کاردانو چه کرد که خیام نکرد؟

امیر اصغری[۱]

هدف این مقالهٔ کوتاه مقایسهٔ روش‌های خیام و کاردانو[۲] در بررسی و حل معادله‌های درجهٔ سوم و همچنین مقایسهٔ مسیرهایی است که روش‌های آنها برای ریاضیدانان بعدی گشود.

خیام و کاردانو و معادله‌های درجهٔ سوم

فاصلهٔ تاریخی خیام (۴۳۹-۵۲۶ق/ ۱۰۴۸-۱۱۳۱م) و کاردانو (۱۵۰۱-۱۵۷۶م) حدود پانصد سال است. هر دو همه کار می‌کردند، شعر می‌گفتند، ریاضی می‌ورزیدند و اهل فلسفه بودند. آنچه بیش از هر چیز دیگری آن دو را به هم پیوند می‌دهد، علاقه‌مندی آنها به معادله‌های درجهٔ سوم است و اینکه هر دوی آنها موفق به «حل» معادله‌های درجهٔ سوم شدند. اما حاصل کار آنها، دو مسیر تاریخی کاملاً متفاوت رقم زد.

پیش از اینکه به سرنوشت راه‌حل‌های آنها بپردازیم طبعاً باید بدانیم خود آن راه‌حل‌ها چه بوده است. برای این کار از یکی از معروف‌ترین انواع معادلهٔ درجهٔ سوم که هر دو آن را بررسی و حل کرده‌اند استفاده می‌کنیم.

$$x^3 + ax = b$$

خیام و کاردانو برای بیان معادله‌های درجهٔ سوم و راه‌حل آنها از نمادگذاری جبری که امروزه متداول است استفاده نکرده‌اند. جبر در دورهٔ خیام کاملاً لفظی و در دورهٔ کاردانو لفظی ولی در مسیر حرکت به نمادگذاری بود. بنابراین هیچکدام معادلهٔ مورد استفاده در این مقاله را به شکل $x^3 + ax = b$ ننوشته‌اند. برای هر دو، این معادله، مکعب چیزی است که با ضریبی از خود آن چیز جمع شده و عددی شده است. در ادامه، برای راحتی و بدون توجه به تفاوت‌های زبان مورد استفاده توسط خیام و کاردانو، برای ارجاع به «چیز» مورد جستجو در معادله، همچنان که

---

۱. مدرس آموزش ریاضی، دانشگاه جان مورس (لیورپول)، a.h.asghari@ljmu.ac.uk

2 .Girolamo Cardano

جیرولامو کاردانو ریاضی‌دان نامدار ایتالیایی که در فیزیک، مکانیک، پزشکی، فلسفه، دین و موسیقی هم آثاری نگاشت.

امروزه متداول است از واژه‌های «مجهول» یا «ریشه» استفاده خواهیم کرد.

خیام و کاردانو در تبیین معادله‌های درجهٔ سوم از اعداد منفی استفاده نکرده‌اند. بنابراین، دو معادلهٔ زیر را همچون دو نوع مختلف از معادله‌های درجهٔ سوم بررسی کرده‌اند.

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 + b = ax$$

با پذیرش اعداد منفی و صفر به عنوان یک عدد، هر دوی این معادله‌ها را می‌توان به شکل زیر نوشت:

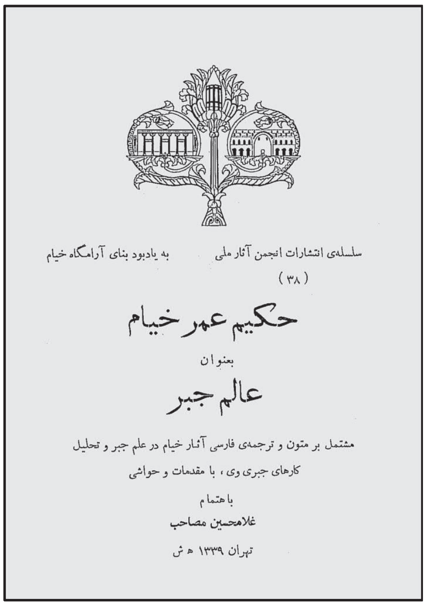
$$x^3 + Ax + B = 0$$

و مهم‌تر اینکه، با پذیرش اعداد منفی و صفر به عنوان یک عدد، شکل کلی معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را می‌توان به شکل $x^3 + Ax + B = 0$ تبدیل کرد و نیازی به دسته‌بندی معادله‌های درجهٔ سوم به سبک خیام یا کاردانو وجود ندارد. بنابراین، به تعبیری معادلهٔ مورد استفاده در این مقاله می‌تواند به تنهایی نشان‌دهندهٔ نحوهٔ برخورد خیام و کاردانو با معادله‌های درجهٔ سوم باشد.

