یکان

۶

مجلّه ریاضیات



موسسه ریاضیات

سال یکم ـ شمارهٔ ششم

تیرماه ۱۳۴۲

بهاء : ۲۰ ریال

در این شماره :

نظراتی درباره تجدید نظر در برنامه ریاضیات	ترجمه جهانگیر شمس‌آوری	۱
فصلی از تاریخ ریاضیات	ترجمه باقر امامی	۵
چرا معلم ریاضی شدم	غلامرضا مسجدی	۸
۱۰۰ ـ زبان‌شمار	ترجمه خدیجه عنالیان	۱۱
دو انگشت اضافی	ترجمه اکبر فهرمانی	۱۷
کهنه و نو	ـ	۱۹
حل مسائل شماره‌های گذشته	ـ	۲۰
راهنمای ریاضیات متوسطه : تحویل رادیکال مرکب ـ ریشهٔ مضاعف معادلات ـ تقسیم بایه در لگاریتم ـ تصاعد حسابی مرکب		۲۷
مسائل برای حل : مسائل متفرقه ـ مسائل امتحانات نهائی کشورهای مختلف		۳۲
مسائل امتحانات نلث سوم کلاسهای چهارم و پنجم دبیرستانها		۳۷
مسائل از استاد دکتر هشترودی		٤٤
مسائل برای دانشجویان دکتر آوانیسیان ـ دکتر هشترودی		٤۹
حل مسائل ریاضی امتحانات نهائی حبیب‌الله عبداللهی		٥٤
حل مسائل فیزیك و مکانیك امتحانات نهائی دکتر ابوالقاسم قلمسیاه		٥۷
لست ریاضی برای داوطلبان کنکور مهربان بروژ		٦۲
سرگرمی	ـ	٦٥
پاسخ به پرسشهای رسیده	ـ	٦۷

علامت‌های جدید ریاضی

ازابتدای انتشار یکان، بر نظر بود که باستفاده از علامت‌های جدید ریاضی در حل مسائل، موارد استعمال آنها تا آن اندازه که در ریاضیات متوسطه مورداستفاده است‌باطلاع دانش آموزان گرامی برسد. اما بعلت اینکه چاپخانه های ایران هنوز پایه های چاپی این علامت ها را تهیه نکرده‌اند انجام نظر فوق میسر نشد. در این شماره ضمن حل مسائل علامت ⟸ با ترکیب علامتهای موجود چاپخانه و مشابه باعلامت اصلی یعنی « نتیجه میشود » بکار رفته است.

***

شماره اول یکان را خواستاریم

چون تمام نسخه های چاپهای اول ودوم شماره اول یکان مصرف شده‌است و مشترکین جدید و مراجعین دیگر تقاضای شماره اول را دارند. بدین وسیله از اشخاصی که نسخه‌ای از شماره‌مزبور مازاد براحتیاج خود را دراختیاردارند درخواست میشود آن را به اداره مجله ارسال‌دارند، در مقابل وجه آن یا شماره های دیگر مجله ارسال خواهد شد.

***

مسائل رسیده

از آقایان دبیران گرامی: محمدعلی مساقت گیش ــ هوشنگ شریفزاده.

از دانشجویان گرامی: مجید بهمنش ــ مصطفی گودرزی ــ منوچهر بابپوردی ــ عبدالرحمن ستارزاده آذری.

از فارغ‌التحصیلان ودانش آموزان گرامی دبیرستان: عنایت‌الله وفائی ــ داود تراکمه ــ سعید وهابزادگان ــ بیژن مشیر وزیری ــ نصرت‌الله حسلو ــ سیروس فخریاسری ــ محمد آگاه ــ بهرام‌دانا ــ حسین حرارت تهرانی ــ ناصر خیر خواه ــ سید جعفر وقایعش ــ انوشیروان سلیمی ــ اسماعیل واعظ قدسی ــ جواد یحیوی ــ فریبرز بهزوسی ــ علی بنی‌هاشم ــ آخوندی ــ فیروزپایرامی ــ مسعود فرهنگ ــ سید علی اکبر سجادی ــ محمد هادی اردبیلی ــ تقی قاضی وکیلی ــ پرویز ابراراصل ــ محمد رضا قیمی ــ سیدعلی رضا فاضلی ــ منصور شهیدی ــ بهروز ارشاقی ــ سید محمد قریشی ــ جمال لاله‌پرور ــ فرهاد مالی ــ حسین نجف‌زاده ــ کاوه تیمانی ــ مجید حرمی.

یکان

مجلهٔ ریاضیات

شماره ششم ــ سال اول

تیرماه ۱۳۴۲

هرماه یک‌بار منتشر میشود

صاحب امتیاز مدیر و سردبیر

عبدالحسین مصحفی

جای ادارهٔ موقت ــ تهران خیابان سرباز شماره ۳۵۳

نشانی پستی ــ صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن ۷۵۸۵۷۰

اشتراک سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری شماره ۶۸۶۳ شعبه فردوسی بانک صادرات

مقاله‌های وارده مسترد نمیشود

طبع ونشر مندرجات و مقالات اختصاصی این مجله بی‌اجازه ممنوع است

چاپخانه محمدعلی علمی

دبیرستانهای

گروه فرهنگی خوارزمی

۱ ــ دبیرستان خوارزمی (شماره ۱ پسران)

شاهرضا جنب سینما پلازا. تلفن ۴۰۸۲۳ و ۴۵۴۴۱

۲ ــ دبیرستان خوارزمی (شماره ۲ پسران)

شاه آباد ــ نرسیده به‌بهارستان. تلفن ۳۸۶۳۳

۳ ــ دبیرستان مرجان (دخترانه)

شاهرضا، بیست متری دوم. تلفن ۴۲۱۸۰

همه روزه برای دورهٔ کامل‌دبیرستان نام‌نویسی می کنند

کلاسهای تابستانی، کنکور، تجدیدی، تقویتی ومتفرقه دختران وپسران نیز

در سه محل فرق دارد است

نظراتی چند دربارهٔ تجدید نظر در برنامهٔ ریاضیات*

«هدفهائی که در تغییر برنامه مدنظر بوده است چیست و برنامهٔ تجدید نظر شده برای چه شاگردانی مناسب است»

آیروینگ ادلر IRVING ADLER

ترجمهٔ جهانگیر شمس آوری

مطلب را با مقدمه‌ای آغاز می‌کنم . اعتقاد راسخ من این است که تجدیدنظر کردن مستمر در برنامهٔ ریاضیات مدارس از واجب ترین و شایسته ترین کارهای فرهنگی است و غفلت در آن خسران غیر قابل جبران به‌وجود می‌آورد . منتقدم که پیشنهاداتی که دراین زمینه ، یعنی تجدید نظردر برنامهٔ ریاضیات مدارس ، به وسیلهٔ کمیسیون ریاضیات امتحانات ورودی دانشگاه و کمیتهٔ برنامهٔ دبیرستان وابسته به انجمن ملی‌معلمان ریاضیات وهمچنین کمیتهٔ ریاضیات مدارس دانشگاه ایلنوی و بالاخره گروه تحقیق ریاضیات‌مدارس ، شده است همه اساسی و به حدکافی پر عمق و خالی از نقص بوده است . من قصد ندارم که له این تغییرات بحثی به میان بکشم . زیرا برنامهٔ پیشنهاد شده به اندازهٔ کافی معرفی گشته وتا این زمان ، به مقیاس وسیع ، مورد قبول واقع شده است . تنها نکته‌ای که در این خصوص متذکر می‌شوم آن است که این جنبشی که در تغییر برنامهٔ ریاضیات بنیان گرفته‌است باید ، و باز تأکید می‌کنم که **باید** ، به‌وسیلهٔ **تجدید تعلیم معلمان** وتهیهٔ وسایل‌آموزشی مناسب و تکمیل روشهای تدریس شایسته تقویت گردد تا آنکه معلمان برای نیل به هدفهای برنامه به طور کامل مجهز گردند .

من سخن خود را به دو سؤال مربوط به جنبش تجدید نظر در برنامه محدود می‌کنم : یکی آن که هدفهایی که در تغییر برنامه مد نظر بوده است چیست ؟ و دیگر آن که برنامهٔ تجدید نظر شده برای چه شاگردانی مناسب است ؟

در مورد سؤال اول ، به نظر من به ویژه هندسه هدف توجه قابل ملاحظه‌ای شده است :

اول ، تربیت ریاضی دانان . همه‌می‌دانیم که ریاضیات علمی‌است زنده و در حال تکامل. واضح است که با معرفی اصول وروش فکر ریاضیات جدید به شاگردان مستعد ، تاریخی را که آنها به عنوان پژوهندگان ریاضی طلایه‌دار توسعهٔ مزد های این‌دانش بشری خواهند بود نزدیک‌ساخته ایم .

دوم ، تربیت افرادی که درحرفه‌های مختلف و درکارهای روزانهٔ خود ناچار از به‌کار بردن ریاضیات‌اند . ریاضیات‌همیشه جزو ابزار لازم در دست فیزیک دانان وآمارگران ومهندسان بوده است و در شرف آن است که به‌صورت ابزاری نیز دردست زیست شناسان و روانشناسان و اقتصاد دانان قرار گیرد .

سوم . تربیت معلمان ریاضی . با به‌کار رفتن روز افزون ریاضیات ، کلاسی و جدید، در صنعت و علم و با توجه به‌تزاید نام‌نویسی دانش‌آموزان مدارس در ریاضیات ، به‌معلمان بیشتری که تعلیمات جدیدوکاملتری گرفته باشند احتیاج‌خواهد افتاد .

این سه هدف : هرسه ، دارای یک وجه اشتراکند وآن مربوط به هدف حرفه‌ای از تعلیمات مدارس است . اما به‌جز این ، هدفهای‌غیر حرفه‌ای دیگری‌نیز ازتعلیمات ریاضیات وجود دارد که به‌همان درجه از اهمیت می‌باشد . و من دربارهٔ دوهدف ازاین هدفهاصحبت خواهم‌کرد . این دو هدف یکی بسط وتوسعهٔ آن قسم از سوادی است که مورد لزوم یک فرد درجامعهٔ پیچیدهٔ صنعتی امروز و دوران خودکاری ماشین و انرژی هسته‌ای است و دیگری پرورش قوهٔ تعقل وآزاد سازی تفکراست .

ما معلمان ریاضی همیشه متوجه این نکته بوده وهستیم که مفهوم با سوادی باید معنایی وسیعتر ازآنچه به او نسبت‌می‌دهند داشته باشد . در جامعه‌ای که بنیادش برتکنولوژی پیش رفته و بازاراقتصادی است کافی نیست که‌افراد جامعه فقط قادر به‌خواندن و نوشتن باشند . اطلاع از طرق اندازه‌گیری : مستقیم و غیر مستقیم ، محاسبه‌کردن و شمردن نیز برای آنان لازم است . در جامعه‌ای که قانون تغییر از قوانین اساسی آن است ، فرد عضو آن جامعه فقط هنگامی قادربه درک ارتباط بین این‌تغییرات خواهد گشت که بداند تابع و متغیر در چهار چوب ریاضی چه مفهومی دارد و نسبت تغییر یا به عبارت دیگرمشتق به چه نحو تعبیر می‌شود . فرد متوسط چنین جامعه‌ای باید با اصطلاحات میانگین و احتمال و پیوستگی و امثال آن آشنا باشد و مفهوم

* این‌سخنرانی درهفدهم آوریل سال ۱۹۶۲ در چهلمین جلسهٔ سالانهٔ انجمن ملی معلمان ریاضیات آمریکا در شهر سانفرانسیسکو از ایالت‌کالیفرنیا ایراد شده است .

ریاضی آنها را درک کند . در جامعه‌ای که هنر مسافرت درصفحهٔ ریمنی به سرحد پیشرفت خود رسیده است و مقدمات ترک آن صفحه برای کشف فضای سه بعدی فراهم آمده است بی آنکه معلوم باشد که آن فضا **اقلیدسی** یا **ریمنی** یا **لباچفسکیی** است ، یك عضو مترقی برای آنکه بفهمد همسایه‌اش یا همکارش یا روزنامه‌اش یا حکومتش چه می گوید باید متداری ریاضیات به همان خوبی زبان مادری بداند .

بسیاری از رشته‌های ریاضیات ، از جمله حساب ، جبر هندسه ، احتمالات و حساب جامعه و فاصله ، در تشکل چنین مفهوم وسیع و عمیقی از سواد به نحوی مؤثرند . با تعجبی که مخصوص جبر دانان است بلافاصله اضافه می کنم که همهٔ اینها تکمیل جنبه های مختلف دستگاههای عدد است که روزانه به‌کار می‌رود . بنا بر این هستهٔ مرکزی معلومات برای کسب سواد در ریاضیات ، توسعهٔ فهم اعداد و موارد استعمال آنهاست . شاید به همین دلیل بوده است که همیشه خواندن و نوشتن و حساب کردن ، ستون فقرات تعلیم و تربیت به شمار می‌آمده است .

یکی از محسنات برنامهٔ جدیدی که دراین روزها بمیان آمده است آن که به جای تخفیف مطالب حساب ، آن را تقویت کرده و با بینشهای جدید عمیق تر ساخته است . در برنامهٔ جدید حساب از صورت قوانین درهم و گل و گشادی که بستگی میان آنها نیست و باید به حافظه سپرده شوند به صورت یك سازمان (**Structure**) زیبا و عظیم که ارتباطات داخلی آن قابل فهم است در آمده است . امروز اگر به مکالمه یك دانش آموز کلاس هشتم یا نهم که طبق این برنامه تعلیم یافته است گوش فرا دهیم در می‌یابیم که وی باچه سهولت در بارهٔ مطالبی نظیر اصول اعمال حساب ، چون اصل شرکت پذیری یا اصل استقلال از ترتیب یااصل توزیعی و همچنین اصل صفر یا اصل واحد وغیره صحبت می کند . و از آن مهمتر این که‌می‌فهمد که چه می گوید . این دانش‌آموز فرا گرفته است که چگونه از این قوانین واصول به هنگام ضرب کسرها و تجزیهٔ چند جمله‌ایها یا حل معادلات استفاده می‌شود و نتیجتاً دریافته است که **چرا و چگونه** عملی را انجام می‌دهد . تجربه نشان داده است که مطالب حساب و جبر برنامهٔ جدید تا چه حد در درك بینشها وکسب مهارتهایی که مشمول سواد ریاضی است مؤثر تر از سابق بوده‌اند .

معلمان ریاضیات همیشه بر این عقیده بوده اند که تعلیم ریاضیات تأثیر فراوانی درپرورش‌قوهٔ تعقل واستعداد فکر کردن دانش‌آموزان دارد . اما مدتی روانشناسان عیله‌آنان برخاستند و ادعا کردند که اعتقاد آنها بر اساس صحیحی نیست چه درامر یادگیری ، انتقال از مطلبی به مطلب دیگر خود به خودصورت نمی‌پذیرد . معلمان ریاضی در برابر این ادعا سخنه را خالی نکردند وبا صبر وشکیبایی منتظر روزی ماندند تاروانشناسان تغییر عقیده دهند و این طور هم‌شد . در این دوران فترت‌آنان به سائقه و حدان شغلی خود با همان برنامهٔ فرتوت وقدیمی ، راه و روش استدلال قیاسی را به دانش آموزان می‌آموختند وآنها را هدایت می کردند که صحت وسقم مطالب را باروش‌علمی دریابند ودر فکر وگفتار خود دقیق باشند و به تعمیم مطالب با نظر انتقاد بنگرند . اکنون نیز همان روش ، نهایت در سطحی بالاتر و به نحوی مطلوب تر طبق برنامهٔ جدید دنبال می‌شود .

عده‌ای هستند که از این همه اهمیت ریاضیات و علوم در برنامهٔ مدارس هراسناکند وتصور می کنند که تعلیمات عمومی‌از این بابت صدمه‌دیده‌است . ما معلمان ریاضیات ، دراین‌خصوص ، هرگز باکی‌به خود راه نمی‌دهیم . چه معتقدیم که اگر تعلیمات عمومی برای آزاد سازی اندیشه است ، به طور قطع ریاضیات نقش عمده را درآن ایفامی کند. اجازه‌می‌خواهم که برای اثبات این مطلب‌چند مثال از ریاضیات که سبب‌آزادی اندیشه‌می گردد نقل کنم . این مثالها همه از مطالبی است که در برنامه‌های نو وجود دارد و هریك منعکس کنندهٔ دید تازه‌ای‌است که درتعلیمات جدید ریاضیات در مد نظر قرار می گیرد .

یك مثال ، عمل ضربی است که مستقل از ترتیب عوامل نیست . همه می‌دانید که ضرب اعدادحقیقی عملی است مستقل‌از ترتیب و ما در گذشته به این اصل به طور ضمنی ، هنگام یاد دادن قواعد اعمال اشاره می کردیم و شاید به ندرت آن را به طور وضوح به عنوان یك اصل بیان می‌کردیم . اما اکنون این اصل را با وضوح چنان تعلیم می‌دهیم که دانش آموز به راحتی می‌تواند آن را در جای مناسب با فهم و استادانه به‌کار برد . و برای بهتر فهمیدن موضوع سازمانهایی را به آنها می‌شناسانیم **(ماتریکس‌ها)** که درآن ، عمل ضرب مستقل از ترتیب نیست یعنی چنانچه جای عوامل ضرب را عوض کنیم ، حاصل ضرب تغییر می کند . بدین ترتیب وقتی که دانش آموز با دوضرب ، یکی مستقل از ترتیب و دیگری نا مستقل ازترتیب مواجه گشت ، به این نکته پی خواهد برد که‌دستگاههای معمولی و آشنا تنها دستگاههایی بر حق و معقول نیستند . و این یکی‌از درسهای مهم درشنفکری است .

دومین مثال از میدانهای محدود است . همه می‌دانیم که رشتهٔ طبیعی اعداد و اعمال مربوط به آنها و خواص آن اعمال تشکیل یك دستگاه یا یك میدان می دهند این میدان در مورد رشتهٔ طبیعی اعداد نا محدود است . اما این تنها میدان موجود نیست میدانهای محدودی وجود دارد که عناصر آن محدودند . همان‌طور که میدان نامحدود اعداد را با یك خط‌مستقیم‌می‌نمایانیم که اعداد صحیح بر روی آن و به فاصله های متساوی قرار گرفته اند ، میدان محدود را نیز می‌توان به وسیلهٔ دایره‌ای

که اعداد به فاصله‌های متساوی از هم بر محیط آن قرار دارند نمایاند. به این وسیله به آسانی می‌توان جدول جمع و جدول ضرب چنین میدان محدودی را تشکیل داد و از آن نتیجه گرفت که مثلاً ۲ ، دوتا همیشه چهارتا نیست . یا اگر در میدانی ۳ به‌اضافهٔ ٤ برابر است با ۷ در میدان دیگر ممکن است ۳ به اضافهٔ ٤ برابر ۱ باشد. از اینجا است که می‌فهمیم معادلهٔ $3x = 0$ همیشه دارای جواب $x = 0$ نیست . در بعضی از میدانها ، مثلا میدان به مدول ٦ ، جواب این معادله $x = 2$ می‌باشد. بنا براین، اصل « اگر $ab = 0$ و $a \neq 0$ حتماً $c = 0$ » که در میدانی قابل قبول است در میدان دیگر قابل قبول نیست . تعلیم چنین مباحثی به دانش‌آموزان موجب خواهد شد که دریابند که همهٔ اصول وقوانین حدود و ثغوری دارند . فقط یك (یا چند) میدان است که قانونی در آن صادق است و وقتی که پا را از مرز آن میدان فراتر نهادیم ممکن است که آن قانون صداقت خود را از دست بدهد .

سومین مثال از هندسه‌های غیر اقلیدسی است . وقتی که دانش‌آموز با این هندسه‌ها آشنا شد متوجه خواهد گشت که جواب سئوال : «مجموع زوایای مثلث چند درجه است؟» را به‌آسانی وبدون تأمل نمی‌توان داد. اگر فضا اقلیدسی است جواب این سؤال ، ۱۸۰ درجه است و به این وسیله دانش آموزان درمی‌یابند که استدلال قیاسی جنبهٔ نسبی دارد و در هر بحث وجدلی باید به مفروضات توجه کافی مبذول داشت . و این خود نتایج گرانبهائی برای افکار انتقادی ، در این دنیا که پر از رقابتهای تبلیغاتی است ، خواهد داشت . از آموختن همین هندسه‌ها است که دانش آموزان با یکی از مسائل حل نشده عالم هستی آشنا می‌شوند و آن اینکه آیا جهان اقلیدسی یا ریمنی یا لباچفسکیی است ؟ .

وبالاخره آخرین مثال از هندسه‌های n بعدی است ($n > 3$) وقتی که نوجوان فهمید که هندسهٔ مسطحه هندسه دوعددی و هندسه فضایی هندسهٔ سه عددی است، درفهم هندسهٔ n عددی با اشکالی مواجه نخواهد گشت و این سبب گسلاندن قید سه بعد وآزاد شدن فکر برای کشف دنیاهای نادیده خواهد شد.

اینها است قسمتی از مطالبی که در برنامهٔ جدید ریاضیات موجب تهییج قوهٔ تصور و پرورش قوهٔ تفکر ، فکری دقیق نه سخت و نرم نشو ، می‌شود . بطور قطع ، این مطالب به پرورش مردان روشنفکر باجهان بینی منقدانه و فکر قابل انعطاف کمك شایانی خواهد کرد .

اکنون بازمی گردیم به دومین موضوع یعنی آن که این برنامهٔ ریاضی برای چه شاگردانی مناسب است . پاسخ به این سؤال بستگی به ادراکما از هدفهائی دارد که موجب تغییر برنامه شده است . چنانچه فقط هدفهای حرفه‌ای تربیت ریاضی دان یا دانشمند یا معلم را در نظر بگیریم طبیعتاً نتیجه‌ای که می گیریم این است که این برنامه باید برای دانش آموزان با استعداد و آنها که به دانشگاه راه می‌یابند باشد . اما اگر هدفهای دیگر برنامهٔ جدید را درنظر آوریم، یعنی همان طور که گفتم بهدف سواد ریاضی و پرورش قوهٔ تعقل و آزادی فکر توجه کنیم پی می‌بریم که این هدفها برای تمام شاگردان است نه برای دستهٔ مخصوصی از باستعدادها وبنابراین برنامهٔ جدید نباید محدود به آنهاشود که به دانشگاه خواهند رفت بلکه باید گسترش یافته شامل کلیه دانش آموزان گردد .

بی شبهه بعضی از معلمان در بارهٔ این پیشنهاد عکس‌العمل نشان خواهند داد و خواهند گفت که : « این پیشنهاد به دنبال غیرممکن رفتن است چه برنامهٔ جدیدشامل تجریدات وتعلیماتی در سطح بالاست که خارج از قوهٔ فهم یك دانش آموز متوسط است. این برنامه ممکن است که برای دانش‌آموزی که بهرهٔ هوش اوبالاتر از ۱۲۰ است مناسب باشد اما برای دیگران فوق‌العاده مشکل خواهد بود . » برای آنکه بفهمیم که آیا به این ادعا می‌توان اعتنایی کرد یا نه ، اجازه می‌خواهم که ابتدا مفهوم غیرممکن را تجزیه و تحلیل کنم وبعد نکاتی دربارهٔ بهرهٔ هوش به‌عرض برسانم .

در عصر پروازهای مداری بدور زمین و راکتهای هابط در ماه ، باید قبول کرد که هیچ چیزی در حقیقت غیرممکن نیست . باید اعتقاد راسخ پیدا کرد که با کار بی‌امان و کاردانی به هر هدفی می‌توان رسید . واضح است که قبول این فکر الهام بخش ، موجب تحرك وجنب وجوش خواهد بود اما آیا این فکر بواقع بینی هم همساز است ؟ ما ریاضی دانان می‌دانیم که مواقعی این فکر با واقعیت تطبیق نمی‌کند و به عنوان مثال از چیزهای غیرممکن ، می‌توان تثلیث یك زاویهٔ غیرمشخص را با خط‌کش و پرگار دکر کرد. بسیار آموزنده است که ببینم چه عواملی این امر را غیرممکن ساخته است . در مسایل ترسیمی هندسهٔ کلاسی، از قوانینی تبعیت می‌کنیم . مثلاً دایره مشخص را وقتی می‌توان کشید که مرکز وشعاع آن معلوم باشد. یا یك خط را هنگامی می‌توان رسم کرد که دو نقطهٔ آن معلوم باشد وغیره تحت این قوانین معادلهٔ یك کمیت قابل ترسیم باید از درجهٔ دوم باشد و متأسفانه معادلهٔ مربوط به تثلیث زاویه غیر مشخص از درجه سوم است . بنابراین تقسیم کردن زاویهٔ غیرمشخص به سه قسمت متساوی با قوانین به‌کاربردن خط‌کش و پرگار غیرممکن است.

از این مطلب یك قانون کلی می‌توان نتیجه گرفت وآن اینکه در هر دستگاهی وقتی که امری با قوانین آن دستگاه سازگاری نداشت غیرممکن جلوه می‌کند با این قانون علاوه بر آنکه علت غیرممکن بودن توجیه میگردد. چگونگی تبدیل غیر ممکن به ممکن به‌نیز ، باتوجه به مسایل علمی، استنباط می‌گردد.

اگر رسیدن به هدف مطلوبی، تحت قوانینی غیر ممکن جلوه می‌کند، نباید مأیوس شد بلکه باید دست بکار تغییر آن قوانین زد .

بدین ترتیب بدین بکاربردن وسایلی غیر از خط‌کش و پرگار

می‌توان مسئلهٔ « غیر ممکن » تثلیث زاویه را « ممکن » و آنرا حل کرد*.

حال ببینیم که علت آن که بعضی معتقدند که برنامهٔ جدید قابل تدریس به دانش‌آموزان متوسطه نیست چیست . اساس این اعتقاد مبتنی بر این نظر است که مواد این برنامه فقط به وسیلهٔ دانش آموزان پرهوش درمی‌آمد، دانش‌آموزانی که بهرهٔ هوشی آنان از ۱۲۰ به بالا است فهمیده می‌شود و این نظر نیز خود متکی به مفهوم عمومی بهرهٔ هوش دارد . فرضیهٔ شایع بهرهٔ هوش دلالت بر این دارد که بهرهٔ هوش معین مقدار هوش ذاتی و حد اعلای کارشایانی است که از یك طفل یا جوان می‌توان انتظار داشت . این فرضیه ازجانب بسیاری از مربیان به عنوان یك « حقیقت » قبول شده است . درصورتی که هنوز یك فرضیهٔ ثابت نشده است و شاید بتوان گفت که فی‌حدذاته غیرقابل اثبات است نسبت دادن قابلیت یك طفل برحسب تستهای هوشی، بیشتر به عامل فطری وارثی و کمتر به عامل محیط ، مانند نسبت دادن اندازهٔ مساحت یك مستطیل است، بیشتر به قاعدهٔ آن و کمتر به ارتفاعش

مسئلهٔ عمده‌ای که در این باره مطرح است این که اگر این فرضیه راجون قانونی در دستگاه تعلیم و تربیت به‌کار بریم ناچار از اتخاذ چه روشهایی خواهیم بود ؟

واضح است که باتوجه به آن قبول خواهیم کرد که بیشتر ازشاگردان قادر به فراگیری زیاد نخواهند بود ولذا در صدد آموختن مطالب عمیق‌تر به‌آنان برنخواهیم آمد وسعی خواهیم کرد که مواد برنامه ریاضیات هرچه بیشتر رقیق‌تر و خالی از محتویات واقعی ریاضیات گردد. وعلی‌العمیا شاگردان راضعیف خواهیم پنداشت و نه ما سعی می‌کنیم ونه به آنها اجازه کوشش زیادمی‌دهیم که احیاناً این ضعف احتمالی ازمیان برداشته شود به خوبی پیدا است که نتیجهٔ کلی این روش عقب ماندگی از سالی به سال دیگر است و شاگردان آمادگی این راکه از عهدهٔ تحصیل درسهای کلاسهای بالاتر برآیند پیدا نخواهند کرد . مسلم است که این جریان تکامل درامر آموزش ، خود به خود ، هرچه زمان بگذرد، تقویت می‌شود. زیرا وقتی که قبول کنیم که دانش آموزان قادر به فراگیری نباشند ، به‌آنان کمتر می‌آموزیم و آنان کمتر فرا می‌گیرند و درنتیجه کمتر قادر به یادگیری خواهند بود . بنا بر این باز ما به آنان کمتر تعلیم می‌دهیم و آنان کمتر یاد می‌گیرند واین سیر قهقرائی به همین ترتیب ، الی غیرالنهایه ، ادامه خواهد یافت و معلم و شاگرد بروی این دایرهٔ تسلسل چون اسب عماری در چرخش خواهند بود .

تحت چنین قانونی بی‌جا نیست که قبول کنیم که تدریس برنامهٔ جدید، که دارای محتویاتی درسطح بالاست، به‌شاگردانی که کارمدرسه‌ای آنها ضعیف است **غیرممکن** می‌باشد. غیرممکن در چهار چوب قوانینی‌است که پذیرفته و به‌کار می‌بریم . غیر ممکن است چون فعالیتهای آموزشی مدرسه را بر فرضیهٔ زیان آور بهرهٔ هوشی استوار ساخته‌ایم ، ما می‌توانیم این غیرممکن را به ممکن تبدیل کنیم چنانچه قانون دستگاه را تغییر دهیم. اجازه بدهید که فرضیهٔ بهرهٔ‌هوشی را به وسیلهٔ یك فرضیهٔ جدید گرچه واقعاً قدیمی است ، جانشین سازیم و آن اینکه همهٔ شاگردان ، به استثناء آنها که ضایعات مغزی شدید دارند، قادر به یادگیری وتفکر هستند واگر تحت تعلیمات بایسته‌ای قرار بگیرند در تجرید و تعمیم به اندازهٔ کافی به‌پیش خواهند رفت.

بنابراین باید اجازه داد که تمام شاگردان ازمزایای برنامهٔ جدیدریاضیات استفاده برند وبرنامه‌را به‌تمام کلاسها گسترش داد

آنچه من پیشنهاد می‌کنم به آسانی قابل اجرائیست . ما نخواهیم توانست یك‌شبه، اثرات جمع‌شدهٔ ده‌ها سال عقب‌ماندگی راجبران کنیم . ما نمی‌توانیم به‌جای انجام کار فقط آرزو کنیم ، موفقیت خود به‌خود به‌دست نمی‌آید. تلاش بی‌امان لازم‌داردچنانچه تعلیم برنامهٔ جدیدریاضیات را به‌همهٔ دانش‌آموزان برعهده بگیریم، بامسائل مشکل فراوانی مواجه‌خواهیم گشت که باید مدبرانه به حل آنها بپردازیم . باید به طورکامل وبادقت زیادامر کلاس‌بندی مطالب‌جدید برنامه‌را مطالعه کنیم وراه‌حل عملی برای این‌مشکل بیابیم . باید بهترین روشهای تدریس را متناسب بارشد و بلوغ دانش‌آموزان انتخاب کنیم باید دروس خودرا برحسب سابقهٔ آموزشی وآمادگی دانش‌آموزان متفاوت تهیه کنیم ؛ اما این کار را باید بدون آنکه ازمطلب چیزی بدزدیم انجام‌دهیم باید درتمام مراحل تدریس این قانون کهنهٔ یادگیری رافراموش نکنیم: ازحاس به‌عام وازمحسوس به‌مجرد : اما ازعهدهٔ اینها بالاتر، باید راههای مؤثرتری برای تشجیع وبه‌حرکت درآوردن دانش‌آموزان بیابیم تا آنها به میل‌خود کوشش بیشتری برای بهره برداری ازتعلیمات وکسب علم ومعرفت مبذول دارند

اجازه بدهید که اطمینان‌خود را به‌موفقیت جوانان‌دوباره تأکید کنیم واعلام‌بداریم که به‌اتفاق‌قادر به‌انجام غیرممکن‌خواهیم بود گر چه مدت ، کمی به درازکشد .

---

* وسیله‌ای بصری اختراع شده است که به وسیلهٔ آن زاویه‌را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند. دربارهٔ این اسباب انشاءالله، مقاله‌ای برای مجلهٔ یکان تنظیم خواهدشد (مترجم)

فصلی از تاریخ مختصر علوم ریاضی

تألیف موریس دوکانی ـ ترجمهٔ باقر امامی

مبادی ریاضیات ـ دانش یونانی

دنبالهٔ شمارهٔ پیش ...

بهرصورت درك وجود چنین حالت خاصی ابتدا از راه تجربی بدون درك حالت کلی که از آن نتیجه می‌گردد محتمل است و کاملاً منطقی است اگر فرض کنیم که حالت کلی این قضیه بوسیلهٔ فیثاغورس کشف شده است و اگر دیگران هم صورت قضیه را بااشراق کشف نموده باشند این او است که اثبات بسیار ساده و محکمی از قضیه‌در معلوم نموده است . درغیراین صورت‌علاقه‌ای که شاگردان و اخلاف فیثاغورس در نوشته‌های خود به اثبات قضیه ابراز نموده‌اند قابل توجیه نیست و کاملا طبیعی است که براین قضیه‌باموارداستعمال‌اینقدر وسیع آن‌نام**قضیهٔ فیثاغورس** نهاده گردد .

بعقیده **پروکلوس** Proclus فیثاغورس به‌حل مسئلهٔ مثلث قائم‌الزاویه بااصلاح صحیح از روی فرمول $(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2$ که در آنجا a و b اعداد صحیح غیر مشخص باشند توفیق حاصل نموده است .

بعلاوه ،کار برد این قضیه در مورد وتر مربع مؤلفش‌را به‌طول‌های‌سنجش‌ناپذیر Incommesurable و در نتیجه به اعداد گنگ راهنمون شده است . ارتباط هندسه‌یت تئوری اعداد مقام اول را در سرگرمی‌های روزمرهٔ فیثاغورس اشغال می‌کرد و او مطالعهٔ خواص اعداد را به مطالعهٔ خواص اشکال هندسی‌که امکان نمایش بعضی‌اعمال روی اعداد را میداد مربوط میکرد .

و از این نقطه نظر فیثاغورس را بحق می‌توان واضع علم حساب وجبر هندسی نامید .

ولی بالاتر از همهٔ اینها . بخاطر اولین نمونهٔ سازمان دادن یك دکترین‌خالص‌هندسی است که فیثاغورس شایسته ا نهمه شهرت است . پروکلوس می‌گوید : « فیثاغورس مطالعهٔ هندسه را بیك آموزش آزاد تبدیل نمود ، او براصول برتر دست‌یافت و قضایای‌مجرد را پی‌ریخت وکشف اعداد اصم و ساختن اشکال Cosmos (چند وجهی‌های منتظم) را مدیون‌اوهستیم .»

ئودم Eudem (۲۹۰ـ تا ۳۵۰ـ)که پروکلوس (۴۸۵ تا ۴۱۲) عبارت فوق را از اواقتباس نموده است اضافه می‌کندکه استاد توجه شاگردان خود را بدین قسمت کار خود خصوصاً جلب‌کرده است .

از نظر **ئودم** فیثاغوریان اولین‌کسانی بودندکه هندسه را به مقسام حقیقی یك علم بالا برده‌اند زیرا فیثاغورس اصول آنرا در نظر گرفت و بطرز زیرکانه و غیر مادی قضایای آنرا مورد بررسی دقیق قرارداد .

آنچه مربوط به نشر فیثاغورس در تئوری اعداد است **پل‌تانری** در این باره می‌گوید : « فیثاغورس بدون تردید ریاضی‌دان عالیقدری است . و معلومات او در حساب بایستی بسیار وسیع باشد ولی اگر ازآنچه‌که مربوط به‌آموزش هندسی او است صرف‌نظر کنیم بنظر نمی‌آیدکه نه او و نه مکتب اویك دکترین حقیقی بوجود آورده باشند »

بهر صورت یکی از شاگردان بسیار دور مکتب فیثاغورس موسوم به **تیماریداس Thymaridas** (که تاریخ حیاتش هنوز معلوم نشده است)برای بار اول ظاهراً یك کتاب حساب حقیقی تألیف‌کرده است‌وگمان میرودکه او با مقدمات‌معادلات جبری نیز آشنا بوده است .

آرکیتاس Archytas

در بین آخرین نماینده‌های مکتب فیثاغورس بدون شك معروفترین‌همه‌**آرکیتاس** اهل **تارانت**است(۳۸۰ـ تا۴۱۰ـ) که‌درعین حال یك مرد سیاسی ونظامی برد و هفت بار به مقام فرماندهی‌کل انتخاب گردیده بود و آخرالامر در یك کشتی طوفان زده تلف‌گردید مهمترین‌کشف او عبارت از حل دقیق مسئلهٔ مشهور دو برابرکردن **Duplicatian** مکعب است که قبلا بوسیلهٔ**هیپوکرات**اهل**کیوس Hippocrate de Chios** در رسم دو واسطهٔ هندسی بین دو طول مفروض پیش کشیده شده بود این راه حل از دو نقطه‌نظر جالب است یکی گواه بودن براینکه در آنزمان روش مکان‌های هندسی مورد استفاده قرار می‌گرفته است و دیگری ارائه شدن اولین نمونهٔ منحنی‌های چپ جبری در هندسه است . منظور فصل مشترك یك‌تور **Tore** بامحور مماس برداییره مولد بایك استوانه دوار است که از این محور گذشته و شعاعش برابر شعاع دایره مولد باشد .

معمولاً به **ارکیتاس** اختراعات‌مختلفه مکانیکی ازجمله اختراع یك مرغ پرنده را نسبت میدهند ولی **پل‌تانری** آنرا بیك ارکیتاس دیگری نسبت میدهدکه آرشیتکت بوده و دربارهٔ

ماشین‌ها کتابی تألیف کرده است .

بهرحال آنچه در بارهٔ شایستگی ارکیتاس تارانت باید متذکر بود این است که اوتوانسته است دو سیمای درخشان راوارد جرگهٔ فیثاغوریان بکند یکی **ئودکس** Eudoxe بانی مکتب **سیزیك** Cyzique ودیگری **افلاطون** که مکتب آتن را بنا نهاد و در آنجا بود که در جریان قرن چهارم قبل از میلاد جنبش اصلی ریاضیات باوج خودرسید .

زوتن Zeuthen در این بارەچنین میگوید: درریاضیات در سواحل آسیای صغیر (یاتالس ملطی) پا به عرصه وجود نهاد و نشو نمای آن در ایتالیای جنوبی (باقیثاغورس) نظر ما را جلب می‌کند و بالاخره در آتن است (باافلاطون) که باتفوق **عالمگیر** خود ریاضی‌دانان را بسوی خودمی‌کشاند .

جا داردکه ولو بطور گذرا نظری به مکتب سیزیك که بتوسط ئودکس پایه گذاری شده است بیفکنیم .

ئودکس Eudoxe

ئودکس در شهر **کنید** Cnide بسال (۴۰۸ـ) متولد و در **مصر** بسال (۳۵۶ـ) درگذشته و در علوم هندسه ، نجوم ، پزشکی و فلسفه تبحر کافی داشته است . و ما او را به عنوان یك عالم هندسه مورد بررسی قرارمی‌دهیم .

و در این زمینه است که او بیالاترین توفیق‌ها نائل آمده است واز پیش قدمانی بوده است که اقلیدس در کتاب خود موسوم به Elements بطور وسیعی از نوشته‌های او استفاده برده است .

در این باره پل تانری بااطمینان تمام می‌گوید : « در بارهٔ سهم ئودکس در تنظیم Elements دو شاهد زنده دردست است که دارای اهمیت اساسی می‌باشند . و بدون سایر کارهای انجام شده که غالباً به سبب جهالت ارزیابی کامل نشده‌اند کافی است نشان دهد که کنیدی‌ها Cnidiens در ردیف نوابغ درجهٔ اول جهان قراردارند قسمت اعظم تئوری نسبت‌ها بهمان شکلی که درکتاب چهارم اقلیدس نگارش یافته است متعلق به‌ئودکس است که به اثبات دقیق ومحکم‌آن مستقل از فرض سنجش‌پذیری آن نائل‌آمده است. روشی که بوسیلهٔ آن به‌اثبات مسئلهٔ صورت سنجش ناپذیری توفیق‌یافته است‌همان روش Exhanstion است که **ارشمیدس** به‌عنوان روشی که خود شخصاً ابداع کرده است کراراً مورد استفاده قرار داده است و ضمناً احتمال هم داردکه ارشمیدس آنرا از ئودکس اقتباس نکرده باشد.

زوتن Zeuten بنوبه خود اهمیت واستحکام استدلال این روش را مخصوصاً از آن بابت که مسئلهٔ بی‌نهایت در آن زمان حل نشده بود خاطرنشان می‌کند و بدین‌ترتیب است که اوتوانسته‌است فرمول محاسبهٔ حجم هرم ومخروط را در حالت کلی بدست بیاورد .

بعلاوه مطالعه وکشف منحنی‌هائی بدو منسوب است که باآنها در جریان جستجوهای نجومی برخورد کرده است . از جمله می‌توان ازمنحنی **هیپوپد** Hippopéde نام‌بردکه‌ما امروزه‌آنرا **المنیسکات کروی** Lemniscatespherique می‌نامیم (فصل مشترك یك‌کره و یك استوانه‌که از داخل‌برآن محدود است) .

بطوریکه دیدیم افلاطون و ئودکس پس از یك دورهٔ کارآموزی مشترك در مکتب آرکیتاس بترتیب مکتب های آتن و سیزیك را بنا نهادند و ئودکس به‌نیت متحدکردن کوشش‌ها و نتیجه‌گیری بهتر ازکار دو مکتب ، شاگردان خود را به‌آتن انتقال داد ولی خصومت افلاطون امکان استقرار در آتن رااز او سلب کرد و بناچار مجدداً را سیزیك را در پیش گرفت .

منه‌شم Ménèchme

مشهورترین شاگرد ئودکس که در رهبری مکتب سیزیك جانشین اوشادگردید **منه‌شم** (۳۲۵ـتا ۳۷۵ـ) بودکه در تدریس هندسه شهرت بزرگی کسب‌کرد . وبدین جهت به سمت معلمی **اسکندر کبیر** برگزیده شد (جملهٔ معروف « در هندسه راه سلطنتی وجود ندارد» منسوب‌به اواست‌که ظاهراً به‌اسکندر گفته است و این جمله را به **اقلیدس** نیز نسبت میدهندکه به **بطلمیوس** گفته است)

در تمام طول دوران کهن از او به عنوان مخترع تئوری مقاطع‌مخروطی اسم برده‌اند . او آنچنان‌به مطالعهٔ سیستماتیك تئوری این منحنی پرداخته بوده و آنرا پیش برده بوده است، که معاصرینش آنها را « منحنی‌های منه‌شم » نام نهاده بودند **منه‌شم** از این منحنی‌ها برای حل مسئلهٔ در واسطهٔ هندسی از راه فصل مشترك دو سهمی و یا یك سهمی و یك هذلولی متساوی الساقین استفاده می کرده است همان مسئله‌ای که **هیپوکرات کیوس** از راه دو برابرکردن مکعب‌قبلاً عنوان کرده بود .

