یکان

۱۰

مجلّه ریاضیات



در این شماره :

اعلان علمی ...	...	۲
فصلی از تاریخ ...	...	۵
هندسه ...	...	۹
معادله ...	...	۱۴
تبدیل	...	۱۶
راهنمای ریاضیات متوسطه	...	۱۹
حل مسائل مسابقه شماره ۸	...	۲۲
حل مسائل تیوله	...	۲۸
مسائل برای حل	...	۳۳
مسائل فیزیک‌شیمی	...	۳۷
مسابقه برای متوسطه	...	۳۹
مسائل برای دانشجویان	...	۴۰
درخواشیهٔ تاریخ	...	۴۲
اعداد کمپلکس	...	۴۵
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها	...	۴۷
اشتباه از چیست	...	۵۰
سرگرمی	...	۵۱
حل رسالهٔ اول مسابقهٔ ممتاز	...	۵۵
پرسش و پاسخ	...	۵۸
از مسئله نامه‌های رسیده	...	۵۸

انتشارات : ایران‌مک‌گروهیل
سازمان انتشارات و خدمات فرهنگی

سال یکم شمارهٔ دهم

آذرماه ۱۳۴۳

بها: ۳۰ ریال

از دانشگاه استراسبورگ
دپارتمان ریاضیات

۲۸ نوامبر ۱۹۶۴

مجلهٔ محترم یکان

خواهشمند است که درصورت امکان مطلب زیرین را در آن مجلهٔ محترم درج فرمایید .

با انحلال رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه ملی ایران بدون مشورت با این جانب یا اطلاع قبلی به این جانب که تا این تاریخ ریاست دپارتمان ریاضی آن دانشگاه را عهده‌دار بوده‌ام، وجود خود را در کادر تعلیماتی آن دانشگاه زائد دانسته استعفای خود را تقدیم داشته‌ام . باوجوه زبان مادری که با ضبط کسور بازنشستگی متوجه این جانب می‌شود ، لغو قرارداد مورخ ۴۳/۳/۳ را اعلام می‌دارم .

۷ آذر ۱۳۴۳

دکتر واز گن آ. انیسیان

آیا نباید مفتخر بود ؟

دکتر غفاری یکی از ریاضیدانان معاصر ایرانی است که در مؤسسهٔ تحقیقات فضائی وهوائی آمریکا به خدمتگذاری به دنیای علم مشغول است . وی اکنون به اتفاق عده‌ای از دانشمندان در این مؤسسه مشغول انجام محاسبات فیزیکی ونجومی ومکانیکی طرح مربوط به «مسافرت به کرهٔ ماه وبرگشت از آن» است. این طرح به نام «آپولو» معروف است وکلیهٔ محاسبات آن منحصراً زیر نظر دکتر غفاری انجام می‌پذیرد . وی عضو ممتاز علوم واشنگتن (پایتخت آمریکا) نیز می‌باشد واخیراً به پیشنهاد رئیس آکادمی علوم آمریکا به عضویت کمیسیون جایزه‌های علمی آکادمی علوم تعیین گردیده است .

از تالیفات هوشنگ شریف زاده

پانصد مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای پنجم دبیرستان وداوطلبان کنکور دانشکده ها

بها : ۱۰۰ ریال

۴۲۰ مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای چهارم دبیرستان وداوطلبان کنکور دانشکده ها

بها : ۶۰ ریال

راهنمای فیزیک

برای کلاسهای سوم دبیرستان

بها : ۳۰ ریال

ناشر: بنگاه مطبوعاتی معراجی
تهران ـ خیابان ناصرخسرو

یکان
مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ دهم ـ سال اول
آذرماه ۱۳۴۳

انتشارات : ایران ـ مک گروهیل
تخت‌جمشید ـ چهارراه روزولت ـ شمارهٔ ۲۸۲
تلفن : ۷۵۶۱۶۳

صاحب امتیاز : عبدالحسین مصحفی
زیر نظر شورای نویسندگان
هرماه یکبار منتشر می‌شود
نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳
اشتراک سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال
تک شماره ۲۰ ریال
مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود
چاپخانهٔ محمد علی علمی

انقلاب علمی و تغییر برنامه

پیشرفتهای جدید چه در ریاضیات وچه در علومی که متکی به ریاضیاتند به کندی به صحنهٔ تعلیماتی مملکت راه می یابند. دلیل این امر آن است که شالودهٔ دستگاه تعلیماتی ما چنان است که ظرفیت قبول تحولات سریع و تند راندارد و هر گونه پیشرفتی را در هر زمینه‌ای که باشد، به جریان کند و کسل کننده‌ای تبدیل می کند که فاقدهر نوع قدرت مقابله با بحرانهای آموزشی است. برای اثبات این مدعا به عنوان مثال می‌توان ازبرنامهٔ جدید علوم و ریاضیات دبستانها نام برد که در تابستان سال ۱۳۴۱ به تصویب شورای عالی فرهنگ رسید و هنوز که دو سال تحصیلی از تاریخ تصویب آن می گذرد به کتابهای درسی راه نیافته است. بدین معنی که فی‌الحال برنامهٔ مصوب وزارت‌فرهنگ‌چیزی دیگراست ومتون کتابهای درسی دبستان که در مدارس تدریس می‌شود چیز دیگر.

بنابراین برای مقابله بابحرانهای تعلیماتی، درحال ودرآینده، قبل ازهرچیز باید دستگاه آموزشی کشور را مجهز کرد. چگونگی این تجهیز خودبحثی جداگانه است که در بارهٔ آن درفرصت مناسبتردیگر بحث خواهیم کرد، ولی به هرحال پس‌ازچنین تجهیزی است که می‌توان دست به‌کار تجدیدنظر در برنامه شد.

تجدید نظر در برنامهٔ ریاضیات، به‌وسیلهٔ دستگاهی صالح، به نظر ما کار چندان دشواری نیست. اگرما درعرصهٔپهناور جهان در ردیف کشورهایی بودیم که درصف مقدم چنین تغییراتی قرار دارند، کارمان بسی دشوارتر از این می‌بود ومی‌بایستی در کش و قوس تحقیق وتجربه سالها وقت‌صرف کنیم. ولی خوشبختانه کشور های دیگرتلاش وسیعی دراین‌باب کرده و راه را برای رهروان هموار کرده‌اند؛ و تنهاکاری که بر عهدهٔ ما باقی مانده است این است که با پیشرفتهای جدید علوم وریاضیات آشنا شویم وفلسفهٔ تغییرات برنامه‌های آموزشی علمی را دریابیم.

دانش ریاضی بانقش سه‌جانبی خود، چون یك وسیله، یك زبان، یك روش تفکر، ناگزیر باکارهای بزرگ اقلیدس و گالیله و نیوتن و اینشتین و تمام دانشمندان اخیری که ما را خواه و ناخواه به سطح معاصردانش سوق داده‌اند عجین شده است. این علم در نتیجهٔ تجربه های مستمر از دنیای تجربی به وجود آمده و خواهد آمد. نکتهٔاساسی آن است که کشفیات ریاضی در پرتو منطق به دست‌نیامده است، بلکه به وسیلهٔ چیزی متجلی شده که آن را اصطلاحاً الهام یا اشراق می‌خوانند. نقش منطق در این میان آن بوده است که حد سی را که براساس الهام یااشراق زده می‌شده است بپیراید و آن را ثابت یا رد کند. مثلاً بیش از

یك قرن نیست که اساس منطقی دقیقی برای دستگاه عدد به وجود آمده است و حال آنکه پیش از آن هم ریاضیدانان موفقانه بادستگاهی که بدین پایه ازدقت نرسیده بود کارمی کرده‌اند.

همچنانکه در اوایل قرن نوزدهم تمدنهای غربی متحمل چنان تحول سریع و کارگری شدند که درتاریخ از آن به عنوان انقلاب صنعتی یاد شده است ؛ ما اکنون در نیمهٔ دوم قرن بیستم ، در دیار علم ، با تحولات عمیقی روبه‌رو شده‌ایم و در آستانهٔ مرحله‌ای از تاریخ قرار گرفته‌ایم که‌آن را به حق دورهٔ **انقلاب علمی** نام نهاده‌اند. به تدریج‌ضمن پیشرفتهای نظری و عملی که مؤثر در هوش عمومی بوده است بشر آماده برای زیستن در این عصر شده است . **در این دوران ، نه هرگز چون‌گذشته ، به جایی رسیده‌ایم‌که احتیاج به ریاضیات و قدرشناسی از آن جزء ضروریات فرهنگی هر کشور شده است .** می گویند که تحصیل ریاضیات چنانچه برنامهٔ آن به طور مطلوب طرح‌ریزی ودرست اجرا شود، از نظر فرهنگ، نه‌تنها یاری بزرگی به درك دنیای جدید علمی می کند ، بلکه سبب کسب‌بینش و توسعهٔ سریع روح خلاق نیزمی گردد . چنین حقایقی است که‌کلیهٔ کشورهای مترقی را بااین مسئله مواجه ساخته است که در مدارس متوسطه اولاً تاچه میزان بایدکارهای منطقی ومسلم ریاضیدانان را به دانش‌آموزان عرضه کرد وثانیاً پس از عبور از دنیای اشیاء و حوادث تاچه حد شاگردان را در صحنهٔ تجریدات ریاضی هدایت کرد وبه پیش برد . تجربه علاوه برآنکه به حل این مسئله در این کشورها یاری کرده است ، **همچنین مزایای بیشمار عرضه کردن پاره‌ای از مطالب مجرد ریاضی و منطق دقیق و مستحکم را در بعضی از مراحل تحصیل آشکار ساخته است .**

درمیان پدیده‌های جدیدی که مؤثرترین علت برای تجدید نظردرآموزش‌ریاضیات گشته است ، از همه مهمتر مفاهیم و روشهای جدید ریاضیات محض است که آن را می توان برای تصعید و پیشرفت درك ریاضیات و قدرشناسی از آن در مدارس به‌کار برد . دیگر بسط و توسعه‌های‌علمی وفنی جامعه است که سبب بالابردن اهمیت حرفه‌ای وفرهنگی‌ریاضیات گردیده است . نکتهٔ سوم توسعهٔ روز افزون استفادهٔ ازماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی‌است . وآخرین پدیده ، استعمال فراوان وروز افزون ریاضیات درکارهای‌آزاد ، صنعت ، مشاغل دولتی ، علوم اجتماعی ، وعلوم طبیعی است . جامعه ازهرزمانی بیشتر به متخصصان ومهندسان و دانشمندانی که مجهز به معلومات وسیعتر ریاضی‌باشند محتاج است.احتیاج اجتماع معاصر به‌کارگروکارمند غیرمتخصص روز به روز تقلیل می‌یابد و از همین جاست که ارزش آموزش‌فنی وعلمی در همهٔ مراحل تحصیل آشکار می گردد و باز از همین جااست که نقش مؤثر ریاضیات درهر برنامهٔ آموزشی محسوس می‌شود .

آیا علل فوق که سبب چنین جنبش وسیعی درنو کردن برنامه‌های ریاضیات وعلوم کشورهای دیگر شده است در کشور ما وجود ندارد ؟

جهانگیر شمس‌آوری

فصلی از تاریخ علوم ریاضی

تألیف از: موریس دوکانی
ترجمه از: باقر امامی

دانشمندان ریاضیات محض و مکتب اسکندریه (۲)

بقیه ازشمارهٔ قبل

ارشمیدس، هنگام مطالعهٔ اندازهٔ دایره، عدم‌امکان تعیین نسبت محیط یك دایره به قطر آن‌را (عددی که امروزه با π نمایش داده می‌شود) جز از راه تقریب درك نموده بود. طریقه‌ای‌که برای این مقصود به‌کار برده است به‌طوری‌که‌می‌دانیم عبارت از محصورکردن دایره بین دو چند ضلعی محیطی و محاطی باتعداد اضلاع متساوی است.

او تعداد ضلعها را به ترتیب برابر جمله‌های یك تصاعد هندسی باجملهٔ اول ۳ و قدر نسبت ۲ اختیار کرده و تا جملهٔ نود وششم محاسبه را پیش برده بود. وبه‌نامساوی مضاعف:

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ که تفاضل کرانه‌های آن‌قریب $\frac{1}{500}$ است دست یافته بود.

در کتاب دیگری (که ما آن را از روی نقلهایی که مؤلفان دیگر از آن‌کرده‌اند می‌شناسیم) ارشمیدس، دستگاه دوایر مماس بریکدیگر و اشکال تشکیل شده از آنها را مورد مطالعه قرارداده است:

اگر نقطهٔ C را به طور غیرمشخص روی پاره خط AB اختیارکنیم و در یك طرف پاره خط سه نیمدایره به قطرهای ABوACوBC بکشیم، مثلث منحنی‌الخطی که از این سه نیمدایره به‌دست می‌آید به arbelos یا **ترانشهٔ ارشمیدس** معروف است‌که ریاضیدان سیراکوزی خواص مختلف آن را معلوم داشته است.

سایر کارهای ارشمیدس نیز به وسیلهٔ مؤلفان دیگر به‌ما معرفی گردیده است. از آن جمله است کتاب لم‌ها (lemme) که‌شامل احکام وتتبعات جالبی‌دربارهٔ اجسام نیمه‌منتظم (اجسامی که رویه‌های آنها ازدونوع چندبرمنتظم تشکیل‌شده است) می‌باشد. ارشمیدس ۱۳ نوع از اینها راکشف‌کرد وفقط دونوع آن به وسیلهٔ افلاطون‌شناخته شده‌بود.

وی مسئلهٔ ترسیم هفت ضلعی منتظم را به مسئلهٔ تعیین دو نقطه بردوی یك پاره خط که‌آن‌هم از روی حل یك معادلهٔ درجهٔ سوم معلوم‌می‌شود منجر کرده‌است.

ارشمیدس باعلم‌حساب به‌طورگذرا، ولی با نبوغ وابتکار خارق‌العاده، تماس حاصل نموده است. بزرگترین خدمت او در این راه عبارت از اختراع دستگاه شماری بود که شمارتا اعداد بسیار بزرك را بدون اضافه کردن کلمهٔ جدیدی برآنچه یونانیان به‌کار می‌بردند امکان پذیر ساخته بود. در آن زمان یونانیان‌امکان شمارتاعددی‌راداشتند که‌با دستگاه دهدهی‌امروزی معادل صد ملیون یا 10^8 بوده است.

ارشمیدس به 10^8 عدد اول نام اعداد مرتبهٔ (ordre) اول داده است وبدین ترتیب دستهٔ دیگری از اعداد را باواحد 10^8 به‌وجود آورده و آنها را اعداد مرتبهٔ دوم نامیده است. بدین ترتیب راه شماررا تا 10^{16} بازکرده است. همین طوربه تدریج تا اعداد مرتبهٔ هشتم پیش رفته است و همهٔ این مجموعه را اعداد دورهٔ (période) اول نام‌گذاری نموده و به‌دنبال آن اعداد دورهٔ دوم را به‌وجود آورده وبرای اولین بار امکان شمارتا توان تریلیونیم ده را آفریده‌است. از این راه بود که توانست تعداد وحشت آوردانه‌های شن نرم‌موجود درکره‌ای‌را که‌شعاع آن برابر 10^{14} **ستاد** (واحد طول دریونان قدیم)، یعنی برابر فاصلهٔ زمین تا فلك ستاره دار بود، معلوم سازد.

باتوجه به‌اینکه ده‌هزارتا از این دانه‌های شن‌رامی‌توان در یك انگشتانه جای‌داد به بزرگی‌این عدد می‌توان پی‌برد.

بدین جهت این نوع دستگاه‌های شماررا بـه نـام دستگاه‌های arénaire(ازکلمهٔلاتین arena بمعنای شن) می‌نامند.

ارشمیدس، مسئلهٔ تعداد گاوهایی‌راکه به رنگهای‌مختلف (سفید ، خاکستری ، قهوه‌ای ، ابلق) دریك گله وجوددارند، با معلوم بودن نسبت تعداد این حیوانات در آن گله حل کرده است واین ظاهراً اولین معادلهٔ سیال درجهٔ اولی است که حل شده است .

گرچه در زمینه‌های هندسه است که ارشمیدس توانسته است نبوغ ریاضی عالی خود را به منصهٔ ظهور برساند ، ولی چون در مکانیك آثار عمیقی به‌جای گذاشته است ، مقام پدری **علوم‌ستاتیك و هیدروستاتیك** به او تفویض شده است . و حقیقةً هم او است که برای اولین بار اصول اساسی استاتیك را بادقت به نظم در آورده واز آنجا نظریه‌های مستحکم و دقیق ترکیب قوای متوازی ، اهرمها ؛ گرانیگاه‌ها را چه از نظر علم مکانیك و چه از نظر کار برد عملی آنها نتیجه‌گیری کرده است. بدین‌منظور مشکلترین مسائل‌هندسی‌روزرا با استفاده‌ازاستعداد ممتاز خویش حل کرده‌است. از آن‌جمله می‌توان از روش‌تعیین مرکز ثقل اشکال مستوی به‌ویژه‌مرکز ثقل قطعه سهمی که‌ترییع مربوط به آن را انجام داده است و همچنین مرکز ثقل اجسام مختلف مانند جسم دوار حاصل از دوران سهمی را نام‌برد.

اما علم هیدروستاتیك در واقع باکشف ارشمیدس دایـر براین که از وزن‌اجسام شناور به اندازهٔ وزن آب هم حجم‌آنها کاسته می‌شود ، و امروزه هم به نام این دانشمند معروف است ، پا به‌عرصهٔ وجود گذاشته است . درست است که این کشف ؛ ارشمیدس‌را درشمار بزرگترین فیزیکدانان قرارداده است‌ولی نتایجی‌راکه صرفاً با روشهای ریاضی از این تجربه به دست آورده او را شایستهٔ دریافت عالیترین امتیازات برای هندسه کرده است.

این تجربه با نتایج آن موجد نظریهٔ اجسام شناور است که پایه‌گذاراصلی آن ارشمیدس می‌باشد.

در شخص ارشمیدس‌نبوغ درخشان علمی با موهبت کم‌نظیر برای اختراعهای بسیارمتنوع باکاربردهای‌عملی‌توأم بود . بعضی اوقات اختراعات او نتیجهٔ مستقیم کاربردکشفهایش بود. از آن جمله است روش وی برای توزین در آب و هواکه بدان وسیله توانست تقلب زرگری راکه در ساختن تاج پادشاه به‌جای طلا مقداری نقره به‌کار برده بودبرملا سازد. ولی غالب اختراعات دیگرش بسیار مرکب و پیچیده بود . و نمونه‌ای بسیار جدید baliste ها و منجنیق Catapultes های باقدرت زیاداز آن جمله‌اندکه‌به وسیلهٔ‌آنها مدتها محاصره‌کنندگان سیراکوز راباشکست‌روبرو ساخت.

نام ارشمیدس برروی دستگاه سادهٔ جالبی که درآن آب سربالایی می‌رود باقی مانده است . این وسیله را به خصوص برای تخلیهٔ آب معادن زیر زمین ساخته بود . این دستگاه از از یك پیچ بدون انتها تشکیل یافته است که در داخل لوله‌ای قرار دارد و هر دوسر این لوله باز است . یك سرآن درآب و انتهای دیگرش در هوا و به‌طور آزاد قرار می‌گیرد . اگر لوله‌حول محورش به‌چرخد آب‌درلوله بالا می‌آید و ازانتهای آزاد آن بیرون می‌ریزد .

ارشمیدس مهندس دریائی لایقی نیز بود .

به‌کمك‌ماشین مرکب‌ازچرخ‌اثقال‌های قرقره‌ای که‌به وسیلهٔ‌پیچهای بدون انتها به‌کار می‌افتادند توانست مسئلهٔ قرار دادن کشتیها را برروی تعمیر گاه‌های خود به مقدار زیادی تسهیل نماید.

درقسمت نور نیز دست به اختراع آینه های متعرباورویه‌های مستوی زدکه به وسیلهٔ آنها نور آفتاب را در نقطهٔ معین متمرکز می‌کرد و بدین ترتیب هم توانست کشتیهای رومیها را آتش بزند . در سال ۱۷۴۷ **بوفن** (Buffon) از روی کنجکاوی دست به تکرار این تجربه‌زد و توانست قطعه چوبی را از فاصلهٔ ۱۴۰ پا مشتعل سازد.

انسان‌در برابربادوری‌ونیرومندی ذکای این‌سیراکوزی بزرك حیرت زده مـی‌گردد و پیشرفتهای بهت آوری کـه او توانسته است در زمینهٔ دانش محض به وجود آورد ما را به تحسین وامی‌دارد.

لایب نیتزLeibnitz که‌مطالعهٔ‌عمیقی درآثارارشمیدس، هندسه دان بزرك به عمل آورده، گفته‌است :

کسی که ارشمیدس و **آپولونیوس** را می‌فهمددرکشفیات بزرگترین انسانهای معاصر کمتر لب به تحسین می‌گشاید .در چنین اوضاع‌و احوالی است‌که مامی‌خواهیم کارهای‌آپولونیوس راارزش یابی‌کنیم

آپولونیوس Apolonius

قبل از آپولونیوس‌هندسه دانان‌بسیاری ازقبیل‌فیثاغورث، منه‌شم (Menechme) اقلیدس وارشمیدس‌به‌بعضی ازخواص مقاطع مخروطی‌دست‌یافته‌بودندولی‌هیچکدام نتوانسته‌بودند که‌یك‌مطالعهٔ منظم‌بمعنظورتدوین نظریه‌ای‌عمومی‌و سیستماتیك‌ومتوافق به عمل آورند . این کاررا آپولونیوس انجام داد وبدین وسیله نام پر- افتخار پایه‌گذار نظریهٔ‌مخروطات‌راکسب کرد. به‌علاوه مؤلفان قبلی فقط بعضی خواص‌«مثری» این منحنیهارا معلوم کرده‌بودند درصورتی‌که آپولونیوس اضافه براین‌که خواص «مثری» را به

میزان قابل توجهی غنی کرد ، خواص «پرسپکتیو» آنها را که در در آن زمان کاملاً بدیع بود کشف نمود.

این دانشمند بزرگ ، به گفتهٔ پاپوس (Pappus) دوچار تنگ نظری وحسد بود. موفقیتهای رقیبان او را عصبانی و برخلاف اقلیدس باهمکارانش باخشونت رفتار می‌کرد.

او را همیشه به‌نام آپولونیوس پرژ A . de Perge می‌نامند چه این نام آن‌قدر زیاد بوده که در کتاب نامهای بزرگان آن روزگار ۱۲۸ بار تکرار شده است .

نه تاریخ تولد ونه تاریخ وفاتش در دست نیست ولی از قرائن می‌توان حدس زد که در فاصلهٔ ۲۶۰- و ۲۰۰- می‌زیسته است .

وی برای کسب دانش ریاضی از بازماندگان مکتب اقلیدس ، به مصر سفر کرده و قسمت بزرگ دوران حیاتش را در آن دیار گذرانده است . اگر راجع به‌زندگی خصوصی او اطلاعات کمی در دست است ، خوشبختانه دربارهٔ نتایج فعالیت علمی او آگاهی کافی داریم .

شاهکارش همان کتاب مقاطع مخروطی : (Traité des sections Coniques) است که در آنجا خواص این منحنی‌ها را چنان براساس محکمی پایه گذاشته است که امروزه هم مطالعهٔ خواص این مقاطع برهمان اساس است اگر وضع دانش را در زمانی که این کتاب سرشار از کشفهای شخصی مؤلف قدم به‌عرصهٔ وجود گذاشته است درنظر بگیریم به‌واقعا مبهوت وحیرت‌زده می‌شویم.

کتاب مقاطع مخروطی شامل هشت قسمت است . متن یونانی چهار قسمت اول و ترجمهٔ عربی سه قسمت بعدی به ما رسیده و اثری از قسمت آخر تا تا به حال به‌دست نیامده است.

گرچه در قرن هفدهم هالی Hallay ستاره شناس معروف کوشیده است که از قسمتهای مختلف پراکنده در کتابهای متفرقه این قسمت اخیر را به هرصورت جمع آوری کند .

قبلاً باید خاطر نشان کنیم که آن موقع آن سه نوع مقطع مخروطی را (از هذلولی فقط یك شاخه‌اش را) به این ترتیب به‌دست می‌آوردند که مخروط درجهٔ دوم را با صفحهٔ عمود بر یالش قطع می‌کردند و برحسب آنکه زاویهٔ رأس مخروط ، حاده یا قائمه یا منفرجه بود، مقطع را حاد الزاویه یا قائم الزاویه یا منفرج‌الزاویه می‌نامیدند. آپولونیوس یك مخروط مستدیر را که زاویهٔ رأس آن خیر مشخص بود با صفحاتی که نسبت به محور ، میلهای مختلف داشتند قطع کرد و این سه مقطع را به دست آورد و آنها را بیضی وسهمی و هذلولی (هردوشاخه) نامید . به‌علاوه نشان داد که اگر یك مخروط ویك مقطع مخروطی مفروض باشند ، چگونه می‌توان این منحنی را بر روی سطح مخروط الصاق کرد .

علاوه براین ، شکلهای «جبر هندسی» که آپولونیوس در تحقیقات خود برای مشخص کردن مخروطات به کار برده است مستقیماً قابل ترجمه به زبان تحلیلی هستند و با معادلهٔ $y^2 = 2px + qx^2$ که در مختصات وکارتزی برحسب $q = 0$ ، $q < 0$ یا $q > 0$ یك بیضی یا یك سهمی یا یك هذلولی را نمایش میدهد مطابقت دارد .

ظن غالب براین است که کتاب آپولونیوس ، احتمالاً دکارت را در یافتن روش عمومی یاری کرده است.

آپولونیوس با ابزار تحقیقی که واجد بوده راجع به قطرها ووترهای مزدوج دربارهٔ هذلولیها ومجانبها وهرآنچه به‌صورت کلاسیك درآمده مطالعات کافی نموده است .

از طرف دیگر او مقاطع مخروطی را چون مکان چهارخط (lieux à quatre droites) (یا درحالت مخصوص ، مکان سه خط) طرح نموده است . یعنی هرمقطع مخروطی مکان هندسی نقاطی است که حاصل ضرب فواصل آنها از دوخط ثابت صفحه ، درنسبت ثابتی با حاصل ضرب فواصل آن نقاط ازدوخط دیگرهمان صفحه می‌باشند . این تعریف درزمینهٔ جبر هندسی ، معادل بامعادلهٔ عمومی مقاطع مخروطی درهندسهٔ تحلیلی است. آپولونیوس برای بار اول مسئلهٔ ترسیم یك مقطع را با معلوم بودن پنج نقطهٔ آن طرح کرده است. وهم اواست که مسئلهٔ قطب و قطبی و همچنین مسئلهٔ کانون مخروطیهای مرکز دار را آفریده است .

آپولونیوس، با کشف ارتباط بین سری نقاطی که یك مماس متغیر بریك مخروطی ، روی دو مماس ثابت برهمان مخروطی تعیین می‌کند ، درحالات مختلف ، راه تحقیق کاملا تازه‌ای را گشوده است وازاین بابت اورا می‌توان از پیشاهنگان مطالعهٔ خواص تصویری و اولین کسی دانست که فصل مشترك دو مقطع مخروطی را تحقیق کرده است .

آپولونیوس همچنین خواص قائمهای مقاطع مخروطی را مطالعه و به‌ویژه ثابت کرده است که پایه‌های قائمهای وارد از یك نقطه بریك مقطع مخروطی متعلق به یك هذلولی متساوی‌ـ القطرین است واین هذلولی را که امروز به نام هذلولی آپولونیوس موسوم است کاملا مشخص کرده است .

روابط متری درمقاطع مخروطی نیز مورد توجه او بوده و وی را به تحقیقات بسیار پیچیده‌ای دربارهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم هدایت کرده است . بعضی از کشفیات او، دراین باره ، به‌صورت کلاسیك درآمده‌اند. ازآن جمله است قضیهٔ خاصیت طولهای دوقطر مزدوج که به نام این دانشمند نیز معروف است .

روشی که به طور یك نواخت به وسیلهٔ این هندسه دان بزرك بکار رفته است به روش تحلیلی که در برنامهٔ ریاضیات عمومی به کار می‌رود نزدیکتر است تا به روشی که امروز در مطالعهٔ مقاطع مخروطی به عنوان متمم هندسهٔ مقدماتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آپولونیوس قسمت اعظم زحمت وکوشش خودرا در راه کتاب مقاطع مخروطی صرف کرده و معروفیت اصلی خود را مدیون این اثر است اما به طوری که از کتابهای مؤلفین مختلف و مخصوصاً **پاپوس Pappus** برمی‌آید، او دارای تألیفات دیگری نیز بوده که بدبختانه به دست ما نرسیده است چنین پیدا است که وی دربارهٔ تماسها واندازه گیری دایره تحقیقات دامنه داری به عمل آورده است. درقسمت تماسها، رسم دایرهٔ مار بر p نقطه ومماس بر d خط و c دایره (البته با شرط $p+d+c=3$) وحالت متمثل آن $c=3$ راکه دایرهٔ جواب دراین حالت به دایرهٔ آپولونیوس موسوم است حل کرده است. در اندازه گیری مربوط به دایره، مقدار π راکه ارشمیدس تا ۳٫۱۴ محاسبه کرده بود تا ۳٫۱۴۱۶ پیش برده است.

در تاریخ و ریاضیات آپولونیوس از چهره‌های درخشان عالم هندسه به شمار رفته است. ازمیان شاگردان آپولونیوس که به مطالعهٔ منحنیها (نه مقاطع مخروطی) پرداخته‌اند از **پرسه Persée** می‌توان نام برد که درحدود سنهٔ ۱۰۰ـمی‌زیسته‌است و دربارهٔ منحنیهای حلزونی (Courbes Spirique) و مقاطع مستوی حلقه (Tore) تحقیق کرده است.

بقیه درشمارهٔ بعد

چرا چنین است؟

اگر تا کنون رشتهٔ فیبوناچی را نمی‌شناخته	۵
اید باخواندن مقالهٔ عدد طلایی درهمین شماره	۸
با آن آشنا شده‌اید. می دانید که دررشتهٔ	۱۳
فیبوناچی هر عدد مجموع دوعدد قبل ازخودش	۲۱
می‌باشد (البته به استثناء دوعدد اول). حال	۳۵
با همین قانون می‌توان رشته‌های متعددی	۵۵
تشکیل داد. کافی است که دوعدد آن را به	۸۹
اختیار انتخاب کنیم وعدد سوم را باجمع کردن دو	۱۴۴
عدد نخست وعدد چهارم را باجمع کردن عدد دوم و	۲۳۳
سوم... الی آخر به دست آوریم. مثلاً با انتخاب	۲۷۷

دوعدد ۵ و ۸ به‌عنوان دوعدد نخست رشته، و به‌کاربردن قانون رشتهٔ فیبوناچی رشته‌ای را که دربالا می‌بینید به‌دست می‌آوریم.

نکته جالب توجه آن است که درهر کدام ازاین نوع رشته‌ها همیشه حاصل جمع ده جملهٔ اول آن برابراست با یازده برابر هفتمین جمله. مثلاً در سری بالا که جملهٔ هفتم ۸۹ است، یازده برابر آن می‌شود ۹۷۹ واین همان حاصل جمع ده عدد نوشته شده در بالاست. این ده جمله راجمع کنید وببینید که این ادعا درست است؟ اکنون تحقیق کنید که چرا چنین است.

عدد طلائی

نمایندهٔ قدرت الهی

سید محمدکاظم نائینی

یونانیان قدیم به خصوص فیثاغورث وافلاطون برای اعداد خواص ماوراءالطبیعه قائل بودند وعدد را رمز خلقت ومبدأ آفرینش می‌پنداشتند .

افلاطون با بیان جملهٔ «عدد همان معرفت مطلق است» آن را بالاترین درجهٔ معرفت می‌دانست وفیثاغورث با بیان جملهٔ معروف «عدد راز جهان آفرینش است» برای آن قدرتی خدائی و فوق انسانی قائل بود .

این افکار وبیان ازطرف حکماء ودانشمندان، بخصوص فلاسفه که بنوبهٔ خود ازنوادرزمان ومورد تکریم واحترام و تحسین واعجاب همگان بودند، مردم را واداشت که به ریاضیات وعدد به‌نظر احترام بنگرند وعظمت وقدرتی مافوق تصور برای آن قائل شوند . ازاینجا بود که ریاضیات عالیترین درجه ومقام رادرمیان معارف بشری به دست آورد وملقب بـه پادشاه علوم گشت .

