم کافی نیست

این دشمن اکتشاف ریاضی است. وقتی متوجه الگویی ریاضی می‌شوید، چگونه به‌واقعی‌بودن آن پی می‌برید؟

شباهتهای سطحی
مسبب احکام نادرست‌اند

نظمهای ناپایدار
باعث حدسهای نادقیق‌اند

از سوی دیگر، قانون قوی اغلب در جهت عکس کار می‌کند:

استثناهای اولیه
اصول کلی احتمالی‌را درمحاق فرو می‌برند

بی‌قاعدگیهای آغازین
جلوی شهود مؤثر را می‌گیرند

حال چند واقعیت گمراه‌کننده دربارهٔ اعداد کوچك:
ده درصد از صدعدد نخستین مربع کامل‌اند.
یك‌چهارم اعداد کوچکتراز ۱۰۰ عددهای اول‌اند.
کلیهٔ اعداد کوچکتراز ۱۰، بجز ۶، توانهای اعداد اول‌اند.
نصف اعداد کوچکتراز ۱۰ اعداد فیبوناتچی‌اند:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

و اعداد فیبوناتچی یك در میان، هم اعداد بل و هم اعداد کاتالان هستند.

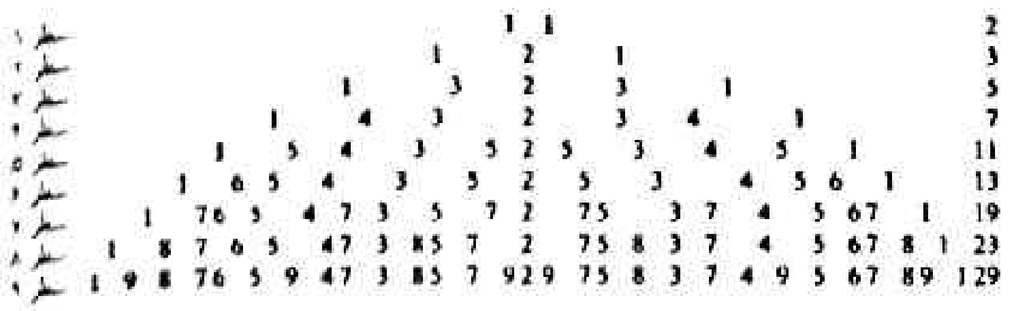
**مثال ۶.** اعداد ۳۱، ۳۳۱، ۳۳۳۱، ۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۳۳۱، اول‌اند.

**مثال ۷.** مجموعهای متناوب فاکتوریلها،

$$3! - 2! + 1! = 5$$
$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$
$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$
$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$
$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$
$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

عددهای اول‌اند.

**مثال ۸.** در جدول



سطر $n$ام از سطر $(n-1)$ام با درج کردن $n$ بین هر جفت از اعداد متوالی که جمعشان $n$ است، به‌دست می‌آید. تعداد عددهای هر سطر درطرف راست نشان داده شده است. هر یك از آنها یك عدد اول است.

**مثال ۹.** آیا عدد اولی به‌شکل $۷۰۱۳ \times 2^n + 1$ موجود است؟

**مثال ۱۰.** آیا کلیهٔ اعداد به‌صورت $۷۸۵۵۷ \times 2^n + 1$ مرکب‌اند؟

**مثال ۱۱.** وقتی از روش اقلیدس استفاده می‌کنید تا نشان دهید که بینهایت عدد اول وجود دارد:

$$2 + 1 = 3$$
$$(2 \times 3) + 1 = 7$$
$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 2311$$

همواره به‌عدد اول نمی‌رسید:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$$

اما اگر به‌سراغ عدد اول بعدی بروید، تفاضل آن از حاصلضرب همواره یك عدد اول است:

$$5 - 2 = 3$$
$$11 - (2 \times 3) = 5$$
$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$
$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$
$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$
$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$
$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$
$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23$$

**مثال ۱۲.** از دنبالهٔ عددهای اول، اولین تفاضلها، سپس قدرمطلق تفاضلهای دوم، سوم، چهارم، و... را تشکیل دهید:

| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 6 | 2 | 6 | 4 | 2 | 4 | 6 | 6 | 2 | 6 | |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 2 | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | | | |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | | | | | | |

آیا اولین جمله درهردنبالهٔ تفاضلها همواره ۱ است؟

**مثال ۱۳.** $2^n$ به‌ازای $n > 1$ هرگز همنهشت ۱ (به‌پیمانهٔ $n$) نیست. $2^n$ هروقت که $n$ اول باشد، و به‌ندرت وقتی $n$ اول نیست ($n = 341,561,\ldots$)، همنهشت ۲ (به‌پیمانهٔ $n$) است. آیا $2^n$ به ازای $n > 1$ هرگز همنهشت ۳ (به‌پیمانهٔ $n$) است؟

**مثال ۱۴.** تقریبهای خوب $5^{1/5}$، یعنی، مجموعهای همگرای

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

عبارت‌اند از ۱/۱، ۲/۳، ۳/۳، ۵/۷، ۸/۱۱، ۲۱/۲۹، ... که مخرجهای آنها اعداد فیبوناتچی و صورتهای آنها اعداد لوکاس‌اند.

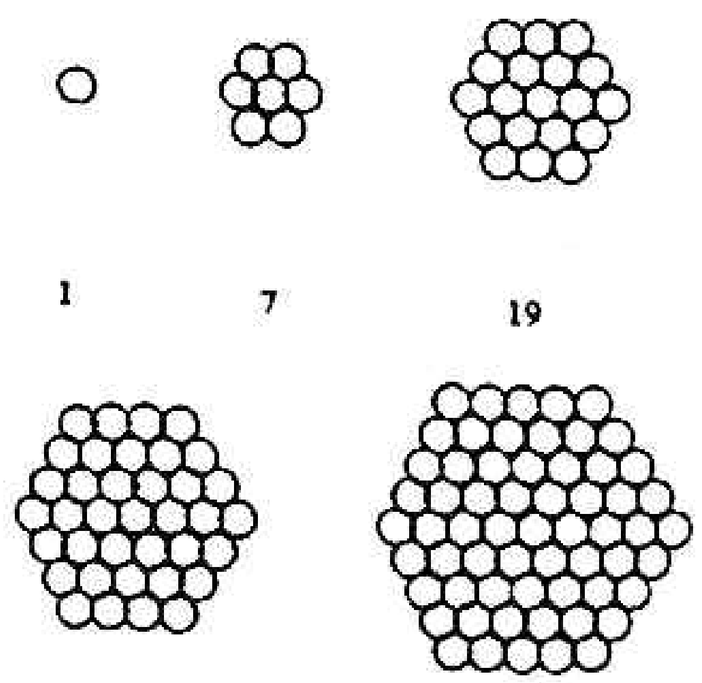
**مثال ۱۵.**

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^0$$

$$(x+y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^1$$

$$(x+y)^7 = x^7 + y^7 + 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

**مثال ۱۶.** دنبالهٔ **اعداد هگز**[1] (که نامگذاری آنها به این‌گونه، برای متمایزساختن آنها از اعداد مسدسی [هگزاگونال] ، $n(2n-1)$، است) در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. مجموعهای جزئی این دنباله، ۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ۱۲۵، ظاهراً مکعب کامل‌اند.




**شکل ۲.** اعداد هگز

**مثال ۱۷.** اعداد صحیح مثبت را بنویسید، آنها را یك در میان حذف کنید، ومجموعهای جزئی عددهای باقی‌ماندهرا تشکیل‌دهید:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ~~2~~ | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | 9 | ~~10~~ | 11 |
| 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 25 | | 36 |

**مثال ۱۸.** مانند قبل عمل کنید، اما اعداد را دو در میان حذف کنید، سپس مجموعهای جزئی‌را یك‌درمیان حذف کنید:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 | ~~6~~ | 7 | 8 | ~~9~~ | 10 | 11 | ~~12~~ | 13 | 14 | ~~15~~ | 16 |
| 1 | ~~3~~ | | 7 | ~~12~~ | | 19 | ~~27~~ | | 37 | ~~48~~ | | 61 | ~~75~~ | | 91 |
| 1 | | | 8 | | | 27 | | | 64 | | | 125 | | | 216 |

**مثال ۱۹.** بازهم مانند قبل، اما این‌بار اعدادرا سه‌درمیان حذف کنید، سپس مجموعهای جزئی را دو درمیان حذف کنید، سپس مجموعهای جزئی آنهارا یك‌درمیان حذف کنید:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | 6 | 7 | ~~8~~ | 9 | 10 | 11 | ~~12~~ | 13 | 14 | 15 | ~~16~~ | 17 |
| 1 | 3 | ~~6~~ | | 11 | 17 | ~~24~~ | | 33 | 43 | ~~54~~ | | 67 | 81 | ~~96~~ | | 113 |
| 1 | ~~4~~ | | | 15 | ~~32~~ | | | 65 | ~~108~~ | | | 175 | ~~256~~ | | | 369 |
| 1 | | | | 16 | | | | 81 | | | | 256 | | | | 625 |

**مثال ۲۰.** باز هم مانند قبل، اما این‌بار دور اولین عدد دنباله دایره‌ای بکشید، دومین عدد بعداز آن را حذف کنید، سومین عدد بعدازاین‌عددرا حذف کنید، و به‌همین‌ترتیب ادامه‌دهید. مجموعهای جزئی‌را تشکیل دهید، وکار را به‌همین‌ترتیب ادامه دهید:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 | ~~6~~ | 7 | 8 | 9 | ~~10~~ | 11 | 12 | 13 | 14 | ~~15~~ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | ~~21~~ |
| | ② | | 6 | ~~14~~ | | 18 | 26 | ~~35~~ | | 46 | 58 | 71 | ~~85~~ | | 101 | 118 | 136 | 155 | ~~175~~ | |
| | | ⑥ | | | | 24 | 50 | | | 96 | 154 | ~~225~~ | | | 326 | 444 | 580 | ~~735~~ | | |
| | | | ㉔ | | | | | | | 120 | ~~274~~ | | | | 600 | 1044 | ~~1514~~ | | | |
| | | | | ⑳ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | |

**مثال ۲۲.** درجدول ۱ مقادیر فرد اول $n^4+1$ و $17\times 2^n-1$ باحروف سیاه چاپ شده‌اند. به‌ازای $n=1,2,4,6,16,20$ مقادیر فرد اول آنهاهمزمان ظاهر می‌شوند.

| $n$ | $n^4+1$ | $17\times 2^n-1$ |
|---|---|---|
| 0 | **1** | $16=2^4$ |
| 1 | 2 | $33=3\times 11$ |
| 2 | **17** | **67** |
| 3 | $82=2\times 41$ | $135=3^3\times$ |
| 4 | **257** | **271** |
| 5 | $626=2\times$ | $543=3\times$ |
| 6 | **1297** | **1087** |
| 7 | $2402=2\times$ | $2175=3\times$ |
| 8 | $4097=17\times$ | $4351=19\times$ |
| 9 | $6562=2\times$ | $8703=3^2\times$ |
| 10 | $10001=73\times$ | $17407=13^2\times$ |
| 11 | $14642=2\times$ | $34815=3\times$ |
| 12 | $20737=89\times$ | $69631=179\times$ |
| 13 | $28562=2\times$ | $139263=3\times$ |
| 14 | $38417=41\times$ | $278527=223\times$ |
| 15 | $50626=2\times$ | $557055=3^2\times$ |
| 16 | **65537** | **1114111** |
| 17 | $83522=2\times$ | $2228223=3\times$ |
| 18 | $104977=113\times$ | $4456447=59\times$ |
| 19 | $130322=2\times$ | $8912895=3\times$ |
| 20 | **160001** | **17825791** |
| 21 | $194482=2\times$ | $35651583=3^4\times$ |
| 22 | $234257=73\times$ | $71303167=13\times$ |
| 23 | $279842=2\times$ | $142606335=3\times$ |

جدول ۱

**مثال ۲۳.** درجدول ۲ مقادیراول $21\times 2^n-1$ و $7\times 4^n+1$ با حروف سیاه چاپ شده‌اند. این مقدارها به ازای $n=1,2,3,7,10,13$ همزمان ظاهر می‌شوند.

| $n$ | $21\times 2^n-1$ | $7\times 4^n+1$ |
|---|---|---|
| 0 | $20=2^2\times 5$ | $8=2^3$ |
| 1 | **41** | **29** |
| 2 | **83** | **113** |
| 3 | **167** | **449** |
| 4 | $335=5\times$ | $1793=11\times$ |
| 5 | $671=11\times$ | $7169=67\times$ |
| 6 | $1343=17\times$ | $28673=53\times$ |
| 7 | **2687** | **114689** |
| 8 | $5375=5^3\times$ | $458753=79\times$ |
| 9 | $10751=13\times$ | $1835009=11\times$ |
| 10 | **21503** | **7340033** |
| 11 | $43007=29\times$ | $29360129=37\times$ |
| 12 | $86015=5\times$ | $117440513=3907\times$ |
| 13 | **172031** | **469762049** |
| 14 | $344063=17\times$ | $1879048193=11\times$ |
| 15 | $688127=11^4\times$ | $7516192769=29^2\times$ |
| 16 | $1376255=5\times$ | $30064771073=113\times$ |
| 17 | $2752511=19\times$ | $120259084289=379\times$ |

جدول ۲

**مثال ۲۴.** دنبالهٔ زیر را درنظر گیرید

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=(1+x_0^3+x_1^3+\cdots+x_n^3)/(n+1)\quad (n\geq 0)$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 28 | 154 | 3520 | 1551880 | 2675937772160 | ... |

آیا $x_n$ همواره یک عدد صحیح است؟

**مثال ۲۵.** همان مثال قبل، ولی به جای مربعها، مکعب بگذارید: $y_0=1$، $y_{n+1}=(1+y_0^3+y_1^3+\cdots+y_n^3)/(n+1)$ $(n\geq 0)$. همان سؤال.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 1 | 2 | 5 | 45 | 22815 | 2375152056927 | ... |

**مثال ۲۶.** ایضاً برای توانهای چهارم،

$$z_{n+1}=(1+z_0^4+z_1^4+\cdots+z_n^4)/(n+1).$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_n$ | 1 | 2 | 9 | 2193 | 5782218987645 | ... |

همچنین، برای توانهای پنجم و قس‌علی‌هذا.

**مثال ۲۷.** عاملهای تحویل ناپذیر $x^n-1$ چندجمله‌ایهای دایره‌بری[1] هستند، یعنی، $x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$، بنابراین $\Phi_1(x)=x-1$، $\Phi_2(x)=x+1$، $\Phi_3(x)=x^2+x+1$، $\Phi_4(x)=x^2+1$. چند جمله‌ای دایره‌بری مرتبهٔ $n$، $\Phi_n(x)$، از درجهٔ $\varphi(n)$ است که $\varphi$ همان تابع توتیان[2] اویلر است. نوشتن $\Phi_n(x)$ وقتی $n$ عددی اول، دوبرابر یک عدد اول، یا توانی ازیک عدد اول است، و در بسیاری از موارد دیگر کاری است آسان. آیا ضرایب همواره $\pm 1$ یا ۰ اند؟

**مثال ۲۸.** دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند[3]: نفر اول عدد صحیح مثبتی چون $n$ را انتخاب می‌کند. نفر دوم یکی از دو عدد $2^a/(3n\pm 1)$ را انتخاب، و در پاسخ ارائه می‌کند ($2^a$ به‌معنی بزرگترین توان ۲ است که صورت را عاد می‌کند). نفر اول این پاسخ‌را می‌گیرد وطبق همین‌قاعده عمل می‌کند. بازی‌ادامه می‌یابد و برنده کسی‌است که زودتربه ۱ برسد. دراین بازی، مثلا، عدد ۷ یک‌عدد برنده است یعنی کسی که آن را ارائه کند، برنده می‌شود زیرا حریف باید یکی‌از پاسخهای

$$(3\times 7+1)/2=11 \quad \text{یا} \quad (3\times 7-1)/2^2=5$$

را بدهد و ۵ و ۱۱ نیز به‌نوبهٔ خود به پاسخهای

$$(3\times 11-1)/2^5=1 \quad \text{و} \quad (3\times 5+1)/2^4=1$$

می‌انجامند و ارائه‌کنندهٔ ۷ برنده می‌شود. اعدادی نظیر ۵ و ۱۱ که ارائهٔ آنها باعث برنده‌شدن حریف می‌شود، اعداد بازنده‌اند.

اگر $\tau$ احتمال بازنده‌بودن یک‌عدد باشد و هیچ حالت خنثی (نه برنده ونه‌بازنده)وجود نداشته باشد، آنگاه احتمال‌برنده‌بودن یک عدد $\tau-1$ است. این وضع فقط وقتی پیش می‌آید که هردو انتخاب ممکن بازنده باشند لذا $\tau^2=\tau-1$، و $\tau$ نسبت طلایی

---

1. cyclotomic  2. totient

۳. برای کسب اطلاع بیشتر درموردایین‌بازی، می‌توانید به‌مرجع [۱۳] رجوع کنید [۴].

یعنی ۱۸ر۰≈۲/(۱−√۵) است.

بنابراین تعجب‌آور نیست که ۵ عدد از نخستین ۸ عدد، ۸ عدد از نخستین ۱۳ عدد، ۱۳ تا از نخستین ۲۱ عدد، ۲۱ تا از نخستین ۳۴ عدد، و ۳۴ تا از نخستین ۵۵ عدد، بازنده‌اند، زیرا نسبت اعداد فیبوناتچی متوالی به‌نسبت طلایی میل می‌کند.

**مثال ۲۹.** آیا هریك از دو معادلهٔ دیوفانتی

$$2x^2(x^2-1)=3(y^2-1) \quad \text{و} \quad x(x-1)/2=2^n-1$$

تنها دارای پنج جواب مثبت $x=1,2,3,6,91$ است؟

**مثال ۳۰.** دنبالهٔ $a_1=1$، $a_{n+1}=\lfloor\sqrt{2a_n(a_n+1)}\rfloor$، $(n\geqslant 1)$ را درنظر گیرید

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 | 19 | 27 | 38 | 54 | 77 | 109 | 154 | 218 | 309 | 437 | 618 | 874 | 1236 | 1748 |
| | 1 | 2 | | 4 | | 8 | | 16 | | 32 | | 64 | | 128 | | 256 | | 512 | | | |

آیا تفاضل یك در میان عددها، $a_{2k}-a_{2k+1}$، توانهای ۲ یعنی به‌صورت $2^k$اند؟

**مثال ۳۱.** در همین دنباله، آیا اعداد با رتبه‌های زوج، $a_{2k+2}$، به‌شکل $a_{2k}+\varepsilon_k$اند که در آن $\varepsilon_k$ عبارت‌از $k$ امین رقم در بسط دودویی ۱ر۰۱۱۰۱۰۰۰۰۰۱۰... است؟ $\sqrt{2}=1$

**مثال ۳۲.** آیا این‌دنباله، همان دنبالهٔ $a_1=1, a_2=2, a_3=3$، $a_{n+1}=a_n+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$ است؟

**مثال ۳۳.** $n$ امین مشتق $x^x$ در $x=1$، یك‌عدد صحیح است. آیا این مشتق همواره مضرب $n$ است؟ مقادیر آن به ازای $n=1,2,3,...$ عبارت‌اند از

$$1\times 1,\ 2\times 1,\ 3\times 1,\ 4\times 2,\ 5\times 2,\ 6\times 9,\ 7\times(-6),\ 8\times 118,\ 9\times(-568),$$
$$10\times 4716,\ 11\times(-38160),\ 12\times 358126,\ 13\times(-3662088),\ 14\times 41073096,$$
$$15\times(-500013528),\ 16\times 6573808200,\ 17\times(-92840971200),$$
$$18\times 1402148010528,\ldots.$$

**مثال ۳۴.** مطلوب است $c_n$، تعداد راههایی که می‌توان $n$ سکهٔ ۱ ریالی را به‌صورت ردیفی چید به‌طوری‌که هرسکه‌ای درهرردیف بالای ردیف اول، بردوسکهٔ مجاور در ردیف زیرین مماس باشد.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 9 | 15 | 26 | 45 | 78 | 135 | 234 | 406 | 704 | 1222 | 2120 |

متخصصین نظریهٔ افرازها برای‌تشریح بیشترچنین دنباله‌هایی، اغلب تابع مولد آنها، یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 9x^6 + 15x^7 + \cdots$$

را به‌صورت یك‌سری حاصلضرب،

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-a(n)}$$

بیان می‌کنند. دراین‌حالت، $a(n)$ها اعداد فیبوناتچی‌متوالی‌هستند:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a(n)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | ... |

**مثال ۳۵.** اگر $p_k$، $k$ امین عدداول‌باشد، $p_1=2$، $p_2=3$،...، آیا رابطهٔ زیر برقرار است؟

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{p_k})^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{p_1+p_2+\cdots+p_k}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

## پاسخها

**۱.** کسی که گول این‌قانون قوی‌را خورد، شخصیتی جز فرما نبودا اویلرتجزیهٔ $۶۴۱\times ۶۷۰۰۴۱۷=۲^{۳۲}+1$ را ارائه‌داد. کلیهٔ مثالهای دیگر اعداد فرما مرکب‌اند؛ جف یانگ و دانکن بوئل [۳۲] اخیراً نشان داده‌اندکه $۲^{۲۲۰}+1$ مرکب است.

**۲. اعداد اول مرسن،** $۲^p-1$ ها، خیلی معدودند. تاکنون کسی نتوانسته نامتناهی‌بودن تعداد آنها را ثابت کند؛ $۸۹\times ۲۳=۲^{۱۱}-1$ جزو اعداداول مرسن نیست. به‌پیوست ۳ی مرجع [۱۲] و دنبالهٔ ۱۰۸۰ در [۳۸] مراجعه کنید.

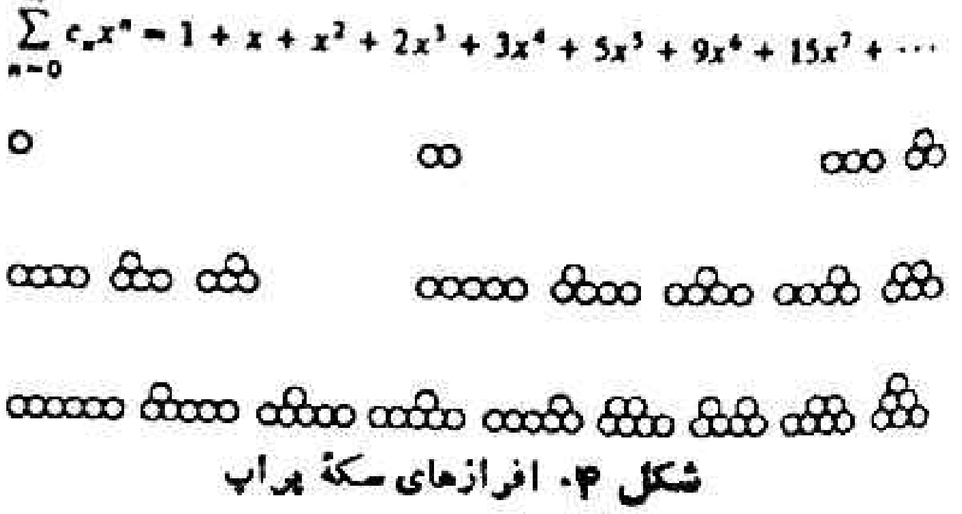
**۳.** در «سابقهٔ اعداد اول»، $4k-1$ و $4k+1$ به‌نوبت‌بینهایت بار یکدیگررا پشت‌سر می‌گذارند. این‌را لیتلوود در[۱۸]ثابت کرده‌است. دربارهٔ این‌موضوع، مقاله‌های‌زیادی در دیویوهای نظریهٔ اعداد شمارهٔ ۱۲ آمده است، مثلاً مقالهٔ چن [۴].

**۴.** بنابرقضیه‌ای ازلژاندر (نگاه کنید، مثلا، به [۶])، اگر $D_+$ و $D_-$ تعدادمقسوم‌علیه‌های $n$ به‌شکلهای $4k+1$ و $4k-1$باشد، آنگاه تعداد راههای نمایش $n$ به‌صورت مجموع دو مربع عبارت است از $۴(D_+-D_-)$. بنابراین به ازای هر عدد، $D_+\geqslant D_-$

**۵.** پیش از آنکه همه‌چیز را برملا کنیم، برای شگفتی بیشتر شما دایره‌ای (شکل ۵) را ارائه می‌کنیم که ده‌نقطه روی‌آن‌است و ۲۵۶ ناحیه دارد.

اگردایره‌$n$ نقطه داشته باشد، وترها یکدیگررا در$\binom{n}{4}$نقطه درداخل دایره قطع‌می‌کنند، زیرا ازهر مجموعه‌ای شامل چهار نقطه، تنها یك‌نقطهٔ تلاقی حاصل می‌شود. تعدادرأسهای‌موجود در شکل، $V=n+\binom{n}{4}$ است. برای پیداکردن تعداد ضلعها، انتهاهای آنهارا می‌شماریم. ازهریك از $n$ نقطه،$n+1$ ضلع و از هریك از $\binom{n}{4}$ نقطهٔ تلاقی، چهار ضلع می‌گذرند، بنابراین $۲E=n(n+1)+۲\binom{n}{4}$. بنابرفرمول اویلر، تعداد ناحیه‌های داخل دایره عبارت است از

$$\begin{aligned}E+1-V &= 2\binom{n}{4}+\frac{1}{2}n(n+1)+1-\binom{n}{4}-n\\ &= \binom{n}{4}+\frac{1}{2}n(n-1)+1\\ &= \binom{n-1}{4}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}\end{aligned}$$

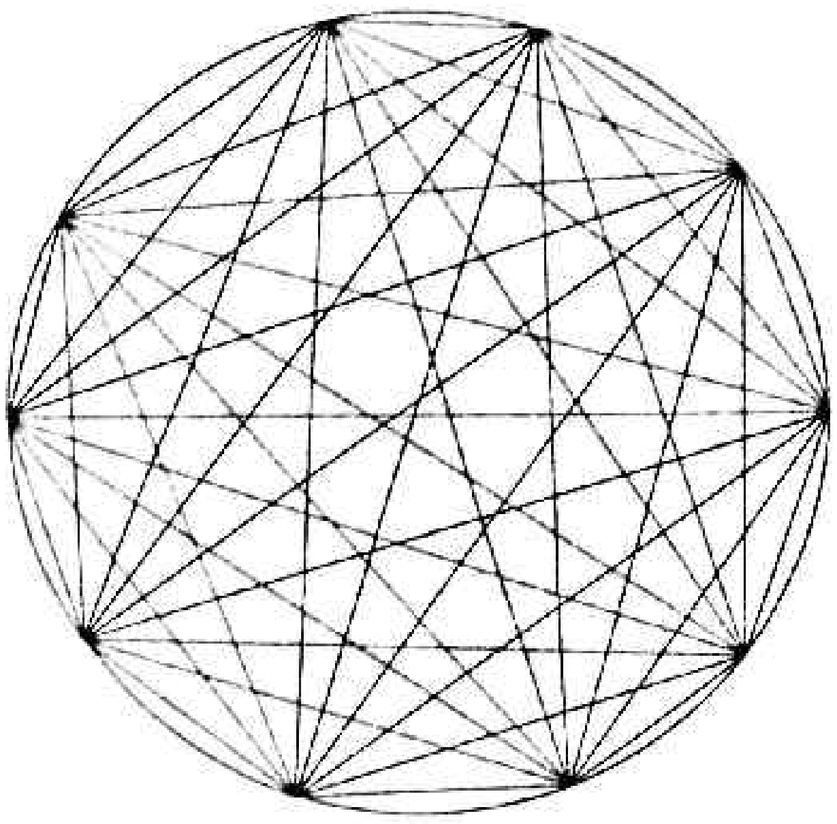


**شکل ۴.** افرازهای سکهٔ پراپ

برهان مستقیمی با نشانه‌گذاری ناحیه‌ها به کمك حداکثر چهار عدد از اعداد ۱، ۲، ... ، ۱ − $n$ در [۵] داده شده است. جواب، صرفاً پنج جمله از بین $n$ جملهٔ بسط دوجمله‌ای $(1+1)^{n-1}$ است. به ازای $n<6$، جواب شامل همهٔ جمله‌هاست و تعداد ناحیه‌ها توانی از ۲ است. به ازای $n=6$، تنها ۱ حذف شده است. به ازای $n=10$ تنها نصف جمله‌ها حذف شده‌اند، و تعداد ناحیه‌ها برابر است با $2^9\times(1/2)=256$.

| # تعداد نقطه‌ها = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # تعداد ناحیه‌ها = | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 31 | 57 | 99 | 163 | 256 | 386 | 562 | 794 | 1093 |

چند عدد مشهور دیگر، مثلاً ۱۶۳ و ۱۰۹۳، نیز در این دنباله که دنبالهٔ شمارهٔ ۴۲۷ در [۳۸] است، ظاهر می‌شوند.



**شکل ۵.** دایره‌ای که به ۲۸ ناحیه افراز شده است.

**۶.** همان‌گونه که به‌سهولت با آزمونهای رایج تقسیم‌پذیری می‌توان تحقیق کرد، هیچ‌عضوی از اعضای این دنباله بر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، یا ۳۷ قابل‌قسمت نیست. از طرف دیگر، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ... عدد ۳۳۱ ... ۳۳ را تنها در صورتی که تعداد سه‌ها به ترتیب $16k+8$، $18k+11$، $22k+25$، $28k+19$، $15k+1$، ... باشد، عاد می‌کند درحالی که ۴۱، ۴۳، ۵۳، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ... هیچ‌عضوی از اعضای دنباله‌را عاد نمی‌کنند. فکر نمی‌کنم که توصیف ساده‌ای از اینکه کدام اعداد اول دنباله‌را عاد می‌کنند و کدام اعداد اول آن‌را عاد نمی‌کنند، موجود باشد. عدد بعدی، ۳۳۳۳۳۳۳۳۱، نیز اول است ولی $17\times 19607843=333333333331$.

**۷.** باز هم از جای خوبی شروع کرده‌ایم، زیرا $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k!$ بر هیچ عددی نابیشتر از $n$ تقسیم‌پذیر نیست. با این حال،

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 = 79 \times 4139.$$

**۸.** این مثال و نیز مثال ۵ را اولین‌بار لئوموزر در ربع قرن پیش به‌من نشان داد. سطر $n$ فهرست مخرجهای سری فوری[1] از مرتبهٔ $n$، یعنی مجموعهٔ کسرهایی گویا مانند $r$ است، $1\leqslant r\leqslant n$، که مخرجهای آنها از $n$ بیشتر نیست. برای به‌دست آوردن سطر $n$ از سطر $n-1$، تنها $\varphi(n)$ عدد درج می‌شوند که در آن $\varphi(n)$ تابع تو تیان اویلر، یعنی تعداد عددهای نابیشتر از $n$ است که نسبت به $n$ اول‌اند. اول‌بودن $1+\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$ به‌ازای $1\leqslant n\leqslant 9$ امری اتفاقی است. چون $\varphi(10)=4$، تعداد عددهای سطر ۱۰ ام $33=4+29$ است و اول نیست.

**۹.** عبارت $1+2^n\times 7013$ به‌ازای $0\leqslant n\leqslant 24160$ مرکب است [۱۵]. دانکن بوئل و جف یانگ ۳۲۵ مورد دیگر $n<10^5$ را که ممکن بود عدد اولی به‌دست دهند، الك کرده‌اند. وجود هیچ‌عدد اولی از این نوع معلوم نشده است، گرچه محتمل است که یکی موجود باشد.

**۱۰.** عدد $1+2^n\times 78557$ همواره بردست کم یکی از اعداد ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۹، ۳۷، ۷۳ تقسیم‌پذیر است [۲۶، ۲۷]. توضیح بیشتر دربارهٔ این مثال و مثال قبل را در [۱۲] می‌توانید ببینید.

**۱۱.** فورچن[2] حدس زد که این تفاضلها همواره اول‌اند: نگاه کنید به [۸]، [۹]، و [۱۲]. چند تفاضل بعدی عبارت‌اند از ۳۷، ۶۱، ۶۷، ۶۱، ۷۱، ۴۷، ۱۰۷، ۵۹، ۶۱، ۱۰۹، ۸۹، ۱۰۳، ۷۹. احتمال زیادی دارد که حدس درست باشد، زیرا تفاضل نمی‌تواند بر هیچ‌یك از $k$ عدد اول قابل‌قسمت باشد، بنابراین کوچکترین مورد ممکن مرکب برای $P=\prod p_i$ عبارت است از $p_{k+1}^2$، که بزرگی آن تقریباً $(k\ln k)^2$ است. حاصلضرب نخستین $k$ عدد درحدود $e^k$ است: برای پیدا کردن یك مثال ناقض به‌رخنه‌ای به‌اندازه $(\ln N\ln\ln N)^2$ در درون اعداد اول حول $N$ نیاز داریم. تصور می‌شود که چنین رخنه‌هایی موجود نباشند، اما اثبات آن فراتر از حد توان کنونی ماست.

**۱۲.** این همان حدس گیلبریت[3] است که صحت آن به ازای $k<63419$ تحقیق شده است [۱۶]. هلرد کرافت[4] این فکر را مطرح کرده است که این حدس چندان ربطی به اعداد اول ندارد، بلکه درمورد هردنباله‌ای مرکب از ۲ و اعداد فرد که باسرعت زیادی افزایش نیابد، یا رخنه‌های خیلی بزرگی نداشته باشد صادق است: نگاه کنید به [۱۲]. درنامه‌ای به‌تاریخ ۸۷/۸/۳، اندی ادلیزکو گزارش داد که صحت حدس را به‌ازای $k<10^{10}$ تحقیق کرده است.

**۱۳.** د.ه. و اما لمر[5] کشف کرده‌اند که به‌ازای

$$n = 4700063497$$

داریم: $2^n\equiv 3 \pmod n$، اما به ازای هیچ $n>1$ کوچکتری این همنهشتی برقرار نیست.