افلاطون platon

دانشمندانی راکه تاحال اسم بردیم ریاضی‌دانانی بودند که آگاهی از فلسفه نیز داشتند و مکتب‌هائی‌که بعضی از آنها بنا نهادند به مکاتب فلسفی متصف بودند ولی در مورد افلاطون (۳۴۸ ـ تا ۴۲۹ ـ) شخصیت فلسفی‌برشخصیت ریاضی غالب‌بود هر چندکه جنبهٔ ریاضی اوهم قابل توجه است .

او برجسته‌ترین شاگرد **سقراط** بود . استاد بریاضیات رغبتی نشان نمیداد او نیز ابتدا در بارهٔ این علوم با استاد اشتراك نظر داشت ولی پس ازمسافرت در طول سواحل‌افریقا وسکونت‌در شهر **سیرن** Cyrene برای کسب دانش بهمراهی

ئودکس به منظور تحصیل **دکترین فیثاغورس** به **تارانت** به پیش **ارکتیاس** رهسپار گردید و این تعلیم ، طرز دید اورا که بوسیلهٔ سقراط القاء شده بود آنچنان عوض کرد که جملهٔ « ریاضیات واجد خصیصه‌های خدائی هستند » برزبانش جاری گردید و عمل آفرینش را بدین ترتیب توجیه کرد که « خدا هرچیزرا بشکل هندسی‌می‌آفریند» اعتقاداو دربارهٔ نقش اساسی ریاضیات درارتقاء عقل وروان به عالیترین درجه تکامل آنچنان راسخ شده بود که برسر در مکتب معروف خود نوشته بود « هر کس که هندسه نمی‌داند وارد نشود »

در حقیقت افلاطون چیز قابل ملاحظه‌ای شخصاً بر گنجینهٔ علوم ریاضی نیفزوده است و بقول پروکلوس بگواهی نوشته‌هایش که هم مملو از بحث‌های ریاضی است او ریاضیات را عموماً و هندسه را خصوصاً با همتی که صرف خدمت آنها کرده گسترش زیاد داده است او در هر لحظه اشتیاق به فرا گرفتن این علم را در آنها که به فلسفه روی می آورند پیدار می‌کرد »

بعقیدهٔ **ثورم** افلاطون بیشتر از آنکه هندسه دان باشد محرك هندسه دانان بوده است .

غالب تاریخ نویسان اولیه دانش یونانی از افلاطون به عنوان آفریدگار روش تحلیلی درهندسه یادکرده‌اند. پروکلوس در این باره نوشته است : « بهترین روش‌ها آن یکی است که‌با تجزیه و تحلیل مجهول را به اصل شناخته شده وصل کند.

بنظر پل تانری در این گفته‌اشتباهی مابین روش تحلیلی‌در هندسه وروش فلسفی ، که‌افلاطون درکتاب چهارم **جمهوریت** توضیح داده است و شاگردانش اعتبار زیادی بآن قائل شده‌اند روی داده است .

این روش فلسفی عبارت است از : « ازفرض به اصل‌غیر مفروض رفتن و بعکس ازاصل به فرض بر گشتن » بعلاوه بنظر تانری توجیه افلاطون دربارهٔ هندسه در این مورد موجب این اشتباه گردیده است .

واقعیت این است که افلاطون هرگز از ستودن روش تحلیلی و کار بردن آن در هندسه غفلت نکرده است و از این نقطه نظر کارش کم اهمیت نیست .

ازلحاظ راه حل‌های مسائل . از اوقلط یك ترسیم بسیار ساده‌ای باروش تنصس برای دوواسطه هندسی ، همان مسئلهٔ دو برابر کردن مکعب بجای مانده است .

ارسطو Aristote

نام **افلاطون** بناچار نام **ارسطو** (۳۲۲- تا ۳۸٤-) را نیز از قلم میگذراند . این دوفیلسوف در تاریخ پایه گذاری فرهنك عالی یونان جدائی ناپذیرانند ارسطوازاهالی **استاگرا Stagire**بود و درمکتب **مشائی Peripatéticiennе** خویش به ترویج ریاضی می‌پرداخت بدون آنکه شخصاً در این زمینه اشتغالی‌داشته باشد . واین درست همان‌کاری بود که استاد او افلاطون در مکتب آکادمیای خود انجام میداد. بدون تردید ارسطو دارای معلومات آنسیکلوپدیك عصرخویش بود منتهاتمایل بیشتر بطرف علوم طبیعی داشت ودر زمینه‌های ریاضی بخصوص به علم مکانیك بذل توجه می‌نمود و در این مورد به نتایج نسبتاً مهمی نیز نائل گردید مسئلهٔ متوازی الاضلاع نیروهادر دینامیك ومسئلهٔ تناسب **Impulsion** آنچه که امروزبه مقدار حرکت موسوم است بدومنسوب است جالب توجه است که ظاهراً ارسطو برای بار اول حروف را در زمینه‌های ریاضی بکار برده است. و از این نقطه نظر مبشر علم جبربشمار میرود.

تعیین جهت بوسیلهٔ ساعت

برای جهت یابی سریع وفوری بادقت در حدود ۸ درجه میتوان از ساعت استفاده نمود ـ بدین ترتیب که یك ساعت صحیح رادر روی یك سطح افقی مانند کف دست قرارداده آنقدر ساعت رامیگردانیم کهسایهٔ عقربه ساعت‌شمار درست در زیر خودش قرار گیرد در این حالت منصف یا نیمساز زاویه‌ایکه عقربهٔ ساعت شمار با امتداد ۶ـ۱۲ می‌سازد امتداد شمال وجنوب محل می‌باشد .

فرستنده. مهندس **عباس سعیدی**

مسألهٔ ارسالی طرح : محمد رضا قسیمی

(دانش آموز چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون)

بفرض اینکه حروف انگلیسی بترتیب جمل متوالی یك تصاعد عددی باشند که جمله هفتم آن ٤ وجمله یازدهم آن ٦ باشد . در ازاء مقادیر مختلف αدر تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم زیر (نسبت به مجهول ξ) بحث کنید.

$$(\text{YEKAN IS}-\circ/\circ\alpha)\xi^{۲}-۲(\text{THE BEST}-۳\alpha)\xi+\text{MONTHLY NEWS PAPER}-۱۲\circ\alpha=\circ$$

غلامرضا عسجدی

چرا معلم ریاضی شدم

-۴-

ابتدا از مدیر مجلهٔ یکان که با نتشار این مقاله اقدام و همچنین از خوانندگان گرامی که زحمت خواندن آنرا تا اینجا تحمل فرموده‌اند سپاس گزاری کرده از لحاظ بعضی اشتباهات چاپی که احتراز کامل از آنها در مطبوعات ما مشکل است معذرت می‌خواهم لیکن تصحیح یکی از این اشتباهات چاپی را لازم میدانم:

درقسمت‌سوم‌مقاله‌ازیکی‌ازبرادرهای‌خودیاد کرده بودم که تأثیر تربیت و هدایت او مرا بشغل معلمی ریاضیات رسانیده و قبول هر گونه کم بود ومحرومیت را در این راه برای من آسان ساخته است از ذکر نام او که مورد لزوم و علاقهٔ خواننده محترم نبود خودداری کرده بودم متأسفانه ضمن چاپ جملهٔ « ماسه نفر » با جملهٔ «باسم نصر» مشتبه شده و آن شادروان بنام نصرمعرفی شده بود در صورتیکه اسم آنمرحوم مصطفی عسجدی و شغل او در اواخر زندگی کارمندی ادارهٔ ثبت اسناد آذربایجان بوده است این تصحیح را بعلت تذکر تلفنی یکی از دوستان آنمرحوم که درحال حیات است یاد آور شدم . آنمرحوم در تاریخ ۱۱ آذر ماه ۱۳۱۷ تقریباً همزمان با تاریخ فوت مادرم بدرود حیات گفت در این موقع دوماه و بیست وچهار روز بود که من تحصیلات خودرا تمام کرده و از طرف وزارت فرهنگ وقت بدبیری دبیرستان فردوسی و دانشسرای مقدماتی تبریز منصوب شده بودم لیکن رئیس فرهنك وقت آذربایجان شرقی ابلاغ وزارتی را تغییرداده و مرا بشهرستان اردبیل اعزام کرده و بجای من کسی دیگر گماشته بود این شخص یکی از همکلاسان من بود که پس از امتحانات شهریور ماه مأمور تبریز شده بود در صورتیکه من شاگرد اول کلاس بودم اما چون نامبرده‌ازیك خانوادهٔ مالك یعنی مالك ده بود رئیس فرهنك نام این عمل زشت تبعیض آمیزرا مقتضیات اداری نامیده بود موقعیکه من در اردبیل بودم مادر و برادرم در تبریز مریض شده فوت کردند و این خاطرهٔ تلخ در نتیجهٔ عمل ظالمانهٔ رئیس فرهنگ تلخنر گردید و من نتوانستم در بستر مرك مادر و برادرم حضور پیدا کنم وآنان نیز بالاخره نفهمیدند که کار معلمی من بکجا رسید این قدم اول بود گویا :

فرشته ایست در این چرخ نیلگون‌اندود — که پیش آرزوی مردمان کشد دیوار

از رفتن تو ما را دانی چه مانـد بردل — از کاروان چه ماند جز آتشی بمنزل

در آنزمان استاد معظم دکتر **صدیق اعلم** و بعدها مرحوم **وحید** معاون سابق وزارت فرهنگ وسیلهٔ نامه از من تفقد فرمودند ولی چه حاصل من یك دبیر تازه کار بودم و او یك رئیس فرهنگ و صاحبمنصب قدیمی ! ! اکنون نمی‌توانم این پیش آمد را بیشتر از این شرح داده ووقت خواننده عزیز را بگیرم و قصد انتقام جوئی قلمی از رئیس فرهنگ سابق که‌فعلاً بازنشسته است یا دیگری ندارم لیکن تکرار و تذکر این مطلب و اعتقاد بآن برای هر کس ضرورت دارد که اگر در جامعه‌ای عدالت اجتماعی وجود نداشته باشد هیچ قانـون ولو هر اندازه مترقی باشد فایده نمی‌بخشدبالعکس اگرعدل و انصافدر آن‌حکومت کند اگر قوانین مدون هم وجود داشته باشد افراد جامعه با رعایت سابقه و سنت از روی انصاف ومروت زندگی خودرا مرتب خواهند کرد و از رفاه عمومی بهرممند خواهندشد. اصولاً

عدالت خود قانون است بلکه قوی ترین قوانین و مشیت الهی است قانون جاذبه یك سیمای نارسا و تعبیر مختصر از قانون کلی عدالت جهان است ستارگان واجرام سماوی روی قانون عدالت ازمسیرخود خارج نمی‌شوند اگرزنجیرهای عدالت که بصورت فرمولهای ریاضی نمودار میشوند آنهارا بهمدیگر نبسته بود پراکنده ونابود میشدند . رعایت عدالت اجتماعی ازطرف افراد سرچشمه میگیرد ونقص عدالت ازطرف فردی مانند بیماری مسری انتشار پیدا میکند و آسیب و زیان آن خواه نا خواه بخود او باز میگردد . اگر افراد سود آنی خودرا بخواهند و براه بدست آوردن آن چه مشروع باشد و چه نامشروع اهمیت ندهند زندگی دشواد میشود و برای همه غیر قابل تحمل میگردد فی‌المثل اگر کارمند اداره باتشبث و بدون صلاحیت جویای مقام باشد طبیب هم بدون معالجه و دلسوزی ازبیمارحق‌العلاج میگیرد معلم بدون تدریس تقاضای حقوق میکند و شاگرد او هم بدون معلومات برای گرفتن نمرهٔ قبولی ناسزا میگوید خیلی‌ها معنی عدالت را نمی‌فهمند و آنرا بنفع خود تعبیر میکنند و در واقع بمفهوم عدالت نیز ظلم روا میدارند.

معنی عدالت این نیست که نتیجهٔ کارها همواره بروفق مرام باشد بلکه معنی‌عدالت این‌است که هرچیز درمحل و میزان مخصوص خودقرار بگیرد عکس عدالت ظلم است ومعنی ظلم این است که اجزاء یك ترکیب درمحل ومیزان خود نباشد فی‌المثل اگر بگوئیم مرکز دایره بر روی محیط آن واقع شده است ظلمی را مرتکب شده‌ایم از اینرو دروغ و بهتان نیز ظلم است ومانند بیماریهای مسری سرایت پیدا میکند . در جوامعی که همه چیز در جای خودقرار دارد یعنی عدالت در آنها حکمفرما است استحکام دراخلاق وعادات و آداب پدیدار میشودمحصول کارها بیشترمیگردد آسایش عمومی ظاهر میشود .

بطور خلاصه ورود من بخدمت معلمی ریاضیات یك امر اتفاقی نبوده بلکه سه دلیل قطعی و روشن داشته است اول تأثیر محیط خانوادگی و محترم شمرده شدن شغل تعلیم و تربیت در میان‌افراد خانواده‌ام دوم تأثیر تعلیم معلمین عالیمقام خود که بتدریج در دوران تحصیل از محضر آنان بهره‌مند شده‌ام سوم علاقهٔ ذاتی و باطنی که گویا خود باین کار داشته و یا در آغاز زندگی از محیط خود کسب کرده بودم اگر چه این علاقه بجائی‌نرسید، ای بسا آرزو که خاك شده است .

اصولاً خدمت‌تدریس مخصوصاً تدریس‌ریاضیات‌لااقل درقسمتهای‌مقدماتی مشکل‌است چون‌با مجردات‌سر و کاردارد وروح‌نوآموزان‌بالفطره‌ازآن گریزان‌است چیزیکه این‌وظیفه‌رامیتوا ندآسان کند ایمان به‌ترقی‌وطن‌و پیشرفت‌هموطنان وابناءمملکت‌است اگرقبول کنیم که انسان‌بخاطرقوهٔ‌درك وتفکر ممتاز شده‌وبرای پی‌ریزی‌هراجتماع‌قوهٔ عاقله‌ومتفکرهٔ افراد ضرورت داردد‌راین‌صورت روشن‌فکران ومعلمان ومعلمان‌ریاضی‌مقام‌ارجمندوخدمت‌عمده‌ای‌برعهده‌دارندهمعلمین بایددرکارخطیرخودخیروصلاح‌وطن‌وسعادت‌ملت ورضایت‌خداوندمتعال‌را همواره‌نصب‌العین خودقرار دهیم‌وبدانیم که برای هریك ازماسه پرونده تشکیل میشود پروندهٔ اول در اداره‌کار گزینی است که وضع آن معلوم همگان است. پروندهٔ دوم خاطره‌ای است که در مغز جوانان و نسل آیندهٔ این مرز و بوم ثبت و ضبط میگردد در صورتیکه خاطره بعنی از معلمین وطن پرست و عالیمقام جامعه در تاریخ ملتها و نسلها نیز باقی می‌ماند بکوشیم شاگردان ما نه تنها امروز بلکه در آینده نیز از ما به نیکی یاد کنند و بدانند که معلمین شمع وجود خود را برای روشنائی راه و مسیر زندگی آنان بمصرف رسانیده‌اند .

بقیه‌پائین‌صفحهٔ‌دو بعد

معرفی دانش‌آموز رتبهٔ اول امتحانات نهائی ششم ریاضی

نامهٔ دانشمند معظم جناب آقای احمد بیرشک به مدیر مجله

دوست ارجمندم

پیشرفت «**یکان**» را از صمیم قلب تبریک می گویم و توفیق کامل برای شما ودوستان‌دانشمندتان که در این راه پیش می‌روید،آرزو می کنم . حسن «**یکان**» این است که فقط مسائل ریاضی را در دسترس دانش آموزان نمی گذارد یا برای آنان حل نمی کند بلکه مطالب دانستنی بسیار برای دانش آموزان جوان فراهم می آورد .

یکی ازخدمات مجله شما آن است که جوانانی را که باجدوجهد درکارتحصیل توفیقهائی می‌یابند بهمسالانشان می‌شناساند ونمونه های زنده‌ای را دربرابرچشم آنان قرار می‌دهد .

از کسانی که می‌توان بعنوان بهترین نمونهٔ سعی و کوشش معرفی کرد **افسانه نجم‌آبادی** است که در خرداد ماه امسال بامعدل **۱۹/۴۳**درمیان فارغ‌التحصیلان رشتهٔ ریاضی مقام اول رابدست آورد.



افسانه نجم‌آبادی که تحصیلات ابتدایی را بااحراز رتبهٔ اول در **دبستان فیروز کوهی** بپایان رسانیده وشش سال ازعمر با ارزش خودرا در دامن مهر **دبیرستان‌شماره۲ دختران هدف** بسربرده و درهرشش سال مقام اول راحفظ کرده است شایستهٔ آن است که از حیث تحصیل و کار ومتانت ووقار سرمشق خواهران نوعی خود باشد .

من ازطرف **گروه فرهنگی‌هدف** داشتن چنین دختری‌را به‌آقای **مهندس‌عباس نجم‌آبادی** تبریک‌می گویم‌وتوفیق‌دختر عزیزروحانی خود را در رشتهٔ **فیزیک اتمی** که می‌خواهد پیش بگیرد و سعادت اورا در سراسر عمرش از خدا می‌خواهم .

امیدوارم در میان دختران ما امثال افسانه نجم آبادی زیاد شود.

بقیه از صفحهٔ پیش

اما پرونده سوم‌با وجدان پاك سرو کار دارد و آن قضاوتی است که دور از انظار دیگران خـود در باره خود میکنیم اصل این پرونده درپیشگاه عدل الهی است دو نویسنده وبایگان محترم بنام رقیب وعتید در تنظیم این پرونده دخالت دارند و هرگز اشتباه نمی کنند سعی کنیم پرونده ما در محضر این دستگاه موجب رضامندی و رو سفیدی باشد،خداوند بهترین پاداش دهندگان است **فمن یعمل مثقال ذرة خیراً یره فمن یعمل مثقال ذرة شراً یره**. در نظر داشتم خاطرات خود را از زندگی علمی وطرز تدریس وشیوهٔ کار معلمین واساتید ریاضی خودچه ایرانی وچه خارجی که در دوران تحصیل و بعدها از محضر آنان بهره‌مند بوده‌ام برای مزید اطلاع معلمین جوان بنویسم ولی صفحات محدود مجله برای این‌کارفرصت بیشتر نمیدهد ناچار این منظور را برای موقعیت دیگری محفوظ داشتم فقط با ذکر نام رضوان جایگاه مرحوم استاد **غلامحسین رهنما** رحمت‌اله علیه که حق تعلیم بگردن بسیاری منجمله نگارنده دارد نامهٔ خودرا خاتمه میدهم . **تمام**

غلامرضا سجدی

عدد ـ زبان شمار

ترجمهٔ : خدیجه‌عبائیان رئیس دانشمند دبیرستان
دخترانه مرجان (گروه فرهنگی خوارزمی)

حساب چیست ؟ شاید اگر ازشما این سئوال را بنمائیم خواهید گفت حساب عبارتست ازجمع ، تفریق ، ضرب وتقسیم البته همین است بعلاوه خیلی چیزهای دیگر، هر کاری است که باعدد انجام شود. وقتی طول وعرض اندازه گیری میشود وهنگامی که پولی تسعیر میگردد حساب است. تقریباً همه پسرودخترهای همسن شما حساب کردن را میدانند .

آیا میدانید که چقدرحساب در زندگی روزمره بما کمك میکند مسائلی را درنظر بیاورید که اگر اندازه گیری و حساب ندانیم قادر بپاسخ دادن بآنها نیستیم و طول ، عرض ، سنگینی سبکی ، گرمی وسردی رانمیتوانیم تعیین نموده وفاصله شهری را از شهردیگر بگوئیم نمیدانیم با چه سرعتی حرکت می کنیم،در چه ارتفاعی پرواز می‌نمائیم، آسانسوریکدام طبقه نزدیك میشود وچه موقع موتور بیش ازحد داغ شده است.

انجام بعضی کارها بدون دانستن حساب میسر نیست وبعضی دیگر احتیاج بدانستن حساب ندارد . امروزه قادربانجام آنها میباشیم چون میتوانیم جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم بنمائیم .

بنابراین بآسانی میتوان فهمید که اختراع عدد طرز اندازه گیری، ازبزرگترین اختراعاتی است که بشردرطی تاریخ طولانی خود درکره زمین بآن دست یافته است.

چگونه بشر حساب کردن را آموخت

چنانچه بپرسیم تا چند میتوانید بشمارید خواهید گفت تا هراندازه که بخواهیدتا صد ، هزار ، ده هزار . صدهزارویك ملیون یعنی یك هزارهزار وبالاتر ازآن که حدی بر آن متصور نیست بعلاوه میتوانیم آنها را جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم نمائیم .

آری ، همه پسرودخترها درمن شما باید این چیزهارا بدانند ولی اولین بشری که عدد بکار برد چطور ؟

درست نمیدانیم بشر چگونه بکار بردن اعداد و اندازه‌ها را شروع کرد ولی چنانچه بروش قبایلی که هنوز بروش نیمه وحشی زندگی می کنند توجه کنیم نظریه تقریباً درستی بدست میاید می‌فهمیم که آنها بندرت ازعهده حساب کردن برآمده و جهت اندازه گیری و استفاده ازعدد . ساده‌ترین طریق رابکار می‌برند .

در بسیاری از نقاط امریکای جنوبی قبایلی وجود دارد که فقط برای اعداد یك ودو وسه کلمه دارند وبرای اعداد سه ببالا لغت ندارند . برای شمردن چهار (سه ویك) وبرای گفتن پنج(دو ودو ویك) ویا ۲ ، ۱ ، ۳ میگویند وشمردن اعدادبیش از ۱۰ ازفهم آنها خارج است. درزبان قبایل سیاه پوست‌افریقا و بعضی‌مردم بومی استرالیا وجزایراقیانوس کبیرنیزاین‌حقیقت صدق می کند .

قبایل Bushman در افریقای جنوبی کلماتی برای اعداد یك و دو دارند وبرای اعداد بیش ازدوکلمه‌ای‌بکارمیبرند بمعنی «بسیار» . درحال حاضر بیشترقبایل استرالیا ازفهم‌عددی که ازچهار تجاوز کند عاجزندوهیچیك قادربدرك عددی بزرك ازقبیل ۷ نمیباشند .

توجه می کنید که تصور آنها ازعدد خیلی کم بوده و فقط قادر بشمردن تعداد معدودی عدد میباشند بعضی از دانشمندان عمرما بیشترعمر خود را درپنجاه سال اخیر در بین این قبایل گذرانده‌وروش آنها را مورد مطالعه قرارداده‌اند وکاملاً مطمئن هستند که بشر اولیه نیزازهمین طریقه استفاده میکرده است . البته این اطمینان قطعی‌نیست ولی‌این موضوع‌را بسیار با دقت سنجیده‌اند وعقیده‌دارند که اعداد بطریق زیرمورد استفاده‌قرار گرفته است وهنگام مطالعه توجه کنید چگونه پیشرفت فهم عدد درتمام نقاط دنیا با توسعه زبان و نوشتن و حرف زدن هم گام است .

فرض می کنیم امروز می‌خواهید عدهٔ شاگردان‌حاضردر کلاس را بدانید وهیچکس حتی معلم کلاس هم نتواند شماره کند چه میتوان کرد ؟ شاید بگوئید طبق لیست اسامی این موضوع فهمیده میشود .صحیح است. کسی‌اسامی‌دانش‌آموزان‌رامی‌خواند و درخاتمه می گوید همه‌حاضر ندباستثنای... و...و...بااحتمال قوی این همان روشی است که ملتها در ایام بسیار قدیم بدان عمل‌میکردند این طریقه قبل‌از روزگارمصر وبابل وچین‌وشاید حتی قبل اززمان غارنشینی معمول بوده است ونمیدانیم حساب مردم اولیه تا چه اندازه صحیح بوده‌است . درآن ایام‌چوپانی که شمردن نمیدانست هر گوسفند را بنامی می‌خواند .

استفاده ازبعضی اشیاء بعنوان ژتون

گمان میرود مرحله بعد ، استفاده ازژتون بوده است .

بدین معنی که سنك ریزه ، چوب یا وسائل دیگری برای علامت گذاری بوجود آمده است . وحتی ۱۵۰ سال قبل در جزایر مادا گاسکار وقتی رئیس قبیله می‌خواست افرادجنگی خود را بشمارد هرسرباری که از جلوی او میگذشت سنك‌ریزه‌ای بزمین می‌انداخت و پس از گذشتن ۱۰ نفر تودهٔ دیگری می‌ساخت و پس از آنکه ۱۰ توده از سنگریزه‌ها درست می‌شد یك سنك بزرك کنار میگذاشت که عدد ۱۰۰ را نشان میداد وباین ترتیب شماره سربازان خود را حساب می‌کرد حتی امروز بعضی از سرخ پوستان آمریکائی احشام خود با انداختن سنك درکیسه می‌شمارند و اسلاف آنان برای این‌منظور از گوش‌ماهی استفاده میکردند و آنرا (ومیوم) می‌نامیدند که بجای پول نیز معرف میشد .

در قدیم ،مردم چین برای هرچیز که میخواستند بشمارند چوبی درزمین فرو میکردند

برطبق دلایل موجود مردم قدیم اکثراً ازسنگریزه‌برای حساب کردن استفاده میکرده‌اند. حتی‌رومیهادر ۲۰۰۰ تا ۲۵۰۰ سال قبل باید آنرا بکار برده باشند زیرا کلمه (Calculus) در زبان آنها بمعنی‌مهره یاسنگی است که درشمردن بکارمی‌آید وکلمه انگلیسی Calculote بمعنی حساب کردن مستقیماً از کلمه Calculus آمده است وبرای‌حساب‌نگه داشتن‌ازچوب نیز استفاده میشده است بدینطریق برای یك واحد از آنچه می‌خواستند بشمارند خطی روی چوب می‌کندند . بطوریکه شنیده‌ایم حتی امروز هم کسانی هستند که باینطریق حساب می‌کنند .

اخیراً در یکی ازمجلات داستانی اززنی دهاتی‌نقل‌شده بود . مغازه داری باو میگوید که ده دلار بدهکار است ولی زن قبول نکرده و مغازه‌دار را وادار می‌کند که رقم برقم برای او حساب کند و برای این منظور مغازه‌دارچوب کوچکی‌فراهم می‌کند و برای هر ۱۰ سنت - رید اوخط کوچکی روی چوب می‌کندووقتی به‌یك‌دلارمیرسدخط‌بزرك‌وعمیقی‌می‌کشدوهنگامیکه حساب به پنج دلار میرسد تکه پارچه‌ای روی خط‌بزرك می‌بندد درضمن زن نیز گره‌های کوچك وبزرك روی ریسمانی می‌بندد و بالاخره وقتی مغازه‌دار قطعه پارچه‌ای به علامت پنج دلار دوم می‌بندد او بریسمان خود نگاه کرده ومطمئن میشود که ده دلار بدهکاراست .

قابل توجه است که‌کلمه انگلیسی (Tally) که بمعنی چوب خط حساب کردن میباشد از یك کلمه لاتین گرفته شده که بمعنای بریدن است . چون خط زدن اولین طریقه حساب کردن بوده است

بکار بردن انگشتان دست و پا بعنوان ژتون

دانشمندان عقیده دارند که در ایام قدیم بسیاری ازمردم از انگشتان دست وپا برای شمردن استفاده می‌کردند . حتی امروز هم اینکار را می‌کنیم بدون‌شك چند سال قبل‌وقتی‌حساب کردن‌را یاد می‌گرفتید انگشتان را بکار میبردیدوحتی حالا هم آیا برای آنکه یك لحظه عددی را در خاطر نگه دارید انگشتان‌را بحالت‌بسته درنمی‌آورید ؟

وقتی از صفلی خواستند ۳ را در ۶ ضرب کند و او به اینطریق ضرب کرد . بانگشتان شست‌و سبابه ووسطی دست زدو گفت ۱-۲-۳ و باز از نو اینکاررا‌تکرارکرد و گفت ۴-۵-۶ و تا شش مرتبه اینکار را ادامه داد و گفت میشود ۱۸ . آیا شما هم‌برای ضرب اعداد اینکاررامی کردیدو آیاهیچوقت‌اشخاص بزرك را دیده‌اید اینکاررا بکنند .

۴۰۰یا ۵۰۰ سال قبل دراروپا تقریباً همه با انگشتان حساب می‌کردند . کتابهای حساب پیوسته شامل صفحاتی بوده که دقیقاً بمردم ب انگشت جمع وتفریق وضرب وتقسیم دایاد می‌داد . حتی امروزه بسیاری از کشاورزان اروپائی‌که اکثراً خواندن‌ونوشتن را می‌دانند مثالهای‌ساده مانندضرب۶ × ۷ را با انگشت حساب می‌کنند . درپرتگوسلاوی، سوریه‌وسایرممالك اروپا وشرق نزدیك نیز این روش معمول بوده است.

میتوان اطمینان داشت‌که یکی از اولین روش‌مردم قدیم درحساب‌کردن استفاده ازانگشتان بوده‌است. در حقیقت کلمهٔ انگلیسی Digit چگونگی توسعهٔ اعداد را بمامی‌فهماند. اگر بکتاب لغت مراجعه شوداین‌کلمه دارای چندین معنی است اول بمعنی‌انگشت دست ویا پا ودیگر بمعنی هریك ازاعدادیك تا نه است وهمچنین‌مقیاس‌معینی است در حدود $\frac{3}{4}$ یك‌اینچ‌پس‌این کلمه هم‌بمعنی انگشت وهم‌یك عدد و هم یك مقیاسی‌میباشد.

بنابراین این نتیجه‌بدست میآید که اولین‌قدم‌برای‌ساختن اعداد بکار بردن ژتون اعم ازمهره ، چوب ، دانه های غلات گوش ماهی، چوب خط ، انگشت و گره روی‌نخ بوده‌است ولی یك نکتهٔ مهم را بدقت توجه کنید شیئی بجای چیزی که‌شمرده میشد قرارمی‌گرفت ومعرف آن بود . یك انگشت یایك سنك بمعنی یك گوسفند یا یك‌آدم وچیزدیگربود و معنی عددیك را آنطورکه موردنظرماست نمیداد. ما وقتی عدد یك، دو ویاهر عدد دیگررا ذکرمی‌کنیم آنرا کاملامجزا ازهرچیزدیگردرنظر میآوریم ولی درآنموقع ۲ سنگریزه یعنی ۲ گوسفند نه عدد۲.

نام گزاری اعداد بعدها بوجود آمد وشایدهزاران هزار سال طول کشید تا بشراعداد رابنام خواند ونمیدانیم که اینکار چگونه انجام شد . بسیاری ازدانشمندان این موضوع را بدقت بررسی کرده وعقیده دارند شاید بطریق زیر بوده‌است .

مرحلهٔ اول - بکار بردن شکل بجای عدد

شاید ساده‌ترین طریقه عددنویسی رسم شکل و علامات بوده است .

مثلاً برای نشان دادن سه روز سه شکل خورشید رسم میشده است و بعضی قبایل با علامت‌گذاری روی تکه های‌سفال سفال شکسته و یا کندن روی سنك ، دیـوار و لوح اعداد را می‌نوشتند .

مرحلهٔ دوم - علامات درعدد نویسی

شاید اولین قدم‌جهت ایجاد علامت‌بجای عدد بوسیله‌مردم مصر وبابل و سوریه قدیم برداشته شد. چینیها وسایرمردم‌شرق دور باکشیدن خطهای افقی باین شکل (— ، = ، ≡) یك دو سه مینوشتند . نوشته های مصری که درسنك حکاکی شده مربوط به ۳۴۰۰ سال قبل از میلاد یعنی ۵۳۰۰ سال‌قبل‌میباشد وبرطبق آنها دانشمندان عقیده دارند که در آنزمان مصریها ترتیب‌صحیحی از رسم اعداد را بوجود آورده بودند در حدود ۳۴۰۰ سال قبل از میلاد سومریهای بین‌النهرین علامات میخی شکل جهت‌نشان دادن اعدادبکارمی‌بردنداین علامات‌ونوشته‌های آنها بامدادی فلزی‌روی‌خشت ایجا میشد. آنها همانندمصریها تا ۲۰ می‌شمردند وبعداً ده ده وبعد صدصد .

طریقه‌نوشتن اعداد توسط یونانیها

دو هزار سال بعد اززمان بابلیها یونانیها خطوط افقی و بعضی علامات مخصوص‌دیگر جهت نشان دادن‌اعدادبکاربردند. یك خط تنها (|) عدد یك‌و (‖) عدد شش بود وجهت واحد های بزرگتر ازعلامات‌بخصوص‌استفاده میکردنددرجزیرهٔ کرت علامت ده (—) وعلامت ۱۰۰ یك چنین دایره‌ای بود(O)

ولی درحدود پانصد سال قبل ازمیلاد یونانیهاروش جدید دیگری شروع کردند وازحروف الفبا برای نشان دادن اعداد استفاده‌کردند برای عدد یك (α) وبرای‌پنج (ε) وبرای ۱۰ (ι) وبرای ۲۰(K) نوشتند . اول حروف بزرك وبعدکلمات کوچك‌را نوشتند. چگونه‌می‌فهمیدند چه موقع‌حرف عدد و چه وقت جزء یك‌کلمه است؟ اینموضوع‌را بدوطریق‌مشخص ساختند اول باگذاشتن خط‌کوچك‌کجی روی عدد ودوم‌کشیدن خطی افقی روی حرف :

رومیها طرزنوشتن اعداد را پیدا می کنند

ممکن است تصور شود هنگامی‌که رومیها بر یونان تسلط یافتند وامپراطوری‌خود را بر قسمت‌اعظم اروپا و افریقای‌شمالی وشرق نزدیك برقرارساختند طرز عدد نویسی یونانی را تقلید کردند ولی اینکار را نکرده و طریقه جدیدی ساختندکه بیشتر به نوشته های مصری شباهت داشت واین همان روشی است که درکلیه امپراطوری وسیع رومی قبل وبعد ازمیلاد مسیح معمول بود ومدتها در انگلستان ، اسپانیا ، آلمان و سایرکشورهای اروپائی بکار برده شد و حتی امروزه در مواردیخصوص از آن استفاده میشود

این اعداد در تقسیم‌بندی یك فصل کتاب ، در حکاکی اعداد دریادبودی ، اولین سنك بنای ساختمانها وهرجا اعدادکوتاه مورداحتیاج است بکاربرده میشود

اختراع نوشتن اعدادبوسیله‌هندی‌ها

شاید با خود بگوئید امروزه در عددنویسی ما ازهیچیك از طرق مصری ، سوری ورومی استفاده نمی‌کنیم و روش عدد نویسی ما باآنها متفاوت است آنرا از کجا آورده‌ایم ؟ مدتها حتی بهترین دانشمندان ما تصورمیکردند که این‌طرزعددنویسی که امروزه دربسیاری از کشورهای‌دنیا معمول است‌توسط‌اعراب اختراع شد وبسیاری آنرا اعداد عربی‌نامیدند.ولی درپنجاه سال اخیردانشمندان‌آثاری اززمان قدیم‌کشف کرده‌اندکه برطبق‌آنها اعداد فعلی را ترکیبی از اعداد عربی وهندی دانسته‌اند قطعاً اکثراین اعداد درحدود ۲۰۰۰ سال قبل توسط هندیهااختراع شده است . درآثار مکشوفه‌که در ۲۰۰ تا ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده علاماتی برای اعداد ۶،۴۰۹ پیدا شده واعداد ۹،۷۰۲ درنوشته های ۱۰۰ سال قبل ازمیلاد مسیح و۳ و۵ در نوشته‌های ۲۰۰ سال بعد ازمیلاد بدست‌آمده است .

چنانچه میدانید درحدود ۷۰۰ سال بعد از میلاد اعراب مسلمان دریغداد وسایر مراکزآموزشی بین‌النهرین مدارسی بنا کردند ودانشمندان شروع بترجمه نوشته های هندی‌که بزبان سانسکریت بود بعربی کردند وعدهٔ دیگری شروع‌بنوشتن کتاب در بارهٔ زبان، اعداد وعلوم‌نمودند . دراین‌موقع بودکه‌علامات واعداد هندی را درنوشته‌های خود بکاربردند.

شاید کمی آنها را تغییر دادند ولی شکی نیست که این علامات توسط هندیهااختراع شده است .بزودی اسلام‌درسراسر

افریقای شمالی و اسپانیا توسعه یافت و مسلمانها بهرجارسیدند شهرهائی که دارای مدرسه ، دانشگاه و کتابخانه بود بنا کردند و همه با اعداد هندی که آنها را اعداد عربی می‌خواندند مورد تقلید قرار گرفت .

در سال ۱۲۵۰ شخصی بنام Leonardotf Piza آنها را در کتابش با تغییراتی بکار برد. در همین اوقات سوداگرانی که بین شهرهای هندوستان و ایران و اسکندریه سفر میکردند بنوشتن اعداد هندی عادت کردند و با اطمینان باید گفت که درطی صدها سال بعد از ۴۰۰ بعد از میلاد مسیح این سوداگران طرز عدد نویسی هند قدیم را بسرزمینهای اطراف مدیترانه بردند . باید گفت علاوه بر این سوداگران ، دیگران نیز در انتشار عددنویسی هندی درتمام دنیا کمک کردند اول عده‌ای از نویسندگان و دانشمندان مسلمان از بغداد به اسپانیا سفر کردند و دوم جنگجویان مسلمان که بر مردم آسیا تا اسپانیا حکمفرمائی میکردند .

بین سالهای ۱۰۹۶ و ۱۲۷۰ بعد از میلاد سربازان جنگهای صلیبی اروپای غربی چندین بار شرق نزدیک را اشغال کردند و آنها نیز طرز عدد نویسی هندی را فراگرفته وهنگام بازگشت باروپا انتقال دادند . در حدود سال ۱۴۰۰ این طرز عدد نویسی هند و عرب در سراسر اروپا معمول شد .

چنانچه میدانید پس ازمدتی **گوتنبرگ** چاپ را با حروف متحرك اختراع کرد و بعد از او چاپخانه‌ها بکارافتاد و مدتهای مدیدی کتابها را بعوض آنکه با دست بنویسند با حروف جدید چاپ کردند اعداد درست بهمان شکل در کتابها چاپ شد واین طرز عدد نویسی بزودی در تمام دنیا پذیرفته شد .

بکار بردن کلمات بجای اعداد

بدون تردید در حالیکه اندیشهٔ عدد نویسی رشد میکرد بشر میبایستی کلماتی برای آنها پیدا میکرد تا بتواند درباره آنها گفتگو نماید واینموضوع جالب است که هر یك از قبایل بشری طرحی برای اسامی ریختند . عجیب و شاید باید گفت طبیعی است که این طرحها شبیه بهم ریخته شده‌است بعضی اعداد بنام قسمتهائی از بدن انسان یا حیوان نامیده شد . در چند زبان مختلف عدد ۲ همان کلمه‌ایست که بمعنی گوش میباشد دربعضی دیگر ۲ همان کلمه (چشم) و بعضی کلمه‌ای‌است بمعنی (بال) شاید کلماتی که برای انگشتان دست و پا بکار میرفت بیشتر برای اعداد استفاده شده است . در بین سرخ پوستان Zuni شمال آمریکا عدد بیست بمعنی ۲ برابر همه انگشتان . افراد قبیله Beteyes در آمریکای جنوبی برای عدد ۵ کلمه Teyeute بمعنی دست و برای ۱۰ Cayaente بمعنی دو دست بکار میبرند . در حقیقت در بسیاری از قبایل امروزی عدد ۵ معمولا دست و ۱۰ دو دست است و ۲۰ کلمه‌ای برای همه انگشتان دست و پا . درزبان آلمانی عدد ۱۰ zehn یا کلمه zohn بمعنی انگشتان پا خیلی شبیه هست . با اطمینان میتوان گفت که نام گزاری اعداد از یك تا ۲۰ از ابتدا باین طرز ساده بوده است .

اسامی ترکیبی جهت اعداد ۵ و ۱۰ ببالا

نام اعداد بالاتر از ۱۰ چگونه بوجود آمد ؟ آیا اقوام مختلف کره زمین به هر عددی نامی جداگانه نهادند ؟ خیر . اکثراً بطریقی شبیه بهم عمل کرده‌اند . شاید میدانید که درزبان انگلیسی اعداد ۱۲ و ۱۹ چگونه درست شده . اعداد ۳ و ۵ مختصر شده و کمی تغییر کرده‌اند و اعداد ۸،۷،۶،۴ و ۹ بشکل خود باقی مانده و بهر یك (Teen) اضافه میشود . و هر یك ازمراتب دهگان یك اسم دارند ۹۰،۲۰،۲۰ اعداد بین دهگان چگونه درست میشود ؟ فقط با اضافه کردن اعداد یك تا ۹ به آن عدد مانند ۸۱ ، ۸۲ و غیره ... سپس سدگان با اضافه کردن یکان به کلمهٔ صد بوجود آمد مانند ششصد ، هفتصد واز یکهزار شروع میشود تا صد هزار و تا ۹۹۹۰۰۰ و بعد ملیون و ترلیون بهمین شکل ساخته میشود . در زبانهای جدید نیز بهمین نحو عمل میشود مثلا در فرانسه Dix—huit ۱۸ بمعنی ۱۰ و ۸ است . در زبان آلمانی ۲۵ را ۵ و ۲۰

و برای ۹۳ (۳ و ۹۰) Draund neunziy

می گویند . اقوام و قبایل مختلف دنیا نیز همین ترتیب را بکار میبرند قبیله Betoyes در آمریکای جنوبی عدد شش را Teyemteley میگویند که بمعنی دست و یك است برای ۱۰ دو دست و برای ۱۱ دو دست و یك و به ۱۵ سه دست میگویند . البته کلیه قبایل دنیا اعداد را درست بیك طریق نام گزاری نکرده‌اند ولی معمولا بسیار شبیه میباشند دانشمندانی که روشهای مختلف قدیم وجدید را مورد مطالعه قرار داده‌اند اظهارمیدارند که اکثر مردم باجرئی تفاوت شمردن را با استفاده ازانگشتان شروع کردند . چون در هر دست پنج انگشت داشته بهر یك نامی دادند و وقتی ده در دو دست شمرده میشد گرهی به پارچه‌ای میزدند یا علامتی روی چیزی میگذاشتند و یا ریگی را درجای معینی میانداختند وپس ازآن پنجها و دهها را بهم‌میافزودند و باینطریق سیستم اعشاری Decimal اختراع شد . ضمناً نباید فراموش کرد که علاوه بر سیستم ده تائی که امروزه بسیار مورد استفاده است روشهای دیگر نیز اختراع شد . بعضی عدد ۲ را برای آغاز شمارش بکار بردند و ۲ ها را بطریق مختلف بهم ترکیب نمودند برای عدد ۳ کلمه‌ای بمعنی ۲ و یك ، برای چهار ۲ جفت و برای شش ۳ جفت بکار بردند . بعضی قبایل حتی برای ۴ ، ۴۰ ، ۴۰۰ و ۴۰۰۰ را بوضع ۱۰ ، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ ، بکار میبرند ولی دربین مردم مترقی دنیا معمولا سیستم اعشاری

بهترین و آسانترین روش شناخته شده است .