تساویهای عددی که دارای خواص جالبی بودندو نسبتهائی که معرف واسطهٔ هندسی وحسابی وتوافقی بودندو به زبان امروزی به‌این صورت نموده می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\dots$$

$$\frac{a+b}{2}=C$$

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

وهمچنین تساویهائی ازقبیل $۵^۲=۴^۲+۳^۲$ و $۳^۲+۴^۳+۵^۳=۶^۳$ درنظر یونانیان شگفتی بیحد ایجادمی کرد ودرمورد نسبتهای متصل واصولا تمام تناسبات همین احساسات راداشتند .

قضیهٔ زیبای عروس معروف به‌قضیهٔ مشهور فیثاغورث که‌هر دانش‌آموزسال دوم دبیرستان آن را می‌داند درنظر یونانیان جنبهٔ نیمه خدائی داشت . فیثاغورث پس‌ازکشف این خاصیت بزرگ مثلث قائم‌الزاویه بمعیت شاگردانش به‌تمام پیروان خود دستور داد که جشن بگیرند وشادی وپایکوبی کنند وخود درراه «مزو»، خداوندی که این کشف را به او الهام کرده بود ، انگشت شصت خود راقربانی کرد .

این طرز تفکر حکماء ودانشمندان، فلاسفهٔ قدیم راوامی‌داشت که هر معرفتی را ازنظر ریاضی مورد مطالعه قرارداده و آنچه راکه مطابق با اصول ریاضی بود حقیقی پنداشته و مورد توجه وبررسی واستفاده قرار دهند .

ازجمله موضوعاتی که ازدیرباز مورد توجه ودقت دانشمندان وفلاسفه قرار گرفت وحکماء آن را باعلاقهٔ خاص مورد دقت و مطالعه قراردادند ، شناخت زیبائی وشناسائی جمال بود که مدتهای مدیدی افکار متفکرین رادراعصارمختلف زمان به‌خود مشغول داشته و انگیزه‌ای برای کشف قسمتهای جالب و مختلف علوم به خصوص ریاضیات گردیده است .

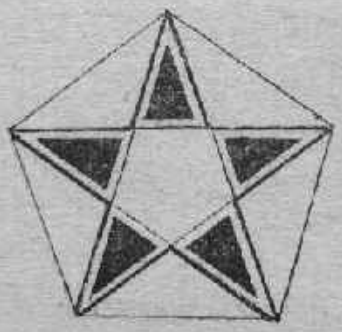
امروزمی‌دانیم که آنچه سبب بروززیبائی دراشیاء می‌شود دارابودن صفاتی‌چون نظم‌وترتیب ، تناسب اجزاء، هم‌آهنگی، قرینه سازی ، ظرافت ، روشنی ، صراحت ، پاکی ، صافی ، سادگی ، عظمت ، تنوع ، وزن ، نازکی ولطف واطوار است. اگر کمی دقت وتوجه شود ، تقریباً درتمام صفات فوق جنبه‌هائی ازریاضی نهفته است واصولا ترتیب ، تناسب ، هم آهنگی و قرینه سازی ، بخشهائی از فصول مختلف ریاضیاتند و بی‌شبهه می‌توان گفت که کشف قوانین تناسبات و قرینه سازی وقضایای مربوط به‌تشابهات وتجانسات ناشی از میل وعلاقهٔ بشر به‌کشف راز زیبایی وجمال بوده است .

اما آنچه افکار دانشمندان وفلاسفهٔ عهد عتیق را بـه خود مشغول می داشت این بود که : چه عددی باید برای اندازه یا مقداراشیاء به‌کاررود که به‌طورکلی برای آنها عظمت وهماهنگی یاظرافت وزیبائی ایجادکند؛ یاچه نسبتی باید بین اشیاء وجود داشته باشد که به‌طورثابت وهمیشگی بـه‌آنها قشنگی وتناسب و جذابی وتوافق ببخشد . واصولا برای زیبائی وجمال وقشنگی و کمال چه قوانین ثابت ولایتغیری وجود دارد ؟

درحقیقت مسئله‌ای که‌برای معماران ومهندسان وهنرمندان ومتفکران ودانشمندان وفلاسفهٔ زمان قدیم مطرح بود این بود که درترسیم نقشه‌های قصوروممابد یادرابعاد واندازه‌های هنری، درمجسمه سازی وموسیقی ، نقاشی وسایرارکان هنر، ازبین تمام

اعداد و کلیهٔ نسبتها ، کدام عدد و کدام نسبت به عنوان بهترین انتخاب شود که خطوط اصلی نقشه ورنگها وترکیب اشیاواجزاء متشکلهٔ اجسام دارای تعادل و توافق وزیبائی وقشنگی باشند و چشم انسانی به‌آرامی بیشتری ازمنظرهٔ به‌وجودآمده لذت‌ببرد.

براثر تجارب و بررسیها و اندازه‌گیریهای دقیق وبه کار بردن نسبتهائی نظیر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱۷}{۱۰}$ وغیره و تحقیق در اشیاء قشنگ وزیبا وبالاخره درمحاسبات مربوط به ۵ ضلعیهای منتظم وده ضلعیها و... عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ کشف‌شد که دارای‌خواص‌جالب وزیبائی است . این عدد باچند رقم اعشار براابراست با ۱٫۶۱۷۰۳۳۹۸۸۷۵. خاصیتهای‌بیشمار وزیبائی که دراثر به‌کار بردن این عدد واین نسبت دراشیاء به دست‌آمد حس اعجاب و تحسین همگان را به حدی بر انگیخت که آنرا **عدد طلائی** نامیدند وافلاطون آن رانمایندهٔ **قدرت و مظهرالهی** نامید. چنانکه می‌دانیم نسبت طول مخمس افلاطونی به واحد برابر عدد طلائی است .



آرم‌ستارهٔ ۵پری که در نزد فیثاغورثیان مورد ستایش بود ازبه هم پیوستن اقطارمخمس به‌وجودمی‌آمدواتخاب آن به علت ارزش و احترامی بود که فیثاغورثیان برای‌عدد طلائی قائل بودند وآن را مورد پرستش واحترام وتکریم قرار می‌دادند .

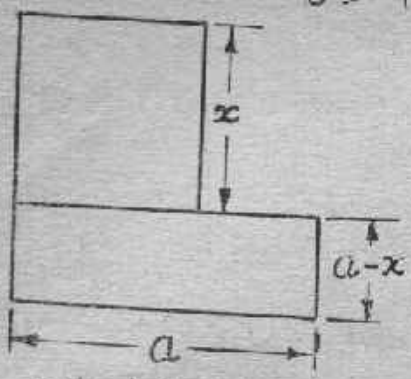
افلاطون عدد طلائی را ازتقسیم یك پاره خط به نسبت ذات وسط وطرف به دست آورد ودرساختن ۵ ضلعیها و ۱۲ وجهی منتظم به‌کار برد واین تقسیم وبرش را **تقسیم طلائی Golden Section** نامید . بعدها **لوکاپاچیولی Luca pacioli** (۱۵۰۹) آن راتقسیم الهی ومقدس نامید.

به‌کاربردن‌اصطلاح مقطع‌طلائی‌وعدد طلائی‌باموفقیت‌همراه بود واکثریت‌دانشمندان‌از آن‌استقبال‌کرده ودربارهٔ آن بررسی‌و تحقیق‌کردند وبسیاری ازفلاسفه و هنرمندان چنان پنداشتند که تقسیم طلائی رمززیبائی است .

مسئلهٔ تقسیم پاره خط به‌نسبت ذات وسط وطرف یاتقسیم طلائی را اقلیدس درکتاب تحریرات خود به صورت زیر بیان کرده است :

می‌خواهیم پاره خط مستقیمی را به دوقسمت چنان تقسیم

کنیم که مستطیلی که باتمام‌خط ویکی‌ازقسمتهای جدا شده ساخته



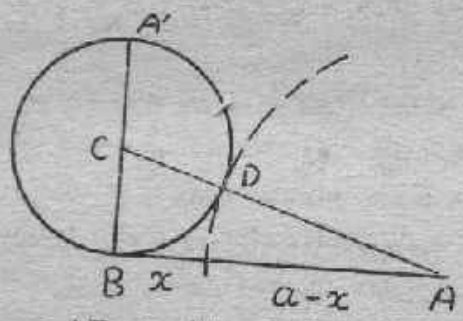
می‌شود معادل با مربعی باشد که برقسمت‌باقیماندهٔ خط بنامی‌شود

بیان مسئله به صورت جبر وبه زبان امروزی چنین است .

اگر طول خط را a و دوقسمت‌آن‌را x و $a-x$ بنامیم ، رابطهٔ زیررا خواهیم‌داشت:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$

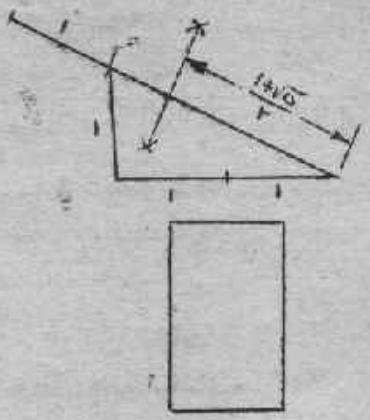
حل‌هندسی مسئله به‌ترتیب وشرح زیراست: خط AB را به‌طول a



رسم می‌کنیم. درنقطهٔ B خطی به‌طول a، بر AB عمود می‌کنیم (BA') دایره‌ای برقطر BA' به مرکز نقطهٔ C وسط BA' رسم می‌کنیم. چون‌خط AC را رسم کنیم، دایره رادر نقطهٔ D قطع می‌کند؛ دایرهٔ به شعاع AD خط AB رادر E می‌برد وآنرابر نسبت ذات وسط وطرف تقسیم می‌کند. زیراکه رابطهٔ فوق‌را به صورت $a^۲=x^۲+ax$ می‌توان نوشت . اگر به طرفین رابطهٔ اخیر $\frac{a^۲}{۴}$ اضافه کنیم ، خواهیم داشت: $a^۲+\frac{a^۲}{۴}=\left(x+\frac{a}{۲}\right)^۲$. یعنی $x+\frac{a}{۲}$ وترمثلث قائم‌الزاویه ای است که یك ضلع‌آن a وضلع دیگرش $\frac{a}{۲}$ است . اگر طرفین رابطهٔ اخیر را بر $a^۲$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت : $\left(\frac{x}{a}+\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۵}{۴}$. قدرمطلق یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم اخیر (نسبت به $\frac{x}{a}$) همان عددطلائی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است، یعنی نسبت $\frac{x}{a}$ برابر نسبت طلائی است .

حال اگر مستطیلی بسازیم که نسبت طول آن به عرضش برابر عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ یاتقریباً برابر ۱٫۶۱۸۰۰ باشد و این مستطیل رادرمیان چند مستطیل دیگر که بااضلاع ونسبتهای متفاوت ساخته شده باشند قراردهیم ازتمام‌آنها زیباتر وقشنگتر به چشم می‌آید . بااین تجربهٔ ساده می‌توان تا اندازه‌ای به

ارزش واهمیت عدد طلائی پی‌برد .



شکل مقابل طریقهٔ ساده تری راجهٔ رسم عدد طلائی نشان می‌دهد . ـ واحد ۱٫۵cm) (۵ √ وتر مثلث قائم‌الزاویه ایست که یك ضلع آن ۲ واحد وضلع دیگرش یك واحد باشد)

روش افلاطون درشناخت زیبائی چنین بود که قبلاً نمونه ومثالی رادرنظرمی گرفت وچیزهای زیبارا باآن سنجیده وحکم به درجهٔ زیبائی آنها می‌داد . مثلاً مستطیلی را که نسبت طول آن به‌عرضش برابرعدد طلائی بودبه عنوان مثال برای تشخیص زیبائی وتناسب مستطیلهای دیگر به‌کار می‌برد .

اگرچه تاریخ هنرهای زیبا درنظر گرفتن یك نمونه و مثال ثابت راکه معیار ومقیاس زیبائی باشد عملاً قبول ندارد ونشان می‌دهدکه چنین امری هرگز عملی نبوده است ، ولی بیشبهه یونانیان به‌تجربه دریافته بودندکه مستطیلهائی که نسبت ابعادشان‌برابر ۱٫۶۱۸۰۰۰ باشد اشکال‌زیبایی هستند ؛ متوسط ومتعادل نه بسیار طویل ونامتناسب ونه بسیار کوتاه وزشت. این نوع مستطیلها درموارد استعمال عادی مثلاً قطع کتاب وکاغذ و نامه ، سطح میز ، صحن حیاط وکف وسقف اطاقهای نشیمن بسیار مفیدند .

بررسی وتحقیق درآثارباستانی یونان قدیم نشان می‌دهد که معماران ومهندسان این نسبت را تقریباً درکلیهٔ قسمتهای مختلف هنرمعماری ومهندسی ومجسمه سازی ونقاشی آگاهانه به کاربرده‌اند .

کتابهای پرارزش وقابل نگاهداری رابقطع مستطیل زیبا (تقریباً به‌قطع وزیری) می‌ساختند ودفاتر پیش‌نویس وروزنامه وبی‌ارزش را به قطع مستطیلهای دیگر (مثلاخشتی) می‌ساختند امروزهم درچاپخانه‌ها وصحافی‌همین روش مرسوم ومتداول‌است وکتابهائی‌که به‌قطع مربع یانزدیك بـه‌آن باشدکمتر مشاهده می‌شود .

آمارنشان‌می‌دهدکه‌کتابهائی که نسبت‌طول آنها به‌عرضشان تقریباً برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد بیش‌ازسایر کتابها به‌فروش‌می‌رسد زیراظاهراً زیباتراست .

دانشمندان معروف وفلاسفهٔ قرون جدید نیز وجـود این نسبت واین عدد رادربسیاری ازاشیاء زیباوقشنگ طی محاسبات دقیق‌ثابت وباآزمایشهای‌کافی نظریهٔ فوق راتأییدکرده‌اند .

فچنر حکیم‌آلمانی برای‌بیان روش‌تجربی‌خود درشناخت زیبائی آزمایش زیررا انجام داد :

ده شکل هندسی به شکل مستطیل‌که یکی ازآنها مربع‌و ۹ تای دیگر مستطیل بود رسم کردوآنهارابه‌عدهٔ کثیری ازطبقات مختلف مـردم نشان داد و ازآنان درخواست‌کردکـه بگویند کدامیك ازاین‌اشکال رازیباترازبقیه تشخیص می‌دهند وکدامیك بیش ازسایرین‌زشتتراست، به‌شرط‌آنکه هنگام تشخیص وقضاوت فقط زیبائی تناسب را درنظر بگیرند ودربارهٔ آن شکل اندیشه های دیگری درمیان نیاورند . مثلا فکرنکنندکه‌کدام مستطیل برای پنجره یاکتاب یاآلبوم تمبریاعکس وکارت ویزیت‌مناسب تراست .

درنتیجهٔ تکرار آزمایشها وگرفتن میانگینهای آمـاری معلوم‌شدکه‌اکثریت مردم مربع مستطیلی‌رابردیگراشکال‌ترجیح داده‌اندکه نسبت بعدکوچك به‌بعد بزرگ آن مثل نسبت ضلع بزرگ به مجموع هردوضلع باشد ، یعنی

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b+a}$$

اگرضلع کوچك (b) راواحـد فرض‌کنیم ازاین تناسب داریم: $a^2-a-1=0$ شایان توجه‌این‌است‌که قدرمطلق‌یکی ازریشه‌های این معادله، $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ همان عدد طلائی‌است .

ده مربع مستطیل فچنربه نسبتهای زیربودند :

$$\frac{1}{1}\ ،\ \frac{6}{5}\ ،\ \frac{5}{4}\ ،\ \frac{4}{3}\ ،\ \frac{29}{30}\ ،\ \frac{3}{2}\ ،\ \frac{34}{21}\ ،\ \frac{23}{130}\ ،\ \frac{2}{1}\ ،\ \frac{5}{3}$$

وآن‌را اکثریت مردم زیباترازهمه تشخیص‌دادند مربع مستطیلی به اضلاع ۳۴ و ۲۱ بودکه نسبت دوضلع آن :

$\frac{34}{21}=$ ۱٫۶۱۷۰ یعنی‌تقریباً برابرعدد طلائی است .

البته به روش فچنر ایرادگرفتندکه چون دامنهٔ تجارب اشخاص محدود است ، فقط در مورد اشیاء ساده نوع‌آزمایش را می‌توان به‌کاربرد وحال آنکه امورغالباً پیچیده ومرکبند و به علاوه رأی اکثریت را نمی‌توان درهنر معتبروقاطع محسوب داشت ، چه اکثریت معمولا فاقد ذوق وسلیقه وشاید اسیر اوهام وخرافات باشند ورأی اقلیت تربیت یافته وتحصیل‌کرده ونخبه بـررأی اکثریت مردم قابل رجحان است . امـا **فیبوناچی** Fibonacci آزمایش **فچنر** را تکمیل‌کرد. فیبوناچی‌کسی است‌که در تأیید رأی قدما در مورد وجود عدد طلائی (یانسبت خدائی) تجارب بسیارکرده ونتایج مثبت‌گرفته است .

فیبوناچی تعداد مستطیلهای قفس را افزایش داد وافرادی راکه به عنوان آزمایش انتخاب کرد بسیار و از دانشجویان رشته‌های علوم و هنرهای زیبا و معماری و مهندسی کشورهای مختلف بودند. در ده هزار نفر آزمایش‌شونده درتشخیص مستطیل زیبا فقط درحدود ۵۰۰ استثناء وجود داشت. پس‌ازرسیدگی‌به وضع این پانصد نفر و بررسی پروندهٔ تحصیلی آنان معلوم شد که اکثریتشان ازلحاظ خارج قسمت‌هوش در طبقهٔ پائین‌تر قرار گرفته و نسبت به‌دیگران عقب‌مانده‌ترند.

نظیر همین آزمایش روی رنگها و اصوات انجام گرفت‌و بین اندازه‌ها و ارتعاشات و طول موج و فواصل و فرکانسها در اشیاء متناسب و هماهنگ و متوافق و زیبا نسبت طلائی به دست آمد.

در اندازه‌گیری که روی اعضاء واندام زیبای مجسمه ونوس رب‌النوع عشق دنیای باستان به عمل آمد وجود نسبت طلائی تقریباً ثابت شد. بالاخره در ساختمانهای عهدعتیق ودر هنرهای متعددٔ دوران معاصر، نه‌فقط‌هنرهای مجسمه بلکه هنر موسیقی و آهنگ سازی، وجود عدد طلائی به خوبی به اثبات رسید.

نتایج مثبتی که از آزمایشهای متعدد در وجود عددطلائی در اشیاء متناسب و زیبا به دست می‌آمد باعث شگفتی بی پایان دانشمندان و سایر متفکران می‌شد به طوری که عده‌ای از علاقمندان برای تحقیق وپیداکردن عدد طلائی در آثار باستانی کشورهای مختلف به کاوش پرداختند. در اهرام ثلاثهٔ مصر و آثار باستانی یونان قدیم و ساختمانهای اعجاب انگیز رم و خرابه‌های تخت‌جمشید، قصرها و معابد وکلیساها، بین‌اندازه‌ها و فواصل تقریبا نسبت طلائی به دست‌آمده است. لطیفه‌ای است مشهور که یکی از دانشمندان منتسب به هنگام بررسی در یکی از اهرام ثلاثهٔ مصرجهت یافتن نسبت‌طلائی بین اندازه‌های آن، وقتی که کوشش او به نتیجه نمی‌رسد، شب‌هنگام‌متروقلم‌بر می‌دارد وشروع به کند و کاوسنگهامی‌کند تا منظورش عملی گشته و نسبت طلائی‌بین اندازه‌هاحاصل گردد. واین استادراشاگردانش ضمن‌کار مخفیانه دیده‌اند!

سلسلهٔ اعداد ..... و u_n و..... و u_3 و u_2 و u_1 که در آن $u_1=1$ و $u_2=1$ وهریك از جملات آن به استثناء دو جمله اول برابر مجموع دو عدد ماقبل است یعنی رشته اعداد: ..... و ۱۳ و ۸ و ۵ و ۳ و ۲ و ۱

به‌رشتهٔ فیبوناچی معروف است و چون دارای خواص جالب و زیبائی است **به رشتهٔ زیبائیهای طبیعت** لقب یافته است.

جمله nام رشتهٔ فیبوناچی یعنی $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$

از عبارت $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ حساب می‌شود:

[$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$] که در آن α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ است.

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad و \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

این خاصیت را با روش استقراء که در شمارهٔ گذشته (شمارهٔ نهم) مقاله‌ای در آن باره از نظر خوانندگان یکان گذشته است، به سهولت می‌توان ثابت‌کرد. یعنی فرض‌می‌کنیم که قضیه برای جمله $n-2$ ام و $n-1$ ام صادق‌باشد وثابت می‌کنیم که برای جمله nام هم صادق است. بدین لحاظ قبول می‌کنیم:

$$u_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$$

و $$u_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})$$

و ثابت می‌کنیم: $$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

چون α و β ریشه‌های این معادله‌اند: $x^2-x-1=0$

پس:

$\alpha^2-\alpha-1=0$	$\beta^2-\beta-1=0$
$\alpha^2=\alpha+1$	$\beta^2=\beta+1$
$\alpha^3=\alpha^2+\alpha$	$\beta^3=\beta^2+\beta$
$\alpha^4=\alpha^3+\alpha^2$	$\beta^4=\beta^3+\beta^2$
.....	.....
$\alpha^n=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$	$\beta^n=\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$

دورابطهٔ اخیر را از هم کم می‌کنیم:

$$\alpha^n-\beta^n=\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}$$

دو طرف تساوی را در $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})$$

واز آنجا

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=u_{n-1}+u_{n-2}$$

یا
$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

و چون قضیهٔ فوق در مورد چند جملهٔ اول نیز صادق است ، برای همهٔ جملات بالاتر نیز صادق خواهدبود .

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha+\beta=1 \qquad \alpha-\beta=\sqrt{5}$$

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0-\beta^0)=0$$

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2-\beta^2)=1$$

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3-\beta^3)=2$$

.....

و

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=u_n$$

فیبوناچی ضمن عملیات جالبی از رشتهٔ فوق رشته‌های متعددی می‌ساخت که مجموعاً جالب توجه بودند وهریك به‌نوبهٔ خود رازی از جمال و زیبائی‌طبیعت را آشکار می‌ساختند . مثلا از ضرب و تقسیم اعداد رشته‌های فوق برهم یا براعدادوجملات ثابت و تعریف شدهٔ دیگر ، رشته‌های متقاربی به‌وجود می‌آورد که‌هریك تشکیل یك‌سری همگرا داده وحدود آنها به‌عددطلائی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌انجامید . سری فوق نیز به نوبهٔ خود خواص فوق‌العاده‌جالبی‌داردکه بسهولت‌اثبات شده ومورد استفاده‌قرار می‌گیرد ،

حدرادیکال زیرین :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

برابر عدد طلائی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است،زیراکه اگر آن راماوی x بگیریم و طرفین را بقوهٔ ۲ برسانیم ، خواهیم‌داشت:

$$x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

که جملهٔ دوم آن همان x است و در نتیجه داریم :

$$x^2=1+x$$

وریشهٔ مثبت این معادله چنین است : $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

کسرمسلسل

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

نیزمقداری برابر عددطلائی داردچه

می‌توان نوشت : $x-1=\frac{1}{x}$ یا $x^2-x-1=0$

که‌ریشه مثبت‌آن $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است .

فیبوناچی ضمن تغییرات وعملیات جالبی دررشتهٔ خود ، رشتهٔ زیرا می‌سازد :

$$0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ \frac{8}{5}\ ,\ \frac{13}{8}\ ,\ \frac{21}{13}\ ,\ \frac{34}{21}\ ,\ \frac{55}{34}\ ,\ \frac{89}{55}\ ,\ \frac{144}{89}\ ,\ \cdots$$

چنانکه ملاحظه می‌شود جملات این دنباله همان فاصلهٔ تنها درگام طبیعی یا گام زارلن‌است (درموسیقی نسبت‌ارتعاشات دوصوت را فاصله دوصدامی گویند ، در گام زارلن فواصل تنها do_1 و re و me و fa و sol و la و si و do_2 نسبت‌به‌مبدأ همان اعداد فوق است). رشتهٔ فوق ترتیبی جالب داردکه جملهٔ عمومی آن به‌کمك عددطلائی، ضمن محاسبات مفصل‌تر، حساب می‌شود .

فیبوناچی یك رشتهٔ دیگر ساخته‌که متقارب بوده وحدش به‌عدد طلائی می گراید . و هشت‌جملهٔ اول‌آن‌را به عنوان فاصلهٔ تنها انتخاب کرده ، گام جدیدی درموسیقی‌عرضه داشته است‌که اصوات را خوشایندتر منعکس ساخته و مورد توجه قرارگرفته است . گام فیثاغورث نیز از یکی از رشته‌های فیبوناچی حاصل می‌شود.

در خاتمه این نکته نیز لازم به‌تذکر است‌که صرف‌نظر

(بقیه در صفحه ٥٤)

انتقادی بر کتاب فیزیک سال سوم

که از نظر مطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی و تصحیح گردیده است.

از هوشنگ شریف زاده

گرچه تاکنون دربارهٔ مقالهٔ بررسی کتب درسی مندرج درشمارهٔ هشتم مجلهٔ یکان ازطرف مسئولان مربوط پاسخی دریافت نداشته ام اما چون سائقهٔ من در تنظیم آن مقاله جز خدمت به تعلیم وتربیت کشور چیز دیگری نبوده است مجدداً مطالبی دربارهٔ کتاب فیزیک سوم، که بنابرشرح اول کتاب، **از نظر صحت مطالب مورد بررسی سازمان کتابهای درسی ایران قرار گرفته است**، تقدیم می‌دارم.

۱ـ درصفحهٔ ۱۰، نوشته شده است که درجهٔ حرارت بدن سالم ۶۶٫۶ فارنهایت می‌باشد. در صورتی که در رابطهٔ $\frac{F-32}{180}=\frac{C}{100}$ اگر فرض کنیم که $C=37^\circ$ دراین صورت خواهیم داشت: $F=98٫6$ نه ۶۶٫۶. شاید بررسان محترم تصور فرموده‌اند که میزان الحرارهٔ فارنهایت عدد $F-32$ را که همان ۶۶٫۶ است نشان می‌دهد!!

۲ـ درصفحهٔ ۱۰، در شرح میزان الحرارهٔ پزشکی، علت باریک ساختن بالای مخزن جیوه را چنین توضیح می‌دهد: «این برای آن است که وقتی که میزان الحراره را از زیر زبان برمی‌دارند جیوه **نتواند** به مخزن باز گردد». معنی این جمله آن است که وقتی که جیوه از مخزن خارج شد، به علت باریک بودن دهانهٔ آن، دیگر به مخزن بازنمی گردد. درصورتی که همه و من جمله شاگردانی که درسر کلاس از من سؤال کردند، می‌دانند که باتکان دادن یا سرمادادن به میزان الحراره جیوه به مخزن باز می گردد. واضح است که اگر بررسان محترم علاقمند باشند که این جمله را به همین شکل حفظ کنند باید پس از کلمهٔ «نتواند» اضافه کنند «خودبه‌خود».

۳ـ درصفحهٔ ۱۵، دربارهٔ گرمای ویژه نوشته شده است: «گرمای ویژهٔ یک جسم مقدار حرارتی است که باید به آن جسم داده شود تا درجهٔ حرارت آن یک درجه بالا برود». در صورتی که «گرمای ویژهٔ یک جسم مقدار حرارتی است که باید به **یک گرم** آن جسم داده شود تا درجهٔ حرارت آن یک درجه بالا برود».

۴ـ درصفحهٔ ۱۷، نوشته شده است که «اگر t_1 و t_2 به ترتیب درجات حرارت اول و آخر جسم باشند». از این جمله چنین استنباط می‌شود، یا لااقل من چنین می‌فهمم، که ابتدای جسم دارای درجهٔ حرارت t_1 و انتهای آن دارای درجهٔ حرارت t_2 است، درصورتی که منظور این نیست. می‌خواهند بگویند که «اگر جسم ابتدا دارای درجهٔ حرارت t_1 و بعد دارای درجهٔ حرارت t_2 باشد».

۵ـ درصفحهٔ ۲۰، نوشته شده است که «آهنربای طبیعی را به دو طریق می‌سازند» من نمی‌دانم. اگر آهنربا طبیعی است که دیگر ساخته نمی‌شود!! واگر آن را بسازند مصنوعی است نه طبیعی.

۶ـ درصفحهٔ ۲۱، نوشته‌اند که «چاقو هم به نوبت خود آهنربا می‌شود». معلوم نیست که قبل از چاقو نوبت چه جسمی بوده است که آهنربا شده واکنون نوبت به چاقو رسیده است.

۷ـ درصفحهٔ ۳۴، در تعریف کولن، واحد مقدار الکتریسیته نوشته‌اند: «مقدار الکتریسیته‌ای است که اگر از محلول نیترات نقره عبور کند ۱٫۱۱۸ گرم نقره بر کاتد رسوب دهد.» شاید اشتباههای ادبی از نظر نویسندگان کتابهای علمی مهم نباشد ولی اگر اشتباهی آن هم در تعریف واحد بنمایند فکر نمی‌کنم که قابل بخشش باشد، علی‌الخصوص که بررسان محترم نیز آن را از نظر صحت مطلب بررسی کرده باشند. کولن مقدار الکتریسیته‌ای است که اگر از محلول نیترات نقره عبور کند ۱٫۱۱۸ میلیگرم بر کاتد رسوب دهد.»

۸ـ درصفحهٔ ۳۶، نوشته‌اند: «دراین رابطه p مقداری است ثابت که **تنها** بستگی به جنس سیم دارد». بنده فکر می‌کنم

که ρ علاوه بر آن که به‌جنس سیم بستگی دارد به‌درجهٔ حرارت نیز بستگی دارد.

۹ـ درهمان صفحه، ضریب مقاومت برحسب **اهم برسانتیمتر** بیان نمی‌شود بلکه آن را برحسب **اهم‌سانتیمتر** بیان می‌کنند.

۱۰ـ باز در همان صفحه نوشته‌اند که ρ برحسب Cm^2 است . علامت سانتیمتر مربع ، طبق قرارداد سال ۱۹۶۱ ، c (حرف کوچك) است نه Cm^2 . امیدوارم که به زودی مقاله‌ای دربارهٔ علامتهای اختصاری ، طبق قرارداد سال ۱۹۶۱ تنظیم و برای استفادهٔ همه ، من جمله بررسان کتابهای درسی ، در اختیار مجله یکان قرار دهم.

۱۱ـ درصفحهٔ ۳۷ ، حرفهای A و B در شکل ۳۱ کجا هستند . آیا توضیحات صفحهٔ ۳۸ می‌تواند جای نقطه‌های مذکور را مشخص کند؟

۱۲ـ درصفحهٔ ۴۲، **مقاومت متعادل** را قبول کنیم یا **مقاومت معادل** را . آیا درست است که همهٔ تلاشمان متمرکز واحد کردن رسم‌الخط شود ولی درواحد کردن اصطلاحات علمی زحمتی به خود ندهیم .

۱۳ـ در صفحهٔ ۵۵ ، مجهول مسئلهٔ ۱۱ چه رحجانی برمجهول سایر مسائل دارد که آن را باحروف سیاه نوشته‌اند.

۱۴ـ درصفحهٔ ۶۰ ، باتوجه به تعریفی که برای کانون شده است : «نقطه‌ای است که پرتوهائی که ازیك‌جای بسیاردور برآن می‌تابند پس‌ازانعکاس درآن نقطه گرد می‌آیند» ، تعریف محور اصلی : «خطی که کانون و مرکز آینه را به هم متصل می‌کند» ناقص است و تعریف فوق می‌تواند فقط تعریف محور باشد نه‌محور اصلی.

۱۵ـ درصفحهٔ ۷۱ ، محل نقطهٔ I درشکل ۶۰ کجاست؟ گرچه باتوضیحاتی که داده شده است می‌توان محل آن را در شکل یافت ولی بهتر نبود حال که همهٔ معلمان را مجبور به تدریس یك کتاب می‌کنند لااقل آن کتاب از این گونه نقصها و غلطها بری باشد .

بی‌آنکه حسابی شوید این مسئله را حل کنید

دو قبیله هستند که افراد یکی همیشه دروغ می‌گویند و افراد دیگری همیشه راست . مسافری برای رفتن به دهکده‌ای در سردوراهی به‌یکی ازافراد این دو قبیله برمی‌خورد . راه را بلد نیست ومی‌خواهد که از او جهت صحیح رابپرسد . اما نمی‌داند که این فرد جزء کدامیك از آن قبایل است . راست خواهد گفت یادروغ . اگراین شخص بخواهد راه صحیح دهکده را بفهمد ، سؤال خود را چگونه مطرح کند که آن فرد قبیله ، چه دروغگو باشد چه راستگو ، راه دهکده رادرست نشان دهد ؟

پاسخ مسئلهٔ شمارهٔ قبل زیرهمین عنوان ـ کافی است که فقط یك سنك ازآن قوطی که برچسب روی آن س . م است درآوریم . آری فقط یك سنك . اگر مسئله را حل نکرده‌اید یا جواب دیگری برای آن به‌دست آورده‌اید ، اینك دربارهٔ آنکه چرا بیرون آوردن فقط یك سنك کافی است فکر کنید .