راه‌حل خیام

در سال‌های اخیر بازسازی راه‌حل‌های خیام توسط هندسهٔ دکارتی متداول شده است (برای مثال، امیر معز، ۱۹۶۲). چنین بازسازی‌هایی اگر چه می‌تواند تصویر روشنی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم در اختیار خوانندگان معاصر قرار دهد، در بررسی تاریخی کار خیام باید از آنها پرهیز شود چرا که ماهیت اصلی کار خیام و هوشمندی و نبوغ او در نحوهٔ استفاده از هندسهٔ اقلیدسی، مقاطع مخروطی و آگاهی شگفت‌انگیز او از نسبت و تناسب را پنهان می‌کند. ولی چون خیام کتاب جبر و مقابله‌اش را برای محققان و نه محصلان نوشته است، خود او هم تلاش زیادی برای «توضیح» راه‌حل‌ها نمی‌کند. به تعبیری، خیام پیرو سنتی است که در آن مسئله مطرح و راه‌حل در راستای پیش رونده‌ای عرضه و در آخر جواب مسئله هویدا می‌شود و کشف ساختار راه‌حل به عهدهٔ خواننده می‌ماند. به طور کلی، درک راه‌حل‌های او برای خواننده‌ای که باید ساختار روش‌های جادویی او را برای حل هر مسئله از میان چندین صفحهٔ متن پیدا کند ساده نیست. به همین دلیل، در مقالهٔ حاضر راه‌حل خیام برای حل معادلهٔ $x^3 + ax = b$ با پایبندی به ماهیت آن بازسازی می‌شود.

برای خیام معادلهٔ $x^3 + ax = b$ برابری دو حجم است. b در طرف راست معادله، حجم یک مکعب مستطیل است. هدف از حل معادله این است که این حجم داده شده به شکل حاصل جمع حجم یک مکعب به ضلع x و مکعب مستطیلی که مساحت قاعدهٔ آن a و ارتفاع آن x است نوشته

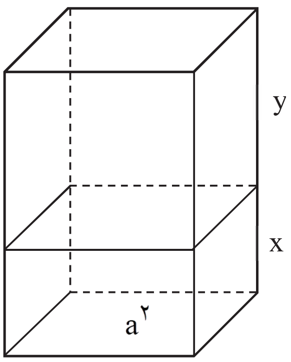

سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی
(۳۸)
به یادبود بنای آرامگاه خیام

حکیم عمر خیام
بعنوان
عالم جبر

مشتمل بر متون و ترجمهٔ فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل کارهای جبری وی، با مقدمات و حواشی
باهتمام
غلامحسین مصاحب
تهران ۱۳۳۹ ه ش

شود. با توجه به نحوهٔ استفادهٔ خیام از ضریب x، در ادامه راحت‌تر است که معادله را به شکل $x^3+a^2x=b$ در نظر بگیریم.

می‌دانیم که می‌توان مکعب مستطیلی با حجم b را مکعب مستطیلی با قاعدهٔ a^2 و ارتفاع h در نظر گرفت (شدنی بودن این تغییر را خیام در «مقدمات» کتاب ذکر و اثبات کرده است). به این ترتیب معادله چنین تعبیر می‌شود که می‌خواهیم مکعب مستطیل (به حجم b)، قاعدهٔ مربع شکل (به مساحت a^2) و ارتفاع h (که روش هندسی یافته می‌شود) را به دو مکعب مستطیل تقسیم کنیم، چنان‌که ارتفاع یکی از آنها x است و حجم دیگری x^3 باشد (شکل ۱؛ شکل‌های این مقاله به جز مواردی که به صراحت ذکر می‌شوند، در متن‌های مورد مطالعه نیستند و برای درک بهتر راه‌حل‌ها طراحی شده‌اند).



شکل ۱. حجم کل شکل برابر b است. حجم مکعب مستطیل به ارتفاع y برابر $x^۳$ است.

به زبان امروزی، x را باید چنان بیابیم که برابری زیر برقرار باشد:

$$a^2 \cdot y = x^3$$

به زبان تناسب‌ها، زبان مورد استفادهٔ خیام، x را باید چنان بیابیم که برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{x}{y}$$

اما دانش تناسب‌ها پس از مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس مورد استفاده و توجه بوده و خیام علاوه بر آگاهی کامل از آن، دربارهٔ آن نوشته است (وهاب‌زاده، ۱۹۹۷). پس شاید برایش سخت نبوده است که این تناسب را در گزارهٔ زیر ببیند:

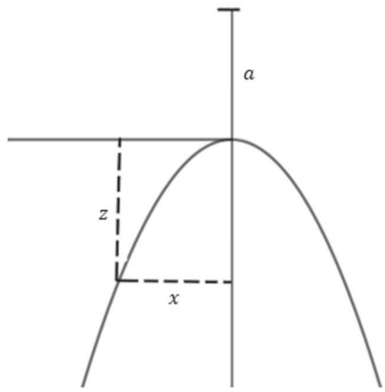
اگر (پاره‌خط‌های) a، x، z و y متناسب باشند ($\frac{a}{x}$ برابر است با $\frac{x}{z}$ و $\frac{x}{z}$ برابر است با $\frac{z}{y}$) آنگاه منظورش حاصل می‌شود:

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{x}{y}$$

به این ترتیب مسئله تبدیل می‌شود به پیدا کردن پاره خط z که تناسب‌های زیر را برقرار کند:

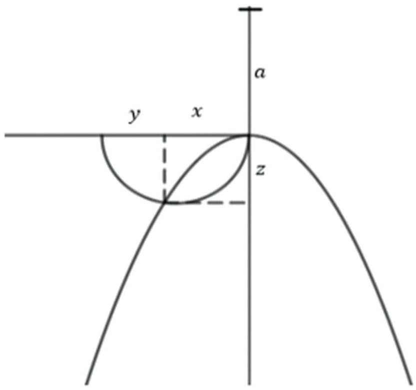
$$\frac{a}{x}=\frac{x}{z}=\frac{z}{y}$$

تنها پاره‌خط معلوم در تناسب‌های بالا a است و باقی پاره‌خط‌ها باید یافته شوند. ولی همین تنها پاره‌خط معلوم برای مشخص کردن سهمی‌ای که با تناسب $\frac{a}{x}=\frac{x}{z}$ تعریف می‌شود کافی است (شکل ۲).



شکل۲. هر دو پاره خط x و z که به شکل بالا توسط سهمی مشخص می‌شوند، در تناسب $\frac{a}{x}=\frac{x}{z}$ صدق می‌کنند.

زوج پاره‌خط‌های حاصل از نقطه‌های روی سهمی در تناسب $\frac{x}{z}=\frac{a}{x}$ صدق می‌کنند. زوج پاره‌خط مطلوب ما، آن x و z هستند که در تناسب $\frac{z}{y}=\frac{a}{x}$ هم صدق می‌کنند. این تناسب یعنی z واسطهٔ هندسی بین x و y است. نه x معلوم است و نه y. ولی می‌دانیم $x+y=h$. دایره‌ای به قطر h روی خطی که بر a عمود است رسم می‌کنیم چنان‌که مطابق شکل زیر بر a مماس باشد. هر نقطه روی این دایره دو پاره‌خط را مشخص می‌کند که در تناسب $\frac{z}{y}=\frac{x}{z}$ صدق می‌کنند (شکل ۳؛ بازآفرینی شکل خیام).



شکل۳. پاره‌خط x، جواب معادلهٔ $x^3+a^2x=b$ است.

پاره‌خطی که ریشهٔ معادله است توسط نقطه‌ای مشخص می‌شود که هم روی سهمی و هم روی دایره است.

راه‌حل کاردانو

راه‌حل کاردانو هم همچون خیام مورد بازسازی‌های تاریخ نگارانه قرار گرفته است و همهٔ آنچه کاردانو انجام داده است «در اتحاد زیر خلاصه می شود» (ایوز، ص ۱۷۳):

$$(m-n)^3+3mn(m-n)=m^3-n^3$$

اکنون اگر فرض کنیم که:

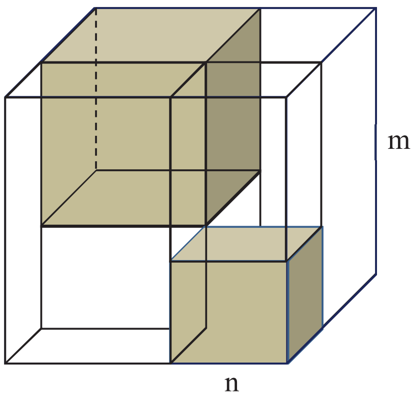
$$m-n=x$$

$$3mn=a$$

$$m^3-n^3=b$$

اتحاد بالا به شکل $x^3 + ax = b$ نوشته می‌شود. یعنی بـا پیـدا کـردن m و n، (از دو معادلـۀ $3mn = a$ و $m^3 - n^3 = b$) می‌توانیم x را از برابری $x = m - n$ بیابیم. به این ترتیب فرمـول معروف به فرمول تارتاگلیا-کاردانو برای حل معادلۀ $x^3 + ax = b$ بـه دسـت می‌آیـد.[1] (کـاردانو می‌گوید که فرمول از تارتاگلیا به او رسیده و او آن را اثبات کرده است).

گاهی این بازسازی‌های تاریخ‌نگارانه به متن کاردانو نزدیک‌ترند و استدلال هندسـی او را بـرای معادلۀ بالا بازسازی می‌کنند (دانهام، ص ۱۴۳):



شکل ۴. بازسازی شده از شکل ویلیام دانهام

در شکل۴، ضلع بزرگترین مکعب m و ضلع مکعب کوچک n اسـت و اضـلاع بـاقی مکعـب (مستطیل)ها و در نتیجه حجم آنها به کمک این دو مقدار قابل محاسبه است. عبارت زیر، به زبان جبری (نه کلامی به سبک کاردانو) حجم مکعب (به ضلع m) را به شکل مجمـوع شـش مکعـب مستطیل داخلی بیان می‌کند (برای تسهیل تطابق شکل با عوامل جمع، در هر مورد بـرای محاسـبۀ حجم، ضلع پایین به عنوان قاعده در نظر گرفته شده و قاعده در ارتفاع ضرب شده است).