چگونگی آموزش حساب

در اوایل این فصل معنی حساب را ملاحظه کردید وقتی حساب می‌کنید یعنی با اعداد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌کنید . اگر برای خرید بمغازه خواربار فروشی بروید قیمت اجناس را بهمین طریق جمع می‌کنید وقتی بمغازه دار اسکناس ۵ پوندی میدهید اطمینان دارید که درست بقیه آنرا با تفریق کردن بشما پس میدهد . اگر اینکار ها را میتوانید بنمائید قادر بحساب کردن میباشید و دیگر احتیاجی به سنگ و گره و علامت ندارید و شاید این حساب را در مغزتان مینمائید .

یقیناً وقتی این علامات $+ \; - \; \times \; \div$ را می‌بینید میدانید چه باید کرد و میدانید $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{8}$ یعنی چه و آنها را کسر متعارفی می‌خوانید همه این چیزها را هر دانش آموز کلاس دبستان میداند ولی صد ها سال قبل حتی اشخاص تحصیل کرده و اروپا و آسیا این چیزها را نمیدانستند و نمیتوانستند مانند شما جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کنند . آیا تعجب نمی‌کنید ؟ شاید بپرسید پس چطور حساب می‌کردند ؟

در آن ایام حتی هنگامیکه دانشمندان فلز را در آتش ذوب میکردند و برای ساختن ابزار کار و زندگی وسایل نقلیه و یا حمل و نقل بکار می‌بردند با کمك ژتون و یا چیزی از این قبیل حساب می‌کردند .

در حدود ۲۰۰۰ سال قبل در کشور دور افتادهٔ هندوستان مردم طرحی را که بعدها توسط اکثر مردم دنیا بکار رفت ریختند میتوان گفت اولین قدمی را که ممکن است برداشته باشند در دیف کردن سنگ و صدفها زیر هم میباشد آیا توجه کرده‌اید که اگر ژتون ها در ستونهائی در طول زیر هم قرار گیرند جمع کردن و بدست آوردن مجموع آسان است شاید آنها این ستونها را مانند ما دهگان ، صدگان نمی‌نامیدند . شاید برای ستون اول انگشتان و برای ستون دوم دست‌ها را بکار میبردند . ولی میدانیم که دویست سال قبل این طرز شمردن معمول بود .

کشف غیر عادی

در طی هزاران سال قبل از میلاد مسیح و حتی چندین قرن پس از آن کسی وجود نداشت که بتواند آنچه را ما (دهها) و (صدها) مینامیم بنویسد . یعنی هیچکس نمیدانست در حساب جای خالی را چگونه پر کند . مقصود آنست که صفر وجود نداشت و بدون صفر نمیتوانستند حساب کنند و جمع و تفریق و ضرب و تقسیم نمایند . قرنها علاماتی برای اعداد یك تا نه داشته و برای حل بسیاری از مشکلات خود از آنها استفاده میکردند ولی برای حساب ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نداشتند . میدانید چرا ؟ امروز میدانیم که علت آنست که صفر عدد نیست و باید در طرف راست عدد گذاشت تا عددی بدست آید و در سیستم امروز ما اینکار را با پر کردن جای خالی انجام میدهیم در عدد ۱۰ صفر جای یکان را میگیرد و در ۱۰۰ جای یکان و دهگان را میگیرد صفر در طرف راست ۸ عدد ۸۰ و در راست عدد ۹۳ عدد ۹۳۰ میشود و در این موارد صفر یك ستون و یا یك واحد را نشان میدهد . آیا بنظرتان عجیب می‌آید که بشر سالهای متمادی بدون آنکه فکری برای اختراع صفر بنماید طی کرده است ؟

اکنون بر گردیم بطرز ترتیب ریگها بوسیله هندیها و ببینیم اختراع صفر چگونه بوده است .

گاهی هندیها می‌دیدند که در یك ستون هیچ ریگه ندارد معمائی بود ! ستون خالی چه باید نامیده شود ؟ چطور میشود آنرا نوشت ؟ و چطور میشود آنرا جمع کرد ؟ شاید کسان دیگر هم با ژتون حساب می‌کردند گرفتار این مشکل بودند بهر صورت این موضوع را میدانیم که در حدود ۱۰۰۰ سال قبل هندیها این معما را حل کردند و کلمه Sunia که در هندی بمعنی خالی است اختیار کردند و علامتی برای آن ساختند . ولی زونیا بمعنی هیچ نبود بلکه نام ستونهای خالی حساب بوده و باین ترتیب علامتی شد و در ردیف اعداد در آمد .

چه کسی باین کشف بزرگ نائل شد ؟ نمیدانیم . چنانچه کشف آتش ، چرخ و سایر وسائل مهم نا معلوم است . ممکن است عده زیادی در انجام اینکار شرکت داشته باشند . چه موقع این موفقیت حاصل شد ؟ باز هم بطور مسلم معلوم نیست . فقط میتوان گفت که در حدود ۸۰۰ سال بعد از میلاد علامتی بنام (خالی) در نوشته‌های هندی پدیدار شده در حکاکی‌های مکشوفه که مربوط به ۸۷۶ بعد از میلاد میباشد عدد ۲۷۰ دیده میشود . در اواخر سال ۸۰۰ اعراب شرق نزدیك که از هندی تقلید میکردند کلمه هندی (سونیا) را به کلمهٔ عربی (صفر) ترجمه کردند و آنرا بصورت نقطه‌ای نوشتند . در عربی نیز (صفر) بمعنی خالی است و در ستون خالی حساب گذارده میشد .

در حدود سال ۱۲۰۰ بعد از میلاد که سوداگران اعداد عربی را به ایتالیا بردند صفر در زبان لاتینی ظاهر شد و آنرا Zephirum نوشتند . بالاخره در حدود ۱۳۰۰ بعد از میلاد در زبان ایتالیائی Zero گردید . در زبان آلمانی نیز بنام Cifra وارد شد .

حتی در سال ۱۸۰۰ گوس Gauss محقق و ریاضی دان معروف آلمانی که نوشته‌های خود را بزبان لاتینی می‌نوشت کلمه Cftra را بکار برد بعداً این کلمه در زبان انگلیسی بشکل Cipher بمعنی (زرو) وارد شد .

این بود داستان چگونگی پیدا شدن صفر وجهت پر کردن جای خالی در حساب .

کمك تخته های حساب و چرتکه

با یاآوری داستان صفر میتوانیم پی ببریم که چرتکه و تخته های حساب چگونه ساخته شد .

در کشورهای مختلف چرتکه های گوناگون ساخته شد . این چرتکه ها داستانی قدیمی دارند هر یك از ملتهای چین ، هند و بین النهرین و مصر قبل از میلاد مسیح از آنها استفاده میکردند و سه نوع اصلی وجود داشته است و نویسندگان رومی دو هزار سال قبل آنها را توصیف کرده اند .

نوع اول تخته یا میزی کوچك که پوششی از خاك نرم و موم داشته است و اعداد را با انگشت روی آن نوشته و پاك میکردند نوع دوم تخته یا صفحه‌ای که روی پایه قرار داشته و روی آن خطوط موازی ترسیم شده بود . نوع سوم تخته‌ای بوده است که روی آن شیارهای مستقیم کنده شده وقطعات کوچك گرد ازچوب ، عاج ، استخوان یاشیشه را روی شیارها حرکت داده و حساب می کرده‌اند . هر عدد در شیارهای بالای صفحه پنج و در شیار های پائین صفحه یك بحساب می‌آمده است و خطوط موازی یکی یکان دیگری دهگان و سومی صدگان و چهارمی هزار را نشان میداده است و این همانست که چرتکه مینامیم و نوع دیگری از آن بین مردم چین معمول بوده وآنرا بزبان چینی Suan Pan مینامیدند و مهره های تو خالی را بکار برده و از میان آنها میله‌ای از نی یا فلز میگذراندند بطوریکه مهره‌ها روی میله‌ها حرکت کرده و پائین و بالامیرود .

حساب با نوشتن اعداد

هزاران سال استفاده از چرتکه بهترین طریقه حساب و شمارش بود وبسیاری درابنکار مهارت یافتند بطوریکه میتوانستند بسرعتی که اعداد خوانده میشد حساب کنند ، امروزه هم حساب با Suan Pan مهمترین طریقه حساب درکشور چین است . مردم اروپا بتدریج نوشتن اعداد هند وعرب را فراگرفتند ولی پس از ظهور چاپ چرتکه کم کم متروك شد ومردم پی‌بردند که با نوشتن اعداد نیز هم میتوانند بسرعت و صحت حساب کنند .

با گذشت زمان کسانیکه در علم حساب مطالعه می کردند روشهای ساده تر و بهتر جهت جمع و تفریق و ضرب و تقسیم پیدا کردند و پس از تجربه مدتهای مختلف روش امروزی ما تکمیل شد .

این داستان فقط خلاصه‌ای از تاریخ اعداد است

در اینجا باید بداستان اختراع عدد خاتمه دهیم . گرچه مختصر است ولی مطمئناً توجه کرده‌اید که یکی ازبهترین کارهای بشر میباشد . ده ها هزار سال طول کشید تا بشر طریقه آسانی جهت حساب نمودن پیدا کرد و قرنها جهت پیشرفت علم حساب کوشش نمود اختراع زبان نیز تا حدی باین پیشرفت کمك کرد و بالاخره کلمات جدیدی جهت شمردن گاو و گوسفند خودساخت و بالاخره سیستم کامل اعداد را تهیه کرد .

البته مطالب بسیار در بارهٔ حساب و عدد وجود دارد که در این داستان ذکر نشده است .

داستان اعداد در حقیقت آغازکار در فراگرفتن حساب جبر و هندسه و سایر رشته های ریاضی میباشد .

دانش‌آموز رتبهٔ اول امتحانات نهائی ششم طبیعی



جعفر نصرت‌قاسمی دانش آموز **دبیرستان البرز** که درامتحانات نهائی ششم‌طبیعی خردادماه گذشته در بین تمام شرکت کنندگان مقام اول‌را بدست آورده است تحصیلات ابتدائی خود رادر **دبستان بوذرجمهری بندرپهلوی** بپایان‌رسانده‌و بامعدل ۱۹/۲ از عهدهٔ امتحانات شش سالهٔ ابتدائی برآمده است . از سال اول دبیرستان تحصیلات خود را **در دبیرستان البرز تهران** شروع نموده است . نامبرده در امتحانات ششم طبیعی دبیرستانها موفق شده است . در هشت درس کتبی ۱۵۴ نمره را بیاورد و بدین ترتیب با معدل **۱۹/۲۵** حائز رتبهٔ اول بین تمام شرکت کنندگان‌بشود . توفیق ویرادر ادامهٔ تحصیلات عالیه وکسب امتیاز های بیشتری‌آرزومندیم .

* * *

دانش‌آموز رتبهٔ‌اول‌ششم ریاضی دبیرستان‌های‌یزد



محمد مدرس در ۱۳۲۵ در **یزد**چشم‌بدنیا گشوده‌است تحصیلات‌ابتدائی‌رادر**دبستان حکمت‌یزد**ودردورهٔ‌اول‌متوسطه را در دبیرستان **جامعهٔ تعلیمات‌اسلامی‌افشاریزد** و دورهٔ دوم را دردبیرستان **ایرانشهریزد** گذرانده‌ودر تمام سالهای تحصیل رتبهٔ‌اول بوده‌است . درامتحانات‌نهائی ششم ریاضی نیزباکسب **۱۹۱** نمره در ده درس کتبی یعنی **معدل ۱۹/۱** بین‌شرکت‌کنندگان ششم ریاضی **شهرستان‌یزد** مقام اول را بدست میاورد . قسمت عمدهٔ موفقیت آقای مدرس مرهون توجهات پدر فاضل و دانش دوست وی صاحب **مؤسسهٔ گلبهار یزد** میباشد .

نوشتهٔ اسحق آسیموف
ترجمهٔ اکبر قهرمانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی

دوانگشت اضافی

گاهگاهی بیاد بی لیاقتی خود در حل مسائل ریاضی می افتم . گر چه کم و بیش با اینگونه مسائل سر و کار دارم ولی بخوبی پی برده‌ام که ریاضیات و مسائل آن با خصوصیات من جور در نمی‌آیند . باین ترتیب ملاحظه میکنید وقتی موفق به حل یك معمای ریاضی می‌شوم چه خوشحالی بمن دست میدهد . در دوران جوانیم دوستان یکی از همین مسائل را بمن پیشنهاد کردند که بمیان کشیدن آن ما را باصل موضوع نزدیك میکند :

فرض میکنیم وزنه های یك گرمی ، دو گرمی ، سه گرمی را بشما داده اند و گفته‌اند ازمیان آنها وزنه‌هائی را انتخاب کنید که با افزودن بیکدیگر بتوانید اجسام ازیك تا هزار گرم را وزن کنید . البته باید سعی کرد تعداد وزنه‌های انتخاب شده می‌نیموم باشد من شخصاً مسأله را باین طریق حل کردم : بی شك باید وزنه یك گرم را انتخاب کنم . زیرا با افزودن هیچ یك از وزنه‌های دیگر نمی‌توانم جسم یك گرمی را توزین کنم .

خوب ، حالا اگر یك وزنه یك گرمی دیگر بردارم با ترکیب این دو ، وزنهٔ ۲ گرمی هم خواهم داشت ولی برای صرفه جوئی، وزنه ۲ گرمی‌را انتخاب میکنم که هم ۲ گرم‌وهم‌با افزودن آن با ۱ گرمی وزنه ۳ گرمی را داشته باشم . وزنهٔ بعدی ... شاید سه گرمی باشد ولی این وزنه اضافی است زیرا ما قبلا ۳ گرم را از ۲+۱ بدست آورده بودیم . پس وزنهٔ ٤ گرم انتخاب کردم . این وزنه نه تنها ٤ گرم را وزن میکند بلکه بکمك آن می‌توانم جسم ٥ گرم (۱+٤) و ٦ گرمی (۲+٤) و ۷ گرمی (۱+۲+٤) را وزن کنم .

در این موقع متوجه یك موضوع جالب شدم . وگرنه وزنهٔ بعدی ۸ گرم است (زیرا از ۱ تا ۷ گرم را دارم) پس این هشت گرم باوزنه های دیگر تا ۱٥ گرم (۱+۲+٤+۸) را خواهد داد . و بهمین ترتیب وزنه بعدی۱٦ گرم است. پس اگر کسی بخواهد با انتخاب کمترین تعداد ، تمام وزنه‌ها را داشته باشد بایداز ۱ گرمی شروع کند و وزنه‌های بعدی را طوری بر گزیند که هر کدام دو برابر وزنهٔ قبلی باشد .

۱ ، ۲ ، ٤ ، ۸ ، ۱٦ ... گرمی .

مثلاً در مورد مسألهٔ بالا ۱ ، ۲ ، ٤ ، ۸ ، ۱٦ ، ۳۲ ، ٦٤ ، ۱۲۸ ، ۲٥٦ ، ٥۱۲ وزنه های از ۱ تا ۱۰۲۳ را بمن میدهد . و این جواب مسأله است .

حال وزنه ها راکنار بگذاریم و اعداد را پیش بکشیم . با اعداد ۱ و ۲ و ٤ و ۸ ... هر عدد صحیحی را می‌توان نشان داد . ولی شکل ظاهری این اعدادیکنواخت نیست . ممکن است راه بهتری برای‌بهتر نشان دادن آنها باشدو مسلماًهست : فعلاً یك‌راکنار میگذاریم . ۱×۲=۲ (اشکالی‌که ندارید ؟ !) و ۲×۲=٤ و ۲×۲×۲=۸ و... همانطورکه میدانید می‌توان این دسته اعداد را با $۲^۱$ و $۲^۲$ و $۲^۳$ و ... نشان داد . و چون هر عدد بتوان صفر مساوی یك است پس بجای ۱ همکه قبلا کنارش گذارده بودیم $۲^۰$ می گذاریم .

$$۲^۰ ، ۲^۱ ، ۲^۲ ، ۲^۳ \ldots$$

حال ملاحظه میکنیدکه تمام اعداد را با داشتن این سری داریم مثلا .

$$۱۰۰=٦٤+۳۲+٤=+۲^٦+۲^٥+۲^۲ .$$

$$۷۲۹=٥۱۲+۱۲۸+٦٤+۱٦+۸=۲^٩+۲^۷+۲^٦+۲^٤+۲^۳+۲^۰$$

$$۱۰۲۳=۲^٩+۲^۸+۲^۷+۲^٦+۲^٥+۲^٤+۲^۳+۲^۲+۲^۱+۲^۰$$

اینك برای آنکه تمام اعداد از یك ۱ تا ۱۰۲۳ را بشکل مشابهی نشان دهیم، اگردرعددی یکی از جملات $۲^۰$ تا $۲^٩$ وجود نداشت ضریبش راصفر می گذاریم و آن را وارد مجموعه می کنیم .

$$۱۰۰=۰\times۲^٩+۰\times۲^۸+۰\times۲^۷+۱\times۲^٦+۱\times۲^٥+۰\times۲^٤+۰\times۲^۳+۱\times۲^۲+۰\times۲^۱+۰\times۲^۰$$

$$۷۲۹=۱\times۲^٩+۰\times۲^۸+۱\times۲^۷+۱\times۲^٦+۰\times۲^٥+۱\times۲^٤+۱\times۲^۳+۰\times۲^۲+۰\times۲^۱+۱\times۲^۰$$

ممکن است سئوال کنید چرا اصرار داریم تمام توانهای ۲ را وارد عمل کنیم در صورتیکه با ضرب کردن آنها در صفر عمل آنها را خنثی می کنیم . نکته همین جا است . در این طریقهٔ مشابه نوشتن اعداد ، می‌توانیم فقط به نوشتن ضرایب توانهای ۲ یعنی (۰و۱) اکتفاکنیم . و هرعدد راکه بخواهیم نشان دهیم مثلاً .

۱۰۰ = ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰

۷۲۹ = ۱ ۰ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱

۱۰۲۳ = ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

پس می‌توان کلیهٔ اعداد از ۱ تا ۱۰۲۳ را با مجموعهٔ از ۰ و ۱ که تعداد آنها دویهم برای هر عدد ۱۰ تا است نشان‌دهیم

۱ = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱

۲ = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰

۳ = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱

٤ = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰

. . . . . .

و بالاخره ۱۰۲۴ = ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

البته واضح است برای نشاندادن اعداد بزرگتر از ۱۰۲۳ باید توانهای $۲^{۱۰}$ و $۲^{۱۱}$ و ... را هم بمیان‌کشید . شاید راحت‌تر باشیم که در نوشتن اعداد باین‌روش ، صفر های طرف چپ راکه نشان می دهند توانهای مربوطهٔ ۲ بکار نرفته اند ، حذف کنیم . مثلاً بنویسیم .

... و ۱۰۰ = ٤ و ۱۱ = ۳ و ۱۰ = ۲ و ۱ = ۱

خواننده بسادگی می‌فهمند که مثلا در عدد ٤ ضرائب $۲^۳$ بیمد صفر بوده اند که ما ننوشته ایم .

عده‌ای از قبایل بدوی این طریقهٔ نوشتن اعداد را بکار می برده‌اند . اولین کسی که این روش را وارد ریاضیات کرد لایب‌نیز (G . w . Leibniz) بود او درضمن عقیده داشت ۱وصفر موجود دراین طریقه نوشتن اعدادبترتیب نشانه‌ای از یکتائی خداوند و هیچ بودن عالم خلقت است . با این همه ریاضی دانان آن زمان توجه قابل ملاحظه نسبت به روش فوق نشان ندادند . زیرا هیچ فرد عاقلی حاضر نبود بجای عدد ساده ۷۲۹ عدد ۱۰۱۱۰۱۱۰۰۱ را بکار برد .

سیستم فوق را سیستم نوشتن اعداد در « مبنای دو » می‌نامند . بهمین ترتیب می‌توان اعداد معمولی را در مبناهای دیگر هم نوشت . اعدادی که در مبنای ۸ نوشته شوند نزدیکی زیادی با اعداد در مبنای ۲ دارند . و رابطه این دو مبنا خیلی بیش از آنست که میان اعداد معمولی (مبنای اعشاری) و مبنای ۲ وجود دارد .

چندی بعد متوجه شدند که برای بکار بردن اعداد در ماشین‌های محاسبه الکترونیك طریقهٔ مبنای ۲ بمراتب عملی تراست زیرا فقط با دو عدد (۰و۱) سر وکار داریم . در اغلب این ماشین ها اعداد صفر و یك با خاموش شدن و روشن شدن‌کلید مخصوص نشان داده می‌شوند (البته در انواع دیگر ماشین های محاسبه ، جریان متناوبی در یك حلقه ، ایجاد نیروی الکترو مغناطیسی در دو جهت متناوب میکند یکی از این جهات را نمایندهٔ عدد صفر و دیگری را نماینده عدد یك فرض می‌کنیم . مترجم)

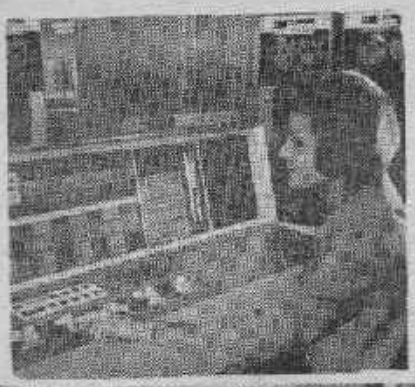
اینك اگر فرض کنیم ماشین حساب فوق دارای ۱۰ کلید باشد عدد ۱۰۲۳ بصورت (روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن ـ روشن) و عدد ۷۲۹ با (روشن ـ خاموش ـ روشن ـ روشن ـ خاموش ـ روشن ـ خاموش ـ خاموش ـ روشن ـ خاموش) و عدد ۱۰۰ با (خاموش ـ خاموش ـ خاموش ـ روشن ـ روشن ـ خاموش ـ خاموش ـ روشن ـ خاموش ـ خاموش) نشان داده خواهد شد .

اگر ماشین دارای بیش از ۱۰ کلید باشد اعداد بالا تر از ۱۰۲۳ را هم می توانیم وارد عمل کنیم . شاید تصور کنید که کنترل اینهمه خاموش و روشن برای ماشین محاسبه مشکل است ولی هر چه باشد ماشین با اعداد بشکل فوق (در مبنای ۲) خیلی بهتر کار میکند .

(البته ماشین های نوع دیگر با اعداد دیگری کار میکنند . از مشهور ترین آنها ماشین‌هائی هستند که با اعداد بصورت $n = a \times ۱۰^b$ که در آن باید $۱ < a < ۱$ — و $۹۹ < b < ۹۹$ — باشد . مثلا عدد سرعت نور که بصورت معمولی ۲۹۹۷۹۳ کیلومتر در ثانیه است در ماشین بشکل $۰/۲۹۹۷۹۳ \times ۱۰^۶$ قابل عمل است ـ مترجم)

اشکال اساسی اینست که اعداد در مبنای ۲ صورت کاملا آشنائی ندارند و همین امر عده‌ای از دانشمندان را وادار ساخت تا ماشین هائی بسازند که خود بتواند اعداد معمولی (در مبنای اعشاری) را به مبنای ۲ ببرد و سپس روی آن عمل کند . اینگونه ماشین های محاسبه بیشتر برای سهولت مصرف کنندگان در صنعت و تجارت و مصارف غیر علمی بکار می‌رود .

احتمالاً علت انتخاب مبنای ۱۰ در میان مبنا های دیگر توسط پدران ما ، همانا وجود ۱۰ انگشت دست بوده است . شاید اگر دستان ما فاقد انگشت شست بودند و پدرانمان اعداد را در مبنای ۸ بنا می نمودند موفقیت بیشتری درکارکردن با ماشین حساب حاصل می‌نمودیم .





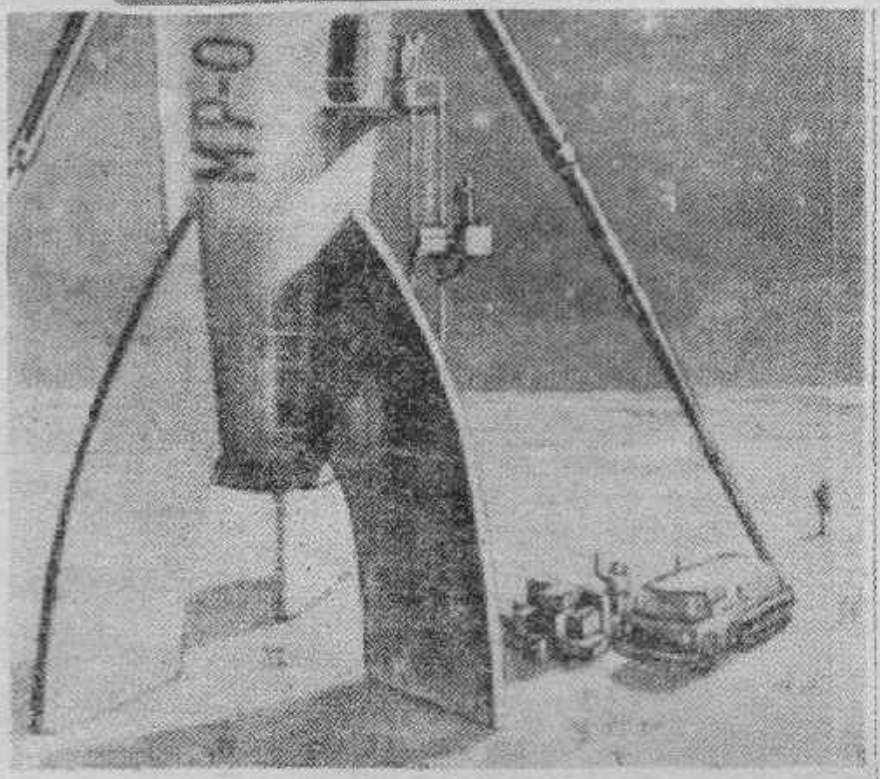
یادداشتهائی از کتاب

بحر الجواهر فی علم الدفاتر

تألیف : عبدالوهاب اصفهانی

... وهریکصد هزارتومان را یك **اك** نامیده‌اند وهرپنج اك راکه پانصد هزار تومان باشد یك **کرور** و هریك هزار کرور یك **فرمن** و هر یك فرمن یك **فلك** است...

... تفریق که محرر این دفتر خانه منها وموضوع میناماند ومحاسبین بیشتر را منقوص منه وکمتررا منقوص وخارج ازین تفریق را باقی ، و سیاقیین موضوع و موضوع منه و خارج ازین را باقی گویند و در جائیکه موضوع کمتراز موضوع منه بوده باشدزیاده‌و فاضل گویند اگر بیشتر باشد ...



تجسم آینده : انسان برسطح کرهٔ مریخ

... طریقهٔ عمل ضرب آحاد درآحاد ازیك تا پنج معلوم است احتیاج بقاعده ندارد اما دوشش تا نه مضروبین جمع نموده و مافوق عشره را بسط بعشرات نموده و فضل ده برهریك از مضروبین را دریکدیگر ضرب نموده اضافه مبسوط نمایند حاصل ضرب مجموع است مثلا ضرب هشت درهفت آحاد زاید برده را بسط بعشرات کرده وشش که مضروب دودرسه باشداضافه بنحاء نموده مجموع حاصلضرب پنج وشش باشد و در این باب شعری ازحضرت امیر المؤمنین علی بن ابیطالب صلوات‌الله‌علیه مشعراست بر توضیح‌این‌معنی مناسب ایراد آنستدراینمقام وطریقهٔ آن بضرب و حروف ابجد میباشد وحاصل را هم بحروف ادا میفرمایند وآن این است .

رو لوز مد و حمح وط ند — زز مط زح نور طاسیح حج سد
حط عب مط فاضرب ما — دون عشرها الیها تهتدی



تصور بشر درگذشته : عبور ازکرهٔ آسمان و مشاهدهٔ چرخ ستاره سازی

حل مسائل متفرقهٔ شماره‌های ۳ و ۴

حل مسألهٔ ۵۵۱ ـ تعیین x ازمعادلهٔ زیر

$$\log_{\lambda}\log_{\gamma}\log_{\gamma}x=\circ$$

اگر فرض کنیم $\log_{\gamma}\log_{\gamma}x=a$ داریم $\log_{\lambda}a=\circ$ و درنتیجه $a=1$ یعنی $\log_{\gamma}\log_{\gamma}x=1$ بدست میآید. فرض میکنیم $\log_{\gamma}x=b$ بنابراین $\log_{\gamma}b=1$ بوده وازآنجا $b=\gamma$ واز آنجا $\log_{\gamma}x=\gamma$ $x=\gamma^{\gamma}=\lambda$

پاسخ های صحیح‌رسیده از : منصور تعلیمی پنجم‌ریاضی دبیرستان دارالفنون تهران ـ فرامرز رهبر پنجم‌ریاضی‌دبیرستان شرف تهران ـ بهروز رضوانی چهارم ریاضی دبیرستان سعدی اصفهان ـ سید نورالدین سیادتان پنجم‌ریاضی‌دبیرستان‌شاهپور شیراز ـ نصرت‌الله حسنلو چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون تهران ـ محمود میرزائی ـ کورش‌محسن زادگان

حل مسأله ۵۵۲ ـ ازبین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ بامساحت ثابت p^{γ} کدامست که‌دارای کوچکترین وتر میباشد. طول اضلاع زاویهٔ قائمه را با x و y وطول وتر را با z نمایش‌دهیم داریم

$$S=\frac{xy}{\gamma}=p^{\gamma}\Longrightarrow xy=\gamma p^{\gamma}$$

$$z^{\gamma}=x^{\gamma}+y^{\gamma}=(x-y)^{\gamma}+\gamma xy$$

$$z^{\gamma}=(x-y)^{\gamma}+\varepsilon p^{\gamma}$$

مقدار z^{γ} وقتی می‌نیمم است که $(x-y)^{\gamma}$ یا $x-y$ می‌نیمم باشد واین‌درصورتی‌است که $x=y$ باشد یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد

پاسخ‌های‌رسیده از: احمد فربود پنجم ریاضی‌دبیرستان شاهپور شیراز ـ ایرج همت ششم ریاضی دبیرستان امیرکبیر تهران ـ بهروزرضوانی ـ نعمت‌الله قاطان‌پنجم‌ریاضی‌دبیرستان شاهپور شیراز ـ سید نورالدین سیادتان

حل مسألهٔ ۵۵۳ ـ تعیین تصاعد هندسی که درآن‌جملهٔ اول $\frac{1}{a}$ وحاصلضرب دوجملهٔ متساوی‌البعد ازطرفین برابر a و حاصل‌ضرب تمام جمله‌ها $a^{۳۵}$ میباشد.

درهر تصاعد هندسی‌حاصل ضرب هردوجملهٔ متساوی‌البعد ازطرفین مقداریست ثابت وبرابراست با حاصلضرب دوجملهٔ‌اول وآخر وبنابفرض برابر است با a و چون جملهٔ اول برابر $\frac{1}{a}$ است پس جملهٔ آخربرابر با a^{γ} میباشد. اگر a جملهٔ اول، l جملهٔ آخر n تعداد جمله‌ها و p حاصل ضرب جمله های یك تصاعد هندسی باشد داریم

$$p=\sqrt{(al)^{n}}\quad \text{یا}\quad a^{۳۵}=\sqrt{a^{n}}=a^{\frac{n}{\gamma}}$$

$$\frac{n}{\gamma}=۳/۵\ \text{و}\ n=۷$$

و از آنجا قدر نسبت و بالاخره تصاعد مشخص میشود.

پاسخ‌های‌صحیح‌رسیده از : نصرت‌الله حسنلو ـ محمدرضا قسیمی چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون ـ احمد فربود ـ بهروز رضوانی حسین اسد پور ـ کورش محسن‌زادگان.

حل مسألهٔ ۵۵۴ ـ تعیین x ازرابطهٔ زیر.

$$\left(\sqrt{۳-\sqrt{۸}}\right)^{x}+\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}=۶$$

$$\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{۳-\sqrt{۸}}\times\frac{\sqrt{۳+\sqrt{۸}}}{\sqrt{۳+\sqrt{۸}}}=\frac{۱}{\sqrt{۳+\sqrt{۸}}}$$

ورابطهٔ مفروض بصورت زیر نوشته میشود

$$\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}+\frac{۱}{\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}}=۶$$

و بفرض $\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}=y$ نتیجه می‌شود

$$y+\frac{۱}{y}=۶\Longrightarrow y^{\gamma}-۶y+۱=\circ$$

و جوابهای $y=۳\pm\sqrt{۸}$ بدست میآید و ازآنجا

$$\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}=۳+\sqrt{۸}\ \text{و}\ x=\gamma$$

$$\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\right)^{x}=۳-\left(\sqrt{۸}=\gamma+\sqrt{۸}\right)^{-۱}\ \text{و}\ x=-\gamma$$

پاسخ های صحیح رسیده از : آذر ادیبی ششم طبیعی و دبیرستان ثریا تهران ـ فرامرز رهبر پنجم ریاضی دبیرستان شرف تهران ـ مسعود براتی چهارم ریاضی دبیرستان رهنما تهران ـ عنایت‌الله وفائی‌پنجم ریاضی‌دبیرستان هدف ۱ ـ محمد قسیمی ـ مجید خرمی احمد فربود ـ بهروز رضوانی ـ حسین اسدپور ـ سید نورالدین سیادتان ـ کورش محسن زادگان ـ نصرت الله حسنلو ـ فرامرز پور قلی‌زاده ـ منصور تعلمی ـ محمود میرزائی

حل مسألهٔ ۵۵۵ ـ گویا نمودن مخرج کسرزیر

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{\gamma}+\sqrt[۶]{\gamma}+\sqrt[۳]{\gamma}}$$

اولا رادیکال های مخرج را تحویل به یك فرجه مینمائیم

$$\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{۸}+\sqrt[۱۲]{۴}+\sqrt[۱۲]{۱۶}}$$

با توجه باینکه $\sqrt[12]{4} = (\sqrt[12]{2})^2$ و $\sqrt[12]{16} = (\sqrt[12]{4})^2$ و $\sqrt[12]{8} = \sqrt[12]{4} \times \sqrt[12]{2}$ است مخرج بصورت a^2+ab+b^2 میباشد و از اتحاد

$$(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3 - b^3$$

استفاده نموده صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[12]{2} - \sqrt[12]{4}$ ضرب مینمائیم ، کسر بصورت زیر درخواهد آمد

$$\frac{\sqrt[12]{4} - \sqrt[12]{2}}{\sqrt[4]{4} - \sqrt[12]{2}}$$

و اکنون کافیست صورت ومخرج را دو دفعه در مزدوج مخرج ضرب نمائیم تا مخرج گویا شود .

پاسخهای رسیده از : احمد دیانت خواه ـ نصرت‌الله حسنلو ـ محمدرضا قسیمی ـ احمد فربود ـ عنایت‌الله وفائی ـ نعمت‌الله قاطان ـ کورش محسن‌زادگان ـ علی‌اصغر جانلو .

حل مسألهٔ ۵۵۶ـ تعیین x از معادلهٔ زیر

$$\log_{\sqrt{2}} 2 \log_{\sqrt{3}} 8 \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{2}\, x = 2$$

طریق حل مسألهٔ ۵۵۱ عمل نموده برای x مقدار $x=7$ بدست میآید .

پاسخهای رسیده از : علی خاکی صدیق چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون ـ محمدرضا قسیمی ـ فرامرز رهبر ـ احمد فربود ـ عنایت‌الله وفائی ـ بهروز رضوانی ـ نعمت‌الله قاطان ـ کورش محسن‌زادگان ـ منصور تعلمی ـ محمود میرزائی .

حل مسألهٔ ۵۵۷ ـ x عددی است صحیح ومثبت اثبات اینکه اولا سه‌عبارت

$10x^2+5x$ و $8x^2+4x+1$ و $6x^2+7x+1$ میتوانند طولهای اضلاع مثلثی باشند . ثانیاً تعیین مساحت این مثلث برحسب x .

برای اینکه سه‌مقدار a و b و c طولهای اضلاع مثلثی باشند لازم وکافیست که نامساوی مضاعف زیر برقرار باشد .

$$|a-b| < c < a+b$$

فرض کنیم :

$$a = 6x^2+7x+1 \quad b = 8x^2+4x+1 \quad c = 10x^2+5x$$

اولا باید داشته باشیم :

$$6x^2+7x+1+8x^2+4x+1 < 10x^2+5x$$

که پس از ساده‌کردن نتیجه خواهد شد .

$$4x^2+6x+2 > 0$$

وچون $x > 0$ است پس این نامساوی همواره برقراراست.

ثانیاً باید داشته باشیم .

$$6x^2+7x+1-(8x^2+4x+1) < 10x^2+5x$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$-2(6x^2+x) < 0$$

که چون $x > 0$ است این نامساوی نیز همواره برقرار میباشد . بنا براین سه عبارت فوق میتوانند طولهای اضلاع مثلثی باشند .

برای تعیین مساحت مثلث از فرمول

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

استفاده نموده نتیجه خواهد شد :

$$S = 2x(6x+1)(2x+1)(x+1)$$

پاسخهای صحیح رسیده از : محمدصادق پورشتم ریاضی دبیرستان فردوسی تبریز ـ محمدرضا قسیمی ـ بهروز رضوانی ـ حسین اسدپور .

حل مسألهٔ ۵۵۸ـ تعیین x ازرابطهٔ زیر

$$\log_{tgx} \sin x + \log_{\sin x} \cot gx + \log_{\cot g x} \cos x + \log_{\sin x} 2 = 0$$

بنا بفرمول تغییر مبنا در لگاریتم داریم

$$\log_{\cot gx} \cos x = \log_{tgx} \cos x \times \log_{\cot g x} tgx = -\log_{tgx} \cos x$$

زیرا $(\cot gx)^{-1} = tgx$

از طرف دیگر

$$\log_{tg\,x} \sin x - \log_{tg\,x} \cos x = \log_{tg\,x} \frac{\sin x}{\cos x} = \log_{tgx} tgx = 1$$

$$\log_{\sin x} \cot gx + \log_{\sin x} 2 = \log_{\sin x} 2\cot gx$$

و معادله مفروض بصورت زیر درمیاید

$$1 + \log_{\sin x} 2\cot gx = 0 \quad \text{یا} \quad \log_{\sin x} 2\cot gx = -1$$

نتیجه خواهد شد

$$(\sin x)^{-1} = 2\cot gx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{2\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

وچون مبنای لگاریتم مثبت اختیار میشود مقادیر K باید مثبت باشد .

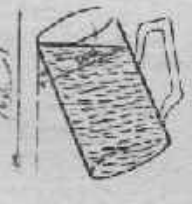
پاسخ‌های رسیده‌از : رضا عندلیب ششم ریاضی دبیرستان سعدی اصفهان ـ فرخ پورحسن پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران ـ احمدفربود ـ محمدرضا قیمی ـ نصرت‌الله حسنلو ـ منصور تعلمی ـ محمود میرزائی .

آقای کورش محسن زادگان ایرادگرفته است که چون $-1<\sin x<1$ است $\log_{\sin x} 2$ نمیتواند برابر با یك مقدار باشد.

حل مسألهٔ ۵۵۹ـ لیوانی دستدار را که مقطع آن دایره بقطر ۵ سانتیمتر بوده ارتفاعش ۱۵ سانتیمتر میباشد تا ارتفاع ۱۲ سانتیمتری از آب پر میکنیم . مطلوب تعیین بزرگترین زاویه‌ایست که میتوان لیوان را از حالت قائم خارج کرد تا آب نریزد .

حجم قسمت خالی لیوان برابر است با

$$\frac{25\pi}{4}\times(15-12)=\frac{75\pi}{4}\text{Cm}^3$$



بعدازکج کردن لیوان باندازهٔ زاویهٔ α (مطابق شکل) که سطح آب بر لبهٔ لیوان بگذرد حجم قسمت خالی برابر خواهد شد با نصف حجم استوانه‌ای که قطر قاعده‌اش ۵ سانتیمتر و ارتفاعش $5tg\alpha$ میباشد بنا براین

$$\frac{75\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{25\pi}{4}\times 5tg\alpha$$

و نتیجه خواهد شد $\alpha=\text{Arc}tg\frac{6}{5}$ یا $tg\alpha=\frac{6}{5}$

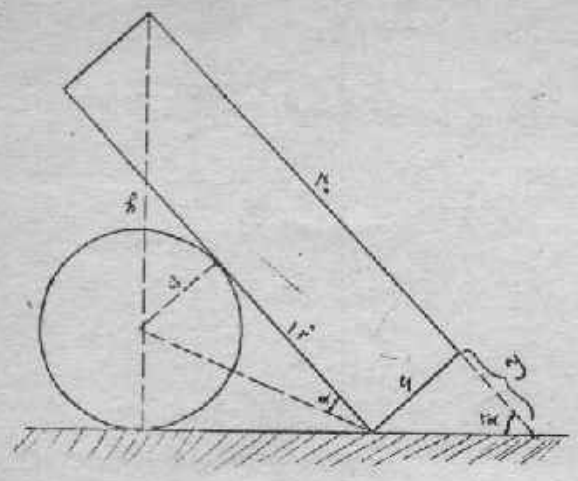
پاسخ‌های رسیده از : مسعود اصلانزاده گرمی دبیرستان مروی ـ محمد غفوریان پنجم ریاضی دبیرستان مرآت ـ احمد فربود ـ محمد رضا قیمی ـ فرامرز رهبر ـ حسین اسدپور ـ مسعود برائی ـ منصور تعلمی ـ بهروز مشگین‌قلم محمودمیرزائی ـ فرخ پورحسن .

حل مسألهٔ ۵۶۰ـ قطعه چوبی بشکل مکعب مستطیل بضخامت ۶ سانتیمتر و بدرازای ۳۰ سانتیمتر روی یك استوانه تکیه نموده و از یك‌طرف برزمین قرار دارد درصورتیکه قطر استوانه ۱۰ سانتیمتر وطول آن قسمت ازچوب که بین نقطهٔ تماس باستوانه و نقطهٔ تماس با سطح زمین واقع است برابر ۱۲ سانتیمتر باشد مطلوبست تعیین ارتفاع بلندترین نقطهٔ چوب .

مطابق شکل داریم :

$$tg\alpha=\frac{5}{12}$$

$$y=6\cot g\,2\alpha=6\times\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$



$$y=6\times\frac{119}{120}=\frac{119}{20}$$

$$h=(30+y)\sin 2\alpha$$

$$h=\frac{719}{20}\times\frac{120}{169}=\frac{4314}{169}\neq 25/5\,\text{Cm}$$

پاسخ‌های صحیح رسیده از : محمد رضا قیمی ـ فرامرز رهبر ـ محسن زادگان ـ مسعود اصلانزاده ـ منصور تعلمی ـ محمود میرزائی .

حل مسألهٔ ۵۶۱ـ حل دستگاه زیر .

$$\begin{cases}3^x\times 4^y=39813312\\ 2^y\times 5^x=400000\end{cases}$$

$39813312=2^{14}\times 3^5$ و $400000=2^6\times 5^5$

و دستگاه بصورت زیر نوشته میشود

$$\begin{cases}3^x\times 2^{2y}=2^{14}\times 3^5\\ 2^y\times 5^x=2^7\times 5^5\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}2^{2y}-14=3^{5-x}\\ 2^{y-7}=5^{5-x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2^{2y}-14=3^{5-x}\\ 2^{2y-14}=2^{5(5-x)}\end{cases}$$

و نتیجه میشود

$$3^{5-x}=2^{5(5-x)}$$

و این تساوی وقتی برقرار خواهد بود که

$x=0$ یا $x=5-0$ باشد و از روی آن $y=7$ بدست میآید .