آنچه دیگران در جزء برنامهٔ دبیرستانی تدریس می کنند

«نامه های زیادی به دفتر مجله رسیده است که به اتفاق همه خواسته‌اندکه مقاله - هایی دربارهٔ تبدیل و ترتیب و ترکیب و مورد استعمال آنها چاپ شود. برای انجام منظور خوانندگان، شورای نویسندگان از آقای ایرج ادیبی خواست که نخستین مقاله را تهیه و در اختیار علاقمندان قرار دهند. اینک این شما و این مقالهٔ ایشان.» شورای نویسندگان

تبدیل Permutation

ناهارمجانی - ده نفر از فارغ التحصیلان دبیرستانی تصمیم گرفتند که به افتخار گرفتن دیپلم، ناهاری باهم در یکی ازرستورانها صرف کنند. وقتی که همه جمع شدند وغذا برروی میز چیده شده به هنگام نشستن برصندلیها اختلاف نظر پیدا شد. یکی می گفت که به ترتیب حروف الفبا بنشینیم. دیگری می گفت که به ترتیب قد بنشینیم بهتر است. سومی می گفت به ترتیب سن بنشینیم. چهارمی پیشنهاد می کرد که به ترتیب معدلهای دیپلم بنشینیم. آنقدر پیشنهادهای مختلف از اطراف می‌رسید و تشتت در آراء وجود داشت که غذاها سرد شده بود. بالاخره غائله‌را پیشخدمت رستوران خاتمه‌داد. اوپیشنهادی کرد که همه پذیرفتند. وی گفت که امروز درهرجایی که ایستاده‌اید بنشینید. فردادوباره همه به رستوران بیایید وبه ترتیبی دیگر بنشینید. پس‌فردا باز بیائید و به ترتیبی به‌غیراز امروز وفردا بنشینید. اگر به همین نحو هرتب هرروز به‌رستوران بیایید و به ترتیبی بنشینید که‌در روزهای پیش ننشسته‌اید، وقتی که به انواع مختلف ممکن‌دور میز نشستید آن وقت روزبعد بیایید و من هرغذایی که میل‌داشته باشید برای شما خواهم آورد ووجهی نیز بابت آن مطالبه نخواهم کرد.

این پیشنهاد به‌نظر همه‌مفید آمدوآن را پذیرفتند وناهار صرف شد. تنهافایدهٔ این پیشنهاد نیز همین بودکه به غائله آن روز خاتمه داد والاهرگز نه فارغ التحصیلان دوباره به آنجا رفتندونه ناهار مجانی‌داده‌شد. علت لغوشدن پیشنهاد پیشخدمت این بودکه وقتی که یك نفر برای فارغ التحصیلان حساب کرد که به ۳،۶۲۸،۸۰۰ طریق ممکن است که آنها بنشینند و این قریب ۹۹۴۰ سال طول می‌کشد و بنابراین «ناهار مجانی» سرایی است که هرگز بدان نخواهند رسید، از رفتن مجدد به رستوران اباء کردند.

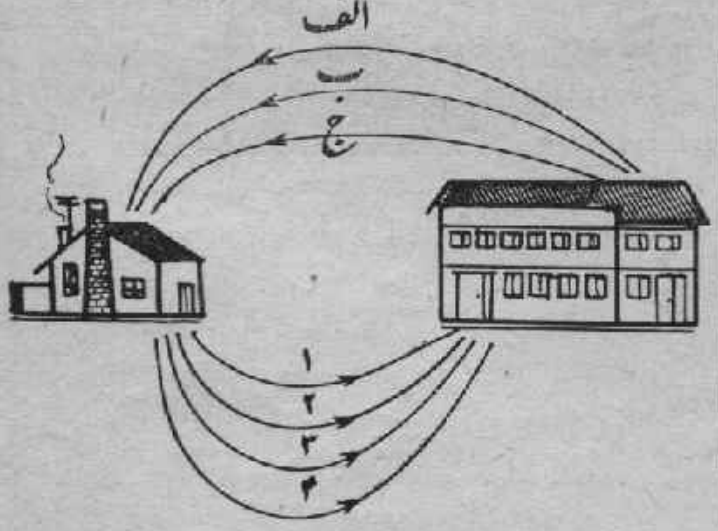
حال ببینیدببینیم که آن یك نفر چگونه برای فارغ التحصیلان حساب کرد. وآیا عدد ۳،۶۲۸،۸۰۰ توعی‌را که وی بدست آورد صحیح است یانه؟

این مسئله یك مسئلهٔ **تبدیل** است. اگرشما به مفهوم تبدیل پی‌برید خواهید دید که به‌چه‌آسانی این مسئله و نظایرآن رامی‌توانیدحل کنید.

برای ادای مطلب اجازه بدهید که‌موضوع را قدری‌دقیقتر بررسی کنیم‌وبازبان ریاضی به گفتگو بپردازیم.

اصل موردلزوم - فرض کنید که ٤راه مختلف وجود داردکه مامی‌توانیم از خانه به دبیرستان بیاییم و۳راه‌دیگرنیز غیرازآنهاوجود داردکه‌مامی‌توانیم ازدبیرستان به‌خانه‌برگردیم

ببینیم که به چند طریق مختلف ممکن است که برای‌رفتن وبرگشتن، از راههای بین خانه ودبیرستان، بدون آنکه از هریك ازآنها دوبار عبورکنیم، استفاده کنیم:



یك بار ممکن است که از راه ۱ برویم و از راه ج یا ب یا الف برگردیم. پس رفتن از راه ۱ و برگشتن از یکی از سه راه الف یا ب یا ج می‌شود سه طریق مختلف . همچنین برای راه‌های ۲ و ۳ و ٤ نیز هریك ۳ طریق مختلف وجود دارد . یعنی بازاء هریك از راههای رفتن (که ٤ تا است) سه طریق برگشت وجود دارد. پس روی هم به ٤ × ۳ طریق مختلف می‌توان به دبیرستان رفت و برگشت .

این مثال، اصلی را که همیشه می‌توان به کار برد آشکار می‌سازد و آن این است که :

اگر m راه برای انجام کاری موجود باشد و وقتی که آن کار به یکی از آن راهها انجام گرفت n راه نیز برای انجام کار دوم موجود باشد ، روی‌هم، m × n راه مختلف وجود دارد که می‌توان آن دو کار را پشت سر هم انجام داد.

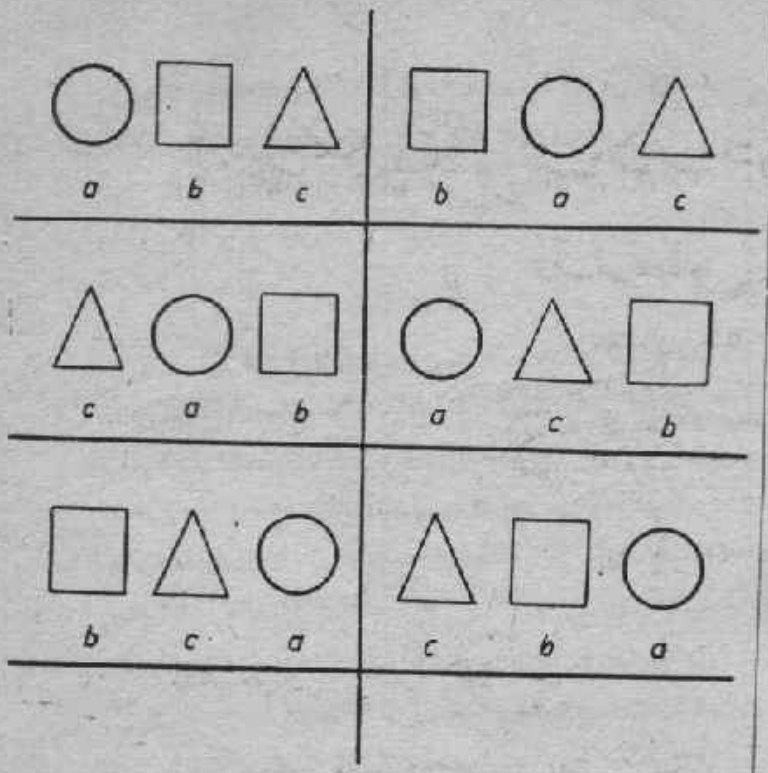
این اصل را می‌توان تعمیم نیز داد . مثلا اگر سه کار متوالی باشد که انجام اولی به m و دومی به n و سومی به p راه مختلف صورت پذیرد، m × n × p راه مختلف وجود دارد که می‌توان آن سه کار متوالی را انجام داد .

اگر این اصل را فهمیده باشید بقیهٔ مطالب فوق العاده آسان و به سهولت قابل فهم است.

تبدیل ـ هرگاه چند چیز مختلف داشته باشیم و آنها را در کنار هم در یك سطر قرار دهیم یك **گروه** (یا دسته) تشکیل داده‌ایم . مثلا با داشتن دوات و مداد و قرار دادن آنها در کنار هم یك دسته تشکیل داده‌ایم . همچنین با داشتن حرفهای a و b و c و d (که می‌توان آنها را به جای اشیاء یا افراد تصور کرد) و قرار دادن آنها پهلوی هم می‌توان گروه abcd را تشکیل داد . حال اگر جای حرفها یا اشیاء یا افراد را در گروه تشکیل شده جابه‌جا کنیم ، گروههای دیگر به دست می‌آیند ، مثلا از گروه abcd ، گروه acbd یا adbc و غیره به دست می‌آید . این کار را **تبدیل** می‌گویند . به شکل ستون بعد نگاه کنید :

گروههای تبدیل سه شکل دایره و مثلث و مربع در آن دیده می‌شود . دیگر به هیچ وجه نمی‌توان جای این سه چیز را تغییر داد و گروه جدیدی به دست آورد.

همان‌طور که می‌بینید با سه چیز ، ٦ گروه تبدیل می‌توان تشکیل داد . مسئله‌ای که در اینجا مطرح است آن است که اگر n شیئی داشته باشیم چند گروه مختلف می‌توانیم از آنها تشکیل دهیم . به عبارت دیگر ، تعداد گروههای تبدیل n شیئی مختلف چیست ؟



تعداد گروههای تبدیل n شیئی مختلف ـ فرض کنید که n چیز مختلف داشته باشیم و بخواهیم ببینیم که با آنها چند گروه مختلف می‌توان تشکیل داد ، یعنی به چند راه مختلف می‌توان آنها را در کنار هم قرار داد . مسئله مانند آن است که بخواهیم بفهمیم به چند راه مختلف می‌توان n نفر را بر روی n صندلی نشاند.

مسلم است که نخستین صندلی ممکن است که به n طریق مختلف اشغال شود . وقتی که صندلی اول اشغال شد ، دومین صندلی ممکن است که به n − ۱ طریق مختلف اشغال گردد زیرا که یکی از افراد بر صندلی اول نشسته است و n − ۱ نفر باقی مانده است .

با استفاده از اصلی که گفتیم این دو صندلی به n(n − ۱) طریق مختلف ممکن است اشغال شود . صندلی سوم ممکن است که به n − ۲ طریق اشغال شود ، چه ۲ نفر از n نفر روی دو صندلی اول و دوم نشسته‌اند و n − ۲ نفر باقی مانده‌اند. بنابراین سه صندلی به n(n − ۱)(n − ۲) طریق مختلف ممکن است که اشغال شود .

به همین ترتیب اگر عمل را ادامه دهیم، برای صندلی آخر فقط یك نفر باقی می‌ماند و فقط به یك راه می‌توان آن صندلی را اشغال کرد . بنابراین n صندلی را می‌توان به

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

راه مختلف اشغال کرد . این حاصل ضرب ، یعنی حاصل

ضرب n عدد صحیح از ۱ تا n را فاکتوریل n می‌گویند و چنین می‌نویسند ! n . مثلاً ۵! = ۵×۴×۳×۲×۱

از آنچه گفته شد، چنانچه تعداد گروههای تبدیل n حرف را به P_n نمایش دهیم داریم :

$$P_n = n!$$

مسئلهٔ فارغ التحصیلان ـ حال باز می‌گردیم به مطلبی که در ابتدای این مقاله به آن اشاره کردیم، گفتیم که شخصی برای فارغ التحصیلان حساب کرد که دستهٔ ده نفر آنها به ۳،۶۲۸،۸۰۰ نوع مختلف ممکن است که دور میز بنشینند. این محاسبه درست انجام گرفته است چه در واقع او $p_{۱۰}$ را حساب کرده است که عبارت است از

$$P_{۱۰} = ۱۰×۹×۸×۷×۶×۵×۴×۳×۲×۱$$
$$= ۳،۶۲۸،۸۰۰$$

وچون هریك از این گروههای تبدیل در یك روز تشکیل می‌شده است ، چنانچه این عدد را بر ۳۶۵ تقسیم کنیم معلوم می‌شود که چند سال طول می‌کشد تا آن ده نفر بتوانند به جمیع راههای ممکن دور میز بنشینند خارج قسمت ۹۹۴۱ و باقیمانده ۳۳۵ است.

***

تمرین

۱ـ برای انتخابات انجمن تعاون دانش آموزان ۴ نفر کاندید ریاست و ۶ نفر کاندید منشیگری و ۲ نفر کاندید خزانه‌داری هستند به چند طریق ممکن است که این سه شغل اشغال شود .

۲ـ ۴ مهرهٔ سفید و سیاه و سبز و قرمز داریم . به چند راه ممکن است که این مهره‌ها را در یك ردیف و در کنار هم قرار داد .

۳ـ با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۷ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت .

۴ـ به چند طریق ممکن است که ۹ کتاب را در طبقهٔ کتابخانه پهلوی هم قرارداد به قسمی که ۳ تا از آن کتابها همیشه پهلوی هم باشند .

۵ـ به چند طریق ممکن است که n مرد روی n صندلی که در یك ردیف قرار گرفته‌است بنشینند طوری که دو نفر از آنها هرگز پهلوی هم قرار نگیرند.

۶ـ شش کتاب مختلف بیولژی و ۵ کتاب مختلف شیمی و ۲ کتاب مختلف فیزیك را می‌خواهیم در یك طبقهٔ کتابخانه به قسمی قرار دهیم که کتابهای هم اسم پهلوی هم باشند . به چند طریق ممکن است که این عمل را انجام داد.

۷ـ حاصل کسر $\frac{n!}{(n+۱)!}$ را حساب کنید.

۸ ـ حاصل ضرب ۱۰×۹×۸×۷ را به صورت فاکتوریل نشان دهید .

یك پرسش

از آهنگری خواستند که از پنج قطعهٔ زیر یك زنجیر به سازد .

طبعاً او می بایست که حلقه هایی را باز کند، قطعه ها را به‌هم بیندازد و بعد آن حلقه‌ها را دوباره ببندد . در این باره فکر کرد و به این نتیجه رسید که باید چهار حلقه را باز کند تا بتواند قسمتها را به هم متصل کند . این کار را هم کرد و زنجیر را ساخت .

حالا سؤالی که ما از شما داریم این است که آیا ممکن نیست که بتوانیم کمتر از چهار حلقه باز کنیم و این پنج قسمت را به هم متصل کنیم ؟

راهنمای ریاضیات متوسطه

چند قضیه از جمله قضایای مهم ریاضی

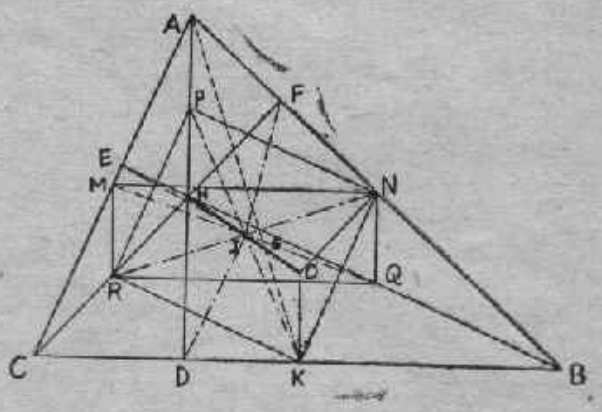
تنظیم از : عبدالحسین مصحفی

قضیه‌هائی که در کتابهای درسی فعلی ایران مذکور نیست و به دفعات توسط اغلب دانش‌آموزان از ما سؤال شده است

دایرهٔ نه‌نقطه

قضیه ـ درهر مثلث اوساط اضلاع ، پای ارتفاعات و اوساط قطعه خطهایی که رئوس مثلث را به نقطهٔ تلاقی ارتفاعات وصل می‌کنند نه نقطه‌واقع برمحیط یك‌دایره می‌باشند

در مثلث ABC اوساط اضلاع BC وCA وAB را به‌ترتیب K وM وN ، ارتفاعات نظیر را به ترتیب AD وBE و CF ، نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع را H و اوساط قطه خطهای



AH وBH وCH را به ترتیب P وQ وR می‌نامیم . در مثلث ABC خط KN که دوضلع را نصف کرده است مساوی وموازی بانصف AC است ، ودر مثلث HAC نیز خط PR مساوی و موازی بانصف AC است پس KN وPR بایکدیگر مساوی و موازی بوده وبر BK عمود می‌باشند . در مثلث ABH خط NP موازی و مساوی بانصف BH ودر مثلث CBH خط KR موازی و مساوی بانصف BH بوده در نتیجه NP و KR بایکدیگر مساوی و موازی هستند وچون هردوبا BH موازیند پس برAC وموازی‌های آن، PR وKN عمود بوده چهارضلعی KNPR مستطیل است ودوقطر آن KP وNR متساوی‌بوده در یك نقطهٔ I منصف یکدیگرند یعنی

$$IK=IN=IP=IR$$

بااستدلال مشابه ،ثابت خواهدشد که چهار ضلعی MNQR مستطیل بوده دو قطرآن مساوی ومنصف یکدیگرندوچون وسط NR نقطهٔ I است بنابراین I وسط MQ نیز بوده و

$$IM=IQ=IN=IR=IP=IK$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ PDK ، میانهٔ نظیر وتر یعنی ID بانصف وتر PK یعنی با IP=IK مساوی است و به همین ترتیب در مثلث‌های QEM وRFN خطوط IE وIF به‌ترتیب بانصف QM وRN مساوی‌بوده در نتیجه

$$IK=ID=IR=IE=IM=IP=IF=IN=IQ$$

یعنی دایره‌ای به مرکز I وجود دارد که بر نه‌نقطهٔ :

K ، M ، N ، D ، E ، F ، P ، Q ، R می‌گذرد .

چنانچه O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد دو زاویهٔ OKN و HPR با یکدیگر مساویند (اضلاع آنها ظیر به ظیر بایکدیگر موازی است و هر دو حاده‌اند) ودو مثلث HPR و KON در حالت (دوضلع و زاویهٔ بین) بایکدیگر مساوی بوده نتیجه می‌شود $OK=PH$ و چون این دو قطعه خط متوازی نیز مساوی‌باشند بنابراین چهار ضلعی KHPO متوازی الاضلاع بود I وسط HO نیز می‌باشد یعنی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث وسط قطعه خطی است که نقطهٔ تلاقی ارتفاعات را به نقطهٔ تلاقی عمود منصفهای اضلاع وصل می‌کند.

فرع- میانهٔ AK خط OH را در یك نقطهٔ G قطع می‌کند، دومثلث GOK و GHA متشابه بوده و چون

$$GK=\frac{1}{2}AG \text{ و } OG=\frac{1}{2}GH \text{ پس } OK=PH=\frac{1}{2}AH$$

یعنی G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث بوده و: درهرمثلث O مرکز دایرهٔ محیطی، I مرکز دایرهٔ نه نقطه، G نقطهٔ تلاقی میانه‌ها و H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات، چهار نقطه واقع بریك خط بوده و:

$$HI=\frac{1}{2}HO \text{ و } GI=\frac{1}{2}GO$$

تمرین: ثابت کنید که:

I- H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث، مرکز تجانس دایرهٔ محیطی مثلث ودایرهٔ نه نقطه می‌باشد.

II- خط مماس بردایرهٔ محیطی مثلث دریك رأس، موازی است با خط مماس بردایرهٔ نه نقطه در وسط ضلع مقابل

III- **قضیهٔ فوئرباخ**. درهرمثلث، دایرهٔ نه نقطه برهریك از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مماس می‌باشد.

* * *

قضیهٔ اولر (دربارهٔ چند وجهی‌ها)

کلاس پنجم ریاضی

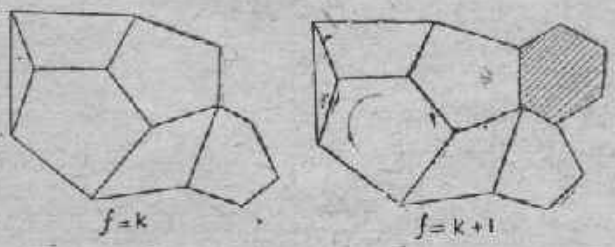
درهرچند وجهی محدب بین F تعداد وجه‌ها، S تعداد رأسها و A تعداد یالها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$F+S=A+2$$

اثبات- قبلاً ثابت می‌کنیم که در یك شبکهٔ محدب متصل غیر مسدود که از f وجه (چند ضلعی محدب) تشکیل شده و تعداد رأسهایش s و تعداد یالهایش a می‌باشد رابطهٔ

(۱) $f+s=a+1$ برقرار است.

ازروش استقراء استفاده می‌نمائیم: اولاً اگر $f=1$ باشد یعنی شبکه فقط شامل یك وجه باشد در این‌صورت چون $a=s$ است (در چند ضلعی تعداد ضلع‌ها باتعداد رأسها مساوی است) بنابراین رابطهٔ (۱) برقرار می‌باشد. ثانیاً فرض می‌کنیم رابطهٔ (۱) به‌ازاء $f=k$ برقرار باشد، چنانچه یك‌وجه به‌شبکه اضافه نمائیم، به‌تعداد یال‌ها یك‌واحد بیش از آنچه که به‌تعداد رأسها اضافه می‌شود اضافه خواهد شد زیرا تعداد رأسهای مشترك وجه اضافه‌شده باشبکه، از تعداد ضلع‌های مشترك آن با شبکه یك واحد بیشتر است (شکل پائین)، بنابراین وقتی که f یك



واحد زیاد شود a نیز یك واحد زیاد شده و رابطهٔ (۱) بازاء $f=k+1$ نیز برقرار است بنابراین نتیجه می‌گیریم که‌دریك شبکهٔ محدب متصل غیرمسدود (تشکیل شده از چند ضلعی‌های محدب) رابطهٔ (۱) همواره برقرار می‌باشد.

اکنون چند وجهی محدب با مشخصات (F تعدادوجه‌ها، S تعداد رأسها، A تعداد یالها) را درنظر می‌گیریم اگر یك وجه این چند وجهی را حذف نمائیم شبکهٔ محدب غیر مسدودی تشکیل خواهد شد که‌تعداد وجه‌ها یش $F-1$، تعداد رأسها و یالهایش به ترتیب $S-n$ و $A-n$ می‌باشد (n تعداد اضلاع و همچنین تعداد رأسهای وجه حذف شده‌فرض شده است) دراین صورت رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته خواهدشد

$$F-1+S-n-A-n+1$$

که پس از اختصار خواهیم داشت.

$$F+S=A+2$$

نتیجه - محاسبهٔ تعداد اجزاء مختلف چند وجهی‌های منتظم

فرض می‌کنیم هروجه چند وجهی منتظم n ضلعی منتظم وهرکنج آن m وجهی باشد (واضح‌است که $n\geq 3$ و $m\geq 3$) در این صورت چنانچه F تعداد وجه‌های چند وجهی باشد خواهیم داشت.

$$A=\frac{nF}{2} \text{ و } A=\frac{mS}{2} \Rightarrow S=\frac{nF}{m} \quad (2)$$

باقرار دادن این مقادیر در رابطهٔ اولر نتیجه خواهد شد

$$F=\frac{4m}{2m+2n-mn} \quad (3)$$

از رابطهٔ (3) به‌سادگی معلوم خواهد شد که m و n چه مقادیری را می‌توانند قبول کنند و در نتیجه ثابت خواهد شد که تعداد چند وجهی‌های منتظم منحصر به پنج است ، ثانیاً از روی مقادیر متناظر m و n و از روی روابط (2) مقادیر A و S برای پنج نوع چند وجهی منتظم حساب می‌شود که جدول مربوط به آن در کتابهای درسی فعلی مذکور است (بدون آنکه چگونگی محاسبه ذکر شده باشد)

***

قضیهٔ فرما

حساب استدلالی - کلاس ششم ریاضی

با استفاده از کتاب «عقایدی در بارهٔ نظریهٔ اعداد» تألیف آی. ا. یاروشه

هرگاه p عدد اول بوده و با a متباین باشد عدد $a^{p-1}-1$ بر p بخش پذیر است، یعنی :

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

سلسله اعداد (1) a و $2a$ و $3a$ و ... و $(p-1)a$ را در نظر می‌گیریم . چون a با p متباین است بنابراین باقیماندهٔ تقسیم هریك از اعداد فوق بر p یکی و فقط یکی از اعداد زیر می‌باشد .

(2) 1 و 2 و 3 و ... و $p-1$

(به عبارت دیگر هریك از اعداد سلسلهٔ (1) با یکی و فقط با یکی از اعداد سلسلهٔ (2) در مدول p همنهشت می‌باشد)

مثلا اگر فرض کنیم $a=4$ و $p=7$ ، دراین صورت هریك از اعداد $4, 8, 12, 16, 20, 24$ را که بر 7 تقسیم نمائیم ، باقیمانده‌ها به ترتیب عبارت‌می‌شوند از $4, 1, 5, 2, 6, 3$ یا سلسله اعداد $1, 2, 3, 4, 5, 6$

باقیماندهٔ تقسیم حاصل ضرب چند عدد بریك عدد برابر است با باقیماندهٔ تقسیم حاصل‌ضرب باقیمانده‌های تقسیم هریك از آن اعداد بر آن عدد یعنی :

$$(a)(2a)(3a)\cdots(p-1)a \equiv (1)(2)(3)\cdots(p-1) \pmod p$$

که به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$a^{p-1}[1\times 2\times 3\times \cdots \times (p-1)] \equiv [1\times 2\times 3\times \cdots \times (p-1)] \pmod p$$

چون هیچك از عامل‌های داخل کروشه و حاصل ضرب آنها بر p بخش پذیر نیست طرفین رابطه را بر عبارت کروشه تقسیم می‌نمائیم، نتیجه می‌شود:

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

یعنی $a^{p-1}-1$ بر p بخش پذیر است.

اولر قضیهٔ فرما را تعمیم داده و به صورت زیر بیان داشته است :

اگر a و m عامل مشترك نداشته باشند عدد $a^{\varphi(m)}-1$ بر m بخش پذیر است ، یعنی :

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$$

بازی اعداد

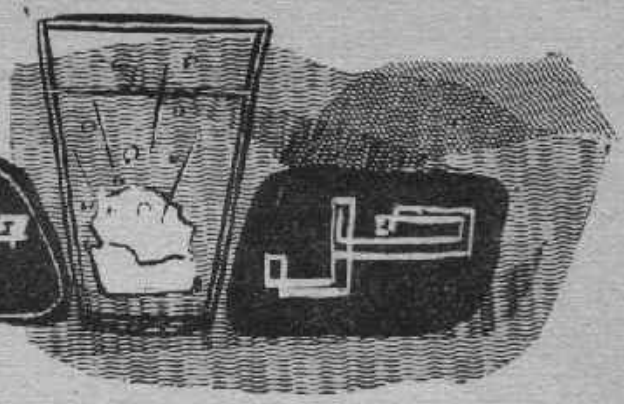
با استفاده از مسألهٔ ۱۶۴۳

$$15+1=4^2$$
$$1155+1=34^2$$
$$111555+1=334^2$$
$$11115555+1=3334^2$$
. . . . . .

***

$$48+1=7^2$$
$$4488+1=67^2$$
$$444888+1=667^2$$
$$44448888+1=6667^2$$
. . . . . .

(مهندس عباس سعیدی)



حل مسائل شماره‌های گذشته

درباره حل مسائل شمارهٔ ۸ که درشمارهٔ ۹ یکان چاپ شده بود . نام کسانی که پاسخ فرستاده بودند بترتیب‌شمارهٔ مسائل تامسألهٔ ۱۵۳۵ درشمارهٔ۹ چاپ شد. اینك ابتدا بقیهٔ نامهابترتیب شمارهٔ مسائل‌چاپ می‌شود وبعد حل مسائل متفرقهٔ شمارهٔ ۸ باذکر نام فرستندگان پاسخ درج خواهدگردید .

۱۵۳۸ ـ محمد جواد غفوری .

۱۵۳۹ ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ مرتضی‌اسلامی ـ فرامرز پورقلی زاده ـ رحیم محمدی ـ کاوه افرا رحیم خیردوست ـ فرامرزمحیط ـ بهمن طاهری ـ رضامنصوری ـ سیدرضاجوزی .

۱۵۴۰ ـ بیوك مددی ـ کاوه افرا ـ غلامرضاحلی ـ فرامرزمحیط ـ رضامنصوری ـ فرامرز پورقلی زاده .

۱۵۴۱ ـ سید رضاجوزی ـ فرامرزپورقلی‌زاده ـ محمد جواد غفوری ـ کاوه افرا ـ غلامرضا حلی ـ فرامرز محیط ـ بهمن طاهری ـ رضا منصوری .

۱۵۴۲ ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ حسین ظهیری ـ رضامنصوری .

۱۵۴۳ ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ حسین ظهیری ـ رضامنصوری .

۱۵۴۴ ـ حسین ظهیری ـ رضامنصوری .

۱۵۴۵ ـ بیوك مددی ـ کاوه‌افرا ـ حسین ظهیری ـ غلامرضاحلی ـ رضامنصوری ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۴۶ ـ حسین نادمپور ـ بیوك مددی ـ حسن شبابی ـ کاوه افرا ـ حسین ظهیری ـ غلامرضا حلی ـ رضا منصوری ـ فرامرزرهبر ـ یدالله‌حاج‌جعفری .

۱۵۴۷ ـ بیوك مددی ـ حسین ظهیری مهرآبادی ـ فرامرزپورقلی‌زاده ـ علی‌اصغر گواهی ـ کورش محسن زادگان ـ فرامرزمحیط ـ بهمن طاهری ـ رضامنصوری ـ فرامرزرهبر ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۴۸ ـ یوسف‌قانع ـ حسین نادم‌پور ـ بیوك مددی ـ محمدروزبه ـ حسین ظهیری ـ محمد جواد غفوری کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ کورش‌محسن زادگان ـ فرامرزمحیط ـ فریدون تهرانی ـ پرویز ابراداصل ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۴۹ ـ یوسف قانع ـ سید محمد کاظم عابدینی ـ احمد خدا وردیان ـ حسین نادم پور ـ بیوك مددی ـ محمد حسن عزیزیان ـ مرتضی اسلامی ـ محمد روزبه ـ حسین ظهیری ـ علی اصغر ترابی ـ علی اصغر گواهی ـ علی‌اصغرعرب ـ عزیزالله اصلانی ـ محمد جواد غفوری ـ منصورجابری ـ سید ضیاءالدین مولانا ـ کاوه‌افرا ـ رحیم خیردوست ـ کورش‌محسن‌زادگان ـ فرامرزمحیط ـ فریدون تهرانی ـ غلامرضاحلی ـ بهمن‌طاهری ـ رضا منصوری فرامرزپورقلی‌زاده ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۵۰ ـ حسین نادم پور ـ حسین ظهیری ـ علی اصغر گواهی ـ محمد جواد غفوری ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ رضا منصوری .

۱۵۵۱ ـ حسین ظهیری ـ فیروز پایرامی ـ کاوه افرا ـ رضا منصوری ـ فرامرز رهبر .

۱۵۵۲ ـ حسین نادم پور ـ یوسف قانع ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ رضا منصوری ـ فرامرز رهبر یدالله حاج جعفری .

۱۵۵۳ ـ حسین نادم‌پور ـ یوسف قانع ـ مرتضی اسلامی ـ حسین ظهیری ـ سیدضیاءالدین مولانا ـ فریدون تهرانی ـ غلامرضا حلی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۵۴ ـ حسین نادم‌پور ـ مرتضی اسلامی ـ حسین ظهیری ـ سیدضیاءالدین مولانا ـ فریدون تهرانی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۵۵ ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ حسین نادم پور ـ یوسف قانع ـ مرتضی اسلامی ـ حسین ظهیری ـ علی‌اصغر گواهی ـ کاوه افرا ـ فرامرز محیط ـ فریدون تهرانی ـ غلامرضا حلی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری .

۱۵۵۶ ـ حسین نادم پور ـ مرتضی اسلامی ـ حسین ظهیری ـ محمدجواد غفوری ـ یوسف قانع ـ رضا منصوری یدالله حاج جعفری .

۱۵۶۱ ـ رضا منصوری .

۱۵۶۲ ـ حسین ظهیری ـ رضا منصوری .

حل مسألهٔ ۱۵۶۳ ـ ماندهٔ تقسیم x^4-px+q بر $(x-c)^2$ عبارت خواهد شد از

$$(4c^2-p)x+q-3c^4$$

این عبارت را نسبت به x متحد با صفر قرار میدهیم :

$$\begin{cases} 4c^3-p=0 & c=\sqrt[3]{\frac{p}{4}} \\ \text{و} & \\ q-3c^4=0 & c=\sqrt[4]{\frac{q}{3}} \end{cases}$$

وچون دومقدار c را برابر قرار دهیم خواهیم داشت

$$27q^4=256q^3$$

پاسخ های رسیده از : یوسف قانع ـ فرخ مجتهدی ـ محمد هاشم پسران ـ محمد رضا خوشریان ـ رمضانعلی صفائی ـ رحیم محمدی فتیدهی ـ محسن آبشاری ـ حسین ظهیری ـ فریدون تهرانی ـ حسین اسدپور ـ غلامعلی محمد علیزاده ـ هاشم احسان ـ یدالله حاجی جعفری.

حل مسألهٔ ۱۵۶۴ ـ صورت و مخرج کسر طرف چپ رابطه را در $\sin x+\cos x+1$ ضرب نموده وکسر را ساده می‌نمائیم خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+1)\equiv a\sin x+b\cos x+c$$

ونتیجه میشود :

$$a=b=c=\frac{1}{2}$$

پاسخ های رسیده از : حسین نادمپور لنگرودی ـ بیوك مددی ـ فرخ مجتهدی ـ محمد روزبه ـ ولی‌الله اردشیری ـ محمد هاشم پسران ـ محمد رضا خوشریان ـ رمضانعلی صفائی ـ حسن همتی ـ رحیم محمدی ـ محسن آبشاری ـ حسین ظهیری ـ فرامرز پورقلی زاده ـ کورش محسن‌زادگان ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ حسن شبابی ـ سید ضیاءالدین مولانا ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست ـ فریدون تهرانی ـ حسین اسدپور ـ فرامرز رهبر ـ علی‌اصغر ترابی ـ یدالله حاجی جعفری .

حل مسألهٔ ۱۵۶۵ ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض را با x_1 و x_2 و x_3 و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم مطلوب $X^3-SX^2+PX-Q=0$ را با X_1 و X_2 و X_3 نمایش دهیم داریم

$$X_1=x_1^2 \quad و \quad X_2=x_2^2 \quad و \quad X_3=x_3^2$$

$$S=X_1+X_2+X_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=$$
$$(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$
$$=(-\frac{b}{a})^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$P=X_1X_2+X_2X_3+X_3X_1=(x_1x_2)^2+(x_2x_3)^2+(x_3x_1)^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left(-\frac{d}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{c^2-2bd}{a^2}$$

$$Q=X_1X_2X_3=(x_1x_2x_3)^2=\frac{d^2}{a^2}$$

ومعادلهٔ مطلوب عبارت خواهد شد از

$$X^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}X^2+\frac{c^2-2bd}{a^2}X-\frac{d^2}{a^2}=0$$

$$a^2X^3+(2ac-b^2)X^2+(c^2-2bd)X-d^2=0$$

پاسخ‌های رسیده از : سیدرضا جوزی ـ محمد هاشم پسران ـ کورش محسن‌زادگان ـ محمد رضافوشریان ـ محسن آبشاری ـ حسین ظهیری ـ حسین اسدپور ـ رحیم محمدی ـ فریدون تهرانی ـ فرامرزپورقلی‌زاده ـ حسین نعمتی

حل مسألهٔ ۱۵۶۶ ـ ازرابطهٔ مفروض نتیجه میشود

$$8\cos^3\alpha=a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})=a^3+a^{-3}+6\cos\alpha$$

$$8\cos^3\alpha-6\cos\alpha=2\cos3\alpha=a^3+a^{-3}$$

پاسخ‌های رسیده از : سید محمدکاظم عابدینی ـ بیوك مددی ـ ولی‌الله اردشیری ـ محمدهاشم پسران ـ رمضانعلی‌صفائی محسن آبشاری ـ حسین ظهیری ـ حسین‌اسدپور ـ علی‌اصغر ترابی فیروزپایرامی ـ علی اصغر گواهی ـ محمدجوادغفوری ـ منصور جابری ـ حسن شبانی ـ سید ضیاءالدین مولانا ـ رحیم‌خیردوست فرامرز محیط ـ فریدون تهرانی ـ غلامرضا حلی ـ فرامرز رهبر ـ حسین نعمتی ـ یدالله حاجی جعفری

حل مسألهٔ ۱۵۶۷ ـ فرض می کنیم

$$u=ax+by+cz+dt$$

از روابط داده شده خواهیم داشت

$$u-x=ax,\ u-y=by,\ u-z=cx,\ u-t=dt$$

$$u=(1+a)x=(1+b)y=(1+c)z=(1+d)t$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=\frac{x+y+z+t}{u}=\frac{3u}{u}=3$$

پاسخ‌های رسیده از : ولی‌الله اردشیری ـ محمد هاشم پسران ـ کورش محسن زادگان ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ حسین اسدپور

حل مسألهٔ ۱۵۶۸ ـ ازتقسیم طرفین رابطه بر عبارت طرف دوم (بجز ۲) بدست می‌آید

$$\frac{1}{\log_{c-b}a}+\frac{1}{\log_{c+b}a}=2$$

وبااستفاده ازفورمول تغییر مبنا درلگاریتم نتیجه می‌شود

$$\log_a c-b+\log_a c+b=2$$

$$\log_a c^2-b^2=2 \text{ یا } a^2=c^2-b^2 \text{ یا } a^2+b^2=c^2$$

پاسخ‌های رسیده از : سیدمحمدکاظم عابدینی ـ بیوك مددی ـ ابراهیم طاهری‌آشتیانی ـ ولی‌الله‌اردشیری ـ محمدهاشم پسران ـ فیروزپایرامی ـ عزیزالله اصلانی ـ محمدجواد غفوری حسین امدپور ـ محسن‌آبشاری .

حل مسألهٔ ۱۵۶۹ ـ عبارت صورت رابه ترتیب چنین می‌نویسیم

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=$$

$$\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=$$

$$\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{1}{n}\left[\frac{n+1-1}{n+1}\right]=\frac{1}{n+1}$$

حاصل عبارت مخرج دانیزبه ترتیب زیربدست می‌آوریم

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{n}{2n+1}$$

ومقدارکسرمفروض عبارت خواهد شد از

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{2n+1}}=\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}$$

چون n و $n+1$ نسبت به‌یکدیگر اول‌اند مجموع وحاصل ضرب آنهایعنی صورت ومخرج کسربالانیز نسبت به یکدیگر اول بوده وکسر تحویل ناپذیراست .

پاسخ های رسیده از : یوسف قانع ـ حسین‌اسدپور ـ ولی‌الله اردشیری ـ محمدهاشم پسران ـ حسین ظهیری ـ کورش محسن زادگان ـ ابراهیم طاهری آشتیانی .

حل مسألهٔ ۱۵۷۰ـ تفاضل عبارت طرف اول‌نامساوی رابرعبارت طرف دوم آن با d نمایش میدهیم وکافی است‌که ثابت نمائیم d مثبت است ، داریم :

$$d=nx^{n+1}+1-nx^n-x^n=nx^n(x-1)-(x^n-1)$$

$$d=(x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1)$$

باتوجه بـه‌اینکه nx^n عبارت است ازمجموع n جملهٔ x^n و

$$x^n-x^{n-1}=x^{n-1}(x-1)$$

$$x^n-x^{n-2}=x^{n-2}(x^2-1)=(x-1)(x+1)x^{n-2}$$

$$x^n-x^{n-3}=x^{n-3}(x^3-1)=x^{n-3}(x-1)(x^2+x+1)$$

. . . . . .

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$$

$$d=(x-1)^2[x^{n-1}+(x+1)x^{n-2}+\dots+(x^{n-1}+\dots+x+1)]$$

عبارت داخل کروشه مجموع جمله‌های مثبت است وچون $(x-1)^2>0$ است بنابراین $d>0$ بوده ونامساوی مفروض برقرار است

پاسخ های رسیده از : محمد هاشم پسران - حسین ظهیری - حسین اسدپور - ابراهیم طاهری آشتیانی .

حل مسألهٔ ۱۵۷۱ ـ اگر A_1 نقطهٔ تلاقی نیمساز های زاویه‌های خارجی CoB از مثلث ABC باشد (مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A) مقدارزاویهٔ A_1 برابر خواهد بود با $90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$ وبنابراین رابطه‌های زیررا خواهیم داشت

$$\hat{A}_1=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

$$A_2=90^\circ-\frac{90^\circ}{2}+\frac{\hat{A}}{4}$$

$$A_3=90^\circ-\frac{90^\circ}{2}+\frac{90^\circ}{4}-\frac{\hat{A}}{8}$$

. . . . .

$$A_n=90-\frac{90^\circ}{2}+\frac{90^\circ}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{90^\circ}{2^{n-1}}+(-1)^n\frac{\hat{A}}{2^n}$$

وچنانچه $n\to\infty$ جملهٔ $\frac{\hat{A}}{2^n}$ به سمت صفر میل کرده وحد A_n برابراست باتقاضل حدود دوتصاعد هندسی نزولی اولی باجملهٔ اول 90° وقدرنسبت $\frac{1}{4}$ ودومی باجملهٔ اول $\frac{90^\circ}{2}$ وقدر نسبت $\frac{1}{4}$

$$S_1=\frac{90^\circ}{1-\frac{1}{4}}=120^\circ \quad S_2=\frac{\frac{90^\circ}{2}}{1-\frac{1}{4}}=60^\circ$$

$$\lim A_n=S_1-S_2=60^\circ$$

یعنی نوع مثلث $A_nB_nC_n$ وقتی $n\to\infty$ متساوی‌الاضلاع میباشد

پاسخ‌های رسیده از : محمدهاشم‌پسران . محسن آبشاری

حل مسألهٔ ۱۵۷۲ـ داریم

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2<\frac{a^2+b^2}{2} \text{ یا } \frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

تساوی وقتی است که $a=b$ باشد

پاسخهای رسیده از : یوسف قانع - ابراهیم طاهری آشتیانی - محمد حسن عزیزیان - محمد هاشم پسران - رحیم محمدی - حسین اسدپور - علی اصغر گواهی - علی اصغر ترابی رحیم خیردوست - حسین رزاقی زاده - یدالله حاجی جعفری .

حل مسألهٔ ۱۵۷۳ـ فرض می کنیم درنامساوی

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

داشته باشیم

$$a_1=a_2=a_3=\dots=a_{m_1}=y_1$$

$$a_{m_1+1}=a_{m_1+2}=\dots=a_{m_2}=y_2$$

. . . . . .

$$a_{m_{k-1}+1}=a_{m_{k-1}+2}=\dots=a_{m_k}=y_k$$

باشرایط فوق تعداد جمله‌ها درنامساوی واسطهٔ عددی و هندسی برابر با $m_1+m_2+\dots+m_k$ شده واین نامساوی به صورت نامساوی مذکور درمسأله در می‌آید .

پاسخ‌های رسیده از : رحیم خیردوست - اسفراربابی بیدگلی

حل مسألهٔ ۱۵۷۴ ـ مانند مسأله قبل عمل مینمائیم و چون $R_1+R_2+\dots+R_k=1$ است پس

$$\frac{m_1}{m_1+m_2+\dots+m_k}=R_1$$

$$\frac{m_2}{m_1+m_2+\dots+m_k}=R_2$$

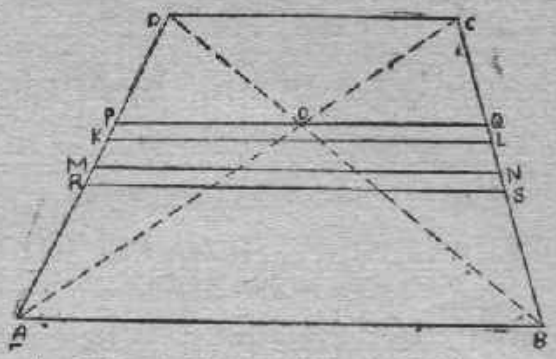
. . . . . .

$$\frac{m_k}{m_1+m_2+\dots+m_k}=R_k$$

کسرهای طرفین نامساوی مسألهٔ قبل را تفکیک نموده و باتوجه به‌روابط بالا ، نامساوی مطلوب بدست خواهدآمد

پاسخ‌های رسیده از : رحیم خیردوست

حل مسألهٔ ۱۵۷۵ـ اولاً : ۱) اگر M وسط ساق AD و N وسط ساق BC باشد طول MN برابر بانصف مجموع طولهای دوقاعده یعنی واسطهٔ عددی بین a و b میباشد



۲) نقطهٔ K رابر AD ونقطهٔ L رابر BC چنان‌پیدا می‌کنیم که

$$\frac{AK}{KD}=\frac{AB}{KL}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

باشد ونتیجه خواهد شد $KL=\sqrt{ab}$

۳) از O نقطهٔ تلاقی دوقطر BC وBD به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تاساق‌های AD وBC رادر P وQ قطع کند

$$\frac{PO}{CD}=\frac{AO}{AC}\ (۱) \quad \text{و} \quad \frac{OQ}{CD}=\frac{BO}{OD}\ (۲)$$

$$\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD}\ (۳) \quad \text{و} \quad \frac{OQ}{AB}=\frac{OC}{AC}\ (۴)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) و (۳) حاصل می‌شود

$$PO=OQ=\frac{PO}{۲}\ (۵)$$

وازجمع طرفین دو رابطهٔ (۱) و (٤) بدست می‌آید

$$\frac{PO}{b}+\frac{OQ}{a}=\frac{AO+OA}{AC}=\frac{AC}{AC}=۱$$

وباتوجه به رابطهٔ (۵) وتقسیم طرفین بر $\frac{PQ}{۲}$ بدست می‌آید

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۲}{PQ}$$

یعنی PQ واسطهٔ توافقی‌بین دوقاعدهٔ ذوزنقه میباشد

٤) خط RS راموازی بادوقاعده چنان رسم می‌کنیم که دوذوزنقهٔ ABSR وRSCD معادل باشند اگر x وy بترتیب طولهای ارتفاع‌های دوذوزنقهٔ فوق‌الذکر باشد داریم

$$(a+RS)x=(b+RS)y$$

$$(a+RS)x+(b+RS)y=(a+b)(x+y)$$

ازحذف x وy بین دورابطهٔ بالا بدست خواهدآمد

$$RS=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$

ثانیاً فرض می‌کنیم $a>b$ ، داریم

$$\frac{AM}{MD}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{AK}{KD}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{و} \quad \frac{AP}{PD}=\frac{a}{b} \quad \text{و}$$

$$\frac{AR}{RD}=\frac{b+\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}}{a+\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}}$$

وچون

$$\frac{b+\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}}{a+\sqrt{\frac{a^۲+d^۲}{۲}}}<۱<\sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{a}{b}$$

بنابراین

$$AR<AM<AK<AP$$

ویا

$$RS>MN>KL>PQ$$

ویا

$$\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}>\frac{a+b}{۲}>\sqrt{ab}>\frac{۲ab}{a+b}$$

حل مسألهٔ ۱۵۷٦ ـ بنابرقضایای نامساویهاداریم

$$\frac{\log_y x+\log_z y+\log_x z}{۳}\geq\sqrt[۳]{\log_y x\log_z y\log_x z}$$

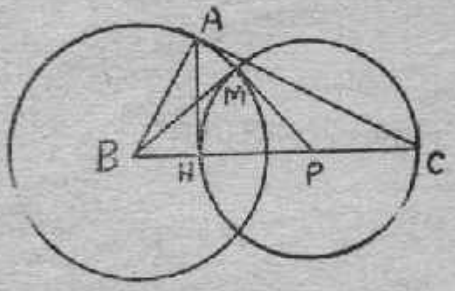
وبنابرقضایای مربوط به دستگاه لگاریتم داریم

$$\log_y x+\log_z y\log_x z=۱$$

ودرنتیجه نامساوی مذکور درصورت مسأله محقق است .

پاسخ‌های رسیده از : حسین‌اسدپور ـ ابراهیم طاهر آشتیانی ـ محسن آبشاری ـ فیروز بابرامی

حل مسألهٔ ۱۵۷۷ ـ اگر مثلث رادرسم شده فرض کنیم دایرهٔ به مرکز B وبه شعاع BA بر دایرهٔ بقطر CH (به مرکز P) عموداست

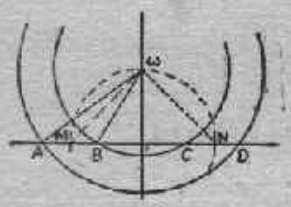


($BA^۲=\overline{BH}\cdot BC$) واگر M نقطهٔ تلاقی دودایره‌باشد مثلث BMP درزاویهٔ M قائمه بوده واندازه‌های اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم است . بنابر این برای رسم مثلث مطلوب ابتدا مثلث BMP را با معلومات $\hat{M}=۹۰^\circ$ و $BM=AB$ و $MP=\frac{CH}{۲}$ میسازیم ، دایرهٔ به مرکز P وبه شعاع PM

ضلع BP وامتداد آن رادر CوH قطع می کند ، عمودی که در H بر BC خراج شود دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BM رادر A قطع می کند و مثلث بدست می‌آید

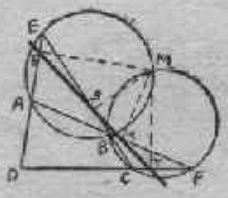
پاسخ‌های رسیده از : حسین‌اسدپور ـ کورش محسن زادگان ـ محسن آبشاری ـ منصورجابری ـ علی‌اصغر ترابی ـ رحیم خیردوست

حل مسألهٔ ۱۵۷۸ـ قطعه خط AB را به نسبت K تقسیم می‌نمائیم ، دونقطهٔ NوM بدست می‌آید ، دایرهٔ به قطر MN مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصل آنها ازدونقطهٔ AوB برابربا K می باشد ، نقطهٔ تلاقی‌این دایره با عمود منصف مشترک ADوBC نقطهٔ ω مرکز دوایرمطلوب رابدست میدهد .مسأله وقتی جواب دارد که K>۱ باشد



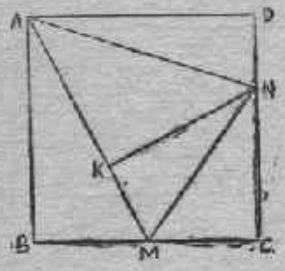
پاسخ رسیده از : غلامرضا حلی

حل مسألهٔ ۱۶۷۹ـ بنابرقضیهٔ «سمسن» تصویرهای هر نقطه ازدایرهٔ محیطی مثلث براضلاع مثلث سه نقطهٔ واقع بریك استقامت می‌باشند (خط سمسن) .



چهارخط دوبه‌دومتقاطع چهار ضلعی کاملی مانند ABCDEF تشکیل میدهند. اگرM نقطهٔتلاقی دایره‌های محیطی‌مثلث‌های ABE و BCF و α و β و γ و δ به ترتیب تصویرهای M برچهارضلعی کامل باشد ، نسبت به‌دایرهٔ محیطی مثلث ABE سه نقطهٔ α وβ وδ بر یك خط واقع‌اند ونسبت به دایرهٔ محیطی مثلث BCF سه‌نقطهٔ α وβ وγ بریك استقامت اند بنابراین چهار نقطهٔ α و β و γ و δ برخطی مانند Δ واقع‌اند . چون β وδ وγ تصویرهای M براضلاع مثلث BEC بریك استقامت‌اندبنابراین دایرهٔ محیطی‌مثلث DEC ازM می گذرد و چون δ وγ وα تصویرهای M براضلاع مثلث ADF بوده و بریك استقامت‌اند پس دایرهٔ محیطی مثلث ADFازM خواهد گذشت یعنی چهاردایرهٔ محیطی چهارمثلث تشکیل شده ازچهار خط دوبدو متقاطع دریك نقطه مشترك‌اند وتصویرهای این نقطه برچهارخط چهارنقطهٔ واقع بریك استقامت می‌باشند

مورد استعمال ـ اگر چهار مماس ازیك سهمی معلوم باشد ، چون تصویرکانون سهمی برهرمماس‌آن برمماس درتأس واقع است دوایرمحیطی‌مثلث‌هائی‌راکه ازتقاطع دوبدوی‌خطوط مماس تشکیل می‌شود رسم مینمائیم : نقطهٔ مشترك آنها کانون سهمی می باشد واز روی آن مماس‌وخط هادی سهمی‌بدست می‌آید .



حل مسألهٔ ۱۵۸۰ـ یك راه حل مسأله آن است که فرض می‌کنیم طول ضلع مربع برابر ۲a باشد در این‌صورت خواهیم داشت

$BM=۲a$ و $DN=۲a$

$MN=۵a$ و $AN=۲a\sqrt{۱۰}$ و $AM=۳a\sqrt{۵}$

واگرعمود NK رابر AM رسم کنیم‌بااستفاده ازروابط متری بین اضلاع مثلث AMN طول $AK=۲a\sqrt{۵}$ بدست‌آمده ازروی‌آن $MK=۲a\sqrt{۵}$ حساب می‌شود یعنی مثلثAKN قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بوده وزاویهٔ MAN برابر ۴۵° می‌باشد

پاسخ‌های‌رسیده از . بیوك مددی ـ ولی‌الله اردشیری محسن آبشاری ـ فیروزبایرامی ـ علی‌اصغر گواهی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ حسن شبابی ـ کاوه افرا ـ رحیم خیردوست غلامرضا حلی .

حل مسألهٔ ۱۵۸۱ـ کسرهای طرف اول را تبدیل به کوچکترین مخرج مشترك می‌نمائیم کسرحاصل پس ازساده‌شدن برابرخواهد شدبا

$$\frac{۱}{h_c}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{۲p}{۲S}=\frac{۱}{r}$$

پاسخ‌های رسیده‌از : مسلم امیرقلی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ حسین نعمتی .

حل مسألهٔ ۱۵۸۲ ـ باتوجه به روابط :

$$\frac{۱}{r}=\frac{q}{s}\ و\ \frac{۱}{r_a}=\frac{p-a}{S}\ و\ \frac{۱}{r_b}=\frac{p-b}{S}\ و\ \frac{۱}{r_c}=\frac{p-c}{S}$$

حاصل عبارت طرف اول رابطهٔ داده شده عبارت می‌شود از :

$$\frac{p}{S}\times\frac{-(p-c)}{S}\times\frac{-(p-a)}{S}\times\frac{-(P-b)}{S}=$$

$$\frac{-p(p-a)(p-b)(p-c)}{S^۴}=\frac{-S^۲}{S^۴}=-\frac{۱}{S^۲}$$

پاسخ‌های رسیده از : کورش محسن زادگان ـ فیروز بایرامی ـ مسلم امیرقلی ـ حسین اسدپور ـ حسین نعمتی

حل مسائل نمونه

کلاس چهارم ریاضی

مسئلهٔ زیر در سه سال قبل بین دبیران و دانش‌آموزان تهران مورد بحث واقع شده بود وراه حلهای مختلفی برای آن ارائه شد که همین راه حلها ، چندین مرتبه توسط دانش‌آموزان برای درج در مجله ارسال شده است . ذیلاً سه طریقه از راه حلهای رسیده بیان می‌شود و یادآوری می‌نماید که این سه راه حل در شمارهٔ ٤ دورهٔ ١١ « مجلهٔ ریاضیات دانش‌آموز » (may1964) چاپ آمریکا نیز درج گردیده است .

چنانچه این مسئله برای شما تازگی دارد قبل از مطالعهٔ راه حل آن ، سعی کنید خودتان آن را حل کنید

١٦٦٢ ـ در داخل مربع ABCD نقطهٔ E چنان انتخاب شده‌است که اندازهٔ هریك از دوزاویهٔ DAE و ADE برابر ١٥ درجه است . ثابت کنید مثلث BEC متساوی‌الاضلاع است .

راه حل اول ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ADG را درخارج مربع می‌سازیم (شکل ١) از تساویهای EA = ED نتیجه می‌شود GA = GD که EG عمودمنصف AD بوده و با CD موازی است. دو مثلث CDE و GDE متساوی‌اندزیرا

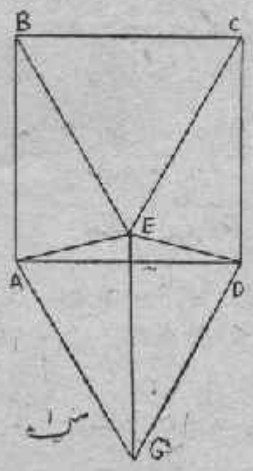
GD = AD = CD

و $\hat{EDG} = \hat{EDC} = 75^\circ$ DE در دو مثلث مشترك

از تساوی دو مثلث نتیجه می‌شود

$\hat{CED} = \hat{GED} = 75^\circ = \hat{CDE}$

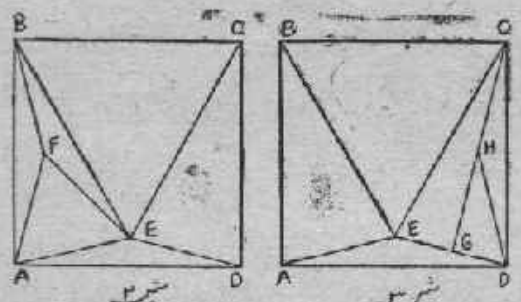
یعنی مثلث CDE متساوی‌الساقین بوده EC = CD است پس EC = EB = BC



شکل ١

راه حل دوم ـ نقطهٔ F رادرداخل مربع تعیین می‌کنیم که اندازهٔ هریك اززاویه‌های ABF و BAF برابر ١٥ درجه باشد (شکل ٢) ، دومثلث ABF و AED متساویند وازتساوی آنها نتیجه می‌شود که FA = EA وچون اندازهٔ زاویهٔ EAF برابر ٦٠° است پس مثلث AEF متساوی‌الاضلاع بوده و EF = FA = FB و چون اندازه های زاویه‌های BFA و AFE به ترتیب ١٥٠° و ٦٠° است پس‌اندازهٔ زاویهٔ BFE برابر با ١٥٠° بوده دومثلث AFB و EFB در حالت دوضلع وزاویهٔ بین متساوی می‌باشند واز آنجا EB = AB و درنتیجه

EB = EC = BC



راه حل سوم ـ عمود CG را بر DE رسم می‌کنیم اندازهٔ زاویهٔ DCG برابر ١٥° می‌شود DH را چنان رسم می‌کنیم که اندازهٔ زاویهٔ GDH برابر ٦٠° باشد (شکل ٣) اندازهٔ زاویهٔ DHG برابر ٣٠° بوده و نتیجه می‌شود که اولا اندازهٔ زاویهٔ DCH برابر ١٥٠° وثانیاً DG نصف DH باشد ازتساوی‌دومثلث AED و CHD معلوم می‌شود که DH = DE ودرنتیجه DG نصف DE بوده مثلث CDE متساوی‌الساقین است پس CF = BE = CD = BC و مثلث BEC متساوی‌الاضلاع می‌باشد .

کلاس پنجم ریاضی

١٦٦٣ـ برمحور x'x به مبدأ O سه‌نقطهٔ A و B و C با طولهای $\overline{OA} = -1$ و $\overline{OB} = -2$ و $\overline{OC} = 2$ ویك نقطهٔ متغیر M باطول $\overline{OM} = x$ فرض می‌شود

١) تابع $y = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$ را برحسب x تعیین کرده ونمایش هندسی آن را رسم کنید

۲) تابع $Z=MA+MB+MC$ را برحسب x تعیین کرده جدول تغییرات و نمایش هندسی آن را رسم کنید و معلوم کنید نقطهٔ M چگونه انتخاب شود تا در ازاء آن مقدار Z می‌نیمم باشد

۳) بر محور $x'x$ نقطهٔ چهارم D باطول $\overline{OD}=4$ را فرض می‌کنیم‌دراین صورت سؤالهای ۱) و۲) را برای دوتابع زیرنیز پاسخ دهید

$$y=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}$$
$$Z=MA+MB+MC+MD$$

حل : ۱) بنا بر رابطهٔ اندازهٔ جبری یك حامل واقع بریك محور دایم

$\overline{MA}=\overline{OA}-\overline{OM}=-3-x$ و $\overline{MB}=-1-x$

$\overline{MC}=2-x$

$y=-3-x-1-x+2-x=-2-3x$

نمایش هندسی y خط مستقیمی است که در شکل ۱ رسم شده‌است .

۲) چون MA و MB و MC عبارت ازطول‌های سه‌قطعه خط ومثبت هستند بنابراین داریم

$MA=|\overline{MA}|=|-3-x|$ و $MB=|-1-x|$

$MC=|2-x|$

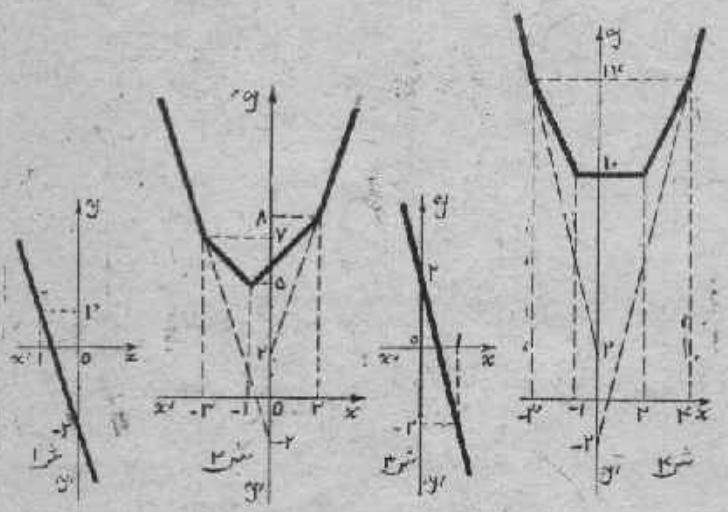
$Z=|-3-x|+|-1-x|+|2-x|$

$Z=|3+x|+|x+1|+|x-2|$

با توجه به اینکه ($|x|=x : x>0$ و اگر $|x|=-x : x<0$) جدول تغییرات Z به‌شرح زیر می‌باشد

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$		$x+3$		$x+3$		$x+3$		
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$-x-1$		$x+1$		$x+1$		
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$		$-x+2$		$x-2$		
Z	$-3x-2$		$-x+4$		$x+6$		$3x+2$		
تغییرات Z	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			7		5		8		

از جدول بالا معلوم می‌شود که نمایش هندسی Z تشکیل شده است از : قسمتی از خط $Z_1=-3x-2$ به معادلهٔ که طول نقاط آن درنامساوی $x<-3$ صدق می‌کند، قطعه‌ای از خط $Z_2=-x+4$ که با $-3<x<-1$ مشخص می‌شود ، قطعه‌ای ازخط $Z_3=x+6$ که از $-1<x<2$ بدست می‌آید و بالاخره نیم‌خطی ازخط $Z_4=3x+2$ که با $x>2$ معین می‌شود (شکل۲) . درازاء $x=-1$ تابع Z می‌نیمم است (برابر با ۵) که قابل آن نقطهٔ M به وضع M_0 باطول $\overline{OM_0}=-1$ قراردارد .