---

1. Farey
2. R.F.Fortune
3. N.L.Gilbreath
4. Hallard Croft
5. D.H. & Emma Lehmer

**۱۴. $k$امین عدد لوکاس و $(k+1)$امین عدد فیبوناتچی عبارت انداز**

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}.$$

**نسبت آنها، با بزرگ‌شدن $k$، به**

$$(5-\sqrt{5})/2 \approx 1\cdot 381966011$$

**میل می‌کند، درحالی‌که $5^{1/5} \approx 1{,}379729661$. چندعدد بعدی‌که به $5^{1/5}$ میل می‌کنند، یعنی اعداد**

$$\frac{40}{29}, \frac{109}{79}, \frac{912}{661}, \frac{1021}{740}, \frac{26437}{19161}, \frac{27458}{19901},$$

**اعداد فیبوناتچی یا لوکاس نیستند. دنباله‌های شمارهٔ ۲۵۶ و ۲۶۰، و، ۹۲۴ و ۹۲۵ در [۲۸]را باهم مقایسه کنید. سابقهٔ این‌مثال بسال ۱۸۶۶ بازمی‌گردد [۲۵].**

**۱۵. این امر کاملاً اتفاقی است [۳۰]. قرار دهید $x=y=1$، که از آن $2\times 3^{n-1}\times 2 = (2n+1)-2 = 2^{2n+1}-2$ به دست می‌آید. درست است که**

$$2^2-1 = 3\times 3^0, \quad 2^4-1 = 5\times 3^1, \quad 2^6-1 = 7\times 3^2$$

**اما روشن است که این الگو نمی‌تواند ادامه پیداکند.**

**۱۶. وقتی $(n+1)$امین عدد هگز،**

$$1 + 6 + 12 + \cdots + 6n = 3n^2 + 3n + 1$$

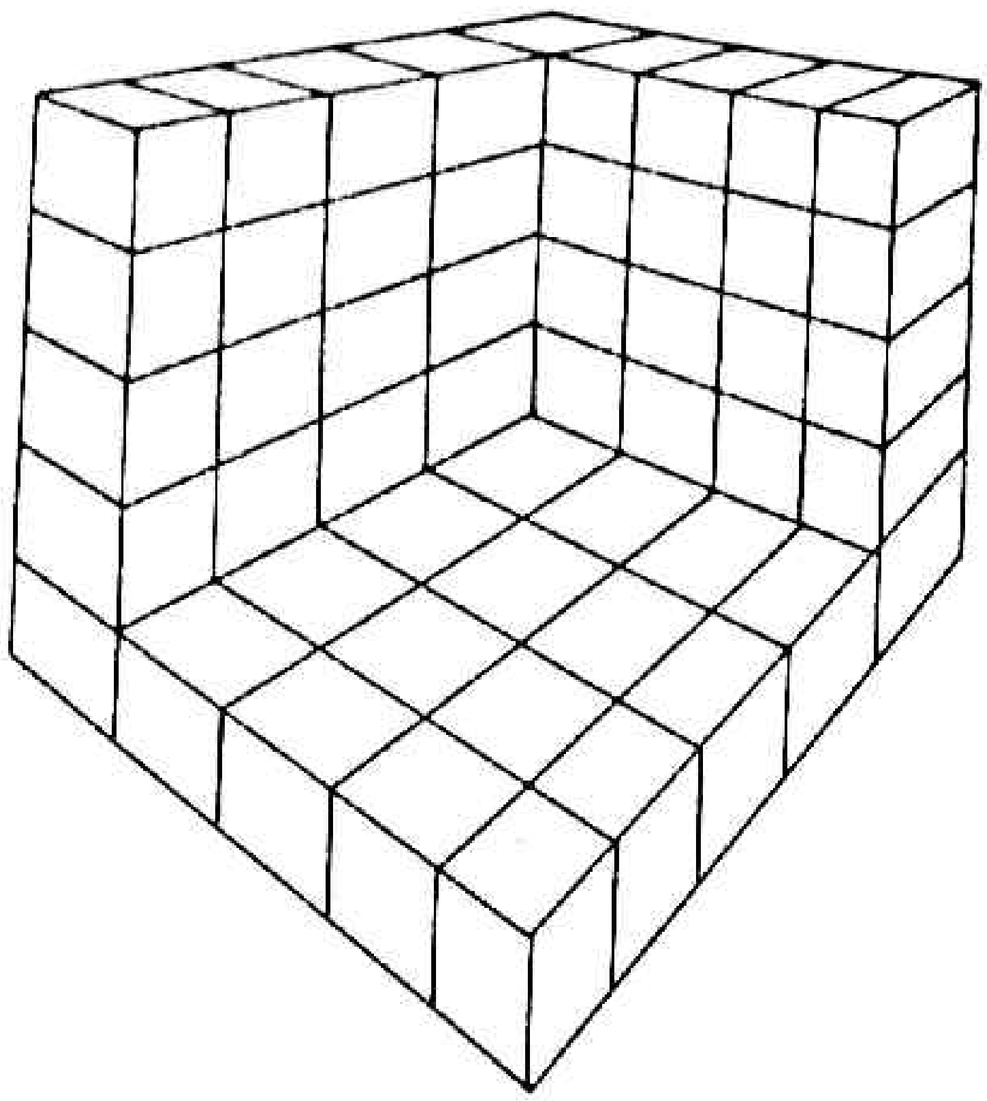
**را به $n^3$ اضافه کنیم، عدد $(n+1)^3$ به‌دست‌می‌آید، بنابراین این الگو، یك الگوی واقعی است. ازلحاظ آموزشی خوب است که $n$امین عدد هگز را به‌عنوان سه‌وجهی تلقی کنیم که یـك گوشهٔ مکعبی متشکل از $n^3$ مکعب واحـد را می‌سازند (شکل ۶).**

**۱۷، ۱۸، ۱۹، و۲۰، مثالهایی از فرایند موسنر هستند که به‌واقع مربعات، مکعبات، توانهای چهارم، و فـاکتوریلها را تولید می‌کنند. بعداز انتشار مقالهٔ موسنر [۲۰] برهـانی‌از پرون[1] منتشر شده‌است. تعمیمهای بعدی‌کارپاشه [۲۲] است.همچنین برای ملاحظهٔ توصیف جدیدتری به [۱۹] مراجعه کنید.**

**۲۱. این مثال، همان فرمـول اویلر $(n^2+n+41)$ با انـدکی تغییرشکل است که به‌ازای $-40 \leqslant n \leqslant 39$ اعداد اول را می‌دهد. برای ملاحظهٔ ارتباطهای جالب‌توجه‌آن بـا هیأتهای درجهٔ دو، کسرهای‌مسلسل، تابعهای‌پیمانه‌ای‌وعددهای رده‌ای، نگاه‌کنید به [۳۹].**

**۲۲. الگوی اولیه‌را می‌توان باتوجه به‌این واقعیتها توضیح‌دادکه اگر $n$ فرد باشد، $n^4+1$ زوج‌است و $17\times 2^n-1$مضرب ۳ است. بـه‌ازای$n$هـای زوج، تا $n=24$ وقوع همزمـان مقادیر فرد و اول نتیجهٔ تصادف است ، در $n=24$ ،**

1. Perron



**شکل ۶. پنجمین عدد هگز**

**$n^4+1=331777$ عـدد اول اسـت در حـالـی کـه $17\times 2^n-1 = 2852126719 = 149\times 19141179$ نگاه‌کنید به [۱۷]، [۳۴] و دنباله‌های شمارهٔ ۳۸۶ و ۳۸۷ در [۲۸].**

**۲۳. این نیز نتیجهٔ‌تصادف‌است. وقتی به $n=18$ برسیم، به‌ازای آن،$21\times 2^n-1 = 5505023$ عدداول است درحالی که**

$$7\times 4^n+1 = 4810363337153 = 166609\times 2887217.$$

**نگاه‌کنیدبه[۳۱]، [۳۳] و دنباله‌های‌شمارهٔ ۳۱۴ و ۳۱۵ در [۲۸].**

**۲۴. این دنباله‌ای است که فریتس گوبل آن را معرفی کرده است. فرمـول بـازگشتی مناسبتری بـرای محاسبه عبارت است از $x_{n+1}=x_n(x_n+n)/(n+1)$، $(n\geqslant 1)$. اگر به‌پیمانهٔ ۴۳ عمل کنید،تا $n=42$ مقادیرزیررا برای $x_n$ به‌دست‌می‌آورید:**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 28 | 25 | 37 | 10 | 20 | 15 | 38 | 19 | 42 | 36 | 34 | 2 | 35 | 39 | 31 | 13 | 2 |
| $n$ | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | |
| $x_n$ | 6 | 26 | 28 | 29 | 4 | 14 | 42 | 5 | 20 | 17 | 4 | 20 | 16 | 29 | 42 | 13 | 42 | 20 | 8 | 23 | 33 | |

**ونیز $x_{42}(x_{42}+42) \equiv -10(-10+42) = -320$، که بر ۴۳ تقسیم‌پذیر نیست، بنابراین $x_{43}$ عدد صحیحی نیست، گرچه $x_n$ به‌ازای $n\leqslant 42$ عددی است صحیح.**

**۲۵. محاسبات مشابهی، بـه پیمانـهٔ ۸۹، بـا استفاده از رابطهٔ $y_{n+1}=y_n(y_n^2+n)/(n+1)$ نشان می‌دهندکـه $y_{89}$ عدد صحیحی نیست. این‌مثال ومثال قبل‌را در [۱۳] ببینید.**

**۲۶.** پس‌از مطرح‌شدن این‌سؤال، هنری ایبزتت[1] محاسبات مفصلی انجام داده و دریافته است کـه اولین جملهٔ غیرصحیح، $x_n$، در دنباله‌که متضمن توان $k$ام است، عبارت است از

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 43 | 89 | 97 | 214 | 19 | 239 | 37 | 79 | 83 | 239 |

وی همچنین نتایج متناظری‌را با مقادیر آغازین متفاوت پیدا کرد. طولانیترین مجموع که نتیجه به‌ازای آن برقرار است ($n=۶۱۰$) مکعبها هستند ($k=۳$، مثـال ۲۵) بـا ضوابط $x_0=۱$، $x_1=۱۱$.

**۲۷.** اولین چندجمله‌ای‌دایره‌بری‌که ضریبی بجز $\pm ۱$ و ۰ درآن ظاهر می‌شود، عبارت است از

$$\Phi_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{23} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$$

ضرایب می‌توانند به طور نامحدودی بزرگ شوند، اما این امر مستلزم آن است که $n$ شامل تعداد زیادی عامل اول فرد متمایز باشد؛ نگاه کنید به [۸]. در همین اواخر، مونتگمری و وروگان [۳۳] نشان داده‌اندکه اگر $\Phi_n=\sum a(m,n)x^m$ و $L(n)=\ln\max_m|a(m,n)|$ آنگاه، به‌ازای $m$ بزرگ،

$$\frac{m^{1/3}}{(\ln 2m)^{1/3}} \ll L(n) \ll \frac{m^{1/3}}{(\ln m)^{1/3}}$$

**۲۸.** این بازی، تحریف بازی Beanstalk جان ایـزبل [۱۳] به‌وسیلهٔ جان‌کانـوی است. الگوی فیبوناتچی برقرار نیست: تنها ۵۲ عدد از نخستین ۸۹ عدد، ۸۱ عدد از نخستین ۱۲۲ عدد، ۱۲۶ عدد ازنخستین ۲۳۳ عدد، و۲۰۱ عدد از نخستین ۳۷۷ عددبازنده‌اند. برهـان احتمالاتی مغالطـه‌آمیز است: احتمالهای دوامکان مستقل نیستند.

**۲۹.** بله، ولی تطابق جوابها از چیست؟

**۳۰ و ۳۱.** الگوهای توانهای ۲ و ارقام $\sqrt{۲}$ درپایهٔ دودویی‌هردو ادامه دارند؛ نگاه‌کنید به [۱۱]، [۱۴] و دنبالهٔ شمارهٔ ۲۰۶ در [۲۸].

**۳۲.** دنبـالهٔ متفاوتی است، دنبـالهٔ شمارهٔ ۲۰۷ در [۲۸]، کـه به‌ازای $n<۹$ با ایـن دنباله تطبیق می‌کند، ولـی بعداً به صورت ۲۸، ۴۱، ۶۵، ۸۸، ۱۲۹، ۱۸۹، ۲۷۷، ۴۰۶، ۵۹۵، ۸۷۲، ۱۲۷۸، ... ، ادامه می‌یابد.

**۳۳.** اگـر $y=x^n$ و $y_n(1)$ مقـدار $d^ny/dx^n$ را در $x=۱$ نشان دهد، آنگاه

$$y_{n+1}(1) = y_n(1) + \binom{n}{1}y_{n-1}(1) - \binom{n}{2}y_{n-2}(1) + 2!\binom{n}{3}y_{n-3}(1) - 3!\binom{n}{4}y_{n-4}(1) + - + \cdots + (-1)^n(n-1)!.$$

1. Henry Ibstedt

وقتی این مسأله به‌وسیلهٔ ریچارد پترسن[1] و گوراد سوری[2] به بخش «مسایل حـل نشده» مجلهٔ مانتلی تسلیم شد، مضرب $n+۱$ بودن آن معلوم نبود. اما هربرت ویلف درنامه‌ای به تاریخ ۸۷/۵/۲۸، برهانی، با استفاده‌ازتابع مولدعددهای استرلینگ نوع اول، ارائه داد. ایـن برهان در واقع نشان می‌دهدکه $n(n-۱)$، $y_n(۱)$ را عادمی‌کند تنها به‌شرط اینکه $n-۱$، $(n-۲)!$ را عادکند، که وقتی $n\geqslant ۷$، چنین می‌کند مشروط براینکه $n-۱$ اول نباشد.

**۳۴.** این دنباله به‌وسیلهٔ جیم‌پراپ مورد بررسی قرار گرفت. بجز اینکه $a(۱۲)=۵۵$، الگوی اعـداد فیبوناتچی ادامه پیدا نمی‌کند:

| $n=$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a(n)=$ | 35 | 55 | 93 | 149 | 248 | 403 | 670 | 1082 |

بعد از نوشته‌شدن این مقاله، ویلف [۲۱] تابع مولد را بـا کسر مسلسل رامانوجان مربوط کرده، متذکر می‌شودکه تعداد افرازهای پراپ بـا $k$ سکه درپایین‌ترین‌سطرتجلی دیگری از اعدادکاتالان، ۱، ۲، ۵، ۱۴، ۴۲، ...، است[۷]. این‌افرازها شکل دیگری از افرازهایی هستندکه مورد توجه اولوك [۱] قرارگرفتند. در افرازهای اولوك سکه‌ها در هر سطر، ونه‌تنها درپایین‌ترین‌سطر،مجاورند. تعدادآنها، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...، مثال خوب دیگری ازقانون قوی است.

**۳۵.** بسط حاصلضرب به‌صورت یك‌سری توانی، چنین است،

$$1 + x^3 + x^5 + x^7 + 2x^9 + 2x^{11} + 3x^{13} + 3x^{15} + 4x^{17} + 5x^{19} + 6x^{21} + 7x^{23} + 9x^{25} + 10x^{27} + 12x^{29} + 14x^{31} + 17x^{33} + 19x^{35} + 23x^{37} + 26x^{39} + 30x^{41} + 35x^{43} + 40x^{45} + 46x^{47} + 52x^{49} + 60x^{51} + 67x^{53} + 77x^{55} + 87x^{57} + \cdots,$$

این سری با مجموع طرف دوم یکی است تا

$$\cdots + 89x^{29} + 78x^{28} + 69x^{27} + 60x^{26} + 54x^{25} + 46x^{24} + 41x^{23} + 35x^{22} + 31x^{21} + \cdots$$

این، مدخل ۲۹ درفصل ۵ دومین‌کتابچهٔ‌یادداشت رامانوجان [۲]، [۳] است: اما او آن‌را خط زده بود!

اگر مثالهای مورد علاقهٔ شما را از قلم انداخته‌ام، خبرم کنید!

## مراجع


1. F. C. Auluck, On some new types of partitions associated with generalized Ferrers graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47 (1951) 679-686; MR 13, 536.
2. Bruce C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part 1, Springer-Verlag, 1985, p.130.
3. Bruce C. Berndt and B. M. Wilson, Chapter 5 of Ramanujan's second notebook, in M.I. Knopp (ed.) Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math. 899, Springer, 1981, pp. 49-78; MR 83i:10011.


1. Richard Patterson  2. Gaurar Suri

4. W. W. L. Chen, On the error term of the prime number theorem and the difference between the number of primes in the residue classes modulo 4, *J. London Math. Soc.*, (2) 23(1981) 24-40; MR 82g:10058.
5. John Conway and Richard Guy, The Book of Numbers, Scientific American Library, W.H. Freeman, 1988.
6. H. Davenport, The Higher Arithmetic, Hutchinson's University Library, 1952, p.128.
7. Roger B. Eggleton and Richard K. Guy, Catalan Strikes again! How likely is a function to be convex?, *Math. Mag.* 61(1988) 211-218.
8. P. Erdős and R. C. Vaughan, Bounds for the $r$-th coefficients of cyclotomic polynomials, *J. London Math. Soc.*, (2) 8(1974) 393-400; MR 50 # 9835.
9. Martin Gardner, Mathematical games: patterns in primes are a clue to the strong law of small numbers, *Sci. Amer.*, 243 # 6(Dec. 1980) 18, 20, 24, 26, 28.
10. Solomon W. Golomb, The evidence for Fortune's conjecture, *Math. Mag.* 54(1981) 209-210.
11. R. L. Graham and H. O. Pollak, Note on a linear recurrence related to $\sqrt{2}$, *Math. Mag.*, 43(1970) 143-145; MR 42 # 180.
12. Richard K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer, 1981.
13. Richard K. Guy, John Isbell's game of Beanstalk and John Conway's game of Beans-Don't-Talk, *Math. Mag.*, 59(1986) 259-269.
14. F. K. Huang and S. Lin, An analysis of Ford & Johnson's sorting algorithm, *Proc. 3rd Annual Princeton Conf. on Info. Systems and Sci.*
15. Wilfrid Keller, Factors of Fermat numbers and large primes of the form $k.2^{n+1}$, *Math. Comput.*, 41(1983) 661-673.
16. R. B. Killgrove and K. E. Ralston, On a conjecture concerning the primes, *Math. Tables Aids Comput.*, 13(1959) 121-122; MR 21 # 4943.
17. M. Lal, Primes of the form $n^4 + 1$, *Math. Comput.*, 21(1967) 245-247.
18. J. E. Littlewood, Sur le distribution des nombres premiers, *C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris*, 158(1914) 1868-1872.
19. Calvin T. Long, Strike it out-add it up, *Math. Mag.*, 66(1982) 273-277. See also this Monthly 73(1966) 846-851.
20. Alfred Moessner, Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen, *S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.*, 1951, 29(1952); MR 14-353b.
21. Andrew M. Odlyzko and Herbert S. Wilf, $n$ coins in a fountain (to appear in *Amer. Math. Monthly*. (Nov. 1988)).
22. Ivan Paasche, Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes, *Compositio Math.*, 12(1956) 263-270; MR 17, 836g.
23. Hans Riesel, Lucasian criteria for the primality of $N = h.2^n-1$, *Math. Comput.*, 23(1969) 869-875.
24. Raphael M. Robinson, A report on primes of the form $k.2^n+1$ and on factors of Fermat numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9(1958) 673-681.
25. P. Seelng, Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt{}$ ineinen Kettenbruch, *Archiv. Math. Phys.*, 46(1866) 80-120 (esp.p. 116).
26. J. L. Selfridge, Solution to problem 4995, this Monthly, 70(1963) 101.
27. W. Sierpiński, Sur un problème concernant les nombres $k.2^n+1$, *Elem. Math.*, 15(1960) 73-74; MR 22 # 7983; corrigendum, *ibid.* 17(1962)85.
28. N. J. A. Sloane, A Handbook of Integer Sequences, Academic Press, 1973.
29. Harold M. Stark, An explanation of some exotic continued fractions found by Brillhart, Computers in Number Theory, Atlas Sympos. No. 2, Oxford, 1969, pp. 21-35, Academic Press, London, 1971.
30. Peter Taylor and Doug Dillon, Problem 3, *Queen's Math. Communicator*, Dept. of Math. and Statist., Queen's University, Kingston, Ont., Oct. 1985, p.16.
31. H. C. Williams and C. R. Zarnke, A report on prime numbers of the forms $M = (6a+1)2^{2m-1}-1$ and $M' = (6a-1)2^{2m}-1$, *Math. Comput.*, 22(1968) 420-422.
32. Jeff Young and Duncan A. Buell, The twentieth Fermat number is composite, *Math. Comput.* 50(1988) 261-263.
33. H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, The order of magnitude of the $m$th coefficients of cyclotomic polynomials, *Glasgow Math. J.* 27(1985) 143-159; MR 87e: 11026.

• Richard K. Guy, "The strong law of small numbers," *Amer. Math. Monthly*, (8) 95 (1988) 697-712.

★ ریچارد گای، دانشگاه کالگری کانادا

# ریاضیات کاربردی بد ریاضیاتی است•

پال هالموس
ترجمهٔ محمدرضا بهاری

راستش این‌طورها هم نیست (یعنی ریاضیات کاربردی واقعاً ریاضیات بدی نیست)، اما به‌هرحال متفاوت است.

نکند خیال کرده‌اید که من با انتخاب این‌عنوان اول خواسته‌ام توجهتان را جلب کنم، و حالا که موفق شده‌ام دارم حرفم را پس می‌گیرم و از در مصالحه وارد می‌شوم؟ نخیر، ابداً چنین چیزی نیست. این حکم «مصالحه‌آمیز»، خواهی نخواهی، بحث‌انگیز است: خیلی ازافراد، خیلی هم با حرارت، استدلال می‌کنند که این نوع ریاضیات (یعنی کاربردی) اصلا متفاوت نیست و درست مثل همان ریاضیات محض است،وهر کسی هم که خلاف این‌عقیده را داشته باشد درنظر ایشان لابد بنیادگرای مرتجعی است والزاماً اشتباه می‌کند.

شما اگر ریاضیدان‌حرفه‌ای نباشید،شاید تعجب کنیدوقتی بشنوید که (به‌قول بعضیها) ریاضیات‌انواع مختلفی دارد ودرآن‌هرچیزی بسرای به‌هیجان آوردن هرکسی پیدا می‌شود. بله، دارد، وپیدا می‌شود؛ وآنچه دراین مقاله می‌آید تکه‌پاره‌هایی است ازمقوله‌ای که می‌شود اسمش را «جامعه‌شناسی» ریاضیات گذاشت: محض و کاربردی چه فرقی با هم دارند، ریاضیدانها دربارهٔ این تفاوت چه نظری دارند، ودرقرنهای آینده احتمالا چه برسر این‌اختلاف می‌آید؟

## بحث بر سر چیست؟

در این باره که ریاضیات چه جور موضوعاتی را شامل می‌شود یا نمی‌شود هیچ چیز مبهمی وجود ندارد، اما پیداکردن کلماتی که بشود با آنها ریاضیات را به‌طور دقیق توصیف کرد کار آسانی نیست. به‌علاوه، درخیلی ازموارد به‌جای ارائهٔ یك تعریف کلی از ریاضیات، آن را به‌دوجزء تقسیم می‌کنند، و تازه این تقسیم‌بندی هم فقط به‌یك صورت نیست: بنا به هریك از نظامهای مختلف رده‌بندی، که تعدادشان‌هم کم‌نیست، دونوع‌ریاضیات وجود دارد.

از این تقسیم‌بندیها بعضی‌هاشان معروف‌اند و بقیه شهرت کمتری دارند. ریاضیات‌کارش مطالعهٔ مقادیر یا اعداد (حساب) و شکلها (هندسه) است. این‌موجود می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد؛ گاه متناهی‌است و گاه نامتناهی؛ و ناپسندتر از همه اینکه، بخشی ازآن محض (به‌درد نخور؟) است و بخش دیگرش کاربردی (به‌درد خور؟). این تقسیم‌بندیها با همهٔ اختلافهایی که شاید داشته باشند به‌هم‌بی‌ربط نیستند، اماقدرتشان فرقی‌کند؛ مثلا تقسیم‌بندی



مقادیر ـ اشکال بسیار نامشخصتر از تقسیم‌بندی محض ـ کاربردی است، و خیلی کمتر هم تفرقه برانگیز است.

هیچ‌کس مجبور نیست که‌یکبار برای همیشه، بین بستی‌وانیلی و بستنی شکلاتی یکی را انتخاب کند، حتی می‌تواند مخلوطی از هردو را دوست داشته باشد، اما اکثر مردم همیشه یك‌جور بستنی را سفارش می‌دهند. درمورد ریاضیدانها هم اختلاف سلیقهٔ (مادرزادی؟) مشابهی وجود دارد. هیچ ریاضیدانی مجبور نیست یکبار برای همیشه تصمیم بگیرد که فقط جبر (گسسته) یافقط توپولوژی (پیوسته) را دوست داشته باشد، و حتی مختار است به موضوعات جدید و درحال رشدی مثل توپولوژی جبری و جبر توپولوژیك بپردازد، اما اغلب ریاضیدانها در واقع با طرفدار گسسته‌اند یا طرفدار پیوسته.

## مربع وکره

خیلی بد است که این‌همه دربارهٔ ریاضیات و بخشهای آن صحبت کنیم بی‌آنکه چند مثال خوب و ملموس ارائه‌کرده باشیم، اما نمونه‌های واقعی خیلی فنی‌تر از آن‌اند که بشود در این‌بحث مطرحشان کرد. پس فعلایکی دومثال ساختگی (با بعضی نقائصی که بزودی توضیحشان خواهم داد) ارائه می‌کنم.

فرض کنیدبخواهیم اتاقی را که کف آن کاملا به‌شکل مربع است با آجرهایی که خودشان‌هم به‌شکل مربع‌اند ولی ابعاد هیچ دوتایی‌از آنها یکی‌نیست آجرفرش کنیم. آیا این‌کار شدنی است؟ به‌عبارت دیگر، آیا می‌شود یك‌مربع را با تعداد معینی مربعهای کوچکتر که ابعاد همهٔشان باهم فرق می‌کند کاملا پوشاند بی‌آنکه هیچ‌یك ازآنها روی دیگری قرار بگیرد؟ جوابش آسان نیست.

این‌هم‌یك مسألهٔ دیگر: کرهٔ کاملی (مثل یك‌توپ بسکتبال) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم روی این کره حداقل چندتا نقطه می‌توان مشخص کرد به‌طوری که هرنقطه‌ای ازسطح کره درمحدودهٔ یك اینچی یکی از نقاط مشخص شده واقع باشد؟ به‌عبارت دیگر، باصرفه‌ترین نحوهٔ توزیع ایستگاههای تقویت تلویزیون درسطح کرهٔ‌زمین کدام است؟

آیا مثال مربع دربارهٔ مقادیر است یادرباره اَشکال؟ ظاهراً جواب این است که در بارهٔ هردو؛ مثال کره هم همین‌طور. این مثالها به یك لحاظ نمونه‌های خوبی‌اند، چون در واقع موارد «مخلوط» محتملتر (وجالبتر) از مواردی‌اند که درست دریکی از تقسیم‌بندیها بگنجند. درهرصورت، این دومسأله خصوصیاتشان مختلف‌است. مسألهٔ مربع بیشتراز نوع حسابی، گسسته، متناهی، و محض است؛ مسألهٔ کره بیشتر با طبقه‌بندیهای هندسی، پیوسته، نامتناهی، و کاربردی جور درمی‌آید.

مسألهٔ مربع به‌هرحال جالب‌توجه‌است و مقالاتی‌هم دربارهٔ‌آن نوشته‌شده، اما واقعش‌این‌است که اکثر ریاضیدانهابرای آن‌ارزش زیادی‌قائل‌نیستند. نه به‌این دلیل که این‌مسأله (از لحاظ کاربردی) «به‌دردنخور» است، بلکه به‌این‌خاطر که خیلی خاص (کم‌اهمیت؟ کم ارزش؟) است، خاص به‌این معنی که ربطی به‌اغلب مباحث دیگرریاضی‌ندارد و حل‌آن‌هم مستلزم استفاده از روشهای موردی است. این مسأله نمونهٔ واقعاً مناسبی ازریاضیات محض نیست.

ازطرف دیگر، مسألهٔ کره با آنکه کاربرد عملی زیادی دارد

اما مثال گویایی از ریاضیات کاربردی نیست: این مسأله از اغلب مسائل کاربردی خیلی آسانتر (و خیلی «محض»تر) است، و به‌خصوص اینکه در آن از حرکت ــ که در ریاضیات کاربردی نقش اصلی را به‌عهده دارد ــ خبری نیست.

با این همه، این مثالها ــ خوب و بدشان به‌کنار ــ می‌توانند در ادامهٔ این بحث مفید باشند.

## حرف یا عمل

تمایز میان محض و کاربردی را می‌توانیم ــ کم و بیش به‌همان وضوحی که در علوم دیده می‌شود ــ در زمینه‌های هنر و علوم انسانی هم مشاهده کنیم: آثار موتسارت را با مارشهای نظامی، نقاشیهای روبنس را با تصاویر کتابهای درسی پزشکی، یا منظومهٔ اتئاد و برجیل را با فیلیپیکوس سیسرون مقایسه کنید. ادبیات محض به مفاهیم مجردی مثل عشق و جنگ می‌پردازد، و نمونه‌های تخیلی آنها را به‌زبانی مهیج و شورانگیز حکایت می‌کند. ریاضیات محض سروکارش با تجریداتی مثل ضرب اعداد و تساوی اشکال است، و در بارهٔ نمونه‌های ایده‌ال و افلاطونی آنها به‌صورتی عقل‌پسند استدلال می‌کند.

تمامی ادبیات را به‌یک معنی می‌شود «کاربردی» دانست. آثار شکسپیر به‌زندگی روزمره مربوط می‌شوند، جنگ و صلح تولستوی هم همین‌طور، کتاب سزار در بارهٔ جنگهایش هم همین‌طور. همهٔ این آثار از آنچه آدمها می‌بینند و می‌شنوند شروع می‌شوند و همهٔ آنها از حرکات و احساسات آدمها حکایت می‌کنند. به‌همین مفهوم نه‌چندان دقیق، تمامی ریاضیات را هم می‌شود «کاربردی» تلقی کرد. ریاضیات، همه از مقادیر و اشکال شروع می‌شود (که مطالعهٔ آنها نهایتاً به‌جبر و هندسه می‌انجامد)، و دربارهٔ چگونگی تغییر مقادیر و اشکال و تأثیر آنها بریکدیگر بحث و استدلال می‌کند (و چنین استدلالهایی نهایتاً به‌مبحثی از ریاضیات منجر می‌شوند که در اصطلاح ریاضی به‌آن آنالیز می‌گویند).

تردید نمی‌شود کرد که سرچشمه و منبع الهام تمامی ادبیات همین دنیای فیزیکی و جامعهٔ انسانی است که در آن زندگی می‌کنیم؛ و در مورد ریاضیات هم همین‌طور است. و بازجای هیچ تردیدی نیست که موسیقیدانها، نقاشها، نویسنده‌ها، و ریاضیدانها مدام از این دنیای فیزیکی و جامعهٔ انسانی تأثیر می‌گیرند. و بنابراین، دست‌کم بخشی از دستمایهٔ آثار هنری، همین دنیای امور واقع و حرکات، همین دنیای نور و صداست. هنر در اثر تماس دائم با دنیا ناگزیر تغییر می‌کند، و شاید حتی متحول هم می‌شود.

هدف نهایی «ادبیات کاربردی» و ریاضیات کاربردی عمل است. غرض از یک سخنرانی انتخاباتی این است که شما وادار شوید در ماشین انتخابات، مثلاً، اهرم چهارم را بکشید، نه اهرم سوم را. در حل یک معادلهٔ آئرودینامیکی منظور این است که بالهای هواپیما بتوانند هواپیما را هرچه سریعتر از زمین بلند کنند تا ساکنان خانه‌های اطراف فرودگاه سروصدایشان درنیاید. این مثالها کلی و بدیهی‌اند، اما نمونه‌های بارزتری هم هست. اگر در زندگینامهٔ یک نامزد انتخاباتی (گیریم که درست و از سر صداقت نوشته شده باشد) مستقیماً به‌انتخاباتی که در پیش است اشاره‌ای نشده باشد، آیا می‌شود این نوشته را ادبیات محض تلقی کرد؟ اگر در مقاله‌ای دربارهٔ چگونگی جریان هوا (ی ایده‌ال از لحاظ ریاضی) در مجاورت اجسام متحرک با شکلهای مختلف بحث شده باشد ــ یک بحث مستدل و منطقی ــ بی‌آنکه حرفی از هواپیما یا فرودگاه در میان باشد، آیا این ریاضیات محض است؟ در موارد نه‌این و نه‌آن چطور؟ مثلاً زندگینامه‌ای که خیلی تعصب‌آمیز باشد ولی دروغ هم نگفته باشد، و یا مبحثی دربارهٔ آئرودینامیک که به‌روشهای تقریبی و مقرون به‌صرفهٔ اقتصادی پرداخته باشد ولی اشتباه فاحشی هم نداشته باشد؛ اینها آیا محض‌اند یا کاربردی؟

## طیف پیوسته

در سلسله‌ای که از زندگینامه و تاریخ توأم با تفسیر تا افسانه و خیال ادامه دارد، خطوط مرزی را کجاها باید کشید؟ گفتن اینکه توین‌بی، توسیدید، هومر، و جویس کدامشان محض و کدامشان کاربردی‌اند شاید ممکن باشد، اما اگر میان هرجفت از این اسمها تعدادی اسامی دیگر بگنجانیم، آن وقت متمایز کردن آنها در زنجیره‌ای که یک سرش تفسیر واقعیت و سر دیگرش پندار محض است مشکل و شاید هم ناممکن می‌شود. در ریاضیات هم اوضاع خیلی مشابهی هست: اگر بخواهیم مجموعه مقالاتی در زمینه‌های گوناگون، از طراحی هواپیما گرفته تا دینامیک سیالات تا معادلات دیفرانسیل جزئی تا فضاهای برداری توپولوژیک را دسته‌بندی کنیم، تمایز میان محض و کاربردی که در دو سر طیف کاملا مشخص است، در میانهٔ طیف وضوحش را از دست می‌دهد.

---

ریاضیات محض می‌تواند فایدهٔ عملی داشته باشد و ریاضیات کاربردی می‌تواند ظرافت هنری داشته باشد.

---

نکته‌ای که موضوع را از این هم پیچیده‌تر می‌کند این است که ریاضیات محض می‌تواند عملا قابل استفاده باشد و ریاضیات کاربردی می‌تواند از ظرافت هنری برخوردار باشد. ریاضیدانهای محض در تلاش برای درک روابط منطقی و هندسی موجود در ریاضیات توانستند به‌نظریهٔ مجموعه‌های محدب دست بیابند و رده‌های مختلف توابع را از لحاظ جبری و توپولوژیک بررسی کنند. و شاید هم از خوش‌اقبالی باشد که تحدب، ابزار اصلی برنامه‌ریزی خطی (که امروزه جزء ضروری بررسیهای اقتصادی و صنعتی است) شده، و آنالیز تابعی هم به‌صورت ابزار اصلی نظریهٔ کوانتوم و فیزیک ذرات درآمده است. فیزیکدانها جبر فون‌نویمان را (که جزئی از آنالیز تابعی است) تنها به‌خاطر قابل استفاده بودنش در فیزیک ذرات بنیادی موجه می‌دانند، اما همین کاربردپذیری را ریاضیدانها تنها جنبهٔ جالب فیزیک ذرات بنیادی تلقی می‌کنند. سلیقه است و هیچ‌کارش نمی‌شود کرد.

درست همان‌طور که ریاضیات محض می‌تواند مفید باشد، ریاضیات کاربردی می‌تواند ــ حتی خیلی بیشتر از آنچه گاهی گفته می‌شود ــ بیفایده باشد. ریاضیات کاربردی با مهندسی یکی نیست؛ ریاضیدان کاربردی هواپیما و بمب اتمی نمی‌سازد. ریاضیات کاربردی یک رشتهٔ نظری است، نه جزئی از تکنولوژی صنعتی. درست است که ریاضیات کاربردی هدف نهایی‌اش عمل است، اما پیش از آن بخشی از علم نظری است و علم نظری هم سروکارش با اصول عامی است که پرواز هواپیماها و انفجار بمبها برمبنای آنها صورت

می‌گیرد.

تشخیص تفاوت میان ریاضیدانهای محض و ریاضیدانهای کاربردی گاهی همان‌قدر مشکل است که تشخیص تفاوتِ خود این‌موضوعات. گاهی حتی اتفاق می‌افتد که ریاضیدانی در عین حال‌هم «محض» باشد هم «کاربردی». بعضی‌ریاضیدانهای‌کاربردی (به‌خصوص بهترهاشان) معلومات‌عمیقی از ریاضیات محض‌دارند، و بعضی ریاضیدانهای محض (به‌خصوص بهترهاشان) تجربیات درخشانی در فنون کاربردی. وقتی فرصتی دست بدهد که هر یك از این افراد بتواند باموفقیت به‌آن‌کار دیگر بپردازد (مثلا یك ریاضیدان محض بتواند حالت‌خاصی از مسألهٔ «فروشندهٔ سیار» را که درتحقیق درعملیات پیش‌می‌آید درست حل کند، یاریاضیدانی که‌روی‌نظریهٔ نسبیت‌کار می‌کند بتواند فرمولی‌درهندسهٔ دیفرانسیل چهاربعدی پیدا کند)، آن‌وقت احساسی که به‌او دست‌می‌دهدبیش از یك تفاخر ساده است: «می‌بینی! ازپس این‌جور چیزها هم بر می‌آیم.»

## کننده‌هاو داننده‌ها

آنچه تا اینجا گفته‌ام این است‌که ریاضیات به‌یك معنی تماماً کاربردی است، ودیگر اینکه متمایزکردن محض از کاربردی از جایی‌به‌بعد آسان نیست. حالا می‌خواهم از آن‌طرف قضیه بگویم: محض وکاربردی واقعاً باهم فرق دارند، و شما اگر بدانیدکه‌باید دنبال چه‌چیزهایی بگردید و شهامت ارتکاب خطا راهم داشته‌باشید همیشه می‌توانیدآنها را ازهم‌تشخیص بدهید. خیلی بیشتر ازآنکه دنبال اثبات‌کردن چیزی‌باشم، قصدم این‌است که‌چیزی رانوصیف کنم. نه‌دل بسته‌ام به‌اینکه لامذهبی را به راه بیاورم و نه امیدوارم که اهل‌شکی را متقاعد کنم، فقط می‌خواهم به‌اطلاع مسافری که از دیار دیگری آمده‌است برسانم که اینجا، در این سرزمین، دوتا فرقه هست، و اینها چیزهایی است که این فرقه‌ها دربارهٔ همدیگر می‌گویند.

در اینجا اختلاف‌عقیده ازآن نوعی نیست‌که یك‌فرقه بگوید «سیاه» و فرقهٔ دیگربگوید «سفید»؛ اینجا یك‌فرقه می‌گوید «ماهمه یك‌فرقه‌ایم» وآن‌یکی می‌گوید «نخیر، یك‌فرقه‌نیستیم، دوفرقه‌ایم». با این‌نوع اختلاف، مشکل می‌شود واقعیتها را به‌طور بیطرفانه ارائه کرد. صِرف‌پذیرفتن وجود چنین تعارضی به‌معنی جانبداری از یك‌طرف‌است، و این‌را هیچ‌کارش نمی‌شود کرد. بنابراین من، ضمن اینکه نتایج کاربرای خودم قطعی است، سعی می‌کنم مطلب را به‌بهترین نحوی‌که از دستم برمی‌آید به‌اطلاع غریبه‌ای‌که در میان ماست برسانم.