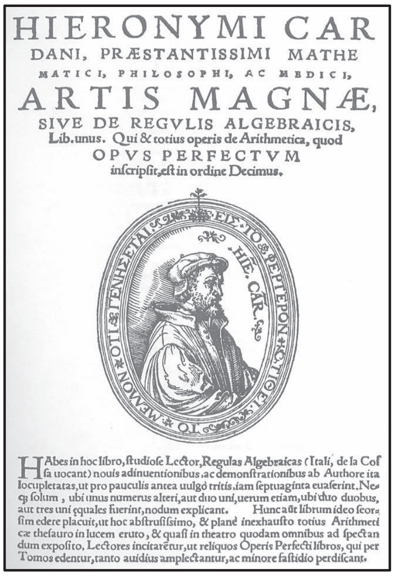
$$m^3 = n^3 + (m-n)^3 + (m-n)\cdot n\cdot m + (m-n)\cdot n\cdot m + n^2\cdot(m-n) + (m-n)^2\cdot n$$

با ساده کردن و مرتب‌سازی این عبارت، اتحاد مورد اشارۀ هوارد ایوز حاصل می شود:

$$(m-n)^3 + 3mn(m-n) = m^3 - n^3$$

1. $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$

بازسازی ویلیام دانهام به ابزار مورد استفادهٔ کـاردانو برای استدلال منجر به فرمول کاردانو- تارتاگلیا نزدیک است، ولی بدون توجه به شانهٔ غولی که کاردانو روی آن ایستاده بود، روش او مانند خرگوشی می‌ماند که ناگهان از کلاه شعبده‌بازی خارج شده است. غول مـورد نظـر خیام نیست، چون نه کـاردانو بـه او اشـاره‌ای دارد، نـه اینکه روش‌هایشان هیچ‌گونه شباهتی با هم دارند (اگـر چه هر دو بـه اقلیـدس احتـرام گذاشـته‌اند). در کمـال تعجب، غول مورد نظر، حدود ۳۰۰ سال قبل از خیام می‌زیسته است.


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI, ARTIS MAGNÆ, SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

کتاب فن کبیر (*Ars Magna*) کاردانو
دربارهٔ جبر، ۱۵۴۷

خوارزمی (نیمهٔ دوم سدهٔ ۲– نیمهٔ اول سدهٔ ۳هـ)

اولین جملـهٔ فصـل اول کتـاب کـاردانو بـه معرفـی خوارزمی اختصاص دارد:

«این هنر با محمد پسر موسای عرب شروع شد.»

کاردانو از دسته‌بندی خوارزمی از معادله‌های درجهٔ دوم و راه‌حل آنهـا آگـاه اسـت. او توضـیح مفصلی از هر سه دستهٔ زیر به همان ترتیب مورد استفادهٔ خوارزمی می‌دهد:

$$x^2 + cx = d$$

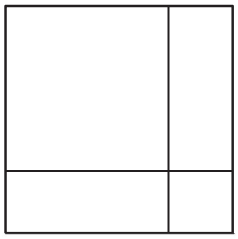
$$x^2 + d = cx$$

$$cx + d = x^2$$

کاردانو در مورد اول و سوم، از شکل‌های خوارزمی برای اثبات راه‌حل جبری استفاده می‌کند و در مورد دوم با اشاره به اینکه خواننده احتمالاً متعجب خواهد شد که او از شـکل محمـد اسـتفاده نکرده است، از شکل به تعبیر خودش ساده‌تری استفاده می‌کند. در این مقاله به دلیلی کـه در زیـر خواهیم دید فقط به معادلهٔ $x^2 + cx = d$ علاقه‌مندیم.

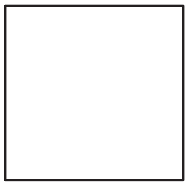
کاردانو از معادلهٔ $x^2 + 6x = 91$ و خوارزمی از معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ برای توضـیح روش کلی حل معادلهٔ $x^2 + cx = d$ استفاده می‌کنند. از آنجا که روش بیان کاردانو کم و بیش بـا روش بیان خوارزمی یکی است، به احترام خوارزمی از معادلهٔ او استفاده می‌کنیم ولی توضیحات زیر در مورد کاردانو هم صادق است.

توضیحات خوارزمی با شکل زیر (شکل ۵) همراه است.



شکل ۵. بازسازی شکل خوارزمی

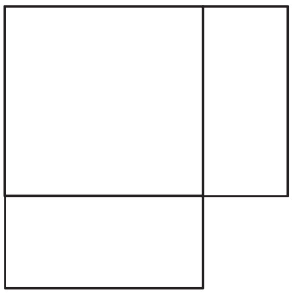
خوارزمی مراحل ساخته شدن شکل را با شروع از مربعی به ضلع مجهول توضیح می‌دهد.



