یکان

۱۳

مجلّه ریاضیات

در این شماره :

کارنامهٔ یکشنبه یکان	عبدالحسین مصحفی	۱
مسائل افسانه‌ای	سید محمد کاظم ذاکیانی	۳
رنگ آمیزی نقشه	ترجمهٔ وارتان وارتانیان	۹
تعیین اعداد فیثاغورثی	خلیل صدیق ارشادی	۱۴
چرا تثلیث زاویه ممکن نیست	ترجمهٔ مهدی بهشم	۱۶
یادی از حسین هورفر	—	۱۸
نکته‌ای از درس و خارج از درس	ناظر امامی	۱۹
حل مسائل شماره‌های ۷ و ۱۱	—	۲۱
مسائل برای حل	—	۳۶
مسائل فیزیک و شیمی	—	۴۲
مسائل برای دانش‌آموزان و دانشجویان	دکتر محسن هشترودی	۴۴
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی	ایرج ارطاقی	۴۵
اشتباه از چیست	—	۴۶
پرسش و پاسخ	—	۴۹
سرگرمی	—	۵۲
از جمله نامه‌های رسیده	—	۵۳ و ۵۶

سال یکم ـ شمارهٔ سیزدهم

اسفندماه ۱۳۴۳

بها : ۳۰ ریال

انجمن معلمان ریاضی

صفحهٔ ۴۳ مطالعه شود

مبانی ریاضیات جدید

موضوع سخنرانی استاد گرامی جناب آقای

دکتر محسن هشترودی

روز دوشنبه ۲۴ اسفند ساعت ۵ بعدازظهر در تالار

دبیرستان رضاشاه کبیر (تالار فرهنگ)

انجمن معلمان ریاضی از همهٔ همکاران ارجمند تقاضای شرکت در این برنامه را دارد. ورود برای عموم آزاد است

یکان سال

برای اینکه مجموعهٔ حل مسائل نهایی با بهای مناسبتر بدست محصلین برسد، یکان سال در دو جلد جداگانه منتشر می‌شود

جلد اول: مجموعهٔ علمی شامل مقاله‌های جامعی در رشته‌های مختلف علوم و حل چند مسئلهٔ ممتاز و معروف ریاضی

جلد دوم: شامل حل مسائل امتحانات نهایی سال ششم ایران و کشورهای دیگر

هر دو جلد بزودی منتشر می‌شود

قابل توجه مشترکین یکان

برای تجدید اشتراک وجه مربوط را به حساب جاری که در ستون پائین ذکر شده پرداخت و قبض آن را برای ادارهٔ مجله ارسال دارند. (نشانی، صندوق پستی ۲۴۶۳)

از تألیفات هوشنگ شریف‌زاده

پانصد مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای پنجم دبیرستان و داوطلبان کنکور دانشکده‌ها

بها: ۱۰۰ ریال

۴۲۰ مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای چهارم دبیرستان و داوطلبان کنکور دانشکده‌ها

بها: ۶۰ ریال

راهنمای فیزیک

برای کلاسهای سوم دبیرستان

بها: ۳۰ ریال

ناشر: بنگاه مطبوعاتی معراجی

تهران - خیابان ناصرخسرو

یکان

مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ سیزدهم ـ سال اول

اسفندماه ۱۳۴۳

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: عبدالحسین مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان

هرماه یکبار منتشر می‌شود

جای اداره موقت ـ تهران خیابان سربازشماره ۳۵۳

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن: ۷۵۸۵۷۰

اشتراک سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال

تک شماره ۲۰ ریال

حساب بانکی ـ حساب جاری ۶۸۶۳ شعبهٔ فردوسی بانک صادرات

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود

چاپ آذر

به مناسبت جشن ملی و باستانی نوروز ۱۳۴۴
بهترین تبریکات خود را به همهٔ خوانندگان عزیز
به ویژه دبیران گرامی و دانش آموزان عزیز
تقدیم می‌دارد .

شورای نویسندگان

کارنامهٔ یک سالهٔ یکان

با این شماره نخستین سال انتشار یکان پایان می‌یابد . کارنامه گذشتهٔ یکان دوازده مجلدی از آن است که تا کنون منتشر شده است . ارج و مقام روز افزون یکان مؤید راه و روش انتخابی و مبین گذشته‌ای افتخار آمیز می‌باشد . هر چند کارهایی که انجام گرفته همه به جای خود مفید و لازم بوده است اما برای نیل به هدفی که یکان به خاطر آن منتشر می‌شود بسیاری از امکانات فراهم نبوده است : توجه کامل به خواست و علاقهٔ خوانندگان ، وقوف به اینکه اطلاعات بسیاری از جوانان کشور ما حتی دربارهٔ مواردی از ریاضیات که در برنامهٔ آموزشی پیش بینی شده ناقص است ، علم به اینکه اکثریت محصلین ما ، چنانکه بار آمده‌اند ، هدف از تحصیلات را تنها گذراندن امتحان دانسته و عمدهٔ سعی آنان در به‌دست آوردن حدنصاب نمرهٔ قبولی است ، پرهیز از چاپ مطالب تکراری و مطالبی که به‌نحوی در اختیار اکثریت خوانندگان قرار داشته است و بسیاری از امور دیگر موجب بوده است که برنامهٔ گذشته کار یکان انعطاف پذیر و متغیر باشد ..

کار یکان در پانسال گذشته بیشتر مصروف به‌تهیهٔ مقدمات شده است ، و فعلا ، با تجاربی که به دست آمده و با سنجش همه‌جانبهٔ افکار و خواستهای خوانندگان و بالاخره با برآورد میزان احتیاج محصلین ما به مباحث جدید ریاضی و درجه بندی این مباحث از لحاظ تقدم و تأخر به مقیاس الاهم فالاهم ، امکان آن فراهم آمده است که از این پس ، یکان ، آن‌طور که آرزوی مؤسس آن بوده و آن‌طور که سعی دائم آن بر آن است و همان گونه که خواست خوانندگان آن می‌باشد، مفیدتر و مؤثرتر از گذشته و نزدیکتر به هدف مقدس خویش به‌طالبین علم عرضه شود

محققین و نویسندگانی که آثار و نوشته‌های ایشان زیب صفحات شماره‌های گذشتهٔ یکان بوده است همه به اندازهٔ کافی معروفیت داشته وشناخته شده می‌باشند. آنچه آنان را به همکاری همه جانبه ومؤثر وبدون توقع هیچ پاداش مادی با یکان واداشته‌است درحقیقت، عشق وعلاقهٔ وافر ایشان به پیشرفت علم وشوق کامل ایشان در بنای آیندهٔ علمی کشور می‌باشد. علاقمندی این شخصیتها به دانش بشری بهستی نمی گراید و کوشش بی شائبهٔ شورای نویسندگانی که رشد و تکامل یکان را همچون پرورش فرزندی شایسته، برعهده و تحت نظر دارد رخستگی نمی‌پذیرد. از این جهت با اطمینان قطعی می‌توان امیدوار بود که، یکان آینده‌ای درخشانتر وتابناکتر از آنچه انتظار می‌رود درپیش دارد.

استاد گرامی جناب آقای **دکتر محسن هشترودی** که از انتشار یکان ازهیچ نوع کمک مؤثر دریغ نورزیده و مخصوصاً مسائل ایشان تمام شماره‌های گذشتهٔ مجله را ممتاز ساخته است. آقای **جهانگیر شمس آوری** عضو مؤثر شورای نویسندگان که علاوه بر تهیه وتنظیم مقاله‌های مجله، با نوشتن سرمقاله‌های دلنشین زبان گویای همهٔ علاقمندان به بهبود آموزش ریاضیات در ایران بوده است. آقای **باقر امامی** که درهر شماره فصلی از تاریخ علوم ریاضی را باز گو نموده موجبات توسعهٔ اطلاعات علمی خوانندگان را فراهم آورده است. آقای **پرویز شهریاری** که درهر زمینه و درهر مبحثی هر شمارهٔ از مجله را غنی ساخته است آقای **مهدی مدغم** که با ترجمهٔ بهترین مقاله‌ها ارتباط دائمی مجله را با مجله‌های معروف دنیا برقرار داشته است. و بالاخره جناب آقای **احمد بیرشک** و سایر فضلا و نویسندگانی که باهمهٔ گرفتاریهای روزمرهٔ زندگی از ابراز مساعدت در هر موردی کوتاهی نداشته‌اند. مسلماً از این بعدهم بهمکاریهای ذیقیمت خود ادامه خواهند داد، زیرا قصد و نیت همهٔ آنان خدمت به عالم علم بوده و می‌باشد.

درزمینهٔ ارسال مسائل برای مجله کمک دوستداران بیش ازحد انتظار بوده است و در این مورد چه بسیار مسائلی که ازدبیران محترم ودانش آموزان عزیز رشتهٔ ریاضی واصل شده ومناسبتی برای ارائهٔ آن درمجله پیش نیامده است. ذکر نام همهٔ آنهایی که مسئله ارسال داشته‌اند دهها صفحه ازمجله را لازم دارد و در این میان دوست شناس آقای **مهندس عباس سعیدی** بیش از دیگران ابراز محبت داشته است. تشکرما ازهمهٔ دوستداران آن خواهد بود که درپیشرفت وتکامل مجلهٔ محبوب ایشان بکوشیم.

یکان براساس علاقه واعتقاد بنیان شده است وهمچنانکه در گذشته در انتشار مرتب آن هیچ وقفه‌ای حاصل نشد ازاین به بعد نیز بدون هیچ تعطیل مرتباً به دست دوستداران خواهد رسید. نخستین شماره از دومین سال یکان درماه بعد تقدیم خوانندگان عزیز خواهد شد.

عبدالحسین مصحفی

مسائل افسانه‌ای

تضعیف مکعب — تثلیث زاویه — تربیع دایره

سیدمحمد کاظم نائینی

از قرن ششم‌وپنجم قبل ازمیلاد سه‌مسئلهٔ مهم ریاضی‌افکار ریاضیدانان‌جهان رابه خود مشغول داشته‌و مغزهای‌بزرگترین متفکران را در اعصار مختلف تاریخ برای حل‌خودبه‌مبارزات پردامنه دعوت‌کرده است ودرطی هزاران سال هر گونه تلاشی راکه برای حلشان معروف می‌شده عقیم گذاشته است.

این‌سه مسئلهٔ مشهورومعظم کهریشهٔ تاریخی آنهابه‌دوران افلاطون‌می‌رسد عبارتنداز :

تضعیف مکعب ، تثلیث‌زاویه ، تربیع‌دایره که شکل‌اصلی آنها درعبارت دیگرچنین است : ساختن مکعبی که حجمش‌دو برابرحجم‌مکعب مفروض باشد؛ تقسیم زاویهٔ مفروضی‌به‌سه‌قسمت متساوی؛ ساختن مربعی‌هم سطح‌دایره‌ای مفروض .

مراحل مختلفی راکه ریاضیات درسیر تاریخی خود از دورانهای باشکوه وافسانه‌ای یونان قدیم تاکمی قبل ازدوران عصرحاضر گذرانده است به‌خوبی درچگونگی حل‌این‌سه‌مسئله کهن‌سال منعکس است. به‌عقیدهٔ بسیاری از دانشمندان ریاضی‌و مورخان وعلمای متدلژی عامل‌اصلی سیرتطور وتحول‌ریاضیات و پیشرفت تدریجی آن دراعصار مختلف زمان همین سه مسئله می‌باشد. هر گونه‌کشف واختراعی درزمینه‌های مختلف ریاضی صورت گرفته صرفاً دراثر تلاش فکری و مبارزات دامنه‌دار اندیشهٔ انسانی به‌منظورحل‌آنها بوده‌است. بسیاری ازدانشمندان معروف جهان شهرت بین‌المللی خویش را درسایهٔ حل‌آنها به دست‌آورده‌اند . تقریباً تمام هندسهٔ یونانی در اطراف این سه مسئله‌رشدکرده است وآنها ضمن‌تلاش وکوشش خودبرای حل آنها بسیاری از مکانهای هندسی ونظریه‌های مختلف مربوط به معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم و مقاطع مخروطی و تعداد بسیاری از منحنیها بادرجات بالاتر راکشف‌کردند.

ریشهٔ کلیه نظریه‌های مختلف مربوط بـه‌معادلات متعالی وهمچنین اعداد غیرجبری(ترانساندان) وهمچنین‌هندسهٔ‌تحلیلی دکارت درهمین مسائل مشهور است.

محتملا دانشمندان قدیم چون یونیان گمان نمی‌کردند که راه حلهایی راکه آنها به‌دنبالشان می‌گشتند وجود ندارد. دشواری وحل‌ناپذیری‌این مسائل آتش اشتیاق آنها را شعله‌ور می‌ساخت وهرچقدر مسئله‌ای مشکلتر وبغرنجتر جلوه می‌نمود حرص ولعشان را بیشتر کرده وآنـان را در رسیدن بـه‌نتیجه راغبتر می‌ساخت ومغزهای بزرگی‌چون فیثاغورث و افلاطون‌و آپولونیوس ، بقراط وارشمیدس را به‌عرصهٔ هندسه می‌کشاند.

سرتاسر تـاریخ علم حکایت از کوششهای طاقت‌فرسای دانشمندان ریاضی درحل این‌سه مسئله افسانه‌ای است وماضمن بررسی‌مختصری ازاین‌کوششهای تاریخی‌چگونگی حل‌ناپذیری این مسائل وفوایدی راکه ضمن حل‌آنها درزمینه‌های مختلف ریاضی عاید شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دو مسئله اول از نظرجبری هم‌ارز معادلات درجهٔ سوم زیرند :

$$x^3 - 2$$

و

$$4x^2 - 3x - a = 0$$

(a یک‌کسرحقیقی است) معادلهٔ اول صورت ساده‌ای از معادلهٔ $x^3 = 2a^3$ و معادله دوم صورت دیگری از رابطهٔ زیراست :

$$4\cos^3\frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} = x\cos$$

مسئلهٔ تربیع دایره تحت فرمول جبری درنمی‌آید. کوششهایی که برای حل این مسئله به‌عمل آمده کلیهٔ کتب ریاضی و سالنامه‌ها را از زمان فیثاغورث تا به‌امروز پر کرده است.

در مورد مسئلهٔ اول دو افسانه موجود است که آنها را **اراتوستن** Eratosthenes (صاحب غربال معروف برای اعداد اول) نقل کرده است:

مردم آتن درزمان افلاطون دوچارطاعونی شدند که اطباء از پیشگیری وعلاج آن عاجز ماندند ناچار به کاهن معبد **دلوس** پناه بردند. وی از خدایان استمداد جست. ندایی ازغیب آمد که تنها راه علاج طاعون تضعیف میز **آپولون** است (مذبحی که به‌شکل مکعب بود) به‌شرط آنکه شکلش تغییر نکند. این مسئله که به‌مسئلهٔ دلوسی معروف است هرچند در صورت ظاهر ساده است ولی مردم ازحل آن عاجز ماندند. مادامی که راه‌حلی برای آن پیدا نشود طاعون بامردم ستیزه خواهد کرد.

افسانه دوم این است که مسئلهٔ تضعیف مکعب به‌وسیلهٔ **Minos** پادشاه کرت مطرح شده است، زیرا برای نخستین‌بار او بود که دستورداد برای دوپسرش دوقبر به‌شکل مکعب بسازند که حجم یکی دوبرابر حجم دیگری باشد، چه‌سن پسربزرگتر دوبرابر سن پسرکوچکتر بوده‌است.

ساختگی بودن این افسانه‌ها وتظایر بیشمارآن به‌خوبی ازشکل ظاهری آنها پیداست واین‌خود دشواری وعظمت واهمیت این مسائل را می‌رساند. به‌جای بیان این‌افسانه‌ها بهترآن است که‌بگوییم ریاضیدانی‌ضمن تعمیم دادن مسئله‌ای ازهندسه‌مسطحه به‌این نکته‌رسیده بودکه برای ساختن مربعی که مساحتش دو برابر مساحت مربع‌مفروض باشد، لازم است‌مربعی به‌قطرمربع مفروض بسازیم.

وبعد ذهنش‌متوجه‌مکعب شده خواسته است ببیند که‌چگونه می‌توان باخط‌کش یااحتمالا پرگار مکعبی ساخت که حجمش دوبرابر حجم‌مکعب مفروض باشد. ودراین‌جاست که تلاش‌برای پیداکردن راه ساده وراه‌حل مشابه بامسئله مربع آغاز شده و افکاروراندیشه بشری به‌بازی گرفته شده است.

قبل‌ازتوضیح‌بیشتر درماهیت‌مسائل و چگونگی کوششهای دوهزارساله و افسانه‌ای دانشمندان، بهتراست نخست مختصری درعلل لاینحلی این مسائل سخن گفته شود.

مشکلات موجود در مسائلی نظیرمسائل سه‌گانه فوق و مسائل دیگر که از زمانهای قدیم به جای‌مانده مربوط به‌ذات خود مسائل‌نیستند بلکه این اشکالات در تعاریف وحدود میدان عملیات وحوزهٔ اصول‌وقرار دادهااست. نهی کلاسیکی که‌استفاده ازهروسیلهٔ دیگری جزخط‌کش وپرگار را برای حل‌مسائل‌فوق ممنوع می‌سازد داغ‌غیرممکن رابرپیشانی حل‌آنها می‌زند. آیا وقتی که‌ما کلمهٔ غیرممکن رادر موردحل‌این مسائل بیان‌می‌کنیم به‌همان‌مفهومی است که‌هر انسان‌تن‌پروری‌برای گریزازاندیشه‌ای یا انجام‌عملی شاق بابیان آن خودرا آزاد می‌سازد؟ یااینکه معادل بامحدودیتی است که برای یك میدان به‌وجودآمده‌است. محدودیتهای قدیمی، دراثر کثرت استعمال، آنقدرجنبهٔ‌طبیعی به‌خود گرفته وبه‌انسان تحمیل شده‌اند که‌فکروراندیشهٔ او را به خطامی‌کشانندواوراحتی‌ازاشاره‌به‌آن‌هم بازمی‌دارد. مثلاوقتی که یونانیان از ساختمان هندسی صحبت می‌کردند، مقصودشان ساختمانی بودکه فقط باخط‌کش وپرگار بنامی‌شود، زیرا اینها ابزار خدایان بودند وکسی حق‌تخطی ازآنها را نداشت‌وبه‌کار بردن وسیله‌ای دیگر ارزش آن‌را نداشت که‌فیلسوف فکرخود رامصروف آن‌دارد. اندیشهٔ‌دانشمندان فقط دراطراف‌کاربامعین دووسیله دورمی‌زد.

مسائلی که فقط به وسیلهٔ خط‌کش حل می‌شوند از نظر هندسه به‌مسائل خطی موسومند واز نظرجبری به‌معادلات درجه اول‌خطی منجر می‌شوند. مسائلی که برای ساختمان آنهاپرگار نیزضروری باشد، ازنظر جبری‌هم‌ارز معادلات درجهٔ دومند.

اگر مسئله‌ای حلش به‌وسیله‌ای جزخط‌کش و پرگارنیاز داشت، دارای حدی بالاتر ازتفکر یك‌دانشمند می‌بود، زیرا دراین‌صورت درجهٔ مسئله بالاتر از درجه۲ است. بدیهی است هرگونه کوشش برای‌حل این قبیل‌مسائل باابزار ناقص‌بیهوده است ودرحدود خط‌کش وپرگار عمل غیرممکن است.

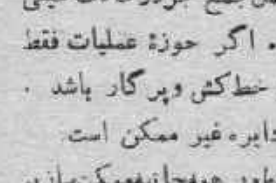
معادلات از درجات بالاتر (بالاتر ازدو) اگر به وسیلهٔ دستکاری قابل تحویل به‌معادلات‌درجهٔ یك یادرجهٔ دوم باشند حلشان و ساختمان تظیرهندسی آنهابه‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار میسراست ولی‌اشکال اساسی معادلات درجهٔ سومی که‌ازتضعیف مکعب و تثلیث زاویه به‌دست می‌آیند آن است که این معادلات تحویل‌پذیر نیستند (به‌مقالهٔ تثلیث زاویه درهمین شماره رجوع کنید.) پس به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار حل‌آنها ممکن‌نیست. ولی تاسه‌قرن قبل ازما این‌حقایق معلوم نبود ودرحدود دوهزارسال این‌سه‌مسئله به‌وسیلهٔ‌مغزهای متفکر ریاضیدانان موردحمله قرار گرفته بود وتا به‌امروز هم‌حتی اشخاصی حرفه‌ای هستند که هنوزنمی‌دانند که‌درحدود دوقرن‌است که‌این‌مسائل‌ازنظرریاضیات حل‌شده وبه‌دوران اقتدار آنها خاتمه داده‌شده است.

اصولا اصطلاحات ممکن وغیرممکن وبی‌معنی آن‌طور که درهندسه وسایر قسمتهای مختلف ریاضی به‌کار برده شده‌اند دارای معانی مطلق نیستند ودرهرمورد باید همراه این کلمات حوزهٔ مفروضات وحدود معلومات ونوع ابزار وادوات که‌برای

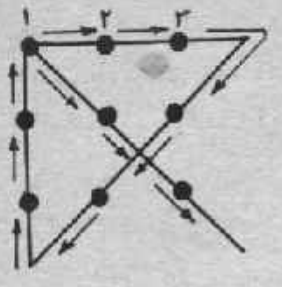
اثبات یا یك ساختمان هندسی ضروری است قیدشود. غیرممکن بودن تقریباً همیشه نتیجهٔ محدودیتی است که جزء مفروضات بیان می‌شود، اما بعضی از این محدودیتها چنان مأنوس انسان شده وبه‌وسیله‌سنتها تضمین گردیده است که همگان آنها را وحی‌منزل دانسته وعدول از آنها را خطایی بزرگ تصور می‌کنند . اگر محدودیتها را کنار بگذاریم ، غیرممکن، ممکن می‌شود . در مورد این سه‌مسئله نیز امر بدین‌منوال است.

همواره اعمالی که درریاضیات صورت می‌گیرد یامسائلی که در مباحث مختلف طرح می‌شود ، عموماً تحت شرایط‌خاص واصول‌قراردادی‌وحوزه‌های‌مفروض ومحدودی هستندکه بن‌بست استدلال وامکاناتتندولی‌هرآن‌باتغییراصل ومبنا وتوسعهٔ‌معلومات وگسترش حوزهٔ مفروضات می‌توان امکانات را تاحد دلخواه افزایش داد ومراتب را به‌نحوی دیگر مورد بررسی قرارداد. همیشه تغییر اصل‌وقرارداد و توسعهٔ حدومرز مفروضات به‌وسیلهٔ افراد مبتکر وتاجرئت وتا اندازه‌ای جسور صورت می‌گیرد . ریاضیدانان عادی واسیر قیدوبند ومحدودات ، اغلب بر پیشانی بسیاری از امور داغ‌غیرممکن را می‌کوبند .

به‌عنوان مثال وروشن شدن موضوع بذکر دومسئله‌ساده که‌معمولا درمجلات به‌عنوان معما ذکرمی‌شود می‌پردازیم: ۹ نقطه درسه سطر وسه‌ستون به‌شکل مربع قرار دارند (شکل۱) باچهار خط‌متقاطع این۹نقطه را به‌هم‌وصل کنید به‌شرط‌آنکه قلم ازروی کاغذ برداشته نشود ورسم هرخط تکرار نشود : غیراز سه‌فرش چهار خط ، برنداشتن‌قلم، وعدم تکرارخطوط، چهارچوب شکل ظاهری مسئله نیز درحل‌آن‌اشکال ایجاد کرده است‌و مشکل اصلی‌برای حل مسئله همین‌است. بدیهی است مادامی‌که درچهارچوب این مربع محصور شده‌ایم و افکارمان از حدود آن تجاوزنکند مفروضات مذکور برای‌حل‌مسئله کفایت‌نمی‌کند وحل‌آن‌غیرممکن‌است‌ولی‌اگر کسی‌جرئت‌کندوازچهارچوب‌شکل مسئله یعنی ازحدود مربع تجاوز نماید مسئله را به‌سهولت حل می‌کند .


ش ۱

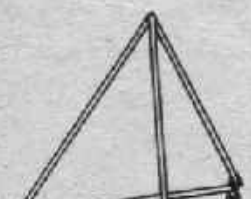
ازنقطه ۱ شروع کنید (شکل۲) به‌سمت نقطه ۳ و ازآن خارج شده در جهت قلش زاویه‌ای بسازید . باچهار خط طبق مفروضات نه‌نقطه به‌هم وصل‌می‌شود. مسئلهٔ‌دیگر مشهورتراست. با۶ عدد چوب کبریت چهار مثلث متساوی الاضلاع بسازید : ۶ چوب‌کبریت را در صفحه میز بریزید وکوشش‌کنید تامسئله



ش ۲

را حل کنید . حل مسئله در صفحه امکان ندارد . مادامی که افکار شما درصفحه‌اسیر قید محیط‌دوبعدی است حل مسئله‌غیر ممکن است‌ولی بمحض‌آنکه افکار خودرا ازصفحه خارج کرده وارد فضای سه‌بعدی کنید مسئله به‌سهولت حل می‌شود یعنی می‌توان باساختن هرم مثلث‌القاعده (چهار وجهی منتظم) مسئله راحل‌کرد (شکل۳) .

کلیهٔ کشفیات و اختراعات در اثر همین جهش وخروج ازحوزهٔ مفروضات است، اگر حوزهٔ عملیات را محدود به‌اعداد صحیح‌کنیم، مسلماًوجود عبارت $\frac{a}{b}$ چنانچه a مضرب b نباشد ، غیر ممکن است . برای یك میدان محدود به مجموعهٔ معینی از اعداد مثلا اعداد از ۱ تا ۱۰۰ اعمال ۵۲+۶۸ و ۷×۴۳ غیر ممکن است. اگرحوزهٔ عملیات‌فقط‌محدود به اعداد مثبت باشد ، هرگاه b بزرگتر از a باشد، $b-a$ غیر ممکن است واگر حوزه مفروضات محدود باعداد منطق باشد ، اگر a


ش ۳

توان nام عددی نباشد $\sqrt[n]{a}$ غیرممکن‌است. درحوزهٔ مفروضات واصول هندسهٔ اقلیدسی اگر طی یك سلسله استدلال و براهین منطقی تضاد حکمی را بااصل معروف (از یك نقطه خارج یك خط بیش ازیك خط بموازات آن نمی‌توان رسم کرد) (یا دو خط بیش ازیك نقطه تلاقی ندارند) ظاهرسازیم حکم غیرممکن تلقی خواهد شد . اگر میدان عمل محدود به اعدادفرد باشد، عمل‌ضرب امکان دارد ولی در این میدان عمل‌جمع‌تقریباً غیر ممکن‌است، چه مجموع‌دوعدد فرد فردنیست. اگرمیدان‌محدود به‌اعداد اول‌باشد،ضرب غیرممکن وعمل‌جمع جزدرحالات‌خیلی نادر ممکن نخواهد بود . و بالاخره اگر حوزهٔ عملیات فقط محدود به کارکردن با ابزاری چون خط‌کش وپرگار باشد . تضعیف‌مکعب ، تثلیث‌زاویه ، تربیع دایره غیر ممکن است.

اگربخواهیم کلیهٔ عملیات را به‌طور همه‌جانبه‌ممکن‌سازیم باید هرگونه محدودیتی راکنار بگذاریم و حوزهٔ مفروضات و معلومات خودرا گسترش دهیم.

پس ممکن بودن وغیر ممکن بودن ، بی معنی بودن و یا معنی بودن هر یك دارای مفهوم نسبیند وهیچ یك از آنها خاصیت ذاتی عمل نیستند بلکه ناشی از محدودیتی هستند که انسان خود واردعملیات می کند. اگر سد شکسته شود و میدان عمل گسترش یابد غیرممکن پس می‌رود ودنیایی دیگر ظاهر می گردد وتمام اعمال ممکن و ساختمانهای مختلف هندسی بصورت همه جانبه ممکن می‌شود .

چنانکه گفتیم مسئلهٔ تربیع دایره با دو مسئلهٔ دیگر این فرق رادارد که تحت فرمول جبری درنمی آید. ارشمیدس نخستین کسی بود که متوجه شد که اشکالی که هست در تعریف است وچنین بیان داشت که این مسئله هم ارز تعیین عدد π است، زیرا سطح دایره‌ای بشعاع واحد برابر π واحد مربع است اگر عدد π بتواند بشکلی دیگر بیان شود مسئلهٔ ساختن مربع معادل سطح دایره حل می‌شود .روش ارشمیدس درحل این مسئله این بود که فرض کرد محیط دایره بین دو دسته کثیر الاضلاع منتظم قرار گرفته است که دسته‌ای محاط دردایره ودستهٔ دیگر محیط بردایره‌اند او کار را با ۶ ضلعی شروع کرد وبادو برابر کردن اضلاع آن به کثیر الاضلاعهای ۹۶ ضلعی رسید .

ماوقتی که ازسطح کثیر الاضلاع صحبت می کنیم عبارت خود را بادقت بیان می کنیم اما وقتی که ازسطح محصوردریك منحنی صحبت می کنیم مقصود چیست ؟ گرچه می‌توان خطوط کثیر- الاضلاعها را براین سطح محیط ویا درآن محاط کرد واز حد بالا ویا ازحد پائین چنین سطحی گفتگو نمود ، اما خود اندازهٔ سطح را جز بادرنظر گرفتن تعریف ومفهوم بینهایت وحدتعریف کرد . ارشمیدس می‌دانست که اگر طول محیط کثیر الاضلاعهای محاطی وطول محیط کثیر الاضلاعهای محیطی هر یك رشته‌ای بوجود آورند وهرگاه عمل تا بینهایت ادامه یابد ، این دو رشته حد مشترکی دارند که همان محیط دایره است .

برروی این مسئله بود که ارشمیدس توانائی روش افناء Exhaustion راآزمایش کرد وباتیزهوشی خود عدد π را حدمشترك دورشتهٔ متشکل ازمحیط کثیر الاضلاعهای محیطی ومحاطی بردایره‌ای به شعاع ۱، بین $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ تخمین زد .

وضع نظریهٔ افناء برجسته ترین کار ریاضی ادوکسوس است که درحقیقت نخستین کار درحساب مقادیر بینهایت کوچك infintesimal است و مبنای عمل وی برروی مفهوم دقیق حدقرارداشته است به این ترتیب باید ادوکسوس (۴۰۸ یا ۳۵۵ ق م) را یکی ازبانیان دورهٔ حساب انتگرال و دیفرانسیل دانست .انتگرال گیری ازسطوح ساده درزمان وی صورت گرفته است . انتیفون Antiphon معاصر سقراط ، برای حل مسئلهٔ تربیع دایره باتکیه نظریهٔ افنا راهی مشابه باروش ارشمیدس ارائه داده است . نوع استدلال اوچنین است: کثیر الاضلاع منتظمی را، مثلا مربع ، دردایرهٔ مفروض محاط می کنیم پس ازآن برروی هرضلع آن مثلث متساوی الاضلاعی می سازیم که رأس آن بر روی دایره باشد . بدین ترتیب ۸ ضلعی منتظمی بدست می آوریم چون بهمین ترتیب پیش رویم کثیر الاضلاعهای منتظم ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ ضلعی حاصل می‌شود وبدین ترتیب شیرهٔ سطح دایره کشیده می‌شود (افنا) . در حقیقت چنان است که دایره راتربیع کرده باشیم . سطح کثیر- الاضلاعها رفته رفته بزرگ می‌شوند ولی نمی‌توانند ازحد معینی که سطح دایره است بزرگتر شوند . این روش را ارسطو و مفسران او بدین قرار مورد انتقاد قرار دادند که هراندازه هم عدهٔ اضلاع زیاد شود باز هم سطح کثیر الاضلاع مساوی سطح دایره نخواهد بود **بریسون Bryson** شاگرد سقراط درنیمهٔ اول قرن چهارم کارهای انتیفون را تکمیل کرد. بدین ترتیب که کثیر الاضلاعهای محیطی بردایره‌ای رسم کرد که انتیفون در آن کثیر الاضلاعهای محاطی رسم کرده بود. پیداست که اختلاف سطح این کثیر الاضلاعها هرچه شمارهٔ اضلاع زیادشود درو به نقصان می‌رود وسطح دایره حد بالای کثیر الاضلاعهای محاطی وحد پایین کثیر - الاضلاعهای محیطی است .

روش بروسون نیز مانند روش انتیفون مورد انتقاد ارسطو و دیگران قرار گرفت و خالی از نقص هم نبوده است ، ولی چنانکه بیان داشتیم همین روش که مبتنی بر اشراق است پایه و مایه روش افناء وشیره کشی یا طریقهٔ حدی و همچنین ریشهٔ حساب جامعه و فاصله بود . و همین روش بود که مورد استفاده ارشمیدس قرار گرفت ومذکور افتاد واو عدد π را بین $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ معین کرد. در طول هزار و هشتصد سال بعد ازارشمیدس مسئلهٔ تربیع دایره پیشرفت زیادی نکرد وراه حلهای عجیب و غریبی نیز توسط مربع سازان منتشر شد و اندازه‌های تقریبی فراوانی برای عدد π پیدا کردند که ازهمه جالبتر $\sqrt{10}$ است. این مقدار در قرون وسطی بسیار مورد استفاده قرار گرفت و برای تکمیل کار ارشمیدس و اصلاح مقادیر تقریبی وی برای عدد π نیز اقدامات زیادی به عمل آمد واز آن میان کثیر الاضلاعهای محیطی و محاطی ۳۹۳۲۱۶ ضلعی ویت **Viète** ریاضیدان و دانشمند فرانسوی برای بدست آوردن عدد π باده رقم اعشار قابل توجه است .

تاریخچهٔ تعیین عدد π با تاریخچهٔ مسئلهٔ تربیع دایره یکی است وحتی دریونان این مسئله نیز به صورت مسائل افسانه‌ای جزء تاریخ ریاضیات به ثبت رسید .

یهودیان قدیم نسبت محیط دایره به قطر آنرا برابر ۳

می‌دانستند . مصریها اندازهٔ نزدیکتری به مقدار واقعی داشتند. در **پاپیروس ریند** ، ۱۷۰۰ قبل از میلاد ، این مقدار را برابر $۳\frac{۱۳}{۸۱}$ یا $\frac{۲۵۶}{۸۱}$ ذکر کرده‌اند .

استادغیاث‌الدین جمشید کاشانی مخترع کسرهای اعشاری مقداری π ومضارب آن را در اعداد از یك تا نه درجدولی ثبت کرده است واین مهمترین کاراستاد است که عدد π‌را به‌صورت $۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ = \pi$ دررسالهٔ محیطیه‌ذکر کرده است . عدد π تا ۱۶ رقم اعشار متعلق بـه استاد تا چند قرن مورد استفاده قرار گرفت وبی‌رقیب ماند .درسال ۱۸۷۳ یکنفر انگلیسی‌به‌نام**ویلیام شانکر** William Shanker عددπ را تا۷۰۷رقم اعشارحساب کردومقدار اخیر را درغرفهٔ‌ریاضیات قصراکتشافات درپاریس دورتادور طالاری نوشته‌اند

در سال ۱۹۵۲ به‌کمك ماشینهای محاسبهٔ‌الکترونیکی‌عدد π را تا ۳۰۰۰ رقم اعشار حساب کردند ودرنتیجهٔ این محاسبه معلوم شدکه قسمتی ازارقام ویلیام شانکر غلط است ولی هنوز (سال ۱۹۶۵) در قصر اکتشافات پاریس این ارقام را تصحیح نکرده‌اند .