۳) داریم $\overline{MD}=4-x$ و $y=-4x+2$ بدست‌آمده نمایش هندسی مطابق شکل۳ رسم می‌شود

۴) چنانچه مانند ۲) عمل شود جدول تغییرات Z به شرح زیر خواهد بود .

x	$-\infty$		-3		-2		2		4		$+\infty$
Z	$-4x+2$		$-2x+4$		$-x+8$		$2x+6$		$4x-2$		
تغییرات Z	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		ثابت		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			14		10		10		14		

نمایش هندسی تابع Z مطابق شکل ۴ بوده و در فاصلهٔ $[-2,2]$ از تغییرات x مقدار Z برابر با مقدار ثابت بوده ومی‌نیمم می باشد که‌دراین‌حال M بر قطعه‌خط BC تغییرمی کند

کلاس ششم ریاضی

۱۶۶۴ ـ بفرض اینکه محقق شده باشد که تابع

$$y=3x^4+2x^3-9x^2+6x+3 \quad (1)$$

دارای سه اکسترموم (ماکزیمم یا مینیمم) است یك تابع درجهٔ دوم به شکل $y=ax^2+bx+c$ (۲) چنان معلوم کنید که منحنی نمایش آن بر سه نقطهٔ نظیر اکسترموم تابع اول بگذرد

حل ـ مشتق تابع مفروض عبارت است از

$$y'=12x^3+6x^2-18x+6=6(2x^3+x^2-3x+1)$$

و بنا به فرض $y'=0$ دارای سه جواب است یعنی معادلهٔ

$$2x^3+x^2-3x+1=0 \quad (3)$$

دارای سه ریشه می‌باشد و باید در تابع (۲) ضرایب را چنان پیدا کنیم که ریشه های معادلهٔ (۳) در معادله‌های (۱) و (۲) مشترکاً صدق کنند . اگر تابع (۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$y=(2x^3+x^2-3x+1)(mx+h)+ax^2+bx+c \quad (4)$$

هردو مقدار متناظر x و y که در معادله‌های (۱) و (۲) و (۳) صدق نمایند در معادلهٔ (٤) نیز صدق خواهند کرد . بنابراین کافی است که در رابطهٔ (٤) ضرایب را چنان تعیین کنیم که تابع حاصل همان تابع (۱) باشد . برای این کار تابع (٤) را مرتب می‌نمائیم:

$$y=2mx^4+(m+2h)x^3+(-3m+h+a)x^2+(m-3h+b)x+h+c$$

ومتحد با (٤) قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} 2m=3 \\ m+2h=2 \\ -3m+h+a=-9 \\ m-3h+b=6 \\ h+c=3 \end{cases}$$

ازاین دستگاه نتیجه خواهد شد :

$$m=\frac{3}{2} \text{ و } h=\frac{1}{4} \text{ و } a=-\frac{19}{4} \text{ و } b=\frac{21}{4} \text{ و } c=\frac{11}{4}$$

وتابع مطلوب عبارت است از :

$$y=-\frac{1}{4}(19x^2-21x-11)$$

(طرح وحل از: ع.م)

۱۶۶۵ ـ در تابع $y=x^2+px+q$ ضرایب p و q را چنان تعیین کنید که اگر تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم باشد ، دو نقطهٔ نظیر آنها بر خط به معادلهٔ $y=-2x$ قرار داشته باشند .

حل : راه اول ـ چون در تابع درجهٔ سوم نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی است بنابراین هر خط که بر نقاط نظیر ماکزیمم و مینیمم بگذرد بر نقطهٔ عطف نیز خواهد گذشت . مختصات نقطهٔ عطف منحنی تابع فوق عبارت از $(q\text{و}-)$ وچون در معادلهٔ $y=-2x$ صدق می‌کند بنابراین $q=0$ وتابع به صورت $y=x^3+px$ می‌باشد . مشتق تابع می‌شود $y'=3x^2+p$ وتابع درصورتی یك ماکزیمم ویك مینیمم دارد که $p<0$ باشد مختصات نقاط نظیر ماکزیمم ومینیمم عبارت می‌شوند از $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ و } +\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ وچون در معادلهٔ $y=-2x$ قرار دهیم ، جواب قابل قبول عبارت خواهد شد از $p=-3$

راه دوم ـ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم (بنابر آنچه درمسئلهٔ قبل گفته شد)

$$y=(3x^2+p)(ax+b)-2x$$

مرتب می‌نمائیم

$$y=3ax^3+3bx^2+(ap-2)x+bp$$

وبا تابع داده شده متحد قرار می‌دهیم نتیجه خواهد شد

$$a=\frac{1}{3} \text{ و } b=0 \text{ و } p=-3 \text{ و } q=0$$

(طرح وحل از : ع.م)

یك مسئلهٔ ممتاز

حل مسئلهٔ ۵۷۰ (مندرج درشمارهٔ ۳و٤ یکان) ـ نخست ثابت می‌کنیم که هر گاه سه عدد صحیح ومثبت a و b و c در رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ صدق کنند

۱) لااقل یکی ازاعداد a و b زوج و بر ٤ بخش‌پذیر است

۲) لااقل یکی ازاعداد a و b مضرب ۳ است

۳) لااقل یکی ازاعداد a و b و c مضرب ۵ است

چنانچه a و b هر دو زوج باشند قسمت ۱) محقق است . چنانچه a و b هردوفرد باشند c^2 زوج بوده و باید بر ٤ قابل قسمت باشد . فرض می‌کنیم $a=2h+1$ و $b=2k+1$ و نتیجه می‌شود

$c^2-a^2+b^2=(2k+1)^2+(2h+1)^2=$

$=4(k^2+h^2+k+h)+2$

واین رابطه معلوم می‌کندکه c^2 بر ٤ بخش پذیر نیست ، بنابراین a و b هردوباهم نمی‌توانند فردباشند ولااقل یکی از آنها زوج خواهدبود .

اگر a و b هردوزوج باشند c نیز زوج است فرض می‌کنیم $a=2p$ و $b=2q$ و $c=2r$ و خواهیم داشت $4p^2+4q^2=4r^2$ یا $p^2+q^2=r^2$ و چنانچه قبلا گفته شدلازم می‌آید یکی از اعداد p یا q زوج باشد واز آنجا یکی از اعداد a یا b مضرب ٤ خواهد بود . چنانچه فقط یکی ازدوعدد a یا b مثلاً a زوج باشدو b فرد دراین صورت c نیز فردبوده وفرض می‌کنیم $a=2p$ و $b=2q+1$ و $c=2r+1$ وداریم

$4p^2+(2q+1)^2=(2r+1)^2$ یا $4p^2+4q^2+4q$

$=4r^2+4r$

$p^2=r(r+1)-q(q+1)$

چون $r+1$ و r دوعدد متوالی‌اند یکی از آنها ودرنتیجه حاصل ضربشان زوج است و همچنین $q(q+1)$ زوج بوده و ولازم می‌آیدکه p^2 زوج باشد وازآنجا نتیجه می‌شودکه $a=2p$ مضرب ٤ خواهد بود .

اگر a و b هیچکدام مضرب ۳ نباشند خواهیم داشت $a=3m\pm1$ و $b=3n\pm1$ و

$c^2=a^2+b^2=3(3m^2+3m^2\pm2m\pm2n)+2$ (۱)

این رابطه نشان می‌دهدکه c^2 ودرنتیجه c مضرب ۳ نیست پس داریم $c=3l\pm1$ ونتیجه می‌شود $c^2=3(3l^2\pm2l)+1$ یعنی اگر c مضرب ۳ نباشد مجذور آن برابر است با (مضرب۳+۱) وبنابراین رابطهٔ(۱) نمی‌تواند برقرارباشد ، بنابراین لااقل یکی ازاعداد a یا b مضرب ۳ خواهد بود.

اگر عددی مضرب ٥ نباشدبه یکی از صورتهای $5k\pm1$ یا $5k\pm2$ بوده در هر حال مربع آن عبارت خواهد شد از $5k'\pm1$. اگرهیچیك ازاعداد a و b مضرب ٥ نباشند خواهیم داشت

$c^2=a^2+b^2=(5k'\pm1)$

$+(5k''\pm1)=$ مضرب ٥ $+2$ یا مضرب ٥ $=$

اما رابطه(۲+مضرب ٥ $=c^2$)غیرممکن‌است بنابراین c مضرب ٥ خواهدبود . بنابراین لااقل یکی ازاعداد a و b مضرب ٥ می‌باشد

نتیجه ـ اگر سه عدد صحیح و مثبت a و b و c در رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ صدق کنند abc مضربی از ٦٠ خواهد بود

* * *

اکنون به حل مسئلهٔ ٥٧٠ می‌پردازیم . مسئله چنین‌بود:

اگر دریك وجهی باکنج سه قائمه اندازه‌های یالها اعداد صحیح باشند،حاصل ضرب آنها مضربی است از ٥٧٠٢۴٠٠

اندازه‌های یالهای کنج سه قائمه را با a و b و c وازیالهای دیگررا با r و s و t می‌نمائیم ، روابط زیر را خواهیم داشت

۱) $b^2+c^2=r^2$ و ۲) $c^2+a^2=s^2$

۳) $a^2+b^2=t^2$

لااقل یکی ازاعداد a و b همچنین c و همچنین a و b و c مضرب ٤ است. اگر فرض کنیم b زوج و c فردباشد ازرابطه‌های (۱ و (۲ معلوم می‌شودکه a و b هرکدام مضرب ٤ می‌باشند واز رابطهٔ (۳ معلوم می‌شودکه t نیز مضرب ٤ است واگر فرض کنیم $a=4a'$ و $b=4b'$ و $t=4t'$ خواهیم‌داشت $a'^2+b'^2=t'^2$ ونتیجه می‌شودکه یکی ازاعداد a' یا b' مضرب ٤ باشد وازآنجا یکی ازاعداد a یا b مضرب 4^2 بوده حاصل ضرب abt ودر نتیجه $P=abcrst$ مضرب 4^4 می‌باشد .

به ترتیب فوق معلوم خواهد شد که P مضرب 3^4 نیز می‌باشد.

درابطهٔ (۱ لااقل یکی‌ازاعداد a و b و c مضرب ٥ می‌باشد اگر b مضرب ٥ بوده و c مضرب ٥ نباشد از رابطهٔ (۲ معلوم خواهدشدکه یا a و یا s یعنی as مضرب ٥ است . اگر b مضرب ٥ نبوده c مضرب ٥ باشد باز لازم می‌آیدکه as مضرب ٥ باشد درهردوحال P مضرب 5^2 خواهدبود . چنانچه a و b هیچکدام مضرب ٥ نباشند r و همچنین یا a و یا t و s مضرب ٥ بوده و درهرحال P مضرب 5^2 است .

عدد ۱۱ رادرنظرمی گیریم . رزیدوکوادراتیك‌های ۱۱ عبارت‌انداز ۱ و ۳ و ٤ و ٥ و ۹ (مبحث‌هشت‌ها مذکور درشماره‌های ۸ و ۹ یکان) به‌این معنی که باقیماندهٔ تقسیم‌مربع هرعددبر ۱۱ یکی ازاعدادفوق‌می‌باشد (عددبر ۱۱ قابل‌قسمت نباشد) .اگر P بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشدهیچیك ازاعداد a^2 و b^2 و.... و t^2 بر ۱۱ بخش‌پذیر نخواهدبود. فرض‌می کنیم باقیماندهٔ تقسیم b^2 بر ۱۱ برابر ۱ باشدیعنی $b^2\equiv1\pmod{11}$ چون مجموع دو رزیدو یك رزیدو استو بعلاوه رزیدوهای a^2 و b^2 ... t^2 نسبت به مدول ۱۱ کوادراتیك است بنابراین $C^2\equiv3$ یا ٤ بوده از رابطهٔ (۲ بدست می‌آیدکه $a^2\equiv1$ یا ٥ وازآنجابنا بررابطهٔ (۳ باید داشته باشیم $b^2\equiv3$ یا ٤ وغیرممکن است وبهمین ترتیب باآزمایش رزیدوهای‌دیگر به همین نتیجه خواهیم رسید . بنابراین P بر ۱۱ بخش پذیراست وداریم

$P=abcrst=4^4\times3^4\times5^2\times11k=5702400k$

(نقل ازدماهنامهٔ ریاضیات آمریکا»

مسائل برای حل

(مهلت قبول پاسخ تا ۳۰ دی‌ماه ۱۳۴۳ دانش‌آموزان هر کلاس از ارسال حل مسائل کلاس ماقبل خودداری نمایند)

کلاس چهارم طبیعی

۱۶۶۶ـ از رابطهٔ $\sqrt{a+b}+\sqrt{2a+2b}=2+\sqrt{8}$ مقدار $a+b$ را بدست آورده از روی آن و از رابطهٔ $\sqrt{3a+3b}+\sqrt{a}=2\sqrt{3}+1$ نخست مقدار a و بعد مقدار b را پیدا کنید. (حسین رزاقی‌زاده ، پنجم ریاضی دبیرستان مروی)

۱۶۶۷ـ بفرض اینکه داشته باشیم :

$$x=\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}+\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

حاصل کسر $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ را بدست آورید .

۱۶۶۸ـ مثلث ABC داده شده است ، به قطر BC نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم .

۱) برحسب اینکه زاویهٔ A حاده ، قائمه یا منفرجه باشد وضع نسبی نقطهٔ A را نسبت به نیمدایره تعیین کنید .

۲) نیمدایرهٔ فوق‌الذکر اضلاع AB و AC یا امتداد آنها را به‌ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند و از این نقاط به O وسط BC وصل می‌کنیم، ثابت کنید که مجموع یا تفاضل دو زاویهٔ BAC و DOE برابر با ۹۰° است.

کلاس چهارم ریاضی

۱۶۶۹ـ عبارت $f(x,y)$ را با شرایط زیر تعیین کنید :

۱) $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن و متجانس (همگن) از درجهٔ دوم است

۲) $f(x,x)\equiv 0$

۳) $f(x=\sqrt[4]{\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}}\,,y=\sqrt[4]{\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}})=2$

۱۶۷۰ـ اولا مطلوب است تعیین α برای آنکه داشته باشیم :

$$20+14\sqrt{2}=(\alpha+\sqrt{2})^3$$

ثانیاً حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

۱۶۷۱ـ مطلوب است حل معادلهٔ $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}$

(احمد رئیسی دانشجوی دانشکدهٔ علوم)

۱۶۷۲ـ درختی امسال ۹٫۱۴ متر ارتفاع دارد ، در سال بعد ۱٫۲۱ متر نمو خواهد کرد، اگر هرسال نموش ۰٫۹ نمو سال پیش باشد تعیین کنید این درخت حداکثر ارتفاعش چقدر خواهد شد.

۱۶۷۳ـ تصاعد هندسی با $2n-1$ جمله را چنان معلوم کنید که مجموع n جملهٔ اول آن برابر با مقدار معلوم S_1 و مجموع n جملهٔ آخر آن برابر با مقدار معلوم S_2 باشد .

مثال عددی : $n=7$ و $S_1=127$ و $S_2=8128$

۱۶۷۴ـ دایرهٔ به قطر BC و به مرکز O مفروض است بر نیم خط Cx که در امتداد BC و در خارج دایره رسم می‌شود نقطهٔ A را انتخاب کرده و از آن قاطع AED (E بین A و D) را نسبت به دایره چنان رسم کنید که زاویهٔ BOD سه برابر زاویهٔ COE باشد ، شرط امکان جواب را معلوم کنید و ثابت کنید وقتی که نقطهٔ A مکان خود را می‌پیماید عمود منصف قطعه خط AD بر دایرهٔ ثابتی مماس باقی می‌ماند. (مجلهٔ تربیت ریاضی)

کلاس پنجم طبیعی

۱۶۷۵ـ اولا نمایش هندسی تابع $y=\frac{4}{x}$ را بوسیلهٔ نقطه یا بی‌وقتی که $-7\le x\le -0.5$ یا $0.5\le x\le 7$ باشد رسم کنید

ثانیاً ـ برنمایش هندسی تابع بالا ، نقطهٔ A به طول ۱ و نقطهٔ B به طول ۱ـ را تعیین کرده معادلهٔ خط AB را بنویسید و تحقیق کنید AB از O مبدأ مختصات گذشته و در آنجا نصف می‌شود

یکان

ثالثاً ـ خطوط به معادلات $y=4x$ و $y=-4x+8$ رادرهمان‌دستگاه محورها که نمایش هندسی‌تابع رارسم کرده‌اید رسم نموده ازراه محاسبه تحقیق کنیدکه این دوخط یکدیگر را روی نمایش هندسی تابع فوق قطع می‌کنند

۱۶۷۶ ـ A و B دو زاویهٔ محاور از متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند . اولا صحت تساوی زیررا تحقیق کنید .

$$\sin A \sin\frac{C}{2}+\sin B\cos\frac{D}{2}=\sin D\cos\frac{B}{2}+\sin C\sin\frac{A}{2}$$

ثانیاً ـ اگر $\cos A=$ ۰٫۶ باشد خطوط مثلثاتی زوایای متوازی‌الاضلاع راحساب کنید

ثالثاً ـ درحالتی‌که زاویهٔ B دوبرابرزاویهٔ A باشداندازهٔ کلی زاویه‌ای رابدست آوریدکه یکی ازاندازه‌های آن برابر با اندازهٔ زاویهٔ A باشد

کلاس پنجم ریاضی

۱۶۷۷ـ دردستگاه محورهای مختصات متعامد نقطه‌های A(۲و۴) و B(۲− و ۰) و C(۰ و ۸) داده شده است

۱) برخط BC نقطهٔ M را چنان تعیین کنیدکه

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-3$$ باشد

۲) برخط AB دونقطهٔ P'P (P' بین A وB) راتعیین کنیه که $\frac{PA}{PB}-\frac{P'A}{P'B}=\frac{1}{6}$

۳) اگر N قرینهٔ C نسبت به A باشد مختصات N و همچنین مختصات N' واقع بر AC رابدست آوریدکه

$$\frac{N'A}{N'C}=\frac{NA}{NC}$$ باشد

۴) معادلات خطوط AM وBN وCP را نوشته وتحقیق کنیدکه این سه خط متقارب‌اند

۵) تحقیق کنیدکه خطوط BN' وCP' یکدیگررا روی خط AM قطع می‌کنند

۶) معادلهٔ خط متغیر Δ را بنویسیدکه با BN موازی باشد، خط Δ خطوط BA و BN' و BC رابه ترتیب درنقاط R وT وS قطع می‌کند، تحقیق کنیدکه T وسط RS می‌باشد؟ عرض ازمبدأ خط Δ راچنان تعیین کنیدکه زاویهٔ RAS قائمه باشد (نقل با اضافات ازمجلهٔ تربیت ریاضی)

۱۶۷۸ـ دردایرهٔ مثلثاتی دوکمان $\widehat{AM}=\alpha<\frac{\pi}{2}$ و $\widehat{AM'}=\frac{\pi}{2}+\alpha$ راجدا می‌کنیم ، OM مماس نقطهٔ A را در T قطع می‌کند. ازT بردایره مماسی‌رسم می‌کنیم تا OM' رادر T' قطع نماید. بفرض اینکه $TT'=2\sqrt{2}$ باشدخطوط مثلثاتی کمان α واندازهٔ کلی کمان هائی راکه انتهای آنها نقاط M وM' است بدست آورید

۱۶۷۹ـ صفحاتی راتعیین کنیدکه تصویرهای‌قائم دوقطعه خط متساوی‌برهریك ازآنها، دوقطعه خط متساوی باشد . مسأله رادر حالت سه قطعه خط متساوی نیزحل کنید

کلاس ششم طبیعی

۱۶۸۰ـ اولاً منحنی نمایش تابع $y=\frac{2}{x-1}$ را رسم کنید

ثانیاً ـ ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی رادرنقطهٔ تلاقی آن با محور y'y بنویسید. نقطهٔ دیگری برمنحنی یافت‌می‌شود که‌مماس بر منحنی‌در آن‌نقطه بامماس اول‌موازی‌است، مختصات‌این‌نقطه‌را تعیین کنید. معادلهٔ‌خطی رابنویسید که‌دونقطهٔ تماس رابه‌هم‌وصل‌میکند و تحقیق‌کنیدکه این خط ازنقطهٔ تلاقی مجانبهای منحنی‌می گذرد.

(ازمسائل امتحانی ششم ادبی نیویورك)

۱۶۸۱ ـ اولا عبارت زیـر را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

$$y=1-\cos 2x+\sin 3x-\sin x$$

ثانیا ـ معادلهٔ $y=0$ را حل کرده کمانهای جواب را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید (رشتهٔ علمی اسپانیا وپرتقال)

کلاس‌ششم ریاضی

۱۶۸۲ـ اولاتابعی به شکل $y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^2}$ چنان تعیین کنیدکه منحنی نمایش آن درمبدأ مختصات بر x'x مماس بوده‌وبانیمساز اول وسوم مجانب باشد

ثانیاً ـ مختصات نقطهٔ نظیر ماکزیمم ونقطهٔ عطف منحنی تابع $y=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ را تعیین کنید

ثالثاً ـ معادلهٔ مماس درنقطهٔ عطف برمنحنی رانوشته‌واز راه محاسبه تحقیق کنیدکه این مماس بجـز نقطهٔ عطف درنقطهٔ دیگری بامنحنی مشترك نیست

۱۶۸۳ـ درصفحهٔ محورهای مختصات متعامد x'x وy'y منحنی‌نمایش تابع

$$y=x^4+8x^3+22x^2+24x+5$$

دارای‌محورتقارن Y'Y موازی‌با y'y می‌باشد. معادلهٔ‌منحنی رانسبت به‌دستگاه محورهای x'x وY'Y بدست‌آورده ومنحنی

دارسم کنید . ازروی شکل منحنی ریشه‌های معادلهٔ

$x^4+8x^3+22x^2+24x+8+m=0$

رابا دوعدد ۱ — و ٤ — مقایسه نمائید

۱۶۸۴ـ مطلوب است حل و بحث معادلهٔ :

$\sin^2 x+\cos^2 x=a$

نتیجه خواهید گرفت که a دریك فاصله قراردارد، تحقیق کنید وقتی که a برابر با یکی از دوحد این فاصله باشد معادله دارای چهارجواب واقع بین صفرو 2π بوده واین چهارجواب یك‌مربع‌محاط دردایرهٔ‌مثلثاتی‌تشکیل‌می‌دهند، وبازاء بقیهٔ مقادیر قابل قبول a ، معادله بین صفر و 2π ، ۸ جواب‌دارد . مقدار a را تعیین کنیدکه هشت ضلعی حاصل‌ازاین هشت جواب منتظم باشد وپس ازتعیین a جوابهای‌کلی معادله را بدست‌آوردید.

(ع.م)

۱۶۸۵ـ مطلوبست تعیین عدد چهاررقمی که تفاضل آن بر مجموع دوعددی که ازدورقم سمت چپ ودورقم سمت راست آن تشکیل می‌شود مربع کامل بوده واگررقم سمت چپ عدد راست راست آن ببریم به اندازهٔ ۵۹٤ واحد زیاد شود

(مجلهٔ تربیت ریاضی)

۱۶۸۶ـ ثابت کنید درصورتی که‌معادلهٔ $x^2+qx+q=0$ دارای دوریشهٔ صحیح مثبت فرد باشد عدد

$A=q^2(q^2-p^2+2q+1)$ بر ۵۷۶ بخش پذیراست

(سیروس فخریاسری دانشجوی دانشکده فنی)

۱۶۸۷ـ دودایرهٔ متخارج (O) و (O') به مراکز O و O' وبه شعاعهای R و R' مفروض‌اند . فرض می‌کنیم (D) محوراصلی ، H نقطهٔ تلاقی (D) با OO' و A نقطهٔ متغیری واقع بر (D) باشد. مماسهای AB وAC دایر (O) ومماسهای AB' وAC' دایر (O') رسم کنیم.

۱) ثابت کنیدکه چهار نقطهٔ B وC وB' وC' بریك‌دایرهٔ (A) عمود بردودایرهٔ (O) و(O') واقع‌اند

۲) قوت نقطهٔ H نسبت به دایرهٔ (A) برحسب R و R' وd=OO' حساب کنید

۳) ثابت کنیدکه دایرهٔ (A) بر دو نقطهٔ ثابت I وJ می گذرد .

٤) اگر MM' مماس مشترك خارجی و NN' مماس مشترك داخلی دودایرهٔ (O) و (O') باشد و M وN بر (O) و M' وN' بر (O') واقع باشند ، ثابت کنیدکه MN در یکی ازنقاط I یا J بر M'N' عموداست . (G.P.B)

۱۶۸۸ـ فرض می‌کنیم I' وI کانونها و M یك نقطهٔ دلخواه ، x'x محور کانونی و y'y غیر کانونی از یك بیضی باشد . مماس درنقطهٔ M بربیضی x'x را در T وy'y رادر T' وقائم درنقطهٔ M بربیضی x'x رادر N وy'y را در N' قطع می کند

۱) ثابت کنید که نقاط M وF وF' وT' وN' بریك‌دایره واقع‌اند

۲) ثابت کنیدکه $\overline{MT}\cdot\overline{MT'}=-\overline{MN}\cdot\overline{MN'}$

۳) اگر I وJ تصویرهای یکی ازکانونها ، مثلاً F بر خطوط MT وMN باشد ثابت کنید خط IJ بر نقطهٔ ثابتی می گذرد . (G.P.B)

۱۶۸۹ـ a_1c_1 که $ac=8$ است قطرمربع ABCD واقع دریك صفحهٔ قائم می‌باشد .

اولا ملخص این مربع راکامل کنید

ثانیاً فرض‌می کنیم صفحهٔ P که بر ac گذشته وباصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ٤۵° می‌سازد صفحهٔ مقایسهٔ جدید باشد ، ملخص مربع رانسبت به‌این صفحهٔ مقایسه معلوم کرده رقوم جدید رأسهای آن راتا ۱ر. تقریب حساب کنید .

مسائل متفرقه

۱۶۹۰ـ اگر a وb وc سه عددمثبت باشند صحت‌نامساوی زیررا ثابت کنید

$$\frac{a+b+c+3}{3}>\sqrt[7]{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}$$

(محمدآگاه ـ پنجم ریاضی دبیرستان دارالفنون)

۱۶۹۱ـ اگر a وb وc ریشه‌های معادلهٔ $x^3-x^2+5x-3=0$ باشند ، معادله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش $b+c$ و $a+b$ و $c+a$ باشد

(فرستنده : منصوری معتمدی ششم ریاضی دبیرستان رازی آبادان)

۱۶۹۲ـ بااستفاده ازروابط بین ریشه‌ها وضرایب . ثابت کنیدکه معادلهٔ $x^3+3ax+b=0$ وقتی‌دارای ریشهٔ‌مضاعف است که $b^2+4a^3=0$ باشد (فرستنده : منصورمعتمدی)

۱۶۹۳ـ در معادلهٔ $x^3+ax^2+bx+c=0$ چه رابطه بین a وb وc برقرارباشد تایکی ازریشه‌های معادله‌برابر حاصل ضرب دوریشهٔ دیگر باشد (حسن یوسفی آذری نژاد)

۱۶۹۴ ـ اولاً معادلهٔ $\cos 3x=\frac{1}{2}$ راحل کنید . ثانیاًاین معادله رابه‌یك معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب $\cos x$ تبدیل نموده وازروی آن صحت روابط زیررا تحقیق کنید

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n-2}}}+\dots+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\cot g\frac{\pi}{2^n}$$

(رسول محمودی ساعتی ششم ریاضی دبیرستان خرد)

۱۶۹۶ـ M نقطهٔ دلخواهی ازبیضی باکانونهای F و F' بوده و N نقطهٔ تلاقی قائم نقطهٔ M بر بیضی با FF' می‌باشد ثابت کنید که اندازهٔ تصویر MN بر MF مقدارثابتی است و این مقدار ثابت را تعیین کنید (G.P.B.)

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}=0\\ \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=-\frac{3}{4}\\ \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

(قوام نحوی دبیر دبیرستانهای اهواز)

۱۶۹۵ـ صحت اتحاد زیر را ثابت کنید

* * *

مسائلی انتخاب ازمجلهٔ

(Mathematics Student Journal)

چاپ آمریکا ـ نشریهٔ انجمن بین المللی معلمان ریاضی

۱۶۹۷ـ نمایش هندسی تابع $y=ax^2+bx+c$ یك سهمی است . اگر ضرایب a و b و c مقادیر مختلف قبول کنند سهمی های مختلفی بدست می‌آید . مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقاط تقاطع کزیم یا مینیم این سهمی‌ها وقتی که:

۱) b و c ثابت باشند و a تغییر کند

۲) a و c ثابت باشند و b تغییر کند

۳) a و b ثابت باشند و c تغییر کند

۱۶۹۸ـ عدد چهار رقمی abcd را چنان تعیین کنید که اگر آن را در ۱۹۹۹ ضرب کنیم، چهار رقم سمت راست حاصل ضرب باهم برابر باشند، تمام جوابهای ممکن را پیدا کنید . چنانچه رقمی که سمت راست حاصل ضرب تکرار می‌شود t باشد a و b و c و d را برحسب t حساب کنید .

۱۶۹۹ـ y برابر است با یك یك جمله‌ای جبری و در نتیجهٔ انجام عملی نسبت به x حاصل می‌شود. چنانچه همین عمل نسبت به y انجام گیرد $3x^2$ بدست می‌آید ، y را تعیین کنید .

۱۷۰۰ـ میدانید که منحنی‌های نمایش دو معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به x و y، حداکثر می‌توانند درچهار نقطه مشترك باشند. معلوم کنید به چه علت ، مختصات پنج نقطهٔ

(۰ و ۲) و (۰ و ۴) و (۱ و ۱) و (۲ ـ و ۳) و (۱ و ۶ ـ)

ریشه‌های مشترك دومعادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌باشند

۱) $2x^2-y^2-xy-4x+4y=0$

۲) $6x^2-y^2+xy-16x+2y+8=0$

۱۷۰۱ـ دانش آموزی با ۹ رقم از ۱ تا ۹ یك عدد نه رقمی نوشت . آنگاه هر رقم را در رقم سمت راست خودش ضرب کرد ، به این ترتیب ۸ حاصل ضرب بدست آمد . دانش آموز عدد نه رقمی را چگونه بنویسد تا مجموع هشت حاصل ضرب حاصل ماکزیمم باشد .

۱۷۰۲ـ ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات هر سه رأس آن اعداد صحیح باشند .

۱۷۰۳ـ باذکر دلیل بیان کنید که آیا ممکن است اولین رقم حاصل ضرب بین اولین رقم‌های دوعامل ضرب واقع شود ؟

۱۷۰۴ـ بدون استفادهٔ از جدول ، ثابت کنید

$$\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ=\frac{1}{8}$$

۱۷۰۵ـ گنجی در یك جادهٔ مستقیم دفن شده است و این جاده به ترتیب برچهار آبادی A و B و C و D می گذرد . نقشه راه پیدا کردن گنج را به شرح زیر نشان می‌دهد :

۱) از A شروع کن و به اندازهٔ نصف راه تا C را بپو

۲) پس از آن ثلث راه تا D را بپو

۳) وبعد از آن ربع راه تا B را بپیما و زمین را حفر کن

اگر $AB=6$ و $BC=8$ میل و گنج بین A و D واقع باشد فاصلهٔ C تا D را بدست آورید .

۱۷۰۶ـ گنج دیگری برجادهٔ مستقیمی که از نقاط O، P ، Q ، R و S می گذرد قرار دارد . اگر مختصات چهار نقطهٔ P و Q و R و S نسبت به مبدأ O به ترتیب x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و شرایط تعیین گنج همان شرایط مسئلهٔ قبل باشد ، به استثنای اینکه نام آبادی های راهنما معلوم نیست ، میتوان مکان گنج

رامحاسبه نمود . چگونه ؟

۱۷۰۷ـ اگر دومعادلهٔ $x^2+ax+bc=0$ و $x^2+bx+ca=0$ $(a\neq b\neq c\neq 0)$ دارای یکریشهٔ مشترک باشند ثابت کنید که دراین صورت ریشهٔ دیگر هریك ازآنها در معادلهٔ $x^2+cx+ab=0$ صدق خواهدکرد . با مثالهای عددی صحت مسئله راتحقیق کنید .

۱۷۰۸ـ همهٔ عدد های بین ۲۰۰ و ۳۰۰ را که دقیقاً دارای ۶ عامل مثبت هستند پیداکنید . راه تعیین آنها را شرح دهید .

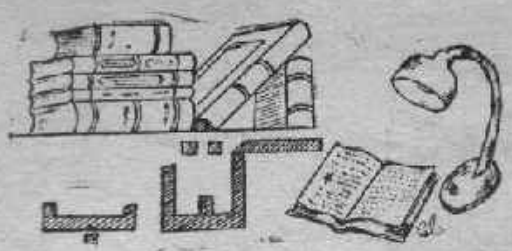
۱۷۰۹ـ درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ C برابربا ۶۰° می‌باشد ، اگر CD نیمساز داخلی زاویهٔ C باشد ثابت کنید

$$\frac{1}{CD}=\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}$$

۱۷۱۰ـ چهارضلعی ABCD دردایره‌ای محاطاست . AE راموازی با AD وموازی با BC در خارج دایره رسم می‌کنیم CF راموازی باCD وموازی‌با AB ودرخارج دایره رسم می‌نمائیم . ثابت کنید DE بر DF عموداست .

۱۷۱۱ـ درمثلث ABC لوزی‌های ACDE وBCFG رادرخارج مثلث چنان‌رسم‌می‌کنیم که CD درامتداد BC وCF درامتداد AC باشد . خطوط AG و BE یکدیگررا در I و BC و AC را بـه ترتیب در J و H قطع می‌کنند . ثابت کنید چهارضلعی CHIJ بامثلث AIB معادل است .