شکل ۶. ضلع این مربع x است.

این مربع به منزلهٔ x^2 است (شکل ۶).

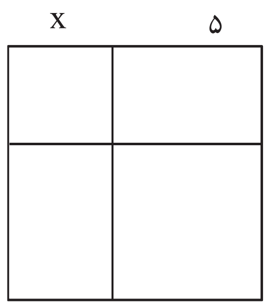
ضریب x (در این مثال، ۱۰) را نصف مـی‌کنیم و دو سـطح در طـرفین مربـع x^2 می‌سـازیم چنانکه مساحت هر سطح به اندازهٔ $5x$ است (شکل ۷).



شکل ۷. مساحت هر یک از دو مستطیل کناری $5x$ است.

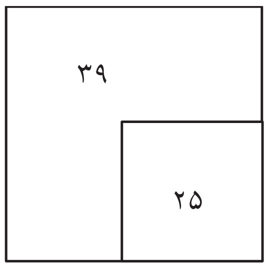
و بالاخره «از همهٔ سطح بزرگتر مربعی باقی می‌ماند که اندازه‌اش پنج ضرب در پنج است» کـه آن را می‌افزاییم تا «سطح بزرگتر تکمیل شود».

اکنون سطح بزرگتر را می‌توانیم به دو شکل ببینم، همچون $(x+5)^2$ (شکل ۸).



شکل ۸. مربع بزرگ به ضلع $(x + 5)$

یا همچون $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ (شکل ۹):



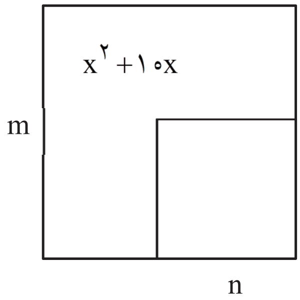
شکل ۹. سطح مربع بزرگ معادل مجموع مربع کوچک و شکل حاصل از معادله است.

و این یعنی $(x + 5)^2 = 64$ و از اینجا x به‌راحتی محاسبه می‌شود.

اکنون سؤال اصلی اینجاست که آگاهی از این روش چگونه می‌توانسته است به کاردانو در حل معادلهٔ $x^3 + ax = b$ کمک کند. برای پاسخ به این سؤال، باید روش خوارزمی را با توجه به هدف آن و نه با توجه به مراحل رسیدن به آن هدف دنبال کنیم.

بازخوانی روش خوارزمی

هدف نهایی خوارزمی در حل معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ تکمیل سطح (مربع) بزرگتر است. با توجه به ماهیت مسئله به راحتی دیده می‌شود که ابعاد مربعی که برای تکمیل سطح بزرگتر لازم داریم چیست. اجازه دهید که فرض کنیم که می‌خواهیم ضلع مربع کوچک‌تر را بیابیم.



شکل ۱۰. بازسازی راه‌حل خوارزمی با فرض اینکه نمی‌دانیم ضلع مربع کوچک چقدر باید باشد.

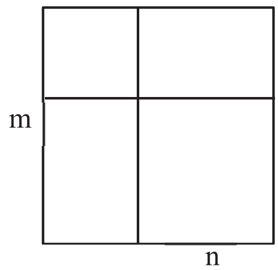
با توجه به شکل ۱۰ داریم:

$$m^2 - n^2 = 39$$

همچنین می‌دانیم که:

$$m^2 - n^2 = (m - n)^2 + 2n\,(m - n)$$

که این هم به راحتی از روی شکل زیر دیده می‌شود:



شکل ۱۱. اثبات هندسی اتحاد

اکنون اگر فرض کنیم که $m - n = x$ ، می‌توانیم اتحاد

$$m^2 - n^2 = (m - n)^2 + 2n\,(m - n)$$

را به شکل $x^2 + 10x = 39$ بنویسیم به شرطی که فرض کنیم $2n = 10$ و در نتیجه $n = 5$ است.

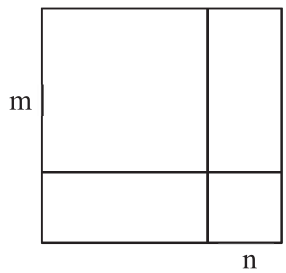
بازخوانی خوارزمی کلید بازخوانی کاردانو است.

بازخوانی روش کاردانو

کاردانو از معادلۀ $x^3 + 6x = 20$ برای توضیح روش کلی حل معادلۀ $x^3 + ax = b$ استفاده می‌کند.

برای مثال، فرض کنید GH^3 به علاوهٔ شش برابر ضلع GH برابر است با ۲۰ و فرض کنید که AE و CL دو مکعب‌اند که تفاضل بین آنها ۲۰ است و حاصل ضرب AC (ضلع یکی) در CK ضلع دیگری، ۲ است، یعنی یک سوم ضریب x. BC را به اندازهٔ CK جدا و علامت‌گذاری می‌کنیم. اگر چنین کنیم، ادعا می‌کنم که پاره‌خط باقی ماندهٔ AB برابر است با GH، و بنابراین مقدار x است، چرا که GH همان x است.