پاسخ‌های صحیح رسیده از : احمد سالك زمانخانی ششم ریاضی دبیرستان نظام ـ احمد فربود ـ احمد دیانت خواه ـ محمد رضا قیمی ـ عنایت‌الله وفائی ـ بهروز رضوانی ـ محمد غفوریان ـ حسین اسدپور ـ نصرت‌الله حسنلو نعمت‌الله فاطان ـ محمود میرزائی کورش محسن زادگان .

حل مسألهٔ ۵۶۲ـ حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=2 \\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\sqrt{xy}}=2^{y} \end{cases}$$

فرض میکنیم $\sqrt{\frac{x}{y}}=A$ در نتیجه معادلهٔ اول چنین نوشته میشود :

$$A+\frac{1}{A}=2 \Longrightarrow A=1$$ یا

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=1 \Longrightarrow x=y$$

و ازآنجا معادلهٔ دوم بصورت زیر نوشته میشود :

$$(\sqrt{y}+\sqrt{y})^{\sqrt{y^2}}=2^{y}$$

$$(2\sqrt{y})^{y}=2^{y} \quad y\neq 0 \Longrightarrow 2\sqrt{y}=2$$ و

$$y=1 \text{ و } x=1$$

طرح و حل ازداود حسینی

پاسخ‌های صحیح رسیده: آذر ادیبی ـ احمد فربود ـ محمد صادق پور ـ محمدرضا قسیمی ـ احمد سالك زمانخانی ـ بهروز رضوانی ـ نعمت‌الله قاطان ـ نصرت‌الله حسنلو ـ محمود میرزائی فرخ پورحسن ـ کورش محسن‌زادگان ـ مرتضی رودگری چهارم ریاضی دبیرستان طبری آمل.

حل مسألهٔ ۵۶۳ ـ تعیین مقدار x از معادلهٔ زیر

$$26\sin^2 x^2+12\cos 2x+5\sin 2x=13$$

معادله را بصورت زیر مینویسیم :

$$\frac{12}{13}\cos 2x+\frac{5}{13}\sin 2x=1-2\sin^2 x^2$$

فرض میکنیم :

$$\tan 2\alpha=\frac{5}{12}$$ نتیجه خواهدشد $\sin 2\alpha=\frac{5}{13}$ و $\cos 2\alpha=\frac{12}{13}$ و

خواهیم داشت :

$$\cos 2\alpha\cos 2x+\sin 2\alpha\sin 2x=\cos 2x^2$$

$$\cos(2x-2\alpha)=\cos 2x^2 \Longrightarrow 2x^2=(2x-2\alpha)=2k\pi$$

$$x^2+x-\alpha-k\pi=0$$ و

$$x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4\alpha+4k\pi})$$

$$x^2-x+\alpha-k\pi=0$$

$$x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4\alpha+4k\pi})$$

مسألهٔ ۵۶۴ ـ بفرض $A+B+C=\pi$ و $f(x)=x^2+x-1$ و

$$x=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{4\sin A\sin B\sin C}$$

ثابت شود که اولا $f[f(x)]=1$ و ثانیاً

$$f(f(f\dots f(x)))=1$$

با استفاده از تبدیلات مثلثاتی نتیجه خواهدشد که درهر مثلث داریم :

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

در نتیجه $x=1$ بوده و ازآنجا خواهیم داشت :

$$f(x)=1+1-1=1$$

$$f[f(x)]=1+1-1=1$$

و بالاخره $f(f(f\dots f(x)))=1$

پاسخ‌های رسیده از : مرتضی رودگری ـ احمد فربود

حل مسألهٔ ۵۶۵ ـ اگر $\cos 2\beta=2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ باشد ثابت شود $\sin\beta>\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ ، رابطهٔ داده‌شده بصورت $1-2\sin^2\beta=2(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)^2$ نوشته میشود

$$1-2\sin^2\beta=1-2\sin\alpha\cos\alpha \Longrightarrow \sin\beta=\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}$$

و چون واسطهٔ حسابی دومقدار از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتر است داریم :

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}>\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}$$ یا $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}>\sin\beta$$

پاسخ صحیح رسیده : از احمد فربود .

حل مسألهٔ ۵۶۶ـ محاسبهٔ مجموع زیر

$$S^n=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$$

مجموع $\sigma_n=x+x^2+x^3+\dots+x^n$

را درنظر می‌گیریم که مشتق‌آن S_n بوده وعبارتست از مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی‌و حاصل آن‌عبارتست از :

$$\sigma_n=\frac{x(x^n-1)}{x-1}$$ وچنانچه از σ_n مشتق بگیریم S_m بدست‌میآید.

$$S_m \quad \frac{nx^n(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

پاسخ‌های صحیح رسیده از : آذرادیبی ـ مهردادمشهوری ـ ایرج همت ـ احمد فربود ـ محمد صادق پور ـ نصرت‌الله حسنلو ـ محمود میرزائی .

حل مسألهٔ ۵۶۷ ـ تعیین‌عددی دورقمی که چون یك‌دفعه خودآن عدد ودفعهٔ دیگرمقلوبش را برمجموع ارقام آن تقسیم

کنیم اولا حاصلضرب این‌دو خارج‌قسمت برابر با عدد دورقمی مطلوب گردد . ثانیاً تفاضل دو خارج‌قسمت برابر تفاضل ارقام عدد مطلوب گردد .

$$\overline{du}=\frac{\overline{du}}{d+u}\times\frac{\overline{ud}}{d+u} \qquad (۱)$$

$$\frac{\overline{du}}{d+u}-\frac{\overline{ud}}{d+u}\quad n-d \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه میشود که

$$\frac{\overline{ud}}{(d+u)^{۲}}=۱\Longrightarrow\overline{ud}=(d+u)^{۲}$$

ولازم‌میشود که $\overline{ud}$ مربع کامل باشد واز رابطهٔ (۲) بدست میآید که $d+u=۹$ واز بین اعداد دورقمی محذور کامل ۳۶ و ۸۱ میباشد که مجموع ارقامشان ۹ است اما ۳۶ درمسأله صادق نیست و عدد مطلوب ۱۸ میباشد .

پاسخ‌های صحیح رسیده از: محمود میرزائی ـ کورش محسن‌زادگان

حل مسألهٔ ۵۶۸ـ α و β و γ و δ چهار مقدار متمایز از x میباشد که دررابطهٔ $\cos^{۴}x=A\cos۴x+B\cos۲x+C$ صدق میکنند ثابت شود که $\alpha+\beta+\gamma+\delta=k\pi$. رابطهٔ داده شده را برحسب tgx مینویسیم نتیجه خواهدشد :

$$(A-B+C)tg^{۴}x-$$
$$-۲(۳A-C)tg^{۲}x+A+B+C-۱=۰$$

چون α و β و γ و δ ریشه‌های این معادله هستند بنابر رابطهٔ بین ضرائب وریشه‌ها خواهیم داشت :

$$\begin{cases} tg\alpha+tg\beta+tg\gamma+tg\delta=۰ \\ tg\alpha tg\beta tg\gamma+tg\alpha tg\gamma tg\delta+tg\alpha tg\beta tg\delta+ \\ +tg\beta tg\gamma tg\delta=۰ \end{cases}$$

پس از مساوی قراردادن دوعبارت فوق و انجام عملیات لازم نتیجه خواهدشد .

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha tg\beta}=-\frac{tg\gamma+tg\delta}{۱-tg\gamma tg\delta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=-tg(\gamma+\delta)\Longrightarrow\alpha+\beta+\gamma+\delta=k\pi$$

حل مسألهٔ ۵۵۹ـ بفرض اینکه :

$$\frac{\sin x}{A_{۰}}=\frac{\sin(x+h)}{A_{۱}}=\frac{\sin(x+nh)}{A_{۲}}=\ldots=$$
$$\frac{\sin(x+nh)}{A_{n}}$$

ثابت شود :

$$۱)\ \frac{A_{n+۱}+A_{n+۵}}{A_{n}+A_{n+۴}}=\frac{A_{n}+A_{n+۲}}{A_{n-۱}+A_{n+۵}}$$

$$۲)\ \frac{A_{n+۲}}{A_{n+۱}}=\frac{A_{n-۱}+A_{n+۲}+A_{n+۳}}{A_{n}+A_{n+۱}+A_{n+۲}}$$

بنا برفرض داریم :

$$\frac{A_{n+۱}+A_{n+۵}}{A_{n}+A_{n+۴}}=$$
$$=\frac{\sin[x+(n+۱)h]+\sin[x+(n+۵)h]}{\sin[x+nh]+\sin[x+(n+۴)h)}=$$
$$=\frac{۲\sin[x+(n+۳)h]\cos۲h}{۲\sin[x+(n+۲)h]\cos۲h}=\frac{\sin[x+(n+۳)h]}{\sin[x+(n+۲)h]}$$

و بهمین ترتیب خواهیم داشت .

$$\frac{A_{n}+A_{n+۲}}{A_{n-۱}+A_{n+۱}}=\frac{\sin[x+(n+۳)h]}{\sin[x+(n+۲)h]}$$

از مقایسهٔ این رابطه و رابطهٔ قبلی اولین رابطهٔ مطلوب بدست خواهد آمد . وباانجام عملیاتی نظیر عملیات فوق رابطهٔ دیگر بدست خواهد آمد .

حل مسألهٔ ۵۷۰ـ بفرض $f(x,y)=\frac{\cos x+\cos y}{۱+\cos x\cos y}$ و $\varphi(x,y)=\sqrt{\frac{۱-f(x,y)}{۱+f(x,y)}}$ و α و β و γ زوایای مثلثی باشند ثابت شود :

۱) $\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\beta,\gamma)+\varphi(\gamma,\alpha)=۱$

۲) $\varphi(\alpha,\beta)\varphi(\alpha,\gamma)\varphi(\gamma,\alpha)=\varphi(\alpha,\alpha)\varphi(\beta,\beta)\varphi(\gamma,\gamma)$

خواهیم داشت .

$$\frac{۱-f(x,y)}{۱+f(x,y)}=\frac{۱+\cos x\cos y-\cos x-\cos y}{۱+\cos x\cos y+\cos x+\cos y}=$$
$$=\frac{(۱-\cos x)(۱-\cos y)}{(۱+\cos x)(۱+\cos y)}=tg^{۲}\frac{x}{۲}tg^{۲}\frac{y}{۲}$$

بنابراین

$$\varphi(x,y)=\sqrt{tg^{۲}\frac{x}{۲}tg^{۲}\frac{y}{۲}}\quad\left|tg\frac{x}{۲}tg\frac{y}{۲}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha,\beta)&=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\\ \varphi(\alpha,\gamma)&=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}\\ \varphi(\gamma,\beta)&=tg\frac{\gamma}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\end{aligned}\right\}\qquad(۱)$$

$$\frac{\alpha}{۲}+\frac{\beta}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\gamma}{۲}\ \text{و}\ \frac{tg\frac{\alpha}{۲}+tg\frac{\beta}{۲}}{۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}}=\cot g\frac{\gamma}{۲}$$

و از این رابطه نتیجه خواهد شد :

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=1$$

$$\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\beta,\gamma)+\varphi(\gamma,\alpha)=1$$

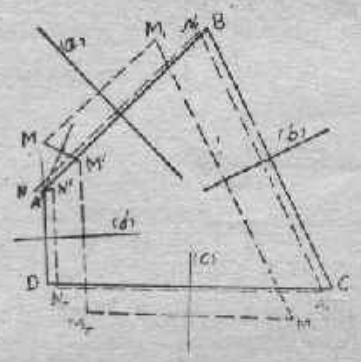
ثانیاً از ضرب عضو بعضو روابط (۱) و باتوجه باینکه

$$\varphi(\alpha,\alpha)=tg^2\frac{\alpha}{2} \quad \varphi(\beta,\beta)\quad tg^2\frac{\beta}{2} \text{ و } \varphi(\gamma,\gamma)=tg^2\frac{\gamma}{2}$$

رابطهٔ دیگر مطلوب بدست خواهد آمد

طرح وحل ازسیروس فخرباسری ـ پاسخ صحیح رسیده از محمود میرزائی .

حل مسأله ۵۷۱ ـ رسم چهارضلعی که چهارخط مفروض a و b و c و d عمود منصفهای اضلاع آن باشند. نقطه‌ای مانند M اختیار نموده قرینهٔ آنرا نسبت به خط a بدست میآوریم M_1 مینامیم. قرینهٔ M_1 را نسبت به b بدست میآوریم M_2 مینامیم و بهمین ترتیب M_3 قرینهٔ M_2 را نسبت به c و M_4 را نسبت به d بدست میآوریم رأس چهار ضلعی مثلا رأس A برعمود منصف MM' واقع است .



نقطهٔ دیگری مانند N اختیار نموده بترتیب فوق قرینه‌های N_1 و N_2 و N_3 و N' را بدست میآوریم رأس A برعمود منصف NN' واقع است یعنی نقطهٔ تلاقی عمودمنصفهای MM' و NN' رأس A میباشد و با معلوم بودن یك رأس رأسهای دیگر بدست خواهند آمد .

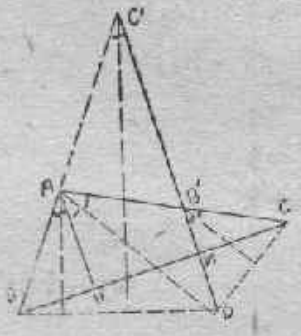
حل مسأله ۵۷۲ ـ در مثلث غیرمشخص ABC بردوی قاعدهٔ BC نقطه‌ای چنان تعیین شود که اگر از آن نقطه عمودی بر BC اخراج شود تا اضلاع AB و AC را در C' و B' قطع کند داشته باشیم

$$B'C'=(BC'-CB')$$

مسأله را حل شده فرض نموده $B'C'$ را باندازهٔ $B'C$ و از جهت B' امتداد میدهیم تا D بدست آید $B'D=B'C$ داریم

$$B'C'+CB'=BC'$$ یا

$$B'C'=BC'-CB'$$



بنابراین $C'D=C'B$ بوده مثلثهای $B'CD$ و $C'BD$ متساوی‌الساقین میباشند و نیمسازهای زاویه‌های B' و C' بر CD و BD عمودند . ارتفاع AH از مثلث ABC رادسم میکنیم نیمسازهای زاویه‌های HAC و HAB بترتیب با نیمسازهای زاویه‌های B' و C' متوازیند وبر CD و BD عمود میباشند بنابراین برای حل مسأله کافی است که از B و C عمودهائی بر نیمسازهای زاویه‌های HAC و HAB رسم کنیم و از نقطهٔ تلاقی آنها عمودی بر BC رسم نمائیم تا نقطه M نقطه مطلوب بدست آید.

حل مسألهٔ ۵۷۳ ـ بفرض $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ اثبات :

$$\log(x-y)\quad \frac{1}{2}[\log(x+y)-\log(x+y-4z)]$$

از رابطه مفروض نتیجه میشود .

$$x+y=\frac{xy}{z} \text{ یا } (x+y)z=2y$$

$$4z(x+y)=4xy$$

و با توجه به اتحاد $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ خواهیم داشت

$$4z(x+y)=(x+y)^2-(x-y)^2$$

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4z(x+y)=$$

$$=(x+y)(x+y-4z)$$

حال چنانچه از طرفین لگاریتم بگیریم رابطه مطلوب بدست میآید .

پاسخهای صحیح رسیده از : نصرت‌الله حسنلو . مجید خرمی . حسین اسدپور . مرتضی رودگری . علی خاکی صدیق اسمعیل باقری .

حل مسألهٔ ۵۷۴ ـ محاسبه حد مجموع زیر وقتی که $n\to\infty$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\dots+\frac{n}{3^n}$$

مجموع رشته را به S نمایش داده چنین مینویسیم :

$$S=\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots+n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

چنانچه $x=\frac{1}{3}$ فرض شود رشته مذکور در مسأله ۵۶۶ بدست آمده و بنابرآنچه در حل مسأله مذکور عمل شد داریم

$$S=a\left[\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}\right]$$

وقتی‌که $n\to\infty$ چون $|a|<1$ است حد a^n صفر بوده و حد S برابر خواهد شد با $S=\frac{a}{(a-1)^2}$ و مقدار S در ازاء $a=\frac{1}{3}$ برابر است با $S=\frac{3}{4}$

پاسخ‌های صحیح رسیده از : نصرت‌الله حسنلو . حسین اسدپور

حل مسألهٔ ۵۷۵ ـ محاسبه حد مجموع زیر

$$\frac{4}{7}-\frac{5}{49}+\frac{4}{343}-\frac{5}{2401}+\cdots$$

رشته را بصورت زیر مینویسیم

$$\left(\frac{4}{7}+\frac{4}{7^3}+\cdots\right)-\left(\frac{5}{7^2}+\frac{5}{7^4}+\cdots\right)$$

رشته پرانتز اول تصاعد هندسی نزولی است باجمله اول $\frac{4}{7}$ و قدر نسبت $\frac{1}{7^2}$ و رشته پرانتز دوم نیز تصاعد هندسی نزولی است با جملهٔ اول $\frac{5}{7^2}$ و قدرت نسبت $\frac{1}{7^2}$ میباشد و طبق فرمولهای مربوطه حد رشته مفروض برابر با $\frac{23}{48}$ بدست‌میآید .

پاسخ‌های صحیح رسیده از : نصرت‌الله حسنلو . ایرج همت . حسین اسدپور . کورش محسن‌زادگان . منصور تعلمی

حل مسألهٔ ۵۷۶ ـ تعیین مقادیر λ برای اینکه تابع $y=\frac{x-\lambda}{x^2-4x+3}$ در ازاء جمیع مقادیر حقیقی x دارای مقدار حقیقی باشد .

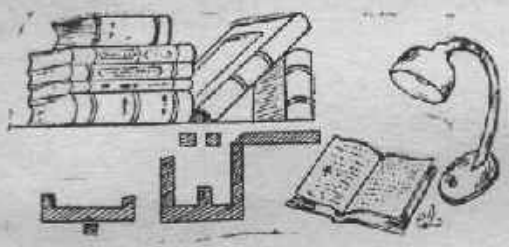
تابع بصورت $y=\frac{x-8}{(x-3)(x-1)}$ نوشته میشود .

۱) اگر $\lambda\neq 1$و۳ باشد تابع در ازاء $x=1$و۳ نامعین بوده و در ازاء بقیه مقادیر x معین میباشد .

یعنی در ازاء هر مقدار از x بجز ۱ و ۳ برای y یك مقدار حقیقی بدست میآید .

۲) اگر $\lambda=3$ باشد تابع بصورت $y=\frac{1}{x-1}$ نوشته شده‌که در ازاء $x=1$ نامعین و در ازاء بقیه مقادیر x معین است .

۳) اگر $\lambda=1$ باشد تابع بصورت $y=\frac{1}{x-3}$ نوشته



کتابهای درسی

نظر آزمائی راهنمای کتاب وجواب نویسندگان وداتمندان

مجلهٔ راهنمای کتاب موضوع کتابهای درسی ومشکلات مربوطه را بنظر آزمائی گذاشته وجوابهای رسیده را در یکمجموعه بعنوان فوق منتشر ساخته است . دراین رساله مقالات آقایان زیر بترتیب درج شده است : **دکتر عیسی صدیق ـ احمد بیرشك ـ علاء گیالی نائینی ـ عبدالرحیم جعفری جواد اقبال جلال آل احمد ـ جهانگیر شمس آوری ـ علی‌اکبر سعیدی سیرجانی ـ عبدالمحمد آیتی ـ دکتر احمدعلی رجائی ـ حسین محبوبی اردکانی ـ دکتر محمد مشایخی ـ داریوش همایون ـ احمد احمدی ـ حسین معرفت ـ محمدعلی جمالزاده ـ جعفر شعار ـ غلامحسین یوسفی .**

***

انتقاد کتاب

تهیه‌ونشر کتاب ازشرایط لازم تمدن‌است و انتقادومعرفی صحیح کتاب کفایت این شرط را ایجاب میکند . **شرکت سهامی انتشارات نیل** بموازات نشر کتابهای مفید جزوه عائی ماهانه در انتقاد ومعرفی کتب منتشره دردسترس علاقمندان میگذارد .

مطالعهٔ این جزوه‌ها ، فرصت مناسبی است برای اشخاصی که خواهان اطلاعاتی راجع به کتب منتشره میباشند .

شده در ازاء $x=3$ نامعین ودرازاء بقیه مقادیر x معین‌است .

بنابراین هیچگاه نمیتوان λ را چنان تعیین نمود که‌تابع همواره معین باشد .

حل مسألهٔ ۵۷۷ ـ تفاضل مربعات دو متغیر x و y مقداری است ثابت مطلوبست تعیین می‌نیم $|ax-by|$ (بدون استفاده از مشتق) درصورتیکه a و b مقادیر ثابت و مثبت‌باشند

داریم $x^2-y^2=c$ $(x+y)(x-y)$ c

و چون a و b دو مقدار ثابت و مثبت هستند طرفین رابطه بالا را در $(a+b)(a-b)$ a^2-b^2 ضرب مینمائیم .

$$(x+y)(x-y)(a+b)(a-b)=k$$
$$[(x+y)(a-b)][(x-y)(a+b)]=k$$
$$[(ax-by)+(ay-bx)][(ax-by)-$$
$$-(ay-bx)]=k$$
$$(ax-by)^2-(ay-bx)^2=k$$
$$(ax-by)^2=(ay-by)^2+k$$

مقدار طرف اول تساوی وقتی می‌نیم است‌که $(ay-bx)^2$ می‌نیم یعنی برابر با صفر باشد .

$$ay-bx=0 \longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

راهنمای ریاضیات متوسطه

(قابل استفادهٔ داوطلبان ورود بدانشگاه و دانش آموزان)

(مطالبی از ریاضیات که یا جزو برنامهٔ متوسطه نیست و یا اینکه در بعضی کتابهای درسی از آن صحبت نشده است و در حل مسائل بکار میآید بطور خلاصه یادآوری میشود)

I – تحویل رادیکال مرکب

لم – اگر a و b و a' و b' مقادیر منطق بوده وبعلاوه هیچیك ازدو مقدار b و b' مجذورکامل نباشد تساوی

$$a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$$

وقتی برقرار خواهد بودکه $a=a'$ و $b=b'$ باشد و تساوی

$$a+\sqrt{b}=a'-\sqrt{b'}$$

غیر ممکن است .

تحویل رادیکال مرکب ـ مقصوداز تحویل (یاتجزیهٔ) رادیکال مرکبی مانند $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ که در آن A و B مقادیر منطق بوده و B مجذورکامل نیست تبدیل آنست بمجموع دو رادیکال ساده. فرض میکنیم .

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

خواهیم داشت

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$$

که این تساوی وقتی برقرار خواهد بود که

$$\begin{cases} A=x+y \\ B=4xy \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y=A \\ xy=\dfrac{B}{4} \end{cases}$$

باشدومیدانیم که y و x (که مجموع وحاصلضرب آنهامعلوم است) عبارت خواهندبود از ریشه‌های معادلهٔ زیر

$$Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$$

و ازحل این معادله خواهیم داشت .

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{و} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

و ازآنجا دستورکلی زیر بدستمیآید .

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

و بهمین ترتیب

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

درصورتی رادیکال‌های طرف دوم دستورهای بالا ساده هستندکه A^2-B مجذورکامل باشد وبعلاوه چون y و x هردو مثبت هستند لذا A نیز باید مثبت باشد .

چند مثال :

۱۱۸۴ـ تجزیهٔ رادیکال مرکب $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ، داریم

$A=2$ و $B=3$ و $A^2-B=1$ پس

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۸۵ـ مطلوبست محاسبهٔ

$$S=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$(A=5 \text{ و } B=24)$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$S=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

۱۱۸۶ـ مطلوبست تعیین حاصل عبارت‌زیر .

$$S=(7-4\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}+$$

$$+(7+4\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۷+\sqrt{۴۸}}=۲+\sqrt{۳}$

$۷+۴\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^۲$

$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$ و $۷-۴\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^۲$

$S=(۲-\sqrt{۳})^۲(۲+\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})^۲(۲-\sqrt{۳})$

$S=(۲-\sqrt{۳})(۴-۳)+(۲+\sqrt{۳})(۴-۳)$

$S=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۴$

۱۱۸۷ـ کسر زیر را ساده نمائید .

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۳۷+۲۰\sqrt{۳}}}$$

$\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۱$ و

$\sqrt{۳۷+۲۰\sqrt{۳}}=۵+۲\sqrt{۳}$

وکسر مفروض بصورت زیر نوشته شده ساده میگردد .

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱-۵-۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{-۶-\sqrt{۳}}=$$

$$-\frac{\sqrt{۳}(-۶+\sqrt{۳})}{۳۶-۳}=\frac{۳-۶\sqrt{۳}}{۳۳}=\frac{۱-۲\sqrt{۳}}{۱۱}$$

۱۱۸۸ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید (حل المسائل رضا مهندس)

$$S=\sqrt{\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}}-\sqrt{\frac{۲+۲\sqrt{۲}}{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}}$$

$\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}-۱$

$\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}=۳+۲\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۷-۱۲\sqrt{۲}}=۳-۲\sqrt{۲}$

$۳+۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}+۱)^۲$ و $۳-۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}-۱)^۲$

$$S=\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}-۱)^۲}-\frac{\sqrt{۲}+۱}{(\sqrt{۲}+۱)^۲}$$

$$S=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}+۱-(\sqrt{۲}-۱)=۲$$

II ـ ریشهٔ مضاعف معادلات

اگر α یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد در این صورت $f(\alpha)=۰$ بوده و درنتیجه $f(x)$ بر $x-\alpha$ بخش پذیر است و خواهیم داشت .

$$f(x)=(x-\alpha)g(x) \qquad (۱)$$

۱۱۸۹ـ مثال ـ اگر $x=۲$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶=۰$ باشد ریشه‌های دیگر آن را بدست آورید .

از تقسیم عبارت معادله بر $x-۲$ نتیجه میشود .

$x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶=(x-۲)(x^۲-۴x+۳)=۰$

و از معادلهٔ $x^۲-۴x+۳=۰$ ریشه‌های دیگر معادله $x=۱$ و $x=۳$ بدست میآید .

چنانچه معادلهٔ فوق‌الذکر $f(x)=۰$ علاوه بر α ریشهٔ دیگری مانند $x=\beta$ متمایز از α داشته باشد بنابر رابطهٔ (۱) $x=\beta$ ریشهٔ $g(x)=۰$ بوده و $g(x)$ بر $x-\beta$ بخش‌پذیر است و رابطهٔ (۱) بدرابطهٔ زیر تبدیل میشود .

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)h(x) \qquad (۲)$$

۱۱۹۰ـ مثال. میدانیم که $x=-۱$ و $x=۲$ دو ریشهٔ معادله $۳x^۴-۷x^۳-x^۲+۷x-۲=۰$ میباشد ، معادله را حل کنید . عبارت معادله را بر $x+۱$ وخارج‌قسمت حاصل‌را بر $x-۲$ تقسیم مینمائیم (یا اینکه‌عبارت را بر $(x+۱)(x-۲)=x^۲-x-۲$ تقسیم میکنیم) نتیجه میشود .

$$۳x^۴-۷x^۳-x^۲+۷x-۲=(x+۱)(x-۲)\times$$
$$\times(۳x^۲-۴x+۱)=۰$$

و از معادلهٔ $۳x^۲-۴x+۱=۰$ ریشه‌های $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=۱$ بدست میآید .

درصورتیکه ریشه‌های α و β از معادلهٔ $f(x)=۰$ با یکدیگر مساوی باشند میگوئیم $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$ بوده ودراین حالت رابطهٔ (۲) بصورت زیر نوشته میشود .

$$f(x)=(x-\alpha)^۲h(x) \qquad (۳)$$

(فرض میکنیم $h(\alpha)\neq۰$)

برعکس ، از رابطهٔ (۳) معلوم خواهد شد که $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$ میباشد پس :

اگر معادله‌ای (یا یک‌چند جمله‌ای) به‌حاصل‌ـ ضرب عوامل تجزیه شده و در تجزیهٔ‌آن توان دوم یکی از عوامل وجود داشته باشد ، ریشهٔ آن عامل ریشهٔ مضاعف معادله (یا چندجمله‌ای) خواهد بود .

تبصره ـ بطور کلی اگر داشته باشیم $f(x)=(x-\alpha)^n g(x)$ و $g(\alpha)\neq۰$ باشد $x=\alpha$ را ریشهٔ مکرر مرتبهٔ n معادلهٔ $f(x)=۰$ مینامند .

۱۱۹۱ـ مثال ـ میدانیم که $x=۲$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^۴-۴x^۳+۶x^۲-۸x+۸=۰$ میباشد ریشه‌های دیگر معادله را تعیین کنید .

عبارت معادله بر $(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$ بـ

بخش‌پذیر است و داریم

$x^4-4x^3+6x^2-8x+8=(x-2)^2(x^2+2)=0$

وچون $x^2+2=0$ دارای ریشهٔ حقیقی نیست معادلهٔ داده‌شده فقط همان ریشهٔ مضاعف۲ را دارد

۱۱۹۲ـ تحقیق کنید که $x=1$ ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم معادلهٔ $x^5-3x^4+x^3+5x^2-6x+2=0$ بوده و معادله را حل نمائید . از تقسیم عبارت معادله بر

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

نتیجه خواهد شد

$x^5-3x^4+x^3+5x^2-6x+2=(x-1)^3(x^2-2)$

و از معادلهٔ $x^2-2=0$ دوریشهٔ $x=\pm\sqrt{2}$ علاوه برریشهٔ مکرر مرتبه سوم یك برای معادله بدست میآید

۱۱۹۳ـ مقدار m را چنان معلوم کنید که معادلهٔ زیر دارای ریشهٔ مضاعف باشد

$(x^2-1)(x^2+mx+4)=0$ (۱)

$x^2-1=0$ و $x=\pm1$ ریشه های معادله هستند،و سه حالت درنظرمیگیریم :

۱) $x=\pm1$ ریشه های سادهٔ معادلهٔ (۱) باشند در این صورت باید معادلهٔ $x^2+mx+4=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد :

$m=\pm4$ و $\Delta=m^2-16=0$

۲) $x=1$ ریشهٔ مضاعف‌معادلهٔ (۱) باشد وشرط آن این خواهد بود که $x=1$ ریشهٔ سادهٔ‌معادلهٔ $x^2+mx+4=0$ نیز باشد $1+m+4=0$ و $m=-5$

۳) $x=-1$ ریشهٔ‌مضاعف‌معادله (۱) باشد که $x=-1$ باید درمعادلهٔ $x^2+mx+4=0$ صدق نماید و در نتیجه $m=5$

نتیجهٔ کلی آن‌که معادلهٔ (۱) وقتی ریشهٔ مضاعف دارد که m برابربا یکی ازمقادیر ±4 یا ±5 باشد .

شرط لازم وکافی برای‌این‌که $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف‌معادلهٔ $f(x)=0$ باشد آن است‌که $f(x)$ ومشتق آن $f'(x)$ هردو بازاء $x=\alpha$ صفرباشند یعنی

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases}$$

اولا اگر $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف معادله $f(x)=0$ باشد داریم $f(x)=(x-\alpha)^2g(x)$

وچون ازطرفین نسبت به x مشتق بگیریم

$f'(x)=2(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)^2g'(x)$

$f'(x)=(x-\alpha)[2g(x)+(x-\alpha)g'(x)]$

و نتیجه میشودکه $f'(\alpha)=0$ یعنی $x=\alpha$ ریشهٔ مشتق $f(x)$ نیزهست

ثانیاً ـ فرض میکنیم $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)=0$ از رابطهٔ $f(\alpha)=0$ نتیجه میشودکه

$f(x)=(x-\alpha)g(x)$ (۱)

از طرفین مشتق میگیریم

$f'(x)=g(x)+(x-\alpha)g'(x)$

وچون $f'(\alpha)=0$ است لازم میآیدکه $g(\alpha)=0$ باشد یعنی $g(x)=(x-\alpha)h(x)$ و رابطهٔ (۱) بصورت

$f(x)=(x-\alpha)^2h(x)$

نوشته شده ومیرساندکه $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف $f(x)=0$ میباشد

۱۱۹۴ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$x^4+5x^3+7x^2-4=0$ (۱)

اگر از طرفین مشتق بگیریم :

$4x^3+15x^2+14x=0$

$x(4x^2+15x+14)=0$

و برای این معادله‌ریشه‌های $x=0$ و $x=-2$ و $x=-\frac{7}{4}$

بدست میآیدکه ازاین ریشه‌ها ریشهٔ $x=-2$ در معادلهٔ (۱) نیزصدق میکند بنابراین $x=-2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) بوده از تقسیم عبارت معادله بر $(x+2)^2$ نتیجه خواهد شد :

$x^4+5x^3+7x^2-4=(x+2)^2(x^2+x-1)=0$

وبرای معادلهٔ مفروض ریشهٔ مضاعف $x=-2$ وریشه‌های سادهٔ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ بدست میآید

۱۱۹۵ـ ثابت‌کنیدکه منحنی‌های نمایش تغییرات‌دوتابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+a}$ و $y=\frac{x(x^2-1)}{a+1}$ بازاء جمیع مقادیر a درنقطهٔ ثابتی بریکدیگر مماسند

از حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+a} \\ \frac{x(x^2-1)}{a+1} \end{cases}$$

پس از حذف y واختصار نتیجه خواهد شد

$(x^2-1)(x^3+ax-a-1)=0$

از ریشه‌های $x=\pm1$ معادلهٔ $x^2-1=0$ ریشهٔ $x=1$ در عبارت داخل پرانتز دوم صدق میکند بنابراین :

$$(x^2-1)(x-1)(x^2+x+a-1)=0$$
$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+a+1)=0$$

این معادله دارای همهٔ مقادیر a دارای ریشهٔ مضاعف $x=1$ میباشد (چنانچه $a=-3$ باشد معادله ریشهٔ مکرر مرتبه‌سوم $x=1$ خواهد داشت) درنتیجه منحنی‌های توابع مفروض درازاء همهٔ مقادیر a در نقطهٔ ثابت بطول $x=1$ و بعرض $y=0$ بر یکدیگر مماسند وعلاوه بر آن در نقطهٔ $(0\ ,\ -1)$ نیز متقاطعند

۱۱۹۶ـ بازاء چه مقدار m منحنی‌های نمایش دو تابع

$$y=mx^2-1 \quad \text{و} \quad y=\frac{x-1}{x+1}$$ بریکدیگر مماسند

از حل دو معادله بایکدیگر بعد ازحذف y واختصار حاصل خواهد شد .

$$x(mx^2+mx-2)=0$$

$x=0$ ریشهٔ سه جمله‌ای داخل پرانتز نمیتواند باشد بنابراین معادله فقط وقتی ریشهٔ مضاعف دارد که مبین سه جمله‌ای داخل پرانتز برابر با صفر باشد

$$\Delta=m^2+8m=m(m+8)=0$$

جواب قابل قبول $m=-8$ خواهد بود

۱۱۹۷ـ از مبداء مختصات چند خط میتوان برمنحنی نمایش تابع $y=x^3-x^2+x$ مماس کرد . معادلهٔ خط مارپر مبداء عبارتست از $y=mx$ واین خط وقتی بر منحنی مفروض مماس خواهد بود که معادلهٔ $x^3-x^2+x=mx$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد

$$x(x^2-x+1-m)=0$$

یا $x=0$ ریشهٔ مضاعف معادله است که نظیر آن $m=1$ است و یا عبارت داخل پرانتز ریشه مضاعف دارد

$$\Delta=1-4(1-m)=0 \quad \text{و} \quad m=\frac{3}{4}$$

بنابراین ازمبداء مختصات دو خط با معادلات

$y=x$ و $y=\frac{3}{4}x$ میتوان برمنحنی مماس رسم کرد

III ـ ریشهٔ مشترک دو معادلهٔ درجهٔ دوم

دو معادلهٔ درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{و} \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

را درنظر میگیریم اولا برای اینکه دو معادلهٔ فوق درهردو ریشه مشترک باشند لازم وکافی است که :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

ثانیاً برای اینکه دو معادله فقط دریک ریشه مشترک باشند

فرض میکنیم ریشهٔ مشترک α باشد دراین صورت خواهیم داشت

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 \\ b'\alpha^2+b'\alpha+c'=0 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $\beta=\alpha^2$

$$\begin{cases} a\beta+b\alpha+c=0 \\ a'\beta+b'\alpha+c'=0 \end{cases}$$

این دستگاه را نسبت به مجهول های α و β حل مینمائیم

$$\alpha=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad \beta=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}$$

وچون $\beta=\alpha^2$ اختیار شده است

$$\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}=\frac{(ca'-ac')^2}{(ab'-a'b)^2}$$

که پس از اختصار نتیجه خواهد شد

$$(ac'-ca')^2=(ab'-ba')(bc'-cb')$$

که با شرط فوق دو معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض دارای ریشه مشترک

$$x=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}$$ میباشند

از جمله موارد استعمال

۱۱۹۸ـ مطلوبست حل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر

$$\begin{cases} x^2-2y^2+2xy+3x+3y+2=0 \\ 3x^2-y^2+3xy+9x-3y+6=0 \end{cases}$$

هریك از معادلات را نسبت به x مرتب مینمائیم

$$\begin{cases} x^2+(2y+3)x-2y^2+3y+2=0 \\ 3x^2+(3y+9)x-y^2-3y+6=0 \end{cases}$$

مقدار y را چنان باید تعیین کرد که دو معادلهٔ درجهٔ دوم فوق (نسبت به x) دارای ریشهٔ مشترک باشند

$$(ac'-ca')^2=(-y^2-3y+6+6y^2-9y-6)^2=$$
$$(5y^2-12y)^2 \quad 25y^4-120y^3+144y^2$$
$$(ab'-ba')(bc'-cb')=(3y+9-6y-9)\times$$
$$\times(-2y^2-6y^2+12y-3y^2-9y+18+6y^2-$$
$$-9y^2-6y+18y^2-27y-18)=$$
$$=-3y(4y^2-30y)$$
$$25y^4-120y^3+144y^2=-12y^4+90y$$
$$y^2(37y^2-120y+54)=0$$

و از این معادله جوابهای $y=0$ و برای $y=\frac{60\pm 3\sqrt{178}}{37}$

y بدست آمده ازروی آن مقادیر نظیر x حساب میشود

(میتوان دومعادله را نسبت به y مرتب نمود و مقدار x را تعیین کرد تا دو معادله نسبت به y ریشهٔ مشترک داشته باشند)

IV تغییر پایه (مبنی) در لگاریتم

هر گاه داشته باشیم $a^x=N$ (۱) مقدار x را لگاریتم مقدار N در پایهٔ a گفته و چنین مینویسند .

$$\log_a N=x \qquad (۲)$$

مقدار N را آنتی لگاریتم x در پایهٔ a میگویند و مینویسند .

$$N=\text{ant}\log_a x \qquad (۳)$$

سه رابطهٔ (۱) و (۲) و (۳) بایکدیگر معادلند یعنی هر یك از آنها یك معنی را میرساند .

پایهٔ a مثبت اختیار میشود واز این جهت :

۱) اعداد منفی وهمچنین عدد صفر دارای لگاریتم نیستند.

۲) لگاریتم عدد یك درهرپایه برابر است باصفر .

۳) در پایهٔ a لگاریتم a برابر است بایك .

٤) اگر داشته باشیم .

$\log_a N=x$ و $\log_a M=y$ و $y>x$

چنانچه $a>۱$ باشددراین‌صورت‌خواهیم داشت $M>N$

و چنانچه $a<۱$ باشد در این صورت نتیجه میشود $M<N$

٥) در یك پایهٔ a داریم :

$$\log A.B.C.\ldots=\log A+\log B+\log C+\ldots$$

$$\log A^m=m\log A$$

$$\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$$

$$\log\sqrt[m]{A}=\frac{۱}{m}\log A$$

٦) در یك پایه ، لگاریتم عکس یك عدد را کلگاریتم آن عدد میگویند و نتیجه میشود که در یك پایه ، کلگاریتم یك عدد قرینهٔ لگاریتم آن میباشد .

$$\text{colog}_a N=\log_a\frac{۱}{N}=-\log_a N$$

۷) فرض‌میکنیم $a^x=b$ خواهیم داشت $b^{\frac{۱}{x}}=x$ و نتیجه میشود .

$$\log_a b=x \quad\text{و}\quad \log_b a=\frac{۱}{x}$$

و چون $x.\frac{۱}{x}=۱$ بنابراین

$$\boxed{\log_b a.\log_a b=۱}$$

۸) فرض میکنیم $\log_a N=x$ داریم $a^x=N$ از طرفین این تساوی در پایهٔ b لگاریتم میگیریم .

$$\log_a N.\log_b a=\log_b N \quad\text{یا}\quad x\log_b a=\log_b N$$

$$\boxed{\log_b N=\log_a N.\log_b a=\frac{\log_a N}{\log_a b}}$$

۹) از تساوی $a^x=N$ که در آن $a>۰$ و $N>۰$ است نتیجه میشود $a^{nx}=N^n$ یا $(a^n)^x=N^n$ در نتیجه

$$\boxed{\log_a N=\log_{a^n} N^n}$$

۱۰) فرض میکنیم $\log_a N=x$ و $\log_a M=y$ داریم

$\log_b N=x\log_b a$ و $\log_b M=y\log_b a$

و نتیجه میشود .

$$\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M}$$

یعنی نسبت لگاریتمهای دو عدد در پایه‌های مختلف تغییر نمیکند .

تبصره ـ در حل مسائل مربوط به لگاریتم بهتر آن است که رابطهٔ لگاریتمی را بصورت توان نوشته و از خواص و اعمال مربوط به توانها استفاده نمود . مخصوصاً که رابطهٔ تغییر پایه جزو برنامه متوسطه نیست .

چند مثال :

۱۱۹۹ ـ در دستگاه به پایهٔ رده $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$ است مطلوبست تعیین $\log_۵ ۲$. فرض‌میکنیم $\log_۵ ۲=x$ خواهیم داشت $۵^x=۲$ از طرفین در پایهٔ ده لگاریتم میگیریم .

$$x\log ۵=\log ۲ \quad\text{یا}\quad x=\frac{\log ۲}{\log ۵}$$

$$\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-۰/۳۰۱۰۳=$$

$$=۰/۶۹۸۹۷$$

$$x=\log_۵ ۲=\frac{۰/۳۰۱۰۳}{۰/۶۹۸۹۷}=۰/۴۳۰۶۷$$

۱۳۰۰ ـ بفرض $\log ۲=\alpha$ و $\log ۳=\beta$ (دستگاه پایهٔ ده) لگاریتم $\sqrt[۵]{۱۱/۲۵}$ را در پایهٔ ۱۵ بدست آورید .