بشر می‌خواهد بشناسد و به‌کار بگیرد. مردم می‌خواهند بدانند نیاکان آنها چه‌کرده‌اند وچه گفته‌اند، می‌خواهند دربارهٔ جانوران و گیاهان و موادمعدنی بدانند، و می‌خواهند دربارهٔ مفاهیم واعداد و انوار و اصوات بدانند. مردم می‌خواهند خوراك فراهم بیاورند و پوشاك بدوزند، می‌خواهند خانه بنا کنند وماشین بسازند، و می‌خواهند دردهایی را درمان کنند و به‌زبانهایی حرف بزنند.

کننده‌ها و داننده‌ها غالباً در انگیزه، نگرش، روش‌کار، و «رضایت‌خاطر» باهم فرق دارند. این تفاوتها را می‌شود در مورد خاص ریاضیدانهای کاربردی (کننده‌ها) و ریاضیدانهای محض (داننده‌ها) مشاهده کرد. انگیزهٔ ریاضیدان کاربردی این است‌که دنیا رابفهمد و احتمالا آن‌را تغییر بدهد، نگرش لازم (یا دست‌کم معمول) برای این کار یك‌نگرش بسیار دقیق است (چشم از مسأله نباید برداشت)؛ روشها به‌خاطر کارایی‌شان انتخاب می‌شوند (مهم، آخر کار است) و ارزش آنها هم به‌همین اعتبار تعیین می‌شود؛ و میزان رضایت بستگی به‌این دارد که جواب مسأله تا چه‌حد با واقعیت سازگاراست وچگونه می‌شود با استفاده از آن پدیده‌های دیگری را پیشگویی کرد. ریاضیدان محض انگیزه‌اش در بیشتر مواردصرفاً کنجکاوی است؛ او بیشتر از دید عدسی «زاویه‌ـ باز» به‌مسأله نگاه می‌کند تا عدسی «تله» (آیا این دوردورها مسألهٔ جالبتر و احتمالا عمیقتری هست؟)؛ عامل تعیین‌کننده یا دست‌کم مؤثر در انتخاب‌روش، هماهنگی روش بانوع مسأله است (نصف لطفش به‌همین پیداکردن روش مناسب است)؛ و میزان رضایت بستگی به‌این دارد که جواب مسأله تا چه‌حد بتواند میان مفاهیمی که‌ظاهراً هیچ‌ربطی به‌هم نداشته‌اند ارتباطهایی آشکار کند که گمانشان هم‌نمی‌رفت.

---

ریاضیدان‌محض به‌مصاف ساختار منطقی بسیار پیچیدهٔ‌عالم می‌رود و (اگر پیروز شود) پیروزیش ابدی است.

---

نکتهٔ آخر مستحق تأکید است، به‌خصوص اگر شماهم جزو آن جماعت عظیمی باشید که به‌دوست، نداشتن ریاضیات مفتخرند و آن را نوعی عذاب جانکاه می‌دانند. ریاضیات محض برای ریاضیدان محض یك منبع لایزالِ لذت هنری است؛ این‌لذت فقط هیجان حل‌معما و رضایت خاطر از موفقیت (اگر اساساً موفقیتی درکارباشدا) نیست، بلکه‌لذتِ اندیشیدن‌است. اینجا طرف مبارزه حریفی نیست که فقط درصورت باخت ما بتواند برنده شود، و پیروزی هم به‌محض وصول ناپدید نمی‌شود (مثل پیروزی مثلا در بازی تنیس)؛ دراین‌مورد آنچه باید به‌مصافش رفت ساختارمنطقی بسیار پیچیدهٔ عالم‌است و پیروزی هم ابدی است (بیشتر به‌کشف فلز قیمتی ازیك کشتی مغروق می‌ماند).

این‌تفاوتهای‌اساسی‌درانگیزه و نگرش و روش و رضایتمندی احتمالا مرتبط باتفاوتهای‌سطحیتر ولی قابل‌توجه‌تری هستندکه در نحوهٔ بیان نتایج وجود دارد. ریاضیدانهای محض و ریاضیدانهای کاربردی هرکدام درمورد وضوح، زیبایی، و شایدحتی دقت‌منطقی، سنتهای متفاوتی دارند؛ و نافرجام ماندن ارتباط میان آنها اغلب ناشی از همین تفاوتهاست.

غرضم‌از ذکر چگونگیها و چراهایی که عنوان شد این‌نیست که‌فهرست مرجعی برای تشخیص علم کاربردی از تفکرناب فراهم کرده‌باشم؛ چنین تشخیصی معمولا ازطریق نوعی انتخاب شهودی صرف صورت می‌گیرد. کلمهٔ «طیف» اشاره‌ای است برای تشبیه باواقعیت. سرخ ونارنجی به‌یك معنی مثل‌هم‌اند ــ صرفاً امواجی‌اند که طولهایشان‌اختلاف اندکی دارند ــ وغیرممکن‌است بشود روی نقطه‌ای در طیف انگشت گذاشت و گفت اینجا انتهای سرخ و ابتدای نارنجی است؛ با این‌همه، سرخ و نارنجی به‌هر صورت با هم‌فرق دارند و تشخیص‌آنها ازیکدیگر تقریباً هیچ‌وقت کار شاقی نیست.

## زیبایی و ملال

خیلی از ریاضیدانهای محض، تخصص خودشان را نوعی هنر می‌دانند، و وقتی بخواهند کار همکار دیگری‌را خیلی تحسین کرده باشند بااصطلاح «قشنگ» ازآن یاد می‌کنند. چنین برمی‌آید که ریاضیدانهای کاربردی گاهی رشتهٔ خودشان را نوعی نظام بخشیدن به‌روشها تلقی می‌کنند؛ وبه‌همین مناسبت است که در تمجید کار یك همکار دیگر گاه کلماتی‌مثل «استادانه» یا «قوی» رابه‌کار می‌برند.

ریاضیات، ... علی‌رغم تعدد مباحث و تحولات بسیار سریع موضوعاتش، ... یك ساختار فکری واحد با وحدتی شگفت‌انگیز است.

نکتهٔ دیگری که‌بارها ازآن متأثر شده‌ام این است: ریاضیات (محض)، علی‌رغم تعدد مباحثش و سرعت رشد آنها (که از هزار سال پیش شروع شده و درزمانهٔ ما از هر دورهٔ دیگری سریعتر بوده است)، یك‌ساختار فکری واحد باوحدتی شگفت‌انگیز است.

ریاضیاتی که فعلا زنده و فعال است آن‌قدر بخشهای متعددی دارد و هریك ازاین‌بخشها آن‌قدر وسیع است که امکان ندارد کسی همهٔ آنهارا بلد باشد. درنتیجه خیلی اتفاق می‌افتد که ما ـ همهٔ‌ما ـ به‌شنیدن سخنرانیهای‌عمومی برویم که‌معلوماتمان دربارهٔ موضوع آنها خیلی کمتر ازآنی است‌که مثلا یك تاریخدان معمولی دربارهٔ زبانشناسی‌می‌داند. امافرقی‌نمی‌کندکه سخنرانی دربارهٔ عملگرهای نامحدود باشد یا دربارهٔ گروههای تعویض‌پذیر، یا رویه‌های توازی‌پذیر؛ تأثیر متقابل بخشهای‌بسیار مختلف ریاضیات (محض) همیشه به‌وضوح مشاهده می‌شود. مفاهیم و روشهای هریك از این مباحث روشنگر همهٔ مباحث دیگر است؛ و نهایتاً کل ریاضیات به‌صورت ساختاری جلوه می‌کند که به‌نحو شگفت‌انگیزی وحدت یافته است.

این وحدت، این بینش ذوقی مشترك، در اغلب موارد میان ریاضیات محض و کاربردی موجود نیست. من وقتی دارم به‌یك سخنرانی دربارهٔ مکانیك سیالات گوش می‌کنم، خیلی زود از رهیافت (به‌نظر من) موددی متحیر می‌شوم؛ بعد این تحیر کم کم جای خودش را به سردرگمی، بی‌حوصلگی، گیجی، و ناراحتی شدید می‌دهد، و قبل‌از آنکه بحث به‌آخر برسد، دیگر از هیچ چیزی سردرنمی‌آورم. ریاضیدانهای کاربردی هم وقتی به‌یك سخنرانی مثلا دربارهٔ هندسهٔ جبری یا درمورد هیأتهایی بامشخصهٔ غیرصفر گوش می‌کنند گرفتار سلسله‌ای از احساسات بسیار مشابه می‌شوند و این احساسها را با کلماتی مثل ذهنی، مصنوعی، خزعبلات بارووك، و موشکافی عبث توصیف می‌کنند.

ممکن است گفته شود که، از دیدگاه علمی درست و رفیع و بی‌تعصب، هردو طرف اشتباه می‌کنند، اما شاید هر دوطرف تا حدود زیادی حق‌داشته‌باشند ـ که این خودگواهی براین مدعاست که ما درواقع دوموضوع پیش‌رو داریم نه یك موضوع. درنظر خیلی از ریاضیدانهای محض، ریاضیات کاربردی چیزی نیست جز انبانی از ترفندها، که هیچ حسنی ندارند جز آنکه به‌کار می‌آیند؛ و خیلی از ریاضیدانهای کاربردی هم به‌خودشان حق می‌دهند بخش‌عمدهٔ ریاضیات محض را نوعی انتزاع بیفایده تلقی کنند که فقط به‌درد خودش می‌خورد وهیچ حسنی بر آن متصور نیست. (اینجا بد نیست این را هم بگویم که دانشجویان یك‌رشتهٔ خاص‌ریاضیات‌محض ـ نظریهٔ‌رسته‌ها ـ گاهی ازسر طنز و مسخره، از رشتهٔ‌خودشان به‌نام «مهملات‌انتزاعی» یادمی‌کنند؛ ریاضیدانهای کاربردی هم اغلب درمورد این رشته همین اصطلاح را به‌کار می‌برند، وظاهراً هیچ قصدشوخی هم ندارند.)

## بدعت جدید

بعضیها می‌گویند که این‌تمایزی که‌میان‌ریاضیات محض وریاضیات کاربردی درنظر گرفته می‌شود بدعت‌جدیدی است که استخوانهای بنیانگذاران بزرگ این‌علم را در قبر می‌لرزاند: دنیا دارد خراب می‌شود! در این‌مورد گفتار مناسبی از فیلبوس افلاطون نقل‌می‌کنم، که البته حکم بالا را به‌کلی نفی‌نمی‌کند، اما آن‌قدر هست که شما را وا بدارد بازهم درباره‌اش فکر کنید:

«سقراط: آیاچنین نیست که دوجورعلم حساب داریم، حساب مردم و حساب فلاسفه؟... و آیا فنون اندازه‌گیری و شمارش که درمعماری وتجارت معمول‌است تفاوتی بامحاسبات پیچیده‌وهندسهٔ مورد استفادهٔ فلاسفه ندارد؟ یعنی آیا باید اینها را یك‌نوع تلقی کنیم یادونوع؟»

«پروتارخوس: ... به‌گمانم دونوع.»

آیا این تمایزی‌که سقراط می‌خواهد به‌آن برسد دقیقاً از همان‌نوع محض ـ کاربردی‌است؟ اگرنیست پس‌از چه‌نوعی است؟

تنها نکتهٔ‌غریب دیگری که‌می‌خواهم دراین باره ذکر کنم این است‌که معمولا (ولی نه‌همیشه) می‌توانیم ریاضیدان کاربردی را فقط باتوجه به‌شدت موضعی‌که در بحث «یك‌فرقه‌دوفرقه» اختیار می‌کند از ریاضیدان محض تمیز بدهیم. آنکه به‌شدت احساس کند یا معتقد باشدکه محض وکاربردی باید یکی باشند و یکی‌هم هستند، هردو ریاضیات‌اند و قائل‌شدن تمایز میان آنها مفهومی ندارد، دراین‌صورت احتمالا خودش ریاضیدان کاربردی است. ریاضیدانهای محض به‌این موضوع خاص شور واشتیاق کمتری نشان می‌دهند و دربارهٔ آن زیاد به‌مجادله نمی‌پردازند: آنها در واقع محض و کاربردی‌را یکی نمی‌دانند، اما اصولا این موضوع برایشان اهمیت چندانی هم ندارد. فکر می‌کنم نکته‌ای که ذکر کردم‌واقعیت‌دارد، ولی‌اعتراف‌می‌کنم که‌خودم هم سر درنمی‌آورم که چرا باید چنین باشد.

## تجدید حیات

دربارهٔ رابطهٔ‌میان محض و کاربردی، ادعایی که ازهمه قابل تعمقتر است و احتیاج به‌بررسی دارد «همزیست» بودن آنهاست، به‌این معنی که هیچ‌یك از آنها نمی‌تواند بدون دیگری موجود باشد. نه‌تنها (چنانکه عموماً پذیرفته شده‌است) کاربردی احتیاج به‌محض دارد بلکه محض هم برای مصونیت ازانتزاع، بی‌ثمری، پوچی، و مرگ نیازمند کاربردی است؛ محض نیازمند تجدید حیات دائم و تماس باواقعیت است که فقط به‌لطف کاربردی می‌شود آن را فراهم کرد.

مرحلهٔ اول در اثبات این همزیستی (میان محض و کاربردی) جنبهٔ‌تاریخی دارد: تمامی‌ریاضیات، به‌قولی، از دنیای واقعی‌ناشی می‌شود، چنانکه هندسه‌هم، بنا به روایات داستانی، از اندازه‌گیری

عوارض طغیانهای رود نیل آغاز شده‌است. (اگر این روایات غلط باشند، هندسه پیش‌از آنکه به‌آن نیازی باشد وجود داشته، و استدلال همزیستی برمبنای متزلزلی بنا شده است. اگر صحیح باشد، این استدلال فقط درجهت اثبات آن است که ریاضیات کاربردی نمی‌تواند بدون ریاضیات محض سر کند، همان‌طور که ادامهٔ زندگی مورچه‌خوار هم بدون مورچه امکان ندارد، اما عکس این مطلب الزاماً صادق نیست.)

اگر درست باشد که ریاضیات ازمطالعهٔ مقادیر (متعلق به‌چیزها) و اشکال (متعلق به‌چیزها) ناشی شده است، پس ریاضیات به‌تمامی از چیزهای دنیای واقعی نشأت می گیرد. اینکه آیا ظهور بعضی اجزاء بسیار مهم ریاضیات قرن بیستم (مثل مسألهٔ پیوستار کانتور، فرضیهٔ ریمان، و حدس پوانکاره) مستلزم تماسهای جدید با فیزیك، روانشناسی، زیست‌شناسی، یا اقتصاد بوده است جای بحث دارد.

اما معضل اصلی جنبهٔ تاریخی ندارد بلکه یك مشکل ذاتی است. بازی‌شطرنج تمثیل مناسبی‌برای این‌مسأله است. ریاضیدانها معمولا ــ وگاهی هم با اکراه ــ می‌پذیرند که شطرنج جزئی از ریاضیات‌است. اکراهشان به‌این‌خاطراست که شطرنج‌را ریاضیات «خوبی» نمی‌دانند؛ شطرنج از دیدگاه ریاضیاتی، بازی «پیش‌پا افتاده»ای است. امامهم این است که شطرنج ریاضیات است، و ریاضیات محض هم هست.

---

ریاضیات کاربردی نمی‌تواند بدون ریاضیات محض به سر ببرد، همچنانکه ادامهٔ زندگی مورچه‌خوار هم بی‌مورچه ممکن نیست، اما عکس این مطلب الزاماً صادق نیست.

---

شطرنج طی چندین صدسال از لحاظ مفهومی تجدید قوا نکرده، و باوجود این هنوز هم کاملا زنده وبرقرار است. میلیونها نفر درباشگاههای شطرنج عضویت دارند، و هرچند وقت یکبار خیل‌عظیمی ازمردم دنیای متمدن، ساعتها پای تلویزیون می‌نشینند که‌بازی بابی‌فیشر و بوریس‌اسپاسکی راتماشا کنند. شطرنج تخیل گروه بزرگی از آدمها را به‌کار می‌اندازد؛ ذوق هنرمندانه برمی‌انگیزاند وکم‌وبیش بصیرتهای ذاتی را جلوه‌گر می کند.

شطرنج (هم‌مثل بسیاری از بخشهای دیگر ریاضیات) نه‌فقط نیازی به‌احیاشدن توسط‌عامل‌خارجی ــ یعنی دنیای واقعی ــ ندارد بلکه هراز گاهی خود به‌خود احیا می‌شود. آخرین‌دفعه‌ای که‌این اتفاق افتادوقتی بود که‌مطالعهٔ تحلیل فهقرایی شطرنج به‌طورجدی شروع شد. (مسألهٔ نمونه: یك‌صفحهٔ شطرنج دریك وضعیت خاص مفروض است؛ باید پیدا کنید که سفید از کدام طرف صفحه‌بازی را شروع کرده، و آیا سیاه هیچ‌وقت به‌قلعه رفته است یانه.) واین هم یك تحول: نه‌تنها شطرنج برای تجدید حیات نیازمند دنیای واقعی نبوده، بلکه عکس این موضوع اتفاق افتاده است. تحلیل فهقرایی شطرنج، دانشمندان علوم کامپیوتر را با مسأله‌ای از یك نوع جدید روبرو کرده، و این تحلیل فعلا جزء کوچك ولی‌معتبر و درحال رشدی از ریاضیات کاربردی است.

طرفداران «تجدید حیات» ممکن است علی‌رغم این شواهد بازهم قانع نشوند؛ آنها ممکن است به‌گرایش اسفبار ریاضیات به‌فوق انتزاع، فوق پیچیدگی، و نامفهومی و زشتی اشاره کنند و بگویند که دوای این دردها تماس با واقعیتهای کاربردی است.

بله، بیماری وجود دارد، این‌را همه می‌دانند، اما خوشبختانه درمان آن‌هم درخود طبیعت تعبیه شده است. طی قرنها، چندین بخش از ریاضیات رشد عظیم سرطانی داشته‌اند؛ نمونه‌هایی از این موارد که احتمالا جای حرف ندارند بعضی‌بخشهای هندسهٔ اقلیدسی مقدماتی‌اند. وقتی این‌درد عارض‌می‌شود، همیشه به‌دنبالش درمان شگفت‌انگیزی هست. ریاضیات قدیم هیچ‌وقت نمی‌میرد ــ میراثی که ۲۵۰۰ سال پیش یونانیها برایمان به‌جا گذاشتند همچنان زنده و درست وجالب است ــ ولی ملحقات آن هرچه‌ساده‌تر می‌شوند، هستهٔ با ارزش آنهادر بدنهٔ اصلی ادغام می‌شود و زوائد ناجورشان از آنها جدا می‌شوند.

(درضمن بدنیست گفته باشم که بحث تجدیدحیات‌را علی‌الاصول می‌شود درمورد نقاشی‌هم پیش‌کشید، اما تا آنجا که من خبردارم هیچکس چنین کاری نکرده است. نقاشی از دنیای واقعی نشأت گرفته، ومعلوم شده‌است که این‌دنیا را ترك‌کرده تا به‌قلمرو انتزاع وپیچیدگی، که‌درنظر بعضیها زنده است، برود، اما این‌هنر به‌طور کلی همچنان زنده است و تمام این بلایا را ازسر گذرانده است.

در مدح پیامدهای تماس میان ریاضیات محض و کاربردی گاهی به‌موضوع زمان اشاره می‌شود. مثلا گفته می‌شود که اگر ریاضیدانهای محض توجه بیشتری به‌ماکسول می کردند می‌توانستند گروههای توپولوژیك را خیلی زودتر ازاینها کشف کنند. شایدهم‌چنین‌می‌شد، امامی‌خواهم بدانم که‌بادیرتر کشف‌شدن آنها مثلا چه‌چیز را از دست داده‌ایم؟ آیا اگر رامبرند یك قرن زودتر متولدشده بود اوضاع دنیا بهترازاین می‌شد؟ پس‌این‌تعجیل چه‌لزومی دارد؟)

اینکه آیا تماس باکاربردها می‌تواند از بیماری پیچیدگی و «باریکی» در ریاضیات پیشگیری یاآن را درمان کند واقعاً معلوم نیست؛ چیزی که معلوم است این است که خیلی ازبخشهای فعال و مطمئناً غیرسرطانی‌ریاضیات، چنین تماسهایی ندارند (و شاید هم، به‌علت میزان‌انتزاعی بودنشان، نمی‌توانند داشته‌باشند). نمونه‌های اخیر: نظریهٔ تحلیلی اعداد و هندسهٔ جبری.

وقتی‌می گوییم‌ریاضیات مجبور نیست که‌به‌کمك‌تماس‌باواقعیت تجدید قوا کند منظورم این‌نیست که اصلا نباید تجدید قوا کند: خیلی از مفاهیم زیبای ریاضیات درمطالعهٔ این‌بخش یا آن‌بخش طبیعت کشف شده‌اند، که شاید اگر انگیزهٔ خارجی نبود کشف نمی‌شدند، و شایدهم می‌شدند؛ مطمئناً خیلی‌چیزها همین‌طور کشف شده‌اند.

موضوع اگر تأثیر متقابل ریاضیات محض و کاربردی باشد، به‌نظر می‌رسد واقعش این است که چنین تأثیری وجود دارد، در هر دوجهت‌هم وجود دارد، اما دریك جهت خیلی شدیدتر است تا درجهت‌دیگر. کاربردها بخش عمده‌ای ازمنشأ ریاضیات محض‌اند وکماکان گاه‌به‌گاه منبع الهام این‌نوع ریاضیات‌اند، اما ضروری نیستند. مفاهیم و استنتاجهای محض برای ریاضیات کاربردی در حکم وسیله، طرح سازمانی، و معمولا درحکم راهنمایی مؤثر به واقعیتهای عالم‌اند ــ جزء ضروری ارگانیسم کاربردی‌اند. بازهم حکایت مورچه و مورچه‌خوار است: شاید مورچه‌خوار احتمالا نوعی ارزش محیط‌شناختی برای مورچه داشته باشد، که تازه این هم جای بحث دارد، اما مطمئناً حرف ندارد که مورچه برای ادامهٔ

حیات و گذران مورچه‌خوار ضروری است.

## چشم‌انداز آینده

معروفترین بخشهای ریاضیات جبر و هندسه‌اند، اما برای دست‌اندرکاران بخش سومی هم‌هست، به‌اسم آنالیز، که به‌همان اندازهٔ دوتای دیگر اهمیت دارد. «آنالیز» از مفهوم تغییر شروع می‌شود. این کافی نیست که فقط خودمقادیر و اشکال را مطالعه کنیم، لازم است این را هم بررسی کنیم که مقادیر و اشکال چگونه تغییر می‌کنند. راه طبیعی اندازه‌گیری تغییر این است که اختلاف [دیفرانس] میان قدیم و جدیدرا بسنجیم؛ ازهمین کلمهٔ «دیفرانس» معلوم می‌شود که‌وجه تسمیهٔ اصطلاح‌فنی «معادلهٔ دیفرانسیل» چیست. بیشتر بخشهای کلاسیك ریاضیات کاربردی با تغییر ــ یعنی حرکت ــ سروکار دارند و مهمترین ومفیدترین وسیلهٔ آنها نظریه و تکنیك معادلات دیفرانسیل است.

پدیده‌های دنیای‌واقعی محتملا به‌متغیرهای‌زیادی بستگی‌دارند: مأکول بودن یك خوراك بستگی دارد به‌اینکه مثلا مدت پخت آن چقدربوده، درچه دمایی پخته‌شده، وچقدر ادویه داشته است. برای آنکه بتوانیم حاصل‌کار را به‌طور صحیح پیش‌بینی کنیم باید متغیرها را جدا ازهم درنظر بگیریم: وقتی جزئی از داده‌ها تغییر کند چه تغییری در نتیجهٔ کلی حاصل می‌شود؟ به‌همین خاطر است که بخش اعظم ریاضیات کاربردی این‌چنین به‌نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی گره‌خورده است؛ در واقع این‌لفظ اخیر برای بعضیها کم‌وبیش مترادفی برای ریاضیات کاربردی است.

آیا تحولات بزرگ هنوزهم دارند صورت می‌گیرند و بعداً هم‌صورت‌خواهند گرفت؟ آیا احتمال‌دارد که یك‌شکسپیر ریاضیات (مثل ارشمیدس یا گاوس) حالا هم موجود ومشغول کار باشد، یا درآینده پا به‌میدان بگذارد؟ جبر، آنالیز، یا هندسه؟ ریاضیات آینده ازچه نوعی است و روابط میان محض و کاربردی چگونه خواهد بود؟

من جواب این پرسشها را نمی‌دانم، هیچ‌کس نمی‌داند، اما از گذشته و حال می‌شود نشانه‌هایی به‌دست آورد؛ برپایهٔ این نشانه‌ها و برپایهٔ امیدی که همواره بامن است می‌خواهم یکی‌دوتا حدسهای سردستی‌ام را در این باره عنوان کنم. آسانترین این پرسشها آن است که به‌تحولات بزرگ مربوط می‌شود: بله، این تحولات هنوزهم دارند اتفاق می‌افتند. ریاضیدانها تقریباً هرسال دارند پاسخ پرسشهایی را پیدا می‌کنند که از دهها سال پیش یادر مواردی حتی ازقرنها پیش مطرح بوده‌اند. اگر کانتور، ریمان، و پوانکاره امروز به‌دنیا برمی‌گشتند، طلبه‌های‌هیجانزده و حریصی می‌شدند که می‌توانستند خیلی از چیزهایی را که می‌خواستند بدانند یاد بگیرند.

---

درآیندهٔ قابل‌پیش‌بینی، ریاضیات گسسته وسیلهٔ مفیدی خواهد بود که در تلاش برای درك دنیا روز به روز کاراندتر خواهد شد و... بنابراین، نقش آنالیز به‌همان نسبت‌کوچکتر خواهد شد.

---

آیا امروز هم ارشمیدسی در دنیا هست؟ احتمالا خیر. آیا هیچ‌وقت گاوس دیگری به‌دنیا خواهد آمد؟ دلیلی نمی‌بینم که نیاید؛ امیدوارم که بیاید، و شاید هم به‌همین علت است که فکر می‌کنم خواهد آمد.

به‌گمان من‌درآیندهٔ قابل پیش‌بینی، ریاضیات گسسته وسیلهٔ مفیدی خواهد بود (همچنانکه امروز هم هست) که درتلاش برای درك‌جهان روز به‌روز کارامدتر خواهد شد، و بنابراین نقش آنالیز به‌همین نسبت کوچکترخواهدشد. نمی‌خواهم بگویم که به‌طور کلی آنالیز و به‌خصوص معادلات دیفرانسیل جزئی عمرشان به‌سرآمده و قدرتشان‌دارد رو به‌زوال‌می‌رود؛ اما دارم حدس می‌زنم که قدری از این‌همه صفحاتی که همیشه در تمام کتابهای ریاضیات کاربردی در اشغال آنالیز بوده است نه‌فقط به ریاضیات ترکیبی بلکه به بحثهای پیچیده‌تری در نظریهٔ اعداد و همچنین به‌هندسه اختصاص خواهد داشت.

ریاضیات کاربردی ناچار به‌تغییر است، هم به‌این خاطر که مسائل تغییر می‌کنند وهم به‌این خاطر که ابزارهای حل‌مسائل تغییر می‌کنند. هرچه معرفت ما از دنیا بیشتر می‌شود، و یاد می‌گیریم که چطور مهار بعضی پدیده‌های آن را به‌دست بگیریم، ناگزیر با پرسشهای جدیدی مواجه می‌شویم، و ریاضیات محض هرچه رشد بیشتری‌می‌کند، زوائدش را دورمی‌ریزد و درنتیجه‌عمیقتروساده‌تر می‌شود، وتکنیکهای جدیدی برای استفاده دراختیار ریاضیات کاربردی می‌گذارد. اینها همه چه‌ربطی به‌رابطهٔ میان مورچه و مورچه‌خوار دارد؟ به گمانم ربط چندانی نداشته باشد. هریك از دونوع کنجکاوی، یعنی محض وعملی، ناچار است که ادامه داشته باشد، وسقراطِ ۲۴۰۰ سال‌بعد، تفاوت‌میان آنهارا به‌همان‌وضوحی خواهد دید که سقراطِ ۲۴۰۰ سال‌قبل می‌دید.

حالا، بعداز این‌همه که گفته شد، ماحصل کلام چیست؟ شاید بشود این‌همه را تنها درکلمهٔ «سلیقه» خلاصه کرد.

یك پرتره کار پیکاسو را عده‌ای زیبا می‌دانند، و عکسی که ادارهٔ آگاهی ازیك جنایتکار فراری‌منتشر کرده است می‌تواند مفید باشد، اما احتمال‌دارد کارپیکاسو شباهت چندانی باواقعیت نداشته باشد وعکس ادارهٔ آگاهی خیلی الهام‌بخش و جاذب نباشد. آیا این‌خیلی‌بی‌انصافی‌است که بگوییم این پرتره نسخهٔ بدی ازطبیعت و این عکس نوع بدی ازهنر است؟

بخش‌اعظم ریاضیات کاربردی بسیار ارزشمند است. اگریك تکنیك‌ذهنی به‌ماچیزی‌دراین‌باره‌یاد بدهد که‌خون‌چطور تلمبه‌می‌شود، امواج چطور منتشر می‌شوند، و کهکشانها چطور منبسط می‌شوند، دراین‌صورت این تکنیك، علم در اختیارمان می‌گذارد و دانشمان را زیادمی‌کند، دانش به‌همان‌معنی‌کلمه که شایستهٔ بیشترین احترام است. اگر بگوییم که متون قانونی (با آن کلمات قلنبه و نشرخشك صنتی) بد ادبیاتی است، به‌عمق فکر، دقت، و خدمات اجتماعی علمای‌قانون‌نویس‌توهین نکرده‌ایم. به‌همین‌ترتیب توهینی به‌بینش، تکنیك، و خدمات علمی علمای ریاضیات کاربردی نکرده‌ایم اگر بگوییم که کشفیات آنها دربارهٔ خون، و امواج، و کهکشانها، ریاضیات‌کاربردی‌درجهٔ یکی‌است؛ اما، معمولا، ریاضیات‌کاربردی ریاضیات بدی است وفرقی نمی‌کند که از چه درجه‌ای باشد.

●●●●●●●●●●●●●●●●

● Paul R. Halmos, "Applied mathematics is bad mathematics," *Mathematics Tomorrow*, edited by Lynn Arthur Steen, Springer- Verlag (1981) 9- 20.

# شکوفا شدن ریاضیات کاربردی در آمریکا•

پیتر لکس*
ترجمهٔ کورس ضیایی

شهرت دارد که ریاضیدانان تاریخنگاران بدی هستند. آنها سیر اندیشه‌ها را چنانکه بایستی منطقاً رخ داده باشد، و نه آن‌گونه که عملا رخ داده‌است، شرح می‌دهند و این‌کار با کوششی نامنظم و اغلب در فرصتهای نامناسب وتحت فشار عواملی خارج از جهان ریاضیات انجام می‌شود. در این بررسی مختصر، سیر پرپیچ‌وتاب ودامنهٔ نفوذ ریاضیات کاربردی در آمریکا را شرح می‌دهم.

امروزه ریاضیات کاربردی در آمریکا زنده وشاداب است. اگر نظری به ۱۸ خطابه‌ای که برای تشریح خطوط مقدم جبههٔ تحقیق برگزیده بودند بیفکنیم (این خطابه‌ها در گردهمایی بزرگداشت صدمین سال تأسیس انجمن ریاضی آمریکا عرضه شد) می بینیم که مباحثی چون مدلسازی فیزیولوژیك، جریان سیال واحتراق، علوم کامپیوتر، وشکل گیری اتمها درچارچوب مکانیك آماری را در بر می گیرند. همچنین درمی‌یابیم که موضوع یك مقاله ومبحث آغازین چندین مقالهٔ دیگر را نظریه‌هایی فیزیکی تشکیل می‌دهند که نتایج به‌دست آمده‌از آنها برای فیزیکدانان و ریاضیدانان به‌یك‌اندازه جالب توجه است.

البته، وضع همیشه به‌این صورت نبوده است. درطول یکی‌دو دهه، از اواخردههٔ ۱۹۳۰ تا اوایل دههٔ ۱۹۵۰، درمحافل ریاضی آمریکا دیدگاه مسلط مانند دیدگاه بورباکی بود، یعنی این نظر که ریاضیات موضوع انتزاعی خود مختاری است که نیازی به‌هیچ مطلب ورودی ازجهان واقعی ندارد، ملاکهای عمق وزیبایی آن درخودش نهفته‌است و راهنمایی درونی دارد که رشد و تکامل آن را هدایت می کند. کاربردها برحسب تصادف بعدها پیش می آیند، یعنی اندیشه‌های ریاضی به‌علوم ومهندسی رخنه می کنند.

اکثر پدیدآورندگان ریاضیات نوین ــ مشخصاً گاوس، ریمان، پوانکاره، هیلبرت، آدامار، بیرکاف، وایل، وینر، وفون نویمان ــ این طرز تلقی را مطلقاً انحرافی و گمراه کننده می‌دانسته‌اند. امروز با اطمینان می‌توان گفت که دوران «محض گرایی» سپری شده است. اکثر ریاضیدانان بادقت مواظب‌اند که ریاضیات به‌سطح کاربردها سقوط نکند، اما معتقدند که ریاضیات وعلوم (به‌خصوص فیزیك) یارانی همتراز هستند که اندیشه‌ها، مفاهیم، مسائل، وراه‌حلها را با یکدیگر مبادله می کنند. درحالی که در گذشته‌ای نه‌چندان دور ریاضیدانی با گفتن اینکه «ریاضیات کاربردی ریاضیات بدی‌است» و یا «بهترین نوع ریاضیات کاربردی همان ریاضیات محض‌است» ممکن بود از تحسین برخوردار گردد، امروزه شخصی راکه چنین حرفی بزند به‌دیدهٔ نادانی خواهند نگریست.

چگونه چنین تغییری رخ داد؟ چندین دلیل قابل قبول می‌توان عرضه کرد. اما اول قدری تاریخچهٔ این موضوع را مرور کنیم.

جنگ جهانی دوم، که تحولاتی اساسی در مؤسسات، مفاهیم، ونحوهٔ تفکر اجتماعی ما پدید آورد، وضع ریاضیات کاربردی را درآمریکا به‌طور دائم تغییرداد. این به‌آن معنی نیست که قبل از سال ۱۹۴۵ درآمریکا هیچ کار ارزشمندی درزمینهٔ ریاضیات کاربردی صورت نگرفته بود. ازهرچه بگذریم، درقرن نوزدهم کارهای گیبس درمکانیك آماری وآنالیز برداری و سریهای فوریه، ومطالعات هیل درمعادلات هیل نام آمریکا را در تاریخ ریاضیات کاربردی ثبت کرده‌بود. از آنالیزدانان پیشتاز آمریکایی در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۳۰ بیرکاف بود که به‌خاطر تحقیقاتش در دینامیك شهرت جهانی یافت و وینر بود که درمطالعهٔ فرایندهای فیزیکی تصادفی ازقبیل حرکت براونی و آشوب همگن، پیشرو به‌حساب می‌آید. قضیهٔ ارگودیك که هدفی دشوار و دیریاب بود در دههٔ ۱۹۳۰ با پشتکار زیاد دنبال شد.

در اوایل دههٔ ۴۰ نظریهٔ اطلاعات شانون ونظریهٔ شبکهٔ عصبی پیتس ومك کولو[1] پا به‌عرصهٔ وجود گذاشت. با این همه منصفانه باید گفت که تا قبل از ۱۹۴۵ ریاضیات کاربردی در بخشهای ریاضی دانشگاهها وضع چندان مساعدی نداشت وفعالیتی حاشیه‌ای محسوب می‌شد.

انتقال ازحاشیه به مرکز پس‌ازجنگ آغازشد وریاضیات کاربردی ازقطره‌ای به‌دریا تبدیل یافت. بیرکاف اخیراً مطالعاتی

1. McCollough

درمفاهیم وچشم‌انداز ریاضیات کاربردی انجام داده‌است. در این گفتارمجمل فقط امکان آن وجود داردکه پهنهٔ گستردهٔ پیشرفت ریاضیات کاربردی را مشخص وتعدادی ازنمونه‌های برجسته‌آن‌را تاحدی دلخواهانه انتخاب وتشریح کنم. اگرازمن قصوری در بازگوکردن دستاوردهای مطلوب شما درریاضیات‌کاربردی سر زند، فقط ناشی ازفراوانی دستاوردها دراین زمینه خواهد بود.

دینامیك سیالات، تاحدی‌به‌سبب کتاب پرجاذبه‌ای‌که‌کورانت و فریدریکس به‌نام جریان‌فراصوتی و امواج ضربه‌ای‌نوشتند، یکی ازاولین‌زمینه‌هایی‌بود که‌تجدید حیات کرد. برز[1] وشیفمان‌دراوایل دههٔ ۵۰ قضیه‌های اساسی وجودی جریان دوبعدی فروصوتی پایا حول اجسام ثابت را ارائه کردند وبه‌دنبال آن تحقیقات بسیار ممتازی راجع به‌جریان باکرانه‌های آزاد انجام شد. مسألهٔ‌جریان فراصوتی پایا وجریان وابسته به‌زمان تك‌بعدی، به‌سبب احتمال تشکیل امواج ضربه‌ای مشکلترازکاردرآمد. دراین باره تنها قضیهٔ وجودی مشخص را گلیم درسال ۱۹۶۶ ارائه داد. موراوتز[2] جریانهای صوتی هموار وحتی جریانهای ضربه‌ای را مطالعه کرده است. نتایجی به‌دست آمده ودرکنارآن مسائل ناگشودهٔ زیادی هم مطرح شده است.