لازم به ذکر نیست‌که این اندازهٔ تقریب برای عددπ هیچگونه فایدهٔ عملی ندارد ولی این‌اعمال‌صرفاً به‌منظوررسیدن به‌مقدار واقعی عدد π وتربیع‌دایره بوده است .

اخترشناس آمریکائی **سیمون نیوکومب** می‌گوید ، ده‌رقم اعشار برای عددπ کافی است که‌محیط زمین راتا یك اینچ تقریب حساب کنیم و۳۰رقم‌اعشار،محیط‌تمام عالم‌قابل رویت را باتقریبی که‌برای‌نیرومندترین میکرسکپها هم غیرتشخیص‌است تعیین‌می‌کند .

عددπ‌با ۱۶ رقم اعشاربه‌خوبی برای تعیین‌محیط‌دایره‌ای که‌شعاعش مساوی‌باقاصلهٔ زمین‌از خورشید باشد با خطائی کمتر ازقطر یك‌مو کفایت‌می‌کندو۴۰رقم اعشارمی‌توان تمام محاسباتی که عملاًمورد نیاز است‌بادقت‌کافی انجام دادحتی‌برای تهیهٔ‌نقشهٔ بهترین هواپیماها همین قدر کفایت‌می‌کند .

از لحاظ‌نظری ممکن‌است تصریح کرد کـه‌این کوششهای طاقت‌فرسابرای‌تعیین‌عدد π نشانه‌ای‌ازدقت‌روشهای ریاضی‌جدید است، وبرای‌اندك‌امیدی است که‌شاید دراعشارهای‌پشت‌سرهم‌عدد پی نوعی ازنظم وقاعده کشف شود و بدان وسیله‌بتوان‌ماهیت عدد π را روشن‌کرد .

دراواخرقرن هیجدهم مسئلهٔ تربیع دایره واردمرحله‌ای کاملاًجدید می‌شود. **لامبر**(Lambert) نشان داد که‌π عددی گویا نیست **ولاگرانژ** ثابت کردکه این عدد نمی‌تواند ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم باضرایب گویا باشد .

درسال ۱۸۴۴ ریاضیدان فرانسوی **ژاك لیوویل** (Jacques Liouville) استاد دانشسرایعالی و پایه‌گذار مجلهٔ‌ریاضیات درمقابل‌آکادمی علوم گزارشی قرائت کرددرمورد طبقهٔ بسیاروسیع مقادیری‌که نه‌جبرند ونه قابل‌تبدیل به‌اعداد گنگ می‌باشند ، وبدین‌وسیله مقادیری‌راک ازنظرماهیت خود نمی‌توانند ریشه‌های هیچ‌یك ازمعادلات جبری باشندارائه داد ؛ ۵۰سال بعد **ژرژ کانتور** (George Cantor) دربرهان جدید برای قضیهٔ لیوویل تئوری اعداد غیر جبری بـه نام **ترانساندان** را برپایهٔ محکمی‌وضع نمود ونشان داکه وسعت میدان این‌اعداد خیلی بیشتر از اعدادجبری است نه‌تنها عدد π وe (پایه‌لگاریتم طبیعی) بلکه اغلب مقادیر لگاریتمها و نسبتهای مثلثاتی ترانساندانتند .

بسط عدد π بشکل کسر مسلسل توسط لامبر در ۱۷۶۱ کشف شدو دارای اهمیت تاریخی است :

$$\frac{۴}{\pi} = ۱ + \frac{۱^۲}{۲} + \frac{۳^۲}{۲} + \frac{۵^۲}{۳} + \frac{۷^۲}{۲} + \frac{۹^۲}{۲} + \cdots\cdots$$

عدم تناوب دراین‌کسر به‌طور قطع نشان می‌دهدکه عدد π ریشه‌معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرائب گویا نیست راین امرخود دال برآن است‌که تربیع دایره تنها به وسیلهٔ خط‌کش وپرکار امکان ندارد وحل این‌مسئله با پشت‌سرهم نوشتن اعشارهای عدد πازنظرهندسی‌ممکن نیست‌این‌مطلب به‌طورقطع به‌مسئلهٔ‌تربیع‌دایره خاتمه‌دادولی‌اشتیاق‌سازندگان مربع‌معادل دایره‌را خاموش‌نکرد وهنوزهم به نظر عده‌ای می‌آیدممکن است عددی جبری باشد. اگرمی‌توانستند این امرراثابت‌کنند ، به‌مربع درآوردن‌دایره که به‌طور رسمی باخط‌کش وپرگار ممکن نبود ،لااقل‌باابزار وآلات‌دیگری‌امکان‌پذیرمی‌شدو اگرچه‌این‌کارارزش‌عملی‌نداشت لااقل‌نقطهٔ اوجی برای‌کوششهای بیهودهٔ دو هزارساله می‌بود.

به‌هرحال جستجوکنندگان نادان هر سال درصدد کشف راه‌حلهای جدید بودند وبرای جلـوگیری از این‌سیل همکاری مزاحم بودکه خیلی قبل از **لیندمان** کـه عدم امکان‌حل مسئلهٔ تربیع دایره را ثابت‌کرد، درسال ۱۷۷۵ آکادمی علوم فرانسه تصمیم گرفت که ازآن پس هرگونه‌اکتشافی‌راکه راجع به‌تربیع دایره و دومسئلهٔ دیگر به‌آکادمی‌داده شود قبول‌نکند. این‌اقدام بسیار باجرئت وجسارت همراه بودچه عدم امکان تربیع دایره درسال ۱۸۸۲ ثابت گردید وهنگامی‌که بالاخره درسال۱۸۷۳ ریاضی‌دان‌فرانسوی **شارل هرمیت** (Charles Hermit) ثابت کردکه عدد e ترانساندان است تا اندازهٔ قابل ملاحظه‌ای

امید مربع سازان به یأس گرائید زیرا ارتباط نزدیکی میان π و همشهود بودواین خودکوششی راکه برای اثبات ترانساندان بودن عدد π بعمل می‌آمد مضاعف کرد و نه سال بعد لیندمان آلمانی آنرا ثابت کرد . بدین ترتیب آنالیز جدید به مسئله‌ای که ازتمام ریاضیدانان اززمان افلاطون به بعد ، بـاج میگرفت پایان داد .

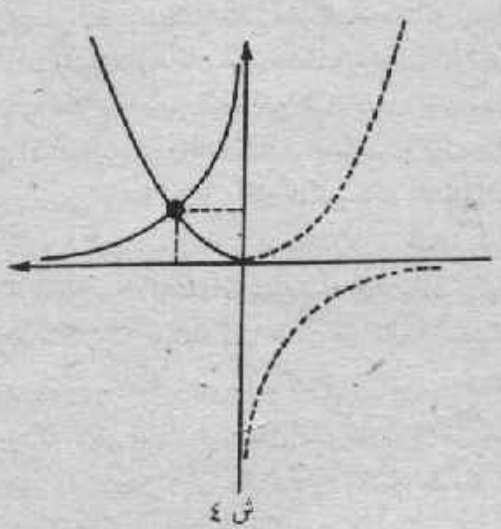
حل مسئلهٔ تضعیف مکعب و به طورکلی معادلهٔ درجهٔ سوم دو جمله‌ای $x^3=2a^3$ رامیتوان به مسئلهٔ دیگری بازگردانید که‌آن نیز شهرتی‌به سزادارد وآن مسئلهٔ درج دو واسطهٔ‌هندسی بین دوطول‌مفروض است منظوراز این مسئله این‌است که هر گاه دو طول a و b مفروض باشند دوطول مانند x و y را طوری بیابیدکه داشته باشیم :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

از این معادلات حاصل می‌شود

$y^2=bx$ و $x^2=ay$ و $xy=ab$. معادلهٔ اول و سوم یکدستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را تشکیل می‌دهند اولی یـك سهمی و سومی یـك هذلولی متساوی‌القطرین (یـا یك منحنی همو گـرافیك) است از تـلاقی این دو منحنی وسایط مطلوب حاصل می‌شود (شکل٤) .

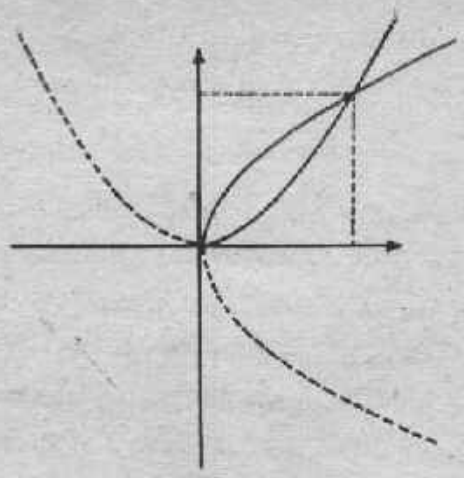
$$\begin{cases} y^2=bx \\ xy=ab \end{cases}$$



ش ٤

دستگـاه معادلـهٔ اول و دوم را نیـز مـی‌توان از طریق ترسیم حل‌کرده و نقاط برخورد دوسهمی را بـه دست آورد (شکل ٥)

درحالت خاص‌که $b=2a$ باشد ، $x^2=2a^2$ که همان معادلهٔ تضعیف مکعب است . بازگردانیدن مسئلهٔ تضعیف مکعب



ش ٥

به درج واسطهٔ هندسی بین دوعدد از مهمترین کارهـای ریاضی **ارخیتـاس** Archytas (تـارنتومی) دوست افـلاطون در سیراکوز است.

ارخیتاس دو واسطه را از تقاطع سه سطح دوار پیدا کرد .محل تقاطع دوتا از این منحنیها (استوانـه وحلقه Tore بـاقطر داخلی صفر) یك منحنی است که انحنای مضاعف دارد . نقطه‌ای که منحنی سطح سوم را که مخروطی قائم است قطع مـی‌کند جواب مسئله را می‌دهد .

این‌نخستین‌بار است که‌درتاریخ ریاضیات‌منحنی باانحنای مضاعف‌مورداستفاده‌قرارمی‌گیرد**منائیخموس(Menaichmos)** شاگرد ادوکسوس ریاضیدان معاصر ارسطو برای‌حل دومعادلهٔ ارخیتاس محل برخورد دو مقطع مخروطی را از دو راه پیدا کرده‌است. یکی دوسهمی‌ودیگری یك‌سهمی ویك‌هذلولی‌متساوی القطرین . شکل هردو راه حل مطابق امروز در همین صفحه رسم شده است .

تاریخ‌نویسان کشف مقاطع مخروطی را بـه منائیخموس نسبت می‌دهند . این شخص مغز متفکری بود که کتاب اصول اقلیدس‌را الهام بخشید واوضمن جستجوی راه‌حلی برای‌تضعیف مکعب به‌این مکانهای هندسی برخورد وبالاخره مسئله را بـا تقاطع دومقطع مخروطی حل‌کرد. جزئیات راه‌حل اوردست نیست ولی یك صورت ممکن دیگر نیز در شکل‌زیر مربوط به حل معادلات درجه سوم دو جمله‌ای به صورت کلی:

$x^3-N=0$ جهت توضیح بیشتر نشان داده می‌شود :

معادلهٔ‌سهمی $y=x^2$ است: نقطهٔ P بمختصات $x=N$ و $y=1$ را در نظر گرفته دایره هائی بـه‌قطر PO رسم می‌کنیم معادلهٔ این دوایر به صورت کلی

$$x^2+y^2-Nx-y=0$$

(بقیه در صفحهٔ ۵۴)

این مقاله بوسیلهٔ گروه آموزش ریاضیات
در دانشگاه شیکاگو از شهر شیکاگو واقع
در ایالت ایلی نویز آمریکا تهیه شده

رنگ آمیزی نقشه

و به خواهش شورای نویسندگان
به وسیلهٔ آقای **وارتان وارتانیان**
به زبان فارسی برگردانده شده است .

مقدمه

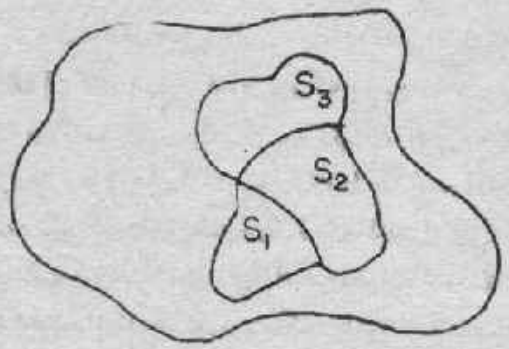
یکی از مشهورترین مسائل حل نشدهٔ ریاضیات عبارت است از مسئلهٔ رنگ آمیزی نقشه . صورت ریاضی این مسئله در حدود کمتر از یک قرن پیش داده شده است .

نقشه‌کشان انگلستان ضمن تجربه‌های متعدد ، مشاهده کرده بودند که برای رنگ کردن حتی متنوع‌ترین نقشه‌های سیاسی بیش از چهار رنگ لازم نیست . تقریباً در سال ۱۸۵۰ این موضوع توجه یک دانشجوی ریاضی ادینبورد را به نام **فرانسیس گوتری** (Francis Guthrie) جلب کرد . وی در این موضوع یک نقشهٔ جالب ریاضی را مشاهده می‌کرد که اثبات آن عملا مقدور بود. گوتری موضوع را با برادرش مورد بحث قرار داد ووی نیز آن را در اختیار **دومورگان** (De Morgan) ریاضیدان و استاد منطق در انگلستان قرار داد. توسط شخص اخیر مسئله در میان سایر ریاضیدانان انگلستان انتشار یافت **وکیلی** (Caylay) بزرگ در سال ۱۸۷۸ توجه انجمن ریاضیدانان لندن را به این موضوع جلب کرد .

تاکنون توضیحات بسیاری درباره مسئلهٔ چهار رنگ، آن طور که نامگذاری شده، داده شده است که به خوبی دانشجویان و معلمان را به مفهوم موضوع مورد بحث وارد می‌کند . هدف این مقاله چیزی دیگر است . روشی که برای توضیح مطلب در اینجا اتخاذ شده است دارای این هدف اصلی است که راههایی را برای برانگیختن قوهٔ خلاقه در کاوشهای ریاضی ارائه می‌دهد. مسئلهٔ فوق مثال بارزی از این موضوع خواهد بود که تکنیک می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای پیشرفت در مسائل و حل آنها باشد. قسمت اعظم این مقاله از یک کتاب روسی به نام **بحثهای ریاضی** که به وسیلهٔ **ای . ب . دین کین** (E . B . Dynkin) و **وی . ا . آسپنسکی** (V.A.Uspenski) نوشته شده ودر مسکو و لنینگراد به سال ۱۹۵۲ انتشار یافته استخراج شده است . این کتاب در واقع بر اساس مطالبی تنظیم شده که به وسیلهٔ یکی از بخشهای انجمن ریاضیات دانشگاه مسکو برای دانش آموزان دبیرستانها تهیه گردیده است .

مسئلهٔ رنگ آمیزی نقشه

یک نقشهٔ سیاسی ، کشورها را به رنگهای مختلف نشان می‌دهد . معمولا لزومی ندارد که کشورهای مختلف دارای رنگهای متفاوت باشند ، بلکه تنها باید دو کشور همجوار ، دو رنگ مختلف داشته باشند . در شکل ۱ کشورهای S_1 و S_2 هم‌مرز بوده وباید رنگهای مختلف داشته باشند، در حالی که کشورهای S_1 و S_2 تنها در یک نقطه مشترکند و می‌توانند هم‌رنگ باشند .

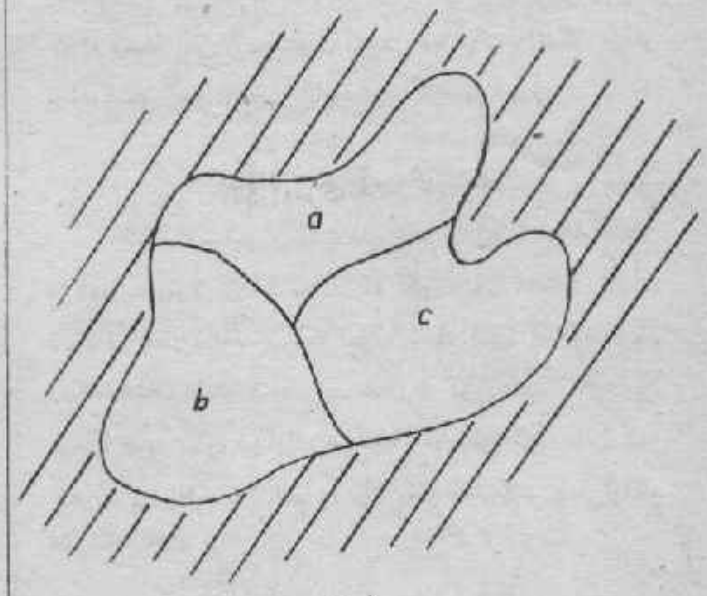


ش ۱

در صورتی که در رنگ کردن یک نقشه هیچ یک از کشورهای هم مرز هم‌رنگ نباشند، می‌گویند که آن نقشه **موزون** رنگ شده است. بنابراین ضمناً این سؤال پیش می‌آید که آیا برای رنگ کردن موزون یک نقشهٔ مفروض چند رنگ متفاوت

لازم خواهدبود ؟ واضح است که‌یك‌پاسخ این سؤال چنین است که‌تعداد رنگهاباید برابر تعداد کشورها موجود در نقشه‌باشد. ولی این‌جواب‌مطلوب‌ما نیست‌چه‌آنچه‌در حقیقت‌سؤال‌شده‌این‌است که **حداقل** چند رنگ برای رنگ‌کردن‌هر نقشه‌ای کافی‌است.

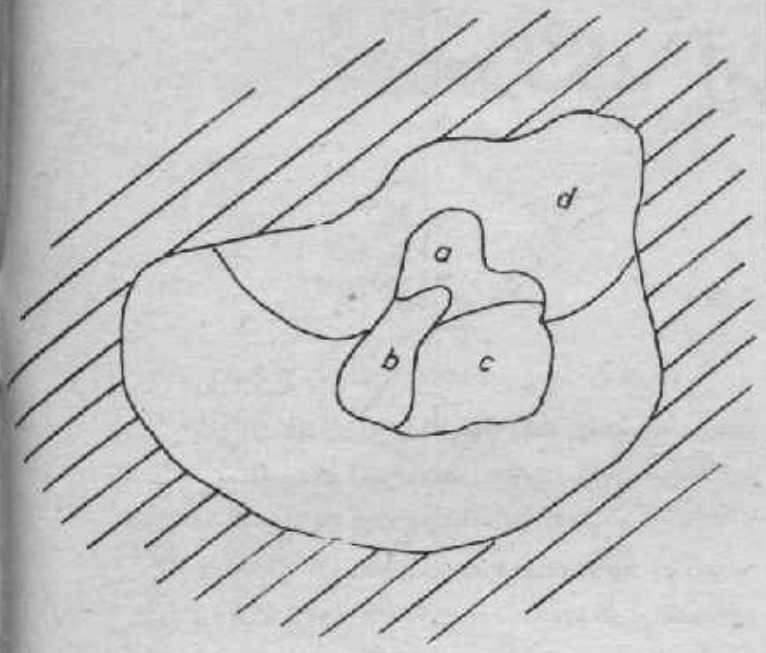
شکل ۲ راکه بیان جزیره‌ای در میان دریاست درنظر بگیرید. برای رنگ‌آمیزی آن چند رنگ لازم است ؟ برای خود جزیره، فقط سه رنگ کافی است و چون دریا در نقشه‌ها دارای رنگ واحدی بوده و تمام‌کشورهای ساحلی باید رنگی جز رنگ دریا داشته باشند ، دریا به منزلهٔ کشور دیگری به حساب‌می‌آید. بنابراین‌برای‌رنگ‌آمیزی‌نقشهٔ۲، روی‌هم ، چهار رنگ لازم است .



ش ۲

حال‌به شکل۳ می‌پردازیم . چند رنگ برای رنگ‌آمیزی موزون آن لازم است ؟ کشور بزرگ پایین را می‌توان از رنگ a زدوسه کشور دیگر را به رنگهای b و c و d رنگ آمیزی‌کرد و دریا را نیز به رنگ b یا c درآورد . پس برای رنگ کردن این‌نقشه چهار رنگ کافی است. ولی اگر کشورکوچکی در داخل ناحیهٔ d و همجوار کشور a باشد،و این کشور وابسته به کشور بزرگ پایین باشد ، همان طور که اغلب در نقشه‌های سیاسی اتفاق می‌افتد ، دیگر نمی‌توان کشور بزرگ پایین را از رنگ a زده چه در این حال آن کشور وابسته وهمجوار a وکشور a هردو دارای یك رنگ می شوند . در چنین صورتی باید رنگ پنجمی برای رنگ کردن کشور بزرگ پایین وآن‌کشور وابسته انتخاب‌کرد. وجودچنین کشورهای‌وابسته ، رنگ آمیزی نقشه رابسیار پیچیده می‌کند.

اما این حالت به مسئلهٔ‌چهاررنگ نقشه ارتباطی ندارد،چه در این‌مسئله‌فرض‌این‌است که‌هر کشوری‌ازیك قسمت‌جدا گانه‌تشکیل یافته است . بااین قرار ، همان طورکه گفته شد، رنگ‌آمیزی موزون نقشهٔ ۳، چهار رنگ بیشتر لازم ندارد .



ش ۳

ازآنچه‌دیدیم معلوم می‌شودکه برای‌رنگ آمیزی موزون تمام‌این اشکال ونقشه‌های دیگری که وجود دارد، چهار رنگ کفایت می‌کند . این نتیجهٔ مبتنی برحدس را ممکن است به صورت زیر بیان‌کرد :

هر نقشهٔ مسطح به وسیلهٔ چهار رنگ به طریق موزون رنگ‌آمیزی می‌شود .

این نظریه‌را می توان باکشیدن نقشه‌ای که برای‌رنگ آمیزی‌موزون آن‌به ۵رنگ یا بیشتر نیازباشد ردکرد . تاکنون کسی نتوانسته‌است چنین نقشه‌ای بکشد . ازطرف دیگر ثابت شده است که برای رنگ آمیزی موزون هر نقشه‌ای ۵رنگ کافی‌است. وبدین ترتیب با مطالب زیرین که ثابت شده‌است با بن بست ناامیدکننده‌ای روبرو می‌شویم :

هیچ نقشه‌ای را نمی‌توان با ۴ رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی‌کرد (شکل ۲) .

هر نقشه‌ای را می‌توان بوسیلهٔ ۵ رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی‌کرد .

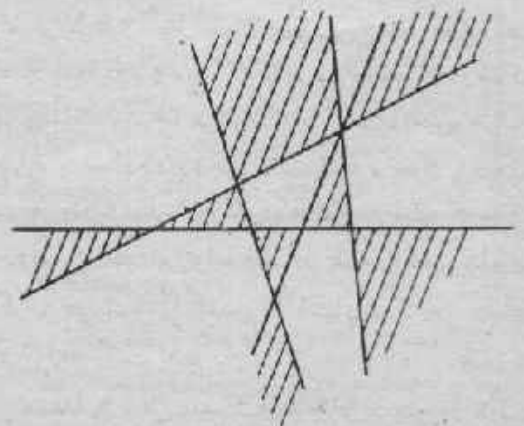
بقیهٔ این مقاله دربارهٔ حالت کلی نیست وتنها مربوط به نقشه‌هایی است که ممکن است آنها را با دورنگ به طریق موزون رنگ آمیزی‌کرد .

چند مسئله و حل آنها

مسئلهٔ اول : هر نقشهٔ تشکیل شده از ترسیم هر چند

خط مستقیم در صفحه را می‌توان به وسیلهٔ دو رنگ ، رنگ آمیزی موزون کرد.

حل : این مطلب را به وسیلهٔ استقراء ریاضی اثبات می‌کنیم (برای درك اثبات به روش استقراء ریاضی به شمارهٔ ۹ مجلهٔ یکان صفحهٔ ٤٠ رجوع کنید) . دو رنگ آبی و قرمز را در نظر بگیرید. نقشهٔ متشکل از یك خط مستقیم در صفحه را با قرار دادن آبی در یك طرف و قرمز در طرف دیگر می‌توان رنگ‌آمیزی موزون کرد . حال فرض می‌کنیم که ثابت شده باشد که دو رنگ برای رنگ آمیزی موزون هر نقشه‌ای متشکل از n خط‌مستقیم کفایت می‌کند . نقشهٔ K را متشکل از $n+1$ خط مستقیم در نظر بگیرید . با حذف یکی از خطوط، نقشهٔ K' متشکل از n خط به دست می‌آید که می‌توانیم آن را بادو رنگ آبی و قرمز به طریق موزون رنگ آمیزی کنیم. حال خط حذف شدهٔ S را دوباره می‌کشیم . در یك طرف خط S کشورهای K را به‌همان رنگی که در نقشهٔ K' داشتند باقی‌می‌گذاریم ودرطرف دیگر آن‌خط تمام رنگهای آبی رابه قرمز و رنگهای قرمز را به‌آبی تبدیل‌می‌کنیم. چون K' رنگ آمیزی موزون شده‌بود، هر دو قسمت K به طریق موزون‌رنگ آمیزی شده‌اند. حال اگرجزئی ازخط S مرز مشترك دوکشور از نقشهٔ K باشد، طبیعتاً این دو باید از تقسیم یك کشور از نقشه K' به‌وسیلهٔ خط S به‌وجودآمده باشند. وچون درنقشهٔ K رنگهای یك طرف S بدون تغییر مانده و رنگهای طرف‌دیگر عوض شده‌اند ،این دوکشور یکی به‌رنگ آبی و دیگری‌قرمز است، بدین‌ترتیب ثابت‌شد که اگرموضوع مسئله‌درباره‌نقشهٔ‌متشکل از n خط صادق باشد ، برای نقشهٔ متشکل از $n+1$ خط نیز صادق است . اینك چون مطلب فوق (موضوع مسئله) در مورد نقشه‌های متشکل از یك خط صادق است ، لازم می‌آید که‌برای نقشه‌های متشکل از۳خط وبعد چهار خط وغیره نیز صادق‌باشد.

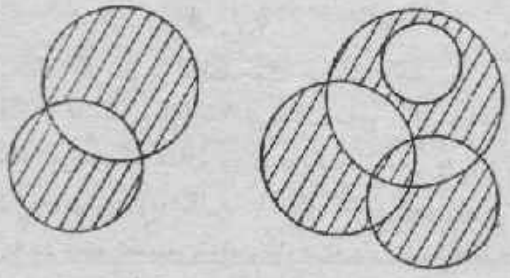


ش ٤

بنابر این هر نقشهٔ متشکل از هر چند خط مستقیم درصفحه را با دورنگ می‌توان رنگ‌آمیزی موزون کرد (شکل ٤) .

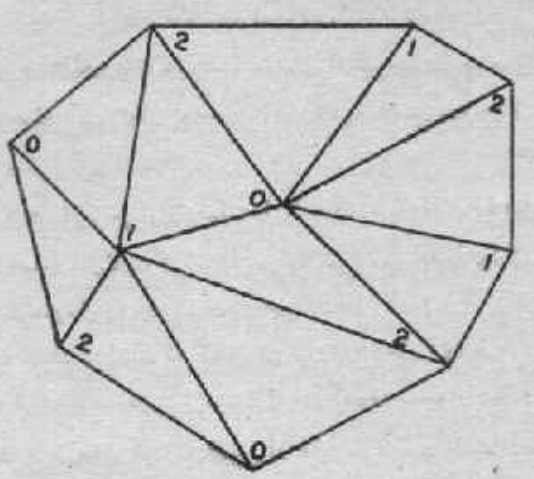
مسئلهٔ دوم : هر نقشهٔ متشکل از ترسیم‌هرچند دایره را در صفحه می توان به وسیلهٔ دورنگ به طریق موزون رنگ آمیزی کرد .

حل : می‌توان حکم را با استفاده از استقراء ریاضی نظیر مسئلهٔ قبل‌ثابت‌کرد، ولی‌برای تنوع، در اینجا به‌استدلال دیگری متوسل می‌شویم : به هر یك از کشورها ، عددی معرف تعداد دوایری که کشور مزبور درداخل آنها قراردارد نسبت می‌دهیم . بدین ترتیب اگر دوکشور همجوار A و B دارای مرز مشترکی که قوسی از دایره C است باشند ، یکی از این دوکشور در داخل C و دیگری در خارج آن خواهد بود . از طرف دیگر A و B هر دو یا درداخل یا در خارج هر دایره دیگری در صفحه به غیر از C هستند ، بنابراین اختلاف اعداد منسوب‌به‌آنها برابر واحد است .حال‌تمام‌کشورهایی راکه‌عدد منسوب به‌آنها زوج‌است قرمز و تمام‌کشورهایی راکه عدد منسوب به‌آنها فرد است آبی‌رنگ‌کنید . واضح‌است که بدین نحو نقشهٔ مفروض به طریق موزون رنگ آمیزی می‌شود(شکل٥) .



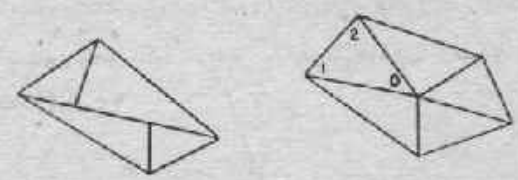
ش ٥

مسئلهٔ سوم : نقشه‌ای متشکل از کشورهایی‌که همه به شکل مثلثند در نظر بگیرید . این مثلثها ممکن است‌که نقطهٔ مشترکی نداشته باشند یا در یك رأس و یا در یك ضلع مشترك باشند (این‌چنین تقسیم صفحه راممولا مثلث بندی می‌گویند). از این‌گذشته فرض‌کنید‌که این مثلث بندی دارای این‌خاصیت است‌که می توان‌به هریك از رأسهای مثلثهای‌آن یکی ازاعداد ۰ و ۱ و ۲ را به نحوی منسوب‌کرد که به دو انتهای هرضلع همیشه اعداد متفاوت منسوب‌شده باشد (شکل ٦ رانگاه کنید). چنین نقشه‌ای را می‌توان فقط با دو رنگ به‌طریق‌موزون‌رنگ آمیزی‌کرد .



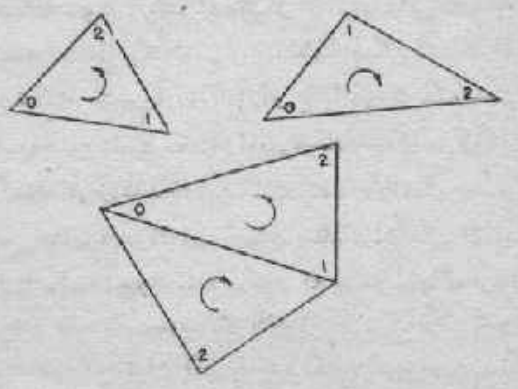
ش ٦

حل : توجه کنید که دوشکل زیررا (شکل ۷) نمی‌توان با دورنگ به طرز موزون رنگ‌آمیزی کرد چه‌شکل الف‌مثلث بندی به نحوی مطلوب نیست وشکل ب دارای خاصیت مخصوص فوق‌الذکر نمی‌باشد .



ب ش۷ الف

حال اگر در هر مثلث جهت حرکت ازصفر به ۱ واز ۱ به ۲ واز ۲ به صفر را با پیکانی نشان دهیم ، هر مثلث‌صاحب مشخصه‌ای می‌شود که همان جهت حرکت از صفر به ۱ و از ۱ به۲واز۲به‌صفراست (به‌شکل۸ . بالانگاه کنید). بدین‌طریق تمام مثلثها به دو دسته تقسیم‌می‌شوند، یك دسته دارای مشخصهٔ جهتی موافق جهت حرکت‌عقربه‌های ساعت ودستهٔ دیگر دارای‌مشخصهٔ جهت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت . اینك اگر تمام مثلثهای دستهٔ اول را به رنگ قرمز ، مثلثهای دستهٔ دوم را به رنگ آبی کنیم ، به جهت آنکه دو مثلث مجاور دارای جهتی مخالف‌هم هستند (به شکل ۸، پایین نگاه کنید) ، رنگ‌آمیزی به طرز موزون انجام خواهدگرفت .



ش ۸

مسئلهٔ چهارم : برروی یك صفحهٔ عادی شطرنج‌شامل ٦٤ مربع، یك‌رخ نمی تواند از یك‌گوشه شروع‌کند و باعبور فقط یك بار ازهر مربع‌به گوشهٔ دیگر صفحه که بانقطهٔ شروع بر یك قطر قرار دارند برسد .

حل : رخ می‌تواند به تعداد دلخواهی مربع به جلو وعقب وچپ و راست حرکت کند . هریك از چنین حرکاتی‌را می توان به عنوان یك یا چند حرکت متوالی ساده عبارت از حرکت ازمربعی بهمربع مجاور تلقی‌کرد . حال صفحهٔ شطرنج را به همان وضع عادی سفید وسیاه‌که یك رنگ آمیزی موزون است در نظر بگیرید . برای عبور از تمام ٦٤ مربع، رخ باید ٦٣ حرکت ساده فوق‌الذکر را انجام دهد . تعدادی زوج از این حرکت ساده رخ را از مربعی به رنگ‌صفر‌وض ، بهمربع دیگری به‌همان رنگ می‌رساند، در نتیجه٦٣ حرکت ساده رخ را از مربع گوشهٔ‌آغاز حرکت به مربع دیگری به رنگی غیر از رنگ مربع مبدأ می‌رساند . پس هر مسیری که رخ برای حرکت انتخاب‌کند مربع انتهایی حرکت نمی‌تواند مربع‌مورد نظر در مسئله، که‌هم رنگ مربع مبدأ است، باشد .

مسئلهٔ ۵ : آیا می‌توان تمام۲۸ عدد دو مینوی یك دسته دومینو را به‌صورت‌زنجیر به دنبال هم‌قرار داد به‌طوری که‌دریك انتهای‌آن عدد ٦ و درانتهای دیگر عدد ۵ باشد ؟

حل : هردو مینو از دو قسمت تشکیل شده‌است که‌در هرقسمت‌یکی‌ازاعداد ۰،۱،۲،۳،٤،۵،٦ قراردارد. درهردستگاه دو مینو به تعداد جفتهایی که از این رشته اعدادمی‌توان تشکیل داد ، یعنی ۲۸ ، دو مینو وجود دارد . هر عدد فقط یك بار با یکی از ٦ عدد دیگر جفت می‌شود و یك بارهم با خودش جفت می‌شود . بنابراین هریك از ۷ عدد فوق ، ۸ بار دردستگاه دو مینو ظاهر می‌شود. حال چون درساختن زنجیر مطلوب‌همواره اعداد دو نصفهٔ دو دو مینو که به‌هم می‌چسبند در دو طرف‌خط اتصال یکسانند ، نتیجه می‌شود که‌در داخل زنجیر، هر یك از اعدادباید به تعداد زوج وجود داشته‌باشند و چون باید در تمام زنجیر هرعدد ۸ بار ظاهر گردد و تمام دو مینوهای موجودبه کار روند یك عدد نمی‌تواند فقط در یك سرزنجیر ظاهرشود. پس‌اگر ٦ در یك انتها باشد ، در انتهای دیگر هم حتماًعدد٦ وجود خواهد داشت نه ۵ .

مسئلهٔ ٦ : می دانیم‌که تمام افراد بشر در طول عمر خود به‌تعداد دفعات معینی (غیرصفر) با یکدیگر دست‌داده‌اند.

مسئله آن است که تعداد افرادی که در طول عمر خود فرد بار با یکدیگر دست داده‌اند عددی است زوج .