توجه کنید که مربع رسم شده به ضلع GH هیچ نقشی جز معرفی مجهول ندارد. علاوه بر این، مربع به ضلع CK هم می‌توانست کشیده نشود و مسئله را می‌توان با شکل ۱۳ بیان کرد.



شکل ۱۳. بازآفرینی شکل کاردانو با حذف بخش‌های نامربوط

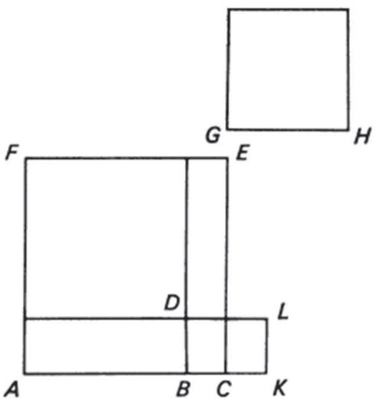
این شکل کاملاً آشناست با این تفاوت که اینجا به جای دیدن مربع‌ها همچون مربع، آنها را باید به شکل قاعدهٔ مکعبی که روی آن ساخته شود دید. اکنون هدف ما تکمیل مکعب بزرگ‌تر، و نه مربع بزرگ‌تر است. ولی می‌توانیم مراحل را مانند قبل دنبال کنیم.

$$m^3 - n^3 = 20$$

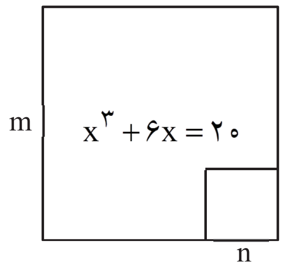
همچنین می‌دانیم که اتحاد زیر برقرار است:

$$(m-n)^3 + 3mn(m-n) = m^3 - n^3$$

اکنون اگر فرض کنیم که $m-n=x$، می‌توانیم اتحاد را به شکل $x^3+6x=20$ بنویسیم به شرطی که فرض کنیم $3mn=6$ که این یعنی $mn=2$ که همان یک سوم ضریب x است.



شکل ۱۲. شکل عرضه شده توسط کاردانو



شکل ۱۴. شکل کاردانو همان شکل خوارزمی است!

کاردانو از درستی این اتحاد مطلع بوده و حتی صراحتاً بیان می‌کند که آن را در فصل شش کتاب اثبات کرده است. ولی احتمالاً چون هنوز اثبات‌ها باید هندسی می‌بودند تا اثبات محسوب شوند، همهٔ استدلال فصل شش را دوباره اینجا و با توجه به نمادگذاری‌های شکل مسئله تکرار می‌کند. به این ترتیب شکلی که ویلیام دانهام برای توضیح کار کاردانو عرضه می‌کند، در واقع فقط برای توضیح این اتحاد است و به راحتی می تواند مستقل از فرایند حل مسئله دیده شود.

نگاهی دوباره به خیام

خیام همانند خوارزمی یکی از ریاضیدانان دورهٔ اسلامی-ایرانی است. خیام هم مثل خوارزمی به عربی می‌نوشت. دلایل دیگری هم برای تعلق آنها به یک حوزهٔ فکری می‌توان یافت. علاوه بر این، فاصلهٔ زمانی خیام از خوارزمی از فاصلهٔ زمانی کاردانو تا خوارزمی به مراتب کوتاه‌تر است. پس چگونه است که خیام آنچه را کاردانو در خوارزمی دید، ندید. در ادامه بعضی از دلایل احتمالی مطرح می‌شود.

دلیل اول: خیام تلاش خودش را کرده ولی راه‌حلی شبیه راه‌حل کاردانو به فکرش نرسیده است. توجه کنید که باور عمومی با استناد به یکی از آثار گمشدهٔ خیام که خود به آن اشاره کرده این است که او با اتحاد دو جمله‌ای با توان‌های حتی بیشتر از سه آشنا بوده است (برگرن، ۲۰۱۷) این آشنایی در حدی است که در ایران مثلث پاسکال را به عنوان مثلث پاسکال-خیام خوانده‌اند. این اتحاد را ریاضیدانان ایرانی قبل از او و نزدیک‌تر به او هم می‌شناختند (یادگاری، ۱۹۸۰)، از جمله ابوبکر محمد کرجی (د حدود ۴۲۰ق). بنابراین، خیام از تنها ابزار جبری مورد استفادهٔ کاردانو آگاهی داشته و آن اتحاد مکعب تفاضل هاست. با توجه به هوشمندی غیر عادی خیام، خیلی عجیب است که به فکر کامل کردن مکعب نرسیده باشد.