حل ـ

$$x=\log_{۱۵}\sqrt[۵]{۱۱/۲۵} \quad\text{و}\quad \sqrt[۵]{۱۱/۲۵}=۱۵^x$$

از طرفین درپایهٔ ده لگاریتم میگیریم

$$x\log ۱۵ = \frac{۱}{۵}\log ۱۱/۲۵ = \frac{۱}{۵}\log\frac{۱۱۲۵}{۱۰۰} =$$

$$= \frac{۱}{۵}(\log ۱۱۲۵ - ۲)$$

$$\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ = \log\frac{۱۰}{۲} + \log ۳ =$$

$$= \log ۱۰ - \log ۲ + \log ۲ = ۱ - \alpha + \beta$$

$$\log ۱۱۲۵ = \log(۵^۳ \times ۳^۲) = ۳\log ۵ + ۲\log ۳ =$$

$$= ۳(۱ - \log ۲) + ۲\log ۳ = ۲ - ۳\alpha + ۲\beta$$

ونتیجه خواهد شد

$$x = \frac{۱ - ۳\alpha + ۲\beta}{۵(۱ - \alpha + \beta)}$$

۱۳۰۱ـ مطلوبست حل معادلهٔ

$$a^{(b^x)} = b^{(a^x)} \qquad (ab \neq ۰)$$

حل ـ از طرفین تساوی لگاریتم میگیریم

$$b^x \log a = a^x \log b$$

مجدداً ازطرفین تساوی لگاریتم میگیریم

$$x\log b + \log(\log a) = x\log a + \log(\log b)$$

$$x(\log a - \log b) = \log(\log a) - \log(\log b)$$

اگر $a=b$ یا $\log a = \log b$ باشد معادله مبهم است . فرض میکنیم $a \neq b$ در این صورت

$$x = \frac{\log(\log a) - \log(\log b)}{\log a - \log b} = \frac{\log\left(\frac{\log a}{\log b}\right)}{\log\frac{a}{b}}$$

۱۳۰۲ـ مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} \qquad (a \neq ۰ \text{ و } ۱)$$

حل ـ درمعادلهٔ اول بجای y مقدار آنرا ازمعادلهٔ دوم قرار میدهیم

$$x^{ax} = (ax)^x$$

از طرفین تساوی عضو به عضو لگاریتم میگیریم

$$ax\log x = x(\log a + \log x)$$

طرفین رابطه را بر x تقسیم میکنیم $(x \neq ۰)$

$$a\log x = \log a + \log x \quad \text{یا} \quad (a-۱)\log x = \log a$$

$$\log x^{a-۱} = \log a \text{ و } x^{a-۱} = a \text{ و } \boxed{x = a^{\frac{۱}{a-۱}}}$$

$$y = ax \text{ و } y = a \cdot a^{\frac{۱}{a-۱}} = a^{۱+\frac{۱}{a-۱}} \boxed{y = a^{\frac{a}{a-۱}}}$$

(تصاعد حسابی مرکب)

میدانیم که دریك تصاعدحسابی هر جمله مساوی است باجملهٔ قبلی باضافهٔ مقدار ثابت r که باین‌صورت است :

$$a \quad a+r \quad a+۲r \quad a+۳r \quad a+۴r \quad \cdots$$

حال اگر یك سلسله جمل را درنظر بگیریم که درآن هر جمله مساوی باشد با جملهٔ قبلی باضافهٔ مقدار متغیری ، که این مقادیر متغیر تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند ، میگوئیم این دسته جمل یك تصاعد حسابی مرکب تشکیل داده‌اند .

شکل کلی این تصاعد بصورت زیر است :

$$a \quad a+r \quad a+۳r \quad a+۶r \quad a+۱۰r \quad \cdots$$

(که در اینجا اگر اختلاف هر دو جملهٔ متوالی را بترتیب حساب کنیم این تصاعد بدست میآید .

$$r \quad ۲r \quad ۳r \quad ۴r \quad \cdots$$

ضریب r درجملهٔ n ام این تصاعد را از طریق استقراء میتوان پیدا کرد .

$$۱ = ۱$$

$$۳ = ۱ + ۲$$

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

$$۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴$$

$$\text{جملهٔ } n-۱ \text{ ام} = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n \quad ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین جملهٔ n ام تصاعدحسابی مرکب عبارتست از :

$$a + \frac{n(n-۱)}{۲}r$$

محاسبهٔ مجموع جمل ـ برای این کار اول باید مجموع ضرایب r را بدست آوریم . این مجموع را میتوان بشکل $\Sigma\frac{n(n-۱)}{۲}$ نشان داد (مجموع اعدادی که حاصل میشود وقتی دراین رابطه به n متوالیاً مقادیر ۱ و ۲ و ... و n را بدهیم) .

$$\Sigma\frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۱}{۲}\Sigma(n^۲ - n) = \frac{۱}{۲}(\Sigma n^۲ - \Sigma n)$$

اما میدانیم که $\Sigma n = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ و

$$\Sigma n^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

پس :

$$\frac{۱}{۲}(\Sigma n^۲ - \Sigma n) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲} - \frac{n(n+۱)}{۲}\right]$$

$$= \frac{n(n^۲-۱)}{۶}$$

مجموع جمل تصاعدحسابی مرکب برابر است با

$$\boxed{S = na + \frac{n(n^۲-۱)}{۶}r}$$

مسائل برای حل

I- مسائل متفرقه

۱۲۰۳- مطلوبست تعیین حاصلضرب زیر .

$$P=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)\cdots\times$$
$$\times(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$$

حافظی دبیرد بیرستان درخشانی بنس

۱۲۰۴- شخصی که‌هفت پسرداشت‌وصیت کرد پس‌ازمرگش دارائی او راکه شامل چند شتر بود بترتیب زیر بین پسرانش تقسیم کنند : نصف عدهٔ شترها بعلاوهٔ نصف یاکمتر سهم اولی باشد نصف بقیهٔ شترها بعلاوهٔ نصف‌یك شترسهم دومی باشد ... بهمین ترتیب تاآخر. بعد ازمرگ شخص طبق وصیت اوعمل شدعلاوه برآنکه همهٔ شترها تقسیم شد هیچگاه مجبور نشدند شتری را نصف نمایند . دارائی شخص چند شتر بوده است .

ارج همت ـ ششم ریاضی دبیرستان امیرکبیر

۱۲۰۵- مطلوبست تعیین x از معادلهٔ زیر .

$$(\sqrt[8]{x})^{\log_8 x+2}=7$$

نصرت‌الله حسنلو ـ چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون

۱۲۰۶- دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید

$$\begin{cases}(0/2)^{2x-2y}=(\sqrt[3]{25})^{xy}\\ 0/125^{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2xy+24}\end{cases}$$

حسن تاجبار صالحی ـ چهارم ریاضی دبیرستان علمی ۱

۱۲۰۷- با فرض $\log 2=0/30103$ و $\log 3=0/47712$ حاصل عبارت زیر تعیین کنید .

$$P=\log\sin 10^\circ+\log\sin 20^\circ+\log\sin 30^\circ+\cdots+$$
$$+\log\sin 80^\circ$$

یمن طاهری ـ پنجم ریاضی دبیرستان صفائی سمنان

۱۲۰۸- ثابت کنید که بین‌تابع $y=\frac{k}{x}$ و مشتقات متوالی آن رابطهٔ زیر برقرار است .

$$y(x-1)+y'(x+2)+y''(x+3)+\cdots+$$
$$+y^{(n-1)}(x+n)+y^{(n)}x=k$$

بیروز برهامی ـ ششم ریاضی دبیرستان البرز

۱۲۰۹- عددی بصورت $\overline{cdu}$ چنان تعیین کنید که داشته باشیم .

$$\overline{cdu}=\overline{cd}+\overline{du}+\overline{uc}$$

بیروز برهامی

۱۲۱۰- ثابت کنیدمنحنی‌های‌نمایش‌تابع $y=(2x^2-7)^m$ در ازاء جمیع مقادیر m از چهار نقطهٔ ثابت که مختصات آنها را تعیین خواهید کرد میگذرند .

خسرو موحد ـ چهارم ریاضی دبیرستان‌ادب

۱۲۱۱- مطلوبست‌رسم مثلثی که‌از آن یك رأس ، امتداد اضلاع گذرنده براین رأس ، طول ضلع مقابل باین رأس وشعاع دایرهٔ محاطی (داخلی یا خارجی نظیر رأس معلوم) در دست باشد .

سید محمد حسینی حق نواز ـ ششم ریاضی دبیرستان فنی بابل

۱۲۱۲- مطلوبست حل دستگاه مثلثاتی زیر .

$$\begin{cases}\sin^4 x+\cos^4 y=\frac{1}{4}\\ \cos^4 x-\sin^4 y=\frac{3}{4}\end{cases}$$

احمد سالك رمانخانی ـ ششم ریاضی دبیرستان نظام تهران

۱۲۱۳- مطلوبست تعیین مجموع n جمله از رشتهٔ زیر .

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$$

کامران پورنرادی ـ چهارم ریاضی دبیرستان البرز تهران

۱۲۱۴- ثابت کنید ریشه‌های دو معادلهٔ زیر عکس یکدیگرند .

$$(x-)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+\cdots+$$
$$+(x-n)^2=0$$
$$(x-1)^2+(2x-1)^2+(3x-1)^2+\cdots+$$
$$+(nx-1)^2=0$$

ابوالقاسم محمدی ـ پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی

۱۲۱۵- مطلوبست حل معادلهٔ زیر .

$$(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4)$$

فرستنده : آقا محمد آبادی دبیرستان طاهری تهران

۱۲۱۶- بین ساعت‌های ۵ و ۶ ، چه‌موقع عقربهٔ دقیقه‌شمار ۱۲ دقیقه از عقربهٔ ساعت شمار جلوتر است .

فرستنده : آقا محمدآبادی

۱۲۱۷ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$(x-a-b)^3(a-b)^3+(x-b-c)^3(b-c)^3+$$
$$+(x-a-c)^3(c-a)^3=0$$

فرستنده : امیدعلی کرم زاده ـ ششم ریاضی دبیرستان نوروز مجدسلیمان

۱۲۱۸ـ مطلوبست حل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر

$$\begin{cases} x^y \cdot y^y = 4^x \\ y^x \cdot x^x = 4^y \end{cases}$$

۱۲۱۹ـ اگر طولهای اضلاع مثلثی جمل متوالیه ازیك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید که قدرنسبت این تصاعد تابع شرط زیراست

$$q < \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

فرستنده : { فرامرز رهبر پنجم ریاضی دبیرستان شرف / احمد حاج عظیم چهارم ریاضی دبیرستان طاهری

۱۲۲۰ـ چهار خط که یکدیگر را درحدود صفحهٔ نقشه قطع نمی کنند مفروض است مطلوبست رسم اقطار چهار ضلعی حاصل از چهار خط

سید محمد حسینی حق نوار ـ ششم ریاضی دبیرستان قنادیاپل

۱۲۲۱ـ اولا ثابت کنید که

$$\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}+\sin^2\frac{8\pi}{7}=$$
$$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$$

ثانیاً صحت رابطهٔ زیررا ثابت کنید

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

فرستنده غلامحسین راستگو ـ تبریز

۱۲۲۲ـ اگر $f(x)=\frac{1}{1-x}$ باشد تحقیق کنید که $fff(x)=x$ است

فرستنده : محمد محروق علوی دانشجوی دانشکده فنی

۱۲۲۳ـ دایرهٔ O ودو نقطهٔ A وB واقع در صفحهٔ آن مفروض است. نقطهٔ M را بردایره چنان تعیین کنید که MA+MB می نیمم باشد .

ارسالی اکبر حشتی دبیر دبیرستانهای تویسرکان

۱۲۲۴ـ مطلوبست اثبات رابطهٔ زیر

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+$$
$$+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

فرستنده : مهندس عباس سعیدی

۱۲۲۵ـ خم بسته‌ای بدون هیچ نقطهٔ تقاطع وبطول 2l واقع دریك صفحه داده شده است نقطه‌ای چنان بیابید که فاصلهٔ آن از هر نقطهٔ خم کمتر از l ویا مساوی با آن باشد

مهدی بهراد ـ دانشگاه میشیگان

II ـ نمونه‌هائی از مسائل امتحانات نهائی کشورهای مختلف

(مسألهٔ چهار امتحان نهائی رشته علوم

Rèunion ژوئن ۱۹۶۳)

۱۲۲۶ـ ۱) جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش

$$y=\frac{(x+1)^3}{x^2}$$

۲) چنانچه M نقطه‌ای از منحنی (c) نمایش هندسی تابع فوق باشد . معادلهٔ مماس بر منحنی (c) را در نقطهٔ M بنویسید (طول نقطهٔ M را a اختیار کنید). مختصات نقطهٔ تقاطع این مماس را بامحور oy برحسب x حساب کنید .

۳) نقطه ثابت T واقع بر محور y‌ها بعرض λ اختیار شده است . عدهٔ مماسهائی راکه ازنقطهٔ T میتوان برمنحنی (c) رسم کرد تعیین نمائید . عموماً دومماس میتوان رسم کرد. بحث کنید .

۴) درحالتیکه از نقطهٔ T دوخط بر منحنی (c) مماس شده است ، نقاط تماس را M' و M" مینامیم . ضریب زاویهٔ خط M'M" را برحسب λ بدست آورید درحالت خاص λ=۱ معادلات خطوط مماس ومختصات نقاط M' وM" راحساب کرده روی شکل نمایش دهید .

(مسألهٔ امتحانات نهائی رشتهٔ ریاضی کامبوج

ژوئن ۱۹۶۳)

۱۲۲۷ـ دو امتداد متعامد ox و oy مفروض است. روی ox درنقطهٔ ثابت P و P' واقع دریك طرف یا طرفین o (غیر منتاذر نسبت به o) اختیارشده است و I نقطه‌ای است متغیراز صفحهٔ xoy ویك فاصله ازP و P' . خط PI محور oy رادر یك نقطهٔ A وخط P'I محور oy را در یك نقطهٔ A' قطع مینماید .

۱) اگر C و C' مراکزدوایر محیطی مثلثهای POA و P'OA' باشد نوع چهارضلعی OCIC' را تعیین نموده وثابت کنید که یکی ازمراکزتجانس دو دایرهٔ C و C' ثابت میباشد و مکان هندسی دیگری راتعیین کنید .

۲) دودایرهٔ C و C' یکدیگر رادر دونقطهٔ O وM قطع مینمایند مکان هندسی نقطهٔ M راتعیین کنید .

۳) ثابت کنید که چهارنقطهٔ I وA' وA و M بردایره‌ای واقع هستند که برخط ثابت وبردایرهٔ ثابت مماس میباشد .

٤) ثابت کنید که امتداد IM همواره ازنقطهٔ ثابتی میگذرد

(مسائل امتحان نهائی رشته ریاضی اسپانیا و پرتقال ژوئن ۱۹۶۲)

۱۲۲۸ـ معادله زیر راحل کنید .

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x + 1 = 0$$

۱۲۲۹ـ۱) تحقیق کنید که تساوی $a^2 = db^2$ که درآن a وb وd اعدادصحیح مثبت‌بوده و a وb نسبت بهم اولند وقتی بر قرار است که $b = 1$ باشد ونتیجه بگیرید که اگر d مربع کامل نباشد هیچ کسری نمیتوان یافت که مساوی با $\sqrt{d}$ باشد .

۲) مجموعهٔ اعدادی راکه بصورت $m + n\sqrt{d}$ هستند با $A(\sqrt{d})$ نمایش میدهیم (m وn اعداد صحیح بوده d مربع کامل نمیباشد) . تقاطع دو مجموعهٔ $A(\sqrt{2})$ و $A(\sqrt{3})$ را تعیین کنید (میتوان استفاده کرد که تساویهائی بصورت $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$ که درآن m وn وp اعداد صحیح جبری است وقتی برقرار است که $m = n = p = 0$ باشد)

۱۲۳۰ـ در صفحهٔ محورهای متعامد $x'ox$ و $y'oy$ که واحد هردو محور یکی است :

۱) جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع

$$y = \frac{(x+a)}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$$

را رسم کنید (a مقدارمعین مفروض میباشد)

۲) بفرض اینکه A نقطه‌ای بامختصات $(0 و -a)$ و $t'At$ محوری باشد که $\theta = (\vec{Ax}, \vec{At})$ و $(0 < \theta < \pi)$

اگر $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ باشد ، $t'At$ دریك نقطهٔ I محور $y'Oy$ ومنحنی (C) رادریك نقطهٔ M قطع‌می کند . طول نقطهٔ M را برحسب θ حساب کنید . تحقیق کنید که $\overline{IM}$ مستقل از θ بوده و ازآنجا خاصیتی هندسی‌مخصوص منحنی (C) نتیجه بگیرید .

۳) اگر M نقطه‌ای ازمنحنی (C) باشد بغیراز A و M_1 نقطه دیگری‌ازمنحنی (C) باشد که طول‌آن باطول M همعلامت باشد . امتداد AM_1 محور $y'Oy$ را در I_1 قطع میکند . ω مرکز دورانی راتعیین کنید که $\vec{IM}$ رابه $\vec{I_1M_1}$ تبدیل مینماید وقتی که M_1 بسمت M میل نماید حدش چه خواهد بود واز آنجا طریقه‌ای برای ترسیم هندسی مماس درنقطهٔ M برمنحنی (C) نتیجه بگیرید .

٤) طول نقطهٔ تلاقی مماس نقطهٔ M برمنحنی (C) را با محور $x'Ox$ برحسب x طول نقطهٔ M حساب کنید . چنانچه P نقطهٔ دلخواهی از $x'Ox$ باطول x_0 باشد برحسب اوضاع P درعدهٔ خطوط مماسی که از P میتوان بر منحنی (C) رسم کرد بحث کنید .

III- نمونه‌هائی ازمسائل فیزیك امتحانات نهائی کشورهای مختلف

ششم طبیعی - اسپانیا پرتقال

۱۲۳۱ـ میدانیم :

جرم اتمی مس $A = ۶۳/۵$

جرم واحد حجم‌مس $M = ۸/۸$ گرم‌برسانتیمترمکعب

مقاومت مخصوص مس $P = ۱/۶$ میکرواهم سانتیمتر

گرمای ویژه مس $C = ۰/۱$ کالری برای هر گرم

عدد فاراده $F = ۹۶۵۰۰$ کولمب

جرم الکترون $\frac{۱}{۱۸۳۰}$ جرم پروتون است

۱ـ سطح‌مقطع یك سیم مسی $S = ۱^{m}\cdot m^{2}$ است چنانچه هراتم مس‌بتواند‌دراین‌فلز یك الکترون‌آزادکند واین‌الکترون در انتقال جریان شرکت جوید . سرعت متوسط‌این الکترون‌ها موقعی‌که ازسیم جریان متناوبی بشدت $i = ۱^{A}$ عبورکند چه اندازه است .

اگر ازاین‌سیم‌جریان متناوبی بتواتر ۵۰ هرتز وبشدت $i = ۱^{A}$ عبورکندکندحرکت‌این‌الکترونها چگونه است .معادله حرکت آنها رابنویسید .

۲ـ اگر حرارتی‌که در اثر عبور جریان در سیم تولید میشود بامحیط خارج مبادله نشده وصرف گرم‌کردن خود سیم شود تغییرات θ درجه حرارت سیم‌هر گاه ازآن جریانی‌بشدت $i = ۱^{A}$ عبورکند برحسب زمان t چگونه است .

۳ـ ازیك رشته سیم ملتهب موقعی‌که درجه حرارت آن بحدکافی میرسد الکترونها با سرعت اولیه $V_1 = ۵۰۰^{Km/s}$ خارج میشوند و بوسیله صفحه‌ای‌نسبت‌برشته سیم دارای پتانسیل مثبت $u = ۲۰$ ولت است جذب میگردند . این الکترونها باچه‌سرعتی‌بروی صفحه میرسند .

$N - B$ سه قسمت‌مسأله مستقل ازیکدیگرند . داوطلبین باید قبل ازمحاسبه عددی . محاسبات را باحروف انجام دهند.

پرزیل ششم ریاضی

۱۲۳۲ـ جریانی بتواتر ۵۰ هرتز را از بوبین که وسط آن قطعه‌آهن خالص قراردارد عبورمیدهند.جلوی این‌بوبین سیمی از آهن بطول ۱ متر وقطر ۰/۵ میلیمتر وبچگالی ۷/۸

کشیده شده است .

۱ ـ اولا ارتفاع صوت اصلی حادث ازاین سیم هنگامیکه باندازه کفایت کشیده شده باشد چه اندازه است واسم نتی که در گام باخ «گام معتدل» خیلی نزدیک به نت حاصل ازاین سیم می‌باشد چیست !

$$La_3 = 435Hz$$

۲ ـ هر گاه درطول سیم ۵ بطن تشکیل شود نیروی کشش سیم برحسب کیلوگرم چه اندازه است .

$$g = 9/81 \quad M.K.S$$

۳ ـ چنانچه بدوسر این بوبین جریان مستقیمی بااختلاف پتانسیل ۱۲۰ ولت برقرار سازیم جریانی که از آن میگذرد ۱۲ آمپر است و اگر جریان متناوبی بااختلاف پتانسیل مؤثر ۱۲۰ ولت برقرار سازیم شدت جریان مؤثر ۵ آمپر میشود آیا میتوان بکمك یك خازن مناسب شدت مؤثر جریان را در این حالت به ۱۲ آمپر رسانید . در اینصورت ظرفیت این خازن را حساب کنید .

۴ ـ مقدار حرارتی که در این بوبین در اثر عبور شدت مؤثر ۵ آمپر در ظرف مدت ۱۰ دقیقه تولید میشود وهمچنین ضریب توان مدار چه اندازه است .

فرانسه (پاریس وشهرستانها) ششم ریاضی

۱۲۳۳ ـ برای اندازه گیری مشخصات یك بوبین و یك خازن آزمایشهای زیر را انجام میدهند .

۱ ـ بوبین و خازن را بطور متوالی بهم بسته و بین دو نقطه A و D جریان جیبی بتواتر N برقرار میسازند وبکمك یك ولت‌متر حرارتی اختلاف پتانسیل‌های دوسر آنها را اندازه می گیرند . این نتایج حاصل میشود :

$$u_A - u_D = 75^v \qquad u_A - u_B = 100^v$$

$$u_B - u_D = 35^v$$

a) بیان کنید که چگونه بامقایسه ساده این اعداد میتوان ثابت کرد که مقاومت حقیقی بوبین قابل صرف‌نظر نیست .

b) تحت اثر اختلاف پتانسیل‌های نامبرده، شدت جریانی که بوسیله یك آمپرمتر حرارتی اندازه گرفته میشود برابر $I = 0/1$ آمپر است مقاومت های ظاهری بوبین و خازن را حساب کنید .

۲ ـ در آزمایش دیگر ازمجموعه دستگاه جریان متناوبی باتواتر متغیر عبور میدهند مشاهده میشود چنانچه تواتر جریان به ۳۲۰ هرتز برسد، شدت جریانی که ازمدار میگذرد ماکزیمم میشود . ضریب خود القاء بوبین «L» و ظرفیت خازن «C» و تواتر جریان اولیه «N» را حساب کنید .

الجزیره : ششم ریاضی

۱۲۳۴ ـ جریان متناوب جیبی بین دو شاخه ACB و ADB تقسیم میشود .

۱) شاخه ACB شامل یك الکترواهان کوچکی است و مقابل آن سیم آهنی قرار دارد که بین دو نقطه بفاصله d بـا وزنه P کشیده شده است . یکی از قطبین الکترواهان مجاور وسط این سیم قرار دارد . P را طوری انتخاب میکنند که دامنه نوسان سیم ماکزیمم شده و یك بطن دروسط آن تشکیل شود .

اگر $d = 28/0^{cm}$ باتقریب ۰/۱ سانتیمتر و جرم هر متر سیم ۰/۳۷۵ گرم با تقریب ۰/۰۰۱ گرم و $P = 120^g$ باتقریب ۰/۵ گرم و $g = 9/80$ $M.K.S$ باشد تواتر جریان را حساب کنید و بیان نمائید باچه دقتی این تواتر معین میشود .

۲) در همین شاخه ACB دستگاه نامبرده را برداشته و بجای آن مقاومت R را که اثر خود القاء آن ناچیز است قرار می‌دهند و در شاخه ADB یك سیم پیچ و یك آمپرمتر حرارتی که مقاومت و اثر خود القائش ناچیز است میگذارند . مقاومت R درکالری متری قرار دارد که مقدار آب و ارزش آبی آن روبهم ۱۵۰۰ گرم است .

پس از یکدقیقه درجه حرارت آب کالری متر $3/16^\circ$ بالا میرود : اگر $R = 40$ اهم باشدشدت جریانیکه ازمقاومت R میگذرد چه اندازه است . معادل مکانیکی کالری ۴/۱۸ ژول است .

اختلاف پتانسیل مؤثر بین دو نقطه A و B را حساب کرده و معادله این اختلاف پتانسیل و معادله شدت جریانی را که از شاخه ACB میگذرد نسبت بزمان بنویسید .

۳ ـ آمپرمتر حرارتی که در شاخه ADB قرار دارد شدت جریان را درست بهمان اندازه شدتیکه از مدار ACB میگذرد نشان میدهدولی این شدت نسبت بجریان ACB دارای تأخیر فازی برابر ۳۰ درجه است .

مقاومت حقیقی وضریب خود القاء شاخه ADB راحساب کنید و معادله شدت جریان کل را که بین نقاط A و B برقرار است برحسب زمان بنویسید .

استامبول ـ ششم ریاضی

۱۲۳۵ ـ پاندول ساده‌ای تشکیل‌یافته ازگلوله کوچکی بجرم ۱۰ گرم که بانتهای سیم فلزی بسیار نازك بجرم ناچیز آویزان شده است فاصله O نقطه‌تعلیق پاندول از C مرکز ثقل

گلوله ۳۹۸ cm = OC است که با تقریب ۱ cm اندازه گیری شده است . مدت ۱۰۰ نوسان کامل این پاندول با کرونومتری که دقت آن $\frac{1}{5}$ ثانیه است اندازه گیری شده و برابر ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه است.

اولا شتاب ثقل زمین را در مکان آزمایش حساب کنید . با چه تقریبی مقدار g بدین ترتیب معین میشود . ثانیاً در شرایط اندازه گیری فوق ، دامنه نوسان را تا چه اندازه میتوان اختیار کرد تا اینکه نوسانات پاندول هم زمان بمانند . میدانیم زمان نوسان از فرمول $T=T_0(1+\frac{\alpha^2}{16})$ بدست می آید که در آن T_0 زمان نوسان پاندول برای دامنه خیلی کم و α دامنه نوسان برحسب رادیان است .

ثالثاً اگر دامنه نوسان پاندول $\frac{1}{10}$ رادیان باشد ، سرعت گلوله در موقع عبور از وضع تعادل و همچنین نیروی کشش نخ در این لحظه چه اندازه است .

رابعاً در آزمایش‌های نامبرده درجه حرارت اطاق صفر درجه سانتیگراد افزایش یافته و به ۲۵ °c درجه رسانیده شده است چنانچه درجه حرارت آن به ۲۵ درجه سانتیگراد افزایش یابد چه تغییری در مدت ۱۰۰ نوسان پاندول ظهور میرسد این تغییر درجه حرارت چه اثر مهمی در اندازه گیری g دارد :

ضریب انبساط خطی سیمی که پاندول را تشکیل میدهد ، $\lambda = 0/8 \times 10^{-5}$ است $\pi^2 = 9/87$

فیزیک ـ ششم ریاضی

۱۲۳۶ـ آسانسوری تشکیل شده است از یک اطاق و از یک وزنه که بدو سر کابلی آویخته شده‌اند و کابل از روی قرقره‌ایکه حول محور افقی میچرخد میگذرد و اصطکاک قرقره در مقابل حرکت کابل ناچیز است .

جرم اطاق آسانسور ۱ تن = M و جرم وزنه ۰/۹ تن = M' و از جرم کابل و کلیه نیروهای اصطکاک سرفنظر میشود و قرقره در حکم استوانه دوار همگنی گرفته میشود .

۱ـ فرض کنیم اطاق آسانسور بالا و وزنه پائین است دستگاه را بدون سرعت اولیه رها میکنند اگر از جرم قرقره صرفنظر شود مسافتی که اطاق آسانسور در مدت ۱۰ ثانیه می‌پیماید چه اندازه است .

۲ـ نشان دهید که اگر جرم قرقره در محاسبه منظور شود ، شتاب حرکت دستگاه موقعی که بحالت خود رها شود در رابطه زیر صادق است .

$$\gamma = \frac{(M-M')g}{M+M'+\frac{K}{R^2}}$$

که در آن K گشتاور جیری قرقره نسبت بمحور دوران و R شعاع مقطع قائم استوانه دواری است که قرقره را تشکیل میدهد اگر این استوانه توپر و همگن فرض شود مقدار K برابر است با $\frac{1}{2}mR^2$ (m جرم قرقره است) بازاء $m = 200 Kg$ شتاب حرکت آسانسور را حساب کنید .

در این حالت چنانچه دستگاه بدون سرعت اولیه رها شود مسافتی که اطاق پس از ۱۰ ثانیه می‌پیماید و سرعت آن پس از این مدت چه اندازه است .

۳ـ برای اینکه دو مرتبه اطاق را بالا ببرند از یک موتور الکتریکی استفاده می کنند . توان این موتور موقعی که اطاق را با سرعت $5/1 m/s$ بالا میکشد چه اندازه است .

۴ـ موتور نامبرده ، موتور یک فازه است که بدو قطب آن جریان جیبی با اختلاف پتانسیل مؤثر ۲۲۰ ولت و فرکانس ۵۰ هرتز بسته شده‌است . راندمان این موتور $\frac{5}{8}$ و ضریب توان آن ۰/۸ است شدت مؤثر این جریان را حساب کنید .

$g = 9/8 m/s^2$

کامبرج و ویتام جنوبی (۱۹۶۳) ـ ششم ریاضی

۱۲۳۷ـ واگون کوچکی بجرم M دارای چهار چرخ است که جرم هریک m و شعاع آن r و گشتاور جیریش نسبت بمحور دوران چرخ $j = \frac{1}{2}mr^2$ است .

واگون روی سطح شیب داری که با سطح افق زاویه α میسازد متوقف شده و نیروهای اصطکاک قابل صرف نظرند. در یک لحظه واگون را بدون سرعت اولیه رها میکنند :

اولا شتاب حرکت دستگاه را چه رابطه‌ای حساب میشود این رابطه را پیدا کنید .

ثانیاً نسبت $\frac{M}{m}$ چه باید باشد تا اختلاف این شتاب با شتاب واگون هنگامیکه بدون چرخیدن چرخها ، بر سطح شیب دار بلغزد باندازه یکدهم شتاب حالت اخیر باشد .

ثالثاً روی کف واگن گلوله کوچکی قرار داده شده که گشتاور جیری آن نسبت بهریک از محورهای آن: $j' = \frac{2}{5}m'r'^2$ است (m' جرم گلوله و r' شعاع آن است)

در لحظه‌ایکه واگون میخواهد شروع بحرکت کند، گلوله بدیواره جلوئی آن تکیه دارد وقتیکه واگون بدون سرعت اولیه شروع بحرکت میکند گلوله از جای خود حرکت مینماید و پس از زمان θ بدیوارهٔ عقبی واگون میرسد . این پدیده را تشریح کنید و زمان θ را حساب نمائید . میدانیم طول واگون ۲ متر و شیب سطح ۵٪ و نسبت $\frac{M}{m}$ همانست که در فرض دوم مسأله حساب شده است . $g = 9/8 m/s^2$

IV ـ مسائل انتخابی از سؤالات امتحانی خردادماه ۴۳ دبیرستانها

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان تجدیدی کلاسهای چهارم و پنجم)

کلاس چهارم طبیعی

از جمله مسائل امتحان جبر کلاس چهارم طبیعی دبیرستان رازی آبادان ــ فرستنده : علی جواهری‌فر

۱۲۳۸ـ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2-(5a+2b)x+6a^2+7ab-3b^2=0$$

مفروض است . اولا ثابت کنید a و b هرچه باشند معادله فوق دارای ریشه است ومقادیر آنها را پیدا کنید .

ثانیاً a و b را طوری اختیار کنید که معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ مضاعفی برابر ۱۱ باشد .

۱۲۳۹ـ مقدار a را طوری اختیار کنید که تصاعد زیر برقرار باشد

$$\frac{\cdots}{\cdots}\ a : \left(a-\frac{1}{4}\right) : \left(a-\frac{3}{8}\right) : \cdots$$

سپس بازاء $a=\frac{1}{2}$ جملهٔ پنجم ومجموع هفت جملهٔ تصاعد فوق را حساب کنید

* * *

از جمله مسائل امتحان جبر چهارم طبیعی دبیرستانهای هدف

۱۲۴۰ـ درمعادلهٔ $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$

اولا بازاء چه مقادیری از m معادله دارای دوریشهٔ حقیقی است.

ثانیاً مقدار m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌ها برابر با ۱ باشد ودر این صورت بدون حل معادله ریشهٔ دیگر آن را بدست آورید . ثالثاً مقدار m را طوری تعیین کنید که بین ریشه های معادله رابطهٔ زیربر برقرار باشد

$$\frac{1}{2x'}+\frac{1}{2x''}=\frac{1}{2}$$

۱۲۴۱ـ از یك تصاعد عندسی مجموع دوجملهٔ اول‌ودوم آن برابربا ۹ و مجموع جملات سوم وچهارم ۳۶ میباشد. جملهٔ اول وقدر نسبت این تصاعد را حساب کنید .

کلاس پنجم طبیعی

از جمله‌مسائل امتحان‌جبر پنجم طبیعی دبیرستان رودکی هفتگل دبیر قاسم فتحی

۱۲۴۲ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. اولا مطلوبست تعیین a و b و c بنسبیکه نقطهٔ M (۱ و ۴ــ) نقطهٔ می‌نیمم منحنی تابع بوده و منحنی محور xها را درنقطهٔ بطول ۳ قطع کند .

ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2-2x-3$ را رسم کنید . ثالثاً معادلهٔ خط مماس بر منحنی را درنقطهٔ بطول ۱ ــ بنویسید

* * *

ازجمله‌مسائل امتحان جبر کلاسهای پنجم‌طبیعی‌دبیرستانهای‌هدف

۱۲۴۳ـ از متوازی‌الاضلاع ABDC ورأس A بطول ۲ واحد روی نیمساز ربع اول ورأس C بعرض ۲ ــ روی نیمساز ربع سوم ومحل تلاقی اقطارمتوازی‌الاضلاع نقطهٔ G(۲ــ و ۰) مفروض است : اولا مختصات رؤوس این متوازی الاضلاع را حساب کرده وآنرا رسم کنید. ثانیاً بفرض A(۲و۲) و B(۲و۲ــ) و C(۲ــ و۲ــ) و D(۶ــ و۲ــ) معادلهٔ ضلع AD را بنویسید . ثالثاً با مفروضات قبل مساحت این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید

* * *

از جمله مسائل امتحان مثلثات کلاسهای پنجم طبیعی دبیرستانهای هدف

۱۲۴۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کرده وکلیهٔ جوابهای بین صفرو π را حساب کنید

$$4\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3=0$$

۱۲۴۵ـ اولا درستی اتحاد مثلثاتی زیررا ثابت کنید

$$\frac{4\cos 7x}{\sin 9x-\sin 5x}=\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x$$

ثانیاً در ازاء $x=\frac{\pi}{6}$ مقدار عددی هریك از دو طرف اتحاد بالا را مستقلاً حساب کنید.

کلاس چهارم ریاضی

از جمله مسائل جبر

دبیرستان اندیشه ــ دبیر شهریاری

۱۲۴۶ـ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ باشد $fff(x)$ را بدست آورید :

۱۲۴۷ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم

$(m-۱)x^۲-(m+۱)x+m=۰$ اولا مقدار m را چنان پیدا کنید که مجموع مجذورات دو ریشه مساوی ۵ باشد. ثانیاً m را پیدا کنید که معادله دو ریشهٔ مثبت داشته باشد

***

دبیرستان صائب اصفهان ـ دبیر تقی قمصری ــ فرستنده مجید شریف واقفی

۱۲۴۸ـ معادلهٔ یك مجهولی زیررا حل وبحث کنید

$$m^۳x-m^۲-۴=۴m(x-۱)$$

۱۲۴۹ـ عددی است مابین ۵۰۰ و ۶۰۰ که تفاضل حاصل ضرب ارقام دهگان ویکان آن ازمجموع مربعین همین دو رقم برابر ۶۱ ومجموع مکعبات ارقام مطلق آن ۹۱۸ است این عدد را پیدا کنید .

۱۲۵۰ـ مقادیر p و q را بترتیبی پیدا کنید که اگر بهر یك ازریشه‌های معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$ یك واحد اضافه کنیم ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-p'x+pq=۰$ بدست آید.

***

دبیرستان سخن پسران ــ دبیر: مرادمند

۱۲۵۱ـ عبارت جبری زیررا بساده‌ترین صورت رادیکالی بنویسید

$$x^{-\frac{۱}{۳}}+x^{-\frac{۲}{۳}}$$

***

دبیرستان دارالفنون ـ دبیر لاهیجی ـ فرستنده: نصرت‌الله حسنلو

۱۲۵۲ـ دستگاه زیررا حل کنید

$$\begin{cases}(x-y)(x^۲-y^۲)=۱۶۰\\(x+y)(x^۲+y^۲)=۵۸۰\end{cases}$$

۱۲۵۳ـ حاصل رادیکال زیررا بدست آورید

$$\sqrt{۲+\sqrt{۸+\sqrt{۳۳+۸\sqrt{۲}}}}$$

۱۲۵۴ـ معادلهٔ زیررا حل کنید

$$(x^۲-x+۱)^۳[x^۲-x+۱)^۳-۹x^۳]-۸x^۶$$

***

دبیرستان رازی آبادان ـ فرستنده : علی جواهری‌فر

۱۲۵۵ـ معادلهٔ زیررا حل کنید

$$\frac{۱+x^۴}{(x+۱)^۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۵۶ـ اولا برحسب مقادیر مختلف m در وجود دو علامت ریشه‌های زیر بحث کنید

$$(m+۳)x^۲-۲mx+۲m-۳=۰$$

ثانیاً m را طوری اختیار کنید که یکی از دو ریشه دو برابر دیگری شود : ثالثاً بین دو ریشه رابطه‌ای مستقل از m پیدا کنید . رابعاً مقدار عبارت $x'^۴+x''^۴$ را برحسب m پیدا کنید

خامساً در ازاء $m=\frac{۱}{۲}$ مقدیر ریشه‌ها را تا سه رقم اعشار بدقت محاسبه کنید

***

دبیرستان آزرم ــ دبیر: نظری ـ فرستنده : ناهیدرزاقی‌خمسی

۱۲۵۷ـ معادلهٔ اصم زیررا حل کنید

$$\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}-۲\sqrt[۳]{x-۱}}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}-۵}=\frac{۳}{۴}$$

۱۲۵۸ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که بین x' و x'' ریشه های آن رابطه زیر برقرار باشد و سپس آنرا حل کنید

$$\begin{cases}x'^{-۱}+x''^{-۱}-a^{-۱}=\frac{۹}{a}(x'x'')^{-۱}\\۵x'+۵x''+۳۶=۱۶a^۲+۲۰a-۴x'x''\end{cases}$$

***

دبیرستانهای هدف

۱۲۵۹ـ معادلهٔ پارامتری درجه دوم

$$(a-۱)x^۲-۲ax+a+۱=۰$$

مفروض است اولا ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر a یك ریشهٔ این معادله مستقل است و به a بستگی ندارد . ثانیاً a را چنان تعیین کنید که رابطهٔ $\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}=۲$ بین ریشه‌های معادله برقرار گردد . ثالثاً ثابت کنید که هریك ازریشه‌های متمایز معادلهٔ درجه دوم $۴(a-۱)x^۲-۴ax+(a+۱)=۰$ نصف ریشه‌های معادلهٔ مفروض میباشد .

***

دبیرستان اندیشه ــ دبیر شهریاری

۱۲۶۰ـ کثیرالجملهٔ $f(x)=۴x^۳-۸x^۲-۱۵x+۹$

مفروض است . اولاً آنرا برحسب قوای نزولی $(۳+۲x)$ منظم کنید . ثانیاً معادلهٔ $f(x)=-$ را حل کنید .

۱۳۶۱ـ مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین ABC $(C=۹۰^\circ)$ مفروض است . روی وتر AB نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که $\overline{AM}^۲+\overline{CM}^۲=K^۲$ باشد بشرطی که بدانیم $CA=CB=a$ است وسپس به‌بینید بازاچه مقادیر K مسئله دارای جواب است وحداقل K چقدر است.

از جملهٔ مسائل امتحان متمم حساب

دبیرستان سخن پسران ـ دبیر : مراعمند

۱۳۶۲ـ مطلوبست تعیین سه عدد که تشکیل تصاعد عددی داده واگر آنها را جمع کنیم ۱۴ شود و اگر آنها ضرب کنیم مجدداً ۱۴ گردد .

۱۳۶۳ـ معادله زیر را حل کنید

$$۳+۹\log\sqrt{x}-۷\log۲=۳\log x+\log۴$$

***

دبیرستانهای هدف

۱۳۶۴ـ اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه $A=۹۰$ باشد وداشته باشیم $۴a=۵b$ ثابت کنید که اضلاع مثلث تشکیل یك تصاعد عددی میدهند (cوbوa ضلعهای اضلاع مثلث‌اند)

۱۳۶۵ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} ۵\log\sqrt[۵]{۳x-۲y+۱۵}-۲\log\sqrt{۲x-y+۱}=\log۳ \\ ۳x-۴y=۸ \end{cases}$$

***

دبیرستان آزرم ـ دبیر نظری ـ فرستنده : ناهید رزاقی خمسی

۱۳۶۶ـ حد مجموع یك تصاعد هندسی مساوی ۹ و حد مجموع مکعبات جمله‌های این تصاعد مساوی ۷۲۹ میباشدمعلوم کنید جملهٔ اول وقدر نسبت را

۱۳۶۷ـ مقدار x را از معادلهٔ زیر حساب کنید .

$$\frac{x\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{(x-\frac{۳}{۲})^۲}}=colog\,۰/۰۰۰۱$$

۱۳۶۸ـ معادلهٔ زیررا حل کرده و مقدار x را حساب کنید .

$$\log_۲(x-۲)+\log_۴(x-۲)+\log_۸(x-۲)+$$
$$+\log_{۱۶}(x-۲)=\frac{۲۵}{۶}$$

***

از جمله مسائل امتحان هندسه

دبیرستان صائب اصفهان ـ دبیر تقی قصری ـ فرستنده شریف واقفی

۱۳۶۹ـ در دایره‌ای بشعاع معلوم مستطیلی محاط کنید که محیطش مقدار ثابت p۲ باشد.

۱۳۷۰ـ طول پاره خط a در دست است پاره خط x را طوری رسم کنید که طول آن $a^۳$ باشد .

۱۳۷۱ـ از مثلثی محیط و سه زاویه معلوم است آنرا رسم کنید .

۱۳۷۲ـ دو مربع در دایره‌ای بشعاع R محاط شده‌اند که دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند ثابت کنید هشت ضلعی که از تقاطع اضلاع مربع بوجود میآید منتظم است . طول ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی آنرا برحسب R بدست آورید .