حل : فرض کنید که عدهٔ کل افراد بشر N و تعداد دست دادنها برابر m باشد . افراد را از ۱ تا m به ترتیب شماره گذاری کنید و فرض کنید که n_k تعداد دست‌دادنهای شخص شمارهٔ k باشد(بنا به فرض $n_k \neq 0$) . حال تعداد کل دست دادنها را جمع می کنیم. در این محاسبه هر دست دادن که عملی است دوجانبه دوبار حساب می‌شود ، بنابراین :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_N = 2m$$

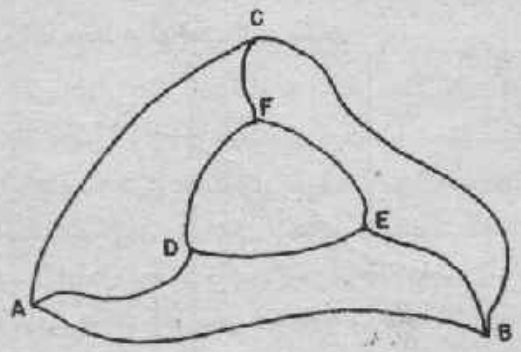
ولی می‌دانیم که درصورتی مجموعی نظیر جمع فوق مساوی عددی زوج است که تعداد جمله‌های فرد در آن، عددی زوج باشد ، پس تعداد افرادی که در عمر خود فرد بار دست داده‌اند زوج است .

مسئلهٔ ۷: در یك جشن افتتاحیه ۲۲۵ نفر شرکت دارند. در این جشن دوستان با یکدیگر دست می‌دهند. وقتی که جشن به اتمام می‌رسد ، در میان افراد حاضر در آن جلسه حداقل یك نفر بوده که به تعداد دفعات زوج دست داده است .

حل : چون تعداد کل دست دادنها ، همان طور که در مسئلهٔ ۶ گفته شد ، زوج است و تعداد افراد حاضر در جلسه ، یعنی تعداد جمله‌های جمع فرد است ، لااقل بایدیکی از جمله‌های جمع زوج باشد .

مسئلهٔ ۸ : در شکل ۹ شش نقطه وجود دارد که در آن هر نقطه به سه نقطه از ۵ نقطهٔ بقیه متصل است . هرگاه به جای شش نقطه فقط ۵ نقطه داده شده بود ، امکان نداشت که هر یك از نقاط به سه نقطه از چهار نقطهٔ بقیه وصل گردد .

حل : فرض کنید که این امر امکان پذیر بود . اگر تعداد قوسهایی را که از هر نقطه می گذرد بشماریم ، چون هر قوس دارای دو سر است ، ضمن این شمردن هر قوس دوبار به حساب می‌آید و عددی زوج نتیجه می‌شود: از طرفی دیگر چون از هر نقطه سه قوس گذشته است ، روی هم ۱۵ قوس وجود دارد . می‌بینید که از یك طرف باید مجموع کل اعداد وابسته به نقاط دو برابر تعداد کل قوسهای مرسوم بوده وبنابراین عددی زوج بدست آید واز طرف دیگر آن عدد ۱۵ است، بنابراین این حالت امکان پذیر نیست .



ش ۹

نتیجه

این هشت مسئله با حل آنها نمونه‌هایی است از مسائلی که در کتاب روسی فوق‌الذکر وجود دارد و مربوط به مسئلهٔ دورنگ است . همهٔ این مسائل به‌نحوی مربوط به رنگ کردن موزون نقشه‌ها می‌باشد . تنوع واستقلال این مسائل واصالت روشهای حل آنها موجب می‌شود که طرح چنین مسائلی به‌خصوص برای دانش‌آموزان دبیرستانها تأثیر فراوانی برای برانگیختن قوهٔ خلاقه و ابتکار آنان داشته باشد .

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

سرعت یك ترن مسافربری x برابر سرعت یك ترن باری است . حال این دو ترن را در دو حالت مختلف در نظر بگیرید. حالت اول هردو در یك جهت حرکت می کنند و ترن مسافربری از آن دیگری سبقت می گیرد . حالت دوم این دو ترن در دو جهت مختلف حرکت می کنند وازهم می گذرند. اگر بدانیم که زمان سبقت گرفتن ترن مسافربری از ترن باری x برابر زمان ردشدن این دو ترن ازهم در حالت دوم است مقدار x چقدر است؟

فراموش نکنید که در حل این مسئله نباید عصبانی بشوید!

پاسخ مسئلهٔ شمارهٔ گذشته زیر همین عنوان

هوای دیروز آفتابی بوده است . لابد می‌پرسید چرا . یك خط بکشید و به‌وسیلهٔ نقاطی در روی آن امروز و دیروز و پریروز وپس‌پریروز وپس در آن پریروز را مشخص کنید . و روابطی را که به گفتهٔ اداره هواشناسی هواهای روزهای مختلف دارند به‌ابتداء امروز برگردانید . نتیجه خواهید گرفت که چون هوای پریروز بارانی بوده هوای دیروز آفتابی بوده است .

ساده ترین راه

تعیین اعداد فیثاغورثی

خلیل صدیق ارشادی

شورای محترم نویسندگان یکان

ضمن اظهار تشکر از اقدام به انتشار مجلهٔ یکان که در تنویر افکار دانش‌آموزان و علاقمندان به ریاضیات سهم بسزایی دارد - بانهایت احترام به‌استحضار می‌رساند: با وجودی که این جانب‌ساحت مقدس دبیرستان‌ودانشکده را پشت سر گذاشته‌ام اما آنی از ادامهٔ تحصیل وکسب فیض از مقام محترم استادان و از لابلای صفحات کتب علمی و مجلات مربوط غافل نبوده با کمال میل ورغبت تلاش می کنم که تا آخر دقایق عمر ازدریای بیکران علوم جان تشنهٔ خودرا، تاآنجاکه ممکن است،سیراب نمایم . مجلهٔ یکان یکی‌از بهترین نشریاتی است کـه‌بـه همت شما مانند چشمهٔ آب زلالی این تشنگی علمی رارفع می‌نماید . حل‌یکی از مسائل مندرج درچندشمارهٔ پیش مرا برآن‌داشت که در مورد اعداد فیثاغورثی بیشتر مطالعه نمایم . یکی دو ماه پس ازآغاز این مطالعه در بیمارستان بستری شده تحت عمل جراحی‌قرار گرفتم ولی همانجا ، در بستر بیماری، موفق‌شدم‌دو فرمول بسیار ساده برای تشخیص و تعیین این اعداد ، از صفر تا بینهایت ، پیداکنم . در شمارهٔ دوم صفحات ٤٥و٤٦ شرح بسیار شیرینی در بارهٔ اعداد فیثاغورثی درج شده بود که مرا برآن داشت تا نتیجهٔ مطالعات خود را در این بارهٔ به شورای محترم نویسندگان‌آن مجله تقدیم داشته وتقاضا نمایم درصورت امکان آنرا در یکی ازشماره‌های آیندهٔ مجله درج فرموده ودر معرض قضاوت استادان محترم قـرار دهند . بدیهی است من استاد ریاضی نیستم ولی ممکن است فرمولهای مکتشفه در حل مسائل مربوط به اعداد فیثاغورثی سبب تسهیل‌کار دانش‌آموزان عزیز و سایر افراد علاقمند گردد و شاید از این راه بنده نیز توانسته باشم خدمتی انجام داده باشم .

***

قضیهٔ فیثاغورث در نظر یونانیان قدیم جنبهٔ تیمن خدایی داشت و به‌طوریکه در صفحهٔ ۹ شمارهٔ ۱۰ مجلهٔ یکان اشاره شده فیثا غورث پس ازکشف این خاصیت جشنی گرفت وانگشت‌شصت خودرا در راه‌آلههٔ «موزه» قربانی کرد.

بدیهی است هزاران و ملیونها مثلث قائم‌الزاویه می‌توان ساخت که در تمامی‌آنها رابطهٔ فیثاغورث‌برقرار می‌باشد . ولی این رابطه همیشه به‌نسبت ۳:٤:٥ نیست . ، بعمیل خود می‌توان‌دوخطرا برهم‌عمود نموده‌وازهر نقطهٔ یکی‌به‌هر نقطهٔ دیگری وتری رسم نموده و مثلث قائم الزاویه‌ای بسازیم . شك نیست که در تمامی این مثلثهـا رابطهٔ فیثاغورث صادق خـواهد بود . دیوفانتوس راه حلی برای تعیین این اعداد پیدا کرد که عمل آن مستلزم صرف وقت زیادی است . از طریق اعداد کمپلکس نیز همان طورکـه در مقالهٔ مذکور اشاره شده است، می توان آنهارا پیداکرد . ولی این اولین باری است که از راهی بسیار ساده و آسان می توان این رابطه را در مورد تمامی اعداد ، از صفر تابی نهایت، تعمیم داد . ازآنجایی‌که اعداد زوج‌دراین مورد ، مثل سایر موارد ، خاصیت مشترك ندارند و آنچه در مورد یکی‌صادق‌است‌در مورددیگری‌وفق نمی‌دهد، برای هر کدام فرمول جداگانه‌ای‌داده شده است .

این فرمولهاکاملا بی سابقه بوده وبرای نخستین بارجهت اظهار نظر برای چند نفر از استادان خارجی طی نامهٔ‌خصوصی ارسال گردید . اینك نیز از طریق مجله پرارزش «یکان» در معرض افکار عموم و قضاوت صاحبنظران گذارده می‌شود .

ازطریق حل این فرمولها ، بادر دست داشتن یکی ازاعداد می توان دوعدد دیگر را پیداکرد . به عبارت دیگر اگریکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد،ضلع دیگر ووتر آن‌نیز به‌آسانی تعیین می‌گردد .

باید دانست که کلیهٔ ضرایب این رابطه‌نیز همیشه خاصیت رابطهٔ اصلی را حفظ می‌نمایند .

اعداد زوج

اگر x را عدد زوج فرض کنیم :

$$x^2+[(\frac{x}{2})^2-1]^2=[(\frac{x}{2})^2+1]^2$$

واگر y را عدد فرد بگیریم :

$$y^2+\left(\frac{y^2-1}{2}\right)^2=\left[\left(\frac{y^2-1}{2}\right)+1\right]^2$$

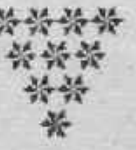
جهت روشن شدن مطلب جدول زیر تنظیم شده که استفاده از فرمولها را در مورد اعداد ازصفر تا ۲۶ نشان می‌دهد.

اعداد زوج					اعداد فرد				
$x^2+[(\frac{x}{2})^2-1]^2=[(\frac{x}{2})^2+1]^2$					$y^2+(\frac{y^2-1}{2})^2=[(\frac{y^2-1}{2})+1]^2$				
3^2	=	0^2	+	3^2	1^2	=	0^2	+	1^2
5^2	=	3^2	+	4^2	3^2	=	4^2	+	5^2
10^2	−	8^2	+	6^2	5^2	−	12^2	+	13^2
17^2	−	15^2	+	8^2	7^2	=	24^2	+	25^2
26^2	=	24^2	+	10^2	9^2	=	40^2	+	41^2
37^2	=	35^2	+	12^2	11^2	=	60^2	+	61^2
50^2	−	48^2	+	14^2	13^2	=	84^2	+	85^2
65^2	−	63^2	+	16^2	15^2	=	112^2	+	113^2
82^2	=	80^2	+	18^2	17^2	−	144^2	+	145^2
101^2	=	99^2	+	20^2	19^2	=	180^2	+	181^2
122^2	−	120^2	+	22^2	21^2	=	220^2	+	221^2
145^2	=	143^2	+	24^2	23^2	=	264^2	+	265^2
170^2	=	168^2	+	26^2	25^2	−	312^2	+	313^2

به‌طوریکه مشاهده می‌شود :

در مورد اعداد زوج : **عدد سومی = عدد دومی + ۲**

در مورد اعداد فرد : **عدد سومی = عدد دومی + ۱**



چرا

تثلیث زاویه

ممکن نیست

نوشتهٔ : **کارل روبستو**

ترجمهٔ: **مهدی مدغم**

چهار مسئلهٔ ترسیم هندسی تضعیف مکعب ، تربیع دایره، ترسیم هفت ضلعی منتظم وتثلیث زاویه ازجملهٔ معروفترین‌مسائل ترسیم هندسی کلاسیك یونان قدیم است که سعی می‌شد مانندسایر مسائل فقط به‌کمك خط‌کش وپرگار حل شود . از میان چهار مسئلهٔ فوق مشهور ترین‌آنها مسئلهٔ ثلث‌کردن زاویه است . طی سالهای متمادی‌کوشش بسیاری برای استدلال وحل این‌مسئله به عمل‌آمد وبدون نتیجه ماند . بدیهی است زوایایی از قبیل ۹۰° و ۱۳۵° و ۱۸۰° و ۳۶۰° وجود دارند که تقسیم‌آنها به سه قسمت متساوی بسیارآسان است . اما منظور ماآن است‌که‌ثابت کنیم تثلیث‌یك‌زاویه در حالت‌کلی تنها به‌کمك‌خط‌کش وپرگار غیر ممکن است . برای این منظور کافی است نشان دهیم‌که زاویه‌ای وجود داردکه تقسیم‌آن به‌سه‌زاویهٔ‌متساوی‌محال است، زیرا یك قاعدهٔ عمومی باید شامل هرحالت به تنهائی نیزباشد. پس عدم روش کلی برای حل این مسئله در صورتی که مثلا تثلیث زاویه‌ای مانند ۶۰° امکان نداشته باشد ثابت است .

می‌دانیم‌که یك خط راست می‌تواند دایره‌ای را فقط در دو نقطه قطع نماید و پیداکردن این دو نقطهٔ تلاقی منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم می گردد . برعکس حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌توان به پیداکردن نقاط تلاقی یك خط و یك دایرهمنجر نمود. پس جوابهای یك‌معادلهٔ درجهٔ‌دوم را به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگارمی‌توان تعیین کرد. اما برای یافتن‌ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم چنین راهی وجود ندارد . اینك‌اگرزاویه‌ای مانند θ داشته باشیم مسئله‌آن است‌که $\frac{\theta}{3}$ را مشخص نمائیم . معادل جبری این مسئله را به طرق مختلف می‌توان به دست آورد ولی ساده‌ترین راه‌آن است که فرض کنیم زاویهٔ θ به وسیلهٔ‌کسینوس آن معلوم باشد ، $y=\cos\theta$. در این صورت مسئله آن است‌که مقدار $z=\cos\frac{\theta}{3}$ را مشخص‌کنیم . اما از مثلثات مسطحه داریم :

$$\cos\theta=y=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3} \qquad (1)$$

به عبارت دیگر ، مسئلهٔ‌تثلیث زاویه‌ای مانند θ به فرض $\cos\theta=y$ معادل‌آن است‌که جوابهای معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را بسازیم :

$$y=4z^3-3z \qquad (2)$$

یا

$$4z^3-3z-y=0$$

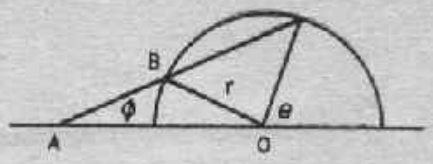
حال اگر θ برابر ۶۰° اختیار شود $y=\sin\theta=\frac{1}{2}$ می‌گردد و معادلهٔ (۲) به صورت زیر درمی‌آید .

$$8z^3-6z=1 \qquad (3)$$

و چون این معادله دارای ریشهٔ گویا نیست ، یافتن z یا $\cos\frac{\theta}{3}$ و درنتیجه زاویهٔ $\frac{\theta}{3}$ به‌کمك‌خط‌کش‌وپرگارغیرممکن است اولین استدلال برای‌اینکه با خط‌کش و پرگار هر زاویه‌ای را نمی‌توان به سه زاویهٔ برابر قسمت‌کرد درسال ۱۸۳۷ به وسیلهٔ **وانتزل (Wantzel)** به عمل آمده است .

استدلال این‌که هرزاویه را نمی‌توان باپرگار وخط‌کش به سه قسمت برابر تقسیم نمود هنگامی صحیح است که خط‌کش را فقط وسیله‌ای برای رسم خط بدانیم . ولی اگر خط‌کش را در موارد دیگری غیر از رسم خط راست از دو نقطهٔ معین به‌کاربریم تثلیث برای زوایای دیگر امکان می‌پذیرد . قیداین که در ترسیمات هندسی جز ازخط‌کش و پرگار استفاده نشود ریشه‌ای قدیمی دارد . یونانیها خود از وسایل دیگری برای ترسیم استفاده می نمودند چنانکه طریق زیر برای تثلیث‌زاویه که درآثار ارشمیدس یافته شده گواه براین مدعاست .

فرض‌کنیدزاویهٔ‌ثابتی‌مانند θ مطابق‌با شکل۱داشته‌باشیم. یك ضلع زاویه را به‌طرف چپ امتداد داده نیمدایره‌ای‌بمرکز O دلخواه زاویهٔ و به شعاع دلخواه رسم کنید . دو نقطهٔ A و B را روی یك خط‌کش قسمی جداکنید که : $AB=r$



ش۱

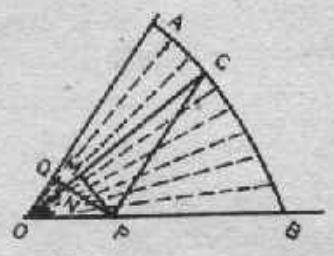
(r شعاع دایره است). درحالی که نقطهٔ B را روی نیم‌دایره نگاه می‌دارید خط‌کش را طوری حرکت دهید که لبهٔ آن از نقطهٔ تلاقی ضلع زاویه و نیم‌دایره بگذرد. وقتی که نقطهٔ A خط‌کش بر امتداد قاعدهٔ زاویه قرار گرفت خطی رسم نمائید تا زاویه‌ای برابر φ با قاعدهٔ زاویهٔ مفروض بسازد:

$$\varphi = \frac{\theta}{3}$$

روش دیگری که برای تثلیث یك زاویه به‌طریق تقریبی و با خطای کم توسط **نیکومد** (Nicomedes) عرضه شده است به این شرح است: درشکل۲، AOB زاویهٔ مفروضی است. از نقطهٔ P واقع بر OB خطی عمود بر OA رسم کنید تا AO را در Q قطع نماید. اکنون از O خطوطی رسم کرده روی این خطوط ازجایی که PQ را قطع می‌نماید به اندازهٔ (OP)۲ جدا کنید. اگر نقاط حاصل به وسیلهٔ خطوط راستی به‌هم وصل شوند، شکل حاصل ازاین خطوط شکل تقریبی یك منحنی هندسی است که به‌نام:

کنکوئید نیکومد (Conchoid of Nicomedes)

معروف است. برای تثلیث یك زاویه، عمودی بر PQ از P اخراج کنید تا کنکوئید را در C قطع کند. زاویهٔ AOC که بدین ترتیب به‌دست می‌آید ثلث زاویهٔ AOB می‌باشد.



ش۲

برای اثبات PM را بر OC عمود کنید. می‌توان نوشت:

$$\cos \overset{\frown}{MPQ} = \cos \overset{\frown}{OCP} = \frac{PM}{PN}$$

$$\sin \overset{\frown}{MOP} = \frac{PM}{OP} \quad , \quad \sin \overset{\frown}{OCP} = \frac{PN}{NC} = \frac{PN}{2(OP)}$$

$$\sin \overset{\frown}{MOP} = 2 \sin \overset{\frown}{OCP} \cos \overset{\frown}{OCP} = \sin 2(\overset{\frown}{OCP})$$

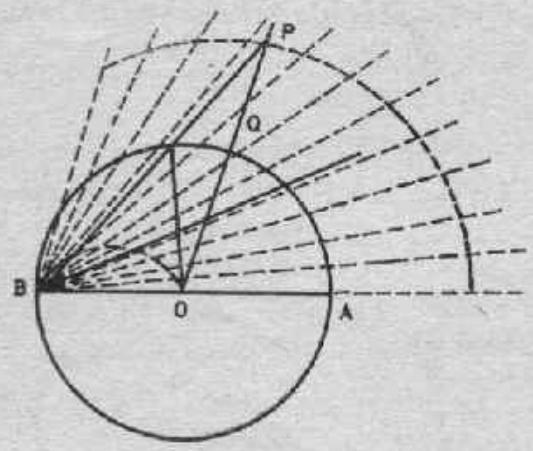
از این روابط حاصل می‌شود:

$$\text{زMOP} = 2\text{ز(OCP)}$$

و چون $\text{زOCP} = \text{زAOC}$ ،

$$\text{زAOB} = 3\text{زAOC}$$

ترسیم هندسی جالب زیر نیز زاویه را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم می‌نماید. دایره‌ای به‌مرکز O و به‌قطر AB رسم می‌کنیم. از B وترهایی رسم‌کرده امتداد می‌دهیم. روی هروتر در دو طرف محیط دایره مقداری برابر شعاع دایره جدا می‌کنیم. مکان‌هندسی این نقاط **لیماکن پاسکال** (Limacon of Pascal) نامیده می‌شود. اکنون به‌طوری که‌درشکل ۳ پیداست روی OA وبه رأس O زاویه‌ای را که می‌خواهیم به‌سه قسمت کنیم رسم کرده ضلع زاویه را امتداد می‌دهیم تالیماکن را در نقطهٔ P



ش۳

قطع کند. خط BP دایره را در Q تلاقی می‌کند. اکنون $PQ = QO = OB = r$ و $\text{زPBA} = \text{زBQO} = 2\text{زP}$

$\text{زPBA} = \frac{2}{3}\text{ز POA}$. اگر زاویهٔ PBA را نصف کنیم تثلیث پایان می‌یابد.

مسئلهٔ تثلیث زاویه که ابتدا به‌وسیلهٔ یونانیان پیشنهادشد بدین‌ترتیب بود که با خط‌کش وپرگار تنها و بدون خطا انجام پذیرد. اشتباه درقیداستعمال خط‌کش بدون علامت، بسیاری را برآن داشته است تادربارهٔ حل مسئله‌ای که بیش از یك قرن است به‌عنوان مسئله‌ای غیرممکن شناخته‌شده کوشش بدون نتیجه‌ای مصروف دارند.

پایان

یادی از:

حسین هورفر



از آقای منوچهر امین ناطقی دوست وخویش نزدیك شادروان حسین‌هورفر خواهش شد اطلاعاتی دربارهٔ زندگی علمی آن مرحوم برای مجلهٔ یکان فراهم آورند که نوشتهٔ ایشان درزیر چاپ می‌شود.

آقای امین ناطقی مؤسس اولین مجلهٔ ریاضی در ایران می‌باشند . ایشان به اتفاق مرحوم سعید عزیزی در سال ۱۳۰۶ دست به انتشار مجلهٔ ریاضی «خیام» زدند و ۱۳ شمارهٔ آن رابا موفقیت کامل منتشر نمودند .

شادروان حسن هورفردرسال ۱۲۸۰ خورشیدی در شهر تهران به دنیا آمده در سال ۱۳۰۱ پس ازاتمام تحصیلات متوسط در دارالمعلمین مرکزی که ریاست آن بر عهدهٔ مرحوم ابوالحسن فروغی بودبه کارمعلمی پرداخت‌ودرمدارس کمابیه وسعادت به تدریس اشتغال ورزید ــ از سال ۱۳۰۶ آن موقع که مدارس‌متوسطهٔ کامل تهران منحصر به چهار مدرسهٔ دارالفنون ، دارالمعلمین مرکزی ، شرف و ثروت بود به سمت معلم ریاضی دورهٔ دوم متوسطه در مدارس شرف وثروت انتخاب شد بعدها تا سال ۱۳۱۳ در دبیرستانهای مختلف تهران تدریس کرد. درسال ۱۴-۱۳۱۳ دردانشسرای مقدماتی تدریس‌نمود . سال ۱۳۲۴ بازرس اداری و۱۳۲۵ بازرس فنی و در۱۳۲۹ مجدداً دبیر شد وبالاخره در سال ۱۳۳۷ بازنشسته‌گردیدامانا پایان عمر افتخارآمیز خود خدمت معلمی را ترك نکرد ــ شادروان هورفر دارای استعداد وهوش مافوق عادی بود.احاطه وتسلط او در موادی که تدریس می‌کرد کمتر نظیر داشت . تمام مواد ریاضی دورهٔ دوم دبیرستان را درس می‌داد. در آن سالها که معلمین مطالب درسی را به صورت جزوه‌می گفتنداحتیاج به‌داشتن کتاب به خوبی احساس می‌شد وبااینکه عدهٔ شاگردان مدارس متوسطه بسیار محدود وچاپ کتابهای درسی مشتری و داوطلبی نداشت برای اولین بار در ایران به چاپ کتابهای ریاضی باحروف سربی وگراور همت گمارد واولین کتاب هندسهٔ رقومی‌را درسال ۱۳۰۸ به‌چاپ رسانید . بعد به تدریج یك دورهٔ کامل کتابهای ریاضی مخصوص دبیرستان درتمام رشته‌ها (جبر ــ مثلثات هندسه ومخروطات ــ رقومی و ترسیمی مکانیك ــ هیئت) تألیف نمودکه مکرر به چاپ رسید . پس از آنکه رسم فنی جزو مواد درسی دبیرستانها قرارگرفت در این مورد هم دست به‌کارتهیهٔ کتاب رسم فنی شد وبه خوبی ازعهده برآمد.

شادروان هورفر در رشتهٔ هندسهٔ رقومی وترسیمی استادی بی‌همتا بود و چاپ کتاب حل‌المسائل هندسهٔ رقومی و ترسیمی او تاآن زمان نه تنها درایران بلکه دردنیا بی‌سابقه بود. دراین کتاب که متجاوز از ۱۱۵۰ مسئله حل شده است مؤلف علاوه برآنکه پیش‌ازیکصد جلدکتاب به زبانهای مختلف رامورد استفاده قرار داده تعداد زیادی مسائل را شخصاً طرح وحل کرده است . چاپ دوم آن درسال ۴۱ دردسترس علاقمندان قرارگرفت .

هورفر در چند سال قبل دست به ابتکار تازه‌ای زد و درصدد برآمد که اعداد اول سلسلهٔ اعداد را ازیك تا یك میلیون به طریق مستقیم به دست‌آورد. دراین‌راه متجاوز ازپنجسال تلاش کردو پیش ازیك میلیون فیش تهیه نمود تا به مقصود رسید. محاسبات خودرابرای مراجع علمی ذیصلاحیت فرستادتانتیجهٔ قطعی‌آن اعلام شود و متأسفانه عمرش برای اطلاع ازنتیجه کفاف نکرد. البته افتخار کشف و حساب او به نام خودش محفوظ خواهد ماند.

شادروان هورفر نه‌فقط‌درریاضیات تبحرداشت بلکه در ادبیات بسیار پر مایه بود ــ خوب و سلیس می‌نوشت ــ نیکوشعر می‌گفت . در موسیقی دست داشت ــ تار استادانه می‌نواخت و می‌ساخت ــ جزء عدهٔ معدودی بود که به دستگاههای موسیقی ایرانی و کلیهٔ ریزه‌کاریهای آن، وقوف داشت.

شادروان هورفر به اخذ نشانهای فرهنگ درجهٔ ۱ و۲ نایل آمد .

چراغ عمرش در۲۵ دیماه ۱۳۴۳ خاموش شد و با مرگ وی فرهنگ ایران یکی ازپرارزش‌ترین و دانشمند‌ترین ذبیران‌خودرا ازدست‌داد. خدایش بیامرزاد .

راهنمای ریاضیات متوسطه

از : باقر امامی

نقل از مطبوعات شوری

نکته‌ای از درس
محاسبهٔ مجموع مکعبات جمله‌های یک تصاعد حسابی

اگر a_1 و a_2 و a_3 و ... a_n و a_{n+1} و .... جمله‌های یک تصاعد حسابی به‌قدرنسبت d باشد مجموع مکعبات n جملهٔ اولیهٔ این تصاعد را ازروی دستور زیرمی‌توان‌محاسبه نمود :

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=\frac{(a_{n+1}\cdot a_n)^2-(a_1a_1)^2}{4d}$$

اثبات: دراتحاد:

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_n^2-da_n)^2=4da_n^3$$

به n به‌ترتیب مقادیریک‌تا n را نسبت می‌دهیم :

$$(a_1^2+da_1)^2-(a_1^2-da_1)^2=4da_1^3$$
$$(a_2^2+da_2)^2-(a_2^2-da_2)^2=4da_2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n^2+da_n)^2-(a_n^2-da_n)^2=4da_n^3$$

از جمع روابط بالا باتوجه به‌اتحاد :

$$a_k^2-da_k=a_{k+1}^2+da_{k-1}=a_ka_{k-1}$$

نتیجه می‌شود :

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_1^2-da_1)^2=4d(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n)^3$$

ویا :

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3=\frac{(a_{n+1}\ a_n)^2-(a_1a_1)^2}{4d}$$

مثال : مطلوبست محاسبهٔ مجموع :

$$S=1^3+6^3+11^3+\cdots+96^3$$

دراین‌مثال: $a_1=-4$ و $a_{n+1}=a_{21}=101$ و $d=5$ است بنابراین :

$$S=\frac{(96\times101)^2-4^2}{20}=\frac{(9696-4)(9696+4)}{20}$$
$$=9440\times97=47006320$$

نکته‌ای خارج از درس
دوخاصیت از واسطهٔ نمائی دوعدد

عدد : (1) $$C_\alpha(a,b)=\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

را واسطهٔ‌نمائی مرتبهٔ α از دوعدد مثبت a وb می‌نامیم.

واضح است که واسطهٔ حسابی:

$$C_1(a,b)=\frac{a+b}{2}=A(a\ ,\ b)$$

واسطهٔ توافقی :

$$C_{-1}(a,b)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=H(a\ ,\ b)$$

واسطهٔ مجذوری :

$$C_2(a\ ,\ b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=Q(a,b)$$

بهازاء $\alpha=0$ فرمول (1) به‌صورت مبهم در می‌آیدولی می‌توان ثابت کرد که :

$$\lim_{\alpha\to0} C_\alpha(a\ ,\ b)=\sqrt{ab}$$

وبنابراین می‌توان فرض کرد که :

واسطهٔ‌هندسی : $$C_0(a,b)=\sqrt{ab}=G(a,b)$$

واگر $\alpha>\beta$ باشد اثبات می‌گردد که :

$$C_\alpha(a,b)\geq C_\beta(a\ ,\ b)$$

وازآنجا نتیجه می‌شود که :

$$Q(a,b)\geq A(a,b)\geq G(a,b)\geq H(a,b)$$

اینك دوخاصیت دیگر ازواسطهٔ تمائی دوعدد مثبت :

خاصیت I-

$$C_{\alpha}(a\,b) \times C_{-\alpha}(a\ و\ b) = C_{۱}^{۲}(a\,b) \qquad (۲)$$

این رابطه مستقیماً قابل اثبات است :

$$C_{\alpha}(a\ و\ b) = \left(\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{۲}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

$$C_{-\alpha}(a\,b) = \left(\frac{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}}{۲}\right)^{-\frac{۱}{\alpha}} =$$

$$\left(\frac{۲}{\frac{۱}{a^{\alpha}}+\frac{۱}{b^{\alpha}}}\right)^{\frac{۱}{\alpha}} = ab\ \left(\frac{۲}{a^{\alpha}+b^{\alpha}}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

از ضرب C_{α} در $C_{-\alpha}$ رابطهٔ (۲) بدست می‌آید. و این رابطه تعمیم رابطهٔ معروف:

$$A(a\,b) \times H(a\,b) = G^{۲}(a\,b)$$

است که درحالت مخصوص $\alpha = ۱$ از آن نتیجه می‌گردد.

بازاء $\alpha = -\frac{۱}{۲}$ داریم :

$$C_{\frac{۱}{۲}}(a\ و\ b) = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{۲}\right)^{۲} = \frac{a+b}{۴} + \frac{\sqrt{ab}}{۲}$$

$$= \frac{A(a\ و\ b)+G(a\ و\ b)}{۲}$$

$$C_{-\frac{۱}{۲}}(a\,b) = \left(\frac{\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}}{۲}\right)^{-۲} =$$

$$= H^{۲}(\sqrt{a}\ و\ \sqrt{b})$$

از دستور (۲) روابط دیگری نیز بین سه‌واسطهٔ عددی و هندسی و توافقی دوعدد نتیجه می‌گردد :

$$A[(a\,b)\,G(a\,b)] \times H^{۲}(\sqrt{a}\ و\ \sqrt{b}) = \qquad (۳)$$
$$= G^{۲}(a\,b)$$

خاصیت II-

$$\frac{C_{\alpha}(a\ و\ a)}{C_{\alpha}\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)} = C_{۱}^{۲}(a\,b) \qquad (۴)$$

معلوم است که :

$$C_{-\alpha}(a\,b) = \frac{۱}{C_{\alpha}\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)} \qquad (۵)$$

وبسهولت می‌توان تحقیق کرد که :

$$C_{-\alpha}(a\ و\ b) = \left(\frac{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}}{۲}\right)^{-\frac{۱}{\alpha}}$$

$$= \frac{۱}{\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{a^{\alpha}}+\frac{۱}{b^{\alpha}}\right)\right]^{\frac{۱}{\alpha}}} = \frac{۱}{C_{\alpha}\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)}$$

رابطهٔ (٤) را از روابط ۲و۵ می‌توان نتیجه گرفت .

وضمناً ازدستور ٤ بازاء $\alpha = ۱$ و $\alpha = -۱$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{A(a\,b)}{A\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)} \cdot \frac{H(a\,b)}{H\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)} = \frac{Q(a\,b)}{Q\left(\frac{۱}{a}\ و\ \frac{۱}{b}\right)}$$
$$= ab = G^{۲}(a\,b)$$

یعنی :

نسبت واسطهٔ عددی (یا توافقی و یا مجذوری) دوعدد مثبت به‌واسطهٔ عددی (یاتوافقی‌ویامجذوری) عکس این اعداد برابر حاصل‌ضرب این‌دوعدد است.

تعدادقطرهای چندضلعیها و چند وجهیها

(ازاصحاب‌ملکی ـ دبیردبیرستانهای قزوین)

دریك n ضلعی تعداد خطوطی‌که یك‌رأس را به سایر رأسها وصل‌می‌کند برابر است با $n-۱$ ، تعداد خطوطی که رأس دوم رابه رأسهای دیگر وصل می‌کند (بجز خط واصل‌بین دورأس اول ودوم)برابراست‌با $n-۲$ وباادامهٔ این محاسبه ، تعداد همهٔ خطوط واصل بین رأسهای مختلف برابر خواهدبود بامجموع:

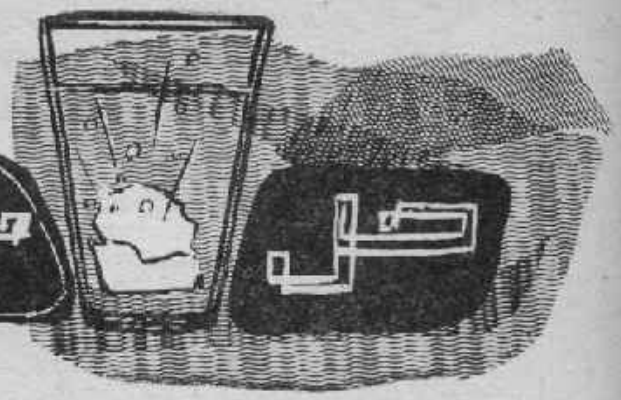
$$(n-۱)+(n-۲)+(n-۳)+\ldots+۲+۱$$

یعنی برابر با $\frac{n(n-۱)}{۲}$ که چون تعداد ضلعها یعنی n را

از آن‌کم‌کنیم تعداد قطرها برابر خواهدشد با $\frac{n(n-۳)}{۲}$

باروش مشابه برای تعداد قطرهای چندوجهی که‌شامل n رأس باشد رابطهٔ زیر حساب می‌شود .

$$\text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-۱)}{۲} - [\text{تعداد قطرهای تمام وجها} + \text{تعداد یالها}]$$



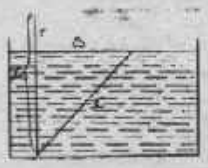
حل مسائل شماره‌های گذشته

حل مسائل شمارهٔ ۷

حل مسائل متفرقهٔ شمارهٔ ۷ در شمارهٔ ۸ به چاپ رسید اما حل آن دسته از مسائل شمارهٔ ۷ که برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستان مطرح شده بود به علت شروع سال تحصیلی و عدم تناسب موضوع مسائل با برنامهٔ مواد ابتدای سال موکول به بعد شد. اینک ابتدا حل این دسته از مسائل شمارهٔ ۷ و بعد حل مسائل شمارهٔ ۱۱ از نظر خوانندگان می‌گذرد.