حالت خاص ـ مثلث ABC درزاویهٔ C قائمه باشد



کتاب

ازانتشارات : کتابفروشی سعدی

خیابان ناصرخسرو ـ تهران

☼ حل المسائل هندسهٔ جدید

برای دانش‌آموزان سالهای اول ودوم وسوم وچهارم دبیرستانها وداوطلبان متفرقه

تألیف : حسن مولائی

☼ حل المسائل مثلثات

برای دانش‌آموزان سالهای پنجم طبیعی وریاضی وداوطلبان متفرقه

تألیف : محمدحسین پرتوی ـ حسن مولائی ـ محمد شهبازی .

☼ ۴۵۰ مسئلهٔ ریاضی با حل

برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها ودانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستانها

تألیف : محمدحسین پرتوی ـ حسن مولائی

مسئلهٔ گاوهای نیوتون

۳ گاو در مدت ۲ هفته علفهای ۳ مزرعه و علفهایی راکه در این ۲هفته در این ۲مزرعه می روید چرا می‌کنند .

۲ گاو درمدت ٤ هفته علفهای۲ مزرعه وعلفهایی‌راکه‌در مدت این ٤ هفته دراین ۲ مزرعه می‌رویدچرامی‌کنند .

چندگاو در مدت ٦ هفته علفهای ٦ مزرعه وعلفهایی راکه در مدت این ٦ هفته در این ٦ مزرعه می‌روید چرا خواهند کرد ؟

مساحت مزرعه ها ، خورشت گاوها وتموعلفهای تمام مزرعه‌ها معادل فرض می‌شود .

مسئلهٔ مسلمان و کافر

۱۵ نفرمسلمان با ۱۵ نفرکافر دریك زورق مسافرت می‌کردند . طوفانی سهمگین برخاست وهرآن بیم غرق شدن زورق می‌رفت . ناخدا گفت باید نصف مسافرین به دریا ریخته شوند تانصف دیگر نجات یابند وپیشنهاد نمودکه همهٔ مسافران به‌شکل حلقه دور هم بایستند و ازیکی شروع نموده تا نه بشمارند و نفرنهمی را به دریا اندازند وبعد ازآن بازازیك شروع‌نموده شمارهٔ ۹ به هرکس افتاد محکوم بـه مرگ باشد . مسلمانان چـه ترتیبی را انتخاب‌کنند تادرتمام دفعات، قرعهٔ مرگ به‌کافران‌اصابت کند.

فیزیك وشیمی ـ مکانیك

I ـ حل مسائل نمونه ـ برای کلاسهای ششم

تعیین فرمول بستهٔ یك جسم آلی و تشخیص فرمول گستردهٔ آن به کمك خواص شیمیائی

ترجمه از کتاب « مسائلی از علوم فیزیك »

توسط : هوشنك شریف زاده

۱۷۱۳ـ ۰٫۸۸۰ گرم از یك جسم آلی A را که فقط شامل کربن، هیدرژن و اکسیژن می‌باشد می‌سوزانیم : در نتیجه ۱٫۷۶ گرم گاز کربنیك و ۰٫۲۷۰ گرم آب بدست می‌آید :

۱ـ مطلوب است ترکیب صد قسمتی A

۲ـ نشان دهید چگونه ، بکمك این نتایج می‌توان فرمول بستهٔ A را تعیین نمود و آنرا بدست آورید

۳ـ جسم A نمی‌تواند بیش از یك واکنش شیمیائی داشته باشد و یا سود فقط یك نوع نمك سود می‌دهد که جرم نمکش $\frac{5}{4}$ جرم خودش می‌باشد ، فرمول ملکولی A را تعیین کنید

۴ـ فرمول A و ایزومرهایش را بنویسید . اجسامی را انتخاب کنید که بیش از یك واکنش شیمیائی ندارند

حل : ۱ـ طبق فرمولهای معمول در شیمی جرم کربن $m_c = a = \frac{12 \times 1{,}76}{44}$ و جرم هیدرژن

$m_H = b = \frac{2 \times 0{,}270}{18}$ و جرم اکسیژن

$m_0 = m - (a+b)$ می‌باشد ، اعداد فوق جرم هریك از عناصر فوق را در m گرم جسم آلی نشان می‌دهد . بنابراین در صد گرم با فرض آنکه m_1 جرم کربن در صد گرم و m_2 جرم هیدرژن درصد گرم و m_3 جرم اکسیژن درصد گرم ماده آلی باشد خواهیم داشت $m_1 = \frac{600}{11} = 54{,}55g$ و

$m_2 = \frac{100}{11} = 9{,}09g$ و $m_3 = \frac{400}{11} = 36{,}36g$

۲ـ فرمول جسم A بصورت $C_x H_y O_z$ نمایش داده می‌شود و جرم ملکولی این جسم $M = 12x + y + 16z$ که z و y و x تعداد اتمهای عناصر مربوطه است . از طرفی چون از تجزیهٔ ۱۰۰ گرم جسم آلی m_1 گرم کربن و m_2 گرم هیدرژن و m_3 گرم اکسیژن حاصل شده پس $m_1 + m_2 + m_3 = 100$

و مقدار کربن $\frac{m_1}{100} = \frac{12x}{M}$ و مقدار هیدرژن $\frac{m_2}{100} = \frac{y}{M}$ و مقدار اکسیژن $\frac{m_3}{100} = \frac{16z}{M}$ در صورتی که M معلوم باشد x و y و z بدست خواهد آمد و اگر معلوم نباشد دستگاه فوق بدو معادلهٔ سه مجهولی $\frac{12x}{m_1} = \frac{y}{m_2} = \frac{16z}{m_3}$ تبدیل خواهد شد که yx را برحسب z بدست می‌آوریم : $x = \frac{16}{12} z \times \frac{m_1}{m_3} = 2z$ و

$$y = 16z \times \frac{m_2}{m_3} = 4z$$

z باید فقط عدد صحیح باشد . اگر z را مساوی یك فرض کنیم $x = 2$ و $y = 4$ و فرمول جسم بصورت C_2H_4O می‌باشد .

۳ـ فرمول ملکولی جسم بصورت $(C_2H_4O)n$ است و اگر مقدار واقعی M معلوم باشد n را میتوان بدست آورد. چون جسم A پس از تأثیر برسود فقط یك نمك سدیم می‌دهد بنابراین جز یك ترکیب شیمیائی ندارد ـ فرمول نمك سدیم بکمك فرمول اسید آن بدست می‌آید که با جانشین شدن یك اتم سدیم بجای یك اتم هیدرژن حاصل می‌شود فرمول نمك $C_{2n}H_{4n-1}Na$ وجرم ملکولی این نمك $M - 1 + 23 = M + 22$ می‌باشد و طبق صورت مسأله $\frac{M+22}{M} = \frac{5}{4}$ بنابراین $M = 88g$ و بالنتیجه $n = 2$ و فرمول کلی جسم $C_4H_8O_2$ می‌باشد

۴ـ از این فرمول دو اسید مشتق می‌شود الف : اسید ـ بوتیریك (بوتان اوئیك) CH_3CH_2COOH

ب: اسید دیمتیل اتانوئیك (دی‌متیل استیك)

$(CH_3)_2CH \cdot COOH$

دو اتر نیز یافت می‌شود که همین فرمول ملکولی را دارند:

الف : پروپیانو آت دومتیل $CH_3 \cdot CH_2CO \cdot C \cdot CH_3$

ب: اتانو آت دتیل (استات دتیل) $CH_3CO \cdot O \cdot CH_2 \cdot CH_3$

۱۱ـ مسائل برای حل

برای کلاسهای چهارم و کنکور

۱۷۱۳ـ در محلی که فشارهوا H سانتیمتر جیوه‌می‌باشد لولهٔ استوانه‌ای به‌ارتفاع a سانتیمتر را که پراز هوا می‌باشد وارونه کرده و تا عمق l سانتیمتر در جیوه فرومی کنیم. تعیین کنید جیوه در استوانه چقدر بالا خواهدآمد. در وجودجواب بحث کنید

مقادیر عددی : $a=۸۰cm$ ، $H=۵۷cmHg$

$l=۱۵cm$

هوشنگ شریفزاده

***

۱۷۱۴ـ در یك فشار سنج قائم که سطح داخلی آن ۸ سانتیمتر مربع و ظرفیت آن از سطح جیوهٔ متغیر یك لیتر است:

I ـ گاز خشکی راکه از اثر ۵ گرم جیوه روی اسید سولفوریك جوشان به‌دست آمده است در آن وارد کرده‌اند. مطلوب است تعیین ارتفاع جیوه در لوله. فشار خارج ۷۳۰ میلیمتر و درجهٔ حرارت ۲۵است.

II ـ یك گاز دیگررا که از اثراسید کلرئیدریك برروی سولفور آنتیموآن به‌دست آمده‌است وارد بارومتر نموده‌اند. وزن سولفور آنتیموان چقدرباید باشد برای این‌که سطح جیوهٔ لوله را به‌سطح جیوهٔ داخل طشتك برساند.

III ـ این سطح چه خواهد شد اگر در لوله آب وارد شود، درصورتی‌که از حجم آب واردشده صرف‌نظر کنیم.

فشار بخار آب در ۳۵ درجه ۴٫۲ سانتیمتر است،

$dSH^{۲}=۱٫۱۷$ ، $dSO^{۲}=۲٫۲۵$ ، $Sb=۱۲۰$

$Hg=۲۰۰$.

از مسائل کنکور عمومی رشتهٔ فلسفهٔ فرانسه

ترجمه‌از:ح.جواهری‌دبیردبیرستانهای‌کازرون

***

برای کلاسهای پنجم

۱۷۱۵ـ ابزکنیفی از مجموع سه‌عددی نازك چسبیده به هم تهیه شده است. دوعددی طرفین متشابه و مساحت وسطی متوسط بین مساحت بزرگ و کوچك است. مساحت بزرگ ۱٫۲۴۴ برابر مساحت وسطی و مساحت وسطی ۱٫۵۴۴ برابر مساحت کوچك می باشد. فاصلهٔ کانونی مجموعه ۱۰۰ سانتیمتر است. شعاع سطوح کروی عدسیها را تعیین کنید

برای کلاسهای پنجم و ششم

۱۷۱۶ـ در ظرفی ۱۰۲۴cc سود نرمال وجود دارد. ربع حجم آن را با آب مقطر عوض می‌کنیم، بدیهی است که سود رقیق‌تر می‌شود. مجدداً ربع حجم محلولی را که به‌دست می‌آید با آب مقطر جابجا می‌نمائیم و آنقدراین عمل‌راتکرار می‌کنیم تامقدار حالص سودبه ۷٫۲۹ گرم‌برسد، چند دفعه‌عمل جابجائی محلول سود وآب انجام گرفته است.

برای کلاسهای ششم و کنکور

۱۷۱۷ـ یك نقطهٔ مادی از A باشتاب ثابت و سرعت اولیه‌ای حرکت‌کرده ومسافات $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ را در زمانهای مساوی طی‌می‌کند. ثابت کنید.

اولا: $C=۲b-a$.

ثانیاً: نسبت سرعت در نقطهٔ D به‌سرعت در نقطهٔ A برابر است با

$$\frac{۵b-۳a}{۳a-b}$$

نمایندگان محترم شهرستانها

چون تمام شماره‌های ۲و۶ مجله به اتمام رسیده است، خواهشمندیم چنانچه‌ازاین شماره‌ها دردسترس دارید به‌دفتر مجله‌عودت دهید. متشکریم

مسائل از استاد دکتر محسن هشترودی

مربوط به ریاضیات متوسطه

مسائل تحقیقی
برای آنها که خوب فکر می کنند

۱۷۱۸ ـ حالات تساوی دومثلث (حالات کلاسیك که ازتساوی زوایا و اضلاع بدست می آید) :

حالت چهارم : دو مثلث که در دو ضلع و زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر مساوی باشند برابرند (اثبات با مقالهٔ اول)

۱۷۱۹ ـ اگر از میانه‌ها ومنصف‌الزوایا وارتفاعات استفاده شود حالات تساوی مثلث را بحث کنید . در این موارد مثلثهائی بدست می آید که باهم غیرمساوی ولی درخواصی مشترکند . این خواص را بحث کنید .

مثلاً مثلث غیرمتساوی‌الساقینی وجوددارد که دو منصف‌الزاویهٔ خارجی آن (برای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$) برابرند خواص این مثلث را پیدا کنید .

۱) مثلثی که‌در آن نیمسازخارجی زاویهٔ $\hat{B}$ بانیمسازخارجی $\hat{C}$ برابراست لازم نیست متساوی الساقین باشد . این مثلث با معلوم بودن اضلاع a و b (یااضلاع a و c) قابل رسم است ولی با معلوم بودن اضلاع b و c قابل رسم نیست . دلیل امکان رسم را دردوحالت اول ذکر کنید و طریقهٔ رسم را بدست دهید .

ثابت کنید که‌اگر درمثلثی ضلع b از ضلع c بزرگتر باشدو نیمسازهای‌خارجی‌زوایای B و C برابرباشندضلع a درنامساوی $\frac{b+c}{2}<a<b$ صدق می کند . شرط امکان مسئله را با معلوم بودن اضلاح b و a بحث کنید .

(کمك: دربحث مسئله به معادلهٔ درجهٔ چهارم برخوردمی‌شود. برای حل معادلهٔ درجهٔ چهارم $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ آنرا به‌دوعامل بصورت زیر:

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=[x^2+(\frac{a}{2}+\lambda)x+\alpha][x^2+(\frac{a}{2}-\lambda)x+\beta]$ تجزیه می کنند ومعادلهٔ جدید برحسب λ ازدرجهٔ سوم می گردد .)

۲) شرطی را معادلهٔ درجهٔ چهارم $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ دارای دوجواب x و $\frac{1}{x}$ باشد معین کنید. دراین‌صورت معادله قابل حل است . حل آنرا بدست دهید.

مسائل از استاد دکتر محسن هشترودی

برای دانشجویان

۱۷۳۰ ـ تبدیل خطی $y_k = a_{kh} x_h$ $(k,h = ۱,۲,۳,\ldots n)$ که در آن $a_{kk} = a$ و $a_{k,k-۲} = a_{h,h+۱} = b$ و سایر مقادیر $a_{kh} = ۰$ ($a_{kh} - a_{hk}$ اگر k و h غیرمتساوی و غیرمتوالی باشند) معروف است. این تبدیل را به $T^{(n)}_{a,b}$ و ماتریس آن را به $H^{(n)}_{a,b}$ می‌نمائیم (n نمایندهٔ مرتبهٔ تبدیل یا ماتریس آن و a و b پارامترهای تبدیل می‌باشند)

۱) ثابت کنید که تبدیل و ماتریس آن نسبت به ضرب صاحب خاصیت جابجائی می‌باشند یعنی

$$T^{(n)}_{a'و b'} \times T^{(n)}_{aو b} = T^{(n)}_{aو b} \times T^{(n)}_{a'و b'}$$

۲) ثابت کنید که تبدیل T گروه تشکیل می‌دهد یعنی $T^{(n)}_{aو b} \times T^{(n)}_{a'و b'} = T^{(n)}_{AوB}$ و ماتریس H تشکیل حلقه (Ring) می‌دهد یعنی:

$H^{(n)}_{aو b} \times H^{(n)}_{a'و b'} = H^{(n)}_{AوB}$ و $H^{(n)}_{aو b} + H^{(n)}_{a'و b'} = H^{(n)}_{A'وB'}$ مقادیر A و B و A' و B' را از روی a و b و a' و b' تعیین کنید.

(تبدیل عین عبارتست از $E = T^{(n)}_{۱و ۰}$ و ماتریس واحد $I^{(n)} = H^{(n)}_{۱و ۰}$)

۳) دترمینان $D^{(n)}_{aو b}$ ماتریس را حساب کنید و ماتریس عکس ماتریس $H^{(n)}_{aو b}$ را بدست آورید. حالتی را که $a = \pm ۲b$ می‌باشد جداگانه تحقیق کنید.

۴) از رابطهٔ $D^{(n)}_{aو b} \times D^{(n)}_{a'و b'} = D^{(n)}_{AوB}$ اتحادی بدست می‌آید. این اتحاد را تشکیل داده و قوهٔ k ام ماتریس $H^{(n)}_{aو b}$ را از روی a و b تعیین کنید.

۵) تبدیلهای $T^{(۲)}$ و $T^{(۳)}$ و $T^{(۴)}$ و $T^{(۵)}$ مرتباً فرمهای:

$$\Phi_۲ = (x_۱)^۲ - (x_۲)^۲ \quad \text{و} \quad \Phi_۳ = (x_۱ - x_۳)[(x_۱ + x_۳)^۲ - ۲(x_۲)^۲]$$

$$\Phi_۴ = -[(x_۱ + x_۴)^۲ + (x_۱ + x_۴)(x_۲ + x_۳) - (x_۲ + x_۳)^۲][(x_۱ - x_۴)^۲ - (x_۱ - x_۴)(x_۲ - x_۳) - (x_۲ - x^۳)^۲]$$

$$\Phi_۵ = (x_۱ - x_۲ + x_۵)[(x_۱ - x_۵)^۲ - (x_۲ - x_۴)^۲][(x_۱ + x_۲ + x_۵)^۲ - ۳(x_۲ + x_۴)^۲]$$

را کواریان نگاهمیدارند (نه‌تنها فرمهارا بلکه عوامل درجهٔ اول آنها را نیز کواریان نگاهمیدارند) (فرمی کواریان است اگر پس از تبدیل متناسب خود باقی بماند) ثابت کنید که بطور کلی هر تبدیلی از مرتبهٔ n تعداد n فرم خطی پایك فرم مرتبهٔ n ام را (که حاصل ضرب n فرم خطی قبل است) کواریان نگاهمیدارد. این فرمها همه در حوزهٔ حقیقی وجود دارند (یعنی فرمهای درجهٔ اول با ضرائب حقیقی می‌باشند)

---

۶) ثابت کنید که تبدیل مرتبهٔ فرد $T^{(2n+1)}_{a\circ b}$ گروهی تشکیل می‌دهد که تبدیل $T^{(n)}_{a\circ b}$ زیر گروه آن است . پس ثابت کنید که دترمینان $D^{(2n+1)}$ بر دترمینان $D^{(n)}$ بخش پذیر است. معادلات زیر گروه $T^{(n)}_{a\circ b}$ نسبت به گروه $T^{(2n+1)}_{a\circ b}$ با کدام ترکیبهای خطی از متغیرها نوشته میشود . ثابت کنید که در تبدیل مرتبه فرد $T^{(2n+1)}$ یکی از قرمهای کواریان عبارت است از :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x_{2k+1}$$

وقرمهای کواریان دیگر را از روی زیر گروههای تبدیل و تبدیل خاص خطی که به گروه متعلق نیست ولی خود گروه است می‌توان بدست آورد .

۷) قضیهٔ قبل برای تبدیلهای مرتبه زوج وجود ندارد ولی قسمت اخیر آن (گروههای مرتبهٔ پائین‌تر که به تبدیلهای $T^{(2n)}$ متعلق نیستند) دراین حاصل نیز صادق است .

۸) ثابت کنید که تعیین ریشه‌های معادلهٔ $D^{(n)}=0$ یا رسم کثیرالاضلاع منتظم $(n+1)$ ضلعی در دائره معادل است . دائرهٔ بشعاع R ونقطهٔ A درسطح آن بفاصلهٔ $OA=d$ ازمرکز دائره مفروض است کثیرالاضلاع $(n+1)$ ضلعی در دائره محاط می کنیم بقسمی که یك رأس کثیرالاضلاع بر روی قطر مار بر نقطهٔ A قرار گیرد. ثابت کنید که حاصل ضرب فواصل نقطهٔ A ازرؤس کثیرالاضلاع برابر است با $d^{n+1}-R^{n+1}$. برای اثبات قضیه Rad را از روی abo چنان تعیین کنید که معادلات $D^{(n)}_{a\circ b}=0$ و $d^{n+1}-R^{n+1}=0$ معادل گردند :

***

۱۷۳۱ـ تبدیلهای $y_k=a_{kh}x_h$ را درنظر می گیریم بقسمی که $a_{kh}=a_{hk}$ و $a_{k+2,k}-a_{h,h+2}=b$ و $a_{kk}=a$ و $a_{kh}=0$ (اگر hok دارای اختلافی بجز ۲ وصفر باشند) . سؤالهای مسئلهٔ قبل کدامیك دراین مسئله صادق‌اند ،

***

۱۷۳۲ ـ ثابت کنید که :

$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{abc} \qquad (a\circ b\circ c \text{ مثبت فرض شده‌اند.})$$

آیا می‌شود این مسئله راتعمیم داد وبرای عدهٔ بیشتری از مقادیر aoboc قضیه را محقق دانست ؟

برای اثبات قبلاً قضیه را برای

$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}$$

ثابت کنید و سپس تعمیم دهید . (برای اثبات ازخواص هذاولی متساوی‌الساقین $xy=ab$ استفاده کنید).

در خدمت تاریخ

یکی ازریاضیدانهای برجستهٔ ایران ابوبکر محمدبن‌الحسن کرخی است که درقرن چهارم هجری می‌زیسته است . شرح حال وکار این‌دانشمند را جناب‌دکتر مصاحب درضمیمهٔ کتاب جبر ومقابلهٔ خیام جمع‌آوری کرده‌اند . چون شرح زیرکه مربوط به همین دانشمند است علاوه بر آن چیزی است که در کتاب مزبور و همچنین مقالهٔ خدمات ریاضیدانان ایرانی (مندرج درشمارهٔ ۸و۹ یکان) وکتاب کارنامهٔ بزرگان از انتشارات ادارهٔ کل رادیو آمده ، از آقای محمد شریف‌زاده ، دانش‌آموز سال پنجم ریاضی دبیرستان شمارهٔ ۲ خوارزمی ، که همواره با مجلهٔ یکان همکاری داشته‌اند ، خواهش کردیم که آن راترجمه ودراختیار خوانندگان محترم مجله قرار دهند .

«شورای نویسندگان»

ابوبکر محمد کرخی

نوشتهٔ : دکتر امیر معز

ترجمهٔ: محمد شریف‌زاده

در قدیم مدارس ابتدائی ایران عبارت ازمساجد وعبادتگاهها بود و به شخصی که در آنجا سمت معلمی داشت استاد خطاب می گردید. درآن زمان از ادب به‌دور بود که شاگردان در کلاس چیزی بگویند یا پرسشی بکنند .

روزی استاد مشاهده کرد که محمد ناراحت است ونمی‌تواند آرام بنشیند. البته احتمال تنبیه نیز درپیش‌بود. از این جهت به‌او گفت :

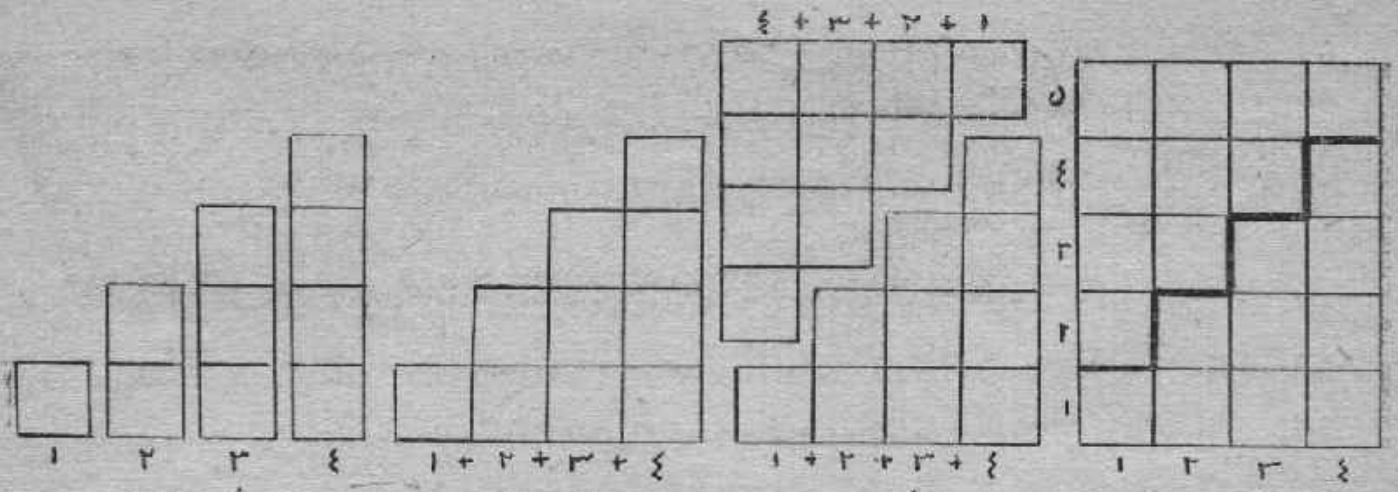
چیست محمد ، مگرمریضی ؟

ـ نه استاد . فکر می کنم که بتوانم اعمال حساب را باتصاویر انجام دهم .

استاد خیلی تعجب کرد وازمحمد خواست که منظور خود را توضیح دهد .

محمد واقعاً یك روش بکر حسابی را پیدا کرده بود وآن را برای استادش چنین شرح داد :

یك مربع می کشیم وآن را یك می‌نامیم . دوتا از همان مربعها را پهلوی هم قرار داده وآن را دو می‌نامیم. به‌همین ترتیب اعداد سه وچهار وپنج وغیره را رسم می کنیم. حال اگر بخواهیم که‌حاصل ۱+۲+۳+۴ را پیدا کنیم، تصاویر را مطابق شکل ۱ پهلوی هم قرار می‌دهیم ویك تصویر دیگرشبیه شکل ۲ ساخته ومطابق شکل ۳ آن راروی شکل نخست قرار می‌دهیم‌ومشاهده می کنیم که شکل ٤ به‌دست می آید . حال به سادگی می‌توان تعداد مربعهای‌شکل ٤ را به‌دست‌آورد ، چه این شکل مستطیلی است به ابعاد ٤ و ٥ ، پس تعداد مربعها ، مساوی ٥×٤ یعنی ۲۰ خواهد بود . واین می‌رساند که ۱+۲+۳+٤ نصف ۲۰ می‌باشد ، یعنی : ۱+۲+۳+٤=۱۰



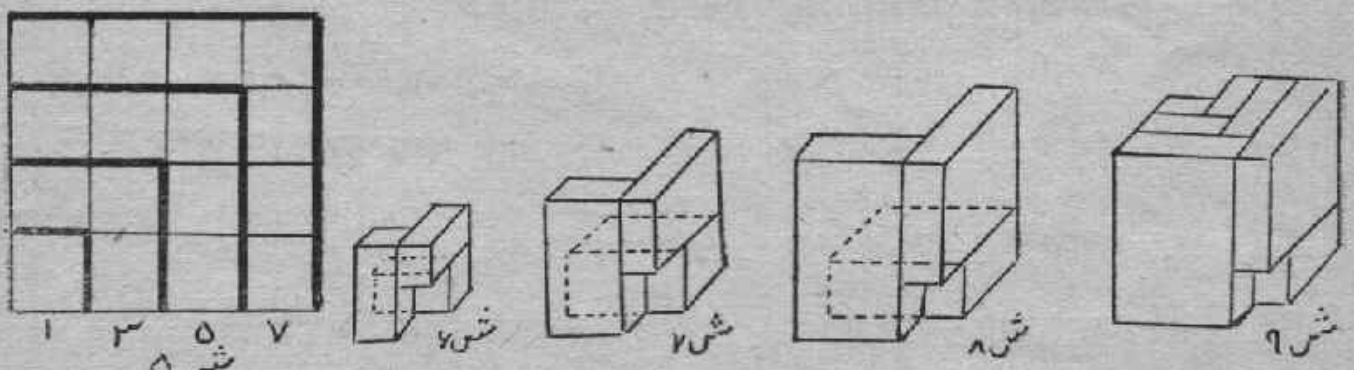
شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ٤

محمد سپس به‌استادش گفت : من مطمئنم که این قاعده را می‌توان در مورد بیشتر از ٤ عدد نیز بـه‌کاربرد : مثلاً برای محاسبهٔ مجموع اعداد متوالی از یك تا پنجاه مجبور به جمع کردن آنها یارسم اشکال نیستم بلکه می گویم ۵۱ = ۵۰ + ۱ واین یکی ازابعاد مستطیل است و بعد دیگر ۵۰ می‌باشد ، بنابراین مجموع مربعها ۲۵۵۰ = ۵۰ × ۵۱ وحاصل جمع اعداد از یك‌تا پنجاه مساوی نصف آن یعنی ۱۲۷۵ خواهد بود . استاد پس ازشنیدن این مطالب‌شگفتیها نمود وبه‌او اجازهٔ مطالعهٔ کتب اقلیدس را داد .

بعدها محمد ریاضیدان ومنجم مشهوری شد ونام او در اغلب تاریخهای ریاضیات دیده می‌شود متأسفانه به‌علت آن که ایرانیان چنین روزهائی را جشن نمی گیرند از تاریخ تولد او اطلاعی دردست نیست ولی همین‌قدر معلوم‌است که درحدود سال ۱۰۰۰ میلادی می‌زیسته است .

گرخی بـا این روش هندسی بسیاری از مسائل حساب را حل کرده است که در ذیل نمونه‌های دیگری از کاراوداده می‌شود :

۱ ــ مجموع n عدد فرد متوالی مساوی n^2 است. وی ابتدا مسئله را درمورد چند عدد بخصوص حل کرد و بعد نظریهٔ خود را تعمیم داد . در اینجافقط روش اثبات اوبرای چهارعدد فرد متوالی شرح داده می‌شود: او یك‌مربع را عدد ۱ وسه‌تا ازهمانها راعدد ۳ و ۵ تا از آنها را عدد ۵ و۷ با ازآنها را عدد ۷ فرض نمود ومطابق شکل ۵ آنها را پهلوی هم قرار داد . همچنان که دیده می‌شود مجموع این مربعها 4^2 است ، بنابراین $1+2+5+7=4^2$



شکل ۵ شکل ٦ شکل ۷ شکل ۸ شکل ۹

۲ـ اثبات فرمول‌زیر

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱)=\frac{۱}{۳}[(n+۱)^۳-(n+۱)]$$

که دراینجا مافقط روش اثبات اورا درحالت $n=۳$ شرح میدهیم واثبات فورمول را درموردجمله‌های بیشتر یا درحالت کلی به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

سه آجر به ابعاد ۱و۱و۲ گرفته وآنها را مطابق شکل ۶ روی هم می‌چینیم واضح است که حجم جسم حاصل (فقط حجم‌قسمت آجری) مساوی $۳(۱\times۲)=۲-۲^۳$ خواهد بود. حال مطابق شکل ۷ سه‌آجر به‌ابعاد ۱و۲و۳ راروی هم می‌چینیم. حجم این‌جسم (آجرها) مساوی $۳(۲\times۳)$ است. بالاخره مطابق شکل ۸ سه‌آجر دیگر به‌ابعاد ۱و۳و۴ رارری هم قرارمی‌دهیم. حجم‌این جسم (آجرها) مساوی $۳(۳\times۴)$ است. حال این سه جسم را طوری پهلوی هم قرار می‌دهیم تاشکل۹ بدست‌آید مشاهده می‌شود که‌حجم این‌جسم (آجرها) مساوی $۴^۳-۴$ است چون که شکل۹مکعبی‌است به‌ابعاد۴ که چهارواحدحجم ازآن برداشته شده است بنابراین

$$۳(۱\times۲)+۳(۲\times۳)۲\times۲)+۳(۳\times۴)=۴^۳-۴$$

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴=\frac{۱}{۳}(۴^۳-۴)$$

آیا ازاینکه این حاصل جمعها یکی است تعجب نمی کنید؟

$+۹۸۷۶۵۴۳۲۱$	$+۱۲۳۴۵۶۷۸۹$
۰۸۷۶۵۴۳۲۱	۱۲۳۴۵۶۷۸۰
۰۰۷۶۵۴۳۲۱	۱۲۳۴۵۶۷۰۰
۰۰۰۶۵۴۳۲۱	۱۲۳۴۵۶۰۰۰
۰۰۰۰۵۴۳۲۱	۱۲۳۴۵۰۰۰۰
۰۰۰۰۰۴۳۲۱	۱۲۳۴۰۰۰۰۰
۰۰۰۰۰۰۳۲۱	۱۲۳۰۰۰۰۰۰
۰۰۰۰۰۰۰۲۱	۱۲۰۰۰۰۰۰۰
۰۰۰۰۰۰۰۰۱	۱۰۰۰۰۰۰۰۰
۱۰۸۳۶۷۶۲۶۹	۱۰۸۳۶۷۶۲۶۹

به‌کار بردن
اعداد کمپلکس
برای تعیین اعداد فیثاغورثی

ج.ش. آوری

شاید بارها به‌این مسئله برخورده باشید که خواسته اید سه‌عدد صحیح جهت اندازهٔ سه ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه تعیین کنید وپس از مدتی تفحص ناچار آن سه عدد را متناسب با اعداد ۳و٤و٥ گرفته اید . این طورنیست ؟

این عمل شما درست است ونقصی درآن نیست ، چه‌مثلثی به اضلاع۳و٤و٥ قائم الزاویه‌است وهرمثلثی هم که طول‌اضلاع آن متناسب با اعداد ۳و٤و٥ باشد ،در حقیقت متشابه این‌مثلث یعنی‌قائم‌الزاویه است . اما آیا اگر بخواهیم که اندازه‌های اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه اعداد صحیح باشد ، این اعداد حتماً باید متناسب با اعداد ۳ و ٤ و ٥ باشند ؟ واضح است که نه ، چه می‌توان مثلثی قائم‌الزاویه تعیین‌کرد که اضلاع آن اعداد صحیح باشند و در ضمن این اعداد متناسب با ۳و٤و٥ نباشند . مثلا مثلثی به اضلاع ٥ و۱۲ و۱۳ (غیر متناسب با ۳ و٤ و٥) قائم‌الزاویه است چه طول اضلاع آن دررابطهٔ $x^2+y^2=z^2$ (رابطهٔ فیثاغورث) صدق می کند:

$$5^2+12^2=13^2$$
$$25+144=169$$

موضوعی که می‌خواهیم دربارهٔ آن گفتگو کنیم این است که‌چگونه اعداد صحیحی بیابیم که در رابطهٔ $x^2+y^2=z^2$ صدق کنند . باید توجه داشت که هرسه‌عددی راکه‌در این‌رابطه صدق کند ، **اعداد فیثاغورثی** می‌نامند.