دلیل دوم: خیام تلاش خودش را کرده ولی چون به دلایل ریاضی آن مسیر را کافی یا کامل ندانسته مسیر خود را عوض کرده است. در شروع بحث و بعد از بیان روش پیدا کردن جواب معادلهٔ $x^2+10x = 39$ ، خیام دو شرط برای اینکه قاعدهٔ شناخته شده برای پیدا کردن ریشه‌ها به کار رود بیان می‌کند:

شرط اول: ضریب x باید زوج باشد تا بتوان آن را نصف کرد.

شرط دوم: مربع نصف ضریب x به علاوۀ عدد طرف راست معادله دارای جذر کامل باشد.

و می‌گوید بدون این دو شرط «معادله را نمی‌توان به روش عددی حل کرد».

اینکه چرا ناگهان خیام، شرایطی همچون شرایط معادلات دیوفانتی را بر معادله‌های درجۀ دوم تحمیل می‌کند عجیب است، به خصوص که حتی خوارزمی معادله‌ای دارد که در شرایط طرح شده توسط خیام صدق نمی‌کنند. علاوه بر این ریاضیدانان نزدیک‌تر به خیام، از جمله کرجی (د حدود ۴۲۰ق)، در استفاده از اعداد گنگ در حل معادله‌های درجۀ دوم تسلط کامل داشته‌اند (برای مثال، بخش‌هایی از کتاب الفخری نوشتۀ کرجی به کار با رادیکال‌ها اختصاص دارد). بیشتر به نظر می‌رسد که خیام از این به عنوان بهانه‌ای برای بیان اهمیت هندسه در حل معادله‌ها استفاده می‌کند و برای بیان اینکه: «با استفاده از هندسه هیچ‌کدام از این حالت‌ها حل‌نشدنی نیستند».

دلیل سوم: خیام اصلاً تلاشی نکرده است که راه‌حلی شبیه راه‌حل کاردانو به فکرش برسد. در واقع، خیام اصلاً تلاش نکرده است که مسئله را جبری حل کند. این به نظر عجیب‌ترین دلیل (و با کمال تعجب، همچنان که خواهیم دید محتمل‌ترین دلیل) و با تبعات بسیار است. پس اجازه دهید بخش مستقلی را به آن اختصاص دهیم.

خیام، عالم هندسه

به یاد بیاوریم که کاردانو در اولین جملۀ کتابش از خوارزمی نام می‌برد و در مرور روش حل معادله‌های درجۀ دوم به جز یک مورد (با ذکر دلیل) از روش‌های خوارزمی استفاده می‌کند.

خیام هیچ نامی از خوارزمی نمی‌برد. اگر چه یکی از معدود مثال‌های عددی خیام، معادلۀ معروف خوارزمی است: $x^2+10x=39$ در واقع خیام هیچ نامی از هیچ ریاضی‌دان دیگری که به خاطر جبر شناخته شده است نمی‌برد و همه جا از آنها به عنوان «جبریون» یاد می‌کند. در مقابل، همۀ هندسه‌دان‌های مذکور در کتاب نام دارند و معمولاً با القاب مثبت و بسیار محترمانه از آنها نام برده می‌شود (حتی در مواردی که راه‌حل پیشنهادی آنها ناکامل یا نادرست بوده است). اقلیدس و آپولونیوس هم که جایگاه ویژۀ خود را دارند و در مقدمۀ کتابش آمده است که کسی که آثار آنها را نخوانده است این رساله را هم درک نخواهد کرد.

خیام هر چه در ارجاع به هندسه‌دان‌ها دقت به خرج می‌دهد، در استفاده از کار جبریون به طور انتخابی عمل می‌کند و از آنچه انتخاب کرده است چنان‌که می‌خواهد استفاده می‌کند. برای مثال، استدلال‌های مورد استفادۀ او برای اثبات قواعد حل معادله‌های درجۀ دوم، استدلال‌های خوارزمی نیست؛ استدلال‌هایی است که در کتاب جبر کرجی هم یافت می‌شود. این احتمال که چنین استدلال‌هایی جزو دانش عمومی ریاضیدانان آن دوره بوده باشد (همچنان که خود معادلۀ

$x^2+10x=39$ بوده است) می‌تواند خیام را از ارجاع به نام افراد بی‌نیاز کرده باشد. اگر چه خیام بهای این بی‌توجهی جبری را با نادیده شدن بخشی از دستاوردش می‌دهد.

آنچه بررسی خیام از معادله‌های درجهٔ دوم را از خوارزمی (و کرجی) متمایز می‌کند این است که خیام نه تنها معادله را حل می‌کند و به طور هندسی حل را توضیح می‌دهد (همانند جبریون)، برای شرایط جواب نداشتن معادله هم به شکل هندسی استدلال می‌کند. خوارزمی شرایط جواب داشتن (یا نداشتن) معادله‌های به شکل $x^2+d=cx$ را بدون استدلال بیان می‌کند. کرجی هم فقط روش حل معادله را بیان می‌کند. ولی خیام، هم برای جواب داشتن و هم برای جواب نداشتن به طور هندسی استدلال می‌کند. ولی از آنجا که او برای بررسی معادله‌های درجهٔ سوم شناخته شده است و نه درجهٔ دوم، این جنبهٔ کار او از دیدها پنهان مانده است و عدم ارجاع او به جبریون گذشته هم به این پنهان ماندن کمک کرده است.