شاید هیجان‌انگیزترین پیشرفت جدید، پیدایش دینامیك سیالات محاسباتی باشد، یعنی ارائهٔ تقریبهایی ازمیدانهای جریان به‌کمك محاسبات‌عددی‌ماهرانه. ازاین کاردومنظور براورده‌می‌شود، اول اینکه خصوصیات کارکرد دقیق دستگاههایی که در تماس با سیالهای متحرك هستند ازقبیل سیستمهای لوله‌کشی، شکلهای آئرودینامیکی، توربینها وغیره به‌مهندسان معرفی می‌شود تا در کارطراحی‌وکنترل‌ازآن‌استفاده‌کنند. این‌نحوهٔ نگرش دروضعیتهای پیچیده‌ای چون جریانهای احتراقی، مغناطوهیدرودینامیك وغیرآن به‌کار رفته است. منظوردوم ازانجام این‌گونه محاسبات، دادن سرنخهایی به‌نظریه پردازان در مورد رفتارمحتمل سیالات وبرانگیزاندن تخیل‌نظریه‌پردازان یا به‌عبارت‌دیگر، تجربه‌اندوختن ایشان است. چنین سرنخهایی درمطالعهٔ شکستگی کامل یا جزئی جوابهای معادلات ناویر ـ استوکس واویلروهمچنین دربررسیهای بسیارزیاد دیگری به‌کاررفته است.

پیشرفتهای چشمگیراخیر در دینامیك‌سیالات محاسباتی‌مرهون سرعت افزونترماشین، حافظهٔ تویترونرم افزاربهتر و فراتر ازهمهٔ اینها، اختراع روشها والگوریتمهای عددی جدید هوشمندانه‌ای ازقبیل گردایی گستهٔ کورین وتبدیل فوریهٔ سریع کولی و توکی است.

البته ریاضیدانان محض‌هم‌دست به‌آزمایشهای عددی‌می‌زنند، کما اینکه گاوس تا جایی پیش رفت‌که قضیهٔ اعداد اول راحدس زد. امروز اگر وی زنده بود به امکانات محاسباتی وسیعی که در اختیار دست‌اندرکاران نظریهٔ اعداد، دانشجویان دستگاههای دینامیکی وغیره قراردارد عشق می‌ورزید. امروز انکابرمحاسبهٔ سهل وسریع پیوند بسیارمحکمی بین ریاضیات محض وکاربردی پدیدآورده است.

درسایرشاخه‌های فیزیك‌ریاضی هم پیشرفتهایی‌به‌همین‌اندازه

1. Bers 2. Morawetz

پراهمیت حادث شده است. دراوایل دههٔ ۱۹۵۰ کاتوتوفیق اثبات این نکته را یافت‌که عملگرشرودینگر برای اتم هلیوم (وسایر اتمهای‌سنگینتر)خودالحاق‌است. دراواسط‌دههٔ ۱۹۵۰ او وروزنبلوم وجود عملگر پراکندگی را برای زوجی از عملگرها که تفاوتشان با یکدیگر در عملگری هسته‌ای است، اثبات کردند.

کارکلروی پراش امواج هم در دههٔ ۱۹۵۰ شروع شد. کلر وهمکارانش‌توانستند بااستفاده ازنورشناخت هندسی تعداد زیادی ازالگوهای پراش را به‌روش ریاضی استخراج‌کنند، که بعضی‌از این الگوها را ملروز[1] وتیلرسالها بعد بااستفاده ازعملگرهای ریز موضعی که طراحی ویژه‌ای داشتند به‌دقت ثابت کردند.

موزر در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ وجود تعداد نامحدودی خم بسته را که تحت نگاشتهای حافظ سطح نواحی حلقوی، ناوردا هستند نشان داد؛ وبا این‌کار، مبحث کلاسیك دینامیك را تکان داد. این مطلب نشان می‌دهدکه چنین نگاشتهایی ـ که ازاهمیت فیزیکی بسیاری برخوردارند ـ ارگودیك نیستند.

در دههٔ ۱۹۵۰، پیشرفتهای بزرگی درحل برخی از مسایل بنیادین مکانیك آماری ـ وجود حدود ترمودینامیکی، گذار فاز و پایداری‌ماده ـ آغازشد. این کاربیشتر به‌دست‌فیزیکدانانی انجام‌شد که بسیاری از ایشان سزاوار عنوان ریاضیدان افتخاری هستند. میچل فایگن باوم[2] یکی ازاین ریاضیدانهای افتخاری بودکه مضاعف شدن دورهٔ تناوب پایدار خود ـ نگاشتهای بازه‌ها را درهنگام تغییرشکل یافتن‌آن نگاشتها کشف کرد، و ویژگی عام انتقال پایداری را که نتیجه‌ای بسیار نامنتظر بود مکشوف ساخت.

کارکروسکال درزمینهٔ کشف سولیتونها، اثرمتقابل‌شگفتی‌آور آنها بریکدیگر، وارتباط آنها با موجودیت بینهایت کمیت پایسته، وانتگرالپذیری کامل سیستمهایی باساختار سولیتون مانند ازآن هم نامنتظرتر بود. شگفت‌آوراست که تعداد بسیار زیادی سیستم‌کاملا انتگرالپذیر وجود داردکه در دوران کلاسیك مکانیك همیلتنی ازاین لحاظ شناخته نبودند وازآن شگفت‌آورتراینکه‌همهٔ این سیستمها اهمیت فیزیکی دارند. نیزحیرت‌انگیزاست‌که مثلا معادلهٔ کادومتسف ـ پتویاشویلی[3] که‌درحین‌مطالعهٔ امواج آب به‌دست آمد دوبروین[4]، آربارلو و دکونچینی[5] وشیوتا[6] را به‌حل مسألهٔ کلاسیك شوتکی[7] که عبارت بود ازمشخص کردن خصوصیات ماتریسهای ریمانی درنظریهٔ رویه‌های ریمانی، رهنمون شد.

مثال‌دیگری‌ازکمك‌رساندن فیزیك‌ریاضی به‌ریاضیات‌محض، استفادهٔ فادیف و پاولوف ازمفاهیم نظریهٔ پراکندگی برای‌تحقیق در توابع خودریخت است.

یکی ازدستاوردهای بزرگ ۱۵ سال اخیر، برش‌نگاری (توموگرافی) کامپیوتری است، که ترکیب دلپذیری است از واردن‌کردن یك تبدیل انتگرالی، آنالیزهماز، و ساختن

1. Melrose 2. Mitchell Feigenbaum
3. Kadomtsev-Petviashvili 4. Dubrovin
5. DeConcini 6. Shiota
7. Shottky

الگوریتمهایی سریع ومؤثر.

دورهٔ پس از جنگ شاهد اهمیت روزافزون نظریه‌های احتمال ومعادلات دیفرانسیل جزئی بود. هریك ازاین نظریه‌ها بردوپایه استوار است که یکی محکم برکاربردها تکیه دارد ودیگری بر ملاحظات ریاضی محض. قبل ازجنگ به‌این مطالب به‌دیدهٔ رشته‌های تخصصی می‌نگریستند، درحالی که امروزه این دومبحث نقش محوری را دربخش وسیعی ازریاضیات بازی می‌کنند.

همچنین زمینه‌های کاملا جدیدی برای کاربرد ریاضیات پدید آمد، مانند نظریهٔ بازیها، نظریهٔ کنترل، تحقیق در عملیات، برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی پویا، برنامه ریزی با عدد صحیح و غیره. هدف عمومی این رشته‌ها بهینه‌کردن است؛ بنابراین ویژگیهای مشترك زیادی با حساب وردشها دارند، اما در ضمن اختلافهای چشمگیری هم باآن دارند: مثلا اینکه نظریات جدید بهینه سازی بیشتر بامدلهای گسسته سروکاردارند تا با مدلهای پیوسته، وکاربردهای موردنظر آنها بدیع است ومعمولا با اقتصاد، کسب‌وکار و امورمالی ارتباط می‌یابد. الگوریتمهایی که برای نیل به بهینه‌های مطلوب درکوتاهترین زمان به‌کار می‌روند هم به‌همان اندازه بدیع هستند. کیرك‌پاتریك یکی از الگوریتمهای بسیارمؤثر یعنی بازپخت[1] شیه‌سازی‌شده‌را ازمتالورژی وفیزیك آماری وام گرفته است. بازپختن، فرایندی است که بر مواد بی‌شکل ـ مانند شیشه درگونه‌های مختلفش ـ که درآنها انرژی پیکربندی تعداد زیادی مینیمم دارد اعمال می‌شود. مینیمم مطلق وقتی حادث می‌شود که ماده حالت بسیارمرتبی به‌خود بگیرد وبه‌صورت بلوری درآید. اگرمادهٔ بی‌شکلی با سرعت زیادخنك شود به‌شکل بسیارنامرتبی جامد می‌شود واین وضع، متناظر با مینیممی موضعی است که بامینیمم مطلق فاصلهٔ زیادی دارد. اگرماده را به‌آهستگی سردکنند، به‌صورت بلوری درمی‌آید.

تعداد بسیارزیادی مسألهٔ بهینه‌سازی ترکیباتی وجود دارد که نمونهٔ بارزآنها مسألهٔ فروشنده سیار است. این مسأله ازاین لحاظ که تابع هدف تعداد زیادی مینیمم دارد، شبیه مسألهٔ مواد بی‌شکل است. درچنین موادی، باهرروش نزولی احتمالا می‌توانیم پیکربندی را به‌سوی مینیممی موضعی که از مینیمم مطلق دوراست برانیم. بازپخت شبیه سازی شده با سلسله‌ای ازدماهای $T$ که کوچك وکوچکتر می‌شوند، انجام می‌گردد. برای هردما، توزیع گیبس متناظری وجود دارد که درآن، احتمال $x$ امین حالت عبارت است از

$$\frac{e^{-E_i/T}}{Z}$$

که $E_i$ انرژی $i$امین حالت و $Z$ کمیتی است که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Z=\sum e^{-E_i/T}.$$

از الگوریتم متروپولیس برای بناکردن سلسله‌ای از حالات که با توزیع گیبس در تعادل‌اند، به‌صورت زیراستفاده می‌شود.

پیکربندی را مطابق با دستورالعملی انتخابی تغییر می‌دهند. اگر پیکربندی جدید سطح انرژی پایینتری داشت تغییرحالت قبول می‌شود. اگر تغییر انرژی $\Delta E$ مثبت باشد، تغییر حالت راباحتمال $e^{-\Delta E/T}$ می‌پذیرند. این بخش ازالگوریتم را به‌روش مونت‌کارلو بااستفاده ازیك توالی تصادفی اجرا می‌کنند. وقتی‌این‌الگوریتم‌را درطول زمان مشخصی به‌کاربردند، دماپایین‌آورده می‌شودومراحل الگوریتم تکرارمی‌گردد.

این‌روش درپیداکردن تقریبهای عالی برای مینیممها، در تعدادی ازمسائل بهینه‌سازی ترکیباتی، فوق‌العاده مؤثربوده‌است.

علم‌کامپیوتر منبع تعدادزیادی از مباحث ریاضی تازه بوده است. این علم توجه خود را به‌الگوریتمها معطوف کرده وتعداد زیادی الگوریتم بسیار مؤثر ازقبیل تبدیل سریع فوریه، ضرب ماتریسی سریع، روش سادکی، وبسیاری الگوریتمهای دیگر را که دراثربزرگ‌کنوت تشریح شده‌اند در دسترس آورده است. الگوریتم کارمارکار وروش گرین‌گارد و روخلین[1] دربراوردسریع پتانسیلها جزء مثالهای جدیدتراست. گاه مشکل می‌توان‌کارایی یك الگوریتم را تخمین‌زد، به‌خصوص اگردرحالات نمونه‌وار بهنراز بدترین حالت‌عمل کند (به‌تحقیق مهمی که اسمیل در روش سادکی کرده مراجعه‌کنید).

یکی ازمسائل مهم، طرح‌کردن شبکه‌ای است که گروه‌بندی، پردازش موازی وسایر اموری از این قبیل را به‌طورمؤثر انجام دهد. در چنین‌گرافهایی که بسط‌دهنده و متمرکزکننده خوانده می‌شوند، تعداد یکسانی یال از هر رأس منشعب می‌شوند وگرافها از خواص همبندی خوبی برخوردارند. کاری‌که باید انجام‌شود، ساختن گرافهای متمرکزکننده‌ای است‌که کمترین تعداد یال ممکن را داشته باشند. سارناك وهمکارانش لوبوتسکی وفیلیپس، خانواده‌ای از گرافهای بسط‌دهنده ساخته‌اند که تقریباً از کمترین‌تعداد یال برخوردارند، وچون اثبات این نکته که گرافها خواص مطلوب را دارند اساساً وابسته به‌حدس رامانوجان‌دربارهٔ نمایش اعداد به‌صورت ترکیباتی خطی ازچهار عدد مربع است‌و درضمن به‌آنالیزهمسازدقیقی ازگروهها بستگی دارد، نام آنهارا گرافهای رامانوجان گذاشته‌اند.

پیچیدگی محاسبه با میزان خوبی الگوریتم سروکار دارد و سؤالهایی از این قبیل را مورد بحث قرار می‌دهدکه سریعترین الگوریتمهای ممکن برای براورد رده‌ای‌ازتوابع کدام‌اند. تازمان حاضرهنوز پاسخهای اندکی به‌چنین پرسشهای عمیقی داده شده است (برای نمونه، به‌تحقیق وینوگراد در زمینهٔ ضرب‌نگاه‌کنید).

شاید جذابترین زمینهٔ علم‌کامپیوتر هوش مصنوعی باشدکه با این تهدید تلویحی همراه است‌که چه بسا ریاضیدانانی اعم از محض یاکاربردی راکه ازتبار بشر باشند روزی ازصحنه خارج خواهدکرد. امامن ازرفتار شایع‌بین بعضی ازاعضای‌انجمن‌هوش مصنوعی رنج می‌برم‌که اهداف خود را به‌نحو نامعقولی بالا می‌گیرند واز دستاوردهای گذشته بسیار با مبالغه سخن می‌رانند. مثلا هربرت سایمون درسخنرانی‌گیبس خود در سال ۱۹۸۴ به تشریح برنامه‌ای‌کامپیوتری به‌نام BACON پرداخت که‌طوری‌طراحی

1. annealing

1. Rokhlin

شده بود که بدون کمك هیچ گونه نظریه‌ای قواعد علمی را به‌وسیلهٔ نوعی برازش خم ازداده‌هـای تجربـی استخراج کند. او ادعا کرد که BACON سه موفقیت به‌دست آورده‌است؛ اولین آنها استخراج قانون سوم حرکت سیاره‌ای کپلر بود که سایمون آن‌را به‌شکل زیر نشان می‌داد

$$P = KD^{3/2}$$

که در آن $P$ دورهٔ گردش سیاره به دور خورشید، $D$ فاصله‌اش از خورشید و $K$ مقدار ثابتی است کـه بـرای همه سیارات مقدار یکسانی دارد. این فرمول فقط برای سیاراتی معنی دارد که فاصلهٔ ثابتی تا خورشید دارند، یعنی مدارشان دایره است. اما قانون کپلر به‌مدارهای بیضوی ناظر است. بنابراین $D$ را میانگین حسابی کمترین وبیشترین فاصلهٔ سیاره ازخورشید اختیار می‌کند

$$P = K\left(\frac{D_1 + D_2}{2}\right)^{3/2}$$

یعنی کپلر فرمولی برای دورهٔ گردش هرسیاره یافته است که آن‌را به‌صورت تابعی از دو پارامتر مشخص کنندهٔ مـدار بیضوی سیاره به‌دست می‌دهد. این مطلب یك دنیا ازیافتن دورهٔ گردش سیاره‌ای با مدار دایره شکل فاصله دارد. اگر ریاضیدانی قضیه‌ای را برای حالت تقارن کروی ثابت کرد، نمی‌تواند روبای ادعای حالت کلی آن را درسر بپروراند. دانشمندان علم کامپیوتر هم باید چنین حدی ازدقت را مراعات کنند. مطمئناً ایرادهای ژرفتری به‌کار سایمون درهوش مصنوعی گرفته شده است، بـه‌عنوان مثال ایرادهایی که گرابینر و ادلمان از آن گرفتند.

یکی ازبکرترین شاخه‌های کاربردی جدید، نظریهٔ کاتاستروفهاست که از ذهن رنه توم ریاضیدان بزرگ تراوش کرده است و مبنای نظری آن، نظریهٔ تکینی است. اکلند[1] در کتاب عامه فهم و جذاب خـود ریاضیات و امور غیرمنتظره به معرفـی جـانبدارانـه‌ای از معرفت‌شناسی نظریهٔ کاتاستروفها می‌پردازد. در تکنگـاشت پوستن[2] واستیوارت مثالهایی ازکاربرد موفقیت‌آمیز این نظریه عرضه شده است.

اگرزمان را به‌صورت پارامتر تغییر شکل دهنده‌در نظر بگیریم، نظریهٔ کاتاستروفها نظریه‌ای واقعاً دینامیکی نیست. بـااین حال، می‌توان کاربردهای مهمی در دستگاههای دینامیکی برایش یافت. به‌گفتهٔ گولوبینسکی «آشکـارسازی مـوضعی یك تکینی تیهگون می‌تواند به‌توصیف کلی پـدیده‌های غیرخطـی منجرشود. نظریـهٔ تکینی ونظریهٔ دستگاههای دینامیکی بـا مفهوم خمینهٔ مـرکزی و تکنیکهای تحویل لیاپونوف ـ اشمیت همراه شده‌اند ونشان‌داده‌اند که می‌توان معادلات غیر خطی را به‌کمك میانگینهای گویا مطالعه کرد وبرخی ازپدیده‌های غیرخطی را می‌توان بـرحسب احتمال ظهورآنها رده‌بندی کرد. از آنجاکه هریك ازاین گونه‌های تکینی به‌تصویری عمومی منتهی مـی‌شود که، خواه بـاآزمایشهای عملی وخواه با آزمایشهای عددی، قابل تشخیص است، به‌دست آوردن ادراکی یکنواخت ازکاربردهای متفاوتی که بـرساختار ریاضی غیرخطی مبتنی‌اند، امکان‌پذیر است».

نظریهٔ کاتـاستروفهـا منتقدان وبدگویانی دارد. آرنـولـد، گوکن‌هایمر، وسوسمان نظرهای عنادآمیزی دربـارهٔ آن داده‌اند. دشمنی بااین نظریه واکنشی علیه تلاش کسانی است که آن را چون داروی روغن مار برای هر دردی تجویز می‌کنند. کاربردهایی کـه مروجین این نظریه برایشان جارمی‌زدند اغلب پرزرق وبرق جلوه داده می‌شدند و در تازگی و اصالت آنها مبالغه می‌شد. مثلا زیمان درسال ۱۹۷۶ درمقاله‌ای در مجلهٔ ساینتیفیك آمریکن نوشت:

> در طول ۳۰۰ سال بهترین وسیله برای ساختن چنین مدلهایی حساب دیفرانسیل بوده که نیوتن ولایب نیتس آن راابداع کرده‌اند. ولی معادلات دیفرانسیل به‌مثابهٔ ابزار توصیفی محدودیتی ذاتی دارند. آنها فقط پدیده‌هایی را می‌توانند توصیف کنند کـه تغییرات در آنهـا هموار و پیوسته رخ می‌دهد. دراصطلاح ریاضی، پاسخهای معادلات دیفرانسیل بایدتوابعی مشتقپذیر باشند. روشی ریاضی که با پدیده‌های ناپیوسته و واگرا سروکارداشته بـاشد فقط به‌تـازگی اختراع شده‌است.

این گفته در عهد نظریهٔ توزیعهـا گفتهٔ غریبی است! به‌علاوه نظریهٔ جوابهای ناپیوسته بسیار قدیمیتراز انجمن ریاضی آمریکا (AMS) است. قوانین بنیادین امواج ضربه‌ای را ـ که جوابهای ناپیوستهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند ـ ریمان ۱۳۰ سال پیش روی کاغذ آورد.

اکنون که برخی ازدستاوردهای ریاضیات کاربردی را شرح داده‌ام، میل‌دارم مختصری راجع به‌روشهای آن توضیح‌دهم. بعضی ازاین روشها اجزای اصلی ریاضیات محض هستند، یعنی برهانهای محکم قضایایی کـه با دقت بیان شده‌انـد. اما در بیشتر مـوارد ریاضیدانان کاربردی باید سلاحهای دیگری را به‌کار گیرند، مانند راه‌حلهای خاص، تـوصیفهای مجانب‌وار، معادلات ساده شده، و انجام آزمایش، چه در آزمایشگاه وچه درروی کامپیوتـر. گذشته ازهمه‌اینها نوعی شهود فیزیکی واردکار می‌شود که به‌هدایت‌فرددر تحقیقاتش می‌پردازد. ازآنجا که افراد مختلف انواع گوناگونی ازشهوددارند، بحث ومجادلهٔ زیادی بین ریاضیدانان کـاربردی درمی‌گیرد. جای تأسف است که این منازعات اغلب به‌گفتگوهای تلخ می‌انجامد و بیش ازآنکه نورافشانـی کند از خود حرارت می‌پراکند.

حال به‌پرسش نخستین بازمی‌گردیم. چه‌چیزی بـاعث‌شدکه ریاضیات کاربردی درآمریکا پس‌ازجنگ دوم جهانـی شکوفـا شود؟ شاید مهمترین عامل خود جنگ بود که اهمیت اساسی علم و تکنولوژی را درطرحهایی‌ازقبیل رادار، ماسورهٔ مجاورتی، کشف رمز، انهدام زیردریاییها وبمب اتمی به‌همه نشان داد. ریاضیدانان به‌همراه فیزیکدانان، شیمیدانان ومهندسان به‌کار پرداختند، و سهم چشمگیرو گاه تعیین کننده‌ای را اداکردند که بـدون آن ایـالات متحده ممکن بود درجنگ شکست بخورد. کسانـی کـه مسؤولیت سیاستگذاری علمی پس‌ازجنگ را برعهده داشتند ایـن درس را به‌خوبی فراگرفتند وآن‌را با دوراندیشی به‌کاربستند. دریافتند که علوم کاربردی جزء بنیادینی ازتکنولوژی و ریـاضیات کـاربردی مؤلفه‌ای اساسی ازعلوم کاربردی است وهمهٔ اجزای ریاضیات، چه

---

1. Ekeland 2. Poston

محض و چه‌کاربردی ارگانیسم واحدی را تشکیل می‌دهند. درنتیجه حکومت آمریکا برنامه‌ای جدی را برای پشتیبانی از ریاضیات آغاز کرد که شامل حمایت از کارهای پروژه‌ای در آزمایشگاههای دولتی و تحقیق در دانشگاهها می‌شد. به‌دلایل بسیارمتنوعی، موضوعهای بسیار متنوعی مورد مطالعه قرار گرفت. بعضی موضوعها ازقبیل جبرخطی عددی یا انتشار امواج الکترو مغناطیسی به‌خاطر کاربردهای مستقیمی که داشتند، وسایر موضوعها مانند نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی و آمار به‌سبب آنکه نسبت به‌اهمیتشان رشد نیافته بودند، وموضوعهای دیگری فقط به‌این دلیل ساده که اجزایی ازنسوج ریاضیات بودند، تحت حمایت قرار گرفتند. اولین مرکزی که علوم و ریاضیات را تحت حمایت سازمان یافته قرارداد، ادارهٔ تحقیقات نیروی دریایی بود. چندی بعد مراکزمشابهی در نیروی هوایی وارتش وادارهٔ انرژی که جانشگاهش کمیسیون انرژی اتمی بودکار آن مرکزرا دنبال کردند. این مراکزدر کنارحمایت ازانبوهی ازریاضیدانان، درتأسیس مدرسهٔ احتمال درکورنل، مدرسهٔ آنالیز وآمارکاربردی دراستانفورد ومؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در دانشگاه نیویورک سودمند واقع شدند. بنیاد ملی علوم (NSF)، که قدری دیرتر پا گرفت، دیدگاههای زیادی را از اسلاف خودتحویل گرفت وبه‌همراه آن فلسفه ودیدگاه خودرا نیزبنا کرد. پشتیبانی ادارهٔ دفاع (DOD) از ریاضیات تا به امروز ادامه یافته‌است، و حمایت NSF ومراکزدیگررا تکمیل کرده است.

جای کمال تعجب است که با این سابقهٔ درخشان و موفقیت کنونی این برنامهٔ تحقیقاتی، گروهی درانجمن ریاضی آمریکا پیدا شدند که پیشنهادکاهش حمایتهای DOD را ازریاضیدانان عرضه کردند. بسیاری ازافرادی که تحت حمایت DOD بودند عمیقاً از این اظهارنظر که گویا ازمنبعی آلوده پول می‌گرفته‌اند و این حمایت می‌بایست به‌افراد لایقتری اختصاص می‌یافت، آزرده‌خاطر شدند.

برنامهٔ اعتلای ریاضیات به‌طورعام وریاضیات کاربردی به طورخاص، اگرازرهبری شایسته‌ای دردرون جامعهٔ ریاضی برخوردار نبود نمی‌توانست موفقیتی کسب کند. رهبری ریاضیات کاربردی را عمدتاً گروهی برجسته ازمهاجرین، که اکثرآنها پناهندگان سیاسی اروپایی ازقبیل کورانت، فلر، فریدریکس، جان، کاك، کانو، فون‌کارمان، فون میزس، فون‌نویمان، نیمان، پراگر، شیفر، سینگ، اولام، والد، وایل، ودیگران بودند به‌عهده گرفتند. این گروه به سواحل این طرف چشم‌اندازها وروشهایی را آوردکه بادیدگاه محضی که تا آن زمان درآمریکا غالب بود، فرق اساسی داشت، وبه‌خصوص تمایل بیشتری داشت که ریاضیات‌را درقلمروفیزیك و مهندسی به‌کاربندد. بسیاری ازتازه واردان در اوج درخشش خود بودند ومی‌توانستند اندیشه‌های خود را با قدرت واطمینان پیش ببرند.

مهمترین شخص درمیان این جمع برجسته، فون نویمان بود، به‌زحمت می‌توان زمینه‌ای کاربردی پیدا کرد که نام او بر آن حك نشده باشد. وی درسخنرانی پیشگویانه‌ای درسال ۱۹۴۵ درمونترآل، درزمانی که کامپیوترهای الکترونیك تنها اختراع ذهن خیال‌پرداز او به‌حساب می‌آمدند گفت که «بسیاری ازشاخه‌های ریاضیات چه محض و چه‌کاربردی درحطش وسایل محاسباتی به‌سر می‌برند تا از بن‌بست فعلی که از ناتوانی رهیافت نظری محض به مسائل غیرخطی ناشی شده خارج شوند». فون نویمان درانجمن ریاضی آمریکا شخصیتی کلیدی بود. مرگ حزن‌آور و زودرس او ریاضیات کاربردی وعلوم‌کامپیوتررا از پیشوایی طبیعی، و سخنگو و پلی بین ریاضیات ودیگرعلوم، محروم ساخت.

هرچه ازسهم کامپیوترهای سریع باحافظهٔ قوی در شکل‌دادن وسوخت رساندن به‌ریاضیات‌کاربردی بگوییم، کم گفته‌ایم. تکانی که‌کامپیوتر به‌ریاضیات، اعم ازمحض وکاربردی داده است بانقش تلسکوپ درنجوم و میکروسکوپ درزیست شناسی قابل مقایسه است. بررسی این موضوع درخور مقالهٔ دیگری است. دراینجا فقط مجال آن هست که چند نکته را ذکر کنم.

درآن دوران سیاه گذشته که محاسبات عددی به چندصد یا چندهزار عمل حسابی محدود می‌شد، ریاضیدانان کاربردی مجبور بودند مسائل خود را بسیار ساده کنند و یا حتی درمواردی قسمتهای اصلی آنها را حذف کنند تا پرداختن به‌آنها درحد تواناییهای عملیاتیِ موجود باشد. باید هرگوشه‌ای را می‌بریدند وازهرنقارن تصادفی بهره‌برداری می‌کردند. این امرچنگی به‌دل ذهنهای ریاضی نمی‌زد و احتمالا یکی ازدلایل عدم محبوبیت ریاضیات کاربردی در دوران قبل ازظهورکامپیوترهمین بود. امروزمی‌توانیم کاری‌را که به‌کامپیوتر تعلق دارد به‌کامپیوتربسپریم وکاری راکه به‌قلمروتجزیه وتحلیل متعلق است به این قلمرو حواله دهیم. می‌توانیم به اصول کلی بیندیشیم و روشها را برحسب چگونگی عملکرد مجانبی آنها به ازای اعداد بزرگ $n$، ونه مثلا $n = 8, 9, 10$، ارزیابی کنیم.

امروزه انواع زیادی محاسبه برای مقاصد گوناگونی انجام می‌پذیرد و میزان اطمینانی که می‌توانیم به آنها داشته باشیم از موردی به مورد دیگر فرق می‌کند. بعضی از انواع بسیار جالب محاسبات، پدیده‌هایی واقعاً آشوبناك از قبیل جریان چند فازه، اختراق متلاطم، ناپایداری فصل مشترکها و غیره را به خوبی مدلسازی می‌کنند. چنین محاسباتی معادلهای گستهٔ فرایندهای فیزیکی را به‌کارمی‌گیرند و در اغلب قریب به‌اتفاق موارد با دقت تنظیم می‌شوند تا با نتایج تجربی تطبیق کنند. ولی هنگامی که می‌بینم طرحی محاسباتی جای نظریه‌ای را گرفته که می‌باید مستقل ازپارامترهایی باشد که‌درفرایندگسسته سازی واردمی‌شوند، احساس نارضایی می‌کنم.

دیدگاه‌کاربردی برای اصلاحات بسیار ضروری در برنامهٔ درسی دورهٔ‌کارشناسی، به‌خصوص در اسفبارترین مادهٔ آن، یعنی حساب دیفرانسیل وانتگرال، لازم است. اززمانی که ریاضیدانان پژوهشگر مسؤولیت دروس دورهٔ‌کارشناسی را ازسرخودبازکردند آموزش این حساب دروضع نامطلوبی قرارگرفته است. [درسایر درسهای این دوره] می‌توان استثناهای قابل توجه چندی از قبیل جبرنوین بیرکاف و مك‌لین و ریاضیات متناهی کمنی، اشنل و تامسون را برشمرد ولی حساب دیفرانسیل وانتگرال علی‌رغم تلاشهای خوب چندی‌که به‌نتیجه نرسید چون زمین بایری برجای مانده است. درنتیجه، درس حساب دیفرانسیل و انتگرالِ متعارفی که امروز تدریس می‌شود با شیوه‌ای که ریاضیدانان به‌این حساب می‌نگرند و آن‌را به‌کارمی‌گیرند، انطباق ندارد. خوشبختانه نارضایی ازدرس حساب دیفرانسیل وانتگرال مرسوم تقریباً درهمه‌جای دنیا

دیده می‌شود. توماسهای شکاك خیلی کم پیدا می‌شوند. این بحران خوشایند از آن‌جا برمی‌خیزد که ماشینهای محاسب جیبی پرتوان همه جا به‌فراوانی دردسترس افرادقرار گرفته‌اند واین ماشینها ازتوابع انتگرال مـی گیرند، نقاط مـاکسیمم و مینیمم و صفر آنهارا پیدا می‌کنند ومعادلات دیفرانسیل را با سهولت بسیار حل مـی‌کنند و نشان می‌دهند که اختصاص کل درس حساب‌دیفرانسیل وانتگرال به ترفندهای کهنه‌ای که این عملیات را بـا دقت بسیار کمتری انجام می‌دهد با اصلا انجام نمی‌دهد چقدر احمقانه است. اکنون ایـن فرصت را داریم که تمام تارعنکبوتها ومواد مـرده‌ای راکه چهرهٔ این حساب را مغشوش کرده است، بزداییم. باید هشیارانه بیندیشیم که چه چیزی را به‌جای آن بنشانیم. من بـراین عقیده پـافشاری می‌کنم که حساب دیفرانسیل وانتگرال‌وسیلهٔ طبیعی معرفی‌کاربردها است، واین‌کاربردها هستندکه شکل صحیح را بـه‌آن مـی‌دهند و محدودهٔ آن را مشخص می‌سازند.

شکی نیست که‌کامپیوترنقش‌سترگی درآموزش دورهٔ‌کارشناسی ایفا خواهدکرد. اما اینکه این نقش دقیقاً چه خـواهد بود تا حد زیادی درعمل معلوم خواهد شد. درخشانترین نویدی که‌محاسبات کامپیوتری می‌دهد این است که دانشجویان را قـادر می‌سازد در آموزش خود شرکت فعالتری، نسبت به‌گذشته، داشته باشند.

من به‌هواخواهان پـرشوروشوق ریـاضیات گسسته نصیحتی می‌کنم. این رشته، رشتهٔ‌بسیارزیبا وعمیقی‌است که به‌سبب‌دسترسی ما به‌کامپیوتر، اهمیت بسزایی درکاربردها پیدا کرده است. اما اگر گمان‌کنیم کـه ریاضیات گسسته در برنـامهٔ درسی سالهـای اول کارشناسی باریاضیات کاربردیِ مبتنی برحساب‌دیفرانسیل‌وانتگرال رقابت می‌کند یا حتی جای آن را می‌گیرد، به‌خطا رفته‌ایـم. این طرزفکرباعث می‌شودکه افزایش فوق‌العادهٔ توانایـی خود را در استفادهٔ‌کاربردی ازریاضیاتِ مبتنی براین حساب ــ که‌به‌یمن‌کامپیوتر حاصل شده است ــ نادیده بگیریم.

چگونه می‌توانیم براین وسوسه‌که حدس بزنیم‌مسیر تحقیقات فردا چه خواهد بود فایق آئیم؟ با اطمینان‌خاطرحدس می‌زنم که درقرن آینده محاسبات‌کامپیوتری نقشی حتی بزرگتراز امروزبازی خواهدکرد. مدلسازان‌ریاضی‌موضوعهای‌خودرا به‌شیوهٔ‌تجربه‌گران کاوش خواهندکرد. امکانات گرافیك‌کامپیوتری‌کـه امروز چشم‌ما را خیره می‌کند، بسیارعادی ودردسترس خواهدبود. باد خواهیم گرفت که ازمحاسبات به‌مثابـهٔ بخشی ازبـرهان دقیق‌استفاده‌کنیم، راهی که قبلا فقرمان ولانفورد پیموده‌اند. من مطمئنم کـه دینامیك سیالات رشتهٔ بسیارمهمی به‌حساب خواهد آمد، وهدف دشوار و ذیرباب درك‌مفهوم تلاطم شدیداً دنبال خواهد شد. ما بی‌شك سعی خواهیم‌کرد با استخراج اطلاعات مربوط بـه‌رفتار متوسط‌طالب زیادی دربارهٔ‌پدیده‌های‌آشوبناکی که‌اخیراً مشاهده‌شده کشف کنیم. این‌کاررا گاه درموارد کاملا انتگرالپذیر می‌توان انجام‌داد. نظریهٔ کام (کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر) به‌ما حق مـی‌دهدکه قبول کنیم چنین نتایجی در سیستمهایی کـه ازسیستمهای انتگرالپذیـر چندان دور نیستند مطرح‌اند.

مشاهدات اولیهٔ‌مندلبرات درباره ویژگی برخالی (فرکتالی) اشکال طبیعت‌وطبقه‌بندی‌اوازاین اشکال برمبنای ابعاد هاوسدورف آنها، تشنهٔ توضیحی برحسب قوانین طبیعت است. برای پیشرفت دراین برنامه نیاز به‌استعداد ریاضی دربالاترین حد است.

من‌قلباً توصیه می‌کنم که همه ریاضیدانان جوان‌مهارت خودرا در رشته‌ای از ریاضیات کاربردی بیازمایند. اینجا معدن طلایی از مسائل عمیقی است که حل آنها در گرو تحولات عمیق مفهومی و تکنیکی است. تنوع این مسائل باعث می‌شود که متناسب باهرسبك وروشی، مسأله‌ای موجودباشد. ریاضیات کاربردی به ریاضیدانان امکان می‌دهدکه عضوجامعهٔ بزرگترِعلمی و تکنولوژیك باشند. موفق باشید!

•••••••••••••••••

• Peter D. Lax, "The flowering of applied mathematics in America," *Siam Review* (4) **31** (1989) 533-541.