***

دبیرستانهای هدف

۱۳۷۳ـ خط D و دایرهٔ O مفروضند خطی رسم کنید که دایره را در نقاط A و B قطع نموده بطوریکه $AB=l$ و امتداد این خط با D زاویهٔ α بسازد (بحث)

۱۳۷۴ـ در دایرهٔ O بشعاع a کمان $\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ$ و کمان $\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ$ است . اولا طول اضلاع و مساحت مثلث ABC را برحسب a و همچنین اندازهٔ زوایای آن را تعیین کنید . ثانیاً از نقطهٔ A خطی بموازات BC رسم مینمائیم تادر نقطه k دایره راقطع کندثابت کنیدمثلث ABK متساوی‌الساقین است . ثالثاً AC و KB را امتداد میدهیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کنند ثابت کنید $AB^۲=AC\cdot AM$

***

دبیرستان سخن پسران ـ دبیر نصیری

۱۳۷۵ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD (AB قاعدهٔ کوچکتر و CD قاعدهٔ بزرگتر) قابل محیط شدن بردایرهٔ O میباشد نقطه تماس ساق AD با دایره را F می‌نامیم .

۱) ثابت کنیدزاویهٔ AOD قائمه بوده و $AF\cdot FD=R^۲$ میباشد .

۲) در حالیکه $DF=۲AF$ باشد مساحت ذوزنقه‌را بر حسب R حساب کنید .

کلاس پنجم ریاضی

از جمله مسائل امتحان جبر :

دبیرستانهای هدف :

۱۲۷۶ ـ ضرائب a و b را در تابع $y_1=ax^2+bx+3$ طوری تعیین کنید که $M(1و-2)$ قرینهٔ نقطهٔ نظیر ماکزیمم یا می‌نیمم تابع نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم باشد . ثابت کنید منحنی‌های نمایش تغییرات تابع $y_2=\frac{x+3m}{x+m}$ در ازاء جمیع مقادیر m منحنی نمایش تابع y_1 را در نقطهٔ ثابتی قطع می‌کنند . بفرض $a=1$ و $b=-4$ مقدار m را طوری تعیین کنید که توانند زاویه بین دومنحنی نمایش تغییرات دوتابع y_1 و y_2 در نقطهٔ $A(0و-3)$ برابر با $\frac{2}{9}$ باشد . جدول ومنحنی‌های (C_1) و (C_2) نمایش تغییرات هر یک از دوتابع $y_1=x^2-4x+3$ و $y_2=\frac{x+3}{x+1}$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید ومختصات نقاط بر خورد آنها راتعیین کنید . اگر خط بمعادلهٔ $y=k$ منحنی (C_1) را در دونقطهٔ P و Q ومنحنی (C_2) را درنقطهٔ S قطع کند مقدار K راچنان تعیین کنید که S وسط PQ باشد .

***

دبیرستان رهنما ـ دبیرحسن مولائی ـ فرستنده : عزت‌الله آزاد

۱۲۷۷ ـ تابع $y=\frac{ax^2+1}{x^2+x}$ مفروض است اولا حدود a راطوری تعیین کنید که‌تابع همواره دریک جهت سیر کند. ثانیاً بازاء چه مقادیر a تابع دارای یک ماکزیمم ویک‌می‌نیمم است

۱۲۷۸ ـ تابع $y=a\cos 2x+b\sin 2a$ مفروض است بین تابع و"y مشتق دوم آن رابطه‌ای پیداکنید که به a و b و x بستگی نداشته باشد .

***

دبیرستان البرز ـ فرستنده : یدالله حاجی جعفری

۱۲۷۹ ـ تابع $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ مفروض است ۱۰)جدول ومنحنی نمایش تابع مزبور رادریک دستگاه مختصات قائم xoy رسم کنید ـ۲) در نقطهٔ M محل تلاقی محور عرضها با منحنی معادلات مماس وقائم برمنحنی را نوشته و طولهای چهار گانهٔ طول مماس . طول قائم . تحت مماس ، تحت قائم راحساب کنید .۳) ازنقطهٔ M خطی باضریب زاویهٔ λ رسم کرده‌ایم λچه شرطی باید داشته باشد تااین خط منحنی مزبور رادردو نقطهٔ P وQ قطع کند . (٤) λ را چنان تعیین کنید که مثلث POQ قائم الزاویه در رأس O باشد .

۱۲۸۰ـ دردستگاه مختصات قائم xoy خط (Δ) بمعادله $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ طوری رسم میشود که همواره ازنقطهٔ (۱و۱) K میگذرد . از مبدأ مختصات خط (D) دابر (Δ) عمود میکنیم مطلوبست معادله هندسی نقطهٔ H محل تلاقی خطوط(D)و(Δ)

***

دبیرستان اندیشه ـ دبیر پرویز شهریاری

۱۲۸۱ـ توابع

$(C)y=-x^2$ و $y=x^2+(3a-1)x+4a-b+4$ (C') مفروض‌اند .b وa را چنان تعیین کنید که دومنحنی نسبت به نقطهٔ O' (۱ ـ و۲ ـ) متقارن باشند .

۱۲۸۲ـ درتوابع $y=-x^2$ و $y=x^2+8x+14$ اگر مبداء مختصات رابه‌نقطه O'(۱ـ و۲ـ) منتقل کنیم معادلات جدید منحنی‌های فوق راپیدا کنید .

***

دبیرستان شاهپور شیراز ـ دبیرهمت ـ فرستنده محمد محب تاش.

۱۲۸۳ـ q وp راتعیین کنید که تابع $y=\frac{3x^2+px+q}{x^2+1}$ درازاء جمیع مقادیر حقیقی x بین ۳ ـ و٤ محصور باشد .

۱۲۸۴ـ اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2-x+\frac{1}{2}$ را رسم کنید . ثانیاً معادله خط مماس بر منحنی را درنقطهٔ بطول a بنویسید واگرخطوط مماس برمنحنی درنقاط بطولهای a و b برهم عمود باشند رابطه‌ای بین a وb پیداکنید ومختصات فصل مشترک این دوخط را برحسب a+b بدست آورید وازروی آن مکان هندسی فصل مشترک رابیداکنید .

***

دبیرستان سخن پسران ـ دبیر مرادمند

۱۲۸۵ـ نقطه P را روی محور عرضها طوری انتخاب کنید که اگرازآن نقطه دومماس برمنحنی (C) نمایش تابع $y=-x^2+x+\frac{11}{4}$ رسم شود دومماس برهم عمود گردند.

***

دبیرستان دارالفنون ـ دبیرمحمدعلی شیخان ـ فرستنده محمد دادبخش

۱۲۸۶ـ نقاط $A(-1و1)$ و $B(3و-3)$ وCواقع

در ربع اول رؤوس یك مثلث میباشند اولامختصات رأس C را طوری بدست آورید که معادلهٔ ضلع AC بصورت $3y=x-2$ وزاویهٔ B برابر ۴۵ درجه باشد. سپس مساحت مثلث و معادلهٔ نیمساز داخلی زاویهٔ C را بدست آورید.

۱۲۸۷ـ تابع درجهٔ دومی مشخص کنید که چون صورت جدید آنرا نسبت بدستگاه محورهای جدید یکه از $M\ (1و-\frac{7}{3})$ موازی وهم جهت محورهای قدیم رسم میشوند بنویسیم $Y=\frac{1}{3}X^2$ حاصل شود.

۱۲۸۸ـ در تابع $y=\frac{(\lambda+2)x+4\lambda-4}{3\lambda x+6}$ مقدار λ را بطریقی تعیین کنید که نمایش هندسی تابع فوق بخط مستقیم بدل شود. معادلات این خطوط را بنویسید

***

از جملهٔ مسائل امتحان مثلثات

دبیرستان رازی آبادان ـ دبیر: هاشمی ـ فرستنده: منصور معتمدی

۱۲۸۹ـ مطلوبست حل معادلهٔ مثلثاتی زیر و تعیین جوابهای کلی آن

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

***

دبیرستانهای هدف

۱۲۹۰ـ معادله مثلثاتی زیر راحل کنید وجوابهای بین صفر و 2π راحساب کنید.

$$\cos^2(4x-\frac{\pi}{3})+\sin^2(4x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

۱۲۹۱ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ AMN که در آن $\hat{M}=90^\circ$ و $MN=12a$ و $AM=3a$ میباشد بر MN دو نقطهٔ P و Q را بقسمی اختیار میکنیم که $MP=3a$ و $MQ=5a$ باشد ثابت کنید که

$$\hat{ANM}+\hat{AQM}=\hat{APM}$$

***

دبیرستان البرز ـ فرستنده: یدالله حاجی جعفری

۱۲۹۲ـ ازدستگاه (۱) رابطهٔ (۲) را نتیجه بگیرید

$$(1)\begin{cases}\frac{a}{\sin t}+\frac{b}{\cos t}=C\\ \frac{a'}{\sin t}+\frac{b'}{\cos t}=C'\end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{1}{(ab'-ba')^2}=\frac{1}{(bc'-cb')^2}+\frac{1}{(a'c-c'a)^2}$$

۱۲۹۳ـ اگر رابطهٔ $\sin(2x+y)=5\sin y$ برقرار باشد ثابت کنید

$$2tg\,(x+y)=3\,tg\,x$$

***

دبیرستان رهنما ـ فرستنده: عزت‌الله آزار

۱۲۹۴ـ اگر بین زوایای مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار باشد ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

$$tg\,B=\frac{\cos(C-B)}{\sin A+\sin(C-B)}$$

۱۲۹۵ـ اگر $\sin(a-b)=\sin^2a-\sin^2b$ باشد ثابت کنید که

$$a-b=K\pi \quad \text{یا} \quad a+b=2K\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۲۹۶ـ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\times$$
$$\times\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}$$

***

دبیرستان شاهپور شیراز ـ دبیر: همت ـ فرستنده: محمد محب‌تاش

۱۲۹۷ـ عبارت زیر را خلاصه کنید

$$\frac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}tg\frac{x}{y}\right)}+\frac{y^2}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}tg\frac{y}{x}\right)}$$

۱۲۹۸ـ اگر A و B و C زاویه های مثلثی باشند و $\sin B$ و $\sin A$ و $\sin C$ تشکیل تصاعد عددی بدهند روابط زیر را محقق کنید

$$tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad tg\frac{A}{2}=\frac{\sin B}{2-\cos B} \quad \text{و}$$
$$4(1-\cos B)(1-\cos C)=\cos B+\cos C$$

***

دبیرستان فردوسی تبریز ـ فرستنده: پرویز ابراراصل

۱۲۹۹ـ معادلهٔ زیر را حل نموده جوابهای کل وجوابهای بین صفر و 2π از آنرا بدست آورید

$$\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x-\sin x)$$

۱۳۰۰ـ مطلوبست تعیین رابطهٔ مستقل از α بین x و y از روابط زیر

$$\begin{cases}x\,tg\alpha+y\cot g^2\alpha=x^2+y^2\\ y\,tg\,\alpha+x\,\cot g^2\alpha=2xy\end{cases}$$

***

دبیرستان تربیت تبریز ـ فرستنده : پرویز ابراراصل

۱۳۰۱ـ α را بین روابط زیر حذف نمائید

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha \\ y = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha \end{cases}$$

***

دبیرستان فیوضات تبریز ـ فرستنده پرویز ابراراصل

۱۳۰۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید و ازروی جوابهای کلی جوابهای بین $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید

$$\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}$$

***

دبیرستان سخن پسران ـ دبیر : نصیری

۱۳۰۳ـ هرگاه درمثلثی رابطهٔ زیر برقرار باشد ثابت کنید که مثلث قائم‌الزاویه است

$$\frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)} = \operatorname{tg} B$$

۱۳۰۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کرده جوابهای بین صفرو 360° را تعیین کنید

$$\cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x = \frac{1}{4}$$

***

دبیرستان دارالفنون ـ دبیر: محمدعلی لاهیجی ـ فرستنده: محمدداد بخش

۱۳۰۵ـ معادله زیرراحل کنید جوابهای کلی وجوابهای واقع بین صفرو 2π را بدست آورید

$$2\cos 5x + 3\cos 3x + 4\cos x = 0$$

۱۳۰۶ـ عبارت زیررا بحاصل ضرب بدل کنید (قابل محاسبه با لگاریتم نمائید)

$$2(\cos^3 x + \sqrt{3}\sin^3 x) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

***

از جمله مسائل امتحان هندسه

دبیرستان سخن پسران ـ دبیر : باقری

۱۳۰۷ـ هرم ناقص منتظمی (۶ پهلو) که محیط قاعدهٔ بزرگش ۴۸ میباشد داده شده وسهم آن ۱۰ است ضلع قاعده فوقانی نصف قاعدهٔ تحتانی است. سطح جانبی وسطح کل وحجم آنرا حساب کنید

***

دبیرستان شاهپور شیراز ـ دبیر: دسترنج ـ فرستنده محمد محب تاش

۱۳۰۸ـ مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع a که در صفحهٔ Q قرارداد مفروض است خط D عمود برصفحهٔ Q درنقطهٔ B وخط D' عمود برصفحهٔ Q در نقطهٔ C رسم میکنیم روی خط D درزیرصفحهٔ Q نقطهٔ M و روی خط D' بالای صفحهٔ Q نقطهٔ P را چنان انتخاب میکنیم که $BM = x$ و $PC = y$ باشد . اولا طول اضلاع AMP را برحسب a و x و y حساب کنید . ثانیاً اگرمثلث AMP قائم‌الزاویه در رأس A باشد رابطه‌ای بین a و x و y وجود دارد . در این حالت مساحت ذوذنقهٔ BMPC را برحسب a و x حساب کنید و معلوم کنید بازاء چه مقدار x این مساحت می‌نیمم است . ثالثاً اگرمثلث AMP متساوی‌الساقین باشد $(AM = AP)$ ثابت کنیدوقتی x تغییر کند مثلث AMP حول یك خط ثابت می‌چرخدوعمود مشترك این خط ثابت را باخط D رسم کنید . رابطاً مرکز کرهٔ محیطی هرم MABC را پیداکرده شعاع آنرا برحسب a و x بدست آورید

***

دبیرستان البرز ـ فرستنده : یدالله حاج جعفری

۱۳۰۹ـ دو خط متنافر D و Δ که طول عمود مشترك آنها $HH' = 6\text{Cm}$ میباشد مفروض‌اند (H برD و H' برΔ) نقطهٔ M رابرHH' طوری انتخاب میکنیم که $MH' = 2\text{Cm}$ باشد. اولا ازنقطهٔ M صفحهٔ P را موازی D و Δ رسم کنید . ثانیاً نقاط غیرمشخص A و B را بترتیب به D و Δ انتخاب میکنیم پاره‌خط AB را رسم میکنیم تاصفحه P را در N قطع نماید ثابت کنید $\frac{NA}{NB} = \frac{1}{2}$. ثالثاً هرگاه $AM = 10\text{Cm}$ باشد مکان هندسی نقطهٔ Q وسط AB را پیدا کنید

***

دبیرستان دارالفنون ـ دبیر محمدعلی شیخان ـ فرستنده محمدداد بخش

۱۳۱۰ـ چهاروجهی SABC مفروض است اولا ثابت کنید چهارقطعه‌خط که هریك از آنها یك رأس را به محل تلاقی میانه‌های وجه مقابل بآن رأس وصل میکند از یك نقطه مانند P میگذرند و نقطهٔ P در $\frac{3}{4}$ هریك از آنها ابتدا ازرأس قرارداد . ثانیاً اگر G محل تلاقی میانه های مثلث ABC باشد اندازهٔ SG رابحسب طول یالهای این چهاروجهی بدست آورید .

***

دبیرستانهای هدف

۱۳۱۱ـ صفحهٔ P وخط Δ درآن و دونقطه A و B در خارج آن داده شده‌اند برخط Δ نقطه‌ای مانند C بیابید که‌در مثلث ABC زاویهٔ C مساوی ۹۰ درجه باشد .

۱۳۱۲ـ مسألهٔ فوق حل شود وقتی بجای خط Δ دایره (γ) درصفحهٔ P مفروض باشد

دنبالهٔ مسائل از :

استاد دکتر محسن هشترودی

« علاوه بر چند مسألهٔ مندرج در شمارهٔ اول ، تاکنون ۶۷ مسأله از استاد مربوط بریاضیات متوسطه »
« در مجلهٔ یکان بچاپ رسیده است . دنبالهٔ مسائل درزیر درج میشود . »
« صدوبیست مسأله باحل ازاستاد دکترهشترودی اولین کتاب از انتشارات یکان است که منتشر »
« خواهد شد . خواستاران بنشانی صندوق پستی ۲۴۶۳ اطلاع دهند . »

I ـ ۱۳۱۲) اگر نقطهٔ D برروی قاعدهٔ BC مثلث ABC واقع باشد ثابت کنید که رابطه :

$$\overline{AB}^2.\overline{DC}+\overline{AD}^2.\overline{CB}+\overline{AC}.^1\overline{BD}+\overline{BD}.\overline{DC}.\overline{CB}=0$$

همواره برقراراست (اگر نقطه A برروی BC واقع باشد یعنی مثلث به‌خط بدل‌شود بازهم رابطه محقق است وبرابطه کلی شال معروف است) در رابطه فوق قطعات $\overline{DC}$ و $\overline{CB}$ و $\overline{BD}$ ساحب جهت فرض شده‌اند اگر از جهت صرفنظرشود رابطه را میتوان بصورت :

$$\overline{AB}.^2\overline{DC}+\overline{AC}.^2\overline{BD}=\overline{AD}.^1\overline{BC}+\overline{BD}.\overline{DC}.\overline{BC}$$

نوشت . این رابطه بنام قضیه استوارت Stewart معروف است آنرا ثابت کنید .

II) سه‌نقطه A و B و C بریك خط‌مستقیم مفروض‌اند سه‌نیمدایره مرتباً بقطرهای AB و BC و CA رسم می کنیم شعاع دایره‌ای که براین سه‌نیمدایره مماس است تعیین کنید .

III) از نقطه B (که بین A و C فرض شده است) مماس مشترك دونیمدایره داخلی را رسم می کنیم تا نیمدایره خارجی را درنقطه D قطع کند خطوط DA و DB دونیمدایره درونی را مرتباً درنقاط 'A و 'C قطع می کنند ثابت کنید که خط 'A'C برشعاع OD عمود است (O مرکز نیمدایره خارجی بقطر AC می‌باشد) .

IV) ثابت کنید که سطح محصور بین سه‌نیمدایره مذکور با سطح دایره‌ای بقطر BD برابر است .

IV) شعاع یکی از نیمدایره‌های درونی را به x وشعاع دائره مماس مشترك سه‌نیمدایره را به y می‌نمائیم مطلوبست تغییرات y از روی x درصورتیکه سطح محصور بین سه‌نیمدایره مقدار ثابتی برابر $R^2\pi$ باشد .

منحنی نمایش تغییرات تابع y ازروی x برسهمی متساوی‌الساقین $xy=R^2$ مجانب است .

۱۳۱۳ ـ I) اگر در چهارضلعی ABCD رابطه :

$$\overline{DC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

محقق باشد اضلاع BC و DA برهم‌عمودند وبالعکس اگراین دوضلع برهم عمودند باشند مجموع مربعات دوضلع دیگر برابرمجموع مربعات اقطار است .

II) ثابت کنید که اگردرچهارضلعی محاطی ABCD اضلاع BC و AD درنقطه تلاقی O برهم عمود باشند دردومثلث قائم‌الزاویهٔ OAB و OCD میانه هریك ارتفاع دیگری است وبالعکس اگردو چهار ضلعی محاطی اضلاع مقابل BC و AD در نقطه O متلاقی شوند ودر دومثلث OAB و OCD میانه نظیررأس O درهریك ارتفاع نظیررأس O دیگری باشد اضلاع BC وAD بر هم عمودند .

III) اگر E وسط BC و F وسط AD باشد ثابت کنید که قوت نقطه O نسبت بدایره محیطی چهارضلعی برابر است با $2\overline{AB}.\overline{DC}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (α زاویه بین AB و CD است)

IV) دایره O بشعاع R مفروض است مربعی که مرکز آن برمرکز دائره منطبق است دائره را درامتدادهشت وترغیر

منطبق براضلاع مربع قطع می‌کند که چهار پنجم‌متساوی‌اند یعنی درواقع دووتر ازوترها مستقل‌اند ، ثابت کنید که حاصل‌ضرب این دووتر مساوی‌است بادوبرابر مجذورمساحی‌که از رأس مربع بدایره رسم میشود .

۱۳۱۴ـ معادله $x^4+2ax^3+bx^2+(ab-a^3)x+c-0$ را حل‌وبحث کنید . اگر c مثبت بوده و تغییر نکندولی پارامترهای a و b تغییر کنند این پارامترها را مرتباً طول‌و عرض نقطه‌ای مانند M درصفحه aob فرض کرده وتعیین کنید که موقع نقطه M درصفحه aob درچه ناحیه‌ای باشد تا معادله چهار جواب حقیقی داشته باشد ؟

۱۳۱۵ـ I) ثابت کنید که اگر به‌حاصل‌ضرب چهارجمله متوالی از یك‌تصاعد عددی قوه چهارم قدرنسبت‌را بیفزائیم‌حاصل مجذورکامل است بنابراین معادله $x(x+a)(x+2a)(x+3a)-M=0$ را حل وبحث کنید .

II) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x(x+a)(x+2a)(x+3a)$ را رسم کرده و بحث معادله‌را ازآن نتیجه بگیرید

۱۳۱۶ـ دائره‌ای بمرکز O وبشعاع R درصفحه قائم مفروض است . نقطه‌ای وزین بجرم m درنحت اثرقوه ثقل‌برروی این دائره حرکت می‌کند . ثابت کنید که همواره میتوان نقطه‌ای ثابت برروی قطرقائم چنان تعیین کرد که‌اگر قوه متناسب با فاصله نقطه وزین‌را به‌این نقطه جذب کند حرکت نقطه وزین برروی دائره حرکتی متشابه دوراني باسرعت زاویه معلوم ω گردد . فاصله این نقطه‌را ازمرکز دائره وضرایب تناسب قوه جذب را معلوم کنید (شتاب قوه ثقل g معلوم است) .

۱۳۱۷ـ تابع $y=(m+1)x^2-(6m+\alpha)x+8(m+1)$ که درآن α عددی ثابت و m پارامتر است مفروض است .

I) معلوم کنید که جمیع‌منحنیات نمایش تغییرات این تابع بازاء مقادیر مختلف m بردو نقطه ثابت A وB میگذرند که‌با مبداء مختصات به‌یك استقامتند .

II) تابع بازاء $m=-1$ به‌خطی مستقیم تبدیل میشود این‌خط‌کدام خطاست ؟

III) عمودمنصف قطعه خط AB خط مستقیمی است که تابع پارامتر α است . محقق کنید که اوضاع مختلف این خط بازاء مقادیرمختلف α برسهمی ثابتی مماس است (اثبات هندسی مورد نظراست . با محاسبه اثبات طولانی‌ترخواهد بود) .

IV) α را چنان انتخاب کنید که سطح منحنی نمایش تغییرات تابع بازاء $m=8$ محصور بین عرضهای نقاط A و B و محور xها تنصیف‌شودیعنی دوقسمت‌فوقانی ازاین سطح نسبت‌به‌محور ox معادل قسمت تحتانی از این سطح نسبت به محور xها باشد .

V) بازاء مقادیر معلومی از α پارامتر m را چنان تعیین کنید که وتر تقاطع منحنی نمایش تغییرات تابع مذکور با محورox طولی برابر طولAB داشته باشد . بحث‌در مسئله . معمولا برای mدو مقدار بدست می‌آیدآیاهردو قابل‌قبولند ؟ بازاء دومقدار مخصوص α_1 و α_2 از α برای m فقط یك جواب بدست می‌آیدآیا این مقادیر برای α_1 و α_2 قابل قبولند ؟ α_1 و α_2 را تعیین کنید .

۱۳۱۸ـ مجموع سینوسها و مجموع کسینوسهای زوایائی راکه تصاعد عددی تشکیل‌می‌دهند حساب کنید .

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$$
$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$$

۱۳۱۹ـ طرفین ریسمانی بیوزن وکشش ناپذیردر دونقطه A وB بارتفاعهای متفاوت ازسطح زمین ثابت شده است . حلقه‌ای وزین بجرم m براین‌ریسمان میلغزد مطلوبست حال‌تعادل ریسمان ووضع نقطهٔ m . کششهای ریسمان را دردوطرف حلقه حساب کنید . (حلقه را بسیارکوچك که با نقطه قابل اشتباه باشد تصورمی‌کنیم) . اختلاف ارتفاع دونقطه A و B برابر b وفاصله آنها از یکدیگر برابر c وطول ریسمان $a>c$ است . (حال تعادل ووضع نقطه m را با حل هندسی تعیین کنید) .

۱۳۲۰ـ برصفحه افقی شیاری بسیار باریك (قابل‌اشتباه با خط هندسی)احداث شده است و میله‌ای کشش ناپذیر وبیوزن ازآن عبورکرده ودر صفحه قائم شیارواقع است . دردو طرف میله دووزنه بشکل‌کره بجرمهای m و M ثابت شده است جرم m را برروی شیار درصفحه افق ازوضع‌اولیه‌خارج‌می‌کنیم بقسمی‌که میله درصفحه قائم شیارباقی‌بماند وجرم M درنقطه دیگری‌جزوضع اولیه خویش قرارگیرد (یعنی‌میله درامتداد قائم نمی‌باشد ودرامتدادی مایل قرارگرفته است بقسمی‌که درصفحه قائم شیار مستقراست و جرم m برروی شیار حرکت می‌کند) و میله ازحال تعادل قائم خارج‌گردد . سپس میله را بدون سرعت اولیه رها مـی‌کنیم . مطلوبست مسیرحرکت جرم M . طول میله برابرa می‌باشد (حل هندسی مورد نظراست) .

۱۳۲۱ـ دوصفحه شیبدار (incliné) عمود برهم که یکی‌ازآنها با صفحه افق زاویه α میسازد ثابت شده‌اند میله‌ای‌وزین ومتجانس درصفحه قائم برروی این‌دوصفحه شیبدار میلغزد (یك‌سر میله بریك‌صفحه وسردیگرآن برروی صفحه دیگراست) حالات تعادل میله را تحقیق کنید . حالتهای پایدار یاناپایدار را تشخیص دهید . عکس‌العملها را درنقاط اتکاء میله برروی صفحه‌های شیبدار حساب کنید . طول میله a وجرم‌آن M است (حالات تعادل را باطریق‌هندسی تعیین کنید) .

۱۳۲۲ـ دو مخروط مایل متماس که قاعده‌های آنها دودایره مماس داخل می‌باشند ورؤس‌آنها برروی یك مولد مشترك که از نقطه تماس دوقاعده برسطح مشترك‌آنها عمود است‌قراردارند یکدیگررا قطع‌می‌کنند (بدیهی است که یك قسمت از فصل مشترك دو مخروط همین مولد مشترك‌است) . ملخص مخروطها را با انتخاب سطح‌قاعده مشترك بعنوان‌سطح افقی تصاویرو انتخاب سطح قائم تصویرآن چنان‌که بموازات مولدمشترك وعمود برخط‌المرکزین دوقاعده باشد تکمیل کنید .

I) ثابت کنید که‌تصویرافقی منطبق‌مشترك دومخروط دائره است‌وبادوقاعده درهمان نقطه تماس مماس می‌باشد .

II) تصویر قائم مقطع مشترك خطی است بموازات خط‌الارض .

III) بنابراین نتیجه بگیرید که مقطع مشترك‌دومخروط (جزمولد مشترك‌مذکورفوق) دائره‌است .

۱۳۲۳ـ حد عبارت :

$$\frac{2^n}{\sqrt{2+2\cos\alpha}\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}\ \ldots\ldots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}}}}$$

n عدد

وقتی n بسمت بی‌نهایت میل‌می‌کند تعیین کنید .

۱۳۲۴ـ I) حد عبارت $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\ldots}}}}$ را تعیین کنید .

آیا بازاء چه مقادیری از a این حد منطق (گویا) می‌باشد ؟

II) حد عبارت $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{\ldots}}}}}$ را تعیین کنید . اگر حد قبلی منطبق باشد این حد نیز منطق است .

III) آیا وجود حدعبارت دوم مطلق است یعنی مانند عبارت اول بازاء جمیع مقادیر a حدی‌که بدست میآید حدواقعی است ؟ (برای اثبات وجود حدباید محقق کنید که در هرمرحله‌ای از جمله‌های متوالی اگر حد را جانشین کنیم مقدار عبارت تغییر نمی‌کند) .

IV) مقدار مخصوصی از a حدعبارت دوم را بی‌معنی میسازد . درتصاعد هندسی نزولی :

$\ldots\ldots\div aq^3\div aq^2\div aq\div a$ حد مجموع $S=\frac{a}{1-q}$ بشرط آنکه $|q|<1$ اگر $q=-1$ انتخاب شود .

تصاعد بصورت $a-a+a-a+a-a+\ldots$ نوشته میشود ومشاهده میشود که اگرعده جمل زوج باشد حدآن صفر خواهد بود و اگرعده جمل فرد باشد حدآن برابر a خواهد بود یعنی درواقع حدی وجود ندارد . اما اگر ملاحظه کنیم وقتی تعداد جمل بی‌نهایت میشودتشخیص زوج وفرد میسر نیست‌میتوان گفت حدواقعی قدر متوسط دو حدگفته شده یعنی a و 0 می‌باشد یعنی حد برابر $\frac{a}{2}$ است از دستور $S=\frac{a}{1-q}$ نیز اگر $q=-1$ شود همین مقدار مستفاد میشود و بدینقسم وجود حدی‌که از فرمول بدست می‌آید تعبیر میشود (یعنی قدر متوسط‌دوحد زوج وفرد) درمسئله حدعبارت دوم نیز چنین تعبیری برای مقدارمخصوص a وجود دارد ولی توضیح‌آن درحدود معلومات متوسطه نیست .

۱۳۲۵ـ چون‌نقطه M ازسطح مثلث(درونی‌یابیرونی) را براضلاع مثلث‌تصویر کنیم‌مثلث abc بدست‌می‌آیدکه آنرا اصطلاحاً مثلث پدر (Podaire) نقطه M نسبت بمثلث ADC مینامند

I) ثابت کنید که سطح مثلث پدر نقطه M نسبت بمثلث معلوم ABC با قوت نقطه M نسبت بدایره محیطی مثلث متناسب است بنابراین مکان هندسی نقطه M که سطح مثلث پدر آن ثابت بماند دائره‌ای است متحدالمرکز با دائره محیطی مثلث (در واقع دو دایره اگر سطح مثلث پدر را بیعلامت انتخاب کنیم) قضیه سنسون حالت خاصی از این قضیه است چه اگر سطح مثلث پدر صفر شود بایستی نقاط a و b و c بریك استقامت باشند ومکان دائره محیطی مثلث ABC می‌باشد

II) قضیه فوق را برای هر شکلی میتوان تعمیم داد یعنی اگر M نقطه‌ای از سطح کثیر الاضلاع P باشد . تصاویر M بر روی اضلاع کثیر الاضلاع P کثیر الاضلاع دیگری تشکیل می‌دهد که کثیر الاضلاع پدر نقطه M نسبت به کثیر الاضلاع P نامیده میشود . اگر سطح کثیر الاضلاع پدر ثابت بماند مکان هندسی نقطه M دائره است . و تمام این مکانها (برای سطوح مختلف کثیر الاضلاعهای پدر) متحدالمرکزاند .

برای چهارضلعی این نقطه مرکز مشترك مکانهای مختلف کانون سهمی است که بر اضلاع چهارضلعی مماس است .(یعنی نقطهٔ مشترك چهاردائره محیطی مثلثهائی که باسه ضلع چهارضلعی ساخته میشوند) وبطور کلی اگر کثیر الاضلاعی بر سهمی معینی محیط باشد مرکز مشترك مکانهای مذکور کانون این سهمی است

۱۳۲۶ـ مخروط مایلی که قاعده آن درصفحه P دائره معلومی است مفروض است . بدیهی است که مقاطع متوازی با P همواره دائره می‌باشد . مقاطع مستوی دیگری نیز وجود دارد که همه با هم متوازیند ودائره احداث می‌کنند. این مقاطع را مشخص کنید (البته در مخروط قائم فقط یك مقطع مستدیر وجود دارد) . مسئله را برای استوانه مایل نیز حل کنید

۱۳۲۷ـ شرط اینکه دو دایره در فضا بر روی یك کره واقع باشند چیست ؟ این شرط کافی است که دو دایره بر روی یك مخروط نیز قرار گیرند . حالت استوانه را تحقیق کنید . آیا رأس مخروط یا امتداد مولد استوانی را چگونه میشود تعیین کرد؟ تعیین مرکز کره شامل دو دایره ؟

۱۳۲۸ـ جدول مکعبات اعداد از یك تا N^3 درست است . حاصل ضرب سه عدد متوالی برابر a است وعدد معلوم a درحدود جدول مذکور است یعنی $a<N^3$. این سه عدد را بکمك جدول مذکور تعیین کنید

۱۳۲۹ـ اگر عدد N بدو صورت مجموع دومجذور کامل باشد یعنی $N=a^2+b^2=c^2+d^2$ ثابت کنید که عدد N اول نیست (بدیهی است که از دومجذور یکی زوج و دیگری فرد فرض شده است والا قضیه بخودی خود روشن است) اعداد اولی که عوامل N می‌باشند برچهار یك باقی میآورند یعنی اعداد اولی بصورت $4K+1$ می‌باشند محال است عدد اولی بصورت $4K-1$ عامل N باشد

۱۳۳۰ـ ثابت کنید که اگر n عددی فرد باشد $19^n+11^n+3^n$ بر ۳۳ و $23^n+13^n+3^n$ بر ۳۹ بخش پذیر می‌باشند

۱۳۳۱ـ بازاء جمیع مقادیر صحیح ومثبت n عدد a^n-a بر ۱۰ بخش‌پذیر است معلوم کنید که عدد صحیح و مثبت a چگونه اعدادی میتواند باشد . همچنین بازاء عدد معلوم a (صحیح ومثبت) a^n-a بر ۱۰ بخش‌پذیر است معلوم کنید که عدد صحیح ومثبت n چگونه اعدادی میتواند باشد ؟

۱۳۳۲ـ اگر اعداد صحیح ومثبت a و b و c در رابطه $a^2=b^2+c^2$ صدق کنند حاصل ضرب abc بر ۶۰ بخش پذیر است . با مقایسه اتحاد : $(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2$ جوابهائی (یا مقادیری) برای a و b و c بدست می‌آید. در اینصورت کلیه مثلثهای قائم‌الزاویه که اضلاع آنها اعداد صحیح است معلوم میشوند . اگر عدد صحیح n را بر a و b و c که با اتحاد فوق تعیین شده‌اند بیفزائیم مثلث حاصل جدید برحسب علامت n حاده‌الزاویه یا منفرجة‌الزاویه خواهد بود . مطابقه علامت را با حاده یا منفرجه بودن زاویه های مثلث بحث کنید . آیا عکس قضیه نیز صحیح است . یعنی اگر در مثلثی اضلاع اعداد صحیح باشد (توجه شود که مانعی ندارد ضلعی منفی فرض شود زیرا در هندسه قدرمطلق ضلع منظور میشود ولی درحبر از این نظر منعی نیست) آیا میتوان عدد صحیحی (مثبت یا منفی) یافت که افزودن آن باضلاع مثلث مثلث جدیدی بدست دهد که قائم‌الزاویه باشد ؟معلوم کنید که درکدام مثلثها این امر ممکن است ؟ (دو دسته ازمثلثها وجود دارد که یکی مثلثی است که اضلاع آن تصاعد عددی تشکیل می‌دهد) ثابت کنید که برای هر مثلث قائم‌الزاویه عددی صحیح ومثبت وجوددارد که اگر آنرا از اضلاع مثلث کم کنیم (قدرمطلق تفاوتها منظور است) مثلث جدید بازهم قائم‌الزاویه است . ثابت کنید که این عدد دو برابر قطر دائره محاطی مثلث اول است.

۱۳۳۳ـ I) تصویر افقی نقطه A درست است ومیدانیم که قطعه خط BC معلوم بر روی خط الارض از نقطه A در تحت زاویه قائمه رؤیت میشود تصویر قائم نقطه A را تعیین کنید

II) ADEF چهار وجهی است که خط الرأسهای مقابل آن برهم عمودند وقاعده DEF آن در صفحه افقی تصویر در دائره‌معلوم O که بشعاع R محاط است. طول ضلع DE معلوم ودردست است ملخص چهاروجهی را تکمیل کرده فصل مشترك آنرا با صفحه‌ای که برخط‌الارض ووسط خط‌الرأس AD میگذرد تعیین کنید

۱۳۳۴ـ دو دایره متحدالمرکز مفروض‌اند قاطعی متغیر دائره خارجی‌را درنقاط A وB ودائره داخلی‌را درنقاط D وC قطع می کنند ثابت کنید که :

I) $AC \times CB$ مقدار ثابتی دارد وبا تغییرقاطع مقدارآن تغییر نمی‌کند

II) از نقطه معلوم P قاطعی چنان مروردهید که با تقاطع با دوایربه سه قسمت متساوی تقسیم شود و یا بطورکلی نسبت قطعات آن نسبت معلومی باشد

III) قاطع‌بموازات قطر ثابتی از دائره باقی میماند . اگرشکل را حول این قطردوران دهیم دواستوانه محاط در دو کره متحدالمرکز بدست می‌آید اختلاف دوسطح جانبی این استوانه‌ها را با تغییرقاطع بحث کنید .

IV) قاطع را چنان تعیین‌کنید که اختلاف دوسطح جانبی استوانه های مذکور برابر مقدار معلوم πh^2 گردد . بـرای مسئله را بحث کنید $h = 2\sqrt{RR'}$

۱۳۳۵ـ I) در مثلثی بین اضلاع abc رابطه $b^2 - c^2 - 2ac = 0$ وجود دارد ضلع a وضع ثابتی‌دارد (نقاط B وC دونقطه ثابت درصفحه می‌باشند) ثابت کنید که مکان رأس A سهمی است.

II) از این مثلثها آنهائی که اضلاعشان اعداد صحیح‌اند تعیین کنید . محقق کنیدکه اگر اضلاع صحیح باشند ضلع c یا مجذورکامل است یا دو برابر یك مجذورکامل

III) در این مثلثها بین زوایای B و C رابطه $tgC = \frac{2\, tg\frac{B}{2}}{3 + tg^2\frac{B}{2}}$ وجود دارد . نتیجه بگیرید که زاویه C همواره حاده است ولی زوایای A وB ممکن است منفرجه گردند . حدود تغییرات این زوایارا تعیین کنید وبامکان هندسی شماره(۱)مطابقه دهید (قوسهائی که نظیرزوایای منفرجه‌اند تشخیص دهید)

IV) از این مثلثها آنهائی که قائم‌الزاویه می‌باشند معین کنید وخطوط مثلثاتی زوایای آنها را حساب کنید . نقاطی‌برروی سهمی شماره (۱) که این مثلثها را مشخص می کنند معلوم کنید

V) حالاتی که مثلثها متساوی‌الساقینی میشوندمعین کنید (دوحالت)

VI) ترسیم مثلثهای مذکور با دانستن دوجزء از اجزاء abc وCBA (جز دوزاویه)

۱۳۳۶ـ در مثلثی بین اضلاع رابطهٔ $b^2 - c^2 - kac = 0$ که درآن k عددی‌ثابت است‌برقرارمی‌باشد

I) ثابت کنید که اگر $k = -1$ باشد زاویه $\hat{B}$ دو برابر زاویه $\hat{C}$ می‌باشد

II) اگر رؤس B وC مثلث‌ثابت‌بماندمکان‌هندسی رأس A مقطع‌مخروطی است(سهمی اگر $|k| = 2$ و بیضی اگر $|k| < 2$ وهذلولی اگر $|k| > 2$)

III) اگر $k = -1$ باشد بین زوایای مثلث رابطه $C = A + 2B$ برقرارمی‌باشد

IV) منحنی نمایش تغییرات تابع $y = tgC$ را ازروی $x = tg^{B}/_{2}$ رسم وبحث کنید (بحث برحسب مقادیرمختلف k)

۱۳۳۷ـ ثابت کنید که درهرمبنای عددنویسی B :

$$\underbrace{(111\ldots111)}_{2n\text{ رقم}}{}_B - \underbrace{(222\ldots22)}_{n\text{ رقم}}{}_B = \frac{\underbrace{(777\ldots77)}_{n\text{ رقم}}{}^2{}_B}{B-1}$$

γ بزرگترین رقم عدد نویسی است یعنی $\gamma = B - 1$. بخصوص در مبنای اعشاری :

$$\underbrace{111\ldots11}_{2n\text{ رقم}} - \underbrace{222\ldots2}_{n\text{ رقم}}\,2 = \underbrace{(333\ldots3)}_{n\text{ رقم}}{}^2$$

مسائل برای دانشجویان رشته‌های ریاضی

I ـ دو مسألهٔ ارسالی : علیرضا قسیمی (دانشجوی سال دوم دانشگاه پهلوی شیراز)

۱۳۴۰ـ یك سلسله دایره که مراکز آنها روی یك خط راست قراردارند و با یکدیگر مماس خارج میباشند و شعاع آنها به‌تصاعد هندسی نزول میکند مفروض است . مطلوبست مرکز ثقل محیط این دوایر با فرض آنکه تعداد آنها بینهایت باشد .

۱۳۴۱ـ معادلهٔ مرتبهٔ n ام خطی با ضرائب ثابت زیررا داریم وفرض میکنیم که r یك جواب n گانهٔ معادلهٔ مبین باشد ثابت کنید که $x^p e^{rx}$ یك جواب خصوصی معادله است . $n>p$ و p عددصحیح غیرمنفی میباشد .

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

***

II ـ مسائل امتحان نیمهٔ دوم سال اول دپارتمان ریاضی دانشگاه ملی ایران

استاد : دکتر وازگن آوانیسیان

« باامید تهیهٔ پایه‌های چاپی علامت‌های جدیدریاضی ، ازچاپ این‌مسائل درشمارهٔ قبل‌خودداری » « شد . اما چون‌هنوز تهیهٔ این‌علامت‌ها میسر نشده است ، درچاپ‌مسائل زیر ، با ترکیب علامتهای‌موجود ، » « علامتهائی مشابه با علامتهای اصلی بکاررفته است . »

امتحان جبر (وقت سه ساعت)

۱۳۴۲ـ در $\mathbb{R}^2$ نسبت‌بدومحور متعامدمجموعه‌ماتریسهای مربع دوسطر ودوستونی که بشکل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ باشندبا Sومجموعهٔ ماتریسهائی بشکل $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$را با M نمایش میدهیم .