کلاسهای چهارم

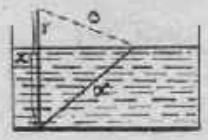
حل مسئلهٔ ۱۴۱۴ـ اگر طول نیزه را x فرض کنیم چون ۲متر آن از آب بیرون بوده است طول قسمتی از آن که داخل آب قرار گرفته برابر ۲ − x است



در حالت اول بنابر رابطهٔ فیثاغورث داریم.

$$x^2=(x-2)^2+5^2$$

که پس از ساده کردن و حل $x=7{,}25$ بدست می‌آید.



درحالت دوم بنابر رابطهٔ مربع ضلع مقابل بزاویهٔ حاده در مثلث داریم:

$$x^2=x^2+25-2x\times 2 \quad \text{و} \quad x=6{,}25$$

پاسخهای درست رسیده از: حسن سعادتی ـ حسین جعفری گلپایگانی ـ حسین ارشام ـ داوود بازکی ـ اسماعیل دیشیدی ـ خلیل فضل‌اللهی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۵ـ تعیین x از رابطهٔ زیر

$$(\sqrt{3{,}5}+\frac{1}{4}\sqrt{224})^x=28$$

$$28=2^3\times 3{,}5 \quad \text{و} \quad \sqrt[4]{3{,}5}=\sqrt[4]{64\times 3{,}5}=\sqrt{224}$$

و معادله بصورت زیر ساده می‌شود

$$(2\sqrt{3{,}5})^x=2^3\times 3{,}5 \quad \text{و} \quad x=3$$

پاسخهای درست رسیده از: اسماعیل دیشیدی ـ داوود بازکی ـ حسین ارشام ـ حسن سعادتی ـ صادق شوکتی ـ قاسم اخوان ـ خلیل فضل‌اللهی ـ داریوش نوریزاده ـ یوسف قانع ـ یدالله ابراهیمی ـ محمدحسین طحان‌زاده.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۶ـ چنانچه یکی ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ مجذور ریشهٔ دیگر باشد، داریم

$$x'x''=x'^3=\frac{c}{a} \quad \text{و} \quad x'=\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \quad \text{و} \quad x''=\sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \sqrt[3]{\frac{c}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}=-\frac{b}{a}$$

طرفین رابطهٔ اخیر را بتوان ۳ رسانده و ساده می‌کنیم، حاصل می‌شود.

$$b^3=ac(3b-a-c)$$

پاسخهای درست رسیده از: یوسف قانع ـ داریوش نوریزاده ـ حسن سعادتی ـ حسین ارشام ـ خلیل فضل‌اللهی ـ یدالله ابراهیمی

حل مسئلهٔ ۱۴۱۷ـ حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x+y+xy=14 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=3\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{xy}+xy=14 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=3\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

با حذف $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ بین دو معادلهٔ دستگاه نتیجه خواهد شد.

$$xy-3(\sqrt{2}+1)\sqrt{xy}+2(2+3\sqrt{2})=0$$

$$\sqrt{xy}=\sqrt{2}+2 \text{ و } 2\sqrt{2} \text{ یا } xy=11+6\sqrt{2}\ ;\ 98$$

$$\begin{cases} xy=8 \\ x+y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

واگر فرض کنیم $xy=11+6\sqrt{2}$ خواهیم داشت $x+y=3-6\sqrt{2}$ ونتیجه‌می‌شود که xوy هردومنفی‌هستند که قابل‌قبول نیست.

پاسخهای درست رسیده از : محمود ترابی‌ـصادق شوکتی ـ یوسف‌قانع ـ حسن‌سعادتی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۸ـ حل‌دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[3]{y}-3}=-1 \\ \frac{x-46}{y-45}=-1 \end{cases}$$

دستگاه پس از ساده‌کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=7 \\ x+y=91 \end{cases}$$

چنانچه طرفین معادلهٔ اول دستگاه را به‌توان ۳ برسانیم وبااستفاده ازمعادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $\sqrt[3]{xy}=12$ و یا $xy=1728$ یا معلوم بودن حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع xوy جوابهای قابل قبول دستگاه عبارت خواهد شد از

$$x=27 \text{ و } y=64$$

پاسخهای رسیده از: خلیل‌فضل‌اللهی ـ حسن‌سعادتی‌ـ یوسف‌قانع ـ محمود ترابی ـ یدالله‌ابراهیمی ـ آقامحمدآبادی‌ـ داوودبازکی ـ اسماعیل‌دیشیدی ـ محمدحسین‌طحان‌زاده‌ـغلامعلی معول ـ محمود صابرهمیشگی ـ مرتضی‌رودگری آملی‌ـ مجید شریف‌واقفی ـ عباس‌بشیری ـ صادق‌شوکتی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۹ـ تعیین x ازرابطه‌زیر

$$3^x+3^{x+1}+\ldots+3^{x+n}$$
$$=5^x+5^{x+1}+\ldots+5^{x+n}$$

بافرض $3^x=A$ و $5^x=B$ خواهیم داشت

$$+3A+3^2A+\ldots+3^nA=B+5B$$
$$+5^2B+\ldots+5^nB$$

و نتیجه می‌شود

$$\frac{A(3^{n+1}-1)}{2}=\frac{B(5^{n+1}-1)}{4}$$

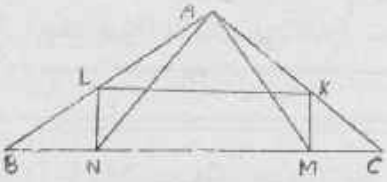
$$\frac{B}{A}=\frac{2(3^{n+1}-1)}{5^{n+1}-1} \quad \frac{5^x}{3^x}=\left(\frac{5}{3}\right)^x$$

بعد از لگاریتم گرفتن داریم

$$x=\frac{log2+log(3^{n+1}-1)-log(5^{n+1}-1)}{log5-log3}$$

پاسخهای درست رسیده از: مرتضی رودگری‌آملی‌ـ اسماعیل‌دیشیدی ـ داوود بازکی ـ حسن‌سعادتی ـ حسین‌ارشام‌ـ قاسم اخوان.

حل مسئلهٔ ۱۴۲۰ـ چهار ضلعیهای ALNM و ANM محاطی هستند ودایره‌ای که برسه‌نقطهٔ AوNوM



بگذرد برنقاط K و L نیز خواهد گذشت یعنی چهار ضلعی KMNL محاطی بوده و چون دو ضلع مقابلش متوازی و دوزاویهٔ مجاورش قائمه‌است لازم می‌آید که مستطیل باشد.

پاسخهای درست رسیده از : داریوش نوریزاده ـ مرتضی رودگری آملی ـ مجیدشریف واقفی.

کلاسهای پنجم

حل مسئلهٔ ۱۴۲۱ـ حل‌دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=7 \\ \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9 \end{cases}$$

بافرض $x=my$ وازتقسیم طرفین دومعادله‌بریکدیگر به‌دست خواهدآمد

$$\frac{m^2+m+1}{m+1}\times\frac{m-1}{m^2-m+1}=\frac{7}{9} \text{ یا}$$

$$\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{7}{9} \text{ و } m=2$$

در ازاء این مقدار از m برای y مقدار قابل قبول $y=۲$ وازروی آن $x=۶$ بدست می‌آید.

پاسخهای درست رسیده از : مرتضی رودگری ـ حسین ارشام. داودبازکی ـ اسماعیل دیشیدی ـ مجیدشریف‌واقفی ـ غلامعلی‌معول ـ حبیب‌موسی‌زاده ـ خلیل فضل‌اللهی ـ اصغر بنائی بهرام امین‌شریفی ـ منصور معتمدی .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۲ـ تعیین a و b و c برای برقراری اتحاد زیر

$$\frac{a}{tgx}+\frac{b}{cotgx}+\frac{c}{tgx+cotgx}=\frac{۲+۳tg^۲x}{tgx(۱+tg^۲x)}$$

طرف‌اول‌را برحسب tgx نوشته مرتب می‌کنیم. می‌شود

$$\frac{btg^۴x+(a+b+c)tg^۲x+a}{tgx(۱+tg^۲x)}=\frac{۳tg^۴x+۲}{tgx(۱+tg^۲x)}$$

و در نتیجه $a=۲$ و $b=۳$ و $c=-۵$ به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده است: منصور معتمدی‌ـ‌حسین ارشام ـ مرتضی رودگری ـ حسن سعادتی ـ غلامعلی معول ـ محمد ساعی .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۳ـ درهر مثلث داریم

$$A+B+C=\pi \quad یا \quad \frac{A}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{B}{۲}$$

چنانچه از طرفین رابطهٔ اخیرتانژانت گرفته وبسط‌دهیم پس ازاختصار رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید یعنی خواهیم‌داشت

$$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}+tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}+tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}=۱$$

پاسخهای درست رسیده از : محمد ساعی ـ حسن سعادتی ـ حسین ارشام ـ غلامعلی معول .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۴ـ اگر شعاع قاعدهٔ استوانه وارتفاع آن را به‌ترتیب R و h نمایش دهیم داریم

$$v=\pi R^۲h \qquad (۱)$$

S سطح‌لیوان موردنظر عبارتست از

$$S=\pi R^۲+۲\pi Rh \qquad (۲)$$

چنانچه مقدار h را از رابطهٔ (۱) بدست آورده و در رابطهٔ(۲) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$S=\frac{۲v}{R}+\pi R^۲ \quad و \quad S'=\frac{-۲v}{R^۲}+۲\pi R$$

S' وقتی صفر شده و تغییر علامت می‌دهد یعنی S وقتی مینیمم است که

$$R=\sqrt[۳]{\frac{v}{\pi}} \quad \rightarrow \quad h=R=\sqrt[۳]{\frac{v}{\pi}}$$

پاسخ درست رسیده از : حسین ارشام

حل مسئلهٔ ۱۴۲۵ـ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$m_{BA}=-\frac{۱}{۲} \quad و \quad m_{BC}=\frac{۰+۴}{۲-۰}=۲$$

$$(AB): y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \quad یا$$

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

$$A(x=۰ \ و \ y=۱)$$

$$m_{AD}=m_{BC}=۲ \ و \ (AD): y=۲x+۱$$

$$D(\alpha \ و \ ۲\alpha+۱) \ و \ BD=\sqrt{۱۰} \rightarrow D(-۱ \ و \ -۱)$$

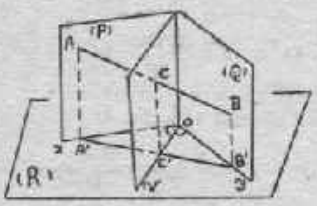
و بعد از آن مساحت ذوزنقه و اندازهٔ C حساب خواهد شد .

پاسخ درست رسیده از: محمود ترابی .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۶ـ اگر $B(\alpha \ و \ \alpha)$ رأس دیگری از لوزی باشد از رابطهٔ $OA=AB$ که برحسب α نوشته‌می‌شود جواب $\alpha=۴$ و $B(۴ \ و \ ۴)$ بدست‌آمده و C رأس دیگر لوزی قرینهٔ A نسبت به نیمساز ربع اول بوده $C(۱ \ و \ ۳)$ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از: محمود ترابی ـ حسین ارشام ـ غلامعلی معول .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۷ـ اگر صفحه‌ای مانند R عمود بر دو صفحهٔ P و Q اختیارکنیم‌و فصل‌مشترکهای آن را با صفحه‌های P و Q نیمساز فرجهٔ آنها به‌ترتیب با Ox و Oy و Ov نمایش دهیم تصویر AB برصفحهٔ R خط A'B' خواهدشد و مطابق شکل در مثلث OA'B' داریم



$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{A'O}{B'O}$$

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}$$

$$A'O=AH \quad و \quad B'O=BK$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BK}$$

پاسخهای درست رسیده از: غلامعلی معول

کلاسهای ششم

حل مسئلهٔ ۱۴۲۸ـ به فرض

$$y_۱=\sqrt[۴]{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}-x$$

$$y_۲=\sqrt[۴]{(x+a')(x+b')(x+c')}-x$$

خواهیم داشت

$\lim y = \lim y_1 - \lim y_2$ و $y = y_1 - y_2$

با استفاده از اتحادهای

$$(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3)=A^4-B^4$$
$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$$

و به فرض $\sqrt[4]{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = A$ و $x = B$ خواهیم داشت

$$y_1=\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)-x^4}{A^3+A^2B+AB^2+B^3}$$

عبارت صورت نسبت به x ازدرجهٔ سوم می‌باشد وچنانچه صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم نموده و x را به سمت ∞ میل‌دهیم حد y_1 برابر خواهد شد با $\frac{a+b+c+d}{4}$ وبه‌طریق‌مشابه حد y_2 درازاء $x \to \infty$ برابر خواهد شد با $\frac{a'+b'+c'}{3}$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{a'+b'+c'}{3}$$

حل مسئلهٔ ۱۴۲۹ـ در هر مثلث داریم

$$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$$
$$\frac{a^2+c^2-b^2}{\cot g B}=\frac{2ac\cos B\cdot\sin B}{\cos B}$$
$$=2ac\sin B=\frac{abc}{R}$$

و به همین ترتیب مقدار هر یك از دو کسر دیگر نیز برابر با $\frac{abc}{R}$ به دست‌آمده‌رابطهٔ داده‌شده محقق خواهدبود.

پاسخهای درست رسیده از : قاسم اخوان ـ منصور معتمدی ـ حسین ارشام ـ مرتضی رودگری ـ حسن سعادتی سید عباس موسویان .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۰ ـ مقادیر $\cos A$ و $\cos B$ و $\cos C$ را از روابط کسینوسها در مثلث به دست‌آورده دررابطهٔ مفروض قرارمی‌دهیم کمحاصل این عبارت بعد از اختصار برابر خواهد شد با ۳

پاسخهای درست رسیده از : مرتضی رودگری ـ حسین ارشام ـ قاسم اخوان

حل مسئلهٔ ۱۴۳۱ـ چون ضرایب a و b و c تصاعد هندسی با مجموع ۷ تشکیل می‌دهند داریم

$$a+b+c=7 \quad \text{و} \quad b^2=ac$$

وچون ضریب زاویهٔ امتداد مجانب برابر با ۱ است پس :

$$1=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{ax^2+bx+c}{x\sqrt{x^2+2}}=a \quad \text{و} \quad a=1$$

و خواهیم داشت ($b^2=c$ و $b+c=6$) و از آنجا $b=2$ و $c=4.9$ بدست می‌آید

حل مسئلهٔ ۱۴۳۲ـ تعیین عدد $N=\overline{abc}$ باشرط زیر

$$(\overline{abc})_7=(abc)_6+(adc)_m$$

از بسط رابطه و مرتب نمودن آن خواهیم داشت

$$(m^2-11)a+(m-1)b+c=0$$

چون a و b و c مقادیر مثبت هستند و $m>1$ بناچار $m^2-11<0$ بوده و $m=2$ قابل قبول است (زیرا اگر $m=2$ فرض شود $a=b=c=1$ بوده و رابطه بر قرار نیست) و ازآنجا $-2a+2b+c=0$ و نتیجه می‌شود که $c=0$ و ($c<3$ و b و a) وبالاخره جوابهای مسئله به‌ترتیب زیر بدست می‌آید

$$N=110 \text{ و } 220 \text{ و } 102 \text{ و } 212$$

حل مسئلهٔ ۱۴۳۳ـ در مثلث MFF' به فرض $MF=m$ و $MF'=n$ داریم

$$\tan\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{(p-FF')(p-MF)}{p(p-MF')}}$$
$$=\sqrt{\frac{(a-c)(a+c-m)}{(a+c)(a+c-n)}}$$

و

$$\tan\frac{\omega'}{2}=\sqrt{\frac{(a-c)(a+c-n)}{(a+c)(a+c-m)}}$$

نتیجه خواهد شد $\tan\frac{\omega}{2}\tan\frac{\omega'}{2}=\frac{a-c}{a+c}$

با توجه به فرمولهای مربوط به مقادیر شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث رابطه‌های دیگر محقق خواهد شد

پاسخ درست رسیده از: حسن سعادتی

حل مسئلهٔ ۱۴۳۴ ـ اگر دایرهٔ بقطر $A_1A'_1=2a$ دایره‌ای باشدکه تصویرآن بیضی مفروض و $P'Q'$ و $R'S'$ دو وتر از این دایره باشدکه در M' متعامد بوده و PQ و RS تصویرهای آنها باشد داریم

$$M'P'=MP \quad \text{و} \quad M'Q'=MQ$$
$$MR=M'R'\times\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad MS=M'S'\times\frac{b}{a}$$
$$M'P'\cdot M'Q'=M'R'\cdot M'S'$$

$$MP\cdot MQ=MR\cdot MS\cdot\frac{b^2}{a^2} \quad \text{یا}$$

$$\frac{MP\cdot MQ}{MR\cdot MS}=\frac{b^2}{a^2}$$

حل مسئلهٔ ۱۴۳۵ـ قوت نقطهٔ C نسبت به دایرهٔ (A و B و E) عبارتست از

$$\overline{CN}\cdot\overline{CE}=\overline{CA}\cdot\overline{CB}=K$$

و نتیجه می‌شود که در انعکاس به‌قطب C و بـه قوت K نقطهٔ M منعکس نقطهٔ E می‌باشد ووقتی E عمودمنصف AB را بپیماید M دایرهٔ منعکس این عمود منصف را خواهد پیمود .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۶ـ در هـر چهارضلعی خطوطی کـه اوساط اضلاع مقابل را به یکدیگر وصل می کنند یا خطی که اوساط دو قطررا به هم وصل می کند در یك نقطه متقارب بوده ومنصف یکدیگر می‌باشند . درچهار ضلعی محاطی ABCM اگر I وسط قطر AC و J وسط قطر BM باشد P وسط I J خواهد بود وچون B ثابت است و M بر دایره حرکت می کند مکان J دایره‌ای مانند (Γ') که در تجانس ($\frac{1}{2}$ و B) مجانس دایرهٔ (Γ) می‌باشد ومکان P دایره‌ای است مانند (Γ'') که‌درتجانس ($\frac{1}{2}$ و I) مجانس دایرهٔ (Γ') است.

حل مسئلهٔ ۱۴۳۷ـ معادلهٔ درجهٔ سوم زیررا در نظر می گیریم

$$z^3-az^2+(a^2-1)z-a^2+2=0$$

بنابر روابط داده شده x و y و ۲ جوابهای معادلهٔ بالا هستند و بنابر روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجـهٔ سوم روابط مطلوب محقق خواهد شد .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۸ـ

۳ − مضرب۱۳ = ۴۴۴۴ و ۳ + مضرب۱۳ = ۷۷۷۷

+مضرب۱۳ = $۳^{۴۴۴۴}$ + (مضرب۱۳ + ۳)^{۴۴۴۴} = $۷۷۷۷^{۴۴۴۴}$

(مضرب۱۳ + ۳)^{۱۱۱۱} + مضرب ۱۳ = $(۳^۴)^{۱۱۱۱}$

= $۳^{۱۱۱۱}$ + مضرب۱۳

$۴۴۴۴^{۷۷۷۷}$ = ۱۳ مضرب + $(-۳^۷)^{۱۱۱}$

$-۳^{۱۱۱۱}$ = مضرب ۱۳ −

مضرب ۱۳ = $۴۴۴۴^{۷۷۷۷}$ + $۷۷۷۷^{۴۴۴۴}$

پاسخ درست رسیده از حسین ارشام .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۹ـ از بسط رابطه نتیجه خواهد شد.

$$۲۵۹(۲d+c)=۴۰b+۵۸۵e-۱۵۶a$$

مضرب ۷ = $۵b+۴c-۲a$

$b<۳$ است زیرا رقم b در دستگاه به مبنای ۳ به‌کار رفته است و چون $b>a\neq۰$ پس $a=۱$ و $b=۲$ و ازآنجا $c=۵$ و داریم

$۲d+c=۱۱$ و $۲۵۹(۲d+c)=۲۸۴۹$

c باید فرد باشد و چون $c<۶$ پس $c=۳$ قابل قبول بوده و $d=۴$ می‌شود

حل مسئلهٔ ۱۴۴۰ـ عـدد مفروض بـه صورت زیـر نوشته می‌شود

$$\overline{abc}(۱۰۰۰^۵+۱۰۰۰^۴+۱۰۰۰^۳+۱۰۰۰^۲+۱۰۰۰+۱)=\frac{\overline{abc}(۱۰۰۰^۶-۱)}{۹۹۹}$$

$$=\frac{\overline{aba}(۱۰^{۱۸}-۱)}{۹۹۹}$$

بنابر قضیهٔ فرما این عدد بر ۱۹ قابل قسمت است

حل مسئلهٔ ۱۴۴۱ـ رابطهٔ تابع به صورت زیر نوشته مـی‌شود

$$\frac{1}{y^2}=x^2+ax+b$$

$$\frac{-2y'}{y^3}=2x+a \quad \text{یا} \quad \frac{y'}{y^3}=-x+\frac{a}{2}$$

$$\frac{y''y^3-3y'^2y^2}{y^6}=- \quad \text{یا} \quad y''y-3y'^2+y^4=0$$

پاسخ رسیده از حسین ارشام .

حـــل مسائـــل شماره ۱۱

کلاس چهارم طبیعی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۸ ـ بـه فـرض اینکه a عـدد مثبت باشد داریم

$(a-۱)^2=a^2-2a+۱\geq۰$ یا $a^2+۱\geq2a$ و

$$\frac{a^2+۱}{a}\geq۲ \quad \text{یا} \quad a+\frac{۱}{a}\geq۲$$

تساوی وقتی است که $a=۱$ باشد

ثانیاً داریم

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq۲ \quad , \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq۰ \quad , \quad \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq۰$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین نا مساویهای بالا به دست خواهد آمد

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq 6$$

پاسخهای درست رسیده از : علی اصغر یوسفی نظر حسینی یزدی ـ فریدون امین‌زاده دبیرستان فردوسی رضائیهٔ ـ دانش عمرانی دبیرستان هدایت سنندج ـ حسین ذوالفقاری دبیرستان قناد بابل ـ ابوالحسن گوران ـ علیرضا حق شناس دبیرستان شاهپور رشت ـ عبدالحسین قانع دبیرستان ایرانشهر یزد ـ محمد صدیق دبیرستان شاهپور رشت ـ حسین جعفری ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ عباسعلی کوچکی دبیرستان ایرانشهر یزد ـ خسرو ستوده دبیرستان شاهپور شیراز ـ ولی‌الله اردشیری.

حل مسئلهٔ ۱۷۲۹ـ عبارتهای A و B به صورت زیر تجزیه می‌شوند

$$A=(8x-7)(1-4x) \quad B=(x+2)(1-4x)$$

$$1)\ \frac{A}{B}=\frac{8x-7}{x+2}$$

$$2)\ \frac{A}{B}=8 \rightarrow 8x-7=8x+16 \quad و \quad -7=16$$

غیر ممکن است

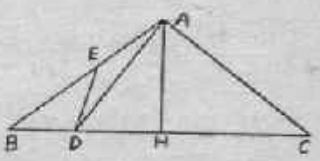
$$3)\ \frac{A}{B}<1 \quad یا \quad \frac{8x-7}{x+2}-1<0 \quad یا$$

$$\frac{7x-9}{x+2}<0 \quad و \quad -2<x<\frac{9}{7}$$

پاسخهای درست رسیده از : حسین تبریزی دبیرستان ناصرخسرو ـ ولی‌الله اردشیری ـ سیدمحمدکاظم عابدینی ـ حسین جعفری عبدالحسین قانع ـ ابوالحسن گوران ـ فریدون امین‌زاده ـ دانش عمرانی ـ علی صحرا نورد دبیرستان محمد قزوینی ـ سید مهدی حمیدی دبیرستان شاهپور شیراز ـ علی‌اکبر قولیج ـ حسین امین الهی کلاس سوم دبیرستان امروز ـ احمد ارتفاعی ـ فرهنگ نادری علیزاده دبیرستان فردوسی تبریز (حل کامل مسائل ارسال شود) ـ طلعت مشکین دبیرستان فاطمه سیاح.

حل مسئلهٔ ۱۷۳۰ـ ارتفاع AH از مثلث را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم

$$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2=$$
$$=6400+3600$$
$$=10000$$
$$AB=AC=100$$



$$\frac{BD}{AB}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20} \quad و \quad \frac{BE}{BC}=\frac{56}{160}=\frac{7}{20}$$

دو ضلع از مثلث BDE با دو ضلع از مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب بوده و زاویهٔ بین آنها مشترک است پس دو مثلث متشابهند، با نسبت تشابه ۷ بر ۲۰ و درضمن $DE=BD=35$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH داریم

$$\overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=3600+2025=5625$$
$$AD=75 \quad و \quad \overline{AD}^2+\overline{AC}^2=5625+10000$$
$$=15625=\overline{DC}^2$$

و مثلث ACD در زاویهٔ A قائمه است

پاسخهای درست رسیده از : سید مهدی حمیدی ـ دانش عمرانی ـ فریدون امین‌زاده ـ عبدالحسین قانع ـ حسین جعفری عباسعلی کوچکی ـ ولی‌الله اردشیری ـ حسین تبریزی ـ حسن منصوری کلاس دوم دبیرستان رهنما ـ حسین مظفریان رضائیه هوشمند وجدانی کلاس سوم دبیرستان رضا پهلوی تجریش ـ عبدالرحمن چگنی زاده دبیرستان پهلوی دزفول ـ طلعت مشکین ناصر نهاوندی پور دبیرستان مروی ـ بهنام زرقانی ـ حسن یزدانی نژاد ـ ستار اسفندیاری ـ محسن اسفندیاری دبیرستان دکتر نصیری ـ رحمت‌الله صالحی دبیرستان امیرکبیر

کلاس چهارم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۱ـ طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم خواهیم داشت.

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4+\sqrt{3}+2(\sqrt{3}+1)}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{3(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=\ldots=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

$$2\times\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$
$$\frac{2\times 1}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1}$$
$$\frac{2}{2-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1-1}=\frac{2}{3}$$

و حاصل طرف اول برابر خواهد شد با

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=2$$

پاسخهای درست رسیده از : عباسعلی کوچکی ـ

حسین تبریزی ـ هوشمند وجدانی ـ ولی‌الله اردشیری ـ عبدالحسین‌قانع ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ عباسعلی نقدی دبیرستان امیرکبیرلنگرود ـ حسین نجفی ثانی دبیرستان‌البرز فریده رباطی دبیرستان نوباوگان ـ همایون مهاجر دبیرستان هدف ۳ احمد میرنژاد ـ ابراهیم اوصیاء دبیرستان قناد بابل کامبیز علوی دبیرستان هدف ۱ ـ دانش‌عمرانی ـ احمد داروئی دبیرستان قریب ـ عبدالرحیم حاج طلب دبیرستان قطب دزفول سعید شریعتمداری دبیرستان هدف ۱

حل مسئلهٔ ۱۷۳۲ ـ رابطهٔ مفروض به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sqrt[p]{b+x}\left(\frac{x+b}{bx}\right)=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$$

$$\frac{(x+b)^{p+1}}{b^p x^p}=\frac{c^p x}{a^p}$$

یا $$(x+b)^{p+1}=\frac{c^p b^p}{a^p}x^{p+1}$$

و $$\frac{x+b}{x}=\sqrt[p+1]{\frac{c^p b^p}{a^p}}\quad x=\frac{b}{\sqrt[p+1]{\frac{c^p b^p}{a^p}}-1}$$

پاسخهای درست رسیده از : احمد داروئی ـ دانش عمرانی ـ کامبیز علوی نژاد ـ عبدالحسین قانع ـ عباسعلی کوچکی ولی‌الله اردشیری

پاسخهای رسیده است : فریده رباطی ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین تبریزی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۳ ـ معادله به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^2=4 \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a}+\frac{a}{x}\pm 2=0$$

و $$x^2+a^2\pm 2ax=0 \quad \text{یا} \quad (x\pm a)^2=0$$

$$x=\pm a$$

پاسخهای درست رسیده از : محمدرضا عباس زاده ثانی دبیرستان خوارزمی ـ همایون مهاجری ـ حسین نجفی ثانی ـ عباسعلی نقدی ـ سیدمحمدکاظم‌عابدینی ـ ولی‌الله اردشیری هوشمند وجدانی ـ حسین تبریزی عباسعلی‌ـ کوچکی ـ حسین مظفریان ـ فریدون امین زاده ـ حجت‌الله‌افقهی ـ کامبیزعلوی نژاد ـ ابراهیم اوصیاء ـ هوشنگ شهریاری دبیرستان کرمان عبدالحسین قانع ـ پرویز برادران شکوهی دبیرستان فردوسی تبریز ـ سیدمهدی نوریان‌نجف آباد ـ سیدمهدی حمیدی ـ ناصر نهاوندی‌پور ـ بهنام زرقانی ـ حسین‌ذوالفقاری ـ حسین‌جعفری ـ علی اکبرقولیج ـ علی‌اصغر یوسفی‌نظرحسینی ـ سیدهرمز رحمانی ـ فریده رباطی‌احمدوماه‌رخ‌لسان‌پزشکی ـ زهرا ثباتی دبیرستان‌حجت احمدارتفاعی ـ حسین امین‌الهی ـ علی‌صحرا نوردـ ستاراسفندیاری رحمت‌الله صالحی ـ داود قریشی دبیرستان داورپناه ـ احمد داروئی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ محمد رضا رستم تباح دبیرستان‌قناد ـ محمدکریم روشن ـ حسین امیرحسینی دبیرستان دارالفنون‌شهریارمهاجر ـ ذبلاشقاقی ـ اسماعیل گلجاریان‌دبیرستان قنادبابل ـ رمضان صیامی دبیرستان البرز ـ منصور نهاوندی پور عبدالرحمن چگنی‌زاده .

حل مسئلهٔ ۱۷۳۴ ـ عبارت داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$S=2\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{(\frac{2}{3})^2}\times\cdots\times 2^{(\frac{2}{3})^n}$$

$$S=2^{1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\cdots+(\frac{2}{3})^n}$$

$$\lim\left[1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\cdots+(\frac{2}{3})^n\right]=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

$$\lim S=2^3=8$$

پاسخهای درست رسیده از : عبدالحسین قانع ـ دانش عمرانی ـ کامبیزعلوی‌نژاد ـ عباسعلی کوچکی ـ حجت‌الله افقهی احمدداروئی ـ رمضان صیامی ـ اسفندیار حق‌جو دبیرستان‌شاهپور شیراز ـ سید مهدی حمیدی .

حل مسئلهٔ ۱۷۳۵ ـ با توجه به رابطهٔ $xz=y^2$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{3}(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{3}(x+y+z)\sqrt[3]{y^3}$$

$$=\frac{1}{3}(xy+y^2+yz)=\frac{1}{3}(xy+xz+yz)$$

پاسخهای رسیده‌درست از : طلعت‌مشکین‌سیدمهدی حمیدی ـ اسفندیار حق جو ـ منصور نهاوندی پور ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ شهریار مهاجر ـ محمد رضا رستم شباح ـ ولی‌الله اردشیری ـ عباسعلی کوچکی ـ کامبیزعلوی نژاد ـ دانش‌عمرانی عبدالحسین قانع ـ رحمت‌الله صالحی ـ علی صحرانورد ـ احمد ارتفاعی ـ علی‌اکبرقولیج ـ حسین ذوالفقاری ـ ناصرنهاوندی‌پور ـ محمودامجدی دبیرستان صفائی سمنان ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین تبریزی ـ همایون مهاجری ـ محمد رضا عباس زاده حسن‌یزدانی نژاد ـ ابراهیم اوصیاء ـ جلیل مکی ـ احمدداروئی محسن‌اسفندیاری ـ ابوالحسن گوران ـ بهنام زرقانی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ محمدکریم روشن ـ اسماعیل گلجاریان سید هرمز رحمانی .

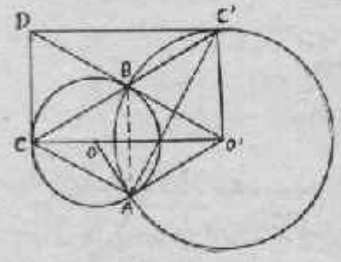
حل مسئلهٔ ۱۷۳۶ـ هر یك از مثلثهای BMI و CNI متساوی الساقین بوده و $BM=MI$ و $CN=NI$ است پس $MN=BM+CN$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMN داریم

$$AM.AN=AK.MN \quad \text{یا} \quad AK=\frac{AM.AN}{BM+CN}$$

چنانچه AK نصف ارتفاع AH باشد N وسط AC بوده و $IN=NC=AN$ می‌باشد و لازم می‌آید که زاویهٔ AIC قائمه باشد و این درصورتی است که نصف زاویهٔ C برابر با ۴۵° و تمام زاویهٔ C قائمه باشد که غیر ممکن است .