* پیترلکس، مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در نیویورك، امریکا

# مسأله برای حل

محمدرضا درفشه

ازاین‌پس، دراین‌بخش تعدادی مسأله درسطح سال آخر دبیرستان و سالهای اول و دوم دانشگاه مطرح می‌کنیم که حل آنها دریکی از شماره‌های بعدی مجله چاپ خواهد شد. از کسانی که مایل به ارسال مسأله هستند و همچنین از افرادی که مایل به‌ارسال حل مسأله‌ای‌هستند دعوت می‌کنیم نامه‌های‌خودرا به‌نشانی‌مجله‌بفرستند. ازکلیهٔ فرستندگان مسأله خواهش می‌کنیم که ذکر کنند مسأله را خودشان طرح کرده‌اند و یا از منبع دیگری به‌دست‌آورده‌اند، و همچنین درصورت امکان راه‌حلی برای مسألهٔ ارسالی ضمیمه کنند. همراه باهرمسأله نام فرستندهٔ آن‌را ذکرخواهیم کرد. ازبین‌حلهای رسیده، حلی که کامل و ابتکاری باشد با ذکر نام حل‌کننده چاپ خواهد شد. ضمناً گاه راه‌حلهای متفاوت‌هم، درصورت جالب‌بودن آنها، چاپ می‌شوند.

**مسألهٔ ۱.** اگر $f(x)=1/(x+1)$، آنگاه $f^{(n)}(x)$ را محاسبه کنید. دراینجا منظور از $f^{(n)}(x)$ عبارت است از $n$ مرتبه ترکیب $f$ باخودش. آیا $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$ وجود دارد؟ این حد را در صورت وجود محاسبه کنید. (محمدرضا درفشه، دانشگاه تهران)

**مسألهٔ ۲.** فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ماتریسهای $n\times n$ روی $\mathbf{C}$ باشدکه دو به‌دو باهم تعویض می‌شوند. ماکسیمم تعدادعناصرمستقل خطی $\mathcal{F}$ را پیداکنید. (مسألهٔ ۲ در صفحهٔ ۲۷۲ی کتاب زیر

کنت هافمن، ری‌کنزی، جبرخطی، ترجمهٔ جمشید فرشیدی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.)

**مسألهٔ ۳.** ازنقطهٔ $P$ واقع درخارج کرهٔ $C$، کره را روی صفحه‌ای که برکره مماس است تصویر می‌کنیم. ثابت کنید تصویر کره یک‌مقطع‌مخروطی است که‌کانون آن‌محل تماس کره باصفحه است. (رحیم زارع نهندی، دانشگاه تهران)

**مسألهٔ ۴.** فرض کنید $R$ یک حلقهٔ یکدار است. نشان دهیدکه اگر دراین‌حلقه، $1+1$ وارونپذیر باشد، آنگاه هرعضو خود توان را می‌توان به‌صورت مجموع دو عضو وارونپذیر نوشت. (مسألهٔ ۱۵ درصفحهٔ ۲۷۳ی کتاب زیر

S. Singh & Q. Zameeruddin, *Modern Algebra*, sixth ed., Vikas (1983).)

# پنج مسأله از مجلهٔ اینتلیجنسر باحل

مهدی حسینی‌نسب

حدود ۱۸ سال از عمر مجلهٔ اینتلیجنسر می‌گذرد و درحال حاضر می‌توان آن‌را درشمار معروفترین و پرخواننده‌ترین نشریات‌عمومی ریاضی دنیا به‌حساب‌آورد. اولین‌شمارهٔ اینتلیجنسر درسال ۱۹۷۱ انتشار یافت. از سال ۱۹۷۱ تا ۱۹۷۶ یازده شماره از این مجله منتشر شد وسپس بعداز یك وقفهٔ دو ساله، انتشار منظم آن در سال ۱۹۷۸ ازسرگرفته شد.

در شماره‌هایی از اینتلیجنسر که بین ۱۹۷۱ تا۱۹۷۶ منتشر شد بخش ثابت ومنظمی به‌عنوان بخش‌مسأله وجود نداشت و فقط گاهی مسائلی در بعضی از شماره‌های آن چاپ می‌شد. از سال ۱۹۷۸ تا ۱۹۸۳ نیز وضع به‌همین منوال بود.

از اولین شمارهٔ سال ۱۹۸۳ بخش ثابت و مستقلی به‌مسأله اختصاص یافت. ویراستار این بخش، موری کلامکین[1]، مسائلی را که برای درج کردن در این بخش مناسب می‌داند چنین توصیف می‌کند: «مسائلی که تکنیکی نباشند وفهم آنها برای‌خوانندهٔ عادی به‌آسانی میسر باشد. این مسائل باید ازنوعی ظرافت برخوردار باشند؛ بهترین مسائل آنهایی هستندکه دارای بیان ظریف (کوتاه وجالب)، نتیجهٔ ظریف، وحل‌ظریف باشند. چنین‌مسائلی به‌آسانی پیدانمی‌شوند ولی به‌هرحال، مسأله‌ای‌که دراین‌بخش چاپ‌می‌شود باید دست‌کم در یکی از این سه‌زمینه دارای ظرافت باشد.» از شمارهٔ بعد، سروکلهٔ کویکی[2]ها هم در این بخش پیدا می‌شود. کویکی، مسأله‌ای است که حل‌آن از راههای‌طولانی وخسته‌کننده هم میسر است ولی درصورت داشتن بینش و اطلاع‌کافی می‌توان راه‌حل میانبر و ساده‌ای برای آن پیدا کرد. مسألهٔ زیر یکی از کویکی‌های اینتلیجنسراست که در شمارهٔ ۲ی جلد ۹ آمده است و یافتن پاسخ آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم:

آخرین جملهٔ دنبالهٔ زیررا پیداکنید

۱۱, ۳۱, ۷۱, ۹۱, ۳۲, ۹۲, ۱۳, ۷۳, ۱۴, ۳۴, ۷۴,

۳۵, ۹۵, ۱۶, ۷۶, ۱۷, ۳۷, ۹۷, ۳۸, ۹۸, □.

درشمارهٔ اول سال ۱۹۸۷ بخش مسألهٔ اینتلیجنسر تغییر عنوان داد و «سرگرمیهای‌ریاضی»نامیده‌شد تا به‌گفتهٔ ویراستارجدیدبخش، استیون واینتراوب[3]، حوزهٔ وسیعتری ازمطالب [مسابقه‌ها و مطالب ذوقی وتفریحی] رانیز دربرگیرد، گرچه مسأله همچنان به‌صورت هستهٔ اصلی بخش باقی ماند. واینتراوب علاوه‌برتأیید معیارهای ویراستار قبلی درمورد مسأله، می‌گوید: «مسألهٔ جالب آن‌است که

1. Murray S. Klamkin  2. Quikie  3. Steven H. Weintraub

دارای کاربرد یا نتیجهٔ شگفت‌انگیز باشد. مسأله‌ای که ۲ یا ۳ ریاضیدان را وادارکند بعدازظهر خودرا درکنار تخته سیاه با آن سرکنند یا موجب آن شودکه ریاضیدانی عصر یک روز خود را مصرانه با قلم وکاغذ به‌آن مشغول باشد، ایده‌آل است.»

در اینجا برای آشنایی بیشتر خوانندگان نشریهٔ ریاضی با نوع مسائلی که در اینتلیجنسر درج می‌شود، ۵ مسأله از شماره‌های مختلف این مجله را به‌همراه حل آنها می‌آوریم.

**۱. مسألهٔ ۸۷ ـ ۳ (شمارهٔ ۱، جلد ۹).** طراح: استیون داینترادب

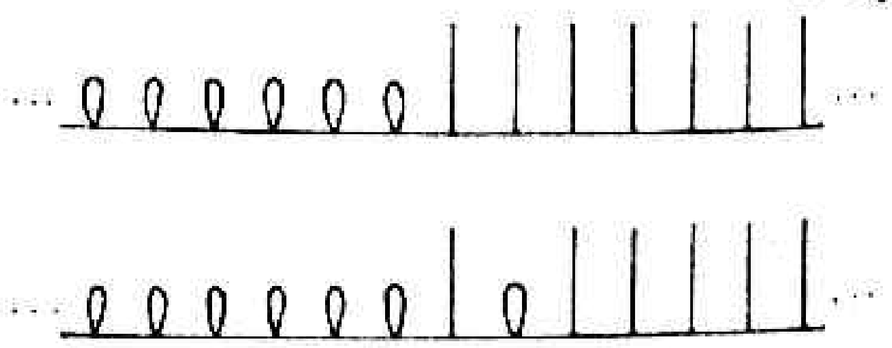
قضیه‌ای مقدماتی وجود دارد مبنی براینکه هرگاه نگاشت $f: X \to Y$، که در آن $X$ و $Y$ فضاهای هاوسدورف فشرده هستند، یک به‌یک و پوشا باشد آنگاه $f$ همانریختی است.

مثالی از فضاهای هاوسدورف غیرفشردهٔ $X$ و $Y$ و نگاشتهای یک به‌یک و پوشای $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ بزنید به طوری که $X$ و $Y$ همانریخت نباشند.

حل (درشمارهٔ ۱، جلد ۱۰) از پال هالموس:

**مثال ۱.** فرض کنیم $A$ بازهٔ نیمه‌بستهٔ $[0, 1)$، $B$ بازهٔ باز $(0, 1)$ و $C$ تک نقطهٔ $\{0\}$ باشد. گیریم $X$ اجتماع نامتقاطع تعدادی شمارا(ی‌نامتناهی) از $A$ها و تعدادی شمارا از $C$ها باشد و $Y$ اجتماع نامتقاطع تعدادی شمارا از $B$ها و تعدادی شمارا از $C$ها باشد. برای رفتن از $X$ به $Y$، تعدادی شمارا از $A$ها را به‌هم می‌چسبانیم تا یک $B$ ساخته شود و این کاررا به‌دفعات شمارا انجام می‌دهیم. برای رفتن از $Y$ به $X$، به‌هر $B$ یک $C$ می‌چسبانیم تا یک $A$ ساخته شود و این‌کار را طوری انجام می‌دهیم که تعدادی شمارا از $C$ها بلااستفاده بماند.

**مثال ۲.** فرض کنیم فضاهای $X$ و $Y$ به‌صورتی باشند که درشکل زیر می‌بینید. دراین شکل، انتهای فوقانی هر پاره‌خط عمودی باز است و شکل از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد. برای رفتن از $X$ (قسمت بالای‌شکل) به $Y$ (قسمت پایین) دومین پاره‌خط‌عمودی ازسمت چپ را خم می‌کنیم به‌طوری‌که انتهای‌فوقانی‌آن برانتهای تحتانی پاره‌خط قرار گیرد و برای رفتن از $Y$ به $X$ همین‌کار را درمورد اولین پاره‌خط عمودی ازسمت چپ (در قسمت پایین) انجام می‌دهیم. این تبدیلات بدیهی، نتیجهٔ موردنظر را به‌دست می‌دهند.



**۲. مسألهٔ ۸۳ ـ ۳ (شمارهٔ ۱، جلد ۵)**

دایره‌ای به‌شعاع ۱۶ شامل ۶۵۰ نقطه است. ثابت‌کنید یک نوار مستدیر به‌شعاع داخلی ۲ وشعاع‌خارجی ۳ وجود داردکه دست‌کم ۱۰ نقطه ازنقاط مفروض را دربردارد.

حل (درشمارهٔ ۳، جلد ۵) از کلیمووا:

لم: فرض کنید ناحیهٔ $S$ به‌مساحت $\sigma$ شامل نواحی $S_1, \ldots, S_n$ به‌مساحات $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ باشد به‌طوری‌که هرنقطه‌از $S$ حداکثر در $k$ تا از $S_i$ها قرار داشته باشد. دراین‌صورت،

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \leqslant k\sigma.$$

اثبات. فرض کنیم نواحی‌مجزای $T_j$، به‌مساحات $t_j$، نواحی حاصل از تقاطع $S_i$ها با یکدیگر و با $S$ باشند. از یک طرف داریم: $\sum t_j \leqslant \sigma$ و از طرف دیگر، $\sum \sigma_i \leqslant k \sum t_j$ و در نتیجه

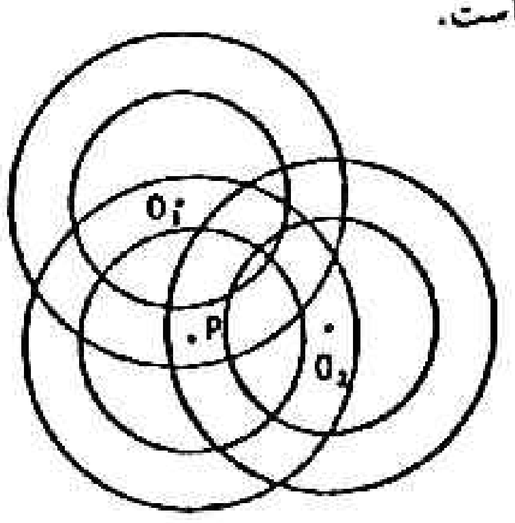
$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \leqslant k\sigma.$$

حال به‌سراغ مسأله می‌رویم. به‌مرکز هریک از ۶۵۰ نقطه و به‌شعاعهای ۲و۳ دایره‌هایی رسم می‌کنیم تا ۶۵۰ نوار مستدیر به وجودآید. روشن است که‌اجتماع تمام‌این‌نوارهای‌مستدیر درداخل دایره‌ای به‌شعاع $۱۹ = ۳ + ۱۶$ قرار دارد. حال نشان می‌دهیم که حداقل یک نقطه دراین دایره در حداقل ۱۰ تا ازنوارهای مستدیر فوق واقع است. فرض کنید هرنقطهٔ این دایره در داخل حداکثر ۹ نوار مستدیر واقع باشد. مساحت دایرهٔ به‌شعاع ۱۹ برابر $\sigma = ۳۶۱\pi$ و مساحت هریک از ۶۵۰ نوار مستدیر فوق برابر $\sigma_i = ۵\pi$ است. با توجه به‌فرض و لم فوق داریم

$$\sum \sigma_i = ۳۲۵۰\pi \leqslant ۹\sigma = ۳۲۴۹\pi$$

که یک تناقض است.

پس فرض کنیم $P$ نقطه‌ای باشدکه درداخل (حداقل) ۱۰ نوار مستدیر به‌مراکز $O_1, \ldots, O_{10}$ واقع است (به‌شکل زیر که در آن ۲ تا ازنوارهای مستدیر ده‌گانه نشان‌داده شده‌اند توجه‌کنید). اگر $p_i$ فاصلهٔ $P$ از $O_i$ باشد، روشن است که $۲ \leqslant p_i \leqslant ۳$. بنابراین نوار مستدیر به مرکز $P$ و به‌شعاع داخلی ۲ و شعاع خارجی ۳ (حداقل) شامل نقاط $O_1, \ldots, O_{10}$ می‌باشد. پس $P$ نقطهٔ مطلوب است.




**۳. مسألهٔ ۸۹ ـ ۳ (شمارهٔ ۱، جلد ۱۱).** طراح: هنری‌لولی[1]

فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ یک‌چهارتایی از اعداد صحیح نامنفی باشد. قرار می‌دهیم

$$D(A) = (|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, |a_4 - a_3|, |a_1 - a_4|).$$

به ازای هر چهارتایی غیرصفر داده شدهٔ $A$، دنبالهٔ $\{A_i\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_0 = A, \quad A_{i+1} = D(A_i) \quad (i \geqslant 0).$$

1. Henry Lulli

فرض کنید $h=h(A)$ عـدد صحیح نامنفی منحصر به‌فـردی باشد به‌طوری‌که $A_k=(s, s, s, s)$ که در آن $s=s(A)$ عددی طبیعی است. تمام مقادیر ممکن‌را برای دوتایی $(h, s)$ تعیین کنید.

حل (درشمارهٔ ۴، جلد ۱۱) از راسل هندل[1]:

یك شرط لازم و کافی برای اینکه دوتایی $(h, s)$ در شرط مسأله صادق باشد این است که $s$ به‌پیمانهٔ $2^{[(h-1)/3]}$ بـاصفر همنهشت باشد.

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر

$$\max(A)=\max(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

آنگاه برای هر ۴ تایی $A$ دادیم $\max(D^3(A))<\max(A)$، پس $h(A)$ تعریف می‌شود.

برای ۴ تایی داده شدهٔ $A$، قرار می‌دهیم

$$mA=(ma_1, \cdots, ma_4).$$

برای $B=(b_1, \cdots, b_4)$ فرض می‌کنیم $B\sim A$ هرگاه عـدد صحیح $c$ موجود باشد به‌طوری‌که $b_i=a_i+c$، $i=1, \cdots, 4$. اگر $B\sim mA$، روشن است که $h(B)=h(A)$، و در صورتی که $h(B)=h(A)\neq 0$، آنگاه $s(B)=ms(A)$.

اگر $h=0$، $A$ را برابر $(s, s, s, s)$ قرار می‌دهیم.

اگـر $h$ مثبت دلخواهی داده شده بـاشد، چهارتایی $A$ را طـوری می‌سازیـم کـه $h(A)=h$ و $s(A)=2^k$ کـه در آن $k=[(h-1)/3]$؛ با توجه به‌مطالبی که در بالا ذکر شد، همین کفایت می‌کند. دنبالهٔ تریوناتچی $t_0$، $t_1$، $t_2$، ... را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_0=0,\ t_1=1,\ t_2=1,\ t_i=t_{i-1}+t_{i-2}+t_{i-3}\quad (i\geq 3)$$

فرض می‌کنیم $j=h-3k$ و قرار می‌دهیم

$$B_k=(0, t_{2k}, t_{2k}+t_{2k+1}, t_{2k+3})\quad \text{و}\quad A=D^{3-j}(B_k).$$

محاسبهٔ سرراستی نشان می‌دهـد کـه بـرای $h\leq 3$ داریم $h(A)=h$ و $s(A)=1$. همچنین با کمی محاسبه روشن می‌شود که برای $k\geq 1$، $D^3(B_k)\sim 2B_{k-1}$. پس با استقراء به‌راحتی نتیجه می‌شود که $h(A)$ و $s(A)$ به‌همان صورت ادعا شده هستند.

به‌عکس، توجه کنید کـه اگر محاسبات را به‌پیمانهٔ ۲ انجام دهیم برای هر $A$، $B$ یی وجود دارد کـه $D^3(A)\sim 2B$. پس اگـر $h(A)>3$ آنگـاه $s(A)=2s(B)$ کـه در آن $h(B)=h(A)-3$ و سپس بـا استقراء، لـزوم شرط همنهشتی حاصل می‌گردد.

**۴. مسألهٔ ۸۸ ـ ۳ (شمارهٔ۱، جلد ۱۵). طراح: سیزیلسکی[2]**

فرض کنید $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ نگاشتی (نه لزوماً پیوسته) باشد کـه فاصلهٔ اقلیدسی واحد را حفظ می‌کند (یعنی اگـر $x$ و $y$ دونقطهٔ دلخـواه در $\mathbf{R}^2$ بـاشند به‌طوری کـه $d(x, y)=1$، آنگـاه $d(f(x), f(y))=1$). آیا $f$ باید یك ایزومتری [طولپایی] باشد؟

1. Russell Jay Hendel  2. Krzysztof Ciesielski



حل (درشمارهٔ ۲، جلد ۱۰) از اولریش اورلینگ[1]:

بله، $f$ بایـد یك ایزومتری باشد؛ این امر درفضای اقلیدسی بـا بعد بالاتر نیز صادق است. فرض کنیم $n\geq 2$ ثابت بـاشد و نیز برای تابع $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ داشته باشیم

$$D_f=\{r>0 \mid f \text{ فاصلهٔ } r \text{ را حفظ می‌کند}\}.$$

قرار می‌دهیم $\mathbf{F}=\{f \mid 1\in D_f\}$ و $\mathbf{D}=\cap\{D_f \mid f\in\mathbf{F}\}$. باید نشان دهیم که $\mathbf{D}=\mathbf{R}_+$.

گام اول: فرض کنیم $r, s\in\mathbf{D}$ و $f\in\mathbf{F}$، ونیز فرض کنیم $f^{(r)}$ به‌صورت $f^{(r)}(x)=r^{-1}f(rx)$ تعریف شده باشد. آنگاه $1\in r^{-1}D_f=D_{f^{(r)}}$ پس $f^{(r)}\in\mathbf{F}$. بنابراین $s\in D_{f^{(r)}}$ پس $rs\in D_f$ و در نتیجـه $rs\in\mathbf{D}$. بنابراین $\mathbf{D}$ یك‌نیمگروه ضربی است. ازاین به‌بعد فرض می‌کنیم $f\in\mathbf{F}$.

گام دوم: فضای متریك و خطی $\mathbf{R}^n$ با ابرصفحهٔ

$$x_1+\cdots+x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

در $\mathbf{R}^{n+1}$ یکریخت است. نقاط

$$p_i=\left(0, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0\right)$$

$i=1, 2, \cdots, n+1$، بـا درایـهٔ غیرصفر در مکان $i$ام، و نقطهٔ $y=(\sqrt{2}/n, \cdots, \sqrt{2}/n, -1/\sqrt{2})$ ازاین ابرصفحه همگی دو به‌دو به‌فاصلهٔ واحد ازیکدیگر قرار دارند مگر درحالتی که $x=p_{n+1}$، که در آن حالت،

$$d(x, y)=\sqrt{2+\frac{2}{n}}=a>1.$$

حال اگر $x$ و $y$ دونقطهٔ دلخواه در $\mathbf{R}^n$ باشندکه $d(x, y)=a$، نقاط $p_1$، ...، $p_n$ در $\mathbf{R}^n$ موجودند به‌طوری‌که

$$d(x, p_i)=d(y, p_i)=1=d(p_i, p_j)$$

$1\leq i<j\leq n$. از رابطـهٔ متناظر در مورد نقاط تصویر نتیجه می‌شودکه مقدار $d(f(x), f(y))$ برابر $0$ یا $a$ است. نقطهٔ $z$ را در $\mathbf{R}^n$ طوری اختیارمی‌کنیم که $d(x,z)=a$ و $d(y,z)=1$.

سپس دوباره نتیجه می‌شود که مقدار $d(f(x), f(z))$ برابر $0$ یـا $a$ است و $d(f(y), f(z))=1$. پس $f(x)\neq f(y)$ و درنتیجه $d(f(x), f(y))=a$. بنابراین $a\in\mathbf{D}>1$.

گام سوم: اگر $n=2$، فرض می‌کنیم $x, y$ نقاطی در $\mathbf{R}^n$ باشند به‌طوری کـه $d(x, y)=1/3=b$. دراین صورت نقاط $u$، $v$، $w$، $p$ و $q$ در $\mathbf{R}^n$ وجود دارند به‌طوری که

$$d(u, w)=d(v, w)=3=a^2\in\mathbf{D}$$

و

1. Ulrich Everling

$$d(p,u)=d(x,p)=d(w,x)=d(u,v)=d(v,q)$$
$$=d(q,y)=d(y,w)=۱۰.$$

از رابطهٔ متناظر درمورد نقاط تصویر نتیجه می‌شود

$$d(f(x),f(y))=b.$$

اگر $n>۲$، $n$ نقطه را در $\mathbf{R}^n$ درنظر می‌گیریم که دو به‌دو به‌فاصلهٔ $a$ واحد از یکدیگر باشند. فاصلهٔ هریك از این نقاط از مرکز ثقل آنها برابر $\sqrt{(n^۲-۱)/n^۲}$ است؛ این مطلب را با توجه به نقاط $p_۱$، ...، $p_n$ در گام دوم می‌توان بررسی کرد. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ متمایز که به‌فاصلهٔ واحد از هریك ازاین $n$ نقطه واقع شده‌باشند برابر $۲\sqrt{۱-(n^۲-۱)/n^۲}=۲/n=b<۱$ است. مشابه گام دوم نتیجه می‌گیریم که $b\in\mathbf{D}$.

بنابراین درهردوحالت، $۱>b\in\mathbf{D}$، پس $\mathbf{D}$ شامل عناصر به‌دلخواه کوچك است.

گام چهارم: فرض می‌کنیم $۰<c<۱$، $x,y\in\mathbf{R}^n$ و $d(x,y)=c$. برای $\epsilon>۰$ داده شده، $r\in\mathbf{D}$ وجود دارد به‌طوری که $r<\min(\epsilon,c/۲,(۱-c)/۲)$. گیریم $z=x+(y-x)/c$. تصور کنیم $j$ و $k$ کوچکترین اعداد صحیحی باشند که $c\leqslant jr$ و $c\leqslant kr-۱$. در این صورت، نقاط $p_۰$، ...، $p_{j+k}$ در $\mathbf{R}^n$ وجود دارند به‌طوری که $p_۰=x$، $p_j=y$، $p_{j+k}=z$، $d(p_{i-۱},p_i)=r$ برای $i=۱,\dots,j+k$ (و $p_i$ ها روی پاره‌خط واصل بین $x$ و $z$ واقع‌اند مگر احتمالا درحالت $i=j\pm۱$). رابطهٔ متناظر درمورد نقاط تصویر نتیجه می‌دهد که $d(f(x),f(y))\leqslant jr$، $d(f(y),f(z))\leqslant kr$، $d(f(x),f(z))=۱$ و نتیجه می‌گیریم

$$c-r<۱-kr\leqslant d(f(x),f(z))-d(f(y),f(z))$$
$$\leqslant d(f(x),f(y))\leqslant jr<c+r$$

که نامساویهای انتهایی‌رابطهٔ فوق از مینیمال‌بودن $k$ و $j$ نتیجه می‌شوند. بنابراین $|d(f(x),f(y))-c|<r<\epsilon$. ولی $\epsilon$ را دلخواه اختیار کرده بودیم پس $d(f(x),f(y))=c$. بنابراین $c\in\mathbf{D}$.

گام پنجم: با توجه به گامهای دوم و چهارم، نیمگروه ضربی $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}_+$ شامل بازهٔ $(۰,۱)$ و عدد $a>۱$ است. بنابراین $\mathbf{D}=\mathbf{R}_+$، و این همان است که می‌خواستیم.

**۵. مسألهٔ ۸۸-۹ (شمارهٔ ۳، جلد ۱۵)**. طراح: پیتر لوفلر[1]. فرض کنید $f$ یك تابع تام باشد به‌طوری که $f(\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$. آیا $f$ یك چند جمله‌ای با ضرایب گویاست؟

حل (درشمارهٔ ۲، جلد ۱۱) از رابرت ایزرایل[2]:

پاسخ منفی است. حتی اگر تمام مشتقات $f$، $f^{(n)}$ها، در رابطهٔ $f^{(n)}(\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$ صدق کنند، بازهم پاسخ منفی است.

فرض می‌کنیم $S$ یك زیرمجموعهٔ شمارای $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ باشد که نقطهٔ حدی در $\mathbf{C}$ نداشته باشد. تابع تام $f$ را طوری می‌سازیم که به‌ازای هر $n\geqslant۰$، $f^{(n)}(\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$، به‌ازای هر $s$ در $S$، $f(s)=۰$، و $f(۰)\neq۰$. چون $f$ دارای تعداد نامتناهی صفر است ولی تابع ثابت صفر نیست، در نتیجه $f$ نمی‌تواند یك چند جمله‌ای باشد.

فرض می‌کنیم $(r_i)$، $i=۱,۲,\dots$، دنباله‌ای‌ازاعداد گویا باشدکه در آن هرعدد گویا به‌تعدادنامتناهی‌دفعه‌ظاهر شده‌باشد. برای هرعددگویای $r$ وهرعدد صحیح مثبت $i$ فرض‌می‌کنیم $n(r,i)$تعداد دفعاتی باشدکه $r$ در $(r_۱,\dots,r_i)$ ظاهرشده‌است. گیریم $f_۰$ یك تابع تام باشد که مقدار آن در تمام نقاط $S$ صفر بوده، $f_۰(۰)=۲$، و $f_۰(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$. قرارمی‌دهیم $m(j)=n(r_j,j)$، برای $j\geqslant۱$. همچنین برای $j\geqslant۱$ فرض می‌کنیم $f_j$ تابع‌نامی باشدکه در $r_j$ صفری دقیقاً از مرتبهٔ $m(j)-۱$ داشته باشد (این یعنی اگر $m(j)=۱$ آنگاه $f$ در $r_j$ صفر نباشد.)، در $r_i$، به‌ازای $i<j\leqslant۱$، صفری حداقل از مرتبهٔ $m(i)$ داشته باشد، صفری درهرنقطه $S$ داشته باشد، و $f_j(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$. (بجز این‌شرط آخری، این همان شیوهٔ استاندارد ساختن $f$ با استفاده ازعاملهای مقدماتی است. دراین مورد، چون صفرها حقیقی هستند، به‌راحتی می‌توان تحقیق‌کرد که $f_j(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$.)

حال دنبالهٔ $(t_i)$، $i=۱,۲,\dots$ از اعداد حقیقی را به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_۰=۱ \qquad (۱)$$
$$\sum_{i=۰}^{j} t_i f_i^{(m(j)-۱)}(r_j)\in\mathbf{Q} \qquad (۲)$$
$$|t_j f_j(z)|<۲^{-j} \quad |z|<j. \qquad (۳)$$

فرض‌کنیم $t_i$، برای $i<j$ داده شده‌باشد. چون به‌ازای هر $n$، $f_i^{(n)}(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$ و $f_i^{(m(j)-۱)}(r_j)\neq۰$، پس اعداد به‌دلخواه کوچك $t_j$ وجود دارند که در (۲) صدق می‌کنند و بنابراین، تعریف فوق قابل قبول است.

تابع مطلوب $f$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f=\sum_{j=۰}^{\infty} t_j f_j$$

با توجه به (۳)، این‌سری روی‌مجموعه‌های‌فشرده به‌طوریکنواخت به‌یك تابع تام همگراست. چون تمام $f_j$ها روی $S$ صفر هستند، پس $f$ نیز چنین است. با توجه به‌اینکه $f_۰(۰)=۲$ و $|t_j f_j(۰)|<۲^{-j}$ برای $j>۰$، پس $f(۰)\neq۰$. به‌ازای هر $r\in\mathbf{Q}$ و $n\geqslant۰$، $j$ یی وجود دارد به‌طوری که $r=r_j$ و $n(r,j)=m(j)=n+۱$. پس برای $k>j$، $f_k$ در $r$ صفری حداقل از مرتبهٔ $n+۱$ دارد، بنابراین با توجه به (۲)، $\sum_{i=۰}^{k} t_i f_i^{(n)}(r)=f^{(n)}(r)\in\mathbf{Q}$، و این همان‌است که می‌خواستیم.

روشن است که ایدهٔ اصلی این نتیجه، شمارا بودن $\mathbf{Q}$ است. به‌راحتی می‌توان نشان دادکه هرگاه $A\subset\mathbf{C}$ ناشمارا باشد، $f$ در یك همسایگی همبند $A$ تحلیلی باشدو برای هر $a\in A$، $f(a)\in\mathbf{Q}(a)$، آنگاه $f$ یك نگاشت گویا باضرایب گویاست.

1. Peter Löffler  2. Robert B. Israel

نشر ریاضی، سال ۳، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۶۹

# یك درس چندموضوعی در ریاضیات•

ایب شنیتسر*
ترجمهٔ سیامك کاظمی

آنچه درزیر می‌آید، شرح مختصری است ازدرسی که من در یك برنامهٔ آموزشی در بخش ریاضی دانشگاه یورك (کانادا) عرضه کردم؛ این برنامه در وهلهٔ اول برای آموزش معلمان درنظر گرفته شده بود.

این درس شامل چند مبحث مستقل است که هریك به بررسی یك مسأله یاایدهٔ مهم ریاضی می‌پردازد. گرچه در هرمبحث شرحی ازسیرتاریخی ایده‌های مربوطه می‌آید، این درس یك‌درس‌تاریخ ریاضی نیست بلکه درسی چند موضوعی‌است وهدفش، قانع کردن شاگردان است در این مورد که ریاضیات رشته‌ای‌است پر معنی، برخی ازمسائل آن بسیار عمیق‌اند، وسیر تکامل بعضی از ایده‌های آن فصل هیجان‌انگیزی در تاریخ تلاشهای فکری است.

ملاك گزینش موضوعها، اهمیت ریاضی و فرهنگی آنها و آسان‌بودنشان‌ازلحاظ فنی‌است. گرچه سعی می‌کنم مطالب‌قابل‌فهم باشد، حداقلی ازجزئیات فنی را نیز که بدون آنها درس تبدیل‌به یك صحبت‌کم محتوی می‌شود ذکرمی‌کنم، ولی این جزئیات فنی صرفاً وسیله‌اند، وحاصل هر بحث، درك ایده‌ها واهمیت آنهاست.

**نه موضوعها ازپیش تعیین می‌شوند و نه شیوهٔ پرداختن به آنها شاگردان را تشویق می‌کنم که موضوعاتی پیشنهادکنند وشرحی‌از آنها بنویسند. این نوشته‌ها نباید به‌سبك مقالات دایرةالمعارفی باشند بلکه باید مطالب را به‌شیوه‌ای‌که درکلاس درس عرضه می‌شود، توضیح دهند.**

**درسال ۱۹۸۲–۱۹۸۳ مباحث اصلی درس اینها بودند:**

۱. تکوین وتکامل‌دستگاه اعداد.(بحث مربوط به‌این‌موضوع‌شامل مقایسهٔ‌کارهای ائودوکسوس و ددکیند و بررسی تغییراساسی دیدگاه دراین زمینه بود.)
۲. روش ارشمیدس.
۳. برخی از مسأله‌های ترسیم یونانی و راه‌حلهای جبری جدید آنها.
۴. قوانین‌کپلر و قانون‌گرانش عام نیوتن.
۵. ساعت چرخزادی هویگنس. (منظور ازاین بحث، نشان دادن قدرت‌حساب‌دیفرانسیل و انتگرال و اهمیت مفهوم خمیدگی به زبان ساده است.)
۶. مینیممها و ماکسیممها از مسألهٔ برابرمحیطی تاحساب وردشها.
۷. کشف هندسهٔ هذلولوی وپیامدهای آن.
۸. هندسه، هندسه‌ها، وبرنامهٔ ارلانگن‌کلاین.
۹. سری فوریه ــ پیدایش آن و تأثیرش برریاضیات.
۱۰. مسألهٔ سوم هیلبرت. (امکان‌ناپذیری نظریهٔ مقدماتی در بارهٔ حجم.)
۱۱. عدم قطعیت به‌منزلهٔ پیشرفت (نظریاتی با الهام از برخی کارهای گودل).

این مباحث را درزیر با تفصیل بیشتری شرح می‌دهم. توضیحاتی که می‌دهم، خلاصهٔ نکات اصلی چندین مبحث است. مراجع اندك‌اند و، در بیشتر موارد، مقدماتی. [در ترجمهٔ فارسی، مراجع قسمتهای مختلف مقاله یکجا درانتهای مقاله آمده است.]

## ۱. تکوین وتکامل دستگاه اعداد

**موضوع ۱. پیدایش مفاهیم عددی یونانی** تانقریباً ۵۰۰ سال‌قبل ازمیلاد، فیثاغورسی‌ها تصور می‌کردندکه همهٔ مقادیر متوافق‌اند. معنی این حرف این است که به‌نظر آنها، اعداد صحیح (مثبت) ونسبتهای آنها ــ به‌اصطلاح ما، اعداد گویا(ی مثبت) ــ برای همهٔ

بررسیهای کمّی (ازجمله، هندسهٔ‌متری) کفایت می‌کرد. کشف مقادیر ناسازگار باعث فروریختن نظریهٔ اولیه درباب تناسبها، پذیرش این دیدگاه‌که اعداد برای مقاصد هندسه کافی نیستند، وپیدایش جبر هندسی شد(ترسیم باخط‌کش وپرگار، وسیلهٔ حل‌هندسی‌معادله‌های جبری بود).

نظریهٔ تناسبها را ائودوکسوس، یکی ازبرجسته‌ترین‌متفکران تمام اعصار، (درحدود ۳۵۰ قبل‌ازمیلاد) بازسازی‌کرد. پس‌از حدود دوهزار سال، نظریهٔ تناسبهای اُودوکسوس مبنای نظریهٔ ددکیند درباب اعداد حقیقی (دههٔ ۱۸۷۰) قرارگرفت. تقریباً می‌شودگفت‌که نظریهٔ تناسبهای ائودوکسوس متناظراست بانظریهٔ اعداد حقیقی (مثبت) تحت عمل ضرب.

**موضوع۲. ددوستگاه عددی‌گارا** اقبال عمومی به دستگاه اعشاری در اروپا (درحدود ۱۶۰۰) تا حد زیادی به‌خاطر حمایتی بود که ویتا و استوین ازآن می‌کردند.

دستگاه اعشاری جانشین دستگاه ستّینی شد که ابتدا بابلیها و سپس ریاضیدانان یونانی، اسلامی، و اروپای غربی آن‌را به‌کارمی‌بردند. هردودستگاه، دستگاههای مکانی هستند و پایهٔ آنها به‌ترتیب، ۱۰ و ۶۰ است.

گذار (تدریجی) ازنسبتها به‌اعداد، گرچه تحول مطلوبی بوده است، نشان دهندهٔ‌عقب‌نشینی‌ازمعیارهای اولیه درمورد دقت‌است.