۱ـ ثابت کنید

$$(A(\overline{-}S \text{ و } B(\overline{-}S) \Longrightarrow A.B(\overline{-}S \text{ و } A+B(\overline{-}S$$

$$A(\overline{-}S \Longrightarrow A^{-1}(\overline{-}S \quad (A\neq O)$$

بقیه از صفحه پیش

اگر مبنای Bعددنویسی چنان باشدکه : $121_B-1=k^2$ گردد دراینصورت‌درمبنای $B=k^2+1$ چنین‌خواهیم‌داشت:

$$\underbrace{(\overline{kk\ldots kk})^2}_{n\text{ رقم}}=\underbrace{22\ldots 22}_{n\text{ رقم}}-\underbrace{111\ldots 111}_{2n\text{ رقم}}$$

۱۳۳۸ـ اگر تفاوت دوعدد صحیح مثبت a و b بر ۷ بخش پذیر نباشد ثابت‌کنید که مانده عبارت $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$ بر ۷ همواره برابرواحد است .

II) اگر تفاوت دوعددصحیح ومثبت b بر ۷ بخش پذیرباشد (بی‌آنکه a و b هردوبر ۷ بخش پذیرباشند) عبارت a^7-b^7 بر ۴۹ بخش‌پذیر است .

۱۳۳۹ـ تصویر رأس هرم مثلث‌القاعده $SABC$ که کنج سه‌وجهی‌آن درراس S کنج سه‌قائمه است برصفحه مقایسه معلوم است قاعده ABC هرم درصفحه مقایسه درداثره‌معلومی بمرکز O وبشعاع R محاط است و فاصله Os (s تصویر رأس s برصفحه مقایسه است)ازR کمتراست . زاویه A مثلث قاعده دردست است . ملخص هرم را تکمیل کنید ورقوم s را بدست‌بیاورید .

محقق کنید که کره‌ای که دایره مذکور (دائره محیطی مثلث ABC) دائره عظیمه‌آن است برچهار وجهی $SABC$محیط است . نشان دهیدکه با تسطیح هر یك ازوجوه SAB و SAC و SBC با استفاده ازاینکه‌کره محیطی هرم همین‌کره می‌باشد رقوم نقطه S همواره یك‌مقدار مشخص ثابت‌خواهد بود $R=5$ سانتی‌متر $Os=2$ سانتی‌متر و $A=60^\circ$

ثابت کنید که مجذور مقیاس‌سطح مثلث ABC برابراست با مجموع‌مجذور مقیاسهای‌سطوح مثلثهای SAB و SACو SBC

۲ـ ثابت کنید که برای قوانین جمع وضرب ماتریسها مجموعه S یك هیئت جابجائی است .

۳ـ ثابت کنید

$(E(\subset M$ و $F_1(\subset M) \Longrightarrow E.E_1(\subset S$

$(E(\subset M$ و $A(\subset S) \Longrightarrow E.A(\subset M$

٤ـ ثابت کنید ماتریسهای

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

استقلال خطی دارند . ازآن نتیجه بگیرید که I و J یك پایه فضای‌برداری S میباشند، ودر نتیجه هرماتریس $A(\subset S$ را بشکل زیرمیتوان نوشت . $A=aI+bJ$

۵ـ نشان بدهید که $J^2=-I$ است .

بهر ماتریس $A=aI+bJ$ عدد مختلط $z=a+ib$ را نسبت میدهیم : نشان بدهید که گسترش $A\to z$ یك ایزومورفیسم فضای S روی فضای اعداد مختلط C است ، و بعبارت دیگر S و C ایزومورف هستند (برای قوانین جمع وضرب) .

٦ـ زیرفضای $S^* \subset S$ راکه از ماتریسهائی بشکل $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ (که در آن $a^2+b^2=1$ است) تشکیل یافته در نظر میگیریم . ثابت کنید .

$(A^*(\subset S^*$ و $B^*(\subset S^*) \Longrightarrow A^*B^*(\subset S^*$

$A^*(\subset S^* \Longrightarrow (A^*)^{-1}(\subset S^*$

از آن نتیجه بگیرید که S^* یك زیر گروپ S است .

۷ـ ترانسفرمه‌یك‌بردار $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ توسط $A(\subset S$ را با $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ نمایش میدهیم :

$$(1) \quad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

x' و y' را برحسب x و y بنویسید . نشان بدهید اگر $A(\subset S^*$ باشد طول بردارها در ترانسفرماسیون (۱) تغییر نمیکند . بعبارت‌دیگر (۱) یك‌ایزومتری است .

۸ ـ نشان بدهید اگر در ماتریس $A(\subset S$ ، $b=0$ باشد $(a\neq 0)$ ، نقطه $(x'$ و $y')$ ازنقطه $(x$ و $y)$ بوسیله یك تجانس بمرکز O بدست میاید .

۹ـ اگر $a^2+b^2=K^2\neq 0$ باشد نشان بدهید که هر ماتریس بشکل $A(\subset S$ بشکل

$$\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

نوشته میشود . ازآن نتیجه بگیرید که در ترانسفرماسیون (۱) نقطه $(x'$ و $y')$ ازنقطه $(x$ و $y)$ توسط ترانسفرماسیونی که عبارت است ازحاصلضرب دوران بمرکز O و زاویه θ و تجانسی بمرکز O ونسبت K بدست میاید .

۹ـ نشان بدهید اگر $a\neq 0$ باشد مقادیرخاص ماتریس $A(\subset S$ اعداد مختلط متمایز خواهند بود .

امتحان آنالیز (وقت ٤ ساعت)

ـ A ـ

۱۳۴۳ـ) در $\mathbb{R}^2$ چه میدانهائی را Simprlement connexe مینامند. آیامجموعه نقاط

$$0<\varepsilon^2<x^2+y^2<R^2$$

چنین میدانی است ؟

چه شرایطی لازم است تا اینکه انتگرال فرم دیفرانسیلی

$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy \quad (x,y)(\subset D$

در طول هرخم مسدود ژردان اصلاح پذیر بدون نقاط مکرر $D\subset(C)$ برابر صفر باشد ؟

فرمول ریمن ـ گرین (Riemann−green) را بیان کنید :

۲ـ فرم دیفرانسیلی $\alpha(\subset \mathbb{R}$ و $\alpha>0)$

$$\omega_\alpha=\frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

a) $\omega_\alpha\wedge\omega_\beta$ ودیفرانسیل‌خارجی $d\omega_\alpha$ را حساب کنید α و را طوری‌تعیین کنید که $d\omega_\alpha=0$ باشد .

b) آیا انتگرال $I=\int_{C^+}^{\omega_1}$ که در آن C^+ بیضی

$E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

است بستگی به b و a دارد ؟ مقدار I راحساب کنید .

۳ـ انتگرال $(\alpha>0)$

$$A\varepsilon=\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)_\alpha}$$

راکه درآن D میدان $\varepsilon^2>x^2+y^2<1$ است حساب کنید. بازاء چه‌مقدار α ، $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$ وجود دارد .

—B—

۱۳۴۴ـ ۱ـ ثابت کنید اگر در سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $\lim_{n\to\infty} |a_n| = l \neq 0$ باشد شعاع همگرائی سری برابر $\frac{1}{l}$ خواهد بود

۲ـ سریهای درست زیر از متغیر حقیقی x که شعاع همگرائی آنها ۱ است .

$$(1)\quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < 1$$

در رابطه $g(x) = (1-x) f(x)$ صدق میکنند :

مطلوبست محاسبه ضرایب $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ برحسب ضرایب $b_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

۳ـ ثابت کنید سری درست

$$(2)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) x^n$$

همگرا و شعاع همگرائی آن ۱ است .

۴ـ در سری (۱) فرض میکنیم $b_0 = 1$ و $b_n = \frac{1}{n!} (n = 1, 2, \ldots)$ باشد در اینصورت $g(x)$ برابر چه تابعی است ؟ بکمك سئوال ۲ حاصلجمع $f(x)$ سری (۲) را پیدا کنید .

۵ـ هرگاه $f(x)$ حاصلجمع سری (۲) باشد ، منحنی‌های Γ_1 و Γ_2 نمایش تغییرات توابع

$(\Gamma_1)\quad y_1 = f(x)$ و $y = |f(x)| \quad (\Gamma_2)$

را نسبت بیك دستگاه متعامد رسم کنید .

۶ـ آیا سطح مجموعه نقاط محصور بین Γ_2 محورهای ox و oy وخط $x = 1$ محدود است ؟

آیا حجم حاصل از دوران این سطح دور ox محدود است؟

۷ ـ حاصلجمع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ را وقتی همگرا باشد تعیین کنید .

ثابت کنید سری

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$ همگرا و شعاع همگرائی آن ۱ است .

(یادآوری میشود که میتوان نوشت

$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + C + \varepsilon(n)$ که در آن C مقدار ثابت Euler است و $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$

۸ـ با در نظر گرفتن سئوال ۲ ، $F(x)$ را حساب کنید.

III ـ از جمله مسائل امتحان ریاضیات نیمهٔ دوم سال اول دانشکدهٔ معماری دانشگاه ملی ایران

استاد : دکتر آوانیسیان

۱۳۴۵ـ تابع $f(x) = 4x(1 - x^2)$ مفروض است

(در تمام مسئله فرض میشود $|x| \leq 1$)

۱ـ نمودار f را رسم کنید . آیا f در نقطه $x = 0$ مشتق دارد ؟

۲ـ تابع زیر را در نظر میگیریم .

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & x \neq 0 \quad |x| \leq 1 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$$

آیا g در نقطه $x = 0$ پیوسته است ؟ نمودار g را رسم کنید .

۳ـ انتگرال $u_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx$ و همچنین $\lim_{n\to\infty} u_n$ را حساب کنید .

۴ـ مساحت هندسی مجموعه نقاط D محصور بین منحنیهای f و g را حساب کنید :

۵ـ محور oy مجموعهٔ نقاط D را بدو میدان D_1 و D_2 تقسیم میکند (D_1 سمت راست oy) مطلوبست محاسبه سطح D_1 وحجم حاصل از دوران D_1 دور ox

۶ـ محاسبه عرض مرکز ثقل D_1 وقتی یکنواخت فرض شده باشد .

۷ـ محاسبه ممان دیفرسی سطح یکنواخت D_1 نسبت به ox

IV ـ مسائل از :

استاد دکتر محسن هشترودی

۱۳۴۶ ـ توابع اولیه زیررا تعیین کنید .

۱) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+ax}}$ ۲) $\int \frac{dx}{\sqrt[m]{x^{m+1}}}$

(عدد صحیح ومثبت m)

۳) $\int \frac{(x-\frac{1}{x})dx}{\sqrt{x^4+ax^2+1}}$

۴) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x^2+a)\sqrt{x^2+b}-(x^2+b)\sqrt{x^2+a}}$

۵) $\int \frac{dp}{Q\sqrt{X}}$ دو کثیر الجمله‌می باشند که‌دررابطه QوP،۵) دو کثیر الجمله‌می باشند که‌دررابطه $P^2-XQ^2=1$ صدق می کنند و X کثیر الجمله‌ای ازدرجه چهارم است)

۶) $\int \frac{\sin x dx}{a\cos x+b\sin x}$ ۶') $\int \frac{\cos x dx}{a\cos x+b\sin x}$

دوانتگرال (۶)و(۶')را با هم ترکیب کنید که محاسبه سریعتر انجام گیرد .

۱۳۴۷ ـ ثابت کنید که مقدار انتگرال

$\int_0^{\pi} \log|1-2a\cos\theta+a^2|d\theta$ برابر است باصفر اگر $|a|<1$ باشد و برابر است با $2\pi\log|a|$ اگر $|a|>1$ باشد .

۱۳۴۸ ـ بادانستن اینکه

$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$ مقادیرعبارات

$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ و $\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}$

را بدست آورید (عبارت اخیر مستقل از x است)

۱۳۴۹ ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ۲) $\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

۳) $\int_0^{\infty} e^{-kx}\sin x dx$ ۴) $\int_0^{\infty} \frac{df}{1+f^2}$

۵) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}}(a>1)$

۶) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{1-x^2}}(0<a<1)$

۷) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}(a>0)$

۸) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$ $\begin{pmatrix} a=1 \text{ و } a>1 \\ \text{و } 0<a<1 \end{pmatrix}$ (بحث بازاء

۱۳۵۰ ـ روابط زیر را محقق کنید .

$\int_0^{2\pi} \varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)d\lambda$

$\int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n dx=$

$=\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}}$ $\begin{pmatrix} x>1 \\ n \text{ عددصحیح} \end{pmatrix}$

۱۳۵۱ ـ تابع متصل $F(x)$ راچنان تعیین کنید که : $F(x+y)F(x-y)=F^2(x)-F^2(y)$ باشد. بکمک‌این تابع معادله‌فونکسیونل $F^2(x+1)-F^2(x)=F(2x+1)$ را حل کنید . آیا جوابی برای معادله فونکسیونل $F^2(x+1)+F^2(x)=F(2x+1)$وجوددارد؟(صورتهای مختلف جوابهای این معادلات را بایك عبارت بنویسید)

۱۳۵۲ ـ معادله دیفرانسل خطی رتبه دوم

$y''+f(x)y'+q(x)y=0$ چنان است که یك جواب اختصاصی آن y_1 جواب اختصاصی‌دیگری مانند $\varphi(y_1)$ بدست می‌دهد (φ تابعی مشخص و معلوم از y_1 است) معادله رابحث کنید آیا میتوان معادله را حل کرد ؟ رابطه بین p و q را میشود تعیین کرد ؟ حالت اختصاصی اول $\varphi(\lambda)=\lambda^k$ [k عددی است منطق (گویا)] حالت اختصاصی دوم $\varphi(\lambda)=\lambda\log\lambda$ در این حالت بفرض $q(x)=x$ معادله دیفرانسل را تشکیل داده و حل کنید .

۱۳۵۳ ـ ماتریس گردان

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \cdots a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & a_2 \cdots a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots a_1 \end{vmatrix}$$

مفروض است .

۱) دترمینان Δ ماتریس را حساب کنید. مقدار دترمینان را برای $a_k=a_0+ka$ بدست آورید .

۲) حاصل‌های ممتاز ماتریس‌را بدست‌آورید (حاصل‌ممتاز حاصلی است که امتدادآن با تبدیل‌خطی‌وابسته به ماتریس تغییر نمی‌کند) این‌حاصلهارا مرتباً $\vec{E_1}$ و $\vec{E_2}$ و $\vec{E_3}$ و $\vec{E_n}$ می‌نامیم (بطول تقریب یعنی حاصلها نامعین‌می‌باشند) .

۳ـ اگر ازضریب‌تناسب طولهای حاصلهای $\vec{E_k}$ صرفنظر کنیم ومؤلفه‌های حاصلهای $\vec{E_k}$ را بساده‌ترین صورت بنویسیم مقدار عبارت $(\vec{A}.\vec{E_1})(\vec{A}.\vec{E_2})\dots(\vec{A}.\vec{E_n})$ برابر مقدار دترمینان Δ می‌باشد ($\vec{A}$ حاصلی است‌که مؤلفه‌های‌آن سطر اول ماتریس A را میسازد) .

۴) ثابت‌کنید که‌هر کدام ازحاصل ضربهای $\vec{A}.\vec{E_k}$ یک هیئت اعداد تشکیل می‌دهد . اگر n عدد اول باشد این هیئت اعداد دارای $n-1$ واحدمستقل است ولی اگر n تجزیه شود هیئت اعدادبه‌هیئت‌نسبی تنزل Corps relatif پیدا می‌کند. عده می‌نیم واحدهای مستقل‌را تعیین‌کنید . تشابه جبر خطی و آنالیز خطی را برای این هیئت اعداد و توابع هارمونیك نشان دهید .

۱۳۵۴ـ منحنی‌هائی تعیین‌کنید که اگر مسیر قوه‌ای مرکزی‌نسبت‌بمرکزقوای o باشندپدر Podaire آنهانسبت‌به o نیز مسیر قوائی مرکزی نسبت‌بهمان مرکز o باشد (پدرمکان‌هندسی تصویر نقطه ثابت o برروی مماس‌های یك‌منحنی است)

معادله دیفرانسیل این‌منحنی‌ها را تعیین کرده وتعبیر کنید. ازاین تعبیرهندسی طریقه‌ای‌استنتاج کنید که معادله‌دیفرانسیل این منحنیات‌را خطی‌کند(به‌کمك معادله کانونیك مماسها) واز این معادله خطی‌شده بگیرید که منحنی‌های مطلوب اپی‌سیکلوئیدها وهیپرسیکلوئیدها می‌باشند همچنین مارپیچهای‌لگاریتمی از این منحنیات می‌باشند .

۱۳۵۵ـ معادله دیفرانسیل

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ 2 & 2x & x^2 \\ a(x) & b(x) & c(x) \end{vmatrix}$$

را بفرض

$$2xc'(x)-x^2b'(x)=4c(x)-2xb(x)+x^2a(x)$$

حل کنید .

حالت خاص

$$a(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x} \quad c(x)=\frac{1}{2x} \text{ و } b(x)=-1$$

۱۳۵۶ـ میدانیم که معادله دیفرانسیل

$(x^2-1)^2y''+ky=0$ جوابی اختصاصی بصورت

$(x-1)^\alpha(x+1)^\beta$ دارد. این جواب‌را تعیین کنید. مشاهده میشود که برای (α و β)دو مقدار بدست میایدیعنی دوجواب‌اختصاصی از معادله بدست میآید و معادله بدون‌انتگراسیون حل‌میشود .

برای $K=\frac{3}{4}$ جواب عمومی‌را تعیین کنید .

۱۳۵۷ـ معادله منحنی درمختصات قطبی بصورت $\theta=f(\rho)$ می‌باشد تابع f را چنان تعیین کنید که منحنی نسبت بدایره انعکاس $x^2+y^2=1$ بخود منحنی‌تبدیل شودو بنابر-این ثابت کنید که این‌منحنیها پوشه دوایری هستند که دایره $x^2+y^2=1$ را بزاویه قائمه قطع می‌کنند و قضیه‌زیر ثابت میشود : منحنیات anallagmatique پوشه دوایری هستند که دایره ثابتی (دائره انعکاس) را بزاویه‌قائمه قطع‌می‌کنند . مکان هندسی مراکز دوائرمنیر یعنی منحنی Déférante را تعیین‌کنید رابطه بین De'férante و منحنی پوشه را معلوم کنید .

مثال برای مارپیچ لگاریتمی $\rho=e^{k\theta}$ دوائرمربوط ومنحنی دفرانت را تعیین کنید .

۱۳۵۸ـ حد عبارت $n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$ را وقتی n بسمت بی‌نهایت میل‌می‌کند تعیین کند .

همچنین حد عبارت :

$$n^{2k-h}\left(\sqrt[n^k]{a}-\sqrt[n^k+pn^k]{a}\right)$$

راکه درآن $k>h$ و k و h و p اعداد ثابتی هستند بازاء $n=\infty$ تعیین کنید .

۱۳۵۹ـ معادله دیفرانسیل $y'=f(x\text{ و }y)$ را چنان تعیین کنید که مسیرراست‌گذر جواب عمومی آن خطوط مستقیم باشد طریقه حل معادله را بیان‌کنید . مثال

$x+yy'=y'^2$ آیا جواب Singulier معادله پوش جوابهای عمومی می‌باشد یا نه ؟

۱۳۶۰ـ معادله دیفرانسیل منحنی‌هائی را تعیین کنید که دائره‌انحناءآنها (یا دائره‌بوسان) برداثره $x^2+y^2=R^2$ قائم باشد .معادله دیفرانسیل دردستگاه مختصات قطبی حل میشود . جواب عجیب معادله را توضیح کنید .

حل مسائل ریاضی امتحانات نهائی

دنباله از شمارهٔ قبل

توسط : حبیب‌الله عبداللهی

امتحان جبر ومثلثات سال ششم طبیعی داوطلبان متفرقه در اردیبهشت ماه ۴۳ (مدت ۴ ساعت)

۱۳۶۱ـ ۱ـ تابع $y=\frac{ax}{x-a}$ مفروض است اگر پارامتر a تغییرکند مکان هندسی محل تلاقی مجانبهای منحنی نمایش این تابع را تعیین کنید .

۲ـ بازاء $a=1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

۳ ـ اگر خط غیر مشخص D بمعادلهٔ $y=mx+n$ منحنی را در نقاط A و B و مجانبهای آنرا درنقاط A'وB' تلاقی نماید ثابت کنید همواره $AA'=BB'$ است .

۱۳۶۲ـ ۱ـ معادلهٔ هذلولی را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ (۱و۱ـ)ω بوده و ضریب زاویهٔ مجانبهای آن $\pm\frac{1}{2}$ و یکی از کانونهای آن نقطهٔ $F(\frac{3\sqrt{5}}{2}$ـ۱و۱) باشد

۲ـ معادلهٔ $x^2-4y^2+2x+8y-12=0$ مفروض است مطلوبست تعیین جنس و رسم منحنی نمایش تغییرات آن در دستگاه محورهای مختصات .

۱۳۶۳ـ ۱ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos x+\cos^2 x$ را در فاصلهٔ صفر و 2π رسم کنید

۲ـ مساحت محصور بین منحنی ومحور x ها را درفاصلهٔ $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید .

۳ـ عبارت y را بصورت قابل محاسبهٔ لگاریتمی تبدیل کنید .

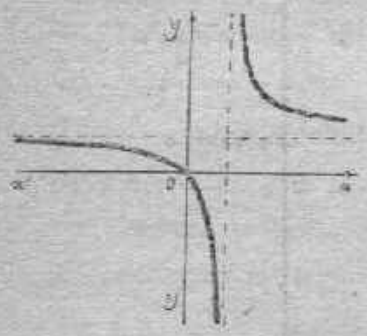
یادم ـ سؤال اول مسئله اول و سئوال سوم مسئله سوم هریك (یك نمره) وبقیه سئوالات هرکدام (۲ نمره دارد)

حل مسألهٔ ۱ـ ۱ـ درتابع $y=\frac{ax}{x-a}$ مجانبهای منحنی نمایش تابع عبارتند از $x=a$ و $y=a$ ومختصات محل تلاقی آنها $M\begin{cases}x=a\\y=a\end{cases}$ میباشد و مکان هندسی این نقاط خط $y=x$ یعنی نیمساز تابع اول است .

۲ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع درازاء $a=1$ بشرح ذیل است .

$$y'=\frac{-1}{(x-1)^2}<0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		−		−	‖	−	
y	1	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



۳ـ بعداز تعیین مختصات نقاط A'وA و B'وB بر حسب m و محاسبه $AA'=BB'$ صحت تساوی $AA'=BB'$ نتیجه خواهد شد

مسأله دوم ـ چون محور کانونی هذلولی موازی محور x هاست بنابر این معادلهٔ کلی آن بصورت $\frac{(x+1)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$ خواهد بود و $c=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ پس مقادیر a و b ازحل دستگاه

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2+b^2=\frac{45}{4}\end{cases}$$

بدست خواهد آمد

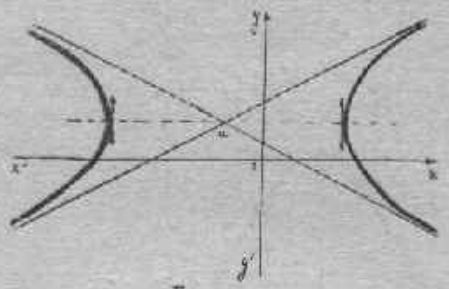
و ازآنجا $\boxed{b=\frac{3}{2}}$ و $\boxed{a=3}$ نتیجه خواهد شد و معادلهٔ هذلولی بصورت $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}}=1$ خواهد بود

۲ـ معادلهٔ مفروض را می‌توان بصورت

$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}}=1$$

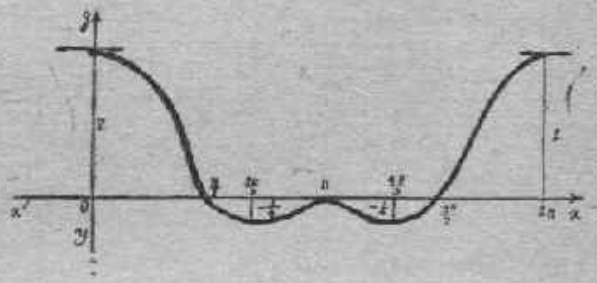
نوشت و این معادله نمایش یك

هذلولی میباشد که مختصات مرکز آن (۱ و ۱−) و $a=۳$ و $b=\frac{۳}{۲}$ مجانبها $\frac{x+۱}{۳}+\frac{y-۱}{۲}=۰$ است و منحنی آن بصورت ذیل است .



مسأله سوم ـ ومنحنی جدول نمایش تغییرات تابع بشرح زیر است .

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y'	۰	——	۰ +	۰ −	۰	+	۰
y	۲ ↘	۰ ↘	$-\frac{۱}{۴}$ ↗	۰ ↘	$-\frac{۱}{۴}$ ↗	۰ ↗	۲



۲ـ می‌توان تابع را بصورت

$y=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}cos۲x+cosx$ نوشت تابع اولیه این تابع

$F(x)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}sin۲x+sinx+c$ است ومساحت مطلوب عبارتست از :

$$S=\left[\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}sin۲x+sinx\right]_۰^{\pi}\quad \frac{\pi}{۴}+۱$$

۳ـ داریم :

$$y=cosx(۱+cosx)=۲cos^{۲}\frac{x}{۲}\cdot cosx$$

***

امتحان جبر و مثلثات سال ششم طبیعی دبیرستانهای کشور در خرداد ماه ۴۳ (مدت ۲ ساعت)

۱۳۶۴ـ تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ مفروض است ضرائب a و b و c و d را تعیین کنید درصورتیکه بازاء $x=۰$ تابع $y=۰$ گردد و بازاء $x=۱$ تابع ماکزیمم برابر $\frac{۵}{۶}$ و بازاء $x=۲$ می‌نیمم داشته باشد .

۲ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{۳x^{۲}}{۲}+۲x$ را رسم کنید .

۳ـ ثابت کنید وسط پاره‌خطی که ماکزیمم منحنی را به می‌نیمم آن وصل میکند روی منحنی قرار دارد واین نقطه مرکز تقارن منحنی است .

۱۳۶۵ـ نیمدایرهٔ بمعادلهٔ $y=-\sqrt{۴x-x^{۲}}$ وخط مستقیم بمعادلهٔ $y=۲x-۱$ را روی یکدستگاه محورهای مختصات بدقت رسم کنید .

۲ـ از روی شکل نشان دهید که معادلهٔ $۲x-۱=\sqrt{۴x-x^{۲}}$ فقط یک ریشه دارد مقدار تقریبی این ریشه را ازروی نمودار تعیین وبا محاسبه تطبیق کنید .

۱۳۶۶ـ ۱ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=sinx+sin^{۲}x$ را درفاصله صفر و ۲π رسم کنید .

۲ـ مساحت محصور بین منحنی ومحور xها را درفاصلهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\pi$ حساب کنید .

۳ـ عبارت y را بصورت قابل محاسبهٔ لگاریتمی (یعنی بصورت حاصلضرب) تبدیل کنید .

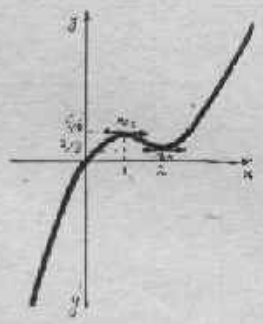
یادم ـ سئوال دوم مسئله دوم وسئوال سوم مسئله سوم هریک ۱ نمره وبقیه سئوالات هرکدام ۳ نمره دارد .

تبصره ـ در مسئله نیمدایره طرفین را بطور مشروط بتوان ۲ برسانید .

حل مسأله اول ـ ۱ـ در ازاء $x=۰$ و $y=۰$ داریم $\boxed{d=۰}$ چون مقدار تابع در ازاء $x=۱$ برابر $\frac{۵}{۶}$ میباشد پس در تابع بجای x عدد ۱ وبجای y عدد $\frac{۵}{۶}$ را قرار میدهیم خواهیم داشت (۱) $\boxed{\frac{۵}{۶}=a+b+c}$ از طرفی $x=۱$ طول ماکزیمم میباشد پس در ازاء این مقدار مشتق صفر خواهد شد و ازآنجا (۲) $\boxed{۳a+۲b+c=۰}$ نتیجه میشود وچون $x=۲$ طول می‌نیمم است بنابراین عدد ۲ مشتق تابع را صفر خواهد کرد و داریم (۳) $\boxed{۱۲a+۴b+c=۰}$ ازروابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر عددی a و b و c بدست میآیند واین مقادیر عبارتند از $\boxed{a=\frac{۱}{۳}}$ و $\boxed{b=-\frac{۲}{۲}}$ و $\boxed{c=۲}$

۲ ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع بشرح زیر است .

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰		+		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$\frac{۵}{۶}$	↘	$\frac{۲}{۳}$	↗	$+\infty$

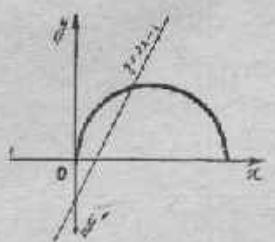


۳ـ مختصات وسط قطعه خط واصل بین ماکزیمم و مینیمم عبارت میشود از $P\left(\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۳}{۲}\right)$ که در تابع صدق خواهد نمود چنانچه این نقطه را مبداء جدید اختیار کنیم داریم :

$x=X+\frac{۲}{۳}$ و $y=Y+\frac{۳}{۴}$ که چون در تابع قرار دهیم معادله بصورت $Y=\frac{۱}{۳}X^۳-\frac{۱}{۴}X$ که در این تابع اگر X به $-X$ و Y به $-Y$ تبدیل شود معادله فرق نخواهد کرد پس مبداء جدید یعنی P مرکز تقارن منحنی است .

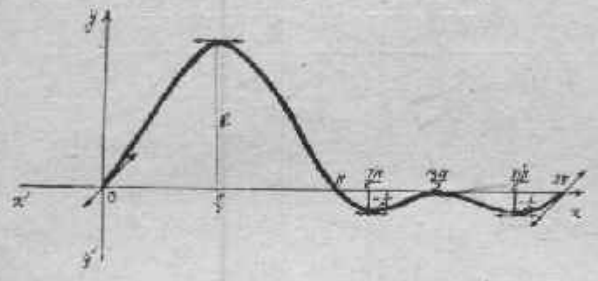
مسأله دوم ـ طرفین معادله مفروض را بتوان دو میرسانیم خواهیم داشت $x^۲-۴x+y^۲=۰$ وارآنجا $(x-۲)^۲+y^۲=۴$ که معادله یك دایره است و مرکز آن $C(۲ \text{ و } ۰)$ و $R=۲$ میباشد و چون منظور رسم نیمدایره است که عرض جمیع نقاط آن مثبت باشد در نتیجه شکل زیر بدست میآید وخط $y=۲x-۱$ نیز در همان دستگاه محورهای مختصات رسم شده است .

۲ـ ازحل معادله اسم جوابهای $x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۱}}{۵}$ بدست میآید که فقط $x=\frac{۴+\sqrt{۱۱}}{۵}$ قابل قبول است و جواب دیگر در معادله اصلی صدق نمی کند و از شکل نیز پیداست که خط $y=۲x-۱$ نیمدایره را فقط در یك نقطه قطع می کند .



مسأله سوم ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بشرح زیر است .

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۷\pi}{۶}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
y'	+	۰		−	۰	+	۰	−	۰		+		
y	۰	↗	۲	↘	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰



۲ـ تابع را میتوان بصورت

$y=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x+\sin x$ نوشت تابع اولیه این تابع

$F(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x-\cos x+c$ میباشد و سطح مطلوب عبارتست از :

$$S=\left[\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x-\cos x+c\right]_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=\frac{\pi}{۴}+۱$$

۳ـ عبارت y بصورت قابل محاسبه لگاریتمی بصورت ذیل است .

$$y=\sin x(۱+\sin x)=\sin x(\sin\frac{\pi}{۲}+\sin x)=$$

$$=۲\sin x\sin\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)$$



بدون شرح : از چپ براست واز بالا بپائین

دنبالهٔ حل مسائل فیزیك و مکانیك

امتحانات نهائی سالهای ششم ریاضی و طبیعی

متفرقه اردیبهشت ۴۳ ـ دیرصنانها خرداد ۱۳۴۳

توسط طرح کننده : دکتر ابوالقاسم قلمسیاه

سؤالات امتحان مکانیك سال ششم ریاضی متفرقه

(اردیبهشت ماه ۱۳۴۳) (مدت ۲ ساعت)

مسائل :

۱۳۶۷ـ اتومبیلی با راننده‌اش ۱۰۰۰ کیلوگرم وزن دارد واز جاده‌ای بشیب ۶ درصد باسرعت ثابت ۷۲ کیلومتر در ساعت بالا میرود مقاومت هوا برحسب کیلوگرم از رابطه $R=0/15V^2$ بدست میآید که در آن V برحسب متر بر ثانیه است واز اصطکاك جاده صرف‌نظر میشود اولا توان موتوررا باسب بخار پیدا کنید . (۲ نمره)

ثانیاً اگر اتومبیل با موتور خاموش روی همین جاده شیبدار بحال خود رهاشده وپائین آید سرعت حدآن چه‌اندازه خواهد شد . (۱/۵ نمره)

۱۳۶۸ـ پاندول ساده‌ای تشکیل یافته است از گلوله کوچکی بجرم ۱۰ گرم که بانتهای نخ نازك وبی وزنی آویخته شده وطول آن $l=398$ سانتی متر است . اگر ۱۰۰ نوسان کامل این پاندول ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه طول بکشد :

اولا اندازه g را در مکان آزمایش حساب کنید

(۱/۵ نمره)

ثانیاً پاندول را باندازه ۶۰ درجه از وضع تعادل منحرف کرده ورها میسازیم . انرژی جنبشی آن درموقع عبور از وضع تعادل چه‌اندازه است . (۲ نمره)

۱۱۶۹ـ گلوله‌ای باسرعت اولیه ۱۰۰ متر بر ثانیه در امتدادیکه باسطح افق زاویه 45° درجه میسازد پرتاب میشود مطلوبست :

اولا اندازه ارتفاع اوج وبرد این گلوله (۱/۵ نمره)

ثانیاً ـ سرعت گلوله در نقطه اوج ودرموقع برخورد بزمین

اثر مقاومت هوا ناچیز است . $g=10\ \frac{m}{S^2}$ (۱/۵ نمره)

سئوالات :

حساب کنید برای تولید ۲ کیلوکالری حرارت چند کیلو گرم متر وياچند ارگ کار باید انجام داد (۲ نمره)

میدانیم که کالری معادل ۴۱۸۰ ژول است .

متر بر مجذور ثانیه : $g=9/8$

مقلوب ازضرب یك عامل درعددجبری m چیست برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید . (۲ نمره)

تعریف جرم و واحدهای آن در دستگاههای C.G.S. و M.K.S. و M.T.S. (۲ نمره)

حرکتهای نسبی و کششی ومطلق را تعریف کنید و رابطه بین سرعت‌های آنها را بنویسید (۲ نمره)

معادله حرکت نوسانی را بنویسید واز روی آن معادلات سرعت و شتاب ونیرو را دراین حرکت حساب کنید .

(۲ نمره)

حل مسائل :

مسألهٔ ۱) ـ توان موتور کاریست که نیروی موتور درهر ثانیه انجام میدهد . چون سرعت اتومبیل ثابت است نیروی موتور برعلیه مقاومت هوا واثر نیروی وزن مصرف میشود وبنا براین نیروی موتور برابر است با :

نیروی موتور $F=P\sin\alpha+0/15V^2$

وچون : $T=1000^{kg}$ و $\sin\alpha=0/06$ و

$$V=\frac{72\times1000}{3600}=20\frac{m}{S}$$

پس :

$$F=1000\times0/06+0/15\times20^2=120^{kg}$$

وتوان موتور :

$$P=F.V=120\times20=2400\ \frac{^{Kg}m}{S}$$

چراسب بخار معادل $75\ \frac{^{Kg}m}{S}$ است پس توان موتوربرحسب اسب بخار برابر است .

$$P=\frac{2400}{75}=32HP$$

ثانیاً موقعیکه اتومبیل با موتورخاموش روی جاده شیبدار پائین میآید نیروی مقاومت هوا با اثر نیروی وزن یعنی $P\sin\alpha$ مقابله میکند وسرعت اتومبیل وقتی بحد میرسد که داشته باشیم .

$$0/15V^2=P\sin\alpha$$

$$V^2=\frac{P\sin\alpha}{\cdot/15}=\frac{1000\times\cdot/06}{\cdot/15}=400 \qquad \text{یا}$$

$$\boxed{V=20\frac{m}{S}=72\frac{km}{h}} \qquad \text{ویا}$$

مسأله۳ـ زمان نوسان ازرابطه $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ بدست میاید که درآن l طول پاندول و g شتاب ثقل زمین. داریم :

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

چون ۱۰۰ نوسان کامل پاندول ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه یعنی ۴۰۰ ثانیه طول میکشد پس :

$$T=\frac{400}{100}=4Sec$$

$$g=\frac{4\times\pi^2\times398}{4^2}=981\frac{cm}{S^2}$$

ثانیا) انرژی جنبشی پاندول درموقع عبور ازوضع تعادل از رابطه $E_c=\frac{1}{2}mv^2$ حساب میشود که درآن V سرعت عبور پاندول از وضع تعادل است یعنی : $V^2=2gl(1-\cos\alpha)$

بازاء $\alpha=60^\circ$ و $V^2=gl$

ارگ $E_c=mgl=10\times981\times398=390438000$

یا تقریباً ژول $E_c=0/3900$

مسأله سوم : ۱) برد گلوله :

$$x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}=\frac{100^2\sin2\times45^\circ}{10}=1000m$$

وارتفاع اوج .

$$h=\frac{v_0^2\sin\alpha}{2g}=\frac{100^2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2\times10}=250m$$

۲) سرعت در نقطه اوج

$$v=v_0\cos\alpha=100\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}\frac{m}{S}$$

سرعت درموقع برخورد بزمین .

$$v'=v_0=100\frac{m}{S}$$

* * *

سئوالات امتحان مکانیك سال ششم ریاضی دبیرستانها

(خرداد ۱۳۴۳) (مدت دوساعت)

مسائل .

۱۳۷۰ـ گلوله‌ای بوزن یك کیلوگرم روی سطح شیب داری رهامیشود وپس ازیك ثانیه باندازه یك‌متر درامتداد خط بزرگترین شیب سطح پائین میآید . اگر نیروی اصطکاك سطح در مقابل حرکت گلوله ۱ر۰ کیلوگرم باشد شیب سطح چنددر صد است . ($g=10\frac{m}{S^2}$ (۳نمره)

۱۳۷۱ـ پاندول ساده‌ای بطول $l=4$ متر حول نقطه O درمکانیکه $g=9/8$ متر برمجذور ثانیه است بادامنه کم نوسان میکند اولا زمان نوسان این پاندول راحساب کنید . $\pi^2=9/8$ (۱نمره)

ثانیاً ـ پاندول رابا ندازه ۶۰ درجه ازوضع تعادل منحرف کرده ورها میسازیم ودر همان لحظه‌ایکه از وضع تعادل خود (یعنی قائم نقطه O) میگذرد نخ را قطع میکنند . گلوله پاندول با چه سرعتی پرتاب میشود ودرچه نقطه‌ای نسبت بپای قائم نقطه O بزمین اصابت میکند . فاصله نقطه O ازسطح زمین ۱۲ متر است (۲/۵نمره)

۱۳۷۲ـ گلوله فولادی بحجوم ۵۰۰ گرم ازارتفاع h بالای سطح زمین بدون سرعت اولیه رهامیشود وباسرعت $v=44/3$ متر برثانیه بسطح زمین میرسد چنانچه اثرمقاومت هوا بر گلوله ناچیز فرض شود مطلوبست: اولا ارتفاع h وزمان سقوط گلوله (۱ر۵نمره)

ثانیا درپایان سقوط ، گلوله بسطح کاملا سختی برخورد میکند و تاارتفاع ۱۰ متر دوباره بالامیجهد چندکالری حرارت درلحظهٔ بر خورد بزمین ایجاد میشود . شتاب ثقل زمین $g=9/81$ متر برمجذور ثانیه ومعادل مکانیکی کالری $j=4/18$ ژول است (۲نمره)

سئوالات :

سرعت وشتاب متوسط ولحظه‌ای راتعریف کنید. (۲نمره)

آلت تنظیم وات (شرح وشکل ومحاسبه) (۲نمره)

تغییرات g (شتاب ثقل) برحسب ارتفاع (۲نمره)

واحدهای نیرو درچهار سلسله MTS، MKS،CGS و MKS علمی . (۲نمره)

بچه وسایلی انرژی حرارتی به انرژی های مکانیکی ، الکتریکی، شیمیائی ونورانی تبدیل میشود(شرح دهید) (۲نمره)

حل مسألهٔ اول

شتاب حرکت گلوله ازفرمول $x=\frac{1}{2}\gamma t^2$ حساب میشود :

$$\gamma=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\times1}{1}=2\frac{m}{S^2}$$

ازطرف دیگر برای سطح شیبدار داریم :

$$\gamma=\frac{P\sin\alpha-R}{m}=\frac{(P\sin\alpha-R)g}{P}$$

ویا

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{P\times\sin\alpha-R}{P}$$

محاسبه عددی :

$$\frac{2}{10}=\frac{1\times\sin\alpha-0/1}{1}\rightarrow\boxed{\sin\alpha=\frac{3}{10}}$$

شیب سطح ۳۰٪ است .

حل مسأله دوم :

زمان نوسان پاندول ازفرمول $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ حساب میشود :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{4}{9/8}}=2\sqrt{\frac{\pi^2\times4}{9/8}}$$

بازاء $\pi^2=9/8$

$$T=2\sqrt{\frac{9/8\times4}{9/8}}=4\,Sec$$

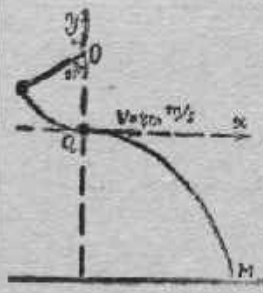
$$\boxed{T=4^{Sec}}$$

ثانیاً) سرعت پرتاب گلوله در موقع عبور از وضع قائم از فرمول $V=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ بدست میآید که بازاء $\alpha=60^\circ$: $V=\sqrt{gl}$ ویا

$$\boxed{V=\sqrt{9/8\times4}=2\pi\frac{m}{S}}$$

ویا

$$\boxed{V=2\times3/14=6/28\frac{m}{S}}$$



از نقطه پرتاب گلوله را مبداء مختصات بگیریم مختصات نقطه M (یعنی محل برخورد گلوله باندول بسطح زمین) در دستگاه دو محور o_1xy برابر است با :

$$M\begin{cases}x=vt\\ y=-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

با حذف t از دو معادله :

$$y=-\frac{gx^2}{2v^2}$$

ویا

$$x^2=-\frac{2yv^2}{g}$$

بازاء $v^2=gl$ داریم : $x^2=-2yl$

چون $y=-(12-4)=-8^m$ پس :

$$x^2=-(-8)\times4=64$$

$$\boxed{x=8^m}$$

حل مسأله ۳

۱ـ محاسبه ارتفاع سقوط :

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{44/3\times44/3}{2\times9/81}=100\,m.$$

محاسبه زمان سقوط :

$$t=\frac{v}{g}=\frac{44/3}{9/81}=4/55^S$$

۲ـ محاسبه مقدار حرارت حاصل : تفاوت دوانرژی پتانسیل گلوله در دوحالت اول ودوم بحرارت تبدیل میشود پس اگر h و h' بترتیب دو ارتفاع ماکزیمم گلوله در دو حالت باشد :

$$P(h-h')=JQ$$

$$Q=\frac{P(h-h')}{J}=$$

$$\frac{0/5^{kg}(100-10)\times9/81}{4/18}=105/6\ \text{کالری}$$

$$\boxed{Q=105/6\ \text{کالری}}$$

سوالات امتحان فیزیك سال ششم طبیعی
متفرقه اردیبهشت‌ماه ۱۳۴۳

سؤال ـ تأثیر مقاومت هوا درحرکت سقوطی اجسام و تعریف سرعت حدیا ذکرمثال (۲/۵نمره)

۱۳۷۳ـ اتومبیلی بجرم ۸۰۰ کیلوگرم روی جاده‌افقی ومستقیمی با سرعت‌ثابت ۱۰۸ کیلومتر درساعت حرکت میکند. دریك لحظه راننده موتوررا آزادکرده وترمز میکند تا اینکه سرعت اتومبیل به ۳۶ کیلومتر درساعت برسد . چنانچه ازطرف ترمز نیروئی معادل ۲۰۰ کیلوگرم موازی باراستای حرکت اتومبیل بر آن واردشود مطلوبست .