پاسخهای درست رسیده از : علی اکبر قولیج ـ عبدالحسین قانع ـ دانش‌عمرانی ـ حسن منصوری کلاس دوم دبیرسنان رهنما ـ عباسعلی کوچکی ـ حسین نجفی ثانی ـ حسین جعفری ـ بهنام زرقانی ـ شهریار مهاجر ـ

حل مسئلهٔ ۱۷۳۷ ـ از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOO' به دست می‌آید $O'A=R\sqrt{3}$



۲) چون ضلع OA از مثلث قائم ـ الزاویهٔ AOO' نصف وتر OO' است اندازهٔ زاویهٔ AO'O برابر ۳۰° و اندازهٔ زاویهٔ AOO' برابر ۶۰° است

۳) دو نقطهٔ A و B نسبت به OO' قرینه‌اند پس

$$CB=CA=AB$$

زیرا اندازهٔ کمان AC برابر با اندازهٔ زاویهٔ COA و برابر با ۱۲۰° است . مثلث ABO' نیز متساوی الاضلاع است و $AO'=O'B=AB$ و چون زاویهٔ O'BC' زاویهٔ خارجی مثلث CBO' است اندازهٔ آن برابر با دو برابر اندازهٔ زاویهٔ BCO' و برابر با ۶۰° به دست می‌آید پس مثلث BC'O' متساوی‌الاضلاع بوده و چهار ضلعی ABC'O' لوزی می‌باشد و از آنجا اندازهٔ زاویهٔ BC'A برابر ۳۰° و از زاویهٔ BCA برابر ۶۰° بوده مثلث ACC' با مثلث AOO' متشابه است. وچون $AC=AO'=R\sqrt{3}$ نسبت تشابه دو مثلث برابر با

$$\frac{AC}{AO}=\frac{R\sqrt{3}}{R}=\sqrt{3}$$

است و داریم

$$AC'=3R \quad \text{و} \quad CC'=2CB=2R\sqrt{3}$$

۴) چهار ضلعی CDC'O' مستطیل است و با توجه به اندازه‌های زاویه‌های حساب شده معلوم خواهدشد که دو قطر آن از B گذشته و B مرکز تقارن آن می باشد

پاسخهای رسیده از : طلعت مشکین ـ زهرا اثباتی ـ داوود پرویزی از ساوه ـ حسین جعفری ـ حسین نجفی ثانی ـ عباسعلی کوچکی ـ حسن منصوری کلاس دوم ـ دانش عمرانی ـ علی اکبر قولیج ـ هوشمند وجدانی ـ محمود امجدی ـ احمد مشرفی ـ عباسعلی نقدی ـ ابراهیم اوصیاء ـ هوشنگ شهریاری حجت‌الله افتهی ـ احمد میر نژاد ـ محسن اسفندیاری ـ ناصر نهاوندی پور ـ احمد ارتفاعی ـ عبدالحسین قانع ـ بهنام زرقانی احمد داروئی ـ فریدون امین زاده ـ اسماعیل گلجاریان

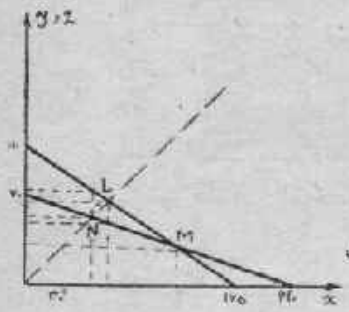
کلاس پنجم طبیعی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۸ ـ بنابر فرض داریم

$$x+y+z=180^\circ \quad \text{و} \quad z=\frac{y}{2}+15^\circ$$

بین دو رابطه یك دفعه z و یك دفعه y را حذف می‌کنیم ، نتیجه می‌شود

$$y=-\frac{2}{3}x+110 \quad \text{و} \quad z=-\frac{1}{3}x+70$$



۲) نمایش هندسی دو تابع طبق شکل زیر است (x و y و z مقادیر مثبت می‌باشند)

۳) از روی نمودار معلوم می‌شود که در ازاء ۳ مقدار از x مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌باشد

اولا در ازاء طول نقطهٔ M که در آن $y=z$

ثانیاً در ازاء طول نقطهٔ N (نقطهٔ تلاقی نمودار تابع z با نیمساز محورها) که در آن $x=z$

ثالثاً در ازاء طول نقطهٔ L که در آن $x=y$

مثلث ABC هیچگاه نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد زیرا برای این‌کار لازم است که نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو تابع بر نیمساز محورها واقع باشد وچنین نیست

۴) از راه محاسبه کافی است که دستگاههای زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ y=2z-30 \\ y=z \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=120^\circ \\ y=30^\circ \\ z=30^\circ \end{cases} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} x+y+z=180^\circ \\ y=2z-30 \\ z=x \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=52{,}5^\circ \\ y=75^\circ \\ z=52{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=180^\circ \\ y=2z-30 \\ y=x \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x=66^\circ \\ y=66^\circ \\ z=48^\circ \end{vmatrix}$$

حل مسئلهٔ ۱۷۳۹ ـ اولا داریم

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x \text{ و}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \text{ و}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$$

$$y=-\cos x+\cos x+\sin x+\sin x=2\sin x$$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot g\, x \text{ و } tg\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cot g\, x$$

$$tg\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=-tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cot g\, x$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot g\, x \quad \text{و}$$

$$z=-\cot g\, x-\cot g\, x-\cot g\, x+\cot g\, x$$
$$=-2\cot g\, x$$

ثانیاً داریم

$$y^2z-z=0 \text{ یا } z(y^2-1)=0$$
$$\text{یا } -2\cot g\, x\,(4\sin^2 x-1)=0$$

$$\cot g\, x=0 \text{ و } x=K\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$4\sin^2 x-1=0 \quad \sin x=\pm\frac{1}{2} \text{ و } x=K\pi\mp\frac{\pi}{6}$$

ثالثاً به فرض $\sin x=\frac{3}{5}$ و x کمان منفرجه:

رادیان $y=\frac{6}{5}$ و $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\frac{4}{5}$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$=-\frac{4}{5}\cos\frac{6}{5}-\frac{3}{5}\sin\frac{6}{5}$$

پاسخهای رسیده از: حسجت‌الله افقهی ـ عباسعلی کوچکی.

کلاس پنجم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۰ ـ برای اینکه دوخط D و Δ متعامد باشند باید.

$$m_D \cdot m_\Delta=-1 \text{ یا } a(a-2)=-1$$
$$\text{یا } a^2-2a+1=0 \text{ و } a=1$$

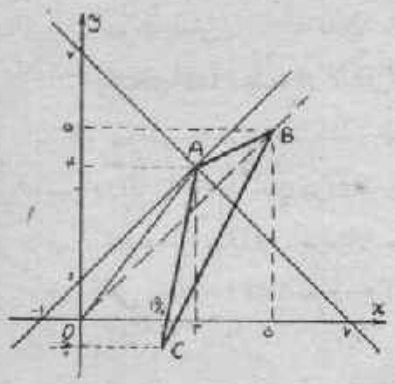
وچون دو خط درنقطهٔ به‌عرض ٤ متقاطعند پس

$$\begin{cases} 4=x+b-4 \\ 4=-x+b+2 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=3 \text{ و } b=5$$

۲) الف ـ دوخط

$$y=x+1$$
$$y=-x+7$$

مطابق شکل رسم شده‌اند



ب ـ داریم $A(3\text{ و }4)$ و فرض می‌کنیم $B(\alpha\text{ و }\alpha)$ اگر OA قاعدهٔ مثلث ABO اختیار شود

ارتفاع آن برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ B از خط OA، معادلهٔ OA عبارتست از $4x-3y=0$ وفاصلهٔ B از OA می‌شود

$$OA=\sqrt{9+16}=5 \text{ و } d=\frac{|3\alpha-4\alpha|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|\alpha|}{5}$$

$$S=\frac{5}{2}\times\frac{|\alpha|}{5} \text{ یا } 2{,}5=\frac{|\alpha|}{2} \text{ و } \alpha=\pm 5$$

وچون B بر نیمساز ربع اول واقع است $\alpha=5$ قابل قبول است (در صورت مسئله اشتباه شده و عدد مساحت مثلث ۱۷٫۵ چاپ شده است که درازاء آن $\alpha=35$ به دست می‌آید راه عمل فرق نمی‌کند)

ج ـ به فرض $A(3\text{ و }4)$ و $B(5\text{ و }5)$ واینکه O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد شعاع این دایره برابر است با فاصلهٔ O تا هر یك ازاضلاع AB و AC و BC. معادلهٔ AB عبارتست از $x-2y+5=0$ و فاصلهٔ O تا این خط برابراست با $\sqrt{5}$ معادلهٔ خطی که با ضریب زاویهٔ m بر A گذشته‌است عبارتست از $y=mx-3m+4$، فاصلهٔ O را تا این خط تعیین کرده مساوی $\sqrt{5}$ قرارمی‌دهیم

$$\frac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \text{ یا } 4m^2-24m+11=0 \text{ و}$$

$m=\frac{1}{2}$ و $m=\frac{11}{2}$ درازاء $m=\frac{1}{2}$ معادلهٔ AB حاصل می‌شود و درازاء $m=\frac{11}{2}$ معادلهٔ خط AC به صورت $y=\frac{11}{2}x-\frac{25}{2}$ به‌دست‌می‌آید. به طریق مشابه معادلهٔ خط BC به‌صورت $y=2x-5$ به‌دست‌می‌آید. بامعلوم‌بودن معادله‌های

AC و BC مختصات C حساب می‌شود $C\left(\frac{۱۵}{۷}-و\frac{۵}{۷}\right)$.

به سادگی معلوم خواهد شد که O درخارج مثلث ABC واقع بوده ومرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث می‌باشد.

پاسخهای درست رسیده از: مصطفی آقاجانی دبیرستان جلوه ـ محمدکریم روشن دبیرستان قناد بابل ـ حمید نادری ـ شعار ـ حسین نعمتی.

پاسخهای رسیده از: ولی‌الله اردشیری ـ بهروز ارشاقی ـ عیسی حیدری دبیرستان خرد ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین رزاقی‌زاده دبیرستان مروی ـ حبیب‌الله پوردشتی دبیرستان وحید ـ محمدعلی مهدوی دبیرستان سخن.

حل مسئلهٔ ۱۷۴۱ ـ تابع $f(x)$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$y=f(x)=A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-b)^{\lambda}+K$$

مشتق تابع به صورت زیر خواهد بود

$$y'=f'(x)=A(x-a)^{\alpha-۱}(x-b)^{\beta-۱}\dots(x-b)^{\lambda-۱}Q(x)$$

چون y بر 'y بخش پذیر است بنابراین $K=۰$ و $Q(x)=۱$ وچون تابع را نسبت به x ازدرجهٔ m فرض کنیم داریم $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda=m$

وچنانچه‌تعداد عاملهای تابع را n فرض کنیم درجهٔ چند جمله‌ای مشتق برابر شده است با

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda-n=m-n$$

اما چون اختلاف درجهٔ تابع ومشتق یك واحد است پس $n=۱$ و تابع به صورت زیرخواهد بود

$$y=f(x)=A(x-a)^{m}$$

و چون $f(۱)=۰$ پس $a=۱$ و چون $f(۰)=۱$ پس $A=(-۱)^{m}$ و در نتیجه تابع مطلوب عبارت خواهد شد از:

$$x=(-۱)^{m}(x-۱)^{m}=(۱-x)^{m}$$

پاسخهای رسیده از: فیروزپایرامی دبیرستان ادیب ـ خسرو موحد دبیرستان ادیب (هر دو نفر از معلومات خارج از برنامهٔ متوسطه استفاده نموده و جواب صحیح را به دست آورده‌اند)

حل مسئلهٔ ۱۷۴۲ ـ از جمع و تفریق نظیر به نظیر طرفین دومعادله حاصل می‌شود.

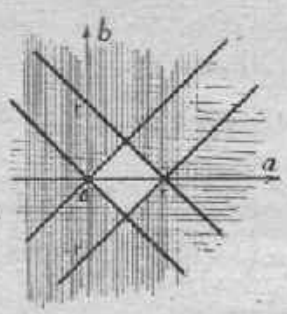
$$\cos ۲x=b-a+۱ \quad و \quad \cos ۲y=a+b-۱$$

ثانیاً برای آنکه دستگاه ممکن باشدلازم وکافی است

$$\begin{cases}|a+b-۱|\leq ۱\\ |b-a+۱|\leq ۱\end{cases}$$

یا

$$\begin{cases}(a+b-۱)^{۲}-۱\leq ۰\\ (b-a+۱)^{۲}-۱\leq ۰\end{cases}$$



$$\begin{cases}(a+b)(a+b-۲)\leq ۰\\ (b-a)(b-a+۲)\leq ۰\end{cases}$$

نمایش هندسی هریك از معادله های $a+b=۰$ و .... طبق شکل‌رسم شده است و ناحیه‌ای که هاشور نخورده است مکان $M(a\ و\ b)$ است برای‌آنکه دستگاه مفروض ممکن باشد

ثالثاً به فرض مقادیر داده شده a وb داریم

$$\cos ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad و \quad ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \quad و \quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\cos ۲y=\frac{۱}{۲} \quad و \quad ۲y=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \quad و \quad y=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

پاسخهای درست رسیده از: محمد علی مهدوی ـ عیسی حیدری ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده دبیرستان امیر کبیر تویسرکان نصرت‌الله آقاجانی ـ حجت‌الله افقهی ـ فیروز پایرامی ـ خسرو موحد.

پاسخهای رسیده از: بهروز ساسانی‌دبیرستان کاظم‌زاده ایرانشهر ـ حسین نعمتی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ حبیب‌الله پوردشتی وحسین رزاقی‌زاده.

حل مسئلهٔ ۱۷۴۳ـ صفحهٔ H را عمود بر Δ اختیارمی‌کنیم ونقطهٔ تلاقی آن‌را با Δ به O وتصویرهای نقاط M وN وK و A و B وC وD را برصفحهٔ H با 'M و 'N و ... و 'D می‌نمائیم

۱) مثلث 'OM'K' متساوی‌الساقین است و 'N وسط 'M'K' واقع بوده ودرنتیجه N وسط MK می‌باشد

۲) بنابرخاصیت نیساز زاویه‌های داخلی وخارجی مثلث داریم

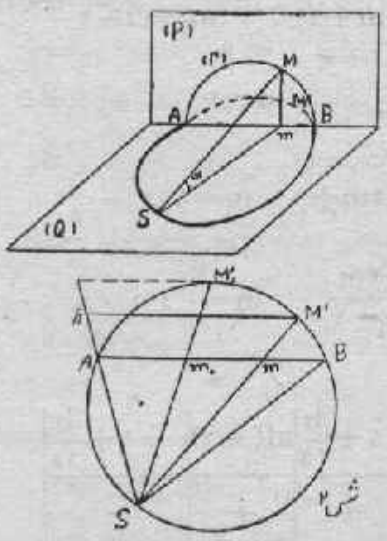
$$\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{OA'}{OB'}$$

وچون $OA'=a$ و $OB'=b$ و نسبت بین‌تصویرهای دو قطعه خط واقع در یك امتداد برنسبت‌آن دو قطعه خط است بنابراین

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{a}{b}$$

پاسخهای درست رسیده از : نصرالله آقاجانی ـ محمد علی مهدوی ـ غلامحسین طاهری‌فخاری ـ حسین نعمتی بهروز ساسانی .

حل مسئلهٔ ۱۷۴۴ ـ α زاویهٔ SM باسفحهٔ Q میباشد (درچاپ صورت مسئله به جای Q اشتباهی P چاپ شده است) m بر AB. فصل مشترك دوصفحه واقع خواهد شد



در مثلث ـ قائم‌الزاویهٔ SMm داریم

$$tg\alpha=\frac{Mm}{Sm}$$

یا $$tg^2\alpha=\frac{\overline{Mm}^2}{Sm^2}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم ـ

$$\overline{Mm}^2=Am\cdot mB$$

ودردایرهٔ ABS داریم

شکل ۲

$$AM\cdot mB=Sm\cdot mM'$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$tg^2\alpha=\frac{Sm\cdot mM'}{Sm^2}=\frac{mM'}{Sm}$$

۲) زاویهٔ حادهٔ α وقتی ماکزیمم است که $\frac{mM'}{Sm}$ ماکزیمم باشد . صفحهٔ Q را مانند شکل ۲ در نظر می‌گیریم بنابرقضیهٔ تالس داریم

$$\frac{mM'}{Sm}=\frac{AA'}{SA}$$

چون SA دارای مقدار ثابت است هریك از نسبتهای بالا و درنتیجه $tg\alpha$ و ازآنجا α وقتی ماکزیمم خواهد بود که AA' ماکزیمم باشد واین درحالتی است که $M'A'$ بر دایره مماس باشد و برای این‌کار باید که M' به وضع M'_0 وسط کمان AB باشد و دراین صورت SM'_0 نیمساز زاویهٔ ASB بوده و m_0 وازآنجا M_0 مشخص می‌شود .

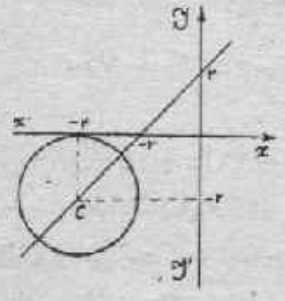
پاسخ درست رسیده از : حسین نعمتی

پاسخ رسیده از : نصرالله آقاجانی

کلاس ششم طبیعی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۵ ـ وقتی که دایره‌ای به مرکز C (α و β) درنقطهٔ به طول a بر $x'x$ مماس باشد چون شعاع نقطهٔ تماس بر $x'x$ عمود است لذا دو نقطهٔ C و نقطهٔ تماس دارای یك طول هستند یعنی $a=\alpha$ و چون فاصلهٔ خط مماس بردایره تا مرکز دایره برابر باشعاع دایره است پس $|\beta|=R$ همچنین وقتی دایره بر $y'y$ مماس باشد $\beta=b$ و $|\alpha|=R$ خواهد بود .

ثانیاً وقتی‌که طول نقطهٔ تماس دایره با $x'x$ برابر با -٤ باشد $\alpha=-٤$ است وچون مرکز دایره برخط بمعادلهٔ $y=x+٢$ واقع است ،



$\beta=-٤+٢=-٢$ و $R=|-٢|=٢$ بوده معادلهٔ دایرهٔ مطلوب عبارت خواهد شد از

$$(x+٤)^2+(y+٢)^2=٤$$

$$x^2+y^2+٨x+٤y+$$

$$١٦=٠$$

پاسخهای درست رسیده از : نصرت‌الله آقاجانی کلاس پنجم دبیرستان جلوه ـ هادی‌آموزگار دبیرستان رازی شاهی ـ ولی‌الله اردشیری ـ رضامائرین کرمانشاه ـ رمضانعلی صفائی پنجم ریاضی دبیرستان خرد .

پاسخهای رسیده از : قاسم انتصاری‌ـفرامرزپورقلی‌زاده محمدکریم روشن پنجم ریاضی دبیرستان قنادباپل

حل مسئلهٔ ۱۷۴۶ـ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$٢\sin^2x=١-\cos٢x=١+\sin٣x$$

$$\sin٣x=-\sin\left(\frac{\pi}{٢}+٢x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{٢}-٢x\right)$$

$$٣x+\left(-\frac{\pi}{٢}-٢x\right)=٢K\pi+\pi \quad \text{و}$$

$$x=٢K\pi+\frac{٣\pi}{٢}$$

$$٣x-\left(-\frac{\pi}{٢}-٢x\right)=٢K\pi \quad \text{و}$$

$$x=\frac{٢K\pi}{٥}-\frac{\pi}{١٠}$$

پاسخهای درست رسیده از : هادی آموزگار ـ محمد کریم روشن ـ جلیل مکی ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ قاسم انتصاری ـ محمدحسن عزیزیان ـ رمضانعلی صفائی ـ فرامرز رهبردبیرستان شرف ـ ولی‌الله اردشیری ـ نصرت‌الله آقاجانی ـ حبیب‌الله پوردشتی و حسین رزاقی‌زاده ـ محمدعلی مهدوی ـ خسروموحد ـ فرامرز پورقلی‌زاده .

کلاس ششم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۷ـ مشتق ثانی تابع داده‌شده راحساب کرده بعداز ساده‌کردن برابر باصفر قرار می‌دهیم، می‌شود:

$$(۲a+b)x^۳-(۶a-۳c)x^۲ \qquad (۱)$$
$$-(۶b+۶c)x+۴a+۴b+۲c=۰$$

از معادلهٔ

$$\frac{ax^۲+bx+c}{x^۲-۲x+۲}=x-\frac{۹}{۴}$$

بعداز ساده‌کردن ومرتب‌کردن نتیجه خواهد

$$۴x^۳-(۴a+۱۷)x^۲ \qquad (۲)$$
$$-(۴b-۲۶)x-۴c-۱۸=۰$$

دومعادلهٔ (۱) و (۲) باید دارای ریشه‌های مشترک باشند ولازم وکافی است که‌ضرایب جمله‌های همدرجهٔ آنها نظیر به‌نظیر متناسب باشند یعنی :

$$\frac{۲a+b}{۴}=\frac{۶a-۳c}{۴a+۱۷}=\frac{۶b+۶c}{۴b-۲۶}=\frac{۴a+۴b+۲c}{-۴c-۱۸}$$

ازحل دستگاه بالا نتیجه خواهد شد

$$a=۱ \text{ و } b=۲ \text{ و } c=-۵$$

ثانیاً تابع درازاء همهٔ مقادیر x معین واتصالی است .

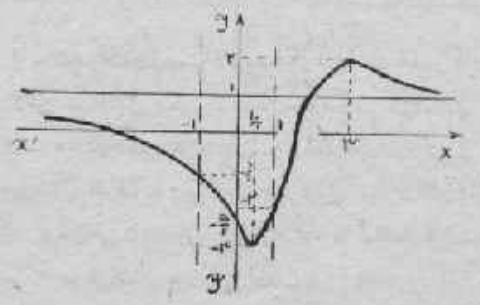
مشتق تابع عبارتست از

$$y'=\frac{۲(-۲x^۲+۷x-۳)}{(x^۲-۲x+۲)^۲} \quad \text{و}$$

$$y'=۰ \quad \text{و} \quad x=۳ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}$$

جدول تغییرات و شکل منحنی تابع بهشکل زیر است .

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۳		$+\infty$
y'		−		+	۰	+	۰	−	
y	۱	↘	$-\frac{۵}{۲}$	↗	۲	↗	−۳	↘	۱



ثالثاً معادلهٔ مثلثاتی داده شده را نسبت به $\cos u=x$ مرتب می‌نمائیم .

$$(m-۱)x^۲-۲(m+۱)x+۲m+۵=۰ \qquad (۱)$$

جوابهای معادله را بااعداد ۱و۱− متایسه می‌نمائیم

$$\Delta'=-m^۲-m+۶ \qquad m=-۳ \text{ و } ۲$$

$$af(۱)=(m-۱)(m+۲) \qquad m=۱ \text{و} -۲$$

$$۱+\frac{b}{۲a}=\frac{-۲}{m-۱} \qquad m=۱$$

$$af(-۱)=(m-۱)(۵m+۶) \quad m=۱ \text{ و } -\frac{۶}{۵}$$

$$-۱+\frac{b}{۲a}=\frac{-۲m}{m-۱} \qquad m=۰ \text{ و } ۱$$

m	Δ	af(۱)	$۱+\frac{b}{۲a}$	af(−۱)	$-۱+\frac{b}{۲a}$
$-\infty$	−	+	+	+	−
−۳	۰				
	+	+	+	+	−
−۲		۰			
	+	−	+	+	−
$-\frac{۶}{۵}$				۰	
	+	−	+	−	−
۰					۰
	+	−	+	−	+
۱		۰	∞	۰	∞
	+	+	−	+	−
۲	۰				
$+\infty$	−	+	−	+	−

ازجدول بالا معلوم می‌شود.

در ازاء $m=-۳$ معادله دارای جواب مضاعف قابل قبول $x=-\frac{۱}{۲}$ است .

در ازاء $-۳<m<-۲$ دوجواب قابل قبول دارد

در ازاء $m=-۲$ یك‌جواب معادله $x=۱$ و جواب دیگر نیزقابل‌قبول است.

در ازاء $-۲<m<-\frac{۶}{۵}$ معادله فقط یك‌جواب قابل قبول‌دارد.

در ازاء $m=-\frac{6}{5}$ تنها جواب قابل قبول معادله $x=-1$ است.

ودر ازاء سایر مقادیر m معادله جواب قابل قبول ندارد.

ثالثاً چون ازمعادلهٔ (۱) مقدار $y=m$ را بدست آوریم همان تابع مفروض حاصل می‌شود. خطوط $x=1$ و $x=-1$ را در شکل منحنی رسم می‌نمائیم که منحنی را به‌ترتیب در نقاط به عرضهای ۲ و $-\frac{6}{5}$ قطع می‌کنند. باتوجه به نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی همان نتایج قسمت ثانیاً حاصل خواهد شد.

پاسخهای درست رسیده از: رضامنصوری دبیرستان رهنما ـ یحیی فتاحی دبیرستان خوارزمی ـ رحیم خیردوست دبیرستان فردوسی‌رضائیه ـ فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمدتوکلی دبیرستان پهلوی اراك ـ یدالله ارضی دبیرستان پهلوی اراك ـ قاسم‌انتصاری ـ ابراهیم طاهری آشتیانی دبیرستان امیرخیزی تبریز ـ یدالله حاج‌جعفری ـ فرامرز رهبر دبیرستان‌شرف ـ محمود مسعودی.

پاسخ رسیده از: نصرت‌الله بابائی اهرستانی دبیرستان رهنما ـ رحیم محمدی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۸ـ معادلهٔ داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$2(2\cos^2 x-1)-4\cos\varphi\cos x+4\cos^2\varphi-1=0$$

$$4\cos^2 x-4\cos\varphi\cos x+4\cos^2\varphi-3=0 \qquad (1)$$

۱) بفرض $\cos x=u$ معادلهٔ بالا پادستگاه زیرهم‌ارز خواهد بود

$$\begin{cases} f(u)=4u^2-4u\cos\varphi+4\cos^2\varphi-3=0 \\ -1<u<1 \end{cases}$$

$$\Delta'=4\cos^2\varphi-4(4\cos^2\varphi-3)=12(1-\cos^2\varphi)$$
$$=12\sin^2\varphi$$

مبین معادله مثبت یاصفر است بنابراین معادله در ازاء همهٔ مقادیر φ دوجواب دارد

$$f(1)=(2\cos\varphi-1)^2\geq 0 \quad \text{و}$$
$$f(-1)=(2\cos\varphi+1)^2\geq 0$$
$$\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\cos\varphi \;\rightarrow\; -1\leq\frac{b}{2a}\leq 1$$

ونتیجه می‌شود که هردو جواب معادله همواره در فاصلهٔ $[-1,1]$ واقع بوده و قابل‌قبول می‌باشند

۲) ازحل معادلهٔ (۱) بدست می‌آید

$$\cos' x=\frac{2\cos\varphi+2\sqrt{3}\sin\varphi}{4}=\frac{1}{2}(\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi)$$

$$\cos'' x=\frac{2\cos\varphi-2\sqrt{3}\sin\varphi}{4}=\frac{1}{2}(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi)$$

بعد از تبدیل عبارت داخل پرانتز بحاصل‌ضرب

$$\cos x=\cos(\varphi-\frac{\pi}{3}) \quad \text{و} \quad \cos x=\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})$$

و جوابهای کلی معادله عبارت خواهد شد از

$$x=2K\pi\mp(\varphi-\frac{\pi}{3}) \qquad x=2K\pi\mp(\varphi+\frac{\pi}{3})$$

پاسخهای درست رسیده از: فرامرز رهبر ـ یدالله حاج‌جعفری ـ یدالله ارضی ـ محمدتوکلی ـ رضامنصوری ـ محمدعلی آل‌آقا ـ یوسف مصری دبیرستان کورش ـ رحیم خیردوست ـ فرامرز پورقلی‌زاده ابراهیم طاهری آشتیانی ـ خسرو موحد و فیروز بایرامی از کلاس پنجم دبیرستان ادیب ـ نصرت‌الله بابائی ـ هادی آموزگار دبیرستان رازی شاهی ـ حسین نعمتی پنجم ریاضی ـ رضا ماژین نصرت‌الله آقاجانی پنجم‌ریاضی دبیرستان جلوه ـ ولی‌الله اردشیری مهراسب قشقائی منصور دبیرستان شرف

حل مسئلهٔ ۱۷۴۹ـ اولاً باتوجه‌به اینکه $102=17\times 6$ داریم:

$$\overline{abc}=100a+10b+c=$$
$$102a-2a+10b+c$$

ونتیجه می‌شود

$$\overline{abc}\equiv 2a-10b-c \pmod{17}$$

و برای اینکه عدد بر ۱۷ بخش پذیر باشد یعنی داشته باشیم.

$$\overline{abc}\equiv 0 \pmod{17}$$

لازم وکافی است که داشته‌باشیم

$$(1) \qquad 2a-10b-c\equiv 0 \pmod{17}$$

ثانیاً از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم

$$2a-c\equiv 10b \pmod{17}$$
$$(2a-c)^2+2b^2\equiv 100b^2+2b^2=102b^2$$
$$(2a-c)^2+2b^2\equiv 0 \pmod{17}$$

تبصره ـ رابطهٔ (۱) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$۲a+۷b-c\equiv ۰ (\mathrm{mod}.\ ۱۷)$$

پاسخهای درست‌رسیده از: مهراب‌قشقائی ـ هادی آموزگار ـ نصرت الله بابائی ـ یوسف مصری ـ رضا منصوری محمد توکلی ـ یدالله ارضی ـ یدالله حساج جعفری ـ محمود مسعودی ـ رحیم خیردوست ـ فرامرز پورقلی زاده ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ فیروز بایرامی ـ رحیم محمدی ـ حسین نعمتی ـ یحیی‌فتاحی ـ سیدمحمدکاظم عابدینی‌لنگرودی ـ فرامرز رهبر .

حل مسئلهٔ ۱۷۵۰ ـ عددورقمی مطلوب را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم ، داریم

$$(\overline{ab})^۲=\overline{cdu} \quad \text{و} \quad (ba)^۲=\overline{udc}$$

از رابطه‌های

$$(\overline{ab})^۲=۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲ \quad \text{و}$$

$$(\overline{ba})^۲=۱۰۰b^۲+۲۰ab+a^۲$$

نتیجه می‌شود که $u=b^۲$ و $d=۲ab$ و $c=a^۲$ بنابراین $b<۳$ و $۲۰ab<۱۰۰$ و $a<۳$ و بدست خواهدآمد

$b=۱$	$b=۲$	$b=۳$
$a=۱$ و ۲ و ۳	$a=۱$ و ۲	$a=۱$

و عدد مطلوب یکی ازاعداد ۱۱ و ۲۱ و ۳۱ و ۱۲ و ۲۲ و ۱۳ و ۳۱ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از : رحیم خیردوست ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ یحیی فتاحی ـ یدالله ارضی ـ محمدتوکلی ـ رضامنصوری ـ یدالله حاج‌جعفری ـ کیوان‌پور قاسمی نصرت‌الله بابائی

حل مسئلهٔ ۱۷۵۱ـ داریم

$$(\overline{ab})^{\overline{ba}}=(\overline{bbbb})_۲$$

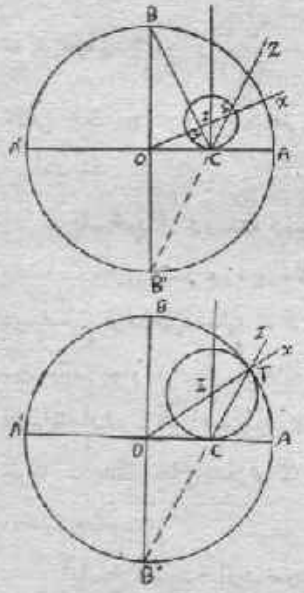
پس از بسط واختصار خواهیم داشت

$$b=\frac{a^۲}{۳۹-۱۰a}$$

و به دست می‌آید $a=۳$ و $b=۱$

پاسخهای درست رسیده از : رضا منصوری ـ محمد توکلی ـ رحیم محمدی ـ یوسف محمدی ـ فرامرز رهبر ـ هادی آموزگار ـ هرمز گرجی بیانی ـ فرامرز پورقلی‌زاده ـ نصرت‌الله بابائی ـ محمودمسعودی ـ نصرت‌الله آقاجانی ـ خسروموحد فیروزبایرامی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ کیوان پورقاسمی ـ رحیم خیردوست ـ محمدعلی آل‌آقا ـ یدالله ارضی ـ قشقائی منصور محمود عجمی ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ یدالله ارضی

حل مسئلهٔ ۱۷۵۲ـ اگر C نقطهٔ وسط OA باشد دو شعاع OB′ و IC از دایره‌های (O) و (I) موازی و هم‌جهت هستند و مرکز تجانس مستقیم دودایره S نقطهٔ تلاقی Ox با B′C بوده نیم خط CZ که از C در امتداد B′C رسم‌می‌شود مکان هندسی مرکز تجانس مستقیم دو دایره می‌باشد . دوشعاع OB و IC از دو دایرهٔ فوق‌الذکر متوازی و مختلف الجهت رسم‌شده‌اند و S′ نقطهٔ تلاقی BC با Ox مرکز تجانس معکوس و قطعه خط BC مکان هندسی مرکزهای تجانس معکوس دو دایره است .



۲) وقتی که دو دایرهٔ (O) و $(I_۱)$ مماس باشند T نقطهٔ تماس آنهاکه مرکز تجانس مستقیم‌آنهاست بر CZ واقع است بنابراین برای رسم دایرهٔ $(I_۱)$ که بر دایرهٔ (O) مماس باشد کافی‌است Ox را چنان رسم کنیم که از T نقطهٔ تلاقی B′C با دایرهٔ (O) بگذرد . درمثلث قائم‌الزاویهٔ $OCI_۱$ داریم

$$\overline{OC}^۲+\overline{CI_۱}^۲=\overline{OI_۱}^۲ \quad \text{و}$$

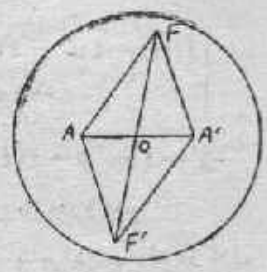
$$CI_۱=r .$$

$$\frac{R^۲}{۴}+r^۲=(R-r)^۲ \quad \text{و}$$

$$r=\frac{۳R}{۸}$$

پاسخهای درست رسیده از : یدالله ارضی ـ محمد توکلی‌ـرضا منصوری ـ کیوان پور قاسمی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی .

حل مسئلهٔ ۱۷۵۳ـ فرض‌می‌کنیم‌دایرهٔ (O) به‌مرکز O دایرهٔ اصلی و A نقطه‌ای از یک مقطع مخروطی باشد ، A′ قرینهٔ A نسبت به O نیز نقطه‌ای از مقطع مخروطی خواهدبود . دو حالت درنظر می‌گیریم .

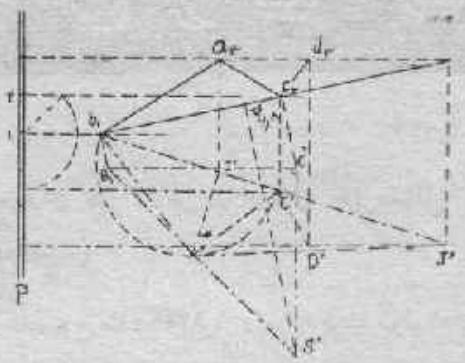


الف ـ A داخل دایرهٔ (O) باشد. مقطع مخروطی بیضی‌خواهد بود و F و F′ کانونهای آن نسبت به O قرینهٔ یکدیگرند و چهار ضلعی AFA′F′ متوازی‌الاضلاع بوده و چون $AF+AF'=۲a$ پس خواهیم داشت $FA+FA'=۲a$ و مکان F بیضی با کانونهای A و A′ و باطول قطر اطول ۲a می باشد و F′ نیز برهمین بیضی واقع خواهد بود .

ب ـ چنانچه A خارج دایرهٔ (O) واقع باشد مقطع مخروطی هذلولی بوده و با طریقی مشابه ثابت می‌شود که مکان کانونهای آن، هذلولی با کانونهای A و A' و با دایرهٔ اصلی برابر با دایرهٔ (O) می‌باشد.

پاسخ درست رسیده از : رضا منصوری.

حل مسئلهٔ ۱۷۵۴ـ مطابق اپوری که رسم شده است



نقاط c_4 و d_4 به کمک تسطیح صفحهٔ P حول یکی از افقیه‌هایش(درشکل بالا افقیهٔ رقوم ۱) بر صفحهٔ مقایسه بدست می‌آیند

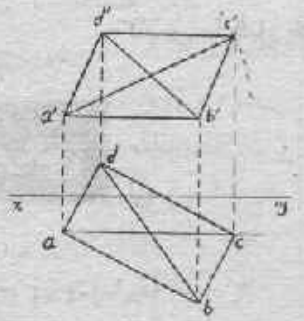
۳) در تسطیح صفحه J' نقطهٔ تلاقی B'C' با تسطیح افقیهٔ رقوم ۳(یعنی تسطیح a_4d_4) تعیین شده نقطهٔ I' مزدوج توافقی J' نسبت بدو نقطهٔ B' و C' معلوم شده است، I' پای نیمساز داخلی زاویهٔ BAC است و چون زاویهٔ DAI قائمه است نقطهٔ a_4 پیدا می‌شود.