در واقع طرح کار خیام از معادلهٔ $x^2+d=cx$ ریخته می‌شود. سه معادلهٔ متعارف در زمان او معادله‌های زیر بوده‌اند که هر سه از خوارزمی به ارث رسیده بودند:

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+21=10x$$
$$3x+4=x^2$$

خیام در مورد سوم از معادلهٔ $x+6=x^2$ برای مثال استفاده می‌کند. در مورد اول هم که دیدیم از همان معادله خوارزمی استفاده می‌کند. هر دوی این موارد همواره داری حداقل یک جواب مثبتند. ولی معادله‌های به شکل $x^2+d=cx$ می‌توانند دارای جواب مثبت نباشد. معادلهٔ $x^2+21=10x$ داری جواب است و به همین دلیل توسط خوارزمی و دیگران به کار رفته است. ولی خیام به اینکه جواب معادله چیست یا وقتی معادله جواب دارد چگونه مقدار عددی آن را می‌توان به روش جبری یافت توجه ندارد. برای خیام استدلال در مورد اینکه چه وقت جواب دارد و چه وقت ندارد مهم است. به همین دلیل به شکل بسیار هوشمندانه‌ای به جای معادلهٔ $x^2+21=10x$ معادلهٔ $x^2+d=10x$ را در نظر می‌گیرد و به طور هندسی شرایط جواب داشتن آن را بررسی می‌کند. به تعبیری دستاورد جبری مهم خیام، بررسی پارامتری معادله است. ولی خود او راه را برای دیدن این دستاورد بسته است، چرا که تأکید می‌کند که این هندسه است که به این سؤال جواب می‌دهد که معادله جواب دارد یا ندارد و همهٔ مطالبش را در مورد معادله‌های درجهٔ سوم با این نگاه می‌نویسد. خیام تلاشی برای پیدا کردن جواب معادله‌ها نمی‌کند و این را به جبریون می‌سپارد. او نشان می‌دهد که

معادله دارای جواب است یا نه و برای او این کاری است که هندسه شایستگی انجام آن را دارد و نه جبر. در واقع به نظر می‌رسد که خیام انتخاب کرده است که به طور جبری به مسئله فکر نکند. بر خلاف آنچه غلامحسین مصاحب (۱۳۷۹) می‌گوید، خیام عالم هندسه است نه عالم جبر. ولی این انتخاب خیام با تبعات فراوانی همراه بوده است که کمترین آن ندیده شدن کار جبری خود خیام است.

کاردانو چه کرد که خیام نکرد؟

اگر خیام همچون کاردانو به خوارزمی احترام می‌گذاشت؛ اگر می‌پذیرفت که جبر هم شایستگی اثبات دارد (به این مورد حتی در زمان کاردانو هم شک داشتند) و اگر می‌پذیرفت که جبر نه فقط برای پیدا کردن جواب بلکه برای بررسی وجود جواب هم به کار می‌آید، آنچه کاردانو انجام داد از او هم بر می‌آمد. بی‌شک هیچگاه نخواهیم فهمید در ذهن خیام چه گذشته است، ولی می‌توانیم دستاوردهای آنها را با هم مقایسه کنیم.

خیام با راه‌حل‌هایی بسیار هوشمندانه و نبوغ‌آمیز هندسهٔ یونانی را به اوج رساند و یکی از مهم‌ترین و آخرین میوه‌های آن را چید. کاردانو به سادگی و با تعمیم جبری راه‌حل خوارزمی، ریشه‌های روییده در ریاضیات ایرانی-اسلامی را به درختی تنومند و پربار تبدیل کرد.

منابع

- خوارزمی، محمد بن موسی، جبر و مقابله، ترجمهٔ حسین خدیوجم، تهران، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۸.
- مصاحب، غلامحسین، حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی با همکاری کمیسیون ملی یونسکو در ایران (۱۳۷۹).
- Amir-Moez, A.-R. (1962). "Khayyam's solution of cubic equations", *Mathematics magazine*, 35 (5), pp. 269-271.
- Berggren, J. L. (2017). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. Springer.

ویرایش اول این کتاب با عنوان گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی به فارسی ترجمه شده است (ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل و علیرضا جمالی، انتشارات فاطمی، چاپ دوم، ۱۳۷۴).

- Dunham, W. (1990). *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. Wiley.
- Eves, H. W. (1983). *Great moments in mathematics (before 1650)*. MAA.
- Vahabzadeh, B. (1997), "Al-Khayyām's Conception of Ratio and Proportionality", *Arabic sciences and philosophy*, 7 (2), pp. 247-263.
- Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrî: traité d'algèbre*. Imprimerie impériale.
- Yadegari, M. (1980). "The Binomial Theorem: A widespread concept in medieval Islamic mathematics", *Historia Mathematica*, 7 (4), pp. 401-406.