برای اینکه روش سادهٔ این‌کار به وضوح بیان شوداجازه بدهید مقدمه‌ای دربارهٔ اعداد کمپلکس بچینیم.

مدتها بود که بشر حل معادلات درجهٔ اول را می‌دانست ولی برای معادلاتی نظیر $x+7=2$ جوابی قائل نبود . چه تا آن موقع اعداد منفی وضع نشده بودند ولذا این معادلات‌را بدون جواب می‌دانستند .درواقع اعدادمنفی برای‌نمایش جواب چنین معادلاتی به میان آمدند . برای نمایش ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم‌وقتی که مبین‌آن منفی است، نیز اعدادی ازنوع‌دیگر به نام **اعداد کمپلکس** وضع گردیده اند . یك معادلهٔ درجهٔ دوم که‌دلتای‌آن‌منفی‌باشد در نظربگیرید: $x^2-4x+13=0$ به هنگام یافتن جواب ، مقدار زیر رادیکال منفی می‌شود :

$$x=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3\sqrt{-1}$$

شاید تاکنون چنین معادلاتی را می گفتید که دارای جواب نیستند ولی همان‌طورکه می‌بینید این معادلات درجه دوم نیز دارای دوجوابند ، نهایت جواب آنها ازیك نوع اعداد بخصوص است ، چه شامل $\sqrt{-1}$ می‌باشند .

$\sqrt{-1}$ عددمعمولی نیست زیرا مجذورتمام اعداد معمولی مثبت است درصورتی که مجذور این عدد می‌شود -1 ، یعنی منفی است . چنانچه به تبع **اولر** که در ۱۷٤۸ میلادی به کار بردن حرف i را به‌جای $\sqrt{-1}$ پیشنهادکرد، ما نیز $\sqrt{-1}$را با i نمایش دهیم ، دوجواب معادلهٔ فوق چنین می‌شود :

$$x'=2+3i \quad و \quad x''=2-3i$$

به‌طورکلی، عددی که به صورت $a+bi$ باشد(bوaممکن است مثبت یامنفی باشند) به عدد کمپلکس (یاعدد مختلط)موسوم است . همان طورکه دیدید ، عدد کمپلکس ، درحالت کلی ، شامل دو جزء است. یك جزء حقیقی که باحرف a نمایش داده می‌شود ویك جزء دیگر که‌شامل $\sqrt{-1}$ است . این‌جزءاخیر را **جزء موهومی** عدد کمپلکس می گویند . چنانچه مقدار حقیقی عددکمپلکسی‌صفرباشد ، یعنی آن عدد بصورت bi باشد، آن را**موهومی خالص**می‌نامند . bوa را ضرایب‌عدد کمپلکس اصطلاح می کنیم.

حال اگر بخواهیم که‌یك عدد کمپلکس‌را به توان۲ برسانیم، مانند به توان رساندن یك دوجمله‌ای در جبر عمل می کنیم ، نهایت باید توجه داشته باشیم که $i^2=-1$. مثلا:

$$(3+2i)^2=9+4i^2+12i$$
$$=9+4(-1)+12i$$
$$=5+12i$$

می‌بینید که مجذور یک عدد کمپلکس، عددی است کمپلکس، یعنی مجذور عددی به شکل $a+bi$ ، عددی است به شکل $x+iy$.

پس از این مقدمه برمی‌گردیم به اصل موضوع یعنی به کار بردن اعداد کمپلکس در یافتن اعداد فیثاغورثی . وقتی که شما یک عدد کمپلکس مانند $a+bi$ را مجذور می‌کنید و عدد دیگری مانند $x+iy$ بدست می‌آورید، نکته جالب آن این است که سه عدد xy و $2x$ (ضرایب عدد کمپلکس مجذور) و a^2+b^2 (مجموع مجذورهای ضرایب عدد کمپلکس که به‌توان رسیده) اعداد فیثاغورثیند . مثلا در مثال فوق xy و $2x$ عبارتند از ۱۲ و ۵ و a و b عبارتند از ۳ و ۲ که مجموع مجذورهای این دو می‌شود : $۱۳=۳^2+۲^2$ و سه عدد ۵ و ۱۲ و ۱۳ ، همان‌طور که در ابتدای مقاله دیدید ، اعداد فیثاغورثیند .

برای روشن شدن مطلب یک مثال دیگر می‌زنیم : عدد کمپلکس $۴+i$ را به‌دلخواه در نظر بگیرید . در این عدد ، a برابر ۴ و b ، برابر ۱ است . بنابراین :

$$a^2+b^2=۴^2+۱^2=۱۶+۱=۱۷$$

عدد ۱۷ یکی از اعداد فیثاغورثی است . برای به دست آوردن دوتای دیگر باید چنین عمل کرد :

$$(۴+i)^2=۱۶+i^2+۸i$$
$$=۱۶-۱+۸i$$
$$=۱۵+۸i$$

از اینجا دو عدد دیگر عبارتند از ۱۵ و ۸ و سه عدد ۱۷ و ۱۵ و ۸ در رابطهٔ فیثاغورث صدق می‌کنند:

$$۱۷^2=۱۵^2+۸^2$$

برای درک آنکه چرا چنین خاصیتی وجود دارد، کافی است که عدد کمپلکس را در حالت کلی در نظر بگیریم و آن را به‌توان ۲ برسانیم :

$$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

به ترتیبی که گفتم سه عدد فیثاغورثی عبارتند از : a^2+b^2 و a^2-b^2 و ab . واضح است که بین این سه عدد ، هرچه a و b باشند ، در همه حال رابطهٔ فیثاغورث برقرار است ، چه :

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$$

$$a^4+b^4+2a^2b^2-a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2$$
$$=a^4+b^4+2a^2b^2$$

پس وقتی که خواستید سه عدد صحیح برای اندازه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه پیدا کنید ، زیاد به مغز خود فشار نیاورید ، بلکه به‌دلخواه یک عدد کمپلکس بنویسید و همان‌طور که در بالا دیدید آن سه عدد را به دست آورید.

موضوعی که تحت عنوان مقاله باید گفته می‌شد درواقع به همین‌جا خاتمه می‌پذیرد . اما حیف است که تا این حد گفته باشیم و مطلبی مهم در همین زمینه ناگفته بماند . آن مطلب این است که با استفاده از اعداد کمپلکس می‌توان اعداد صحیحی را نیز که در رابطهٔ :

$$x^2+y^2=z^2$$

صدق کنند پیدا کرد . راه این کار همان طور است که در بالا گفتیم ، نهایت در اینجا باید به جای مجذور کردن عدد کمپلکس ، آن را به توان ۳ برسانیم . یک مثال موضوع را روشن می‌کند :

$$(۱+۲i)^3=۱+۳(۲i)+۳(۴i^2)+۸i^3$$
$$=۱+۶i-۱۲+۸(i^2)(i)$$
$$=-۱۱-۲i$$

از اینجا داریم : $x=۱۱$ و $y=۲$ و $z=۱^2+۲^2=۵$ که در این رابطه صدق می‌کنند:

$$۱۱^2+۲^2=۵^3$$

برای اطمینان خاطر از روشن شدن موضوع باز اجازه بدهید که یک مثال دیگر بزنیم :

$$(۵+۳i)^2=۱۲۵+۳(۲۵)(۳i)+۳(۵)(۹i^2)-۲۷i^2$$
$$=-۱۰+۱۹۸i$$

و از آنجا :

$$۱۰^2+۱۹۸^2=۳۴^3$$

$$(۳۴=۵^2+۳^2)$$

تصور می‌کنید که این خاصیت را می‌توان عمومیت داد ؟ یعنی می‌توان باهمین شیوه اعداد صحیحی به‌دست آورد که در رابطهٔ $x^2+y^2=z^n$ صدق کنند ؟ اگر آری ، پس سه عدد صحیح به دست آورید که در رابطهٔ $x^2+y^2=y^4$ صدق کنند .

پایان

اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم ز:ایرج ارشاقی

Geometry	هندسه
Plane Geometry	هندسهٔ مسطحه
Solid Geometry	هندسهٔ فضائی
Point	نقطه
Line	خط
Line Segment	قطعه خط
Straight Line	خط راست
Curve	منحنی
Surface	سطح
Plane	سطح مستوی ـ صفحه
angle	زاویه
right – angle	زاویهٔ قائمه
acute – ‹	زاویهٔ حاده
obtuse – ‹	زاویهٔ منفرجه
Straight ‹	زاویهٔ نیم صفحه
Vertical angles	دو زاویهٔ رو به رو

Complementary	متمم
Supplementary	مکمل
adjacent	مجاور
alternate	متبادل
exterior	خارجی
interior	داخلی
Parrallel	موازی
intersecting	متقاطع
bisector	نیمساز
Prependicular	عمود
Prependicular bisector	عمود منصف
Locus of points	مکان هندسی
Equidistant	متساوی الفاصله
Ruler	خط کش
Compase	پرگار
Protractor	نقاله

EXERCISES

A– Which of the following statements are correct ?

1– The sum of all the angles about a point in a plane is two straight line .

2–If two abjacent angles have their exterior sides in astraight line , they are supplementary .

3– the locus of points equidistant from two given points is the prependicular bisector of the line segment joining the two points .

4– the locus of points within an angle equidistant from sides is the bisector of the angle .

B– Solve these problems :

1–Find the Complement of an angle of 5o˚.

2–two supplementary angles differ by 30˚, find them.

اشتباه از چیست؟

۱ـ هریك از نامساویهای زیر از نامساوی بالایی خود نتیجه شده است . نخستین نامساوی درست است اما آخرین نامساوی غلط . پس باید در جایی اشتباهی رخ داده است . این اشتباه از چیست ؟

می دانیم $\frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۸}$

و یا $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ > \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$

از آنجا $۲\log\frac{۱}{۲} > ۳\log\frac{۱}{۲}$

و به دست می آید $۲ > ۳$

***

۲ـ این تناسب را در نظر بگیرید:

$$\frac{x+۱}{a+b+۱} = \frac{x-۱}{a+b-۱}$$

حال اگر در این تناسب تفضیل نسبت در صورت بگیریم ، خواهد شد:

$$\frac{x+۱-(a+b+۱)}{a+b+۱} = \frac{x-۱-(a+b-۱)}{a+b-a}$$

یا

$$\frac{x-a-b}{a+b+۱} = \frac{x-a-b}{a+b-۱}$$

چون صورتهای این دو کسر متساویند، مخرجهای آنها نیز باید متساوی باشند یعنی:

$$a+b+۱ = a+b-۱$$

و از آنجا نتیجه می شود $۱- = ۱+$. آیا این نتیجه درست است ؟ پس اشتباه در چیست ؟

***

۳ـ می دانید که اگر داشته باشیم $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ می توانیم بنویسیم $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}$. این خاصیت را در نظر داشته باشید و به این تناسب توجه کنید :

$$\frac{۳x-b}{۳x-۵b} = \frac{۳a-۴b}{۳a-۸b}$$

واضح است که هیچیك از کسرهای دو طرف این تساوی برابر ۱ نیستند ، چه صورتها و مخرجهایشان مساوی نیستند .

حال اگر همان خاصیت را در باره این تناسب بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{۳x-b-(۳a-۴b)}{۳x-۵b-(۳a-۸b)} = \frac{۳x-b}{۳x-۵b} = \frac{۳a-۴b}{۳a-۸b}$$

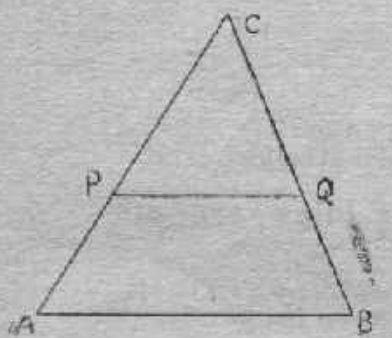
اما اولین کسر طرف اول چنین است:

$$\frac{۳x-۳a+۳b}{۳x-۳a+۳b} = ۱$$

بنابراین هریك از دو کسر دیگر نیز برابر ۱ است و این، چیزی است که از پیش معلوم بوده ! اشتباه در کجای کار است ؟

***

۴ ـ به این مثلث که در آن PQ موازی AB رسم شده است نگاه کنید مسلم است که دو مثلث ABC و PQC متشابهند و بنابر این می توانیم بنویسیم:



$$(۱) \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC}$$

چنانچه این تناسب را طرفین و وسطین کنیم ، خواهیم داشت :

$$(۲) \quad AB.PC = AC.PQ$$

حال اگر دو طرف این تساوی را در $AB-PQ$ ضرب کنیم نتیجه می شود:

$$(۳) \quad \overline{AB}^۲.PC - AB.PC.PQ = AB.AC.PQ - \overline{PQ}^۲.AC$$

اینك اگر $AB.PC.PQ$ را به هریك از دو طرف تساوی علاوه کنیم وضمناً $AB.AC.PQ$ را از هریك از دو طرف کم کنیم به‌دست‌می‌آید.

(٤) $\overline{AB^2}.PC-AB.AC.PQ=AB.PC.PQ-\overline{PQ^2}.AC$

که پس ازفاکتورگیری‌خواهدشد:

(٥) $AB(AB.PC-AC.PQ)=PQ(AB.PC-AC.PQ)$

باتقسیم کردن دوطرف این تساوی اخیر بر $AB.PC-AC.QP$ نتیجه می‌شود:

$AB=PQ$

اکنون به‌شکل نگاه کنید و ببینید که نتیجهٔ به‌دست‌آمده چقدر عجیب است. اگر اشتباهی در کار نباشد ، ریاضیات دنیای غریبی نیست»

اشتباه از این است (مربوط به‌شمارهٔ۹)

چون از میان پاسخهای رسیده پاسخ آقای **محمد خطیبی** دانشجوی رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم صحیح و کامل تشخیص داده‌شد عیناً در زیر نقل می‌شود:

۱و۲ـ وقتی می‌گوئیم : (دومن) . منظورمان دوبرابر یك من است. بنابراین اگر یك من ، یاهر چیز دیگری دراین نقش را : با مثلاً علامت A نشان دهیم . n برابر آن n .A و بطورمسلم حاصل ضرب n.A در n.A مساوی $n'.n.A^2$ خواهد بود .

در نتیجه حاصل‌ضرب $\frac{1}{2}$من در ۲من برابر با یك‌برابر مجذور یك من می‌باشد نه یك من . بنابراین مجذور یك من مساوی با ۹ برابر مجذور یك کیلو است . به همین دلیل نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{2}$ جذر یك دلار مساوی با ٥ برابر جذر سنت‌است

البته جذر سنت یا دلار و مجذورمن وکیلو عملا مفهومی ندارد ولی از نظر ریاضی قابل توجه بوده و همین سبب اشکال است .

***

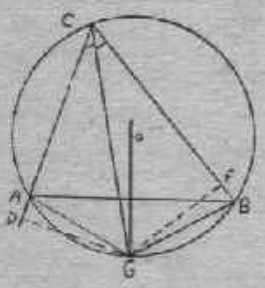
۳ـ در این مسئله باوجود آن‌که میدانیم $a-b=0$ است طرفین تساوی

$$(a-b)(a+b)=(a-b)b$$

راکه خود نیز صفراند برصفر تقسیم کرده‌ایم و این‌عمل غلط است.

***

٤ـ در یك مثلث ABC نیمساز زاویهٔ داخلی C عمود منصف ضلع AB را در یك نقطهٔ G قطع می‌کند اما ، اولا G در خارج مثلث و بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است (چرا ؟) .



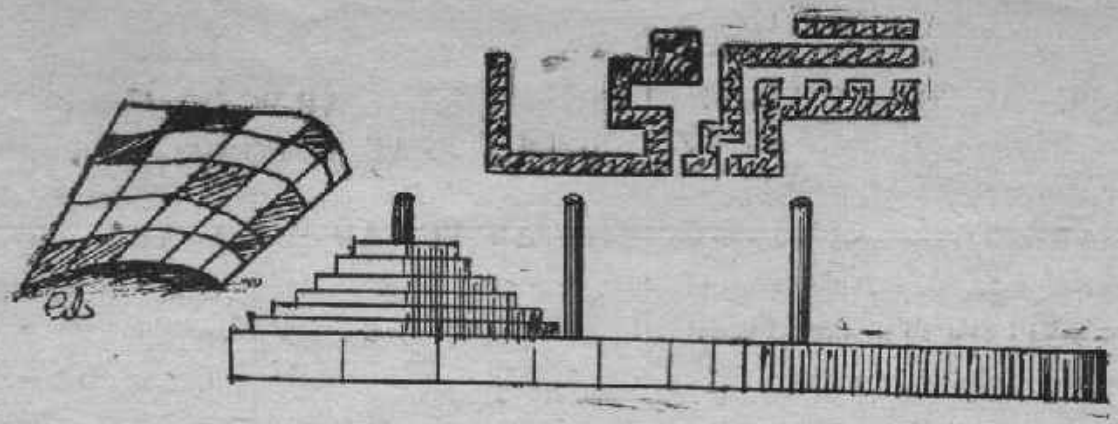
ثانیاً عمودهای GD و GF که براضلاع AC و BC رسم شوند اگر $AC<BC$ باشد ، D در خارج قطعه خط AC وF داخل قطعه خط BC قرار خواهد داشت (چرا؟)

تبصرهـ چنانچه هنگام رسم شکل ، G در خارج مثلث و D و F نیز هر دو در خارج اختیار شوند باز تناقض پیش خواهدآمد.

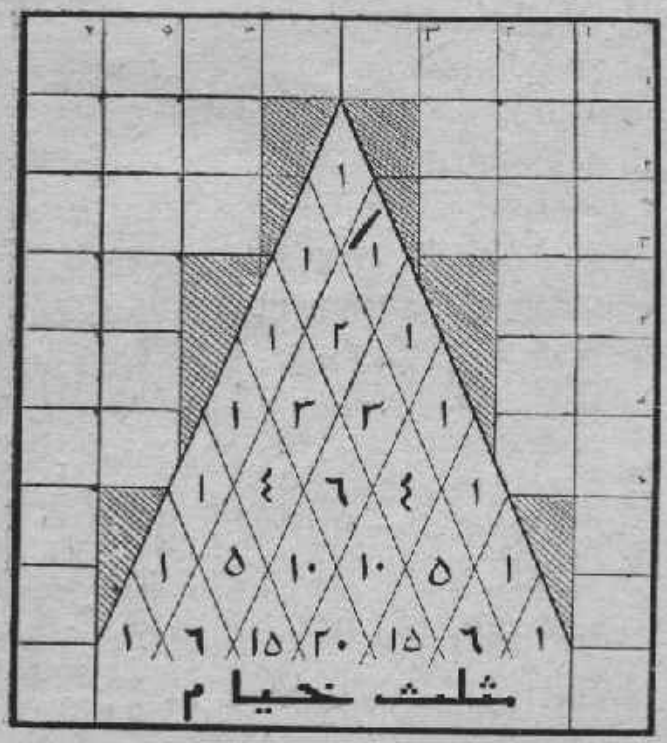
***

٥ـ در این مثال نمی‌توان از اجزاء مربع به آن نحو که گفته شده است ، مربع مستطیل مورد نظر را ساخت .زیرا زاویهٔ ساق مورب‌ذوذنقه باقاعدهٔ‌بزرگتر . یازاویه‌حادهٔ‌بزرگتر مثلث قائم‌الزاویه‌برابر نیست (برای اولی مقدار تانژانت‌برابر $\frac{5}{2}$ و برای دومی مقدار تانژانت برابر یا $\frac{8}{3}$ است) بنابراین اگر ضلع کوچکتر مثلث برقاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه واقع شود (بصورتی که زاویه‌های قائمه متقابل واقع شوند) دوزاویهٔ گفته شده نسبت به هم متقابل داخل و خارج بوده و چون مساوی نیستند پس وتر مثلث قائم‌الزاویه در امتداد ساق مورب ذوزنقه واقع نخواهد شد .

پاسخهای رسیده: احمد قنذی پنجم ریاضی دبیرستان‌علوی (هر پنج مسئله) ـ داود تراکمه پنجم ریاضی دبیرستان اقبال آشتیانی (مسئله۱) ـ اسدالله مس فروش پنجم ریاضی دبیرستان علوی(مسائل ۱و۲و۳و٥)



جدول کلمات متقاطع



افقی: ۱ـ دانشمندوریاضیدان معروف‌یونانی کمهمترین قضیهٔ هندسی(قضیهٔ عروس) ازاواست . ۲ـ خطالرأس ـ وارونه. اش برجی ازدوازده برج وصورتی ازصورتهای فلکی است . ۳ـ درمعادلات پارامتری وهمچنین درحل مسائل ترسیمی هندسه انجام می گیرد ـ بدون آخر ، به عنوان قضیهٔ کمکی دراثبات قضایا به‌کار می رود . ٤ ـ معمولا عددهای اول‌را به صورت توانی ازاین عدد مبنای یك نمایش می‌دهند ـ اگریك حرف براولش افزوده شود عددی را می‌رساند ، واگرهمان حرف به آخرش‌هم‌افزوده شود واحدی اززمان را معین‌می‌کند . ٥ ـ در مبنای ۹ به‌صورت ۱۰ نوشته می‌شود ـ نبات‌که فقط یك دوم‌آن روئیده است . ٦ـ به‌آخراعداد لفظی اضافه می‌شود تاآنها را ترتیبی‌کند ـ مولکول الکتریسته دار .

قائم : ۱ـ ریاضیدان ایتالیائی‌که رشتهٔ اعدادبه‌نام‌وی‌تا کنون چندباردریکان چاپ شده است ودراینجا نام وی باتلفظ غیرصحیح‌که توسط بعضی‌ها استعمال شده است منظورمی باشد . ۲ـ حرف سوم باحرف پنجم بعدازخودش ازالفباء ، عوش شود عددی ترتیبی دامی‌رساند . ۳ـ سه یك. ٤ ـ حرف اولش به‌آخرمنتقل شود نام برجی‌می‌شود. ٥ ـ یکی ازدروس ریاضی کلاس پنجم ریاضی . ٦ـ ریاضیدان مصری قرن‌نهم‌که ازجمله‌کارهایش‌تعیین‌فرمول‌کلی اعداد متحابه می‌باشد.

معما

ازکتاب مشکلات‌العلوم

فرستنده : محمد شریف زاده

زوج اول گیر و نصف او و نصف ضعف او — پس بکن‌درضعف‌هر یك‌ضعف‌ضعف‌جمله‌ضرب

تاشود نام شهی حاصل که ضرب تیغ او — می کند تنصیف تضعیف مخالف روز حرب

چیستان

از : یدالله ارضی ، اراك

قلب و قلب نام او با انتهایش در دو بار — رویهم بگذار و در خاطر نما آن راهمی

زان سپس تنصیف‌کن تا یابی از آن م را — جمع‌کن تا ازصفات حق شود پیدا همی

ضرب‌کن درانتهایش پنج وبرقلبش فزون — تاز بعد جد و جهد خود رسی برفا همی

ابتدایش با دو قلب و انتهایش همردیف — باشد و ، از شوق اسم او شوم شیدا همی

گومحاسب‌گرشود نامش عیان برعارضت — همچوارضی می‌شوی شیدای آن رعنا همی

مسئلهٔ ترسیمی

دو مربع سه در سه چنان رسم کنید که مجموع مساحتهای آنها ۱۹ واحد سطح باشد .

بازی بالوبیا

یك مربع سه درسه رسم کنید و آن را به ۹ خانه تقسیم کنید . خانهٔ وسط را خالی‌بگذارید. در هر یك از چهارخانهٔ واقع در چهارگوشه ٦ دانه لوبیا ودرهریك ازچهارخانهٔ دیگر ۹ دانهٔ لوبیا قرار دهید ، به‌این ترتیب مجموع لوبیاهای واقع درخانه‌های هر ضلع مربع برابربا ۲۱ می‌باشد .

اکنون ، چهار دفعه و هر دفعه ٤ دانه از لوبیا حذرا بر دارید وباقی راچنان‌جابجا کنید که درهرحال‌مجموع لوبیاهای‌واقع‌درخانه‌های هرضلع‌مربع برابر ۲۱ باشد .

بهترین حل مسئلهٔ الحسن ـ برندهٔ جایزهٔ مسابقهٔ ممتاز

ازمیان راه حلهای مختلفی که برای مسئلهٔ الحسن . مسئلهٔ مسابقهٔ ممتاز شمارهٔ اول یکان ، رسیده ودر شمارهٔ نهم به نظرخوانندگان گرامی رسید ، راه حل هشتم که توسط آقایان مهندس عباس سعیدی ـ بهروز قمیصی ـ اسرافیل کرائی ـ فرخ مجتهدی ـ محمد صادق پور ارائه شده بود بهترین ودقیق ترین راه حل تشخیص داده شد و چون راه حل پیشنهادی همهٔ آقایان فوق کاملا مشابه وبدون هیچگونه اختلاف می باشد و بعلاوه کوششهای همهٔ آنهایی که در این مسابقه شرکت کرده اند شایان تحسین و تقدیر است ، لذا برای تعیین برندهٔ جایزهٔ مسابقه ، میان همهٔ کسانی که راه حل کامل وصحیح مسئله را ارسال داشته بودند قرعه کشی به عمل آمد و به قید قرعه آقای حبیب صارمی برندهٔ جایزه تعیین شد . ازآقای صارمی دعوت می‌شود یا به ادارهٔ مجله مراجعه نمایند ویا نشانی کامل خود را اطلاع دهند تا جایزهٔ مربوط که حوالهٔ یکهزار ریال کتاب می باشد به ایشان تسلیم شود . ایشان می توانند طبق حوالهٔ مزبور ازکتابفروشی مربوط کتابهایی را که خود بخواهند دریافت دارند .

ناگفته نماند که راه حلی مشابه باراه حل هشتم (مذکور در شمارهٔ قبل) برای اولین بار توسط یك مهندس فرانسوی در حدود هشتاد سال پیش برای مسئلهٔ الحسن ارائه شده است ونیز دریکی از حل المسائل های چاپ فرانسه راه حل مذکور ، باطریقی تقریباً مشابه ، برای مسئله (که به صورت دیگری بیان شده است) مذکور می باشد .

حل مسئلهٔ ۱۴۰ ـ مسئلهٔ اول مسابقهٔ ممتاز

اولین مسئله‌ای که درشمارهٔ اول یکان تحت عنوان مسابقهٔ ممتاز مطرح وحل آن خواسته شده بود عبارت بود از :

مطلوب است تعیین رابطه‌ای مستقل از α بین x و y بفرض

$$\begin{cases} x = \sin\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ y = \cos\alpha + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

تا آخرمرداد ۱۳۴۳ که آخرین مهلت برای قبول پاسخ مسئله اعلام شده‌بود . پاسخهای زیاد دریافت شده ومتأسفانه اکثریت پاسخ دهندگان دوچار اشتباه شده‌اند . درزیر ، پاسخهای درست رسیده که ضمن آن α بین x و y حذف شده است مطرح می‌شود واعلام میگردد که بازهم درانتظارهستیم بهترین راه حل مسئله را که ضمن آن ساده ترین رابطه بین x و y بدست آمده باشد ، دریافت داریم . بعد ازطرح پاسخهای درست ، چند پاسخ دیگر به عنوان «اشتباه از چیست» مطرح خواهدشد وازخوانندگان گرامی دعوت می‌شودنکته‌ای را که حل کنندهٔ محترم رعایت ننموده است پیدا کنند .

درشمارهٔ آیندهٔ یکان ، بهترین راه حلهای زیروبرندهٔ جایزه اعلام می‌شود .

I ـ آقای فرخ پورحسن دانش آموز پنجم ریاضی دبیرستان ادیب (۴۳/۱۲/۹) و آقای **مسعود دیده وردانش** ـ آموز کلاس و دبیرستان فوق الذکر (۴۳/۱۲/۱۷) و آقای **نصرالله اعتمادی** (۴۳/۱/۲۶) راه حلی به شرح زیر ارائه داده‌اند :

ازرابطه‌های داده شده به دست می‌آید که :

$$\begin{cases} \sin^{۳}\alpha = x\sin^{۲}\alpha - ۱ \\ \cos^{۳}\alpha = y\cos^{۲}\alpha - ۱ \end{cases}$$

طرفین هررابطه را به‌توان ۲ می‌رسانیم

$$\begin{cases} \sin^{۶}\alpha = x^{۲}\cos^{۴}\alpha - ۲x\sin^{۲}\alpha + ۱ \\ \cos^{۶}\alpha = y^{۲}\sin^{۴}\alpha - ۲y\cos^{۲}\alpha + ۱ \end{cases}$$

اگردررابطهٔ دوم $\cos\alpha$ رابرحسب $\sin\alpha$ نوشته و طرفین رابطهٔ حاصل‌راعضو به عضو با طرفین رابطهٔ اول جمع کنیم رابطهٔ زیربدست خواهد آمد

$$(x^{۲}+y^{۲}-۳)\sin^{۴}\alpha - (۲y^{۲}-۲y+۲x-۳)\sin^{۲}\alpha + (y-۱)^{۲} = ۰$$

ازاین معادلهٔ دومجذوری مقدار $\sin\alpha$ برحسب x و y پیدا می‌شود وچون دررابطهٔ اول مفروض قرارداده شود رابطه‌ای مستقل از α بین x و y پیدا خواهد شد

***

II ـ راه حلی که آقای **فرامرز رهبر** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان شرف (۴۳/۴/۱۵) انتخاب نموده‌اند به‌شرح زیراست :

ازرابطهٔ اول خواهیم داشت

$$\sin^{۲}\alpha - x\sin^{۲}\alpha + ۱ = ۰$$

بافرض $\sin\alpha = m + \frac{x}{۳}$ نتیجه می‌شود

$$m^{۳} - \frac{x^{۲}}{۳}m - \frac{۲x^{۳}}{۲۷} + ۱ = ۰$$

وبافرض $m = z + u$ خواهیم داشت

$$z^{۳}+u^{۳}+(z+u)(۳zu - \frac{x^{۲}}{۳}) - \frac{۲x^{۳}}{۲۷} + ۱ = ۰$$

با انتخاب $u = \frac{x^{۲}}{۹z}$ به دست می‌آید :

$$۷۲۹z^{۶} - ۲۷(۲x^{۲}-۲۷)z^{۳} + x^{۶} = ۰$$

ازاین معادله مقدار z واز روی‌آن مقادیر $\sin\alpha$ و m و u به ترتیب برحسب x و y به دست خواهدآمد وچون دررابطهٔ‌اول مفروض قرار داده شود رابطهٔ مطلوب بین x و y به دست خواهد آمد .