ثانیاً به کمک تسطیح صفحهٔ قائم ماربر BC برصفحهٔ مقایسه، S' و s به دست می‌آید. طول حقیقی SC برابر ۵ و فراز آن عکس فراز خط b_1c_1 و برابر با $\frac{\sqrt{6}}{12}$ حساب می‌شود دوسانتی‌متر از آنجا رقوم S برابر $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ و تا تقریب ۰٫۱ برابر ۶٫۸ می‌باشد

پاسخهای درست رسیده از : محمد توکلی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری ـ محمد علی چیت‌ساز ـ نصرت‌الله بنایائی ـ رحیم خیر دوست ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ محمود عجمی ـ یدالله ارضی.

پاسخهای رسیده از: سید محمدکاظم عابدینی ـ فرامرز رهبر مهراسب قشقائی.

حل مسئلهٔ ۱۷۵۵ـ قطعه خط aba'b' افقیه است پس طول تصویر افقی آن یعنی ab = ۴ است. در تصویر افقی زاویهٔ abc قائمه بود و ac موازی خط الارض است



بنابراین تصویر افقی مستطیل رسم می‌شود. به مرکز a' و به شعاع برابر ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا رابط نقطهٔ c را در c' قطع کند (دو جواب بدست می‌آید) و تصویر قائم مستطیل مشخص خواهد شد

پاسخهای درست رسیده از : یدالله ارضی ـ رحیم خیر دوست ـ فیروز بایرامی و خسرو موحد دانش‌آموزان کلاس پنجم دبیرستان ادیب ـ علی‌اکبر پرویزی نژاد دبیرستان خوارزمی ۲ ـ فرامرز رهبر ـ محمد علی چیت ساز دبیرستان خوارزمی ۲ ـ محمود عجمی ـ کیوان پور قاسمی ـ فرامرز پورقلی زاده ـ محمد توکلی ـ رضا منصوری.

پس آن پنج ریال چه شد؟

دوسیب فروش هریك ۳۰ سیب داشتند. اولی سیبهای خودرا هر ۳ دانه‌ای ۵ ریال ودومی هردودانه‌ای ۵ ریال فروخت. درآخر روز که حساب کردند ازاین بابت ۱۲۵ ریال نصیب هر دو گشته بود. فردای آن روز تصمیم گرفتند که باهم شریك شوند وسیبها را به اتفاق بفروشند بازهم کدام ۳۰ سیب به‌بازار آوردند و سیبهای خود را روی‌هم ریختند وهر ۵ دانه‌ای را ۱۰ ریال فروختند (۳ دانه ۵ ریال به اضافهٔ ۲ دانه ۵ ریال). درپایان روز وقتی که حساب کردند پولی که به‌دست آورده بودند ۱۲۰ ریال بود یعنی ۵ ریال کمتر از روز پیش. هر یك از آنها خیال می‌کرد که دیگری این ۵ ریال را برداشته است. آیا واقعاً این طور بود؟ اگر نه پس آن ۵ ریال چه شده بود؟

مسائل برای حل

(مهلت قبول پاسخ تا بیستم فروردین ۱۳۴۴ ـ دانش آموزان هر کلاس از ارسال حل‌مسائل کلاس ما قبل خودداری نمایند.)

کلاس چهارم طبیعی

۳۲۷۵ـ فرض می‌کنیم

$$A=\sqrt{2}x^2+4x\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۱) مقدار A را درازاء $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ تعیین کرده حاصل را بصورت حاصلضرب عوامل درآورید.

۲) ریشه‌های معادلهٔ $A=0$ را پیدا کنید.

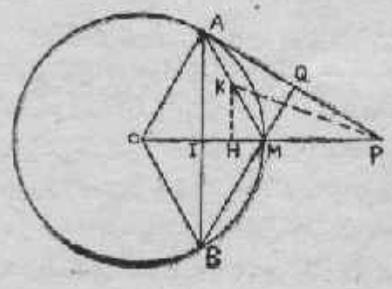
۳۲۷۶ـ بفرض $A=(4x^2-9)^2$ و $B=4(2x-3)^2$ مقادیر A و B را در ازاء

$$x=\sqrt{5}+3\sqrt{21+17\sqrt{37}}$$

مقایسه کنید

۳۲۷۷ـ دایرهٔ بمرکز O وبشعاع R مفروض است. شعاع OM ازآن دارسم کرده وعمودمنصف OM را نیز رسم می‌کنیم که دایره را در دونقطهٔ A وB قطع می‌کند.

۱) نوع چهارضلعی AMBO راتعیین کرده اندازهٔ هریك از زاویه‌های آن راحساب کنید.



۲)در نقطهٔ A مماسی بردایره رسم می‌کنیم که امتداد BM رادر Q و امتداد OM را در P قطع می‌کند.

الف ـ ثابت کنید مثلث AMQ قائم‌الزاویه است و طول اضلاع آن را برحسب R حساب کنید.

ب ـ نوع مثلث AMP رامعلوم کرده طول اضلاع آن‌را برحسب R بدست آورید.

ج ـ اگر I وسط OM و H وسط IM و K وسط AM باشد نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $\alpha=$ زKPH را پیدا کنید.

کلاس چهارم ریاضی

یك مسئله‌از جمله مسائل امتحان جبر ثلث اول کلاس چهارم طبیعی دبیرستان ثریا ، دبیر: محمدشهبازی

۳۲۷۸ـ سه‌عدد متناسب با اعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ طوری تعیین کنید که مجموع مربعات آنها ۲۴۰ باشد.

دوسئله ازجمله مسائل امتحان جبر کلاس‌چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان. دبیر: محمدعلی‌حبیبی ـ فرستنده : حسین‌جعفری

۳۲۷۹ـ به‌ازاءچه‌مقدار از m عبارت $1+2m-m^2$ ماکزیمم می‌باشد.

۳۲۸۰ـ مقادیر p وq راچنان‌تعیین کنید که خارج‌قسمت تقسیم عبارت x^3+px^2+qx+2 بر $x-1$ برابر با x^2+2x+3 باشد و باقیماندهٔ تقسیم را بدست آورید.

۳۲۸۱ـ از مردی پرسیدند چندسال‌داری؟ جواب داد مجموع سن‌من وزنم‌بادوبچهٔ۲ساله‌و۳ساله‌ام رویهم پنج‌برابرسن ۲۰سال گذشته‌ام می‌باشد. از زنش پرسیدند ، گفت از شوهرم کوچکترم ودر ۲۱سالگی ازدواج کرده‌ام . سن زن و مرد را که اعداد صحیح‌اند حساب کنید.

(غلامرضا تقوائی شهم ریاضی دبیرستان رازی شاهی)

۲۲۸۲ـ دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را حل کنید

(E.P.M.)

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+y+z=3 \\ x+\frac{1}{y}+z=3 \\ x+y+\frac{1}{z}=3 \end{cases}$$

۲۲۸۳ـ حدمجموع رشته جمل زیر را وقتی که عدهٔ جمله‌های هر رشته وتعداد رشته‌ها نامحدود باشد پیدا کنید.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\dots\right)+\dots+\left[\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+\dots\right]+\dots$$

(فرستنده : فرامرز رهبر ششم ریاضی دبیرستان شرف)

۲۲۸۴ـ نقاط A وB وC وD وE وF به‌ترتیب بردایرهٔ به‌مرکز O واقع بوده ومحیط آن را به‌شش قسمت متساوی تقسیم نموده‌اند. از A عمود AB_1 دایر OB واز B_1 عمود B_1C_1 را بر OC و از C_1 عمود C_1D_1 را بر OD رسم کرده واین عمل را تاتعیین نقطهٔ A_1 ادامه می‌دهیم. مجموع طولهای این عمودها را برحسب R شعاع دایره به‌دست آورید. چنانچه عمل رامجدداً ادامه داده ومرتب آن راتکرار کنیم حدمجموع طولهای عمودها چقدر خواهد بود.

(علی‌اکبر ابردفر دبیر دبیرستانهای قزوین)

۲۲۸۵ـ درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$) طولهای اضلاع جمله‌های یک تصاعد حسابی هستند. AH ارتفاع وارد بروتر می‌باشد. ثابت کنید:

۱) اضلاع هریک از دومثلث AHB و AHC تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند.

۲) شعاعهای دایره های محیطی ، شعاعهای دایره های محاطی داخلی ، ارتفاعهای نظیر وترها، نیمسازهای زاویه‌های قائمه‌ازمثلث‌های ABC وABH وACH به‌ترتیب تصاعدحسابی می‌سازند.

(علی‌اکبر ابردفر)

۲۲۸۶ـ به‌فرض $2^a=10$ و $\log_2 x=\frac{2a+10}{3}$ مقدار x را تعیین کنید.

از جمله سؤالهای امتحان نائب اول کلاس چهارم ریاضی دبیرستان ۶ بهمن بندرپهلوی
دبیر: سیدابراهیم نوری ـ فرستنده: ایرج صفرنیا

۲۲۸۷ـ به‌فرض اینکه داشته‌باشیم،

$x=\log_a bcd$ و $y=\log_b acd$ و $z=\log_c abd$ و $u=\log_d abc$

درستی رابطهٔ زیر را محقق کنید.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{u+1}=1$$

(حسن پوررضائی دبیرستان رضاشاه‌کبیر تبریز)

۲۲۸۸ـ ازنقطهٔ A واقع درخارج دایرهٔ (O) قاطع ABC ومماس AT رابردایره رسم کرده و روی خطی که درنقطهٔ B عمود برAB رسم می‌شود نقطهٔ D را چنان تعیین می کنیم که مساحت مثلث ADC برابر با $\overline{AT}^2$ باشد.

۱) نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ DAB ز $\alpha=$ را تعیین کنید.

۲) به‌فرض اینکه A ثابت وقاطع ABC حول نقطهٔ A حرکت کند وضعی ازقاطع راتعیین کنید که در ازاء آن مساحت مثلث ABD مینیمم باشد (B بین A وC اختیارشود) و مقدار این مینیمم را برحسب R به فرض $AT=R\sqrt{3}$ به دست آورید.

(غلامعلی معول پنجم ریاضی دبیرستان سعدی اراک)

۲۲۸۹ـ مثلث ABC متساوی الساقین و در زاویهٔ C قائمه می‌باشد. پرخطی که ازنقطهٔ C موازی با AB رسم می‌شود نقطهٔ D را چنان تعیین کنید که $BD=BA$ باشد. دوجواب به‌دست خواهید آورد. در هردوحال اندازهٔ زاویهٔ DBC را معلوم کنید.

(مجله ریاضیات دانش‌آموز)

کلاس پنجم طبیعی

۲۲۹۰ـ منحنی (C) نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x}$ و منحنی (C') نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x^2}$ یکدیگر رادرنقطهٔ A(۱و۱) قطع می‌کنند. خط مماس برمنحنی (C) را در نقطهٔ A با T وخط مماس بر (C') رادر A با T' نمایش می‌دهیم معادله‌های خطوط T و T' راتعیین کنید. برمنحنی (C) نقطه‌ای مانند B وجود دارد که‌مماس برمنحنی درآن نقطه با T موازی

است ، مختصات این نقطه را پیدا کنید . مختصات نقطهٔ C از منحنی (C') را پیدا کنید که مماس بر منحنی در آن نقطه بر خط "T' عمود باشد .

۲۲۹۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه بوده و $\sin B = \frac{1}{3}$ و $\sin C = \frac{2}{3}$ می‌باشد مقدار $\sin A$ را حساب کنید

۲۲۹۲ـ مقدار عددی عبارت زیر را تعیین کنید

$$\frac{30' \sin 22^\circ 30' \sin 37^\circ 30' + 30' \cos 22^\circ 30' \cos 37^\circ}{45' \cos 3^\circ 45' \text{ و } 30' \sin 3^\circ \text{ و } \sin 7^\circ}$$

کلاس پنجم ریاضی

۲۲۹۳ـ محیط مستطیلی مقدار ثابت $2p$ می‌باشد ، از دوران مستطیل حول یکی از اضلاع استوانه‌ای به وجود می‌آید. اندازهٔ اضلاع مستطیل چقدر باشد تا حجم استوانهٔ حادث ماکزیمم باشد و مقدار این ماکزیمم را حساب کنید .

(فرستنده : مصطفی گودرزی طالبه دانشجوی دانشکده افسری)

۲۲۹۴ـ در کره‌ای بشعاع R مکعب مستطیلی باقاعده مربع محاط می‌کنیم . ابعاد مکعب مستطیل چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم گردد .

(بهرام داها ـ ششم ـ ریاضی دبیرستان ناصرخسرو)

۲۲۹۵ـ تابع زیر مفروض است

$$y = x^2 - 4x\cos\varphi + 4\cos^2\varphi$$

که در آن φ زاویه‌ای واقع در فاصلهٔ ۰ و π را تعیین می‌کند $(0 < \varphi < \pi)$

۱) جدول تغییرات و مختصات نقطهٔ اکستر مو منحنی نمایش تابع را تعیین کنید

۲) اگر مماس در نقطهٔ به طول $x = 1 + \sin\varphi$ بر منحنی نمایش تابع با محور ox زاویهٔ φ بسازد ، مقدار φ را تعیین کنید.

۳) در ازاء دو مقدار از φ منحنی‌های نظیر از مبدأ مختصات می‌گذرند. این دو مقدار φ را تعیین کرده ومنحنی‌های نظیر را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و ثابت کنید که این دو منحنی نسبت به محور y'y متقارن‌اند

۴) معادلهٔ مکان هندسی رأسهای منحنیهای نمایش تابع مفروض را وقتی که φ در فاصلهٔ ۰ و π تغییر کند به دست آورده و منحنی مکان را در همان شکل قبلی رسم کنید .

(با اضافات از E.P.M.)

۲۲۹۶ـ به فرض

$$A = 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c$$

۱) اگر $A = 0$ باشد مقدار $\cos a$ را برحسب b و c پیدا کنید

۲) عبارت A را به حاصل ضرب چهار سینوس تبدیل کنید

(مجله ریاضیات مقدماتی)

یک مسئله از جمله مسائل امتحان مسابقه برای انتخاب بهترین دانش‌آموز پنجم ریاضی کرمان ـ فرستنده منصور حسنی از دبیرستان پهلوی کرمان

۲۲۹۷ـ جوابهای بین صفر و 2π از معادلهٔ زیر را تعیین کنید

$$\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 1 - \sin 2x$$

۲۲۹۸ـ به فرض $\sin 2a = x$ و $\sin 3a = y$ رابطه‌ای مستقل از a بین x و y به دست آورید

(E.P.M.)

۲۲۹۹ ـ کنج سه قائمهٔ oxyz مفروض است . نقاط A و B و C به ترتیب بر یالهای ox و oy و oz چنان قرار دارند که $OA = a$ و $OB = b$ و $OC = c$ است

۱) چنانچه α و β و γ اندازه‌های زاویه‌های سطحهٔ قرجه‌های یالهای BC و CA و AB از چهار وجهی OABC باشند رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

۲) فرض می‌کنیم (P) یک چند ضلعی واقع در صفحهٔ ABC باشد مساحت آن را با S و مساحتهای چند ضلعیهای تصویر (P) را بر صفحه های xoy و yoz و zox با S_1 و S_2 و S_3 نمایش می‌دهیم.

ثابت کنید $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

(E.P.M)

۲۳۰۰ـ صفحهٔ (P) و خط (D) متقاطع در S مفروض است . مکان هندسی خطوطی مانند Sx را تعیین کنید که قرینهٔ (D) نسبت به هر یک از خطوط Sx بر صفحهٔ (P) واقع باشد .حالت خاصی را که (D) بر (P) عمود است بررسی کنید:

(E.P.M.)

کلاس ششم طبیعی

۲۳۰۱ـ محور کانونی هذلولی H محور y'y را در نقطهٔ I به عرض ۱ و محور غیر کانونی آن محور x'x را در نقطهٔ J به طول ۱ قطع می‌کند . معادلهٔ خطی که رأس A از هذلولی را به J وصل می‌کند عبارتست از $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ و فاصلهٔ کانونی هذلولی برابر با $2\sqrt{5}$ می‌باشد. معادلهٔ هذلولی و معادله‌های مجانبهای آن را تعیین کرده وهذلولی را رسم کنید .

۲۳۰۲ـ اولا درتابع $y=a\cos nx$ مقادیر a و n را چنان معلوم کنید که منحنی نمایش تابع محور عرضها را درنقطهٔ به عرض ۱ قطع کرده و طول یکی از نقاط تقاطع آن بامحور طولها برابر با $\frac{\pi}{3}$ باشد .

ثانیاً منحنی نمایش تابع $y=\cos\frac{3x}{2}$ را در فاصلهٔ $[-\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}]$ رسم کنید .

ثالثاً مساحت سطح محصور بین منحنی و محورطولها را که بالای این محور است حساب کنید .

کلاس ششم ریاضی

سؤالهای امتحان جبر ثلث اول بروجرد (دبیر : حسین صالحی)

۲۳۰۳ـ تابع $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ مفروض است .

اولا ضرایب a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش هندسی تابع درنقطه‌ای به طول $\frac{3}{2}$ دارای ماکزیممی برابر (-4) بوده و $x=1$ یکی ازمجانبهای آن باشد .

ثانیاً مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

ثالثاً ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$mx^2-3mx+2m-1=0$$

را بادوعدد -1 و ۲ از روی منحنی مقایسه کنید

رابطهٔ درشماره و علامت ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\lambda$$

به ازاء مقادیر مختلف λ بحث کنید و ثابت کنید که بین x' و x'' ریشه‌های این معادله رابطه‌ای مستقل از λ وجوددارد وآن را به دست آورید

خاصاً درمحل تقاطع منحنی تابع $y=\frac{a}{x^2-3x+2}$ با نیمساز ربع اول وسوم ، به ازاء مقادیر مختلف a بحث کنید

۲۳۰۴ـ تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ مفروض است

اولا ضرایب a وb را به دست آورید که خطوط $x=1$ و $x=2$ مجانبهای منحنی باشند

ثانیاً مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

۲۳۰۵ـ اگر O و R مرکز وشعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، و I و r مرکزوشعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد

۱) ثابت کنید که اگر OI با BC موازی باشد داریم

$$\cos B+\cos C=1$$

۲) ثابت کنید که اگر O و I از BC به یک فاصله بوده اما OI با BC موازی نباشد ، داریم

$$\cos B+\cos C=1+\frac{2r}{R}$$

(E.P.M)

۲۳۰۶ـ اولا تعیین تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع

$$y=2\sin(2x-5\frac{\pi}{3})-1$$

ثانیاً تعیین طولهای نقاط تقاطع منحنی بامحور طول و تعیین ضریب زاویهٔ مماس مرسوم بر منحنی در این نقاط

ثالثاً تعیین مرکزها ومحورهای تقارن منحنی

رابطهٔ بین y و مشتق آن y' برحسب x ، به حسب $\operatorname{tg}x=t$. دراز اچه مقادیر از t داریم $y=0$ و تعیین مقادیر نظیر از y'

(از سؤالهای امتحان رشته علوم اسرائیل)

۲۳۰۷ ـ به فرض اینکه $n>2$ عدد صحیح دلخواه و p_1 و p_2 و ... و p_h عددهای اول کوچکتر یا مساوی با $n+1$ باشد وبه فرض

$$P=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_h$$

۱) ثابت کنید که هیچیک از n جملهٔ رشتهٔ :

(۱) $P+2$ و $P+3$ و ... $P+(n+1)$

عدد اول نیست

۲) ثابت کنید که ازرشته‌های متشکل از n عدد متوالی که هیچیک ازجمله‌های آن عدد اول نباشد به تعداد نامحدود وجود دارد . در حالت $n=10$ اولین و آخرین جمله‌های دو رشتهٔ اول و دوم از این دسته‌ها را تعیین کنید .

(E.P.M.)

۲۳۰۸ ـ ثابت کنید که هر کسر غیر ممکن التحویل کوچکتر ازواحد $\frac{a}{b}$ را می‌توان به شکل

(۱) $\frac{a}{b}=\frac{1}{q}-\frac{a_1}{b_1}$

تبدیل نمود که در آن کسر $\frac{a_1}{b_1}$ غیر ممکن التحویل کوچکتر از واحد بوده و a_1 کوچکتر از a می‌باشد و نتیجه بگیرید که می‌توان کسر $\frac{a}{b}$ را به صورت زیر بسط داد

$$\frac{a}{b}\quad \frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{q_n} \qquad (2)$$

که در آن تعداد کسرهای $\frac{1}{q_i}$ محدود می‌باشد.

حالت خاص کسر $\frac{9}{36}$ را به صورت بالا بسط دهید

(از سؤالهای امتحانی کنکور دانشگاه)

۲۳۰۹ـ مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن (Γ) را در نظر می‌گیریم

۱) از O مرکز دایره خطی موازی با یک ضلع مثلث رسم می‌کنیم تا مماس در رأس مقابل این ضلع بردایرهٔ (Γ) را قطع کند. بدین ترتیب سه نقطهٔ α و β و γ به دست می‌آید. ثابت کنید این سه نقطه بر یک استقامت واقعند.

۲) از نقطهٔ تقاطع مماسهای مرسوم از دو رأس مثلث بر (Γ) خطی موازی باضلع واصل این دو رأس رسم می‌کنیم تا مماس در رأس دیگر مثلث را قطع کند. ثابت کنید سه نقطهٔ α_1 و β_1 و γ_1 که بدین ترتیب به دست می‌آیند بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۳) خطی موازی با هر ضلع مثلث بر (Γ) مماس می‌کنیم (نقطهٔ تماس و رأس دیگر طرفین این ضلع واقع باشند) که این مماس، مماس در رأس مقابل را قطع می‌کند. ثابت کنید سه نقطهٔ α_2 و β_2 و γ_2 که بدین ترتیب حاصل می‌شود بر یک استقامت می‌باشند.

(G.P.B)

۲۳۱۰ـ در یک صفحهٔ کاغذ یک خط Δ رسم کرده و یک نقطهٔ P در خارج آن انتخاب کنید. کاغذ را چنان تا کنید که نقطهٔ P برروی یکی از نقاط خط Δ واقع شود محل تای کاغذ را مشخص کرده و کاغذ را باز کنید، بدین ترتیب اثری از تا بر کاغذ باقی خواهد ماند که نمایش یک خط است. عمل را مجدداً و به دفعات تکرار کنید تا خطوط مختلف حاصل شود. پوش این خطوط را تعیین کنید (مقصود از پوش خطوط منحنی است که بر همهٔ آنها مماس می‌باشد).

(از مجلهٔ ریاضیات دانش‌آموز ـ ترجمه: ج.ش. آوری)

۲۳۱۱ـ دو نقطهٔ m_1 و n_2 را روی محور اقصر کاغذ انتخاب کنید که m و n به ترتیب از کنار چپ کاغذ به فاصلهٔ ۱۱ و ۵ واقع باشند. از m خطی رسم کنید که در جهت مثلثاتی با محور اقصر زاویهٔ ۱۳۰° بسازد و از n خطی رسم کنید که با محور اقصر در جهت مثلثاتی زاویهٔ ۴۰° بسازد. خط اول را تصویر خط D و دوم را تصویر خط Δ بنامید.

۱) به فرض آنکه MN عمود مشترک D و Δ باشد این دو خط را مدرج کنید.

۲) بر خط Δ صفحهٔ P را مرور دهید که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵° بسازد (از دو جواب آن را اختیار کنید که اقیهٔ رقوم ۳ آن تقریباً پائین محور اقصر باشد). یک مقیاس شیب این صفحه را در کنار چپ کاغذ رسم کنید.

۳) در صفحهٔ P خط $a_{10}o_5$ را با فراز ۲ رسم کنید (a بر Δ واقع است و o سمت راست a)

۴) O مرکز و A یک رأس از مربع ABCD است که ضلع AB از آن اقیه می‌باشد. ملخص این مربع را رسم کنید

۵) نقطهٔ s_4 را بر D تعیین کرده ملخص هرم SABCD را رسم و آن را مرئی و مخفی کنید

۶) مقطع هرم را با صفحهٔ قائمی که بر ارتفاع SH هرم می‌گذرد به دست آورده اندازهٔ حقیقی آن را نمایش دهید.

(سید جعفر وفا بخش)

۲۳۱۲ـ نقطهٔ aa' را به بعد ۳ و ارتفاع ٤ تعیین کنید. بر این نقطه افقیه‌ای رسم کنید که با صفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ ۴۵° ساخته و اثرش سمت چپ رابط aa' واقع باشد. همچنین جبهه‌ای رسم کنید که با صفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ ۶۰° ساخته اثرش سمت چپ aa' باشد. ملخص لوزی ABCD را رسم کنید بنا بر آنکه AB بر افقیه و AD بر جبههٔ مرسوم واقع بوده طول قطر AC برابر با ۵ باشد (نقاط B و C و D سمت راست A واقعند). آثار صفحهٔ مواجهی را رسم کنید که از مرکز لوزی گذشته و بر صفحهٔ لوزی عمود باشد و مقطع آن را با لوزی پیدا کنید. (مسئله بدون استفاده از تسطیح حل می‌شود)

(ع. ۴)

مسائل متفرقه

۲۳۱۳ـ حد مجموع جمله‌های زیر را حساب کنید وقتی که تعداد آنها نا محدود باشد

$$S=\log_n A+\log_{n^2} A+\log_{n^4} A+\ldots$$

(حسین نعمتی پنجم ریاضی متفرقه)

۲۳۱۴ـ مجموع n جمله از رشته جمل زیر را حساب کنید

$$S=۲\times۲^{k}+۵\times۲^{۲k-۱}+۱۷\times۲^{۳k-۲}+\dots$$
$$+(۴^{n-۱}+۱)\times۲^{nk-n+۱}$$

(حافظی دبیر دبیرستان بنیس)

۲۳۱۵ـ حاصل عبارت زیررا حساب کنید

$$S=(۲-\frac{۱}{cos^{۲}x})(۲-\frac{۱}{cos^{۲}۲x})(۲-\frac{۱}{cos^{۲}۴x})\dots$$
$$\times(۲-\frac{۱}{cos^{۲}(۲^{n-۱}x)})$$

(حسن ناهیاز صائحی پنجم ریاضی دبیرستان هدف)

۲۳۱۶ـ معادلهٔ زیررا حل کنید

$$(\sqrt{x})^{log_{۵}x-۱}=۵$$

(محمد رضا مرعشی پور ـ ششم ریاضی دبیرستان البرز)

۲۳۱۷ـ عددی سه رقمی به شکل $\overline{abc}$ پیدا کنید که هیچیك از ارقامش صفر نبوده و عبارت $ab+bc+ca$ بر $a+b+c$ بخش پذیر باشد .

(فرستنده : قوام نحوی دبیر دبیرستانهای اهواز)

۲۳۱۸ـ ثابت کنید در هر دستگاه به مبنای $x>۳$ دو عدد $(x-۱)^{۲}$ و $(x-۱)(x^{۲}+۳)$ مقلوب یکدیگرند .

(م.ا. گیتی زاده دبیردبیرستانهای اهواز)

۲۳۱۹ـ عدد $(ab)_x$ را چنان تعیین کنید که اگر دو برابر رقم a را از آن کم کنیم در مبنای اعشاری برابر با $۲x+۱$ شود .

(م.ا. گیتی‌زاده)

۲۳۲۰ـ ضرایب a و b را پیداکنید برای آنکه عبارت $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+۱$ بر $(x-۱)^{۲}$ بخش پذیر باشد

۲۳۲۱ـ به فرض u_n یك زاویهٔ حاده و

$$tg\,u_n=\frac{۱}{n^{۲}+n+۱}$$

۱) مجموع $S=u_۱+u_۲+\dots=u_n$ را بر حسب n حساب کنید

۲) حد S را وقتی که $n\longrightarrow\infty$ تعیین کنید

(E.P.M.)

۲۳۲۲ـ دایرهٔ (c) به شعاع r بر محور ox مماس بوده و بر روی آن حرکت می کند . مطلوبست .

۱) معادلهٔ مکان هندسی رأس مثلثهای متساوی‌الساقینی که بر این دایره محیط بوده قاعده‌اش بر ox منطبق و یك رأسش مبدأ مختصات باشد .

۲) خط به معادلهٔ $y=mx$ (m پارامتر) این منحنی را جز در نقطهٔ o در دو نقطهٔ دیگر $M_۱$ و $M_۲$ قطع می‌کند.

معلوم کنید که مکان هندسی وسط $M_۱M_۲$ برمکان هندسی مرکز دایرهٔ (C) منطبق است

۳) معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث متساوی الساقین مزبور را پیدا کنید .

(نقل از مجله راهنمای زندگی ۱۳۱۹)

۲۳۲۳ـ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R ونقطه P واقع درصفحهٔ آن به فاصلهٔ $OP=a$ ازمرکز مفروض است .قاطعی متغیر از P گذشته ودایره را در نقاط M و N قطع می کند. زاویه‌های MOP و NOP را به ترتیب به θ و φ و زاویهٔ MPO را به λ می‌نمائیم

۱) مقدار $tg\frac{\theta}{۲}tg\frac{\varphi}{۲}$ را پیدا کنید

۲) محقق کنید که

$$(a+R)\sin\lambda=۲R\cos\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\varphi}{۲}$$

۳) مساحت مثلث MON و اندازهٔ λ را از روی زاویهٔ ω به فرض

$$tg\frac{\theta}{۲}-tg\frac{\varphi}{۲}=\frac{۲a}{a+R}tg\frac{\omega}{۲}$$

پیداکنید . از روی λ مقدار ω را بر حسب θ و φ به دست آورید . شرط آنکه ω دارای می‌نیممی باشد چیست ؟

(نقل از مجله راهنمای زندگی)

۲۳۲۴ـ ضلع BC از مثلث ABC محاط در دایرهٔ ثابت O ثابت بوده ورأس A بردایره دریك طرف BC حرکت می کند . طول $BD=AC$ را بر AB جدا می کنیم .

۱) مکان هندسی نقطهٔ D را تعیین کنید

۲) اگر M وسط AD باشد مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید

۳) اگر N نقطهٔ تلاقی عمود منصف AD با AC باشد مکان هندسی N را به دست آورید

(ابراهیم صادقی دبیر دبیرستانهای آباده)

۲۳۲۵ـ مثلثی بسازید که ازآن ضلع a و زاویهٔ A و نسبت مجموع دوضلع دیگر به تفاضل آنها $\frac{b+c}{b-c}=\frac{p}{q}$ معلوم باشد .

(جمشید امیخیان دانشجوی علوم اصفهان)

۲۳۲۶ ـ در سهمی مفروض P مثلث متساوی الاضلاعی محاط کنید که یك رأسش نقطهٔ معلوم A واقع بر سهمی باشد . ثابت کنید که مسئله حداقل یك و حداکثر سه جواب دارد .

(ماهنامهٔ ریاضیات آمریکا)

فیزیک و شیمی

کلاسهای چهارم

از جملهٔ مسائل امتحان فیزیك ثلث اول دبیرستان ۶ بهمن بندر پهلوی
دبیر : نجم‌الدین موسوی ـ فرستنده : صفر نیا

۲۳۲۷ـ دو نیروی موازی و همسو F_1 و F_2 در دو نقطهٔ A و B بر جسمی اثر می‌کنند . اولا مقدار F_2 را به دست آورید بشرط آنکه $F_1 = ۱۵۰gr$ و فاصلهٔ F_1 از برآیند ۲۰cm و فاصلهٔ F_2 از برآیند ۶۰cm باشد .

ثانیاً اگر اندازه‌گیری طول با تقریب یك میلیمتر و اندازه‌گیری نیروها با تقریب یك گرم بدست آمده باشند مقدار خطای نسبی و مطلق و همچنین کمیت اصلی F_2 را به دست آورید .

ازجملهٔ مسائل امتحان شیمی ثلث اول چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان
دبیر : کریم نفیسی ـ فرستنده : حسین جعفری

۲۳۲۸ـ ۹٫۸ گرم اسید سولفوریك را با کلرور سدیم تا ۴۰۰ درجه حرارت می‌دهیم . گاز حاصل را در ۵۰ cc آب حل و ۲۰ cc محلول را با نیترات نقره و ۳۰ cc محلول را با نیترات سرب ترکیب می‌کنیم معلوم کنید در هر قسمت چقدر رسوب حاصل می‌شود ؟

ازجملهٔ مسائل امتحان شیمی ثلث اول چهارم طبیعی دبیرستان بهبهانی کازرون
دبیر : حسین جواهری

۲۳۲۹ ـ از تجزیهٔ صد قسمتی یك اکسید می خالص ۲۰٪ اکسیژن تولید گردیده است . چنانچه حرارت مخصوص می ۰٫۰۹۲ باشد جرم اتمی دقیق می را پیدا کنید.

کلاسهای پنجم

موضوع مسئلهٔ شیمی امتحان ثلث اول پنجم طبیعی دبیرستان بهبهانی کازرون
دبیر : حسین جواهری

۲۳۳۰ـ محلولی از نمك قلیای متبلور وجوش شیرین در اختیار است که با آن تجارب زیر را انجام می‌دهیم .

تجربهٔ ۱ـ ۳٫۷ گرم آن را وارد ۳۵cc محل نرمال جوهر نمك می‌نمائیم . پس از خروج کلیهٔ گازها بوای خنثی شدن بقیهٔ اسید ۲٫۵cc سود ۸۰ گرم در لیتر مصرف می‌شود.

تجربهٔ ۲ـ گازهای حاصل از تجربهٔ (۱) را وارد محلول آب آهك ۰٫۸ نرمال می‌نمائیم . آزمایش نشان می‌دهد که ۵۰cc از این آب آهك مصرف می‌شود . از اینجا تعداد ذرات (ملکول) آب تبلور نمك قلیا و نیز نسبت ملکولی دو جسم موجود در مخلوط را بدست آورید .

یك مسئله از : رضا داوودی دبیر دبیرستان درخشانی بنیس

۲۳۳۱ـ آلیاژی نا خالص از چهار فلز آهن ، آلومینیم ، سرب و باریم به وزن ۱۰ گرم موجود است . این آلیاژ را در اسید نیتریك جوشانده و نتیجه را صاف می‌کنیم . برروی محلول به دست آمده آزمایشهای زیر را انجام می‌دهیم .

برروی محلول در مجاورت اسید استیك کرمات پتاسیم اضافه می‌کنیم رسوبی به وزن ۸٫۲۹ گرم به دست می‌آید. اگر این رسوب را با محلول سود سوزآور حرارت دهیم جرم آن به ۵٫۰۶ گرم می‌رسد . بر محلول زیر صافی به مقدار کافی پتاس محلولی افزوده حرارت می‌دهیم رسوب حاصل ۱٫۰۷ گرم می‌شود . محلول که زیر صافی به دست می‌آید با اسید کلرئیدریك ترکیب وسپس با آمونیاك می‌جوشانیم . رسوب به دست آمده را خشك وتکلیس می‌کنیم پودر به‌دست آمده ۱٫۰۲ گرم می‌شود

اولا فعل و انفعال ممکنه را بنویسید .

ثانیاً عیار هر فلز را در آلیاژ بدست آورید .

ثالثاً . در صد ناخالص را تعیین کنید .

یك مسئله از هوشنك شریف زاده دبیر دبیرستانهای نی‌ریز

۲۳۳۲ـ مولدی را یك بار به مقاومت R_1 و بار دیگر به مقاومت R_2 می‌بندیم ، اگر در هر دوحال گرمای تلف‌شده در دو مقاومت در یك زمان معین برابر باشند ، ثابت کنید مقاومت داخلی مولد واسطهٔ هندسی بین دو مقاومت R_1 و R_2 می‌باشد

کلاسهای ششم

۲۳۳۳ـ دریك بطری لید سلاح خارجی وصل به زمین و سلاح داخلی در پتانسیل ۶۰ کیلوولت است. این سلاح را به یکی از سلاحهای خازن بدون باری به ظرفیت ۰٫۰۰۱ میکروفاراد که سلاح دیگرش وصل به زمین است مربوط می‌کنیم . پتانسیل تعادل ۲۴ کیلوولت می‌گردد . ظرفیت بطری و انرژی ابتدائی آن را حساب کنید . اگر بجای اتصال بطری به خازن سلاحها را به‌هم وصل می‌کردیم چه مقدار حرارت در جرقه آزاد می‌شد.