**موضوع ۳. اعداد منفی ومختلط** درطول قرنها، علی‌رغم پذیرش آشکار اعداد منفی و مختلط و استفاده ازآنها، «مدلها»ی مناسبی برای این اعدادواعمال روی‌آنها وجود نداشت. به‌همین دلیل، دکارت‌توجه خودرا به‌ربع مثبت صفحه محدود می‌کرد. «بیشتر مؤلفان [کتابهای درسی قرن هجدهم] لازم می‌دیدند وقت زیادی را صرف بحث درمورد قوانین حاکم برضرب اعداد منفی‌کنند و بعضی ازآنهاامکان ضرب دوعددمنفی‌را قطعاً رد می‌کردند»[بویر، تاریخ ریاضیات، ص ۵۰۱]. لایب‌نیتس اعداد مختلط را «اشیائی دوجنبه‌ای که در نیمه راه وجود و عدم وجود ایستاده اند» تصور می‌کرد. کارگاوس که اعداد مختلط را با نقاط صفحه یکی گرفت، راه‌را برای پذیرش عام این اعداد هموارکرد. (گرچه بسیاری‌ازریاضیدانان‌قرن‌هجدهم اعداد مختلط رابسیار به‌کار می‌بردند و حتی از $a+b\sqrt{-1}$ به‌نقطه‌ای به‌مختصات $a$ و $b$ و به‌عکس گذرمی‌کردند، اینهمانی لازم را قائل نمی‌شدند و اعداد مختلط را به‌صورت‌هندسی‌تعبیرنمی‌کردند[جلددوم تاریخ ریاضیات، ص ۱۹۷۲،۵۶ (روسی)، ویراستهٔ آ.پ. یوشکویچ]. این کار را اولین‌بار وسل انجام داد ولی مقاله‌ای‌که اودراین زمینه نوشت تازه در اواخرقرن هجدهم مورد شناسایی عام قرار گرفت. آرگان ودیگران در اوایل قرن نوزدهم این کاررا با موفقیت و ثمرات بیشتری انجام دادند.

**موضوع ۴. توصیف دقیق دستگاه اعداد در قرن نوزدهم** تعریف همیلتن از اعداد مختلط به‌صورت جفتهای مرتبی ازاعداد حقیقی (با قواعد مناسبی برای جمع وضرب) در۱۸۳۷ ارائه شد. تعریفهای ددکیند وکانتور از اعداد حقیقی برحسب اعدادگویا، به‌ترتیب، در ۱۸۷۲ و۱۸۷۱ عرضه شد. پئانو در۱۸۸۹یک‌مبنای اصل موضوعی برای اعداد طبیعی ــ وبنابراین برای دستگاه‌اعداد و نیز آنالیز ــ به‌دست داد. ولی معرفی عملیات روی اعدادگویا به صورت جفتهایی از اعداد صحیح زودتراز۱۸۹۴ انجام نشد. این کاررا تأخیری کرد.

باید خاطرنشان‌کردکه توصیف «منطقی» دستگاه اعداد به صورتی‌که، مثلا، در مبانی آنالیز لانداو عرضه شده است تقریباً درجهت عکس روند تاریخی آن است.

## ۲. روش ارشمیدس

ریاضیدانان قرنهای‌هفدهم‌وهجدهم به‌شدت به‌روش تقسیم‌ناپذیرها اتکا داشتند بدون آنکه ازقدمت آن آگاه باشند.

کشف رسالهٔ روش در۱۹۰۶ به‌وسیلهٔ هایبرگ نشان دادکه‌دقت، تنها مشخصهٔ ریاضیات‌کلاسیک یونانی نیست. ارشمیدس درسال ۲۵۰ قبل‌ازمیلاد، استدلال فیزیکی وروش‌تقسیم‌ناپذیرها را برای رسیدن به‌نتایجی دربارهٔ مساحت وحجم اشکالی با مرزهای‌خمیده به‌کاربرد واین‌کاربرد درخشان، نشان دهندهٔ تشابه رهیافت ذهنهای خلاقی است‌که ــ دراین‌مورد ــ ۲۰ قرن میانشان فاصله‌بوده‌است.

مراجع‌اصلی: [۱] وبخشهای ۱۳ و ۱۴ از[۱۵]

## ۳. برخی ازمسأله‌های ترسیم‌یونانی و راه‌حلهای جبری جدید آنها

یونانیان می‌دانستندکه اگربه‌جای خط و دایره از خم استفاده شود، تضعیف مکعب وتثلیث زاویه امکان‌پذیر است ولی فقط جبر جدید بودکه توانست نکات عمیقی راکه در این مسائل وبسیاری دیگر ازمسائل ترسیم نهفته است، روشن سازد.

مسألهٔ زیررا درنظر بگیرید: نقاط $A(0,0)$ و $B(1,0)$ مفروض‌اند. (مختصات) نقاطی چون $P(x,y)$ راکه بتوان‌آنها را با استفاده از $A$ و $B$ وباترسیم به‌کمک خط‌کش و پرگار به‌دست آورد، مشخص کنید.

حل: تمام اعداد قابل رسم، یعنی هر $x$ و $y$ درهر $P(x,y)$ که قابل رسم باشد، باید متعلق به هیأتی باشندکه با دنبالهٔ متناهی تودرتویی ازتوسیعهای‌درجهٔ دوم‌متوالی به‌هیأت $Q$ ازاعدادگویا، وبنابراین به‌یک‌توسیع درجهٔ $2^n$ از $Q$، مرتبط باشد. پس‌تضعیف مکعب معادل است با ترسیم$\sqrt[3]{2}$، تثلیث یک زاویهٔ $60°$ با ترسیم $\cos 20°$، و تربیع یک دایره باترسیم $\sqrt{\pi}$. چون$\sqrt[3]{2}$ و $\cos 20°$ توسیعهایی درجهٔ سوم از $Q$ تولید می‌کنند و$\sqrt{\pi}$ عددی متعالی است، نتیجهٔ بالا به‌این معنی است که به‌کمک خط‌کش وپرگار نمی‌توان مکعب را تضعیف، زاویه‌های دلخواه را تثلیث، یادایره را تربیع کرد.

این‌اثبات، به‌طرزقاطعی نشان می‌دهدکه حداقل درریاضیات، حل یک مسألهٔ «ساده» ممکن است به‌چنان ابزارهای پیشرفته‌ای نیازمند باشدکه زمان بین صورتبندی مسأله وپیداشدن راه‌حل‌آن، ازمرتبهٔ چند هزارسال باشد.

مرجع‌اصلی: [۵]

## ۴. قوانین کپلر و قانون گرانش عام نیوتن

نیوتن نشان داد که قوانین توصیفی (سینماتیک) کپلر و نیز قانون گالیله دربارهٔ سقوط اجسام را می‌توان از یک قانون واحد که متضمن یک «علت» واحد (جاذبه) باشد، استخراج کرد.

توضیح: از دو قانون اول کپلر نتیجه می‌شود که سیارهٔ P شتابی دارد که جهتش متوجه خورشید S است و مقدار این شتاب $\gamma_{P,S}/r_{PS}^2$ است که در آن، $r_{PS}$ فاصلهٔ بین P و S، و $\gamma_{P,S}$ (ثابت) برابر است با $4\pi^2 a_P^3/T_P^2$ و در اینجا نیز $a_P$ نصف قطر بزرگ مدار P، و $T_P$ دورهٔ گردش P است. پس تا اینجا به‌نظر می‌رسد که $\gamma_{P,S}$ به S و به P بستگی دارد.

قانون سوم کپلر می‌گوید که $a_P^3/T_P^2$ برای تمام سیارات منظومهٔ شمسی ثابت است. از این‌رو، $\gamma_{P,S}/r_{PS}^2 = \gamma_S/r_{PS}^2$ یعنی $\gamma_{P,S} = \gamma_S$ برای تمام سیارات منظومهٔ شمسی یکی است. این اولین گام نیوتن در جهت عمومیت دادن به قانونش بود.

کار درخشان دیگر نیوتن، ارتباط دادن دریافت گالیله از سقوط اجسام با حرکت سیاره‌ای بود. او با استفاده از اطلاعاتی دربارهٔ حرکت ماه به‌دور زمین، و با در نظر گرفتن زمین به‌صورت مرکز «منظومهٔ سیاره‌ای»اش، $\gamma$ را در مورد زمین حساب کرد. وی استدلال کرد که اگر بتوان حرکت یک جسم در حال سقوط روی زمین را به‌صورت حالت خاصی از حرکت سیاره‌ای در نظر گرفت، آنگاه $g = \text{زمین}^2 r/\text{زمین}\gamma$، که در آن زمین $r$ عبارت است از شعاع زمین و $g$ ثابت شتاب گرانشی روی سطح زمین است. در واقع، همین طور است! پس ماه و سنگ در حال سقوط، دو جسم در حال سقوط‌اند که از یک قانون گرانش عام پیروی می‌کنند.

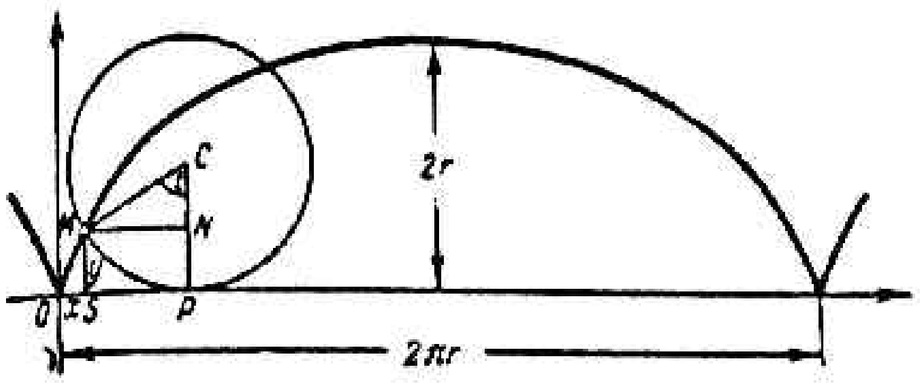
مرجع اصلی: بخشهای ۲۰ تا ۴۲ از [۱۵]

## ۵. ساعت چرخزادی هویگنس

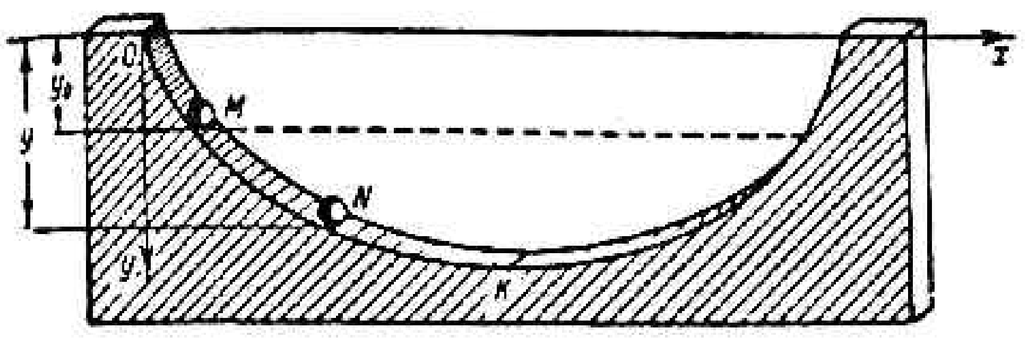
گالیله ویژگی همزمانی (تقریبی) آونگ را حدس زد ولی او برای اندازه‌گیری زمان به‌ساعتهای آبی متکی بود. اولین ساعت آونگی را ریاضیدان و فیزیکدان بزرگ، هویگنس، در ۱۶۵۶ اختراع کرد. هویگنس که از دقت ساعت آونگی راضی نبود، سعی کرد آونگی طرح کند که دورهٔ تناوب آن اکیداً مستقل از دامنه باشد. مسیر وزنهٔ چنین آونگی باید خم همزمانی می‌بود. هویگنس ثابت کرد که چرخزاد یک خم همزمانی است و گستردهٔ آن یک چرخزاد قابل انطباق با آن است. این بصیرتها، مبنایی نظری برای ساعتهایی که در حوالی ۱۷۰۰ ساخته شدند، فراهم کردند. در این ساعتها موانعی به‌شکل چرخزاد در دو طرف مسیر وزنهٔ آونگ تعبیه می‌شد که باعث می‌شد مسیر وزنه نیز به‌شکل چرخزاد باشد.

گرچه ارزش عملی بصیرتهای هویگنس ناچیز از آب درآمد (اصطکاک آونگ و مقاومت هوا مزیت استفاده از آونگ چرخزادی به‌جای آونگ معمولی را خنثی می‌کرد)، ولی استدلال او در اثبات اینکه چرخزاد تنها خم همزمانی است، «فراتر از حساب دیفرانسیل و انتگرال است».

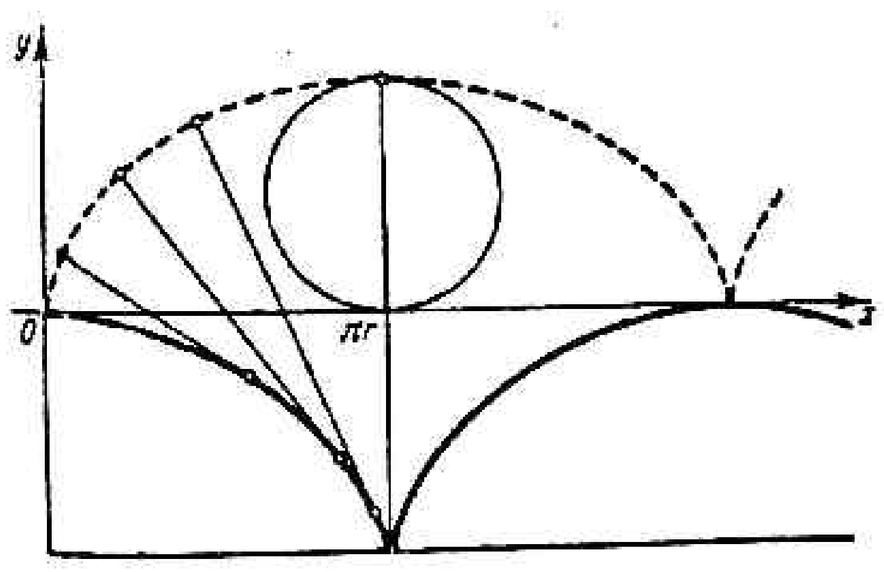
مراجع اصلی: [۱۲]، بخش ۳۷ از [۱۵]، [۱۸]، [۲]



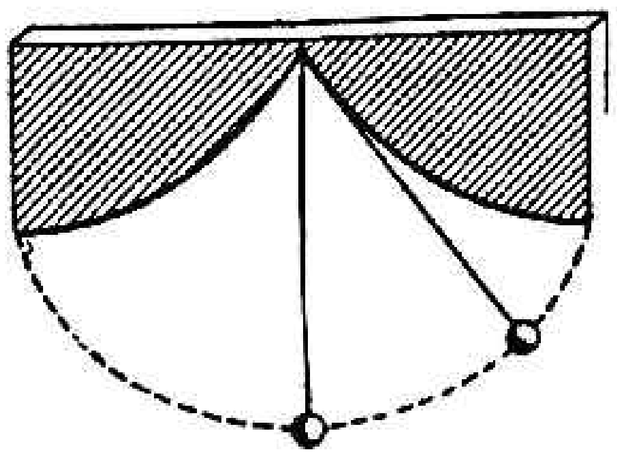

طرز تشکیل چرخزاد




«صورت اولیهٔ» ساعت چرخزادی




گستردهٔ چرخزاد، چرخزاد است



«صورت نهایی» ساعت چرخزادی

## ۶. مینیمم و ماکسیمم. از مسالهٔ برابر محیطی تا حساب وردشها

مسائل مربوط به مینیمم و ماکسیمم سابقه‌ای بسیار طولانی دارند. مسالهٔ برابر محیطی، یعنی این ادعا که از میان خمهای سادهٔ بسته با

محیط مفروض، دایره بزرگترین مساحت را دربرمی‌گیرد، ریشه درروزگاربستان‌دارد. اقلیدس حالت خاص این مسأله‌را درمورد مستطیلها بررسی کرد و ثابت کرد که در میان همهٔ مستطیلهایی که محیط معینی دارند، مربع دارای بزرگترین مساحت است.

به‌زبان آنالیز،هردومسأله مربوط‌اند به‌جستجوی مقادیرمانای تابعکهای (یعنی توابع توابع) عددی‌مقدار، ولی مسألهٔ دوم را می‌توان ساده‌کرد وبه‌جستجوبرای یافتن مقادیر تابعی از یك متغیر عددی تحویل نمود.

فرما (قرن هفدهم) مسألهٔ اقلیدس را به صورتی آنالیزی در نظر گرفت که درآن، مساحت متغیر $A$ با عبارت زیر معین می‌شود

$$A(x)=x(a-x)$$

در اینجا، $a$ نصف محیط معین هر مستطیل‌است. اونقاط ماناروی خم $(x,A(x))$را به‌نقاطی‌که درآنها مماس‌افقی‌است، یعنی نقاطی که درآنها $A'(x)=0$، وصل کرد.

اویلر(قرن هجدهم) مسألهٔ‌کلی مقادیر مانای تابعکهایی را که به‌وسیلهٔ انتگرالها معین می‌شوند، صورتبندی کرد و تظیر شرط $A'(x)=0$ ـ به‌اصطلاح معادلهٔ دیفرانسیل اویلر‌که باید جوابی ازیك «مسألهٔ‌وردشی» درآن صدق کند ـ را به‌دست آورد.مبحث آنالیز مربوطه، به‌نام حساب وردشها معروف است.

برای اینکه‌کار بزرگ اویلرقابل فهم‌شود، چند مسألهٔ‌نمونه‌وار حساب وردشها را بیان می‌کنیم.

برای یافتن کوتاهترین خمی که $(x_1,y_1)$ و$(x_2,y_2)$را به‌هم وصل‌کند، باید انتگرال طول قوس

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

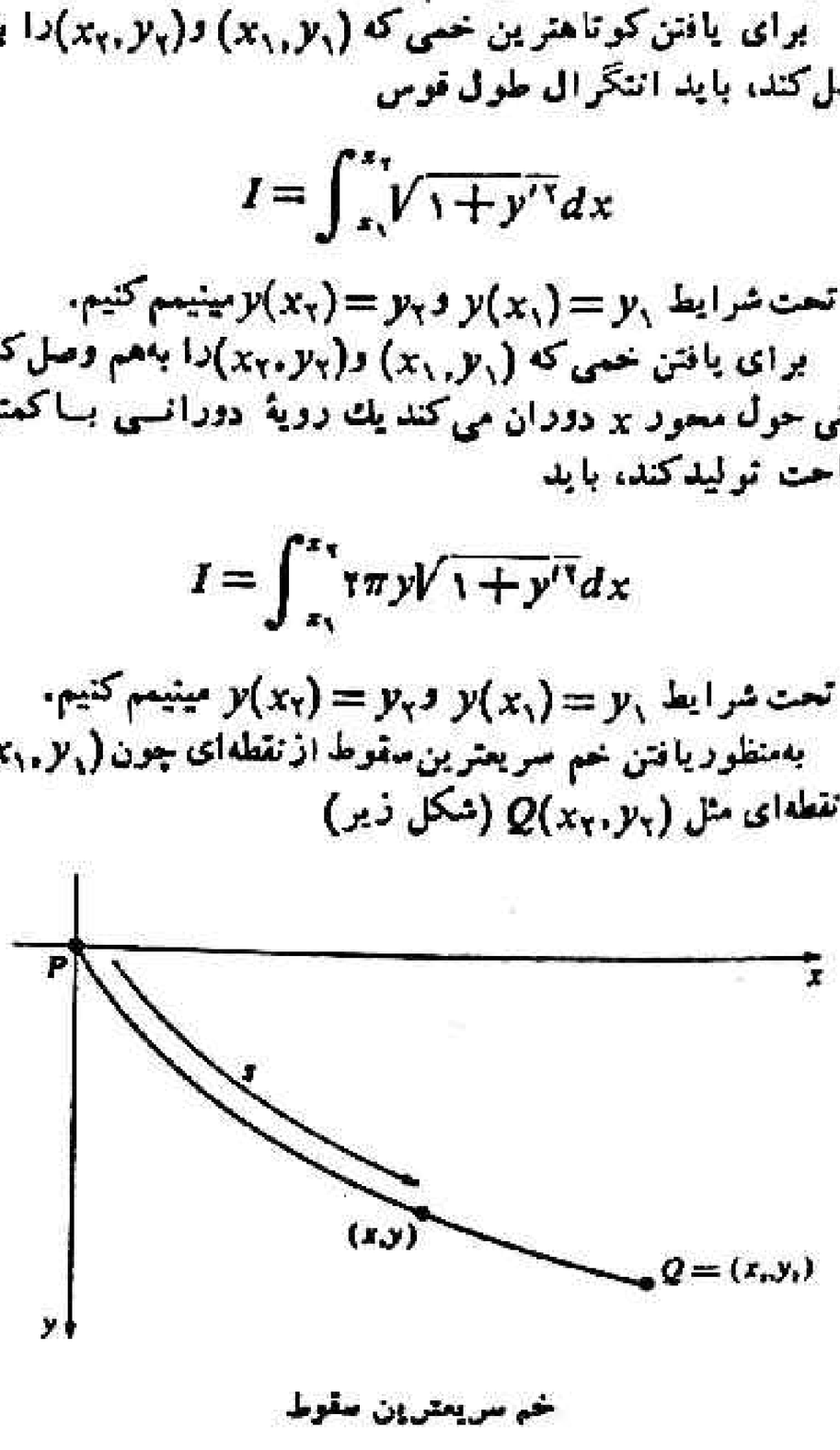
را تحت شرایط $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$ مینیمم کنیم.

برای یافتن خمی که $(x_1,y_1)$ و$(x_2,y_2)$را به‌هم وصل کند و وقتی حول محور $x$ دوران می‌کند یك رویهٔ دورانی باکمترین مساحت تولیدکند، باید

$$I=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

را تحت شرایط $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$ مینیمم کنیم.

به‌منظوریافتن خم سریعترین‌سقوط ازنقطه‌ای چون $P(x_1,y_1)$ تا نقطه‌ای مثل $Q(x_2,y_2)$ (شکل زیر)




خم سریعترین سقوط

باید

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

را تحت شرایط $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$ مینیمم کنیم.

برای حل مسألهٔ برابرمحیطی باید انتگرال

$$A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

را تحت این شرط که

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

ثابت باشد، مینیمم کنیم.

به منظور یافتن ژئودزیکهای روی یك رویه چون $G(x,y,z)=0$ باید انتگرال طول قوس

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2}\,dt$$

را تحت شرط $G(x,y,z)=0$ مینیمم کنیم.

در سه مثال اول، مسأله عبارت است از یافتن مقادیر مانای $y$ از

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')=0.$$

معلوم می‌شودکه این گونه مقادیر $y$ باید درمعادلهٔ دیفرانسیل اویلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

صدق‌کند. (این شرط، نظیرشرط $d/dx[g(x)]=0$ است که یك ورودی $x$ که به ازای آن تابعی چون $g$ مقدار مانایی دارد باید درآن شرط صدق‌کند). درسه مثال باقیمانده، مقادیر مانا باید درصورتهای مناسب دیگری از این معادله صدق‌کنند.

«حساب وردشها درطول بیش‌ازدوقرن یکی ازشاخه‌های مهم آنالیز بوده است. این مبحث، ابزاری است با قدرت بسیار، که می‌توان آن را درمورد مسائل بسیار متنوعی در ریاضیات محض به‌کاربرد. همچنین با استفاده ازآن می‌توان اصول بنیادی فیزیك ریاضی را با حداکثر سادگی و ظرافت بیان‌کرد.» (سیمونز، صفحهٔ ۳۵۳).

یکی ازمهمترین مصداقهای جملهٔ اخیر، اصل کمترین کنش همیلتن است که معادل وردشی قانون دوم حرکت نیوتن است (سیمونز، صفحهٔ ۳۷۷). این قانون، دقیقاً معادلهٔ دیفرانسیل اویلر برای کنش $A=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt$ است که درآن، $T$ و $V$، به ترتیب، انرژیهای جنبشی و پتانسیل یك ذرهٔ درحال حرکت در یك میدان نیروی پایستار است. در گفتهٔ زیر، اهمیت زیاد این اصل بیان می‌شود.

از اصل همیلتن می‌توان قوانین بنیادی الکتریسته و مغناطیس، نظریهٔ کوانتومی، و نسبیت را به‌دست آورد. تأثیرش آن قدر عمیق وگسترده است که بسیاری از دانشمندان آن را نیرومندترین اصل در فیزیك ریاضی به‌شمار می‌آورند و در قلهٔ علوم طبیعی جای می‌دهند، ماکس پلانك، بنیانگذار نظریهٔ کوانتومی، این نظرگاه را به این صورت بیان کرد، «بالاترین هدفی که علوم طبیعی مشتاقانه به دنبال آن است، این است که تمام پدیده‌های طبیعی که مشاهده شده‌اند یا قرار است مشاهده شوند، با یك اصل ساده بیان شوند ... درمیان قوانین کم و بیش کلی که دستاوردهای علوم طبیعی را درطول قرنهای گذشته مشخص می‌کنند، اصل کمترین واکنش شاید اصلی باشد که، از لحاظ صورت و محتوا، بتواند مدعی نزدیك‌شدن به این هدف ایده‌آل و نهایی تحقیقات نظری باشد.»
(سیمونز، صص ۳۷۹ـ۳۸۵)

مرجع اصلی: [۱۳]

## ۷. سری فوریه ـ پیدایش آن وتأثیرش بر ریاضیات

دانیل برنولی در مقاله‌اش تحت‌عنوان «تارهای مرتعش»(۱۷۵۵) ادعا کرد که هرحرکت تاری که در دوانتهای خود محکم شده باشد وبا سرعت اولیهٔ صفر ارتعاش کند، با فرمول زیر معین می‌شود

$$y=\sum_{1}^{\infty} a_p \sin p\frac{\pi x}{l}\cos pkt$$

که در آن، $l$ طول تار و $k$ یك ثابت فیزیکی خاص است. از اینجا نتیجه می‌شد که اگر $y=f(x)$ شکل اولیهٔ تار باشد، آنگاه

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty} a_p \sin p\frac{\pi x}{l}$$

یعنی، یك تابع $f(x)$ «دلخواه» را می‌توان به‌یك سری سینوسی بسط داد. این نتیجه‌گیری ازلحاظ برخی ازمعاصران برنولی از قبیل اویلر، دالامبر، و (بعداً) لاگرانژ، به‌دلیل زیر غیر قابل قبول بود.

اویلر ومعاصرانش خمها را به دو دستهٔ «پیوسته» و«هندسی» تقسیم می‌کردند. خم «پیوسته» خمی بود که به‌وسیلهٔ «فرمول» معین شده باشد و خم «هندسی» خمی بود که تك فرمولی برای آن داده نشده باشد. واضح به‌نظر می‌رسید که یك خم «پیوسته» در سراسر دامنهٔ تعریفش از روی مقادیرش روی بازهٔ بسیار کوچکی از آن دامنه معین شود (یعنی، واضح به‌نظر می‌رسید که اگر دو فرمول روی بازهٔ بسیار کوچکی مقادیر یکسانی داشته باشند آنگاه در سراسر دامنهٔ تعریف مشترکشان مقادیر یکسانی دارند.) بنابراین، هیچ کس شك نداشت که ردهٔ خمهای «هندسی» بزرگتر ازردهٔ خمهای «پیوسته» است. حال اگر یك تابع «دلخواه» می‌توانست به یك سری سینوسی بسط یابد ـ وبنابراین با فرمول قابل نمایش باشد ـ آنگاه هرخم «هندسی»، «پیوسته» می‌بود واین امر قابل قبول نبود.

نیم قرن بعد، فوریه ازدیدگاه برنولی با موفقیت دفاع کرد. فوریه در مقالاتی که در ۱۸۰۷ و ۱۸۲۲ انتشار یافت ادعا کرد که یك تابع «دلخواه» را می‌توان به‌یك سری ازسینوسها و کسینوسها بسط داد، وضرایب بسط را (که برنولی معین نکرده بود) معین کرد. گرچه محاسبات فوریه منقاعدکننده بود ولی تعدادکمی ازآنها را می‌توان اثبات نامید.

در ۱۸۲۹ دیریکله با اثبات همگرایی سری فوریهٔ ردهٔ بزرگی از توابع، به تأیید ادعای فوریه کمك کرد. بررسی همگرایی سری فوریه تا به امروز ادامه یافته وباعث تکوین و گسترش حوزه‌های کاملی ازریاضیات شده‌است. به‌خصوص درقرن نوزدهم، مطالعهٔ سری فوریه ریمان را به‌اصلاح مفهوم انتگرال واداشت، پژوهشهای کانتور را درزمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها موجب شد، تابعهای ناپیوسته را مورد توجه قرارداد، وبه‌مطالعهٔ موضوعی انجامید که امروز به‌عنوان نظریهٔ توابع یك متغیرحقیقی شناخته می‌شود.

ممکن است توضیح مختصری دربارهٔ اشاراتی که به‌کار ریمان وکانتور کردیم، مفید باشد. ضرایب فوریه، انتگرالهای معین هستند. برای اثبات این ادعای فوریه که هر تابع دلخواه را می‌توان به‌یك سری مثلثاتی بسط داد، می‌بایست از تعریف کوشی از انتگرال یك تابع پیوسته فراتر رفت. اولین گام را ریمان دراین جهت برداشت که تعریف آشنای انتگرال را، که متضمن محدودیتهای پیشاپیش روی انتگرالده نیست، ارائه داد. (دربارهٔ انتگرال ریمان می‌توان همان چیزی را گفت که دربارهٔ روشهای کارگاهی شرلوك‌هولمز گفته‌اند: بیش از آنکه کامل و بی‌عیب باشد، پرجلوه و نمایشی است.) او همچنین سعی کرد شرایط لازم همگرایی سری فوریه را بیابد. (این مسأله که شرایط لازم وکافی برای همگرایی سری فوریه چیست، تا امروزهم حل نشده است.) کاری که کانتور کوشید درمورد سری فوریه انجام دهد این است: اگر یك سری فوریه روی یك بازهٔ تناوب صفر شود، آنگاه ضرایب آن همگی صفرند. کانتور سعی کرد شرط صفرشدن را برای زیرمجموعه‌هایی نامتناهی از بازهٔ تناوب حذف کند بدون آنکه دردرستی نتیجه اشکالی ایجادشود و به‌مفهوم «مشتق یك مجموعهٔ نقاط» رسید.

گرچه درطی قرن نوزدهم حوزهٔ توابع قابل نمایش باسریهای فوریه گسترش یافت، طرح رده‌بندی بردر ۱۸۹۹ نشان داد که سریهای فوریه تمام توابع را نشان نمی‌دهند.

مراجع اصلی: [۸]، [۱۶]

## ۸. کشف هندسهٔ هذلولوی وپیامدهای آن

هندسه، مانند اعداد، درآغاز به‌صورت چیزی که درخارج ازذهن وجود دارد، درنظر گرفته می‌شد. در ابتدای پیدایش هندسهٔ هذلولوی ـ درآخرین دهه‌های قرن هجدهم ـ برای این نوع هندسه نه سازگاری قائل بودند و نه معنای فیزیکی. لاباچفسکی وگاوس می‌خواستند این هردوجنبه را به آن ببخشند. بویوی بیشتر به‌بررسی نتایج اصل موضوع هندسهٔ هذلولوی پرداخت. او احساس می‌کرد که «دنیایی را ازهیچ آفریده» است. این بیانی قدیمی است ازدیدگاهی که ریاضیات رایکی ازآفرینشهای انسانی می‌داند.

وقتی مدلهای اقلیدسی هندسهٔ هذلولوی ابداع شدند، مسألهٔ سازگاری(نسبی) هندسهٔ هذلولوی حل شد و این هندسه، مانندسایر نظامهای ریاضی، به‌صورت شاخه‌ای از ریاضیات یعنی آفرینشی انسانی پذیرفته شد که سودمندی آن ـ به‌وسیعترین معنی ـ به قوهٔ

ابتکار انسان بستگی دارد.

پیدایش دوهندسهٔ قابل‌قبول به‌جای یک‌هندسه، هندسهٔ اقلیدسی را از تخت به‌زیر کشید و راه را برای پیدایش بینهایت هندسه هموار کرد. یکی ازاین هندسه‌ها در ۱۸۵۴ به وسیلهٔ ریمان ارائه شد و هندسهٔ دیگری را کلاین در ۱۸۷۲ به‌صورت پاسخی به‌این سؤال که هندسه چیست، عرضه کرد. نیازهای فیزیک، کارتان راواداشت که با ارائهٔ هندسه‌هایی ریمانی که موضعاً کلاینی‌هستند[در۱۹۲۲] دیدگاههای کلاین و ریمان را وحدت بخشد.

مرجع اصلی: [۷]

## ۹. هندسه، هندسه‌ها، وبرنامهٔ ارلانگن کلاین

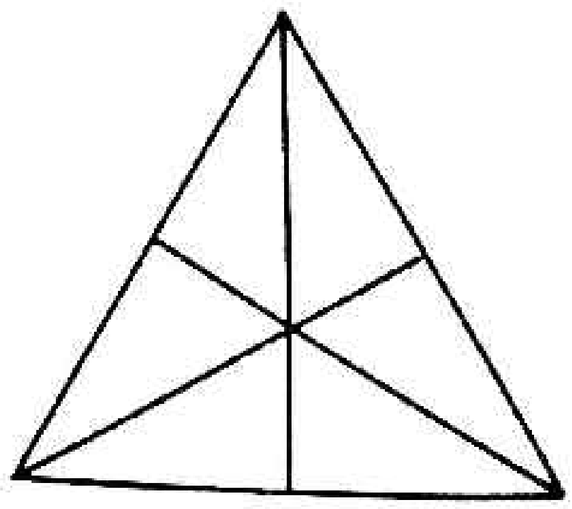
مهندس معمار بیشتر به‌شکل توجه دارد تا اندازه؛ برای فروشندهٔ وسایل اسفاط، وزن‌وجنس مهم‌است واشیایی که وزن وجنس آنها یکی است ازنظراویکسان‌هستند. به‌عبارت‌دیگر، درزندگی‌روزمره انواع مختلفی ازیکسانی را مورد توجه قرارمی‌دهیم.

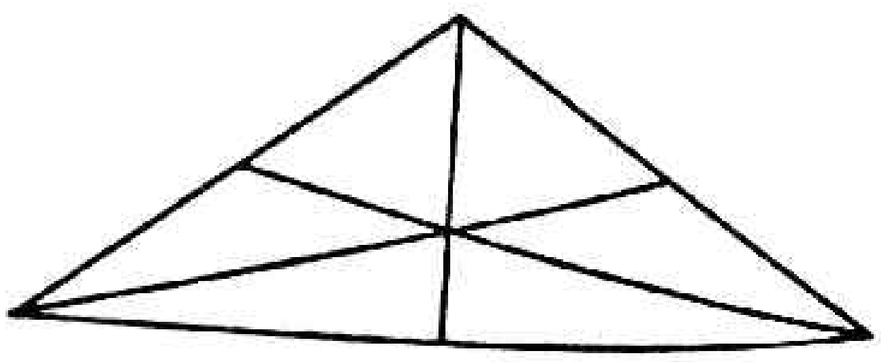
به‌کمک انواع مختلفی ازیکسانی [تطابق] می‌توان اثباتهای بسیارظریفی برای بسیاری ازقضایای هندسی ارائه کرد. در زیر چند مثال می‌آوریم.

**مثال۱.** فرض‌کنید میانه‌ها درمثلث متساوی‌الاضلاع یکدیگر رادر یک نقطه قطع می‌کنند. یکسانی [تطابق] آفین زیر به‌ما امکان این نتیجه‌گیری را می‌دهدکه میانه‌ها درهرمثلثی یکدیگررا دریک‌نقطه قطع می‌کنند.

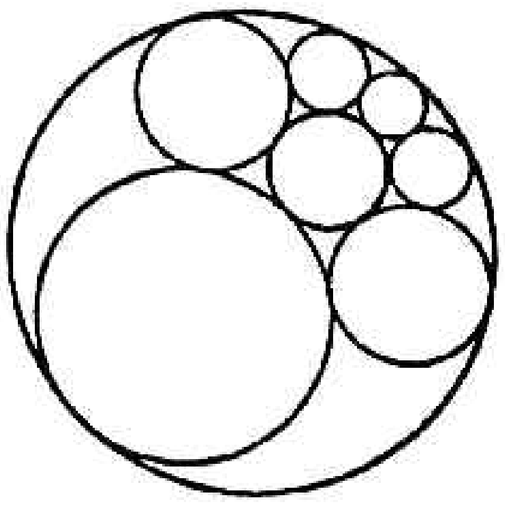
توضیح: گروه تبدیلات آفین صفحه را می‌توان به صورت گروه تبدیلاتی ازصفحه (یعنی نگاشتهای یک به یک وپوشایی از صفحه) که خطها را حفظ می‌کنند، تعریف کرد.