***

III ـ آقای فریدون رزمجویان دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی (۴۳/۱/۱۷) مسئله رابه ترتیب زیر حل نموده‌اند :

ازرابطه‌های داده شده خواهیم داشت

$$\begin{cases} x - ۱ = \sin\alpha + \cot g^{۲}\alpha \\ y - ۱ = \cos\alpha + tg^{۲}\alpha \end{cases} \quad (۱)$$

طرفین دورابطه راعضو به عضودریکدیگرضرب می‌کنیم و بعد از انجام عملهای لازم خواهیم داشت

$$\sin^{۲}۲\alpha + ۲[xy - (x+y)]\sin ۲\alpha - ۸ = ۰$$

ازاین معادله مقدار $\sin ۲\alpha$ برحسب x و y به‌دست‌می‌آید

اگرطرفین هریك ازرابطه‌های (۱) رابه‌توان ۲ رسانیده وعضوبه عضوازهم کم کنیم بعد ازانجام عملهای لازم مفصل مقدار $\cos ۲\alpha$ برحسب x و y به دست خواهد آمد وازآنجا باتوجه به رابطهٔ $\sin^{۲}۲\alpha + \cos^{۲}۲\alpha = ۱$ رابطهٔ بین x و y پیدا می‌شود

***

IV ـ راه حل انتخابی توسط‌آقای **مصطفی گودرزی طائمه** دانشجوی سال سوم دانشکدهٔ علوم (۳۳/۵/۲۴) :

فرض می کنیم $m = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$ دراین صورت رابطه‌های داده شده چنین می‌شوند :

$$\begin{cases} x = m \pm \sqrt{\frac{۱}{m}} \\ y = \frac{m}{m-۱} \pm \sqrt{\frac{m-۱}{m}} \end{cases}$$

هریك ازدومعادله را نسبت به m مرتب می‌نمائیم . می‌شود

$$\begin{cases} m^{۲} - ۲xm^{۲} + x^{۲}m - ۱ = ۰ \\ (y^{۲}-۲y)m^{۲} + (۲y - ۲y^{۲} + ۳)m^{۲} + (y^{۲}-۳)m + ۱ = ۰ \end{cases}$$

طرفین این دومعادله را عضو به عضوباهم جمع کرده و طرفین رابطهٔ حاصل رابر m بخش می‌کنیم ، نتیجه می‌شود

$$(y^{۲}-۲y+۱)m^{۲} - (۲y^{۲}-۲y+۲x-۳)m + x^{۲}+y^{۲}-۳ = ۰$$

ازاین معادله مقدار m ودرنتیجه مقدار $\sin\alpha$ برحسب x و y پیداشده وباقراردادن دررابطهٔ اول مفروض ، رابطهٔ‌مطلوب به دست می‌آید .

***

V ـ آقایان **بخشعلی‌خیراللهی . قدرت‌الله عباسی** دانشجویان دانشکدهٔ فنی (مرداد ۴۳) راه حل زیررا انتخاب کرده‌اند :

با فرض $\sin^2\alpha = t$ و بعد از انجام عملهایی نظیر راه حل I خواهیم داشت

$$(1)\quad \begin{cases} t^3 - x^2t^2 + 2xt - 1 = 0 \\ t^3 + (y^2-3)t^2 - (2y^2-2y-3)t + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

طرفین دو رابطهٔ بالا را عضو به عضو از هم کم می‌کنیم. معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به t به دست می‌آید

$$(2)\quad (x^2+y^2-3)t^2 - (2y^2-2y+2x-3)t + y^2 - 2y + 1 = 0$$

طرفین این را در t ضرب کرده و بعد از حذف t^3 بین معادلهٔ حاصل و معادلهٔ اول دستگاه (۱) نتیجه خواهد شد:

$$(3)\quad [x^2(x^2+y^2-3) - (2y^2-2y+2x-3)]t^2 + [y^2-2y+1-2xy^2-2x^2+6x]t + x^2+y^2-3 = 0$$

شرطی را می‌نویسیم که دو معادلهٔ درجهٔ دوم (۲) و (۳) نسبت به t، دارای ریشهٔ مشترک باشند و در نتیجه رابطهٔ مطلوب بین x و y حاصل خواهد شد

اشتباه از چیست؟

VI ـ دانش‌آموز محترم می پس از آن که نظیر راه حل I عمل نموده و معادلهٔ

$$(1)\quad (x^2+y^2-3)\sin^4\alpha - (2y^2-2y+2x-3)\sin^2\alpha + y^2-2y+1 = 0$$

را به دست آورده است، در این معادله $\sin\alpha$ را بر حسب $\cos\alpha$ نوشته و حاصل شده است:

$$(2)\quad (x^2+y^2-3)\cos^4\alpha - (2x^2-2x+2y-3)\cos^2\alpha + x^2-2x+1 = 0$$

دانش‌آموز عزیز محقق نموده است که معادله‌های (۱) و (۲) دارای یک مبین می‌باشند که آن را Δ نامیده است و از حل دو معادلهٔ بالا به دست آورده است:

$$\sin^2\alpha = \frac{2y^2-2y+2x-3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(x^2+y^2-3)}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{2x^2-2x-2y-3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(x^2+y^2-3)}$$

چون مقادیر بالا را در رابطهٔ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\pm 2\sqrt{\Delta} = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta = 0$$

بنابراین نتیجه می‌شود که رابطهٔ:

$$\Delta = (x+y)(8xy-12) - 4xy(2+xy) + 21 = 0$$

رابطهٔ مطلوب می‌باشد.

آیا این رابطه درست است و در غیر آن، اشتباه این دانش آموز گرامی در چیست؟

***

VII ـ دانش‌آموز محترم دیگری با فرض $\cos\alpha = t$.

پس از آن که معادلهٔ زیر را به دست آورده است

$$(1)\quad (x^2+y^2-3)t^4 - (2x^2-2x+2y-3)t^2 + (x-1)^2 = 0$$

از رابطهٔ دوم مفروض به دست آورده است

$$t^2 = \frac{1}{y-t}$$

و در معادلهٔ (۱) قرار داده معادلهٔ زیر را پیدا نموده است

$$(2)\quad (x-1)^2t^2 + (2x^2-2yx^2-2x+4xy-3)t + x^2-y^2-2x^2y+2xy+3y-3 = 0$$

جوابهای معادلهٔ (۲) را t' و t'' فرض نموده، در نتیجه جوابهای معادلهٔ (۱) می‌شود $\pm t'$ و $\pm t''$ اما در معادله های (۱) و (۲) به ترتیب داریم

$$t'(-t')(t'')(-t'') = (t't'')^2 = \frac{(x-1)^2}{x^2+y^2-3}$$

$$t't'' = \frac{x^2-y^2-2x^2y+2xy+3y-3}{(x-1)^2}$$

و از آنجا رابطهٔ زیر را بین x و y پیدا نموده است

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+y^2-3} = \frac{(x^2-y^2-2x^2y+2xy+2y-3)^2}{(x-1)^4}$$

آیا این رابطه درست است؟ و یا اینکه دانش آموز عزیز اشتباهی مرتکب شده است؟ در این صورت اشتباه وی چیست؟

***

VIII ـ راه حل دیگری که به وسیلهٔ دانش‌آموز محترم دیگر ارائه شده چنین است:

با فرض $\sin\alpha = a$ و $\cos\alpha = b$ خواهیم داشت

$$a^2 - xa^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$b^2 - yb^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

اگر ریشه‌های معادله‌های (۱) و (۲) را به ترتیب a_1 و a_2 و b_1 و b_2 بنامیم روابط زیر را خواهیم داشت

$$a_1 + a_2 + a_3 = x \quad (3)$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0 \quad (4)$$

$b_1+b_2+b_3=y$ (۵)

$b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1=0$ (۶)

$a_1^2+b_1^2=1$ و $a_2^2+b_2^2=1$ و $a_3^2+b_3^2=1$

طرفین سه رابطهٔ اخیررا عضو بعضو باهم جمع می‌کنیم خواهد شد

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=3$ (۷)

طرفین هریك ازرابطه‌های (۳) و (۵) را مجذور کرده‌و روابط حاصل راباهم جمع می‌کنیم خواهد شد

$x^2+y^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$

$+2(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)+2(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)$

باتوجه‌بدرابطه‌های (٤) و (٦) و (٧) حاصل خواهدشد

$x^2+y^2=3$

اگراین رابطه درست نیست اشتباه ازچیست ؟

***

IX ـ دونفر ازخوانندگان محترم با راههای مشابه ، راه حل زیررا ارائه داده اند :

دردورابطهٔ مفروض مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ رابه ترتیب بر حسب $cotg\alpha$ و $tg\alpha$ می‌نویسیم خواهیم داشت

(۱) $cotg^6\alpha+(3-2x)cotg^4\alpha+(x^2-4x+3)cotg^2\alpha$

$+(x^2-2x)=0$

(۲) $tg^6\alpha+(3-2y)tg^4\alpha+(y^2-4y+3)tg^2\alpha$

$+(y^2-2y)=0$

مشاهده می‌شودکه هرکدام از معادله هـای (۱) و (۲) نسبت‌به $cotg^2\alpha$ و $tg^2\alpha$ ازدرجهٔ سوم می‌باشدا گرریشه‌های‌معادله (۱) را a و b و c وازدوم را a' و b' و c' بنامیم ، مقادیر α_1 و α_2 و α_3 که درازاء مقادیرفوق به دست می‌آید درهردو معادله مشترك اند وچون دردورابطهٔ مفروض درازاء هر مقدار از α یك مقدار برای x ویك مقداربرای y به دست آید یعنی یك نقطه بامختصات (x,y) مشخص می‌شودوبالعکس درازاءهر مقداراز x یك مقداربرای α ویك مقداربرای y حاصل می‌شود (صرف نظـرازحالت‌های استثنایی) پس حاصل‌ضرب ریشه‌هـای (۱) و (۲) به ترتیب چنین است

$a^2b^2c^2=x^2-2x$ (۳)

$a'^2b'^2c'^2=y^2-2y$ (٤)

وچـون a و b و c با a' و b' و c' دو به دو، برابر $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ بوده و $tg\alpha cotg\alpha=1$ است پس داریم

$(x^2-2x)(y^2-2y)=1$

به سادگی می‌شود تحقیق نمودکه این رابطه درست‌نیست. زیرا مقادیرمتناظری‌که درازاء مختلف α برای x و y حاصل می‌شود دراین رابطه صدق نخواهدکرد : مثلا

درازاء $\alpha=\frac{\pi}{6}$ داریم : $\left(x=\frac{9}{2}\text{ و }y=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ودرازاء $\alpha=\frac{\pi}{4}$ داریم $\left(x=y=\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$

ودر ازاء $\alpha=\frac{\pi}{3}$ داریم $\left(x=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ و }y=\frac{9}{2}\right)$

واین مقادیردررابطهٔ بالاصدق نمی‌کنند. حال‌که رابطهٔ‌بالادرست نیست درکدامیك ازعملهای راه حل اشتباه شده است ؟

***

نکتهٔ جالب

یکی ازخوانندگان گرامی بعد ازانجام عملهایی رابطهٔ زیررا مستقل‌از α بین x و y به دست‌آورده است :

$(x+y+1)^2=(x+y)^2+2(x+y)+1$

که نه‌تنهامقادیر xوy دورابطهٔ مفروض، بلکه هرمقداری از x وهرمقداری از y درآن صدق می‌کند . بهتر بودکه این دانش‌آموزعزیزبه جای اتحاد بالا ، اتحاد ساده تر ومعروفتر

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

رابه عنوان رابطهٔ مطلوب بیان می‌داشت !!

بقیهٔ عدد طلائی

ازکلیهٔ جنبه‌های عرفانی و ماورالطبیعه‌که برای عدد طلائی‌قائل شده اند این نسبت در بسیاری از قسمتهای مختلف هنر وعلم شناخت‌زیبائی‌وتناسبات مورداستعمال کلی‌قرارنمی‌گیردودربعضی موارد به‌کاربردن نسبتهای دیگری ضروریتر به نظر می‌رسد و از این جهت مـی‌توان ، دور از عقاید پوچ و خـرافی‌واطلاق صفت خدائی و طلائی ، این عدد را به عنوان یك نسبت جالب و شناخته شده و زیبا در قسمتهای هنربه‌کار برد و وجود آن‌را از این گونه‌صفات‌که از نظرعلم ،خصوصا ریاضیات ، نامتجانس است مبرا ساخت.



قبل ازآنکه به پاسخ پرسشهای رسیده دراین شماره بپردازیم به جاست که متذکر شویم که درشمارهٔ قبل ، شماره ۹ ، نوشته بودیم که تاسال ۱۹۵۰ ، بزرگترین عددشناخته شده $۲^{۶۱۱}+۱۵$ بوده است .

آقای **محمود رخشنده تالی** دراین‌باره نامه‌ای به‌مجله ارسال داشته اند ودرآن کتاب‌نوشته‌اند که‌درمقدمه‌بر نظریهٔ‌اعداد‌نوشتهٔ پروفسور Trygv Nagel چاپ ۱۹۵۰ ازعدد:

$$۲^{۱۲۷}-۱=۱۷۰'۱۴۱'۱۸۳'۴۶۰'۴۶۹'۲۳۱'۷۳۱'۶۸۷'۳۰۳'۷۱۵'۸۸۴'۱۰۵'۷۲۲$$

به عنوان بزرگترین عدد اول‌یاد شده واضافه گردیده که این مطلب وسیلهٔ Lucas نشان داده است .

امادرمجلهٔ «ریاضیات تفریحی» به‌این برخوردیم که بزرگترین عدد شناخته شدهٔ اول تا آوریل سال ۱۹۶۲ ، عبارت از $۲^{۴۴۱۳}-۱$ است . این عدد دارای ۱۳۳۲ رقم است که برای اطلاع خوانندگان وضمناً جلوگیری اناشتباه چاپی ما عین آن را ازآن مجله‌کلیشه کرده دراینجا چاپ می کنیم :

$M_{4423} =$

28 55425 42228 27961 39015 63566 10216
40083 26164 23864 47028 89199 24745 66022 84400 39060 06538
75954 57150 55398 43239 75451 39158 96150 29787 83993 77056
07143 51697 47221 10798 87911 98200 98847 75313 39214 28277
20160 59009 90458 66862 54989 08481 57354 22480 40902 23442
97588 35252 60043 83890 63261 61240 76317 38741 68811 48592
48618 83618 73904 17578 31456 96016 91957 43907 65598 28018
85990 35578 44859 10776 83677 17552 04340 74287 72657 80062
66759 61597 07595 21327 82855 56627 81678 38569 15818 44436
44481 25115 62428 13674 24904 59363 21281 01802 76096 08811
14010 03377 57036 35457 25120 92407 36469 21576 79714 61993
87619 29656 03026 80261 79011 81329 25012 32304 64444 38622
30887 79246 09373 77301 24816 81672 42449 36744 74488 53777
01557 83006 88085 26481 61513 06714 48147 90288 36666 40622
57274 66527 57871 27374 64923 10963 75001 17090 18907 86263
32461 95787 95731 42569 38050 73056 11967 75803 38084 33338
19875 00902 96883 19359 13095 26982 13111 41322 39335 64901
78488 72898 22881 56282 60081 38312 96143 66384 59454 31144
04375 38215 42871 27774 56064 47858 56415 92133 28443 58020
64227 14694 91309 17627 16447 04168 96780 70096 77359 04298
08909 61675 04529 27258 00084 35003 44831 62829 70899 02728
64998 19943 87647 23457 42762 63729 69484 83047 50917 17418
61811 30688 51879 27486 22612 29334 13689 28056 63438 44666
46326 57247 61672 75660 83910 56505 28975 71389 93202 11121
49579 53114 27946 25455 33053 87067 82106 76017 68750 97786
61004 60014 60213 84084 48021 22505 36890 54793 74200 30957
22096 73295 47507 21718 11553 18713 10231 05790 26085 80607

بازنباید تصور کرد که بزرگترین عدد اول شناخته شده عدد بالاست. چه همان طور که آقای **مهربان پروز** درمقالهٔ خود درشمارهٔ هفتم مجلهٔ یکان اشاره فرموده‌اند بزرگترین عدد اول که به وسیلهٔ دونالد . سیلیس با ماشین محاسبهٔ دانشگاه ایلی نویز شناخته شده عبارت از $۲^{۱۱۲۱۳}-۱$ می‌باشد . این عدد دارای ۳۳۷۶ رقم است و محاسبهٔ آن در سال ۱۹۶۳ انجام گرفته است .

شاید تازمان حاضر، درجادهٔ بی‌کران وناشناختهٔ اعداد اول ، ازاین نیز پیشتر رفته باشند ومارا ازآن اطلاعی دردست نباشد .

«شورای نویسندگان»

***

سؤال ـ برای اولین بارچه کسی فهمید که فرمول **فرما** برای اعداد اول درست نیست . به‌ازاء چه مقدار از n فرمول درست نبود ؟

(داریوش شهریار)

جواب ـ می‌دانید که درسال ۱۶۴۰ یکی‌ازریاضیدانان فرانسه به‌نام **«فرما»** تصورمی‌کرد که فرمولی به دست آورده است که باقراردادن اعداد صحیح به‌جای n درآن ، حاصل‌عدد اول می‌شود . فرمول اوچنیق بود :

$$۲^{۲^n}+۱$$

باقراردادن ۰و۱و۲و۳و۴ به جای n دراین فرمول ، به‌ترتیب این اعداد اول بد دست می‌آیند :

$$۲^{۲^۰}+۱=۲^۱+۱=۳$$

$$۲^{۲^۱}+۱=۲^۲+۱=۵$$

$$۲^{۲^۲}+۱=۲^۴+۱=۱۷$$

$$۲^{۲^۳}+۱=۲^۸+۱=۲۵۷$$

$$۲^{۲^۴}+۱=۲^{۱۶}+۱=۶۵۵۳۷$$

در حدود صد سال بعد ازاو ، **اولر** ریاضیدان سویسی ، کشف کرد که ششمین عددی که ازاین فرمول به دست می‌آید . یعنی :

$$۲^{۲^۵}+۱=۲^{۳۲}+۱=۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷$$

حاصل‌ضرب دوعدد ۶۴۱ و ۶,۷۰۰,۴۱۷ می‌باشد . و بنابراین برهریك ازآن دوقابل قسمت است .

ازاین تاریخ به‌این طرف ، تاآنجاکه مااطلاع داریم . دیگرکسی نتوانسته است که با این فرمول ، به غیر از همان نخستین پنج عدد اول ، باز هم عدد اول دیگری به دست‌آورد. البته ثابت هم نشده است که این کار غیرممکن است .

***

سؤال ـ عددکامل چه عددی است ؟ لطفاً اگر ممکن است توضیح مختصری نیزدربارهٔ آن برای‌آشنائی بیشتربااین گونه اعداد بدهید .

(حسین بنکدار)

جواب ـ می‌دانید که اگرعددی اول نباشد ، ضمن‌آنکه برخودش ویك قابل قسمت است براعداد دیگری نیزقابل قسمت است . همهٔ اینها رامقسوم علیه های‌آن عدد می‌گویند . پس از این مقدمه می‌توان عددکامل را چنین تعریف کرد : عددکامل عددی است که برابرمجموع مقسوم علیه‌های خودباشد (البته به استثناء خود عدد) . مثلامقسوم علیه های عدد ۶، صرف نظراز خودش، عبارتند : ۱و۲و۳، وچون ۳+۲+۱=۶ ، عدد ۶ را عددکامل می‌گویند . دومین عددکامل ۲۸ است چه:

$$۲۸=۱+۲+۴+۷+۱۴$$

تاکنون دیده نشده است که‌عدد فردی عددکامل باشدولی ثابت هم نشده است که چنین چیزی ممکن نیست .

اقلیدس ثابت‌کرده است که به ازاء هرعدد صحیح که به جای n بگذاریم هرعددی به شکل $(۲^n-۱)۲^{n-۱}$ عددکامل است به شرط آنکه $۲^n-۱$ عدد اول باشد .

تاکنون معلوم شده است که $۲^n-۱$ به ازاء ۳۰ عددکه به جای n گذاشته شود عدد اول است . بنابراین تاحال ۳۰ عدد کامل شناخته شده است . بیستمین عددکامل برابر :

$(۲^{۲۴۴۲۲}-۱)۲^{۲۴۴۲۱}$ است . عددکامل بلافاصله کوچکترازاین ، یعنی‌نوزدهمین عدد،عبارتست از $(۲^{۲۴۲۵۳}-۱)۲^{۲۴۲۵۲}$. نوزدهمین عددکامل دارای ۲۵۶۱ رقم و بیستمین عددکامل دارای ۲۶۶۳ رقم می‌باشد . نخستین ۶عددکامل عبارتند از :

۶ ؛ ۲۸ ؛ ۴۹۶ ؛ ۸۱۲ ؛ ۳۳,۵۵۰,۳۳۶ ؛ ۸,۵۸۹,۸۶۹,۰۵۶

نمی‌دانیم که این توضیحات شامل آنچه شما خواسته‌بودید هست یانه ؟

***

سؤال ـ درشمارهٔ ۹ ضمن‌مقالهٔ «آیامی‌دانیدکه» نوشته شده‌است که‌عدد π رابامامشین IBM سیستم ۷۰۹۰ تا ۱۰۰۲۶۵

رقم بعدازممیز حساب کرده‌اند . من می‌خواهم بدانم که چگونه π را باماشین محاسبه می‌کنند . زیرا درهندسه خوانده‌ایم که π را با محیط کردن و محاط کردن چند ضلعی بر دایره محاسبه می‌کنند.

(فرامرز خسروی)

جواب ـ درمحاسبهٔ π تا ۱۰۰۲۶۵ رقم بعد ازممیز، به وسیلهٔ ماشین IBM ، فرمول زیر که توسط **کارل ستورمر** Carl Stormer در ۱۸۹۶ عرضه شده به‌کاررفته است .

$$\pi = 24\,tg^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) + 8\,tg^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) + 4\,tg^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

(tg^{-1} رابخوانید آرکتانژانت)

ضمناً این محاسبه به وسیلهٔ محاسبهٔ دیگری با به‌کاربردن فرمول **گوس** Gauss که چنین است امتحان شده است :

$$\pi = 48\,tg^{-1}\left(\frac{1}{18}\right) + 32\,tg^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) - 20\,tg^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

سؤال ـ این‌جانب توانسته‌ام دترمینانهایی ابداع کنم که حاصل آنها صفر است. آیا در ریاضیات ، فیزیك و شیمی چنین دترمینانها می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند .

(مصطفی جمهری)

جواب ـ منظورشمارا ازاینکه دترمینانهایی ابداع فرموده ایدکه حاصل آنها صفر است نفهمیدیم . البته شما به خوبی می‌دانیدکه دترمینانهایی هستندکه حاصل آنها صفر است . مثلا دترمینان $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ حاصلی برابرصفر دارد . چنانچه شما برای صفربودن حاصل دترمینان قاعده‌ای کلی به دست آورده‌ایدموضوعی جالب توجه ودرخور تعمق است . لطفاً دراین‌باره توضیح بیشتری مرقوم فرمایید یا بادفترمجله تماس حاصل فرمایید .

****

عمل غلط ، اما جواب صحیح

۱ـ به این دو کسر نگاه کنید :

$$\frac{26}{65} \quad و \quad \frac{16}{64}$$

اگر ۶ هارا ازصورت و مخرج آنها حذف کنیم (که عملی‌است غیرمجاز) ، دو کسر به‌این ترتیب به دست می‌آید :

$$\frac{2}{5} \quad و \quad \frac{1}{4}$$

به ظاهراین دو کسر نباید بادو کسر بالا مساوی باشند ولی‌آن دو کسر را ساده کنید ! خواهید دید که

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad و \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} \quad (!!)$$

***

۲ـ به این کسر نگاه کنید :

$$\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$$

اگرقوای ۲ را ازصورت ومخرج حذف کنیم (عمل غیرمجاز) ، کسر تبدیل به

$$\frac{1+x}{1-x}$$

می‌شود که برابر کسراول است !! .

آیاشماهم می‌توانید چنین کسرهایی بنویسید ؟

از جمله‌نامه‌های رسیده

... هرسال که می‌گذرد بر تعداد مشتاقان علم و معرفت که پشت‌درهای دانشگاه به انتظار ایستاده‌اند، افزوده می‌گردد و عجیب آنکه هرچه سال به سال رقم داوطلبان تحصیلات‌عالی بالا می‌رود ، رقم پذیرفته شدگان در دانشکده‌ها پائین می‌آید. فی‌المثل ، هم اکنون در دانشکده‌های علوم و ادبیات اصفهان که شامل بیش‌از ۱۰ رشته می‌باشد، مجموعاً حدود ۱۰۰ دانشجو تحصیل می‌کنند .

هرسال ، گروهی از جوانانی‌که آیندهٔ کشور را تشکیل می‌دهند و به تسدیق سابقه تحصیلات و مدارك رسمی خود ، از محصلین ساعی و خوب دبیرستان می‌باشند با اتکاء به معلومات وتجارب‌خودو با امید به‌موفقیت ، درامتحانات ورودی‌دانشگاه شرکت می‌کنند و بعداز اعلام نتیجهٔ کنکور و عدم موفقیت ، خشم خود را نسبت به علم ، به هرصورت و در هرجا ، ابراز می‌دارند. چرا؟ علت‌واضح است ؛ هرسال شیوهٔ امتحان‌ورودی دانشگاه عوض می‌شود و هر بار روش تازه‌ای اتخاذمی گردد که احتمالاً دربسیاری ازموارد اشتباه است به دلیل آنکه، سال‌بعد روش دیگری جانشین آن می‌شود.

خواهشمندم ازاولیاء امور بخواهید اولاً یك روش‌دائمی برای‌کنکور پیش‌بینی‌کنند . ثانیاً اقلا شش ماه قبل از کنکور، طریقهٔ امتحان و نوع آن را ابلاغ‌کنند تا داوطلب که باروش امتحانات‌دبیرستانی‌عادت کرده‌است برای‌آمادگی‌جهت‌روبه‌روشدن باروش امتحانی نوع دیگر وقت‌کافی داشته باشد...

شعله‌پایدار- دیپلمهٔ ریاضی ، اصفهان

قسمتی‌ازنامهٔ خوانندهٔ محترم اصفهانی درج شد . امیدواریم مسئولان‌محترم‌کمیتهٔ بررسی امتحانات ورودی دانشگاه به‌درد-دل این خوانندهٔ عزیز که زبان‌گویای هزاران نفر امثال خود شده‌است توجه‌کرده سئوالهایی‌راکه درگذشته به‌عنوان تست از داوطلبان پرسش شده است، اقلاً برای یك‌باردر معرض‌قضاوت خبرگان قرار دهند تا در آتیه‌کمتر باچنین اعتراضاتی مواجه شوند و به احتمال‌زیاد باوجودآمدن تستهای مشابه ،داوطلبان کنکور به‌نحو مطلوب هدایت شده باشند.

***

آقای محمودخوش‌انس خواسته‌اند درهرشمارهٔ‌مجله، سؤالهایی به صورت تست و نظیر سؤالهای امتحان ورودی دانشگاه چاپ شود .

تاکنون ، باوجودآنکه صحبتهای زیادی دربارهٔ‌نامتناسب بودن تستهای امتحان‌ورودی دانشگاه واحیاناً غلط بودن آن‌از نظر اصول تست‌سازی‌شده‌است ، تستهای امتحان ورودی‌دانشگاه را منتشر نکرده‌اند . ما انتظار هستیم از طرف مسئولان مربوط توضیحاتی دریافت داریم تا با اطمینان به مفیدبودن تستهایی که تنظیم می‌کنیم ، به این عمل ، خالی از هرگونه اشتباه، اقدام کنیم .

***

آقای کامیار نیکپور راه‌حل تضعیف مکعب را منوط به تعیین‌نقطهٔ‌تلاقی‌دوسهمی‌دانسته‌وازاین‌راه‌مسئله‌راحل‌شده‌انگاشته‌اند مقصوداز تضعیف مکعب وهمچنین‌تثلیث‌زاویه‌وتربیع‌دایره، حل هندسی‌مسئله به‌کمك‌خط‌کش‌وپرگارمی‌باشد. رسم سهمی با تقریب میسر است و نمی‌تواند به‌عنوان حل مسئله قبول شود و ناگفته‌نماکه‌ریاضیدانهای‌قدیم بسیاری از مسائل را از راه رسم سهمی و سایر مقاطع مخروطی‌حل‌می‌کرده‌اند.

***

آقای **محمدهاشم‌پسران** از شیراز راجع به حل مسئلهٔ ۱۴۴۵ مذکور در شمارهٔ ۸ مجله ایرادگرفته و ضمن راه حل پیشنهادی خود از رابطهٔ

$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^6+\alpha^3+1)=0$$

نتیجه‌گرفته‌اند که‌چون $\alpha\neq 1$ است پس هم $\alpha^2+\alpha+1=0$ وهم $\alpha^6+\alpha^3+1=0$ می‌باشد

اگر حاصل‌ضرب چند عامل برابر باشد ایجاب می‌کند که اقلاً یکی‌از آن عاملها برابر صفرباشد . حکم اینکه همهٔ آن عاملها باهم برابرصفراند تناقض پدیدمی‌آورد .

***

عده‌ای از خوانندگان محترم‌خواسته‌اند تا درشماره‌های یکان: مجله‌های ریاضی‌چاپ‌کشورهای مختلف‌معرفی شودتاآنها که طالب مطالب تازه در جهان دانش هستند وسیلهٔ تهیهٔ این نشریات را به‌دست آورند .

تا آنجاکه ممکن باشد برای معرفی اینگونه مجله‌ها ؛ که‌تعدادآنها بیش از هفتصداست، درشماره‌های آیندهٔ یکان اقدام خواهد شد.

***

آقایان **جعفر مهدوی** ازفرهنك‌بندرگناوه ؛ **مجیدعلیزاده** از قلیك ؛ **میرکمال‌میرنیا** ازتهران قواعدی‌برای‌تعیین‌قابلیت تقسیم بربعضی از اعداد ارائه داده‌اند که اغلب راههای آنها مشابه می‌باشد .

بااستفاده از همنهشت‌ها قواعد تازه‌ای توسط دانشمندان وضع شده است که‌درشماره‌های آیندهٔ‌یکان بیان‌خواهدشد.

یکان سال

به‌تصمیم شورای نویسندگان یکان، در پایان هرسال شمارهٔ فوق‌العاده‌ای به‌نام:

یکان سال

منتشر می‌شود. نخستین شمارهٔ «یکان سال» در اسفند ماه ۱۳۴۳ منتشر خواهد شد

یکان سال یکان سال

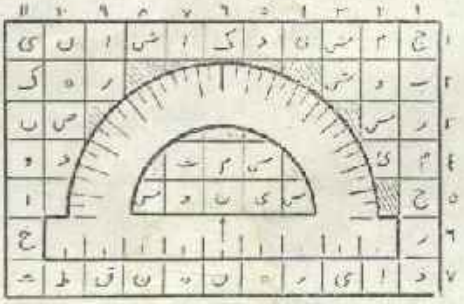
یکان سال

یکان سال

حل جدولهای صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۹

a	b^2	a^2b
a^2b^2	ab	۱
b	a^2	ab^2

جدول وفقی حرفی



جدول کلمات متقاطع

روش تدریس حساب و هندسه

در دبستان (۲جلد)

تألیف

جهانگیر شمس آوری دکتر غلامحسین شکوهی

بهای ۲ جلد ۸۰ ریال

از انتشارات: ایران ـ مک گروهیل

خیابان تخت جمشید ـ پلاک ۲۸۲

رسم فنی

برای رشتهٔ ریاضی

دارای ده‌ها مدل آموزنده

تألیف

مهندس امیر صدری مهندس افتخاری

بها ۶۰ ریال

از انتشارات: ایران ـ مک گروهیل

خیابان تخت جمشید ـ شمارهٔ ۲۸۲

بر گنجینهٔ معلومات ریاضی خود بیفزایید .

چطور ممکن است که چیزی را از وسط به دو قسمت کنیم وباز یکپارچه باقی بماند ؟

آیا تا کنون به کاغذی که فقط یك رو داشته باشد برخورده‌اید ؟

آن چه بطری است که تمام دنیا درآن جا می گیرد؟

پاسخ این پرسشها وده‌ها مطلب جالبتر وآموزنده‌تر دیگررا در کتاب

توپولژی

هندسهٔ صفحهٔ لاستیکی

ترجمهٔ جلیل‌الله قراگوزلو

خواهید یافت . دراین کتاب شما باهندسه‌ای آشنا می‌شوید که اندازه درآن مطرح نیست .

نخستین کتاب ازسلسله کتابهای :

آنچه تا کنون می‌دانستیم این بود که کل هر چیز از جزء آن بزرگتراست . این طورنیست ؟

اما باید بدانید که همیشه این چنین نیست. گاهی جزء یك چیز با کل آن مساوی است .

برای آنکه به این راز وبا زبان ریاضیات جدید آشنا شوید کتاب

مجموعه‌ها

و

جبر ، هندسه ، منطق

ترجمهٔ ایرج ادیبی

را بخوانید. دراین کتاب شما خواهید آموخت که چگونه می‌توان همهٔ رشته‌های ریاضیات را وحدت داد.

دومین کتاب ازسلسله کتابهای :

«کاوش درریاضیات نوین»

ازانتشارات :

ایران ـ ملك گروهیل

سازمان انتشارات وخدمات فرهنگی

خیابان تخت جمشید ـ چهارراه روزولت ـ شمارهٔ ۲۸۳

تلفن : ۷۵۶۸۶۳