(بقیه در پائین صفحهٔ مقابل)

انجمن معلمان ریاضی (ایران)

پیشرفت و بهبود آموزش ریاضیات در ایران و پرورش ریاضیدانانی شایسته برای آینده، همکاری مؤثر وهم‌آهنگی بیشتر معلمان ریاضی را ایجاب می‌نمود. روی‌این‌اصل، عده‌ای از دبیران ریاضی گردآمدند وبعد ازجلساتی بحث وتبادل نظر اقدام به‌تأسیس انجمن معلمان ریاضی نمودند

درنخستین جلسات، آقایان **بیرشك، شمس آوری و آذرنوش** مأمورتنظیم اساسنامه‌ای موقت برای انجمن‌شدند. بنابر اساسنامهٔ تنظیمی این آقایان‌که به تصویب سایر اعضاء مؤسس انجمن رسیداولابرنامهٔ کارانجمن بشرح‌زیراعلام گردید:

۱ـ همکاری بادستگاههای رسمی آموزش وپرورش کشور.

۲ـ انتشار مجله‌های مخصوص برای معلمان کشور.

۳ـ تهیهٔ رساله ها وکتابهای روش تدریس.

٤ـ آشناکردن معلمان باپیشرفتهای تازه در ریاضیات و روش تدریس‌آن.

۵ـ ایجاد آزمایشگاه ریاضی نمونه‌وتأسیس کتابخانهٔ فنی مربوط‌به ریاضیات.

٦ـ تشکیل جلسات معلمان ریاضی برای تبادل نظروبحث وانتقاد.

ثانیاً قرارشد پنج‌نفرامورانجمن را به‌طور **موقت** اداره کنند تاهنگامی که عدهٔ اعضاء به‌صدنفربرسد وآنگاه‌برای‌تنظیم و تصویب اساسنامهٔ رسمی وتعیین سازمان دائمی اقدام‌شود.

آقایانی که به‌این منظور انتخاب شده‌اند عبارتند از:

حسین آزرم ـ احمدبیرشك ـ پرویز شهریاری ـ عبدالحسین مصحفی ـ باقر نحوی

پنج نفر منتخبین فوق‌الذکر تاکنون به انجام امور زیر توفیق یافته‌اند:

۱ـ اقدام‌به‌تهیهٔ نشانی‌معلمان ریاضی وارسال‌اطلاعیهٔ تشکیل‌انجمن برای‌آنها

۲ـ مشاوره بامتخصصین دربارهٔ چگونگی تعویض‌برنامه‌و آشنا شدن معلمان ریاضی با مباحث جدید.

۳ ـ دعوت از استاد گرامی **آقای‌دکترمحسن هشترودی** برای‌ایراد سخنرانی‌درروز ۲٤اسفند و افتتاح‌انجمن

٤ ـ تهیهٔ بیوگرافی متأخرین از معلمان نامی ریاضی ایران و اقدام برای تجلیل خاطرهٔ آنان

۵ـ قبول معرفی پنج نفر معلم‌ریاضی به وزارت آموزش وپرورش‌برای استفادهٔ بورس واگذاری دولت آمریکا.

٦ـ تهیهٔ مقالات‌و وسایل انتشار اولین نشریهٔ انجمن

توفیق انجمن معلمان ریاضی در نیل به هدفهای‌خود منوط بـه همکاری همهٔ همکاران گرامی می‌باشد. معلمان ریاضی کـه تاکنون‌اطلاعیهٔ انجمن را دریافت‌نداشته‌اند می‌توانند به‌نشانی:

خیابان حافظ، دبیرستان رضا شاه کبیر

انجمن‌معلمان ریاضی

و یا توسط یکی‌از پنج نفر منتخبین فوق‌الذکر مکاتبه فرمایند.

معادل مکانیکی کالری۱۸د٤ ژول می‌باشد.

۲۳۳۴ـ در صورتیکه بدانیم اسید کلریدریك ۳۵٪ (وزنی) دارای وزن مخصوص ۱۷۵د۱می‌باشد معلوم کنید چند سانتیمتر مکعب آب مقطر باید به ۱۵ سانتیمتر مکعب این اسید اضافه‌کرد تامحلولی باغلظت یك هشتم نرمال به دست‌آید.

برای داوطلبان کنکور

۲۳۳۵ـ بین سه نقطه از مداری سه مقاومت a و b و c مثلثی بسته شده‌اند. درحالت دوم مقاومتهای a' و b' و c' را ستاره‌ای بین همین نقاط می‌بندیم و مقاومتهای بین‌نقاط مزبور در هردوحالت معادل است. مقادیر a' و b' و c' را برحسب a و b و c و بالعکس پیداکنید.

یك‌مسئله ازحسین‌جواهری دبیردبیرستان کازرون

۲۳۳٦ـ ۱د٤۲۵ گرم ازمخلوط: جوهرنمك ،اسید-فرمیك و یك‌اسید متشابه‌التر کیب (همرو) با آن توسط ۳۰cc سودنرمال خنثی شده است. تمکهای حاصل را باسود جامد پیرولیز کرده وگازهای حاصل ازعمل رادر یك ادیومتر منفجر کرده‌ایم. اضافه وزن لوله‌های اسید وپتاس به ترتیب ۵٤د۰و ٤٤د۰ گرم‌شده است از اینجا مقدار هر یك از سه اسید را در مخلوط ونیز فرمول اسید هموگ با اسید فرمیك‌راپیداکنید.

مسائل از : استاد دکتر محسن هشترودی

برای دانش آموزان

۲۳۳۷ـ ثابت کنید که اگر m و n' هردو برشش‌مانده‌ای برابر ۵ یا برابر ۲ داشته‌باشند عبارت .

$$۲\times ۳^{۲n}+۳\times ۲^{۲m}+(m-۲)(n-۵)(۴۶^{p}-۱۱^{p})$$
$$+(m-۵)(n-۲)(۵۷^{k}-۲۲^{k})$$

بر کمترین مقدارخودش بخش پذیر است (m و n و p و k اعداد صحیح مثبت می‌باشند)

۲۳۳۸ـ مستطیلی بر بیضی محیط است . اگر رئوس‌قطر اطول بیضی را به نقاط تربیع اضلاع بزرگتر مستطیل وصل کنیم تا اقطار دونیم‌مستطیل را که‌قطر اطول بیضی ضلع مشترك آنهاست قطع کند . ثابت کنید که این نقاط‌به بیضی تعلق‌دارند.

۲۳۳۹ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ را رسم کنید . سطح محصوربین منحنی و مجانب‌های‌آنرا حساب کنید . همچنین منحنی نمایش تغیرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$ رارسم کنید وسطح محصور بین منحنی ومجانبها را حساب کنید. مبدأ مختصات برروی هردو منحنی قراردارد . اختلاف نوع‌این نقطه برروی دو منحنی درچیست ؟

۲۳۴۰ـ دو پنجره در طرف کوچه‌ای دریك سطح‌قائم به ارتفاعهای مختلف‌قراردارند. دو نقطه درسطح کوچه(درهمان‌سطح قائم مشترك پنجره‌ها) وجود داردکه از هریك از آنها می‌توان دو نردبام برپنجره‌ها تکیه دادبه قسمی که نردبامها برهم عمود باشند . برای‌یکی از این‌نقاط نردبامهای مذکور باهم برابرو به‌طول a می‌باشد وبرای نقطهٔ دیگر دونردبام باهم برابرنیستند وطول نردبام‌بلندتر برابر b می‌باشد . ارتفاع پنجره‌ها وعرض کوچه و فاصلهٔ دو پنجره از هم و طول نردبام‌کوچکتر را تعیین کنید .

۲۳۴۱ـ مجموع مربعات فواصل رؤس مربعی از نقطهٔ ثابت o مقدار ثابت $k^{۲}$ ومجموع مربعات فواصل این رؤس از نقطهٔ ثابت دیگر o' مقدار ثابت $k'^{۲}$ است .ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مربع بر بیضی ثابتی‌همواره مماس است .



برای دانشجویان

۲۳۴۲ ـ معادلهٔ لیوویل

$$f'y'=f.y^{۲}-kf'.y^{۲}+f''.y$$

راکه درآن k عددی ثابت و f تابعی معلوم از xاست حل کنید .

۲۳۴۳ـ حل معادلهٔ لیوویل (Liouville)

$y'=y^{۲}+ae^{kx}.y^{۲}$ را به‌کوادراتور منحرکنید . همچنین برای معادله : $y'=y^{۲}+\frac{a}{\sqrt{x}}y^{۲}$ حل معادله‌را به کوادراتور منحرکرده و کوادراتور را انجام‌دهید. جواب عمومی‌معادله‌را تعیین‌کنید .

۲۳۴۴ـ معادلات لیوویل : $y'=y^{۲}+axy^{۲}$ و $y'=y^{۲}+\frac{a}{x^{۲}}y^{۲}$ رابه معادلهٔ ریکاتی به‌صورت

$\frac{dv}{du}=\alpha v^{۲}+\beta u$ (α و β مقادیر معلوم ثابت) تبدیل کنید

(معادلهٔ دیفرانسیل $y'=Ay^{۲}+By^{۲}+Cy+D$ که درآن A و B و C و D توابعی از x هستند به معادلهٔ لیوویل معروف است . اگر یك‌جواب‌معادله معلوم باشدمی‌شود با تبدیلات مناسبی D و C راصفر کرد و معادله را به‌صورت $y'=Ay^{۳}+By^{۲}$ تبدیل‌کرد. باتبدیل دیگری برروی‌متغیر یابرروی تابع‌می‌توان A رابرابر واحدکرد وسرانجام‌صورت کانونیك‌معادلهٔ لیوویل (با معلوم بودن‌یك جواب) به‌صورت $y'=y^{۲}+\varphi(x)y^{۲}$ درمی‌آید. پل‌آپل Paul Apell ثابت کرده است که معادله‌لیوویل درحالاتی‌که دراول ذکرشد یاحل می‌شودو یا به معادلهٔ ریکاتی تبدیل می‌گردد)

۲۳۴۵ـ معادلهٔ دیفرانسیل $y'=\frac{A(x)y+B(x)}{C(x)y+D(x)}$ را می‌توان به‌صورت‌کانونیك معادلهٔ لیوویل‌تبدیل‌کرد وهمچنین معادلهٔ دیفرانسیل .

$y'=\frac{Ay^{۲}+By^{۲}+Cy+D}{Fy+G}$ که A و B و ... F و G توابعی از x می‌باشندبه معادلهٔ لیوویل قابل تبدیل است . این تبدیلات را انجام دهید

۲۳۴۶ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy''=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)y'^{۲}+\psi\left(\frac{y}{x}\right)y'+f\left(\frac{y}{x}\right)$$

رابه معادلهٔ‌ریکاتی‌منحرکنید به‌فرض $\varphi=\frac{y^{۲}}{x^{۲}}$ ، $\psi=-۲\frac{y^{۲}}{x^{۲}}$ و $f=(۲k-k^{۲})\frac{y^{۲}}{x^{۲}}+k$ (kعددی‌ثابت) معادله‌را کاملا حل کنید

اصطلاحات ریاضی

و

معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : ایرج ارشاقی

٦ . تصاعدات Progressions

Arithmetical Progression	تصاعدحسابی	Arithmetic mean	واسطهٔحسابی
Geometrical ‹	تصاعدهندسی	Geometrical mean	واسطهٔهندسی
Common difference	قدرنسبت در تصاعدحسابی	Insert	درج واسطه کردن
Constant factor / Common Ratio	قدرنسبت در تصاعد هندسی	Series	سری (مجموع جمله‌های یک رشته)
		Infinite	سری نامحدود
Nth term	جملهٔ nام	Pure Recurring Decimal	کسر اعشاری متناوب ساده
Last term	جملهٔ آخر	Mixed ‹ ‹	کسر اعشاری متناوب مرکب

***

Exercies :

1- The 5th and 4th term of an A.P. are – 61 and 643 flno the 23rd term .

2- Insert 20 arithmetic means between 4 and 67 .

3- If the pth , qth , rth terms a G.P. be a , b , c respectively , prove that : $a^{q-r}\ b^{r-p}\ c^{p-q} = 1$

اشتباه از چیست!

۱ـ دوعدد a وb را که هردو مثبتند در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم:

$$a>b$$

باضرب کردن دوطرف در b خواهیم داشت:

$$ab>b^2$$

و با کم کردن a^2 از دوطرف و فاکتور گیری خواهیم داشت:

$$a(b-a)>(b+a)(b-a)$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$a>b+a$$

چون b بنا به فرض مثبت است. از این نامساوی چنین برمی‌آید که نه تنها a بزرگتر از خودش است بلکه از هرعدد بزرگتر از خودش نیز بزرگتر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟ لابد می‌گویید نه. پس اشتباه این استدلال در کجاست؟

***

۲ـ به این معادله نگاه کنید:

$$x-1=2 \qquad (1)$$

فقط به طرف اول ۱۰ واحد علاوه می‌کنیم، می‌شود:

$$x+9=2$$

دوطرف این معادلهٔ اخیر را در $x-3$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+6x-27=2x-6$$

از دوطرف $2x-6$ را کم می‌کنیم:

$$x^2+4x-21=0$$

یا

$$(x+7)(x-3)=0$$

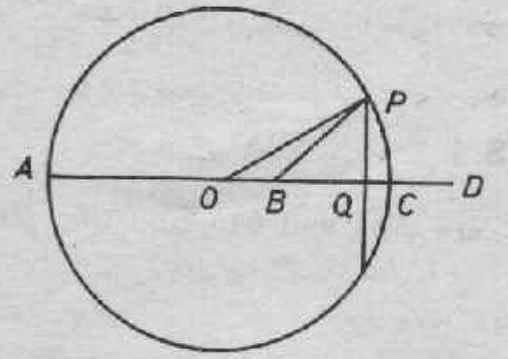
دوطرف را بر $x+7$ تقسیم می‌کنیم به دست می‌آید:

$$x-3=0$$

از آنجا $x=3$. و این همان جواب معادلهٔ ۱ است. شاید بگویید که خوب جواب معادلهٔ ۱ باشد چه می‌شود. مطلب این است که با آنکه فقط به یک طرف معادله ۱۰ واحد علاوه کردیم باز جواب صحیح به دست آوردیم. حتماً چنین چیزی غیرممکن است. پس اشتباهی کرده‌ایم که همان جواب معادله (۱) را به دست آورده‌ایم. این اشتباه از چیست؟

***

۳ـ در دایره شکل زیر، همان طور که می‌بینید، O مرکز دایره و B نقطه‌ای در داخل آن است.



با رسم خط OB قطر AC به دست آمده است. حال نقطه‌ای در روی خط AC چنان تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AC} \qquad (1)$$

عمود منصف BD را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ P قطع کند. PO و PB را وصل می‌کنیم.

چنانچه r شعاع دایره باشد،

$$AB = r + OB$$
$$BC = r - OB$$
$$AD = OD + r$$
$$DC = OD - r$$

وتناسب ۱ چنین می‌شود:

$$\frac{r+OB}{r-OB} = \frac{OD+r}{DO-r}$$

پس ازطرفین وسطین کردن خواهیم داشت:

$$(r+OB)(OD-r) = (r-OB)(OD+r)$$

وبعد ازضرب وخلاصه کردن، می‌شود:

$$OB.OD = r^2$$

حال از شکل بدست می‌آید:

$$OB = OQ - BQ \qquad (۲)$$

و

$$OD = OQ + QD$$

ولی چون Q وسط پاره‌خط BD است، QD و QB متساویند، بنابراین تساوی اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$OD = OQ + BQ \qquad (۳)$$

ازضرب کردن دو رابطهٔ ۲ و ۳ درهم وجانشین کردن r^2 به‌جای $OB.OD$ خواهیم داشت:

$$r^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{BQ}^2 \qquad (٤)$$

طبق قضیهٔ فیثاغورث در دو مثلث OQP و BQP می‌توان نوشت:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$$

$$\overline{BP}^2 = \overline{BQ}^2 + QP^2$$

این دوتساوی را که ازهم تفریق کنیم، حاصل می‌شود:

$$\overline{OP}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{BQ}^2$$

اما $OP = r$، بنابراین تساوی اخیررا می‌توان چنین نوشت:

$$r^2 - \overline{BP}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{BQ}^2$$

حال به جای طرف دوم تساوی فوق از رابطهٔ ٤ قرار می‌دهیم r^2 وچنین بدست می‌آوریم:

$$r^2 - \overline{BP}^2 = r^2$$

یا

$$\overline{BP}^2 = 0$$

یا

$$BP = 0$$

یعنی هر نقطه‌ای درداخل دایره برروی محیط آن قرار دارد. آیاعجیب نیست؟

عقیدهٔ شما چیست، اشتباهی رخ داده است؟ این اشتباه در کجاست؟

***

اشتباه از این است

(مربوط به شمارهٔ ۱۲)

۱ـ وقتی می‌توانیم $\sqrt{x-y}$ را به صورت

$$\sqrt{-1}\sqrt{y-x}$$

بنویسیم که مطمئن باشیم $y-x$ مثبت است. پس اگر فرض کنیم که $x-y$ مثبت است دراین‌صورت برحسب‌مقادیر a و b که به‌جای y و x می‌گذاریم و تساویهای ۱ و ۲ را بدست می‌آوریم، یاتساوی ۱ نامصحیح است ویا تساوی ۲، یعنی‌اگر $b-a$ مثبت‌باشد، تساوی ۲ درست نیست واگر $b-a$ منفی باشد تساوی ۱ درست نیست.

***

۲ـ درجایی که ازدوطرف تساوی جذر می‌گیریم و فقط علامت + رامی‌گذاریم اشتباه رخ می‌دهد. درواقع از رابطهٔ

$$[(n+1)-(\frac{2n+1}{2})]^2 = [n-(\frac{2n+1}{2})]^2$$

می‌توان چنین بدست‌آورد:

$$n+1-(\frac{2n+1}{2}) = -n+(\frac{2n+1}{2})$$

یا

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

***

۳ـ از آخرین نسبت تساوی ۳ نمی‌توان $r-t$ را از صورت و مخرج حذف کرد زیرا $r-t$ مساوی صفراست. لابد می‌پرسید چرا $r-t$ مساوی صفراست؟ توجه کنید: از رابطهٔ ۱و۲ به‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$pr-qt=-ps$$
$$qr-pt=ps$$

وازضرب کردن طرفهای این‌دو تساوی درهم به‌دست آورد:

$$(p+q)r-(p+q)t=0$$

یا

$$(p+q)(r-t)=0$$

واضح است که دراین تساوی چون $p+q$ که مجموع دوطول است صفر نیست باید $r-t$ صفر باشد.

***

چرا چنین است؟

عددی سه‌رقمی که‌رقم یکان وصدگان آن لااقل دو واحد اختلاف داشته باشند در نظر بگیرید (مثل ۷۲۱). جای رقم یکان وصدگان را عوض کنید تاعدد جدیدی به‌دست آید (مثل ۱۲۷). حال این دو عدد را ازهم کم کنید (۵۹۴ = ۱۲۷ − ۷۲۱) جای‌رقم یکان‌وصدگان باقیمانده‌رانیزعوض کنید (۴۹۵). حال‌آن باقیمانده واین‌عدد را جمع کنید (۱۰۸۹ = ۴۹۵ + ۵۹۴). می‌بینید که حاصل ۱۰۸۹ شد. تااینجا که کارمهم وشگفت‌آوری انجام‌نگرفته است. اما اگرهمین رشتهٔ اعمال را دربارهٔ یک عددسه‌رقمی دیگر وبازهم یک‌عدد سه‌رقمی دیگر انجام دهید باشگفتی بسیار خواهید دید که در همه‌حال حاصل همان ۱۰۸۹ می‌شود.

آیا می‌توانید بگویید که چرا چنین‌است؟

پاسخ به «چرا چنین‌است» شمارهٔ گذشته

تقسیم بردوکردن متوالی یکی ازعوامل ضرب، همان عملی است که برای‌بردن آن عامل به مبنای ۲ انجام می‌دهیم، یعنی درواقع به‌این‌ترتیب قوایی از ۲ که مجموع آنها برابر آن عامل است به‌دست می‌آید. برای سهولت‌فهم مطلب‌همان عدد ۲۷ راکه متوالیاً بر ۲ تقسیم شده‌است درنظر بگیرید، ۲۷ درمبنای ۲ چنین نوشته می‌شود ۱۱۰۱۱. واین می‌رساند که

$$۲۷=۱+۲^۱+۲^۳+۲^۴$$

وحاصل‌ضرب آن در ۶۳ را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}۶۳\times۲۷&=۶۳(۱+۲^۱+۲^۳+۲^۴)\\&=۶۳(۱+۲+۸+۱۶)\\&=۶۳\times۱+۶۳\times۲+۶۳\times۸+۶۳\times۱۶\\&=۶۳+۱۲۶+۵۰۴+۱۰۰۸\end{aligned}$$

و اینها همان اعدادی هستند که در ستون دوبرابرها باهم جمع شده‌اند. درستون تقسیم بردو، هروقت خارج‌قسمت‌زوجی پیداشود، مثلا اگراین خارج‌قسمت‌درد‌ومین‌تقسیم‌بردو به‌دست‌آمده‌باشد، معلوم می‌شود که در مجموع قوای دویی که حاصل آنها برابر عدد نوشته شده در بالای این ستون است، $۲^۲$ وجود ندارد واگر خارج‌قسمت زوج در سومین تقسیم بر ۲ بدست آمده باشد، معلوم می‌شود که درحاصل‌جمع $۲^۳$ وجود ندارد. بهمین دلیل‌است که خارج‌قسمتهای زوج وحاصل‌ضرب مقابل‌آن درستون دوبرابرها را باید خط‌زد.



سؤال : ۱ـ آیا $\frac{0}{\infty} = 0$ می‌باشد ؟ اگر باشد پس $\frac{0}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ است زیرا می‌دانیم که $\frac{1}{\infty} = 0$ ، واگرهم صفر تقسیم بر بینهایت صفر نیست پس چقدر است ؟

۲ـ می‌دانیم که اگرعددی را برعددی بخش کنیم ،خارج قسمتی به دست می‌آید که اگر در مخرج ضرب کنیم بازصورت کسر نتیجه می‌شود . مثلا $2 = \frac{24}{12}$ از طرفی می‌دانیم که $0 = \frac{1}{\infty}$ ، اگر صفر را در بینهایت ضرب کنیم می‌شود $1 \neq 0 \times \infty$ زیراهر عددضرب درصفر حاصلش صفرمی گردد. چرا اینگونه است ؟

اسماعیل گلجاریان

جواب : آقای گلجاریان‌ما نمی‌دانیم که شمادرچه کلاس هستیدوپایهٔ معلوماتتان‌چقدراست که جوابسؤال‌را متناسب‌باآن بدهیم‌ولی‌بهرحال‌امیدواریم که پاسخهای زیرین شمارا قانع کند:

۱ـ $\frac{0}{\infty}$ برابر صفر است چه می‌توان مثلا آن را چنین نوشت :

$$\frac{0}{\infty} = 0 \div \frac{1}{0} = 0 \times \frac{0}{1} = 0$$

و به طور کلی هر عدد تقسیم بر ∞ برابر است باصفر (خود صفر هم جزء اعداد است) . ازاینکه چرا $\frac{0}{\infty}$ برابرصفر است و $\frac{1}{\infty}$ هم برابر صفر تعجب نکنید . $\frac{2}{\infty}$ هم برابر صفر است و $\frac{3}{\infty}$ هم همچنین برابر صفر است .

۲ ـ درست است که هر عددی ضرب در صفر حاصلش صفر می‌گردد، اما ∞ را درسلک‌اعداد نمی‌توان آورد(به مقالهٔ بینهایت در ریاضیات شمارهٔ ۱۲ رجوع کنید) . $0 \times \infty$ ممکن است که برابر هرعددی بشود . درریاضیات به‌صورت $0 \times \infty$ مبهم می گویند . یعنی معلوم نیست که برابرچه عددی است. مثلا به این عبارت نگاه کنید :

$$(x-1) \times \frac{3}{x^2-1}$$

فرض کنید که بخواهیم ببینیم مقدار آن‌بازاء $x = 1$ چقدراست. باید به‌جای x درآن‌عبارت ۱ بگذاریم : دراین صورت عبارت به شکل $0 \times \infty$ درمی‌آیدکه به ظاهر مبهم‌است . امامی‌توان آن را چنین نوشت :

$$(x-1) \times \frac{4}{x^2-1} = \frac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x+1}$$

حال‌اگر در اینجا به‌جای x عدد ۱ را قرار دهیم به دست خواهیم آورد .

$$0 \times \infty = 2$$

واگر صورت کسر ازابتدا ۶ می بود بازاء $x = 1$ به دست می‌آوردیم :

$$0 \times \infty = 3$$

***

سؤال : لطفاً طرز پیداکردن مجموع N جملهٔ رشتهٔ زیر را شرح دهید :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{N}$$

ویااگر تاکنون‌نتوانسته‌اند مجموع N جملهٔ رشتهٔبالا را به دست آورند ، راهی وجود دارد کـه بتـوان مجموع رشتهٔ فوق را وقتی‌که $N \to \infty$ پیدا کرد ؟

خسروجهانیار

جواب: این‌که شما نوشته‌اید یك سری‌است واتفاقاً از سریهای مشهور است و به آن سری **هارمونیك** (Harmonique) می‌گویند. سریها به‌طورکلی بردونوعند: **سریهای متقارب** (همگرا) وسریهای **متباعد** (واگرا). سری‌را متقارب‌می‌گویند وقتی که‌حاصل جمع n جملهٔ اول آن‌وقتی که n به‌سمت بینهایت میل می‌کند دارای حدی‌باشد. درغیراین‌صورت آن را متباعد می‌گویند. واضح است که سری‌اگر متباعدباشد، به‌دست آوردن مجموع‌آن (یعنی مجموع جمله‌ها وقتی که‌تعداد آنها بینهایت شود) اساساً مطرح نیست چه این مجموع برابر ∞ است. بنابراین برای به‌دست آوردن مجموع یك‌سری باید ابتدا متقارب بودن‌آن را ثابت‌کرد. اما سری‌هارمونیك از سریهای متباعداست. دلیل متباعدبودن آن را می‌توان چنین ثابت‌کرد: جمله‌ها را به‌ترتیب زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{2}>\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+$$

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

ومی‌گوییم که اگر جمله‌های سری‌را تاجملهٔ معینی به p دسته‌تقسیم کرده‌باشیم، می‌توانیم p تاازاین نامساویها بنویسم. حال اگر این‌نامساویها راجمع کنیم طرف‌اول مجموع جمله‌ها تاآن جمله معین است وطرف دوم p تا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{P}{2}$ است.

وداریم:

$$\text{مجموع } p \text{ دسته از جمله‌های‌سری} > \frac{P}{2}$$

اما چون تعداد جمله‌های سری بینهایت است، تعداد دسته‌هایی که می‌توان تشکیل داد، یعنی p، نیز ∞ است و مجموع جمله‌های سری ازهرعدد بزرگی، بزرگتراست. پس سری هارمونیك متباعد یعنی مجموعش بینهایت است.

اما ماتاکنون در جایی فرمولی که از روی آن بتوان مجموع تعداد محدودی از جمله‌های سری‌هارمونیك را برحسب مرتبهٔ‌آن جمله‌ها به‌دست آورد ندیده‌ایم.

***

سؤال: ۱ـ لطفاً نام‌کتاب E.P.M را به‌وضوح نه به اختصار بنویسید تابرای استفاده خریداری‌کنم.

۲ـ درصورت امکان حروف یونانی که دوریاضیات به کارمی‌رود بااسامی‌آنها برای اطلاع اینجانب وعده‌زیاددیگری ازدوستان من در مجله درج نمایید.

فرهاد مهینی

جواب: ۱ـ E.P.M نام اختصاری این‌کتاب است:

Exercices et Problèmes des mathématiques

که در فرانسه چاپ شده و تألیف کومب (Combes) می‌باشد. ناشراین‌کتاب Vuibert دریاریس است.

۲ـ حروف یونانی‌که در ریاضیات مورد استعمال‌دارند چنین است:

α	آلفا	μ	مو
β	بتا	ξ	کسی
γ	گاما	π	پی
Δ,δ	دلتا	ρ	رو
ε	اپسلن	Σ,σ	سیگما
ζ	زتا	φ	فی
η	اتا	ψ	پسی
θ	تتا	Ω,ω	امگا
λ	لاندا		

***

سؤال: ۱ـ وقتی‌که یك‌تابع به‌دومتغیر مطلق بستگی داشته‌باشد، می‌توان ازآن مشتق‌گرفت بانه واگرمی‌توان‌مشتق گرفت چطور؟

۲ـ آیامی‌توان از توابع

$$y=\text{arc } \sin x$$

$$y=\text{arc } \cos x$$

$$y=\text{arc } tg\, x$$

$$y=\text{arc } cotg\, x$$

مشتق‌گرفت واگر می‌توان چطور؟ ومشتق‌آنهاچیست؟

داریوش قاضی وکیلی

جواب: ۱ـ چنانچه‌تابع به دومتغیرمطلق بستگی داشته باشد، ازآنها می‌توان برحسب هریك ازآن متغیرهای مطلق

مشتق گرفت. این مشتق را مشتق جزئی (یا مشتق نسبی) آن تابع نسبت به‌آن‌متغیر گویند. مثلا اگر تابع z به‌دو متغیرمطلق yوx بستگی داشته‌باشد ورابطهٔ بین‌آنها چنین باشد:

$$z=x^3-3x^2y+y^3$$

مشتق‌این‌تابع برحسب x که به z'_x نمایش داده‌می‌شود چنین محاسبه می‌شود:

$$z'_x=3x^2-6xy$$

(yثابت فرض می‌شود، مانندیک‌عدد)

و مشتق آن برحسب y که به z'_y نمایش داده می‌شود ،چنین محاسبه می‌شود:

$$z'_y=-3x^2+3y^2$$

(x ثابت فرض می‌شود، مانند یک‌عدد)

۲ـ این توابع را توابع مثلثاتی معکوس می‌گویند و از آنهامی‌توان مشتق گرفت ومشتق آنهاچنین است:

$$y=\arcsin x$$

(وقتی‌که $\sin^{-1}x$ دربع اول یاچهام باشد)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(وقتی‌که $\sin^{-1}x$ دربع دوم یا سوم باشد)

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arccos x$$

(وقتی‌که $\cos^{-1}x$ دربع اول یادوم‌باشد)

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(وقتی‌که $\cos^{-1}x$ دربع سوم یا چهارم باشد)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\operatorname{arctg} x \quad ! \quad y'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$y=\operatorname{arccotg} x \quad ! \quad y'=\frac{-1}{1+x^2}$$

راه مشتق‌گیری از این توابع تا اندازه‌ای مفصل و در کتابهای‌ریاضیات عالی هست به‌همین‌جهت ازشرح‌آنهادراینجا خودداری می‌کنیم.

***

سؤال : در کتاب فیزیك کلاس پنجم طبیعی و ریاضی صفحهٔ ۹۶ درقسمت‌حالت مخصوص منشور نوشته است‌درصورتی که زاویهٔ I کوچك باشد، زاویهٔ r هم‌کوچك است ومی‌توان به جای‌سینوس، خود زوایارا برحسب‌رادیان‌قرارداد یعنی $I=nr$، وحال‌آنکه می‌توان زوایا را برحسب درجه یاواحد دیگری‌نیز به‌کاربرد، زیرا ضرایب تبدیل واحد از طرفین تساوی حذف می‌شود،ولی‌کتاب این موضوع را یادآور نشده واین امرباعث می‌شودکه ما محصلین درموقع حل‌مسئله مقداری وقت خود را صرف تبدیل واحد زاویه‌کنیم .

جواب : به‌نظر ما آنچه درکتاب نوشته شده است‌برای آن است که‌بگوید چرا ازفرمول $\sin I=n\sin r$ می‌توان‌تساوی $I=nr$ رانوشت. پس‌ازآنکه این تساوی را نوشتیم همان‌طور که شمانوشته‌اید می‌توان دردوطرف تساوی به‌جای Iوrاندازهٔ آنها رابرحسب واحد دیگری جزرادیان نیز گذاشت . بدنبود که درکتاب هم‌به‌این‌موضوع اشاره می‌شد و دراین باره مثالی زده‌می‌شد.