چنین تبدیلهایی، رابطه‌های وقوع ونسبت‌فواصل‌سه‌نقطهٔ‌همخط را نیز محفوظ نگه می‌دارند.(«چیزها»ی حفظ شده، «ناورداهای آفین» نامیده می‌شوند.) ونیز، گروه این تبدیلات روی سه‌تاییهای





شکل (الف)



شکل (ب)

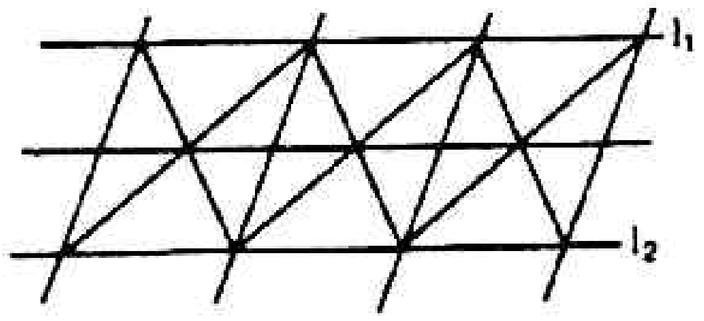
ناهمخط از نقاط، متعدی است. پس، هرمثلث وسه میانه‌اش را می‌توان به‌صورت تصویر آفین یک مثلث متساوی‌الاضلاع و سه میانه‌اش درنظر گرفت، و اگر بدانیم که میانه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع در یک نقطه هم را قطع می‌کنند، معلوم می‌شودکه میانه‌های هرمثلثی چنین می‌کنند.

**مثال۲.** (قضیهٔ اشتاینر) تحت انعکاس در یک دایرهٔ مناسب، تصویر یک «بلبرینگ اقلیدسی مسطح» در شکل (الف) به‌صورتی است که درشکل (ب) دیده می‌شود. (دایره‌های هم مرکزدرشکل(الف) به‌دایره‌های‌ناهم مرکزدرشکل (ب) نگاشته می‌شوند.)

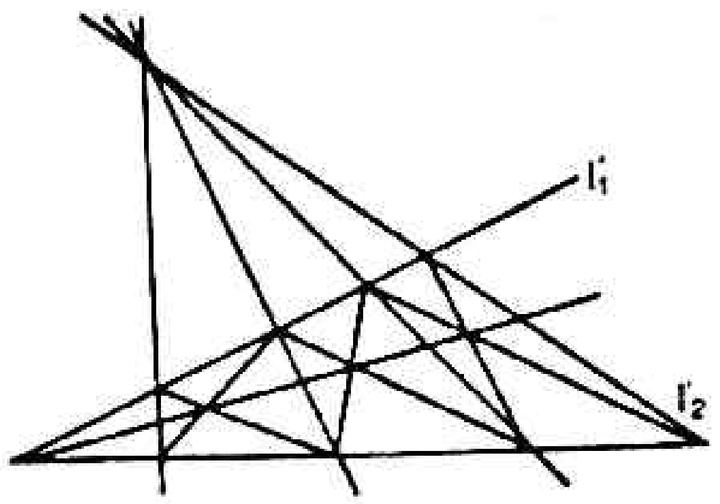
اگر دودایرهٔ هم مرکز داشته باشیم وبخواهیم یک بلبرینگ اقلیدسی مسطح را برپایهٔ این دایره‌ها رسم‌کنیم، واضح است‌که موفقیت یا شکست ما به‌جایی که نخستین «گوی» را قرار می‌دهیم بستگی‌ندارد. واقعیت شگفت‌انگیز این است‌که حکم مشابهی در مورد یک بلبرینگ انعکاسی مسطح نظیر آنچه درشکل(ب) دیده می‌شود برقراراست!

با استدلال زیر، این موضوع را ازحالت معما درمی‌آوریم (گرچه ازغرابت آن چیزی‌کم نمی‌شود). فرض‌کنید $f$ انعکاسی باشدکه شکل (الف) را به شکل (ب) مربوط می‌سازد. زنجیرهٔ دایره‌های داخلی در (الف) را دوران می‌دهیم. در این صورت، زنجیرهٔ تصویر تحت $f$ درمعرض یک «دوران انعکاسی» واقع می‌شود (که درآن، دایره‌ها نه تنها حرکت می‌کنند بلکه تغییر اندازه می‌دهند). به‌طورشهودی واضح است که همان‌طور که، سرانجام، هریک ازدایره‌های‌داخلی در(الف) هرمکان تعیین‌شده‌ای را بین دایره‌های هم مرکزدر (الف) اشغال می‌کند، دایره‌های داخلی موجود در(ب) نیز هرمکان تعیین شده‌ای را بین‌دایره‌های ناهم‌مرکز در (ب) اشغال می‌کنند.

توضیح: هندسهٔ انعکاسی مسطحه مبتنی است بر گروه تبدیلات صفحه، به اضافهٔ یک «نقطهٔ بینهایت»، که ردهٔ خطها و دایره‌ها را حفظ‌می‌کند. (برای‌اینکه ببینید نگاشت‌انعکاسی صفحه چیزی‌کاملا طبیعی است،صفحه رابه‌روی کره‌ای به‌صورت گنجنگاری بنگارید [تصویرکنید]. آنگاه نگاشت انعکاسی صفحه به‌صورت تبدیلی ازکره‌که حافظ دایره است، درمی‌آید). این تبدیلها ویژگیهای کافی ازاشکال را حفظ می‌کنند (مثلا مماس بودن دایره‌ها) تا هر بلبرینگ مسطح ناهم مرکز، تصویر یک بلبرینگ اقلیدسی تحت انعکاسی مناسب باشد.




شکل (پ)




شکل (ت)

**مثال ۳.** به شکلهای (پ) و (ت)ی بالا توجه کنید. مراکز متوازی‌الاضلاعها درشکل (پ) روی‌خطی موازی با خطوط $l_1$ و $l_2$ قرار دارند. چون این شکل به‌طور تصویری با شکل (ت) یکی است، می‌توان نتیجه گرفت که «مراکز» چهارضلعیها درشکل (ت) روی خطی گذرنده از نقطهٔ $l'_2 \cap l'_1$ قراردارند.

توضیح: گروه تبدیلات تصویری صفحهٔ تصویری (صفحهٔ اقلیدسی با دسته‌هایی از خطهای موازی به‌اضافهٔ «نقاطی در بینهایت» که یك «خط در بینهایت» تشکیل می‌دهند) متشکل از تبدیلاتی (یعنی نگاشتهای یك به یك و پوشایی) از آن صفحه‌اند که خطهای‌تصویری‌را حفظ می‌کنند (هریك از این خطها رامی‌توان به صورت یك خط اقلیدسی با یك «نقطه در بینهایت» درنظر گرفت که بین دسته‌ای‌ازخطهای موازی‌که به‌وسیلهٔ آن خط معین‌می‌شود، مشترك است). این تبدیلها، رابطه‌های وقوع را نیز حفظ‌می‌کنند. («چیزها»ی حفظ شده، «ناورداهای تصویری» نامیده می‌شوند.)

چون مراکز چهارضلعیها درشکل (پ)ی مثال ۳ روی خطی از دسته خطی قرار دارند که شامل خطوط $l_1$ و $l_2$ است، هرنگارهٔ تصویری شکل (پ)، وبنابراین شکل (ت)، باید ویژگی متناظر را داشته باشد.

این مثالها نشان می‌دهند که انواع مختلف یکسانی کاربرد فراوانی درهندسه دارند، ونیز نقطهٔ عزیمت به‌سوی تعریف کلاین ازهندسه را نشان می‌دهند. کلاین یك هندسه را به‌صورت مجموعهٔ ناورداهای (عددی وغیرعددی) مجموعه‌ای چون $S$ تحت گروه $G$ ازتبدیلات $S$ تعریف می‌کند. این تعریف اولین بار در سخنرانی کلاین به‌مناسبت احراز مقام استادی دانشگاه ارلانگن ارائه شد،و به‌زودی به‌برنامهٔ ارلانگن معروف گشت.

اجمالاً می‌توان گفت که‌ناورداهای‌یك هندسه براساس گروهی از تبدیلات‌یك مجموعهٔ $S$، ویژگیهای مشترك اشکال «$G$-همنهشت» هستند.

مراجع اصلی: [۱۰]، [۱۷]، [۶]

## ۱۰. مسالهٔ سوم هیلبرت

نخستین گام‌در پروراندن نظریه‌ای‌دربارهٔ مساحت (حجم)، پروراندن نظریه‌ای دربارهٔ مساحت (حجم) چند ضلعیها (چند وجهیها)ست. این دوکار ـ ارائه نظریه درباب مساحت چندضلعیها و حجم چند وجهیها ـ مشابه به‌نظر می‌رسند ولی درواقع، بسیار متفاوت‌اند.

هردوچند ضلعی که مساحتهای برابرداشته باشند از راه جمع، قابل انطباق‌اند؛ یعنی یکی از آنها را می‌توان به‌صورت قطعات چند ضلعی برید وقطعه‌ها را طوری کنارهم گذاشت که چند ضلعی دوم به‌دست آید. دِن (۱۹۰۲) نشان داد که حکم متناظر درمورد چند وجهیها، غلط است. ازاینجا معلوم می‌شود که درحالی که یك نظریهٔ «مقدماتی» (یعنی بی‌نیازازمفهوم حد) دربارهٔ مساحت چند ضلعیها وجود دارد، هیچ نظریهٔ«مقدماتی»دربارهٔ حجم چند وجهیها موجود نیست. همچنین معلوم می‌شود که رهیافت اقلیدس به‌این قضیه‌ها را نمی‌توان اساساً ساده‌کرد.

مرجع اصلی: [۲]

## ۱۱. عدم قطعیت به‌منزلهٔ پیشرفت

کانت مدعی بود که «هندسهٔ [اقلیدسی] علمی است که ویژگیهای فضا را به‌طورترکیبی وپیشینی، یعنی بدون وابستگی به‌تجربه، تعیین می‌کند.»

عقب‌نشینی ازاین موضع درقرن نوزدهم با پیدایش هندسهٔ هذلولوی آغازشد، یعنی هندسه‌ای که ازلحاظی نقیض‌منطقی‌هندسهٔ اقلیدسی به‌شمار می‌رود و بااین حال، به‌همان اندازه مشروعیت دارد. نتیجهٔ این امرآن بود که اصول موضوع به‌طورکلی،واصول موضوع هندسهٔ‌اقلیدسی به‌طورخاص،دیگر«حقایق بدیهی»محسوب نشوندوفرضهای اولیه‌ای به‌شمارآیندکه‌ازشهود سرچشمه گرفته‌اند. اکنون

> ... دیگر دفاع ازاین طرز فکر قدیمی «عقل‌گرایان» که هندسه حاوی اطلاعاتی است که هم ترکیبی و هم پیشینی است، مطرح نیست. در این مورد، هیچ گفته‌ای بهتر از گفتهٔ اینشتین حق مطلب‌را ادا نمی‌کند زیرا او نخستین کسی بودکه کاربردی فیزیکی از یك هندسهٔ نااقلیدسی، یعنی هندسهٔ ریمانی ارائه‌کرد، قوانین ریاضیات تا جایی که به‌واقعیت اشاره دارند قطعیت ندارند و تاآنجا که قطعیت دارند به واقعیت مربوط نمی‌شوند.»
>
> [ا. فلر. درآمدی به‌فلسفهٔ غربی]

عقب‌نشینی دیگری ازقطعیت، درنتیجهٔ اکتشاف عمیق‌کودت گودل در ۱۹۳۱ انجام شد. به‌بیان اجمالی، گودل نشان داد که هردستگاه اصل موضوعی که حساب معمولی را در برداشته باشد، شامل گزاره‌هایی تصمیم‌ناپذیر است. همچنین ـ واین نکته‌اهمیت اساسی دارد ـ باکدگذاری هوشمندانه‌ای، یکی از گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر را می‌توان چنین تعبیر کردکه حاکی ازسازگاری دستگاه است. بدین‌ترتیب حساب، ولذا همهٔ گسترشهای آن، به «شاخه‌ای از الهیات» تبدیل می‌شوند [کتاب لحظات بزرگ‌ریاضی اثر ایوز، درس ۳۸].

میان‌کشف هندسهٔ هذلولوی به‌وسیلهٔ لباچفسکی، بویویی، و گاوس، وکشف گودل، یك‌قرن فاصله‌است. این دو رویداد مهمترین

پیشرفتها درفهرست طویل تحولاتی هستندکه دیدگاه ما را دربارهٔ ریاضیات تغییرداده است. چنین فهرستی باید موارد زیر را دربر داشته باشد:

۱. ازمیان رفتن نقش خاص هندسهٔ اقلیدسی،
۲. اصل موضوعی شدن حساب (ونیزدستگاه اعداد وآنالیز).
۳. اصلاح شدن‌مبنای منطقی‌هندسهٔ اقلیدسی وروشن گشتن‌پیامدهای منطقی گروههای مختلفی ازاصول موضوعی کـه دستگاه اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی را تشکیل می‌دهند.
۴. کشف تناقضهایی درنظریهٔ مجموعه‌هـا وتلاشهایی‌که برای از میان بردن آنها صورت گرفت.
۵. مطرح شدن مجدد بحث بینهایت بالقوه وبینهایت بالفعل.
۶. روشن شدن نقش اصل موضوع انتخاب. تناقض هاوسدورف.
۷. برنامهٔ هیلبرت برای اثبات سازگاری حساب، وپایان‌یافتن‌این برنامه با اکتشافات گودل.

این تحولات نه تنها دیدگاه ما را دربـارهٔ ریاضیات تغییر داده است بلکه نظرما را دربارهٔ ماهیت کاردریاضیدان نیزعـوض کرده است. به‌قول هرمان وایـل، «کار [خلاقهٔ] ریـاضی یکی از فعالیتهای خلاقهٔ آدمی، نظیرزبان و موسیقی، است که از اصالت بسیاربرخورداراست ودستاوردهای تاریخی آن بـا دلایل صرفاً عقلانی وعینی قابل توجیه نیست.»

مراجع اصلی: [۱۴]،[۹]،[۴]،[۱۱]

مراجع

1. A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, NML 13, MAA, 1964 (section 3.6).
2. V. G. Boltyanskii, *Equivalent and Equidecomposable Figures*, D. C. Heath and Co., Boston, 1963.
3. C. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1968, 410-415.
4. H. Eves, *Great Moments of Mathematics*, DME#7, MAA, Lectures 35-38.
5. C. R. Hadlock, *Field Theory and its Classical Problems*, C. M. 19, MAA, 1978 (sections 1.1-1.4).
6. M. Jeger, *Transformation Geometry*, Allen & Unwin (out of print).
7. P. Kelly and G. Matthews, *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane*, Springer-Verlag, New York, 1981 (Chapter 1—historical background).
8. R. E. Langer, *Fourier's Series*, Slaught Memorial Paper #1, The AMM, Aug-Sept, 1947 (Portions of Part 1).
9. E. Nagel and J. R. Newman, *Goedel's Proof*, NYU Press, 1958.
10. D. Pedoe, *A Course of Geometry*, Cambridge U. Press, 1970 (parts of Ch. VI or inversive mappings).
11. W. V. Quine, "Paradox," *Scientific American*, April 1962.
12. A. A. Savelov, *Plane Curves*, GIFML, Moscow, 1960 (Russian) (§11).
13. G. F. Simmons, *Differential Equations*, McGraw-Hill, 1972 (Ch.9).
14. C. Smorynski, "The Incompleteness Theorems," 821 ff in *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, North-Holland, 1978.
15. O. Toeplitz, *The Calculus—a Genetic Approach*, U. of Chicago Press, 1963.
16. E. B. Van Vleck, "The Influence of Fourier's Series upon the Development of Mathematics," Science, N. S. 39 (1914), 113-124.
17. I. M. Yaglom, *Geometric Transformations* III, NML vol. 24, MAA.
18. A. P. Yushkevich (ed.), *History of Mathematics* (Russian), Nauka, 1970, Vol. 2, 206-210.

• Abe Shenitzer, "A topics course in mathematics," *The Mathematical Intelligencer* (3) 9 (1987) 44-52.

★ ابب شنیتسر، دانشگاه یورک کانادا

# فلیکس کلاین و رشد ریاضیات در قرن نوزدهم

سیف‌الله رنجبر*

*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Felix Klein, Springer, Berlin (1926), reprint (1979).

در ساحت علوم به‌ندرت پیش آمده است که عالمی توانا دربارهٔ چگونگی توسعه و رشد یك بخش فراگیر از دانش بشری اثری جامع بیافریند. کتاب رشد ریاضیات در قرن نوزدهم فلیکس کلاین یکی‌ازاین استثناهاست. فلیکس کلاین یکی‌از ریاضیدانان برجستهٔ قرن نوزدهم است. او ریاضیدانی چیره‌دست و معلم وسازماندهی بااستعداد بود. می‌توان گفت که شکوفایی ریاضیات در آلمان تا قبل از ظهور نازیسم تا حد زیادی مرهون کوششهای کلاین و رهبری او در دانشگاه گوتینگن است. مکتب گوتینگن برجسته‌ترین دستاوردهای ریاضیات ناب و کاربردی قرن نوزدهم را به قرن بیستم منتقل کرد و کانونی شد برای جذب تمامی علاقه‌مندان به ریاضیات. از سرتاسر جهان برای فراگرفتن آخرین نتایج دراین شاخه ازدانش‌بشری به‌سوی آن رو می‌آوردند. کلاین هر استعداد بالقوه‌ای را که در اروپا می‌یافت بلافاصله به‌سوی خود می‌کشید و در جرگهٔ استادان مدرسهٔ گوتینگن جای می‌داد.[۵]

چنانکه از مقدمهٔ کوتاه کورانت ونویگه باوئریرمتن آلمانی کتاب برمی‌آید، کتاب رشد ریاضیات در قرن نوزدهم گردآورده‌ای است از یك‌رشته درس خصوصی که کلاین درحدود سالهای آخر جنگ جهانی اول در خانهٔ خود به‌عده‌ای از پژوهشگران گوتینگن داده‌است. به‌این‌دلیل، لحن کتاب در اغلب جاها صمیمی، صادقانه، و غیر رسمی است. گویا کلاین در نظر داشته است کتابی عظیمتر درمورد کل فرهنگ معاصر[1] بنویسد. از این‌نظر می‌توان این‌درسها را پیش‌درآمد آن طرح بزرگ و نافرجام نامید. این امر سبب شده‌است که کلاین در جاهای متعدد اظهارنظرهای فلسفی ـ گاهی اوقات جزمی ـ درمورد پیدایش وتکوین نهادهای اجتماعی بکند.




برای‌نمونه، هنگام بحث دربارهٔ‌اصول‌خلاقیت‌ریاضی در پلی‌تکنیك پاریس و آغاز شکوفایی ریاضیات در آلمان، پس از برشمردن دلایل متعددی‌که دیگران برای این پدیده پیش نهاده‌اند، می‌گوید ریشهٔ این پدیدهٔ اصول در یك قانون کلی روانی نهفته‌است‌که در مورد فرد فرد افراد بشری و ملتها به یك اعتبار صادق است. بر اساس این قانون: «بعداز هردورهٔ پیشرفت، الزاماً یك‌دورهٔ سکون و نازایی حاکم می‌شود.» این‌نظریه، یادآور افکار اشپینگلر است. البته کلاین به خوبی می‌داند که مرزهای بین دورانهای تاریخی، به‌دقت مفاهیم ریاضی نیست. مثلاً با اینکه او سال ۱۸۳۰ یعنی سال رفتن کوشی از پاریس را نقطهٔ آغاز اصول پلی‌تکنیك می‌داند، بلافاصله به ظهور گالوا که‌کلاین او را ستاره‌ای با درخشش باور نکردنی می‌داند اشاره می‌کند. این‌نوع بینشهای فلسفی درسرتاسر کتاب پراکنده‌اند و خوشبختانه انبوههٔ متراکمی را که خواندن کتاب را دشوار بکند، نمی‌سازند. نقش آنها بیشتر پیوندی است به‌این معنی که نشانگر تغییرجهت از موضوعی به‌موضوع دیگر در متن افکار مؤلف است.

1. Kultur der Gegenwart

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT
W. BLASCHKE HAMBURG · M. BORN GÖTTINGEN · C. RUNGE GÖTTINGEN
HERAUSGEGEBEN VON
R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND XXIV
VORLESUNGEN ÜBER DIE
ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK
IM 19. JAHRHUNDERT
VON
FELIX KLEIN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

FELIX KLEIN
VORLESUNGEN
ÜBER DIE ENTWICKLUNG
DER MATHEMATIK
IM 19. JAHRHUNDERT

TEIL I
FÜR DEN DRUCK BEARBEITET VON
R. COURANT UND O. NEUGEBAUER

MIT 48 FIGUREN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

سرفصلهای کتاب کلاین به‌قرار زیر است.

فصل I. گاوس

فصل II. فرانسه و مدرسهٔ پلی‌تکنیك در دههٔ اول قرن نوزدهم

فصل III. ایجاد مجلهٔ کرله و شکوفایی ریاضیات ناب در آلمان

فصل IV. رشدهندسهٔ جبری فرانسوی ودستاوردهای موبیوس، پلوکر، و اشتاینر

فصل V. مکانیك و فیزیك ریاضی در آلمان و انگلستان تا حدود ۱۸۸۰

فصل VI. نظریهٔ عمومی توابع متغیر مختلط از دید ریمان و وایرشتراس

فصل VII. نگرشی ژرف در ماهیت واریته‌های جبری

فصل VIII. گروهها و نظریهٔ توابع ـ توابع خودریخت

در این هشت‌فصل کلاین تقریباً ازهمهٔ ستارگان قدر اول ـ و در بعضی موارد قدر دوم ـ ریاضی اروپای قرن نوزدهم یاد می‌کند. او بعداز شرح مختصر زندگی هر ریاضیدانی به‌توصیف اجمالی اهم کارهای او می‌پردازد و سهم آثار برجسته‌ای را که در پیشرفت جریان ریاضیات ناب و کاربردی اهمیت داشته‌اند، یك‌یك ارزیابی نقادانه می‌کند. بازگویی داستان زندگی توام با فقر و محنت آبل و ریمان و یا کشته‌شدن گالوا در یك دوئل، جنبهٔ انسانی خاصی به‌کتاب کلاین می‌دهد وخواننده بدون کوشش زیاد درمتن زندگی قرن نوزدهم اروپا قرار می‌گیرد.

فضای فرهنگی کتاب کلاین فضای قرن نوزدهم است. کتابی نظیراین کتاب که منعکس کنندهٔ دینامیسم آفرینشهای علمی است، اهمیت سازماندهی نهادهای علمی‌را در رشد فرهنگی اروپا نشان می‌دهد. این‌مطلب‌در فصل‌دوم کتاب که سرگذشت‌اجمالی پلی‌تکنیك پاریس را در بر می‌گیرد به‌وضوح به‌چشم می‌خورد. کلاین در این‌موارد به‌نقش شخصیتهای برجسته‌ای‌که به‌نحوی در توسعهٔ علوم در اروپا سهمی داشته‌اند اشاره می‌کند. مثلاً در فصل اول از فون هومبولت وتلاشهای مجدانهٔ او برای سازماندهی علمی آلمان یاد می‌کند. کلاین تأسیس دانشگاه برلین را در ۱۸۱۰ توسط هومبولت «رنسانس علمی آلمان» می‌نامد. اوازکوششهای‌هومبولت درکشف و پشتیبانی استعدادهای‌جوانی چون دیریکله و گاوس با قدردانی زیاد یاد می‌کند. دانشگاههای آلمان در آن‌موقع هنوز اهمیت خودشان‌را در زندگی اجتماعی نشان نداده‌بودند. استادان دانشگاهها و پژوهشگران ازموقعیت اجتماعی والایی‌که بعداً به‌آن دست یافتند برخوردار نبودند. بدین جهت، تلاشهای اشخاص روشن‌بینی ازنوع هومبولت و کرله و غیره متضمن جرو بحث‌های دنباله‌دار با بوروکراتهای پایتخت‌نشین بود و این‌کار فقط از آدمهای با نفوذی مثل هومبولت، و در سالهای بعد خود کلاین، برمی‌آمد.

کرله یکی دیگراز شخصیتهای برجستهٔ نیمه ریاضی است که کلاین از خدمات ارزندهٔ او به‌نیکی یاد می‌کند. کرله مجلهٔ ریاضیات ناب و کاربردی[1] را بنیان نهاد. این‌مجله در اوایل دوران

1. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik

شکوفایی علوم و ریاضیات در آلمان درسال ۱۸۲۶ ایجاد شد. هدف کرله این بودکه با ترجمه و نشر مقالات متنوع در رشته‌های مختلف علوم طبیعی و علوم ریاضی، چشم‌اندازی وسیع وجامع از پیشرفتهای کلیهٔ علوم آن‌زمان‌را ارائه‌دهد و خوانندگان خودرا با منابع اصیل زندگی علمی عصرخویش آشنا سازد. ولی گویا سرنوشت ــ یا روح پرخروش آن‌دوران ــ آینده‌ای بس متفاوت برای این مجله طرح ریخته‌بود. زیرا بعداز چند شمارهٔ اول، مجلهٔ کرله به‌میعادگاه نابترین ریاضیات ناب تبدیل شد. اولین مقالات آبل در زمینهٔ «توابع آبلی» در این‌مجله چاپ شد. کلاین برای این استحالهٔ مجلهٔ کرله اهمیت زیادی قائل است.

ازخدمات‌دیگر کرله، مانند هومبولت، پشتیبانی اوازاستعدادهای جوان و شکوفای آن عصر بود. به‌قول کلاین او از اولین کسانی بودکه به‌نبوغ آبل پی‌برد. باکوششهای‌وی و هومبولت، دعوتنامه‌ای برای آبل فرستاده‌شد تا اورا به‌ریاست و تصدی کرسی استادی پلی‌تکنیکی که قراربود در برلین تأسیس بشود، منصوب کنند. این دعوت پس‌از مرگ آبل در سن بیست‌وهفت‌سالگی براثر فقر و گرسنگی به‌زادگاه او درکریستانیای نوروژ رسید.

فکر تأسیس پلی‌تکنیک برلین که ملهم ازپلی‌تکنیک‌پاریس‌بود برای اولین‌بار توسط هومبولت مطرح می‌شود و ریاست آن را با شرایط‌بسیارخوب به گاوس‌پیشنهاد می‌کنندکه وی‌آن‌را نمی‌پذیرد. با مرگ آبل ایدهٔ تأسیس پلی‌تکنیک نیز بعداز کوششهای ناموفق چندین‌ساله درجهت ایجاد آن ازبین می‌رود. به‌نظرکلاین این‌امر سبب می‌شودکه بار تحقیق درعلوم ناب‌وکاربردی بردوش اساتید دانشگاهها که تا آن‌موقع وظیفهٔ اصلیشان تدریس‌بود گذاشته‌شود. بدین‌جهت او سوق داده‌شدن نظام دانشگاهی را به‌سمت پژوهش محصول یک‌تصادف می‌داند تا نتیجهٔ منطقی تعدادی‌شرایط اجتناب ناپذیر. کلاین در ستایش و تمجید توابغی چون گاوس و ریمان و آبل و گالوا هیچ‌حدی برای خود نمی‌شناسد معهذا ازنقد علمی کارهای آنها نیز چشم نمی‌پوشد. گاوس تنها قهرمان کتاب کلاین است که یک فصل طولانی کامل کتاب فقط به او اختصاص دارد. کلاین، گاوس را ازنظر رفتارظاهری و روحیه متعلق به‌قرن هجده و از نظر افکار و شیوهٔ علمی بنیانگذار قرن نوزده معرفی می‌کند. او گاوس را جزو اولین‌کسانی می‌شناسدکه «دقت موشکافانه» را در استنتاجات ریاضی به‌طورجدی به‌کار می‌گیرد. با وجود این، در بحث از اولین اثبات گاوس از قضیهٔ اساسی جبرکه برای آن گاوس حداقل چهار اثبات متفاوت در زمانهای مختلف ارائه داده است، دقت او را برای زمان خود کلاین ناکافی می‌شمارد.

لی و پوانکاره تنها ریاضیدانان بزرگ‌قرن نوزدهم هستندکه درکتاب کلاین فقط به‌طور گذرا ازآنها یاد می‌شود. گویا قرار بوده است او فصلی جداگانه به هرکدام از آنها اختصاص بدهد که متأسفانه موفق به‌این‌کار نمی‌شود، معهذا ازچند صفحه‌ای که کلاین در مورد پوانکاره نوشته است اطلاعات تاریخی جالبی به دست می‌آید. پوانکاره و کلاین در پروراندن نظریهٔ توابع خودریخت در مسابقه‌ای تنگاتنگ قرار می‌گیرندکه شرح مختصر آن‌را می‌شود درصفحات آخرکتاب خواند. کلاین، پوانکاره را ستاره‌ای به‌درخشندگی گاوس وکوشی می‌شناسد ولی او را به‌مانند کوشی به‌خاطر شتابزدگی در نشر افکارخود قبل‌ازپرداخت دقیق آنها ملامت می‌کند. کلاین سال ۱۸۸۲ را با صراحت پایان دوران‌خلاقیت ریاضی خود معرفی می‌کند. در این‌سال او به‌خاطر کوشش زیاد برای پروراندن توابع خودریخت و ربودن گوی سبقت از پوانکاره ازلحاظ‌جسمی ازپای درمی‌آید و به‌قول‌خودش بعدازآن، کار ریاضی او به‌پرداختن‌به‌جزئیات وتوضیح کاردیگران محدود می‌شود.

فصل ششم که به‌کارهای ریمان و وایرشتراس درزمینهٔ توابع مختلط چندمقداری تخصیص داده شده‌است، یکی‌ازفصول آموزنده و خواندنی کتاب کلاین است. او این فصل را با ریمان شروع می‌کند. دلیل مقدم شمردن ریمان بر وایرشتراس به‌قول خود کلاین این‌است‌که ریمان وابسته به گوتینگن بود. او در گوتینگن درس خوانده و ازآنجا فارغ‌التحصیل شده‌بود و سپس درهمانجا به‌تدریس و تحقیق پرداخته بود. این نشانه‌ای ازمهم‌انگاشتن سنت دریک‌نهاد علمی است. کلاین به‌وضوح با ریمان احساس نزدیکی می‌کند و به‌این‌احساس خود می‌بالد. البته، خط فکری کلاین‌هم به ریمان نزدیکتر بود تا به وایرشتراس. شیوهٔ کار ریمان بیشترشهودی بود تا منطقی و کلاین این مطلب را دلیل سستی یا حداقل ناقص بودن بعضی‌از اثباتهای او می‌داند. به‌عنوان نمونه، بعداز توضیح بسیار اجمالی اثبات وجود توابع جبری بر روی یک‌رویهٔ ریمانی مفروض، که ریمان بااستفاده از اصل دیریکله به‌آن می‌پردازد، کلاین انتقادات وایرشتراس را در بی‌پایه بودن اثبات ریمان شرح می‌دهد. عظمت ریمان مانع‌ازاین نمی‌شودکه کلاین در این بحث جانب وایرشتراس را بگیرد.

یکی‌دیگر ازبحثهای جالب‌فصل ششم، توصیف‌بسیار زنده‌ای است که کلاین از جو حاکم برگوتینگن آنزمان ارائه می‌دهد. کلاین ریمان‌را شاگرد گاوس می‌داند، گواینکه او فقط دوران پیری گاوس را در گوتینگن شاهدبوده است و هیچگاه ارتباط نزدیکی بین آنها برقرار نبوده است. با وجود این کلاین معتقد است‌که ریمان درواقع تنها شاگرد واقعی گاوس بوده است. او تنها کسی بود که به‌لب افکار گاوس پی می‌برد. با درنظرگرفتن ارتباط بسیارناچیز ریمان‌وگاوس، کلاین جو بسیار پربارفرهنگی حاکم برگوتینگن‌را درآن دوره دلیل این قرابت فکری می‌داند. او به‌طورکلی معتقداست‌که «معنویت حاکم‌بریک محیط برای هر انسان مهمتر از جزئیات و ماهیت دانشی است که به او عرضه می‌شود.»[1]

کتاب کلاین را می‌توان‌تاریخ ریاضی‌فیزیک در قرن نوزدهم نیز به‌شمارآورد. او درفصل اول‌کتاب، بحث‌کارهای گاوس‌را با بررسی آثار او در علوم طبیعی که شامل نجوم، مساحی، و فیزیک می‌شود شروع می‌کند و به‌تفصیل همکاریهای نزدیک‌گاوس و وبر را بر روی میدانهای مغناطیسی شرح می‌دهد. فصل پنجم‌کتاب منحصراً به‌فیزیک ریاضی در آلمان و انگلستان تا حدود ۱۸۸۰ اختصاص‌دارد. دراین‌فصل، شرحی‌نسبتاً‌مبسوط‌ازمکانیک هامیلتونی

---

۱. شکل دقیق جملهٔ کلاین این است

Es ist eben viel wichtigen, in welche geistige Umgebung ein Mensch hineinkommt, die ihn viel stärker beinflusst als Tatsachen und konkretes Wissen, das ihn geboten wird!

و ژاکوبی عرضه‌می‌شود. قضاوت معروف[۱] و نادرست کلاین در مورد ساختمان بیش‌ازحد انتزاعی مکانیك هامیلتونی [۱] در این فصل است. کلاین معتقد بود که فرمولبندی هامیلتونی مکانیك هیچگاه کاربرد عملی درفیزیك یا مهندسی نخواهد داشت. البته توسعهٔ مکانیك کوانتومی ونظریهٔ میدانها درچنددههٔ اول قرن حاضر خلاف گفتهٔ کلاین را ثابت کرد.

کلاین برای شهود فیزیکی درابداعات ریاضی اهمیت خاصی قائل است. او به‌تفصیل نشان‌می‌دهد که چگونه ریمان درابداع مفهوم توابع مختلط بر روی رویه‌های ریمانی[۴] از ایده‌های فیزیکی متأثر بوده‌است. خود اونیز در رسالهٔ کوتاهش درمورد رویه‌های ریمانی ازتشابهات فیزیکی آغاز می‌کند. او به‌همکاری نزدیك بین فیزیکدانها و ریاضیدانها اهمیت ویژه‌ای می‌داد. وجود فیزیکدانهای نامداری‌چون ماکس‌بورن و فرانك و رفت‌وآمدهای پیاپی اینشتین و بور و زومرفلد و دیگران به‌گوتینگن، گواه این واقعیت‌است. البته کتاب معروف هیلبرت و کورانت تحت عنوان روشهای فیزیك‌ریاضی[۲] نیز محصول این‌دورهٔ گوتینگن است.

متن آلمانی کتاب کلاین جلد دومی‌نیز به‌ضمیمه داردکه‌بیشتر به نظریهٔ نسبیت و زمینه‌های ریاضی وفیزیکی آن اختصاص دارد. برای خواندن جلد دوم به‌اطلاعات ریاضی بیشتری نیازاست. این جلد بیشتر حالت یك‌طرح‌را دارد تا یك‌کار تمام‌شده.

ترجمهٔ انگلیسی کتاب کلاین فقط جلداول‌را دربرمی‌گیرد. این ترجمه، جلد نهم از سلسله کتابهای رویرت هرمان تحت عنوان گروههای‌لی را تشکیل می‌دهد[۳]. ناشر انگلیسی، مقدمهٔ ناشران آلمانی یعنی کورانت و نویگه باوئر را ازترجمه حذف کرده و به‌جای آن مقدمه‌ای از هرمان در اول کتاب و یك مقدمه و شانزده ضمیمه به‌آخر آن‌افزوده‌است. حجم ضمائم هرمان تقریباً به‌اندازهٔ خود کتاب کلاین است. هرمان در مقدمه بر ضمائم، کلاین‌را متهم به‌ضد فرانسوی و ضدیهودی‌بودن وضدیت با شیوهٔ اصل‌موضوعی در ریاضیات می‌کند. به‌یقین درمتن کتاب کلاین مطلبی نیست که اتهام سوم‌را ردبکند (گواینکه چیزی‌درتأیید آن‌نیز وجودندارد). البته دردوره‌ای که موردبحث کلاین‌است، ریاضیات اصل‌موضوعی هنوز آنچنان درمکاتب اروپا جانیفتاده‌بود. ولی دو اتهام اول‌را با شواهد متعددی می‌توان ردکرد. به‌عنوان مثال، تعریف وتمجید کلاین از مونژ و کوشی و گالوا و پوانکاره که فرانسوی بودند به‌یقین کمتراز ستایش او از ریاضیدانان آلمانی نیست.