***

آیا شما هم می‌توانید ؟

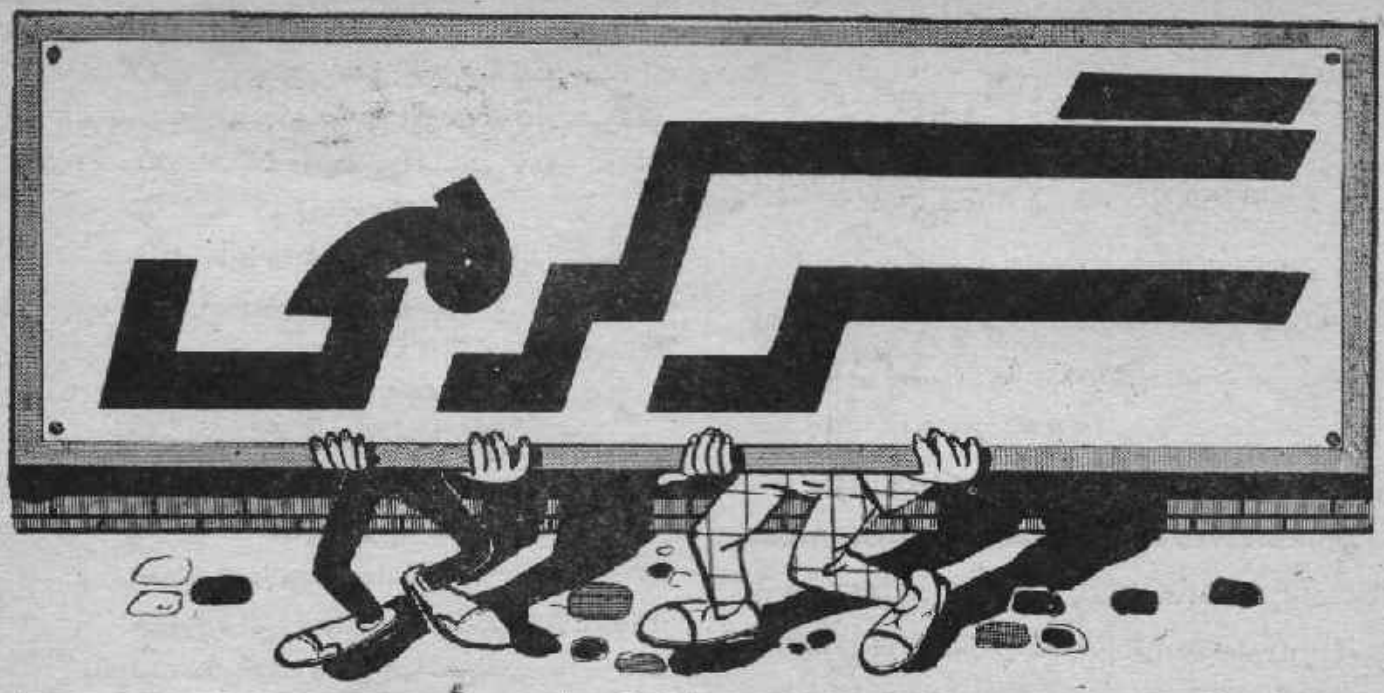
به‌این قالب نگاه‌کنید:

$۱۵۷^۲=۲۴۶۴۹$	$۱۳^۲=۱۶۹$
$۱۵۸^۲=۲۴۹۶۴$	$۱۴^۲=۱۹۶$

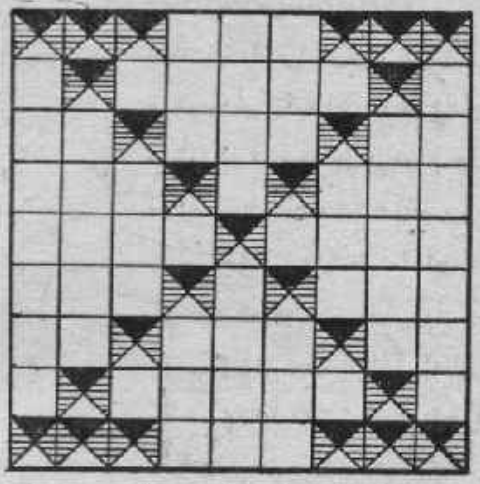
$$۹۱۳^۲=۸۳۳۵۶۹$$
$$۹۱۴^۲=۸۳۵۳۹۶$$

شاید اعداد دیگری نیز باشند که از همین قالب باشند . آیا شما هم می‌توانید با آنها چنین قالبی بسازید ؟

سرگرمی



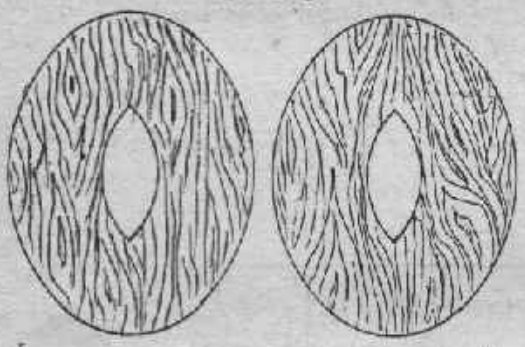
جدول کلمات متقاطع



افقی: ۱ــ محمد بن موسی خوارزمی این نام را برای این رشتهٔ مهم از ریاضیات وضع نمود. ۲ــ بخش مهمی از ریاضیات که با کمیتهای متصل سر وکار دارد. ۳ــ واروند واحد ــ اولش را معرب کنید واحد انگلیسی طول دوسوم از نه برابر ده. ٤ ــ ریاضیدانان قدیم ایرانی به علمی می گفتند که بیشتر از خواص مثلثات کروی بحث می کرد ــ هندیها به وتر می گفتند که بعدها به جیب تحریف شد. ٥ ــ نتیجهٔ مقایسهٔ دو مقدار ــ به آن آسه هم می گویند. ٦ ــ قضیه‌اش در مبحث موربات مطالعه می‌شود ــ بدون نقطهٔ آخر واحد طول. ۷ــ به آخر اعداد می‌آید تا مرتبهٔ آنها را برساند ــ نسبت مثلثاتی ــ و به آخرش افزوده‌شوددر مورد متغیر با Δx ودرمورد تابع با Δy نموده می‌شود.

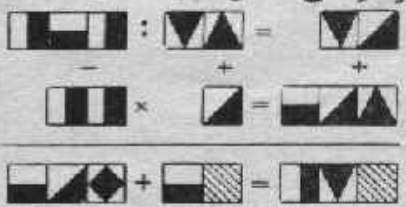
پنیه‌ور پائین صفحهٔ بعد

برش چوب



از نجاری خواسته‌اندکه از دو قطعه چوب به شکل بالا یك تختهٔ کاملاگرد به شکل دایره برای میز بسازد بدون‌آنکه چیزی از آن دور بیندازد یا چیزی به‌آن اضافه‌کند. چگونه؟

سرگرمی فکری (از مطبوعات آلمان)



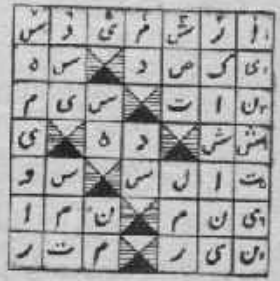
در شکل بالا هرمربع نمایش یك رقم می‌باشد، و مربعهای متشابه نمایش رقمهای متساوی می‌باشند. بین هردو عدد علامت عملی که باید انجام بگیرد گذاشته شده است وهرعدد زیر خط، حاصل عمل دوعدد بالایی‌است. این اعداد را پیدا کنید.

فرستنده: مهندس هورفر

مسئلهٔ برش

درچاپ صورت مسئلهٔ برش شمارهٔ قبل اشتباه رخ داده است درست آن مجدداً ذکرمی‌شود.

مستطیل به ابعاد ۱٦ در ۹ سانتیمتر را به دوقسمت چنان تقسیم کنید ودو قسمت را چنان پهلوی هم قراردهید که‌مربعی معادل‌بامستطیل به دست آید. مسئله را در حالت کلی برای مستطیل با ابعاد a و b بررسی کنید.



حل جدول شمارهٔ ۱۲

ازجمله نامه های رسیده

☆ آقای **کیوان پور قاسمی‌مقدم** نوشته‌اند که، «لغت ، مسأله، که به همین صورت صحیح است درمجلهٔ یکان به صورت غیر صحیح مسئله ، به چشم می‌خورد .»

نکتهٔ بالا مورد توجه نویسندگان یکان بوده است. چنانچه درشماره‌های نخستین یکان مراعات می‌شد. اما بنا به تصمیم‌شورای نویسندگان ، شیوهٔ نگارش منـدرجات یکان منطبق بر مصوبات شورای عالی فرهنگ بوده وهمان شیوه‌ای است که درچاپ کتابهای درسی نیز مراعات شده است . مصوبات شورای عالی فـرهنگ دربارهٔ شیوهٔ خط فارسی به صورت یك جـزوه از طـرف ادارهٔ مطالعات‌وبرنامه‌های وزارت فرهنگ (مملاآموزش و پرورش) چاپ ومنتشرشده است .

☆ آقای **نصرت‌الله ارضی** از اراك نوشته‌اند :

« در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۰ یکان در مقالهٔ انتقاد برکتاب فیزیك سوم توسط آقای هوشنگ شریف زاده علامت سانتیمتر مربع (c) بیان شده است و حال‌آنکه در حل‌المسائلهای تألیف ایشان علامت (Cm^2) به‌کاررفته است .»

«در صفحهٔ ۳۷ شمارهٔ ۱۰ فرمول اسید بوتان‌اوئیك(اسید بوتیریك) کـه به صورت CH_3CH_2COOH چاپ شده است صحیح نیست .»

«شعر لطیفی که ضمن مقالهٔ مندرج در صفحهٔ ٤ شمارهٔ ۱۱ چاپ شده است در دیوان‌کلیم‌کاشانی به صورت اصلی خـود چنین مذکور است .

موجیم که‌آسودگی ما عدم ماست ما زنده به‌آنیم که‌آرام نداریم»

«معمای‌آشپزخانهٔ مشترك مذکور درصفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۱ تحریف شـدهٔ معمای معروف تقسیم قرص نان و منسوب به علی‌بن ابیطالب (ع) می‌باشد.»

یکان ـ دردو مـورد اول عدم توجه مسئولان چاپخانه در غلط‌گیری موجب اشتباه شده‌است . علامت سانتیمتر مربع (cm^2) می‌باشد. علامتهای قرار دادی بین‌المللی فیزیك منطبق بـر تصمیم کنگرهٔ بین‌المللی ژنو در یکان سال چاپ شده است .

درمـورد معمای‌آشپزخانهٔ مشترك علاوه برآقای ارضی ، عده‌ای دیگراز خوانندگان نیزایرادگرفته‌اند . توجه عمومردم به مسائل‌فکری ومعماهای ریاضی موجب شده است که چه درگذشته و چه درحال کتابهای متنوعی دراین زمینه نگارش یابد ودرنتیجه یك مسئله به صـورتهای مختلف بیان شود . تنها از کتابهایی که دراین زمینه ودرسکی دوسال اخیر درکشورهای آمریکا ، شوروی وفرانسه چاپ شده‌است نزدیك به‌بیست جلد دراختیار نویسندگان یکان می‌باشد . دربارهٔ مسائل ریاضی منسوب به‌علی‌بن ابیطالب(ع) مقالهٔ جامعی درموقع مقتضی دریکان چاپ خواهد شد .

● آقای **رضا منصوری** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان رهنما دربارهٔ اثبات مسئلهٔ شمارهٔ ۷ از ترسیمات هنـدسی فقط با پرگار مذکور درصفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۸ یکان ایرادگرفته‌اند وتوضیح داده‌اندکه قبلاباید بیان می‌شد سه نقطهٔ A و M و C بـریك

(دنباله در صفحهٔ ماقبل آخر)

بقیهٔ شرح جدول کلمات متقاطع

۸ ـ دو معادله را گویند که دارای ریشه‌هـای مشترك باشند .

۹ ـ وارونهٔ عملی از چهارعمل اصلی.

قائم: مجموعهٔ جامعترین مقاله‌های‌علمی‌وجالبترین مسائل سال.۲ـ از یك وسه‌تشکیل شده اما یك دوازدهم یك به علاوهٔ سه است. ۳ـ نام عام مرابحه و تنزیل. ۴ـ وارونهٔ عددی یك رقمی‌ـ باعلامت + مشخص‌می‌شود. ۵ـ درقدیم علمای علم اعداد به‌عددهای زوج می‌گفتند و نام یك نوع مـربع و فقی نیزمی‌باشد ـ فیلسوف و ریاضیدانان عالیمقام ایرانی .٦ ـ برای‌کلمهٔ عرض از مختصات وضع شده بود ـ طول نـوار سی درجهٔ منطقةالبروج . ۸ ـ نقطهٔ حرف اولش را به حرف دوم بدهید مقدار فضای اشغال شده توسط جسم می‌باشد.۸ـ دانشمندوریاضیدان مشهورانگیسی.۹ـ ریاضیدان معروف ایرانی‌که اولین‌کتاب جبررا نوشت .

حل مسئلهٔ خرید اسب

(مذکور در صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۱۲)

بهـای اسب را با x ومال پنج نفر را به ترتیب با a و b و c و d و e نمایش می‌دهیم . خواهیم داشت :

$$\begin{cases} ٥a+٤b=٥x \\ ٥b+٣c=٥x \\ ٥c+٢d=٥x \\ ٥d+e=٥x \\ ٦e+a=٦x \end{cases}$$

ازحل دستگاه نتیجه می‌شود

$$٣٧٧٤d=٣٠٨٥x$$

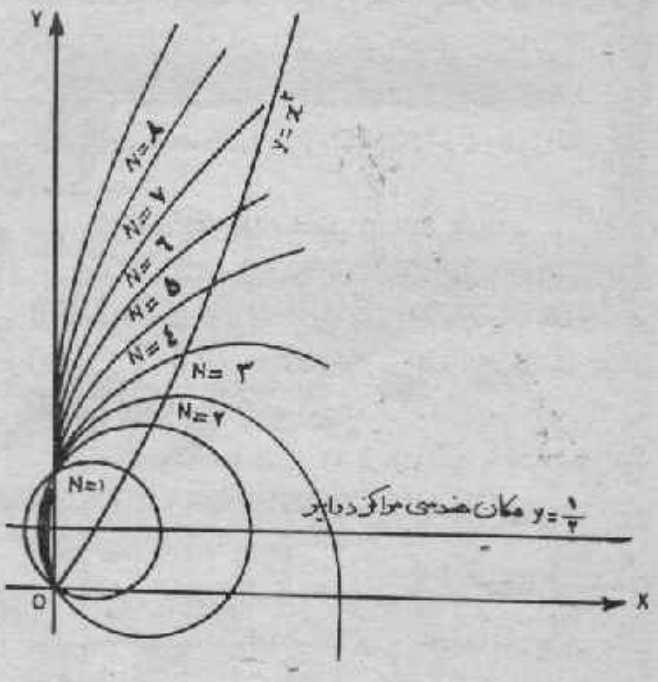
چون ۳۰۸۵ و۳۷۷٤ نسبت به یکدیگر اول هستند پس $x=٣٧٧٤k$ وکوچکترین جواب‌آن به ازاء $k=١$ به دست آمده ودارایم

$$x=٣٧٧٤ \quad و \quad a=١٩٧٤ \quad و \quad b=٢٢٥٠$$

$$c=٢٥٤٠ \quad و \quad d=٣٠٨٥ \quad و \quad e=٣١١٦$$

N	
۱	C
۲	

است و مرکز آن C است.



ش ۶

خط $y=\frac{1}{2}$ مکان‌هندسی مراکز دوایر است. ازحذف y بین دومعادله $y=x^2$ ودایرهٔ حلال حاصل می‌شود.

$$x(x^3-N)=0 \quad \text{یا} \quad x^4-Nx=0$$

$$x=0 \quad \text{و} \quad x^3-N=0 \quad \text{ویا}$$

پس دایره بازاء مقادیر مختلف N سهمی را دردونقطه به‌طولهای صفرو $\sqrt[3]{N}$ قطع می‌کنند.

هزار وپانصد سال‌بعد حکیم‌عمرخیام نیشابوری برای‌حل کلی معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم تقاطع یك‌سهمی و یك دایرهٔ متحرك را پیشنهاد کرد و بخصوص از این راه توانست مسئلهٔ تضعیف مکعب وتثلیث زاویه را حل‌کند.

معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

را با تبدیل x به $x-\frac{b}{3a}$ به معادلهٔ درجهٔ چهارم ناقص

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0$$

می‌توان تبدیل‌کرد. اگر سهمی $y=x^2$ و دایرهٔ

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta x+\gamma=0$$

را درنظرگرفته وy رابین معادلات آنها حذف‌کنیم به‌معادلهٔ

$$x^4+(1+\beta)x^2+\alpha x+\gamma=0$$

می‌رسیم وچون معادلهٔ اخیر را با معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض متحدکنیم‌به‌موجب‌اصل تساوی ضرایب در اتحادهاخواهیم‌داشت:

$$\gamma=C \text{ و } \alpha=B \text{ و } 1+\beta=A$$

بدین ترتیب دایرهٔ حلال برحسب ضرایب معادلهٔ درجهٔ چهارم تعیین می‌شود.

اگر معادله درجهٔ سوم باشد

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

با تبدیل x به $x-\frac{b}{3a}$ به‌معادلهٔ

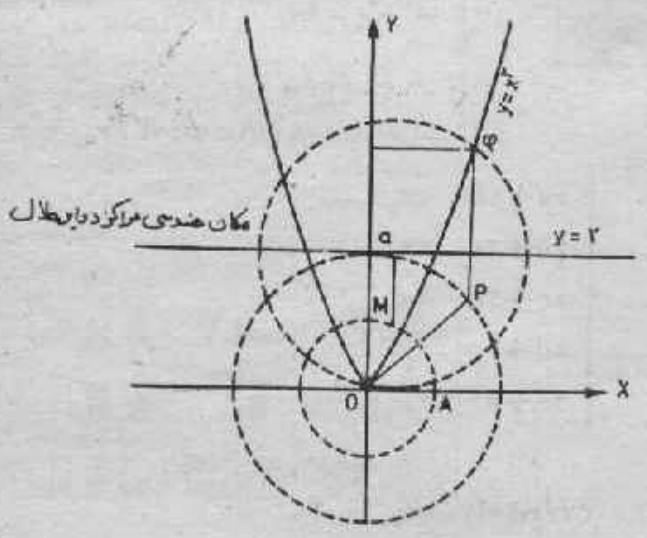
$$x^3+px+q=0$$

تبدیل‌می‌گردد. این معادله‌را در x ضرب‌کرده بامعادلهٔ‌حاصل از تلاقی سهمی و دایرمتحد می‌کنیم:

$$q=\alpha \text{ و } p=1+\beta \text{ و } \gamma=0$$

به‌دست می‌آید. درنتیجه دایرهٔ حلال از مبدأ مختصات خواهد گذشت. بحث مفصل مربوط به‌حل معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم وهمچنین چگونگی تلاش ریاضیدانان برای پیدا کردن طرق سادهٔ حل‌آنها را به‌فرصتی دیگر موکول می‌کنیم. فقط ناگزیر از شرح روش حکیم عمرخیام وریاضیدان بزرگ ایران در تثلیث یك‌زاویهٔ غیرمشخص می‌باشیم.

زاویهٔ مفروض XOM است این زاویه که آن را θ می‌نامیم در دایره‌ای بشعاع واحد مقابل به‌قوس AM است و $\cos\theta=a$ می‌باشد (شکل۷).



ش ۷

اما

$$\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$$

چون طرفین رابطهٔ فوق را دوبرابر کرده و $x=2\cos\frac{\theta}{3}$ فرض کنیم‌معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-3x-2a=0$ راخواهیم داشت

به‌موجب توضیحات بالا دایرهٔ حلال به‌معادله

$$x^2+y^2-2ax-4y=0$$

یا

$$(x-a)^2+(y-2)^2-a^2+4$$

می‌باشدکه مرکز آن $C\begin{matrix}x=a\\y=2\end{matrix}$ است. اگر φ نقطه‌ای مشترک بین‌دایره‌وسهمی دربع‌اول و Pتصویر φ برروی دایرهٔ‌به‌مرکز O و به شعاع ۲ باشد در این صورت زاویهٔ XOP ثلث φ خواهدبود.

طریقهٔ‌یافتن مقاطع‌مخروطی به‌وسیلهٔ منائیخمس نیزقدری به‌نظر عجیب می‌آید. وی‌تصور می‌کرد که مقاطع مخروطی از تقاطع سطح مستوی بامخروطی که‌این سطح برمولدآن عمود باشدحادث می‌شوندوسه نوع‌مقطع که ظاهراً وی به‌هرسه‌تای‌آنها پی‌برده وآنهارا‌ازیکدیگر تفکیک کرده است‌از آنجاپیدامی‌شوند. که‌زاویهٔ‌رأس مخروط رفته‌رفته‌بزرگترشود تاوقتی‌که زاویه‌حاده است شکل مقطع بیضی‌است‌وچون این‌زاویهٔ رأس مخروط‌مساوی قائمه شود مقطع‌به‌صورت سهمی درمی‌آید درآن‌صورت که‌زاویهٔ رأس منفرجه باشد دوشاخهٔ یك هذلولی درست می‌شود.

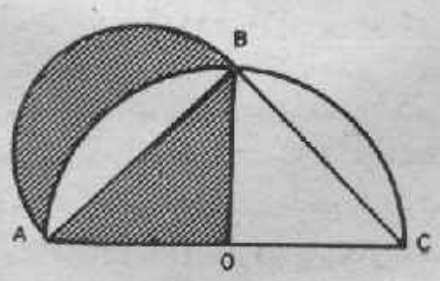
نویگه بوئر (Neugebauer) چنین حدس زدکه ممکن است منائیخموس با استدلال ساعت آفتابی پاشاخص به این‌اکتشافات راه یافته‌باشد.

خواص‌عالی این‌مقاطع چنان هندسه‌دانان یونان‌رامفتون کردکه به‌زودی این‌منحنی‌ها را به‌خاطر خودآنها موردمطالعه قراردادند وآپولونیوس رساله‌ای دربارهٔ مقاطع مخروطی‌نوشت که درآن مهمترین‌خواص آنهاراشرح داده‌وثابت کرد.یونانیان این منحنیها را مکان هندسی (loci) می‌نامیدند.

دیگراز کسانی که‌به‌خاطرحل‌مسائل‌افسانه‌ای‌شهرتی‌جهانی یافته‌اند بقراط ریاضیدان است. وی که دراواخر قرن‌پنجم‌قبل ازمیلاد به‌خاطر مسئلهٔ تربیع‌دایره به‌اوج شهرت رسید،درمورد تثلیث‌زاویه کاری نکرده است. امارا‌ه حلهای جالب‌وناتمامی‌از او برای دومسئلهٔ دیگر دردست است.

کوشش‌وی‌برای تربیع دایره‌سبب اکتشاف شکلهای‌هلالی شدکه می‌توان مربع معادل آنها را بدست آورد و این عجیب است‌که ازپنج‌نوع هلال اکتشافی بقراط سه‌تای آنها به آسانی تربیع می‌شود واین‌خود ازاین‌نظر اهمیت‌داردکه به‌وسیلهٔ‌آنها معلوم می‌شود کـه لااقل‌پاره‌ای از اشکال منحنی الخط قابل تربیعند.

ساده‌ترین شکل هلالی بقراط چنین است : نیم مربع ABCدرنیم‌دایرهٔ‌به‌مرکز Oمحاط است(شکل۸). نیم‌دایره‌ای



ش ۸

به قطر AB رسم می‌کنیم. چون نسبت‌بین مساحتهای دودایره مثل‌نسبت مربع قطرهای آنها است لذا $AC^2=2AB^2$. بنابراین نصف‌نیم‌دایرهٔ بزرگ مساوی نیم دایرهٔ کوچك است. اگرقسمت‌مشترك‌بین دوسطح‌آنهارا‌برداریم مثلث OAB معادل شکل‌هلالی خواهد بود.

بقراط حل‌مسئلهٔ تربیع‌دایره را بدین‌شرح بیان داشت‌که برای تربیع‌دایره قطعاتی ازآن‌را تربیع می‌کنیم .سپس نتایج حاصل‌را باهم جمع می‌کنیم. این‌کار به‌سهولت در مورد قطعاتی از دایره به‌شکل هلال که آنها را اهلهٔ بقراط نامیدند صورت گرفت امابیهوده درصدد جمع‌کردن آنهابود زیرا همواره‌جزء کوچکی باقی‌بود که اندازه‌گیری آن‌کار ساده‌ای نبودولی به هرحال به‌خاطر تربیع چند هلال، درآن‌زمان شهرت یافت که بقراط مسئلهٔ تربیع دایره راحل‌کرده است.

راه‌حلی که بقراط برای تضعیف مکعب بیان داشته است حاکی‌است که اونیزمانند اوخوتاس مسئله را تبدیل‌به‌پیداکردن دوتا از وسطین ذواربعهٔ متناسبه میان aو$2a$ کرده است ولی‌این خودبه‌طور ضمنی‌نشان می‌دهد که او از نسبتهای مرکب آگاهی داشته‌وباحسن تشخیص وانتقال خود آنهارا دربارهٔ خطوط‌به‌کار برده است.

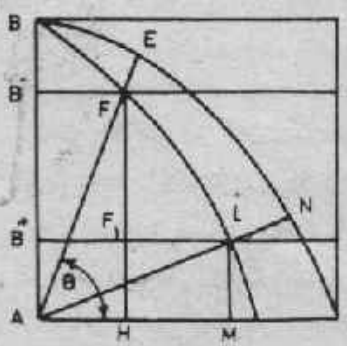
حل مسئلهٔ تثلیث‌زاویه ؛ جزدرحالت خاص قائمه بودن، به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار امکان ندارد مگرآنکه بخواهیم بـا تقریب‌نتیجه رابه‌دست‌آوریم واین‌کاری است‌که تمام دانشمندان ریاضی عهدعتیق وعلمای جدیدتر از دوهزار سال قبل تـاکنون کرده‌اند **هیپاس دونیکومد (Nico mede)** و بقراط و ارخوتاس و حتی ارشمیدس ، خیام ، خواجه‌نصیرالدین طوسی هریك‌راه‌حلهای مخصوصی برای‌تثلیث زاویه به‌طور تقریب‌ارائه داده‌اند.

نیکومد برای حل مسئلهٔ‌تثلیث زاویه منحنی **کونکوئید (Conchoide)** را ابداع کردکـه تعریف‌آن چنین است : اگر ازنقطهٔ O واقع درصفحهٔ یك‌منحنی ، شعاعهای حاملی بـه

تمام نقاط آن منحنی وصل کنیم و هریك از این شعاعهای حامل رابه‌طول ثابت ومعین l امتداد دهیم مکان هندسی انتهای این اشعه منحنی جدیدی‌است که‌آن را کونکوئیدمنحنی اول می‌نامند. منحنی کونکوئید خط راست که برای حل‌تقریبی مسئلهٔ تثلیث زاویه ابداع شدمنحنی‌درجهٔ سوم است‌و منحنی کونکوئیددایره به ازاء وضع خاصی ازنقطهٔ O **حلزون پاسکال** نام دارد و باز بازاء وضع‌خاص دیگری ازنقطهٔ O و مقدار معینی ازطول l منحنی دیگری‌است که‌آن را **کاردیوئید** (منحنی بشکل‌قلب) می‌نامند . **دیوکلس** (Diocles) که تقریباً معاصر نیکومد بود برای تثلیث زاویه منحنی **سیسوئید** (Cissoide) را بوجود آورد که تعریف آن چنین است : دایرهٔ C و نقطهٔ A واقع بر آن ویکی از مماسهای دایره را در نظر می‌گیریم. اگر از A خطوطی رسم کنیم که دایره‌را در Q وخط مماس رادرP قطع کنندمکان نقطهٔ M ازاین‌خطوط‌را که‌بازاء‌آن $AQ=MP$ باشد سیسوئید می‌نامند ونیز می‌توان آن را منعکس یك سهمی نسبت به‌یکی ازنقاط سهمی دانست .

هیپیاس (Hippias) اهل **الیس** (Elis) درسال ٤٣٥ قبل‌از میلاد برای‌آنکه بتواند زاویه‌را به‌قسمت متساوی تقسیم کند منحنی تازه‌تری اختراع کرد که در تاریخ منحنیهای عالی‌نخستین نمونه است وآن منحنی را با اسباب نمی‌توان‌رسم کرد بلکه راه ترسیم آن نقطه‌یابی و اتصال نقاط به یکدیگر است :

منحنی راکه هیپیاس اکتشاف کرده مربع‌ساز (Quadratrix) می‌نامند زیراهمین منحنی را یك‌قرن بعد **دینوستراتوس** (Deinostratos) (قرن چهارم قبل از میلاد) ودیگران برای تربیع دایره به‌کار بردند راه تولید این منحنی چنین است: مربع ABCD به ضلع a که درآن ربع دایره‌ای به مرکز A بشعاع a رسم شده‌است‌درنظر می‌گیریم. اگرشعاع دایره باسرعت ثابت ازوضع AB تاوضع BD دوران‌کند و در همان‌حال‌همزمان‌حرکت



ش ۹

آن‌ضلع BC نیز باسرعت ثابت به‌موازات خود حرکت‌انتقالی داشته باشد ودرپایان به‌وضع AD درآید، محلهای تقاطع این دوخط (نقاطی مانند L و F) همان نقاطی است که منحنی مربع ساز را می‌سازند واضح است که $\text{ق}ED=\text{ز}EAD$ و $\text{ق}BD=\text{ز}BAD$. این دورابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\text{ق}BD}{\text{ق}ED}=\frac{\text{ز}BAD}{\text{ز}EAD}$$

نسبت بین‌دوقوس برابر نسبت بین $\frac{BA}{FH}$ است. اگرطول AF رابه e وزاویهٔ DAF رابهθنمایش دهیم

از رابطهٔ $\frac{\overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{ED}}=\frac{AB}{FH}$ نتیجه می‌شود $\theta=\frac{a}{e\sin\theta}:\theta<\frac{\pi}{2}$ زیرا در

مثلث AFH که قائم‌الزاویه است $FH=e\sin\theta$ وبنابراین

$e\frac{\pi}{2}\sin\theta=a\theta$ این معادله مکان‌است. هرگاه خط FH

را به‌دو جزء برنسبت ۲و۱ قسمت کنیم بدانسان که

$FF_1=2F_1H$ باشد وپس ازآن B"C" رارسم کنیم تاFH

را در F_1 ومنحنی را در L قطع کند و A رابه L متصل سازیم

زاویهٔ NAD برابر ثلث‌زاویهٔ θ خواهدبود.

درخاتمه: چون بنابگفتهٔ ویت ریاضیدان فرانسوی،همان کسی‌که برای نخستین‌بار حروف‌را به‌عنوان علامت واردقلمرو جبر کرد ، حل‌هرمسئلهٔ درجهٔسوم ودرجهٔ چهارم پس‌ازآخرین مرحلهٔ تحلیل به مسئلهٔ تثلیث زاویه یاتضعیف مکعب می‌رسد. در مقاله‌ای دیگر تاریخچهٔ‌پیدایش وطرق مختلف‌مراحل‌وچگونگی حل معادلات درجهٔسوم و درجهٔ چهارم کامل راکه نتیجهٔ‌بسیار مفیدوجالبی ازتلاش مغز بشری درحل مسائل افسانه‌ای‌بوده‌است بیان خواهیم داشت .

تقاضااز اشخاصی که

برای مجله مطلب یامسئله می فرستند

۱ـ مطالب فقط در یك روی صفحهٔ کاغذ و باخط خوانا نوشته‌شود.

۲ـ مطالب مختلف دراوراق جداگانه نوشته‌شود.

۳ـ باهرمسئله حل‌آن همراه‌باشد .

٤ـ برای‌هرمسئله‌ذکرشود که طرح‌فرستنده است یااینکه ازجای دیگر اخذشده است ومأخذآن معرفی‌شده‌باشد.

٥ـ چنانچه مسئله از مجله‌های خارجی‌نقل شده‌است نام کامل‌وتاریخ وشمارهٔ مجلهٔ‌مزبور معرفی شده باشد.

٦ـ ازارسال مسائلی که درحل‌المسائلها وکتابهای درسی چاپ‌ایران مذکور است خودداری شود.

۷ـ مشخصات فرستندهٔ مطالب‌یامسئله بوضوح ذکرشود.

۸ـ مطالب‌ومسائل‌رسیده به‌شرط‌رعایت‌نکات‌فوق، به‌ترتیب وصول وباتوجه به‌موضوع ومناسبت سال تحصیلی در مجله درج می‌گردد .

ازجمله نامه‌های رسیده (بقیه ازصفحهٔ ۵۳)

استفاده‌مندآنگاه ازتشابه دو مثلث ACQ و AQM نتیجه‌گرفت که M وسط AB می‌باشد .

● آقای **هادی‌خرقانی** دانشجوی رشتهٔ ریاضی ضمن توضیحی‌که برای «عمل غلط اما جواب صحیح» مذکور در صفحهٔ ۶۱ شمارهٔ ۱۱ داده و راه‌کلی برای تعیین کسرهای با خاصیت مذکور درمقاله داده‌اند ، ایراد گرفته‌اند که یک چنین عملی نباید غلط ذکرشود بلکه بایدگفت راه غیرعادی»

یکان ـ منظور طراح سؤال این بوده است که عمل از نظر کلی غیر مجاز است یعنی نمی‌توان آن را در مورد همهٔ کسرها به‌کاربرد .

● آقای **فیروزبایرامی** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان ادیب برای مشتق تابع تعریف زیررا به عمل آورده‌اند :

فرض‌می کنیم‌وقتی‌که x به xdx تبدیل می‌شود y به ydy تبدیل گردد دراین صورت مشتق تابع عبارت خواهد بود از :

$$y'=\lim_{dx\to 1}\frac{y(dy-1)}{x(dx-1)}$$

وبا تعمیرهندسی که به‌عمل آورده‌اند نتیجه‌گرفته‌اند که بازهم‌مشتق تابع برابر با ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی می‌باشد. آقای‌بایرامی برای مثال مشتق چند تابع را به روش فوق تعیین نموده‌اند.

● آقای **غلامحسین پور تندرست** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان نوربخش رشت ضمن ایراد به فرمولی‌که برای محاسبهٔ مجموع جمله های یک تصاعد حسابی مرکب در صفحهٔ ۳۲ شمارهٔ ۶ یکان ذکر شده است فرمول زیر را برای این مجموع ارائه داده‌اند .

$$S=n(a-b+c)+\frac{1}{6}n(n+1)(nc-4c+3b)$$

که درآن a جملهٔ اول ، b تفاضل جمله‌های اول و دوم و c قدر نسبت تصاعد تفاضلها و n عدهٔ جمله‌ها می‌باشد.

● آقای **حسین گوگی‌زاده** دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان شاهپور کرمان با روش‌هندسی ثابت کرده‌اندکه درمعادلهٔ مثلثاتی کلاسیک نوع اول اگرمجموع ضریبها برابرصفرباشد معادله حتماً دارای دوریشهٔ متمایز می‌باشد .

یکان ـ امید است موردی پیش‌آید ودربارهٔ کارهای ابتکاری آقایان بایرامی، پورتندرست وگوگی‌زاده توضیح مفصلتر بیان گردد .

● عدهٔ کثیری از خوانندگان‌گرامی ضمن نامه‌های خود راههایی برای تعیین قابلیت تقسیم اعداد بربعضی اعداد اول دو رقمی ازقبیل ۱۷ و ۲۳ و ۲۹ و... ارائه داده‌اند چون دراین‌مورد کتابی هم چاپ شده است ازذکر این راههای‌ارائه شده‌که درضمن مشابه یکدیگر نیزمی‌باشد خودداری می‌گردد .

کتابفروشی هاشمی

شیراز

مرکز پخش و انتشار مطبوعات مفید و ارزندهٔ ایران در فارس

قابل توجه‌نمایندگان‌محترم‌شهرستانها

بدین وسیله به اطلاع ساینده‌گان مجله در شهرستانها می‌رساند که‌کلیهٔ نسخه‌های مجلات شماره‌های ۲-۳و۴-۶ به فروش رفته است ودر حال‌حاضر ازاین‌شماره در ادارهٔ‌مجله موجودنیست وعلت نفرستادن این‌شماره‌ها برای متقاضیان همین بوده است .

نکتهٔ دیگری که‌لازم است یادآوری شود این است که مجلات‌بعضی ازنمایندگان که‌برگشت داده‌می‌شود به‌مهرمخصوص ایشان ممهور گشته است . این امر ارسال این مجلات رابه شهرستانهای دیگر بااشکال مواجه می‌سازد، بنابراین خواهش می‌شود که از مهرزدن به‌نسخه‌هائی که احتمال فروش آنهابرای نمایندگان محترم درمیان نیست خودداری فرمایند. از قبول اینگونه مجلات برگشتی معذور خواهیم بود.

ادارهٔ مجله

حل‌المسائل

جبر و مثلثات

برای سال ششم طبیعی دبیرستانها

تألیف: حسن‌زاده ـ آشتی

حل‌المسائل

هندسهٔ فضائی

برای سال پنجم دبیرستان و متفرقه

تألیف : حسن‌زاده ـ پرتوی

بوسیلهٔ **مؤسسه مطبوعاتی شرق**

میدان بهارستان منتشر شد

فن ترجمهٔ انگلیسی

نگارش

دکتر علاء الدین پازارگادی

استاد دانشگاه تهران

کتاب فن ترجمهٔ انگلیسی در حقیقت جلد سوم از رشته کتبی است که برای راهنمائی دانش آموزان ودانشجویان درمورد مطالعهٔ زبان انگلیسی تألیف شده‌و « دستور زبان انگلیسی » و « انشاء انگلیسی » جلد اول و دوم آن محسوب می‌شوند .

در تنظیم این کتاب مطالب طوری طبقه‌بندی شده و به مراحل تدریجی تقسیم گشته و در هر مرحله امثلهٔ کافی و تمرین فراوان و پس‌ازهر تمرین معانی لغات مورد احتیاج برای ترجمهٔ آن‌داده شده‌که کاردانش آموز ودانشجو را در ترجمه سهل کرده و امکان پیشرفت سریعتری را برای او بوجود آورده است.



انتشارات نیل

انتشارات نیل را بخوانید و ذهن خود را از گنجینهٔ دانش امروزی غنی سازید

تهران ـ میدان مخبرالدوله تلفن ۳۰۴۱۲۸