اتهام‌ضدیهودی‌بودن کلاین نیز بی‌پایه‌است. برای‌اثبات این حرف کافی‌است که نظریات کلاین‌را درمورد ژاکوبی مدنظر قرار دهیم. مخصوصاً آخرین پاراگراف صفحهٔ ۱۱۴ متن آلمانی‌را، که کلاین از لغو قانون ضد یهودی درسال ۱۸۱۲ در آلمان یاد می‌کندومی‌نویسد: «ژاکوبی اولین‌ریاضیدان یهودی‌بود که مقام برجسته‌ای‌را درآلمان‌احرازکرد. دراینجانیز اودررأس یك‌تحول بزرگ جای گرفت‌که برای‌کشورما از اهمیت زیادی برخوردار است. این تصمیم(یعنی‌لغوقانون‌ضدیهود) منبع‌عظیمی‌ازاستعدادهای ریاضی را بازگشود که همراه با سهم مهاجران فرانسوی به‌زودی بارآوری خودشان‌را درعلم ما ثابت‌کردند. به‌نظرمن این‌تزریق خون نو،جان‌تازه‌ای به‌علم‌داد.» ازاین گذشته،استخدام ریاضیدانان یهودی‌چون کورانت و لانداو و مینکوفسکی و... درگوتینگن که رهبری آن در دست‌کلاین‌بود، بی‌پایه‌بودن اتهام رویرت هرمان‌را به‌وضوح نشان می‌دهد.

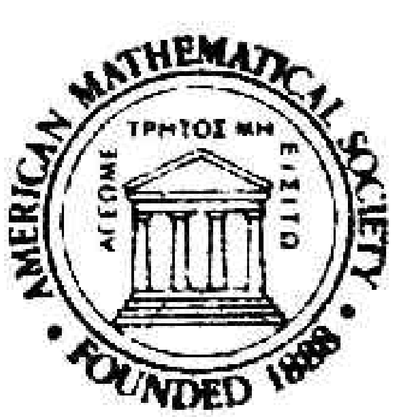
کتاب کلاین چشم‌انداز وسیعی‌از تقابل افکار وتأثیر آنها بر روی یکدیگر و دینامیسم بالندگی در قرن نوزدهم اروپا را ارائه می‌دهد. این‌کتاب هنوزهم یکی‌ازمنابع مهم ومعتبر تاریخی است و منبع و الهام‌بخش کتابهای دیگر درزمینهٔ تاریخ ریاضیات است. امید است که حداقل قطعاتی‌ازآن به‌دست مترجمان چیره‌دست ما به زبان فارسی ترجمه و درمجلهٔ نشر ریاضی چاپ‌شود.

مراجع

1. V.I., Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer (1978).
2. R, Courant and D, Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, vol I & II, Springer, Berlin (1930-38), Engl. transl. *Methods of Mathematical Physics*, Interscience IIVC, New York (1953).
3. F, Klein, *Development of Mathematics in the 19th Century*, vol IX of *Lie Groups: History, Frontiers and Application*, appendices: "Kleinian mathematics from an advanced standpoint", by Robert Hermann, Math Sci Press (1979).
4. F, Klein, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, Dover (1963).
5. C, Ried
   a) *Courant in Göttingen and New York, the Story of an Improbable Mathematician*, Springer, New York (1976).
   b) *Hilbert*, Springer, Berlin (1970).

★ سیف‌الله رنجبر، مرکز بین‌المللی فیزیك نظری، تریست ایتالیا

۱. مقدمهٔ مرجع [۱]




# Mathematical Reviews

## پنجاه سالگی متمتیکال ریویوز*

مجلهٔ متمتیکال ریویوز[1] با انتشار اولین شمارهٔ سال ۱۹۹۰ خود پنجاه سال فعالیت مستمر را پشت سر گذاشت. کار این مجله، درج چکیده یا نقد مقالات و کتابهای پژوهشی ریاضی است و در این زمینه، از اعتبار جهانی برخوردار است. متمتیکال ریویوز تاکنون بیش‌از یک‌میلیون مقاله و کتاب را بررسی کرده‌است و جمع کثیری از ریاضیدانان نام‌آور نیم‌قرن اخیر در زمرهٔ ویراستاران و نقدنویسان آن بوده‌اند. برای آشنایی خوانندگان نشر ریاضی با شیوهٔ کار این مجله و نیز سابقهٔ مجله‌های کتابشناسی و نقد و بررسی در ریاضیات، قسمتهایی از ویژه‌نامه‌ای را که متمتیکال ریویوز به‌مناسبت پنجاه سالگی خود انتشار داده تلخیص و ترجمه کرده‌ایم که درزیر می‌خوانید. در این ترجمه، کلمه‌های «نقد»، «بررسی»، و «نقد و بررسی» در برابر واژهٔ انگلیسی **review** به‌کار رفته‌اند که **review** ممکن است نقد مبسوطی از یک‌کتاب یا مقاله یا چکیده‌ای از آن و یا فقط مشخصات کتابشناسی آن باشد.

### ۱. پیشینهٔ مجله‌های نقد و بررسی در ریاضیات

در اواسط قرن نوزدهم، ریاضیات آنقدر تخصصی شده بود و تعداد مجله‌های ریاضی آنقدر افزایش یافته بود که برای یک فرد نه‌تنها تسلط بر کل ریاضیات ممکن نبود بلکه پیگیری پیشرفتها در رشتهٔ خودش نیز دشوار بود. پژوهشگران ریاضی آشکارا به‌شیوهٔ اصولیتری برای ارتباط بین خودشان نیاز داشتند، از این‌رو مجله‌های کتابشناسی پا به‌عرصهٔ وجود نهادند. این مجله‌ها چکیده یا نقد مقاله‌ها و کتابهای پژوهشی ریاضی (و گاه فقط مشخصات کتابشناسی آنها) را درج می‌کردند. ولفینگ [در مرجع W] شرحی از مجله‌های کتابشناسی متعددی که پیش‌از ۱۹۰۳ تأسیس شدند، آورده‌است. میلر نیز در آشنایی با تاریخ نوشته‌جات ریاضی [مرجع M] فهرستی توأم با توضیحات از کتابشناسیها و دائرةالمعارفهای ریاضی که پیش‌از ۱۹۱۶ انتشار یافتند، به‌دست داده‌است. مسلماً مهمترین مجلهٔ کتابشناسی ریاضی، یاربوخ اوبر دی فورتشریته درماتماتیک[1] بود که در ۱۸۶۸ با سرپرستی کارل اورتمان و فلیکس مولر در برلین پایه‌گذاری شد (و به‌زودی آلبرت وانگرین هم به‌آنها پیوست). ازمیان‌بقیه، مجلهٔ کتابشناسی بولتن دسیانس متمتیک ا آستروتومیک[2] شایان ذکر است که در ۱۸۷۰ در پاریس تأسیس شد و ویراستار آن، گاستون داربو بود؛ مطالب این مجله عمدتاً شامل فهرستی از انتشارات ریاضی بود. نیز از مجلهٔ روسمستریل دپوبلیکاسیون متمتیک[3] نام می‌بریم که در سال ۱۸۹۳ در آمستردام تأسیس شد و خلاصه‌های کوتاهی

1. Mathematical Reviews

1. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*
2. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*
3. *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*

ازمقالات وکتابهای منتشرشده‌را درج می‌کرد ولی‌حاوی بررسیهای انتقادی نبود.

**یاربوخ و تسنترالبلات.** مجلهٔ یاربوخ نقد و بررسی تمام مقاله‌های ریاضی را کـه در یك سال انتشار می‌یـافت، در یك جلد چاپ می‌کرد. اولین جلد آن‌که در ۱۸۷۱ انتشار یافت، شامل بررسی مقالات منتشرشده درسال۱۸۶۸ بود. این‌جلد، ۴۲۶ صفحه داشت و مطالب آن‌را ۱۶ ریاضیدان نوشته بودند که همگی آلمانی و غالباً اهل برلین بودند. جلد دوم که در ۱۸۷۳ منتشر شد، دوسال ۱۸۶۹ و ۱۸۷۰ را در بر می‌گرفت و ۹۰۲ صفحه داشت. جلـد سوم در ۱۸۷۴ منتشر شد و بررسی مقالات سال ۱۸۷۱ را در بر می‌گرفت. این‌جلد، ۵۸۸صفحه داشت و۳۳ نقدنویس (ازجمله لی، کیلی و چند ریاضیدان غیر آلمـانی دیگر). جلد ۳۱ که در ۱۹۰۲ منتشر شد و بررسی مقـالات سال ۱۹۰۰ را در بر داشت شامل ۹۷۰صفحه بود و نوشته‌های ۵۹ بررسی‌کننده در آن آمده بود. جنگ جهانی اول، اختلال زیادی در برنامهٔ انتشار این‌مجله به‌وجود آورد و علی‌رغم تلاشهایی که به‌عمل آمد، جلد ۵۰ آن که سال ۱۹۲۴ را در بر می‌گرفت تا سال ۱۹۲۹ مجـال انتشار نیافت. این‌جلد ۷۴۹صفحه داشت و ۱۵۳ نقدنویس.

در اولین جلـد یاربوخ، ریاضیات به‌این دوازده‌بخش تقسیم شده‌بود: تاریخ‌و فلسفه، جبر، نظریهٔ اعداد، احتمال، سریها، حساب دیفـرانسیل و انتگرال، نظریـهٔ توابع، هندسهٔ تحلیلـی، هندسهٔ ترکیبی، مکانیك، فیزیك‌ریاضی، و مساحی و نجوم. ممکـن است تشابه‌کلی این‌تقسیم‌بندی با تقسیم‌بندیی‌که درحال‌حاضر درمجلات نقد ریاضی معمول است، تعجب‌انگیز باشد. دراین‌جلد، عنوان و مشخصات تعداد زیادی ازکتابها ومقالات بدون شرح و نظر آمده است ولی بسیاری‌از عناوین هم نقدی به‌دنبال دارند.

به‌تدریج معلوم شد این امید اولیه که یاربوخ بتواند بررسی تمام مقـالاتی را که در یك سال منتشر می‌شوند به فاصلهٔ کوتاهی پس‌از آن سال چاپ کند، توهمی بیش نبوده است. مجله‌ها دیر به دفتر یاربوخ می‌رسیدند، نقدنویسان‌کند کار می‌کردند، و مشکلاتی در زمینهٔ چاپ وجـود داشت. به‌هر حـال در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ نارضایـی گسترده‌ای نسبت به یاربوخ پدید آمـده بود که دلیل عمده‌اش همین تأخیر زمانی بود. اتو نویگه باوئر که در آن‌زمان استاد جوانی در دانشگاه گوتینگن بود به‌فکر انتشار مجله‌ای‌افتاد که شرح‌ونقد مقالات پژوهشی ریاضی را به‌فاصلهٔ کوتاهی پس‌از انتشار آنها چاپ کند، و بنگاه انتشاراتـی اشپرینگر را به‌انتشار چنین‌مجله‌ای تشویق‌کرد. اولین‌شمارهٔ مجلهٔ جدید، که تسنترالبلات فورماتماتیك (وندایره‌گرنتس‌گبیته[1] نام‌گرفت، در۱۴ آوریل۱۹۳۱ ازچاپ درآمد و ویراستارآن نویگه باوئر بود. این‌مجله همچنین از همکاری یك هیأت ویراستاری بین‌المللی برخوردار بود ( که از جمله اعضای آن، آلکسانـدروف، کورانت، هاردی، جولیا، کلاین، لوی چیویتـا، و وان در واردن بودند). اولین‌جلـد این مجله شامـل هفت شماره و یك فهرست راهنمـا بود و ۴۶۶صفحه داشت. اولین اثری‌که در آن مورد بحث قرار گرفته بود، ویرایش دوم رسالهٔ کورانت و هیلبرت تحت عنوان روشهای فیزیك‌ریاضی بود. شیوهٔ تقسیم‌بندی مطالب آن بسیار شبیه شیوهٔ یاربوخ بود.

**متمتیکال ریویوز.** تسنترالبـلات تحت‌هدایت نویگـه باوئر بـه موفقیت دست یافت و به‌صورت عمده‌ترین مجلهٔ نقد و بررسی در ریاضیات درآمد. یاربوخ که شجاعانه تا شمارهٔ۴ جلد ۶۸ (شامل بررسی مقالات سال ۱۹۴۲) به انتشارش ادامه می‌داد در اواسط ۱۹۴۴ ازانتشار بازایستاد ولی البته قبل‌ازآن اهمیت خود را در بین پژوهشگران از دست داده‌بود. همان‌طور که جنگ جهانی‌اول به یاربوخ آسیب رساند، تسنترالبـلات هم مدت‌کوتاهـی پس‌از تأسیس خـود از اوضاع سیاسی که خارج از کنترلش بود، زیان بسیار دید. سیاست‌ضدیهودی وضدشوروی‌نازیها هیأت ویراستاران مجله را زیر فشار گذاشت‌که ازهمکاری ناقدان یهودی و شوروی استفاده نکند. نویگه باوئر گرچه در۱۹۳۴ گوتینگن را ترك‌کرد وبه‌دانشگاه کیلهاك رفت ولی تا ۱۹۳۸ به‌ویراستاری تسنترالبلات ادامه داد. در این سال، دخالت سیاست در کار این مجلـه به‌حد غیر قابل تحملی رسید و او و سایر اعضای هیأت ویراستاران از مجله کناره گرفتند. علی‌رغم این مشکـلات، تسنترالبلات به‌کارش ادامه داد و صرفنظر از وقفه‌ای که ازنوامبر۱۹۴۴ تا ژوئن۱۹۴۸ به‌طول انجامید، انتشار آن تا به‌امروز ادامه یافته‌است.

در سال ۱۹۳۸ مسائل جدیدی رخ نمود: جنگی که درشرف وقوع‌بود، انتشار مجله و همکاری بین‌المللی را دشوارمی‌ساخت، به‌ویژه اینکه محل انتشار تسنترالبـلات شهر برلین بود. به‌علاوه، مهاجرت گروه‌کثیری‌از ریاضیدانان پژوهشگر به‌ایالات متحده (که در عالم تحقیقات ریاضی قدرتی به‌حساب می‌آمدند) باعث انتقال مرکز ثقل ریاضیات از اروپای مرکزی به‌آمریکا شده‌بود. داستان بنیادگذاری متمتیکال ریویوز داستان جالبی است که در فصلی از کتاب تاریخ پنجاه‌سال دوم [P] آمده و تفصیل آن را در اینجا نمی‌آوریم. (مرجع [R] را نیز ببینید.) خلاصهٔ داستان این است که بنیادهای کارنگی و راکفلر و انجمن آمریکایی فلسفه اعاناتی برای انتشار یك مجلـهٔ نقدکنندهٔ جدید پرداختند و این مجلـه که متمتیکال ریویوز نامیده شد با بودجهٔ سالانهٔ ۲۰۰۰۰دلار شروع به‌کار کرد. هیأت اجرایی مجلهٔ جدید متشکل بود از اسوالدوبلن (رئیس)، تی. سی. فرای، و وارن ویور، و این هیأت از همکاری فعال افراد برجسته‌ای چـون اتو نویگه باوئر و تامارکین (که در آن زمـان هر دواستاد دانشگـاه براون بودند) برخـوردار بود. متمتیکال ریویوز (MR) بررسی انتشارات پژوهشی ریاضی را از مقالات و کتابهـایی شروع کرد که از نیمهٔ ۱۹۳۹ به‌بعـد منتشر می‌شدند. تصور کار شاقی که برای راه‌اندازی مجله در نیمهٔ دوم سال ۳۹ انجام گرفت دشوار است: مجله‌ها وکتابهای زیادی باید فراهم می‌شد، ناقدان بسیاری باید به‌کار گرفته می‌شدند، امکانات چاپ باید مهیا می‌گشت و.... اولین شمارهٔ MR که‌تاریخ ژانویهٔ ۱۹۴۰ را داشت شامـل ۱۷۶ بررسی در ۳۶صفحـه بود. اولین جلد این‌مجله، دقیقاً ۴۰۰ صفحه داشت و ۲۱۲۰ بررسی را کـه به‌وسیلهٔ ۲۸۷ نفر نوشته شده‌بود، دربرمی‌گرفت. گرچه تعدادی‌از این بررسیها را ویراستاران مجله نوشته بودند و تعدادی هم فقط شامل عنوان آثار بود، کوشش نقدنویسان اولیهٔ این مجلـه برای

1. *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*

تدارك مطالب آن نمایان است.

این ناقدان افراد بسیار ممتازی نیز بودند. نام تقریباً تمامی ریاضیدانان پیشرو آمریکا در آن زمان، در فهرست نقد نویسان MR دیده می‌شود. گرچه بیشتر ناقدان مقیم آمریکا وکانادا بودند، عده‌ای نیز از کشورهای دیگر (بریتانیا، هلند، سوئد، فرانسه، شوروی و غیره) با مجله همکاری داشتند. اگر شرایط بحرانی و ازهم گسیختگی اوضاع را که در آن زمان به‌علت بروز جنگ پیش آمد به‌یاد آوریم، موفقیت چنین پروژه‌ای جالبتر به‌نظر می‌رسد. متمتیکال دیویوز دین بزرگی به‌این افراد و به‌خصوص به اتو نویگه‌باوئر دارد که‌درچنان دوران دشواری‌ازتاریخ، قدرت‌فکری و انرژی لازم‌را برای قبول چنین مسؤولیتی داشت. او توانست جمع کثیری از ریاضیدانان برجسته را برای مشارکت دراین کار برانگیزاند.

## ۲. از چاپ مقاله تا چاپ نقد یا چکیده در متمتیکال ریویوز

### چه مقاله‌هایی دراین‌مجله بررسی می‌شوند؟

ویراستاران این مجله در بیان‌نامهٔ خود در شمارهٔ ژانویهٔ ۱۹۸۷ مجله می‌نویسند: «متمتیکال دیویوز نقد یاچکیدهٔ تمام مقالات و کتابهایی را که حاوی‌کار تازه‌ای در ریاضیات درسطح تحقیقاتی باشند، چاپ می‌کند.» این نشریه از طریق ارتباط با دانشگاهها و ناشران سراسر جهان سعی می‌کند شماره‌های تمام مجلاتی را که احتمال می‌رود «حاوی‌کار تازه‌ای در ریاضیات درسطح تحقیقاتی باشند» به دست آورد. چنین مجلاتی، طیف وسیعی را ــ از مجلهٔ کرله[1] که در ۱۸۲۶ تأسیس شد و مجلات آمریکایی که در قرن نوزدهم پایه‌گذاری شده‌اند تا مجلهٔ فوروم ماتماتیکوم[2] که اولین شمارهٔ آن در ۱۹۸۹ منتشرشد ــ تشکیل می‌دهند. مثلاً ازجمهوری خلق چین تعداد فزاینده‌ای مجله (درحال‌حاضر ۱۰۰ مجله) به‌دفتر متمتیکال دیویوز می‌رسد. به‌علاوه تعدادی از مجلات تحقیقاتی در زمینهٔ فیزیك، مهندسی و سایر رشته‌ها که احتمال می‌رود حاوی کاربرد تحقیقات ریاضی باشند به‌طور منظم دریافت می‌شود. رویهمرفته درحال‌حاضردرحدود ۱۸۰۰ مجله به‌دفتر MR می‌رسد که ۴۰۰ تا از آنها به‌طورکامل نقد و بررسی می‌شوند.

انتشار تحقیقات ریاضی در انحصار مجله‌ها نیست. قسمتی از این تحقیقات درگزارشهای کنفرانسها و سایر مجموعه‌ها و نیز در تکنگاریها و کتابهای مستقل به‌چاپ می‌رسد. ناشران به‌طور منظم فهرستهای مفصلی‌ازکتابها ومجموعه‌های خود درزمینهٔ ریاضیات و رشته‌های کاربردی را برای نقد و معرفی به‌دفتر MR می‌فرستند و کاتالوگهای مؤسسات نشر سراسر جهان مرتباً بازبینی می‌شود تا کتابهای قابل نقد انتخاب‌شوند. درحال‌حاضر هفته‌ای ۲۳۰عنوان (کتاب و شمارهٔ مجله) به‌دفتر این نشریه می‌رسد.

هر مقاله یا کتاب را دست کم یکی از چهارده ویراستار متمتیکال دیویوز بازبینی می‌کند تا ببیند قابل نقد ومعرفی است یا خیر، ومقاله یاکتابی‌قابل‌نقد به حساب می‌آیدکه حاوی ریاضیات جدیدی باشد، خواه محض و خواه کاربردی. (برخی‌ازمتون مورد علاقهٔ ریاضیدانان پژوهشگر ازقبیل کتابهای‌درسی پیشرفته ومقالات توصیفی هم ممکن‌است انتخاب‌شوند.) مطالبی انتخاب نمی‌شوند که یا حاوی تحقیق در ریاضیات نباشند، یا ریاضیات جدیدی در بر نداشته و بسیار مقدماتی باشند، و یا به‌صورت چکیده‌ای بدون اثبات کامل باشند. مقاله‌هایی‌که انتشار عام نیافته‌اند،ازقبیل پیش‌چاپها یا گزارشهای فنی،نقد نمی‌شوند چون فرض‌براین‌است که بعداً صورت چاپ‌شدهٔ آنها نقد خواهد شد.

### مقاله‌ها وکتابها چگونه رده‌بندی می‌شوند؟

در هر روزکاری ویراستاران متمتیکال دیویوز ۲۰۰ عنوان مقاله و کتاب را که از مرحلهٔ انتخاب بیرون آمده‌اند، رده‌بندی می‌کنند. این رده‌بندی مطابق رده‌بندی فهرست انتشارات ریاضی امروز[1] (CMP) صورت‌می‌پذیرد. ویراستارممکن است براساس ملاکهای مختلفی تصمیم بگیرد که مطلب باید در چه رده‌ای قرار گیرد. در بیشتر موارد، او براساس اطلاعات خود از رشتهٔ مربوطه‌و بررسی عنوان و خلاصه یا بازبینی خود مطلب تصمیم می‌گیرد. گرچه ممکن است مؤلفان همیشه با رده‌بندی ویراستاران این‌مجله موافق نباشند، ولی در این مجله سعی می‌شود رده‌بندی مقاله‌ها وکتابها به‌صورت سازگار انجام گیرد.

رده‌بندی مقاله‌ها و کتابهایی که در زمینه‌های جدید و درحال گسترش نوشته‌شده‌اند از همه دشوارتر است زیرا این رشته‌ها غالباً پس‌از تثبیت نظامهای رده‌بندی پدید آمده‌اند. ویراستاران متمتیکال دیویوز همراه با ویراستاران تمتر البلات مشغول تجدید نظر در شیوهٔ رده‌بندی هستند تا شیوهٔ جدیدی پدید آید که هم رشته‌های‌جدید در آن‌منظورشوند وهم ازپایداری‌نسبی برخوردار باشد وبتواند مدتهای طولانی به‌کار رود. این‌نظام جدید احتمالاً در ۱۹۹۱ در MR و CMP به‌کار خواهدرفت.

### نقدنویس چگونه انتخاب می‌شود؟

طبق رده‌بندی متمتیکال دیویوز، مطالب مورد بررسی در ۶۱حوزه قرار می‌گیرند که این۶۱حوزه بین ویراستاران‌مجله، حتی‌المقدور براساس تخصص آنها، تقسیم‌می‌شود. ویراستارهربخش، نقدنویس را ازمیان بیش از ۱۴۰۰۰ نفر ناقد بالقوه انتخاب می‌کند. مثلاً فرض‌کنید مقاله‌ای که به‌زبان فرانسه نوشته شده متعلق به بخش ۲۰F باشد که عبارت است از جنبه‌های خاصی از گروههای‌متناهی یا نامتناهی. ویراستار در ابتدا احتمالاً درجستجوی‌کسی برمی‌آید که به‌این‌بخش ابراز تمایل کرده (و اشتیاقی هم به نقد و بررسی مقالات فرانسوی‌زبان نشان داده) است. اگرمقاله مربوط به‌مسائل تصمیم در مورد گروهها باشد، دامنهٔ انتخاب نقدنویسان بالقوه تنگتر می‌شود و به‌افرادی که به‌زیر بخش ۲۰F۱۰ علاقه‌مندند، محدود می‌گردد. این مقاله ممکن است یك رده‌بندی فرعی هم داشته‌باشدکه آن‌را دربخش۰۳ (منطق و مبانی ریاضی) قراردهد. دراین‌صورت، ویراستار به‌جستجوی افرادی می‌پردازدکه‌در هردو مبحث صاحبنظر باشند. درمورد تعداد مقالات وکتابهایی‌که برای نقد و بررسی به‌یك‌نفرواگذار می‌شود، محدودیتی وجود دارد تا

1. Crelle  2. *Forum Mathematicum*

1. Current Mathematical Publications

کار بیش‌ازحد به‌یك‌نفر تحمیل نشود.

نقدنویس معمولاً ظرف دو ماه پس از دریافت مقاله یا کتاب نقد خود را به‌دفتر MR می‌فرستد، ولی اگر او پس‌از مدت زمان معقولی کار خود را انجام نداد، ویراستار که می‌بیند مقاله «کهنه» شده باید چاره‌ای بیندیشد و مزایای انتظار طولانی برای دریافت یك بررسی کامل را در یك کفهٔ ترازو بگذارد و فایدهٔ انتشار به‌موقع توصیفی از مقاله را در کفهٔ دیگر، و آنها را با هم بسنجد. هدف اصلی از یك نقد و معرفی، کمك به‌خواننده است که تصمیم بگیرد به‌مقالهٔ اصلی رجوع کند یا خیر. با توجه به این نکته، گرچه گاه در چنین مواردی مقاله برای فرد دیگری فرستاده می‌شود ولی اغلب، ویراستار تصمیم می‌گیرد که خلاصه یا قسمتی‌ازمقاله را به‌عنوان نقد و معرفی آن به‌چاپ بسپارد. این امر باعث می‌شود که گاه‌طول‌نقدها درمورد دومقالهٔ همتراز یکسان نباشد و باید تأکید کرد که چنین تفاوتی نشان دهندهٔ این نیست که به‌نظر متمتیکال ریویوز یکی‌از آن‌دو مستحق نقد اساسیتر و جدیتری است.

**از انتشار مقاله تا انتشار نقد آن چقدر طول می‌کشد؟**

فرض کنید مقاله‌ای چاپ‌شده، مجله یا مجموعهٔ حاوی آن به‌دفتر متمتیکال ریویوز رسیده، مقاله قابل نقد تشخیص داده شده، نقدنویسی برای آن انتخاب شده، واوهم‌کار خود را انجام داده و نقد را تحویل داده است. حال چه اتفاقی می‌افتد؟ ابتدا مطلب ویرایش فنی می‌شود (نوع حروف آن برای حروفچینی کامپیوتری مشخص می‌شوند)؛ مراجعی که درنقد ذکر شده‌اند ازلحاظ درستی وکامل‌بودن بررسی می‌شوند و با سبك مجله درمورد درج مراجع هماهنگ می‌شوند. سپس مطلب ویرایش می‌شود. در این مرحله، ویراستار مسؤول بخشی که مقاله ابتدائاً جزء آن‌بخش به حساب آمده، نقد را ازلحاظ مفهوم ریاضی آن مطالعه می‌کند. به‌علت اینکه هر ویراستار در هرسال حدود ۴۰۰۰ نقد را باید بخواند، برای او بررسی نقد با مراجعه به‌مقالهٔ اصلی مقدور نیست ولی ویراستاران با استفاده از تجربه و مهارت خود موارد «مشکوك» را تشخیص می‌دهند و درمواردلازم به‌مقالهٔ اصلی رجوع می‌کنند تا حکم یا فرمول مبهمی را روشن سازند. ویراستار، نقد را از لحاظ وضوح و درستی بیان هم بررسی و تصحیح می‌کند. اگر نقد شامل احکام انتقادی باشد، ویراستار می‌کوشد مطمئن شود که انتقاد منصفانه، منطبق بر ذوق سلیم، و عاری از خطاست. ویراستار از مسؤولیت خود درقبال مؤلف آگاه است زیرا مؤلف مقاله نمی‌تواند به‌نقدی که در متمتیکال ریویوز چاپ می‌شود، «پاسخ بدهد». مرحلهٔ نهایی‌درفرایند ویرایش، انتخاب رده‌مناسب است. از ناقد خواسته می‌شود شماره‌ای پنج‌رقمی برای مقاله‌ای که نقدمی‌کند، پیشنهاد نماید. ویراستاران این پیشنهادها را با اطلاعات خود درمورد نظام رده‌بندی می‌آمیزند و رده‌بندی اولیه‌را اصلاح می‌کنند. رده‌بندی حاصل همراه با نقد و درفهرستهای راهنمای MR می‌آید. نقد ویرایش شده، با استفاده از سیستم حروفچینی کامپیوتری AMS-TEX حروفچینی می‌شود و سپس با دقت نمونه‌خوانی می‌شود (هرنقد را یك کمك‌ویراستار و دو ویراستار می‌خوانند و معمولاً برای نمونه‌خوانی به‌نزد نقدنویس فرستاده نمی‌شود.) هر چهارهفته یکبار، فرمهای حروفچینی شده و تصحیح شده باهم جمع می‌شوند تا یك‌شماره از متمتیکال ریویوز را تشکیل دهند. یك برنامهٔ مخصوص کامپیوتری، صورت کامپیوتری نقدها (ضبط شده روی نوار یا دیسك) را تنظیم و صفحه‌بندی می‌کند.

برخی از مراحلی که برشمردیم، در کنترل متمتیکال ریویوز نیست. مقاله نمی‌تواند نقدشود مگر اینکه مجله یا مجموعهٔ حاوی آن به‌دفتر MR رسیده باشد. اخیراً شیوهٔ جدیدی برای سرعت بخشیدن به انتشار بررسیها در پیش گرفته شده: مقاله‌ای پژوهشی که برای چاپ در مجله‌ای پذیرفته می‌شود، به‌محض پذیرش به‌دفتر MR نیز فرستاده می‌شود و همان صورت‌اولیهٔ مقاله وارد فرایند نقد و بررسی می‌گردد. گاهی مقاله‌ای که قرار است نقد شود مدتها روی میز ناقد می‌ماند و تذکراتی هم که مرتباً به او داده می‌شود بی‌اثر می‌ماند و تا یك سال پس از ارسال مقاله، نقد آن را به متمتیکال ریویوز نمی‌فرستد. برخی از نقدها بیشتر وقت می‌گیرند. ویرایش و آماده‌سازی نقدهایی که با مراجع متعدد یا فرمولهای پیچیده و یا نمودار همراه‌اند، بیشتر از نقد مختصری که نمادهای خاص یا مرجع ندارد، زمان می‌برد. در ۱۹۸۸ تدابیری اتخاذ شد که نقدکنندگان بتوانند مطالب خود را با سیستم حروفچینی کامپیوتری‌تك تهیه‌کنند و بفرستند. درمورد نقدهایی که به‌این‌طریق تهیه می‌شوند مرحلهٔ حروفچینی حذف می‌شود و به‌زمان کمتری نیاز خواهد بود. به‌شرط اینکه نقدنویسان درکار تأخیر نکنند، انتظار معقول این است که بیشتر مقاله‌ها وکتابها در سال انتشار آنها یاسال بعدازآن نقد یا معرفی شوند.

ترجمهٔ سیامك کاظمی

مراجع


[M] Miler, G. A., *Historical introduction to mathematical literature*, Macmillan Co., New York, 1916.

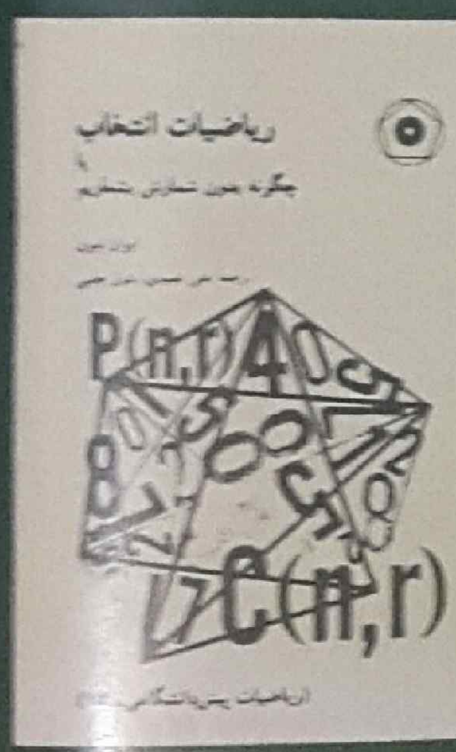
[P] Pitcher, Everett, *A history of the second fifty years, American Mathematical Society, 1939- 1988*, pp. 69- 89, A. M. S. Centennial Publications, vol. I, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1988.

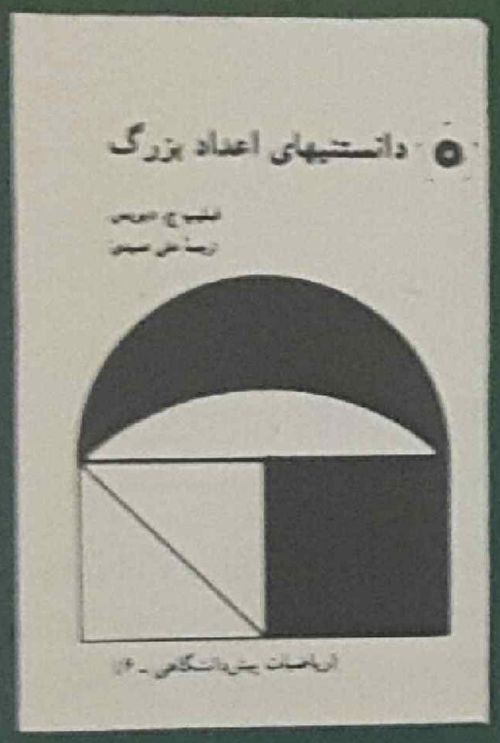
[R] Reingold, Nathan, *Refugee mathematicians in the United States of America, 1933- 1941; reception and reaction, in A century of mathematics in America, Part I*, pp. 175- 200, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1988.

[W] Wölffing, Ernst, *Über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereini-gung 12 (1903), 408- 426.

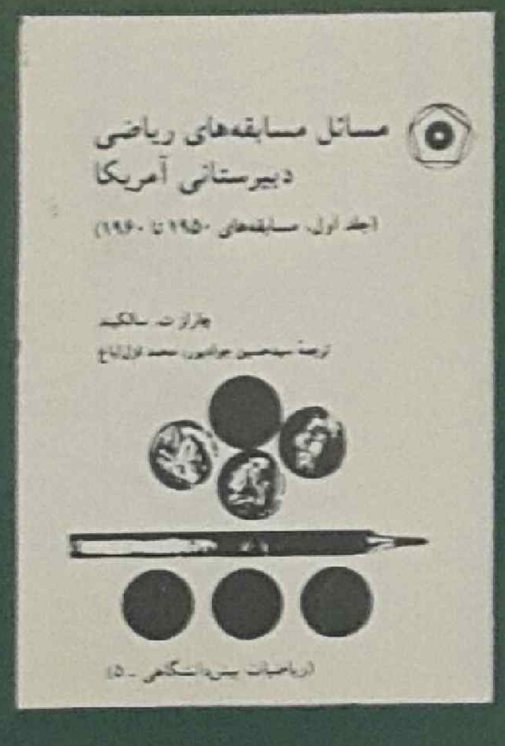

●●●●●●●●●●●●●●●●

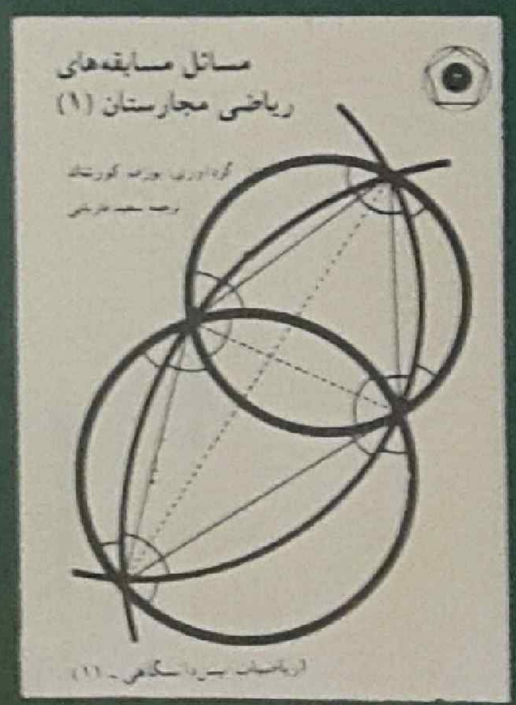
● این مقاله، ترجمهٔ قسمتهایی از ویژه‌نامه‌ای است که متمتیکال ریویوز به مناسبت پنجاهمین سال فعالیت خود انتشار داده است. قسمت اول از نوشتهٔ رابرت بارتل تحت عنوان «تاریخچهٔ مختصرتوسعه‌جات ریاضی» و قسمت دوم از نوشتهٔ چین کیستر تحت عنوان «از انتشار مقاله‌تا انتشار نقد ان» ترجمه شده است. ترجمه با تلخیص انجام شده است.


ریاضیات انتخاب
P(n,r)
C(n,r)


دانستنیهای اعداد بزرگ


مسائل مسابقه‌های ریاضی
دبیرستانی آمریکا


مسائل مسابقه‌های ریاضی
دبیرستانی آمریکا


مسائل مسابقه‌های
ریاضی مجارستان (۱)