اولا مسافت‌پیموده شده درمدت ترمز و مقدار حرارتیکه هنگام ترمز ایجاد میشود . معادل مکانیکی کالری ۴/۱۸ ژول است (۲نمره)

ثانیاً ـ اگر اتومبیل روی‌جاده شیب‌داری بشیب ۵ درصد پائین رود مسافت پیموده شده در همان شرایط چه اندازه‌است

متر برمجذور ثانیه $g=10$

سؤال ـ سرعت‌سیر صوت‌درگازهای مختلف بچه‌عواملی بستگی دارد . این‌عوامل را شرح‌دهید . (۲/۵نمره)

۱۳۷۴ـ سیرنی ۳۰ سوراخ متساوی‌الفاصله داردو درهر دقیقه ۳۴۸ دورمیزند مطلوبست

اولا ـ اسم نتی‌که ازآن بگوش میرسد . $I.a_3=435$ (۱/۵نمره)

ثانیاً ـ طول لوله صوتی بازیکه صوتی اصلی آن هم‌آهنگ صوت حاصل ازاین سیرن است . (۱نمره)

سرعت سیر صوت در هـوای داخل لوله ۳۴۰ متر بر ـ ثانیه است .

سؤال ـ آزمایش دوآینه‌فرنل برای تداخل امواج نورانی (شرح وشکل) ۲/۵ نمره (۱و۱/۵ نمره)

۱۳۷۵ ـ ازلامپی که مقاومت آن در حال التهاب ۲۰۰ اهم است جریان متناوبی بمعادلهٔ $V=311\sin 314t$ میگذدد . مطلوبست

اولا ـ تواتر این جریان و اختلاف پتانسیل مؤثر دوسر لامپ . (۱/۵ نمره)

ثانیاً ـ مقدارحرارتیکه در هردقیقه درلامپ بظهورمیرسد. هرژول معادل ۰/۲۴ کالری است . (۱/۵ نمره)

سؤال ـ پریدِ یک‌شعاع نورانی $T=2\times10^{-15}$ ثانیه است طول موج این‌شعاع نورانی چند انگسترم است. (۱نمره)

سرعت سیر نور $c=3\times10^{5}$ کیلومتر برثانیه است .

سؤال ـ جنس اشعه کاتودیک واشعه X واثرمیدان الکتریکی و مغناطیسی براین اشعه . (۲/۵نمره)

حل مسأله اول ـ طبق‌قضیه فرس‌ویو :

کاربرآیندنیروهای‌وارد براتومبیل = تغییرانرژی‌جنبشی‌اتومبیل

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}Mv_2^2=Rx$$

چون نیروی وارد براتومبیل دراین تغییر سرعت نیروی ترمز است : $R=200^{kg}$ وداریم :

$$\frac{1}{2}\times\frac{800}{10}\times30^2-\frac{1}{2}+\frac{800}{10}\times10^2=200x$$

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{108\times1000}{3600}=30\dfrac{m}{s} \\ v_2=\dfrac{36\times1000}{3600}=10\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$\boxed{x=160^{m}}$$

ومقدار حرارت حاصل : $Q=\frac{W}{j}=\frac{Rx}{j}$ و

$$Q=\frac{200\times160\times10}{4.18}=76555^{cal}$$ برحسب اول یا $76/555^{k.cal.}$

$$\boxed{Q=76/555kcal}$$

ثانیاً درجاده شیب‌دار نیروی‌مؤثر برابر است با :

$$R'=R-P\sin\alpha$$

$$R'=200-800\times/.05=160kg$$ یا :

$$\frac{1}{2}m(v_1^2-v_2^2)=R'X'$$

$$x'=\frac{m(v_1^2-v_2^2)}{2R'}=$$

$$=\frac{\frac{800}{10}(900-100)}{2\times160}=\frac{800\times800}{10\times2\times160}=200m$$

$$\boxed{x'=200m}$$

حل مسأله ۲ـ ارتفاع صوت حاصل ازسیرن از فرمول

$$N=pn$$

بدست میآیدکه درآن p عده سوراخها و n عدددورهای سیرن درثانیه است :

$$N=30\times\frac{348}{60}=174$$

برای اینکه اسم نت را تعیین کنیم باید تحقیق کنیم این‌نت درچه گامی واقع است .

$$do_2=130/5 \quad do_4=435\times\frac{3}{5}=261 \text{ پس } La_4=435$$

بنا براین $N=174$ درگام

$do_2=120/5-do_2=261$ واقع است و فاصله‌آن نسبت بمبنای گام یعنی $do_2-130/5$ برابر است با :

$$I=\frac{174}{130/5}=\frac{4\times43/5}{3\times43/5}=\frac{4}{3}$$

و اسم نت fa_2 است

ثانیاً طول‌لوله صوتی بازاز فرمول $N=\frac{v}{2l}$

حساب میشود :

$$l=\frac{v}{2N}=\frac{340}{2\times174}=\frac{340}{348}=0/977^{m}$$

$$\boxed{l=97/7^{cm}}$$

حل مسأله سوم : معادله شدت جریان بصورت :

$v=311\sin314t$ است که درآن

$\omega=314=2\pi N$ و $V_{MAX}=311volts$

اولا ـ اختلاف پتانسیل مؤثر برابر است با :

$$V_e=\frac{V_M}{\sqrt{2}}=\frac{311}{\sqrt{2}}=\frac{311\sqrt{2}}{2}=311\times0/707$$

$$\boxed{V_e=220 \text{ ولت}}$$

و تواتر جریان :

$$N=\frac{۳۱٤}{۲\pi}=\frac{۳۱٤}{۲\times ۳٫۱٤}=۵۰$$ هرتز

ثانیاً ـ مقدار حرارت حاصل درلامپ در هر دقیقه از فرمول $Q=۰٫۲٤RI_e^{۲}\times t$ بدست میآید :

$$I_e=\frac{V_e}{R}=\frac{۲۲۰}{۳۰۰}=\frac{۱۱A}{۱۵}$$

و $Q=۰٫۲٤\times ۱۵۰\times\frac{۱۱\times ۱۱}{۱۵\times ۱۵}\times ۶۰=۱۱٦۱/٦$ Cal

$$\boxed{Q=۱۱٦۱/٦Cal}$$

سؤالات امتحان فیزیك سال ششم طبیعی

دبیرستانها (خرداد ۱۳۴۳)

۱۳۷٦ـ دوچرخه سواری که بادوچرخه‌اش هشتاد کیلوگرم وزن دارد بدون پازدن روی جاده‌ای بشیب ۵درصد شروع بپائین آمدن میکند نیروی اصطکاك جاده که درخلاف جهت حرکت اثر میکند معادل یك کیلوگرم است ، مطلوبست :

اولا مسافتی که دوچرخه‌سوار می‌پیماید تا سرعتش به۱۸ کیلومتر درساعت برسد (۲نمره)

ثانیاً ـ درهمین موقع دوچرخه‌سوار ترمز میکند بطوریکه این سرعت ثابت بماند . چند کالری حرارت درهر دقیقه درترمز ایجاد میشود (۲نمره)

$$g=۱۰\frac{m}{S^{۲}}\qquad J=٤٫۱۸\frac{\text{ژول}}{\text{کالری}}$$

۱۳۷۷ـ مطلوبست شدت ماکزیموم جریان متناوبی که اگر ازسیمی بمقاومت ۱۵۰ اهم بگذرد درهر دقیقه $\frac{۹\times ۱۰^{۵}}{٤۱۸}$ کالری حرارت درآن ایجاد کند واگر تواتر این جریان ۵۰هرتز باشد معادلهٔ شدت لحظه‌ای این جریان را نسبت بزمان بنویسید .

۱۳۷۸ـ صوت اصلی لولهٔ بازی $fa_۴$ است مطلوبست :

اولا ـ طول این لوله (۲نمره)

ثانیاً ـ طول لوله صوتی بسته‌ایکه هارمونیك دوم صوت اصلی آن همین $fa_۴$ است . سرعت سیرصوت درهوای داخل لوله ۳٤۰ متر برثانیه است $La_۴=٤۳۵$ (۲نمره)

سؤالات :

استروبوسکپی چیست و چگونه میتوان بوسیله آن حرکات تناوبی سریع را تحقیق کرد (۲نمره)

اصطلاحات زیررا بطورخلاصه تعریف کنید (۲نمره)

شدت صوت ـ فاصله موسیقی ـ گام موسیقی ـ دیز (۲نمره)

۱ـ اشعه تحت‌قرمز و ماوراء بنفش وخواص حرارتی و شیمیائی آنها (نمره)

۲ـ بهم‌بستن خازنها بطورتوالی ـ محاسبهٔ ظرفیت معادل (۲نمره)

۳ـ طرزایجاد اشعه X بوسیلهٔ لوله کولیج . (شرح و شکل) (۲نمره)

حل مسأله ۱ـ اولا نیروی مؤثر بردوچرخه

$$F=p\sin\alpha-R=۸۰\times ۰٫۰۵-۱=۳kg$$

و شتاب حرکت دوچرخه سوار

$$\gamma=\frac{F}{m}=\frac{۳}{\frac{۸۰}{۱۰}}=\frac{۳}{۸}\frac{m}{s^{۲}}$$

مسافت پیموده شده از فرمول : $V^{۲}=۲\gamma x$

حساب میشود :

$$x=\frac{v^{۲}}{۲\gamma}$$

بازاء $V=\frac{۱۸\times ۱۰۰۰}{۳٦۰۰}=۵\frac{m}{s}$ داریم

$$\boxed{x=\frac{۵\times ۵}{۲\times\frac{۳}{۸}}=\frac{۱۰۰}{۳}m}$$

ثانیاً ـ چون سرعت ثابت اثر نیروی وزن با نیروهای ترمز و اصطکاك خنثی میشود یعنی

$$P\sin\alpha=R+R'$$

ترمز + اصطکاك

ونیروی ترمز برابر است با :

$$R'=P\sin\alpha-R=٤-۱=۳kg$$

(میتوان مستقیماً نتیجه گرفت که چون نیروی مؤثر در حالت اول درجهت حرکت معادل ۳ کیلوگرم است برای اینکه سرعت ثابت بماند ، بایدنیروی ترمز نیزمساوی ۳ کیلوگرم در خلاف جهت حرکت باشد) .

کار نیروی ترمز درزمان t ـ از فرمول

$$W=R'\cdot x=R'\times v_{\cdot}t$$

حساب میشود که دریك دقیقه برابر است با :

$$W=۳\times ۵\times ۶۰=۹۰۰kgm$$

این کار بحرارت تبدیل میشود و حرارت حاصل

$$Q=\frac{w}{j}=\frac{۹۰۰\times ۱۰}{٤/۱۸}=\frac{۹\times ۱۰^{۵}}{٤۱۸}\ \frac{\text{ژول}}{\text{کالری}}$$

$$\boxed{Q=\frac{۹\times ۱۰^{۵}}{٤۱۸}\text{ کالری}}$$

تست برای داوطلبان کنکور

تهیه و تنظیم از : مهربان پروز

این تستها شامل سئوالات ۳ جوابی ازجبر ، مثلثات وترسیمی و رقومی ، حساب وهندسه است .
موضوع سئوالات این تست درحدود برنامهٔ متوسطه میباشد .

هرسئوال درست یک امتیاز (پوئن) مثبت وهرسئوال غلط طبق فرمول $\frac{۱}{n-۱}$ (n تعدادجوابها) نمرهٔ منفی دارد .

نمرهٔ منفی دارد دو چون دراین تست تعدادجوابها ۳ است بنابراین هرسئوال غلط $\frac{۱}{۲}$ نمرهٔ منفی دارد .

۱ـ طول وعرض مستطیلی بترتیب a و b است ، اگر α زاویهٔ بین دو قطر باشد (زاویه α روبرو بضلع a)

الف : $\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{a+b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

ب : $\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{\sqrt{a^۲-b^۲}}$

ج : $\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{a^۲+b^۲}}$

۲ـ سه‌ضلع مثلثی بترتیب ۳و ۵ و ۶ است نسبت $\frac{R}{r}$ برابر است با :

الف : $\frac{۳۲}{۴۵}$ و ب : $\frac{۴۵}{۱۶}$ ج : $\frac{۱۶}{۴۵}$

۳ـ $\log_a(۰)$ برابراست با :

بقیه ازصفحه پیش

حل مسأله۲ـ حرارتیکه دراثر عبور جریان متناوب‌از سیمی بمقاومت R حاصل میشود از فرمول

$$Q=\frac{۱}{۴٫۱۸}RI_e^۲t$$

بدست میآیدکه درآن I_e شدت موثرجریان و t زمان است :

باازاء $Q=\frac{۹\times۱۰^۵}{۴۱۸}$ کالری و $t=۶۰$ ثانیه و $R=۱۵۰^{\Omega}$ شدت مؤثرجریان بطریق زیرحساب میشود :

$$I_e^۲=\frac{۴٫۱۸Q}{R\cdot t}=\frac{۴٫۱۸\times\frac{۹\times۱۰^۵}{۴۱۸}}{۱۵۰\times۶۰}=۱$$

$$\boxed{I_e=۱^A}$$

معادله شدت لحظه‌ی جریان متناوب بصورت کلی $I=I_M\sin۲\pi Nt$ است‌که درآن :

$I_m=\sqrt{۲}A$ یا $I_m=I_e\sqrt{۲}=۱\times\sqrt{۲}$ و

$۲\pi N=۲\times۵۰\pi=۱۰۰\pi$

پس $\boxed{I=\sqrt{۲}\sin۱۰۰\pi t}$

حل مسأله سوم : عدهٔ ارتعاشات $fa_۲$ بطریق زیر حساب میشود :

$La_۲=۴۳۵$

$do_۲=۴۳۵\times\frac{۳}{۵}=۲۶۱$

$fa_۲=۲۶۱\times\frac{۴}{۳}=۳۴۸$

$fa_۲=\frac{۳۴۸}{۲}=۱۷۴$ c/s

طول لوله صوتی بازیکه صوت‌اصلی‌آن $fa_۲=۱۷۴$ است بطریق زیر حساب میشود :

$N=\frac{v}{۲l}\longrightarrow l=\frac{v}{۲N}$

باازاء $V=۳۴۰\frac{m}{s}$

داریم : $l=\frac{۳۴۰}{۲\times۱۷۴}=\frac{۳۴۰}{۳۴۸}=۰٫۹۷۷^m$

یا $\boxed{l=۹۷٫۷Cm}$

طول لوله بسته‌ایکه دومین‌هارمونیك آن $fa_۲$ است :

$l'=\frac{۳v}{۴N}=\frac{۳\times۳۴۰\times۱۰۰}{۴\times۱۷۴}=۱۴۶٫۴۵^{Cm}$

$\boxed{l'=۱۴۶٫۴۵Cm}$

الف : $\infty + ب$: اصلا لگاریتم ندارد ج : $\infty -$

٤ـ لگاریتم کدام عدددر پایه ۳ برابر ۲ − است .

الف : $\frac{۱}{۷}$ ب : $\frac{۱}{۹}$ ج : $\frac{۱}{۱۱}$

۵ـ فرمول نیمساز داخلی زاویه A در مثلث غیرمشخص چنین است .

الف : $\frac{a\sin A}{\sin B\sin C}$ ب : $\frac{a\sin B\sin C}{\sin\frac{B-C}{۲}}$

ج : $\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\sin\frac{B-C}{۲}}$

۶ـ متوازی‌الاضلاع $a_۲b_۱c_۵d_x$ مفروض است رقوم d برابر است با :

الف: ۶ ، ب : ۳ـ ، ج : ۸

۷ـ عمودمشترك دوخط یکی‌قائم ودیگری‌غیر مشخص .

الف: خطی است‌منتصب. ب : خطی است‌افقی. ج: خطی است غیرمشخص .

۸ـ کسری که معادل $\frac{۵}{۸}$ بوده بزرگترین مقسوم‌علیه دو جمله‌اش ۲۱ باشد برابر است با :

الف : $\frac{۱۰۵}{۱۶۸}$ ب : $\frac{۳۵}{۵۶}$ ج : $\frac{۲۱۰}{۳۳۶}$

۹ـ حاصل تقسیم عدد ۱٤٦۰ بر ۲۰٤ در مبنای ۷ عبارتست از :

الف : خارج‌قسمت ٤وباقیمانده ۱۳۳ ب : خارج‌قسمت ۵ وباقیمانده ۱۳۱ ج : خارج‌قسمت ۶ و باقیمانده ۱۲۹

۱۰ ـ عدد ۳۷ در مبنای ۱۰ درکدام مبنا بصورت ٤۵ است ؟

الف : ۱۱ ب : ۹ ج : ۸

۱۱ـسرمایه‌ای‌بانرخ ٤/۵٪ درمدت ۶سال بسه‌ایجدداده شده و اصل و فرع‌آن ۵۰۸۰۰ ریال شده اصل سرمایه برابر است با :

الف : ٤۰۰۰ . ب: ۳۰۰۰ ج : ۲۰۰۰

۱۲ـ حد مجموع جمل سلسله نامحدود

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{۲}{۹}\sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$ .....

الف : $\frac{۹(۲\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲})}{٤۶}$ ب : $\frac{۹(۲\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲})}{٤۶}$

ج : $\frac{۹(۳\sqrt{۶}+۲\sqrt{۲})}{٤۶}$

۱۳ـ جواب معادله $۵^{x+۱}-۷\times۵^{x}-٤۵۰=۰$ برابر است .

الف : ۳ ب : ۲ و ج : ۱

۱٤ـ فرمول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث‌غیرمشخص .

الف : $\frac{a\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}$ ب : $\frac{\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}{a\cos\frac{A}{۲}}$

ج : $\frac{\cos\frac{A}{۲}}{a\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}$

۱۵ـ افقیه $a_۲b_۲$ ونقطه M' تسطیح نقطه‌ای از صفحه MAB بفاصله ۵ ازab مفروض است‌اگرزاویه صفحه باصفحه مقایسه ۳۰درجه باشد رقوم M برابراست با :

الف : ۲/۵+ ب : ۱/۵+ ج. ۳/۵+

۱۶ـ دو تیغرخ aba'b' و cde'd' بامفروضات

A(۰و۳و۵) و B(۰و۲و۱) و C(۲و۶و۲ـ) D(۳و٤و۲ـ)

الف : متوازیند ب: متقاطعند ج: متنافرند .

۱۷ ـ صفحه‌ای که عمود برنیمساز فرجهٔ دوم باشد :

الف:آثارش نسبت بمحط زمین قرینه‌اند ب: آثارش‌واقع بریك امتدادند ج: یکی‌ازآثارش برخط‌الارض منطبق است

۱۸ـصفحه‌ای که‌تصاویر افقی‌خطوط آن برهم برطبق‌است

الف: صفحه‌ایست‌افقی ،ب:صفحه‌ایست‌قائم. ج:صفحه‌ایست منتصب .

۱۹ـ فصل‌مشترك صفحهٔ قائم با صفحهٔ منتصب .

الف : خطی‌است منتصب ب: خطی است افقی ج : خطی است غیرمشخص .

۲۰ـ دستگاه

$$\begin{cases} tg\alpha-\sin\alpha=m \\ tg\alpha+\sin\alpha=n \end{cases}$$

وقتی متوافق است‌که :

الف : $\frac{٤m}{(n+m)^۲}=\frac{(n-m)^۲}{٤n}$

ب : $\frac{(m+n)^۲}{(m-n)^۲}=\frac{m}{n}$ ج $\frac{٤m}{(n+m)^۲}=\frac{٤n}{(n-m)^۲}$

۲۱ـ ریشه معادله

$\mathrm{Arctg}(x+۱)+\mathrm{Arctg}(x-۱)=\mathrm{Arctg}\,۲$ برابر است با :

الف : $x=-۳$ ، ب: $x=-۲$ ج: $x=-۱$

۲۲ـجواب کلی معادله $\cos^۲٤x+\sin^۲x=۱$ عبارتست‌از:

الف : $x=\frac{k\pi}{3}$ ب : $x=\frac{3k\pi}{2}$

ج : $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۲۳ـ اگر اندازهٔ کمانی برحسب درجه A و برحسب گراد B و برحسب رادیان C باشد و رابطهٔ

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{C}{2\pi}$$

برقرار باشد قدرمطلق A عبارتست از:

الف : $A=3$ ب : $A=6$ ج : $A=9$

۲۴ـ در هرمثلثی رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2}$$ درحالات کلی مثلث :

الف : قائم‌الزاویه‌ای است ب : متساوی‌الساقین است

ج : متساوی‌الاضلاع است .

۲۵ـ مساحت n ضلعی‌منتظم محاط دردایرهٔ بشعاع R برابراست با :

الف : $S=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ ب: $S=n^2R\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

ج : $S=nR\sin^2\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}$

۲۶ـ هرخط موازی صفحهٔ نیمسازربع دوم صفحات افقی وقائم تصویرباشد .

الف: مجموع بعدو ارتفاع نقاط آن مقدار ثابت است

ب: تفاضل بعدوارتفاع نقاط آن‌مقدارثابت است ج : نسبت بعد و ارتفاع نقاط آن مقدار ثابت است .

۲۷ـ فصل‌مشترك دوصفحه که آنارقائم آنها متوازیند .

الف: خطی‌است‌حبهی ب: خطی است نیمرخ . ج: خطی است افقی .

۲۸ـ درمثلث‌متساوی‌الاضلاع ABC بضلع ٤ ارتفاع AH را ازطرف A باندازهٔ ٤واحد امتدادمیدهیم تا نقطه M پدید آید تفاضل مساحتهای مثلثهای BMC و ABC برابر است با :

الف : ٤ واحد سطح ب : ٦ واحد سطح ج : ٨ واحد سطح .

۲۹ـ مساحت مربعی‌که درمثلث متساوی‌الاضلاعی بضلع a محاط شده برابر است با :

الف : $\sqrt{3}a^2$ ب : $3(7+4\sqrt{3})a^2$

ج : $3(7-4\sqrt{3})a^2$

۳۰ـ درمثلث قائم‌الزاویه زاویهٔ بین‌میانه وارتفاع وارد بروتر برابراست با :

الف: نصف مجموع دوزاویه دیگر ب: تفاضل دو زاویه دیگر ج : نصف‌تفاضل دوزاویه دیگر .

۳۱ـ فاصلهٔ بین M'وN' منعکسهای MوN ازشکلی در انعکاس بقطب O وقوت K برابراست با :

الف : $\frac{ON.|K|}{OM.MN}$ ب : $\frac{MN.|K|}{OM.ON}$

ج : $\frac{ON.OM}{MN.|K|}$

۳۲ـ هرگاه O مرکزدایره و L پای‌قطرعمود برقطبی P نسبت بدایرهٔ O وR شعاع دایره باشد ، رابطه زیربرقراراست.

الف : $\overline{PO}.\overline{PL}=R^2$ ب : $PL\times OL=R^2$

ج : $OP\times\overline{OL}=R^2$

۳۳ ـ مساحت سطح تصویر شکل مسطح بر یك صفحه مساویست با :

الف : مساحت سطح‌خود شکل در ظل زاویهٔ دو صفحه

ب: مساحت سطح‌خود شکل درجیب تمام زاویه دوصفحه

ج : مساحت سطح خودشکل درجیب زاویه دوصفحه .

۳٤ـ سطح قاچ کروی برابر است با :

الف : محیط‌دایرهٔ عظیمه در $\frac{1}{2}$ زاویه قاچ ب: محیط دایره عظیمه درنسبت زاویه قاچ بزاویه قائمه ج : سطح دایره عظیمه درنسبت زاویه قاچ بزاویه قائمه .

۳۵ـ خروج ازمرکز بیضی :

الف: $e=\frac{c}{a}>1$ ب : $e=\frac{c}{a}=1$

ج : $e=\frac{c}{a}<1$

۳٦ـ دردایرهٔ Oبشعاع R ازنقطه H وسط OK (KL قطری ازدایره است) عمودی برKL رسم میکنیم تادایره را در AوB قطع کند بقطر AB دایره‌ای میزنیم تا KL را در M قطع نماید ، AM دایره O را درC قطع مینماید ،طول خط BC برابر است با :

الف : $R\sqrt{3}$ ب : $R\sqrt{2}$ ج : $R\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۷ـ باقیمانده تقسیم 3579° بر8 برابر است با :

الف : ۱ ب: ۲ ج: ۳

۳۸ـ ریشه‌معادله $x-\sqrt{4-x^2}=1$ برابراست با :

الف : $2+\sqrt{2}$ ب : $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ ج : $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

۳۹ـ مطلوبست تعیین m بقسمی‌که تفاضل مجذورات

پاسخ به پرسشهای رسیده

پرسشهائی که حل آنها خواسته شده و پرسشهائی که برای درج در مجله مطرح شده است

✿ آقای مهندس عباس سعیدی مطرح ساخته‌اند که :

۱) بجز مسائل سه‌گانهٔ لاینحل « تربیع دایره ـ تثلیث زاویه ـ تضعیف مکعب » چه مسائل دیگری لاینحل میباشد .

اگر مطرح شده بود که « مسائل حل شده کدام است ؟ »

شاید پاسخ دادن آسانتر بود . از جمله مسائل لاینحل مسألهٔ « سه جسم » میباشد که درفرستادن جسمی ازیك سیاره به سیارهٔ دیگر موردپیدا میکند . شرح این مسئله وکوششهائی که درحل

بقیه ازصفحه پیش

ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+mx+۲=۰$ مساوی $\frac{۳۵}{۹}$ باشد

الف : $m=\pm۶$ ب : $m=+۷$ ج: $m=\pm۸$

۴۰ـ حدعبارت $\frac{\sin ۲x}{x}$ وقتی x بسمت صفر میل کند برابر است با :

الف : صفر ب: یك ج : ۲

۴۱ـ دو معادلهٔ درجهٔ دوم

$(a-۱)x^۲-(۲a+۱)x+a=۰$ و

$(a-۱)x^۲-۲ax+a+۱=۰$

الف ـ فقط درازاء یك مقدار از a میتوانند دریك ریشه مشترك باشند . ب ـ درازاء دومقدار از a میتوانند دریك ریشه مشترك باشند ج ـ در ازاء یك‌مقدار از a دوهردو ریشه‌مشترکند

۴۲ ـ معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۲۵=۰$ مفروض است .

عدد ۳ـ :

الف : کوچکتر ازدو ریشه معادله است ب: بین دو ریشه معادله است ج : بزرگتراز دوریشه معادله است .

۴۳ـ حدتابع $y=\frac{\cos x-\sqrt{\cos ۲x}}{\sin^۲ x}$ وقتیکه $x\to ۰$ برابر است با :

الف : $\frac{۱}{۳}$ ب: $\frac{۱}{۲}$ ج: ۱

۴۴ـ یکی از مجانب‌های منحنی تابع $y=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$ عبارتست از :

الف : $y=۱$ ب : $y=x$ ج : $x=۱$

تابع اولیهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲\cos^۲ x\sqrt{tgx}}$ برابراست با :

الف : $\sqrt{tgx}+C$ ب : $\sqrt{\cot gx}+C$

ج : $\sqrt{\cos x}+C$

۴۶ـ درصورتیکه باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $x+۲$ بترتیب -۲ و $+۳$ باشد باقیمانده تقسیم آن بر $(x-۱)(x+۲)$ برابراست با :

الف : $\frac{۱}{۳}+\frac{۵}{۳}x$ ب: $\frac{۵}{۳}-\frac{۱}{۳}x$ ج : $\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۳}$

۴۷ـ حاصل عبارت زیر برابراست با

$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}(۲+\sqrt{۳})(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$

الف : ۴ ب : ۳ ج : ۲

۴۸ـ حجم مخروط ناقصی‌که شعاع قاعدهٔ تحتانی آن ۳و شعاع قاعدهٔ فوقانی‌آن ۱ وارتفاع‌آن ۶ است برابراست با

الف : ۱۸π ب : ۲۶π ج : ۳۲π

۴۹ـ ازنقطه $a_۲$ خط AB را به‌شیب $\frac{۴}{۳}$ رسم می‌کنیم‌تا برخط قائم V متکی‌باشد $(av=۳)$ طول AB برابراست‌با:

الف : ۴ ب : ۵ ج : ۶

۵۰ ـ مجموع ۲۱ جملهٔ

$\ldots$ و $-\frac{۳}{۴}$ و $-\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ چنین است .

الف : $-۶۶\frac{۳}{۴}$ ب : $-۹۹\frac{۳}{۴}$ ج : $-۱۱۱\frac{۳}{۴}$

آن بکار رفته است ازجمله مطالبی است که در مجلهٔ یکان درج خواهد شد .

۲) آیانسبت معادله زیر به خیام صحیح است یا خیر وآیا این معادله قابل حل میباشد ؟

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=a \\ y+\sqrt{x}=b \end{cases}$$

معادله فوق درحالت $a=۱۰$ $b=۵$ در زمره مسائلی است که درکتاب خلاصة الحساب شیخ بهائی بنقل ازآثارپیشینیان وبعنوان مسائل لاینحل ذکر شده است (چنانچه در صفحهٔ کهنه و نو شمارهٔ اول مجله نقل شد) وحل آن به حل معادله درجه چهار منجر میشود که فقط از راه تقریبات متوالیه میسر است. یادآوری می‌نماید که دستگاه فوق اغلب درازاء مقادیر $a=۱۱$ و $b=۷$ مطرح شده است و حل آن باین صورت دریکی از ماهنامه‌ها نیز بمسابقه گذاشته شده است ، با وجود این معادله بصورت اخیر رأ نیز نمیتوان قابل حل دانست چنانچه همهٔ پاسخهائی که به عنوان راه حل درماهنامه فوق‌الذکر ذکرشده است مورد ایراد میباشد .

*** آقای علی کهنوئی مطرح ساخته‌اند :**

۱) اجسام (فرو- پارا - دیا) مانیتیك ازلحاظ تشکیل اتمی باهم چه تفاوت دارند ؟

۲) چرا دریك حوزه معین، اجسام دیامانیتیك برخلاف اجسام فرومانیتیك آهن ربا میشوند؟

۳) آیااجسامی که دارای حامل‌القاء شدیدهستند ازلحاظ الکترون آزاد بچه قرار هستند ؟

٤) آیا رابطه‌ای بین حرارت و مساقت وجود دارد ؟ و میتوان همان رابطه را با رابطه نور و مسافت مقایسه کرد ؟

پاسخ کامل و فرمولر به هریك از پرسشهای فوق چندین صفحه از مجله را اشغال خواهد نمود ، خلاصه آن بزبان ساده درزیر درج میشود وچنانچه طرح کنندهٔ محترم اطلاعات بیشتر خواسته باشند میتوانند مستقیماً باآقای دکتر ابوالقاسم قلمسیاه بنشانی « مرکز اتمی دانشگاه تهران » مکاتبه نمایند .

۱-**دیامانیتیك** خاصیتی است که بستگی بساختمان الکترونیکی تمام اتمها دارد .

امروز معتقدند که دیامانیتیسم خاصیت عمومی ماده است که حتی دراجسام فرومانیتیك و پارا مانیتیك نیز وجود دارد ولی این خاصیت دراین اجسام بعلت وجود آثارمخالف وشدیدتر مشهود نیست .

در جسم دیامانیتیك، در غیاب میدان مغناطیسی خارجی ، مدارهای الکترونیکی که الکترونهای آنها در خلاف جهت هم سیر میکنند میتوانند جفت جفت مجتمع شوند : بنابراین ممان های مغناطیسی حاصل از الکترون‌های مختلف هر اتم درست یکدیگر راجبران میکنند. وجود میدان مغناطیسی خارجی سبب میشود که در دوران الکترونیکی تغییری عارض شود این تغییر را میتوان معادل یك جریان القائی دانست و باعث ظهور یك ممان مغناطیسی میشود که دیگر صفر نیست .

تمام شبه فلزات باستثنای O_2 واغلب فلزات (نقره - طلا- جیوه - مس سرب و غیره) و نمکها و تقریباً تمام مواد آلی دیامانیتیك‌هستند .

پارامانیتیك - اگر ممان‌های مغناطیسی مدارهای الکترونیکی یا ممان‌های مغناطیسی اسپین‌ها یکدیگررا جبران نکنند اتمهای جسم دارای یك ممان کولنی (Moment Coulombien) دائمی میشوند بعلت عدم نظم وترتیب ملکولی، ممان مغناطیسی متوسط ماده (درجزئی از آن که خیلی کوچك نباشد) در غیاب میدان مغناطیسی خارجی صفر است وقتیکه ماده تحت اثرمیدان مغناطیسی واقع شود اتمها توجیه میشوند وهرچه میدان قوی‌تر باشد این خاصیت شدیدتر است .

توجیه این اتمهارا در میدان مغناطیسی شبیه باثر میدان الکتریکی بریك ملکول قطبی (یعنی ملکولیکه‌دارای دو قطب مثبت و منفی است) دانست . چندتا ازگازها مخصوصاً O_2 و بعض فلزات مانند (پلاتین، سدیم . آلومینیم ، کرم ،منگنزو ...) بعض ازنمکهای فلزات پارامانیتیك هستند.

فرومانیتیك - پدیده‌فرومانیتیك فقط‌دراجسام‌جامدیکه تعداد اتمهای آنها در واحد حجم ، زیاد است بظهور میرسد فرومانیتیسم‌علتی‌شبیه‌به پارامانیتیسم اجسام‌جامد دارد.

باید درنظر داشت که خاصیت‌فرومانیتیسم متناسب باممان دائمی اتمها است وچون این خاصیت محدوداست میتوان تصور کرد هنگامیکه ماده از خاصیت آهن ربائی اشباع میشود تمام ممان‌های اتمیك با یکدیگر موازی میشوند .

بنابر نظریه **Weiss** ، میتوان یك ماده جامدفرومانیتیك را بقسمتهائی تقسیم کردکه در هریك ازاین قسمتها ممان‌های اتمیك باهم موازی باشند. درغیاب‌میدان‌مغناطیسی خارجی‌ممان‌قسمتهای مختلف نسبت بیکدیگر ، در وضع نامرتبی قرار دارند و پلاریزاسیون متوسط منتجه صفر است کار میدان خارجی اینست که همه این ممان‌هارا بیك‌طرف توجیه کند .

۲- پاسخ پرسش سوم ضمن جواب سوال‌های ۱ و۲ بیان شده است .

جواب سئوال چهارم ـ جسمیکه ازخود اشعه‌ای خارج میسازد درحقیقت یك مبدل انرژی است این تشعشع ممکن است بصورت نورباشدودر اینصورت پدیدهٔ لومینسانس ظاهرمیشود کهمورد بحث ما نیست. تشعشع ممکن است بصورت انرژی حرارتی باشددراینصورت میگویند « تشعشع بوسیله التهاب » یا تشعشع حرارتی . اینگونه اشعه ازخلاء عبور میکنند بدون اینکه جذب شوند واز محیطهای دیگر نیز میگذرند وکم وبیش جذب میشوندودرجه حرارت محیط را بالامیبرند . سرعت انتشار آنها تابع جنس محیط است . فرکانس آنها ازرابطه $f=\frac{1}{T}$ (T پریود این اشعه است) وطول موجشان درخلاء ازرابطه $\lambda=cT$ حساب میشودکه درآن c سرعت انتشارشان درخلاء و برابر $3\times10^8\frac{m}{S}$ است . باید در نظر داشت که حرارت علاوه بر طریقهٔ تابش بطریقهٔ هدایت (در جامدات) وکنوکسیون (در مایعات وگازها) منتشرمیشودوممکن است انتشار حرارت بهرسه طریقه درآن واحد صورت گیرد .

* **آقای شاهرخ ریاضی** حل مسألهٔ زیررا خواسته‌اند.

مطلوبست تعیین حد :

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\sqrt{1+\frac{K}{n^2}}-1\right)$$

جملهٔ عمومی این دنباله عبارتست از :

$$u_k=\sqrt{1+\frac{K}{n^2}}-1$$

با فرض $\frac{k}{n^2}=x<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}<1$

و بسط $\sqrt{1+x}-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\dots$

داریم $u_k=1+\frac{K}{2n^2}-\frac{K^2}{8n^4}+\dots-1$

(جمله‌های دیگر u درمخرج ، قوای زوج n بیش از چهار دارند) .

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{2n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8n^4}+\dots$$

و جملهٔ دوم ببعد طرف دوم صفر است زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8n^4}=\frac{1}{8n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{8n^4}\to 0$$

پس $S_{n\to\infty}=\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{2n^2}=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=$

$$=\frac{n(n+1)}{4n^2}\quad\text{و}\quad \boxed{S_n\to\frac{1}{4}}$$

* **آقای بهروز رضوانی** حل معادلهٔ $x^2=2^x$ را خواسته‌اند .

حل این معادله‌را ازراه نمودار امکان پذیر است که در این باره مقاله‌ای درشمارهٔ ۳ و ٤ مجله درج شده است).جواب صحیح معادله فقط $x=2$ میباشد .

* **آقای سید جعفر وفابخش** سؤالی مطرح ساخته‌اند که در شمارهٔ ۳و٤ مجله نیزدرج گردیده باین مضمون :

اصل بقای انرژی مسلم است . فنری از نوع فلزی راکه در اسید قابل حل است جمع کرده با سیم پلاتین می‌بندیم وآنرا در این حال که دارای انرژی است داخل اسید می‌اندازیم تا حل شود . انرژی آن چه میشود ؟

انرژی فنر باعث تشدید فعل‌وانفعالات شیمیائی میشود ،اما درآزمایشهای آزمایشگاهی آن اندازه نیست که قابل اندازه گیری باوسایل موجود باشد .

* **آقای علی اکبر هدایتی پرسیده‌اند :**

۱) چرا ،آب ، چدن وبیسموت برخلاف سایر اجسام، دراثرانجماد حجمشان زیاد می گردد ؟

۲) آیا دستگاه زیرقابل حل است با توجه باینکه $x=4$ و $y=1$ درآن صادق است .

$$\begin{cases}\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{y}\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1\end{cases}$$

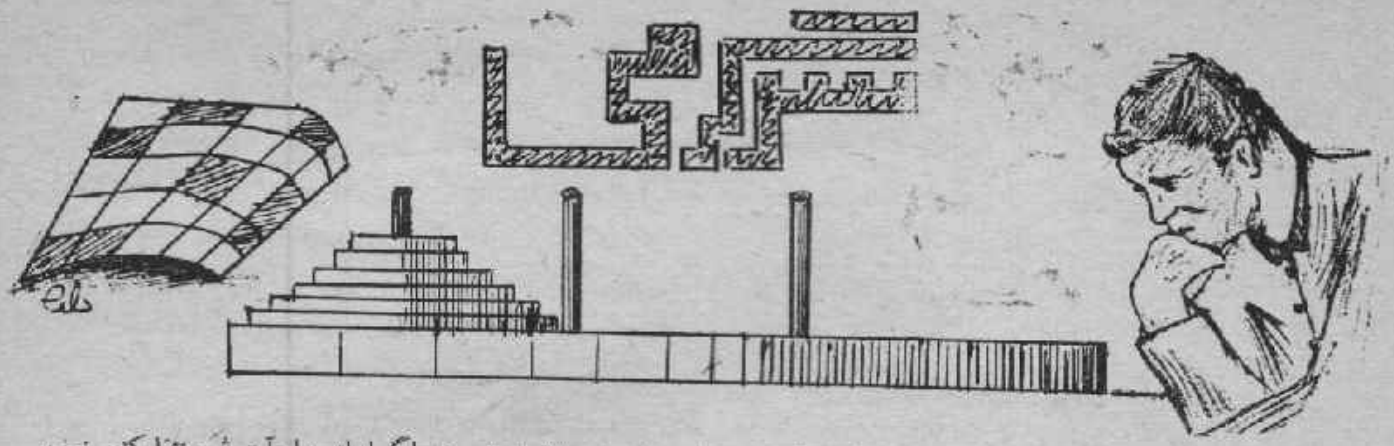
۱ـ اولا خاصیت فوق منحصر باجسام فوق‌الذکر نیست . ثانیاً مربوط بساختمان مولکولی اجسام میباشد .

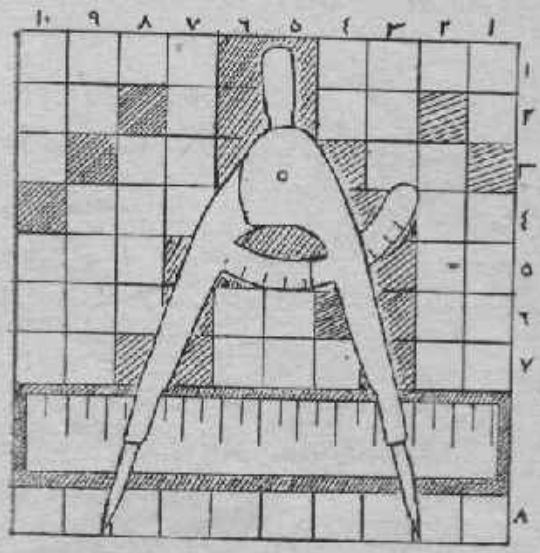
۲ـ دانستن جوابی ازیك معادله دلیل حل آن نیست . با درنظر گرفتن مقادیر معین میتوان معادله‌هائی تشکیل داد که حل آن امکان پذیر نباشد .

* **آقای مرتضی کاوسی پرسیده‌اند :** شعلهٔ آتش (شراره‌های آتش) از چه نوع اجسامی است (جامد مایع یا بخار).

شعلهٔ آتش گاز در حال التهاب میباشد یعنی از نوع گازها است .

***





جدول کلمات متقاطع

افقی :

۱ـ صاحب هندسه‌ای که در آن مجموع زاویه‌های مثلث از دوقائمه بیشتر است . مشهور است که برای تشخیص اعداد اول روش ساده‌ای ابتکار کرده و آنرا باخود بگور برده است. ۲ـ مبنای دستگاه عدد نویسی متعارفی ـ برای ضرب عددی در آن میتوان عددرا از ده برابر خودکم نمود . ۳ـ از متر چیزی کم دارد ـ به‌آخر عدد مخرج کسر اضافه میشود. ٤ـ سه ده ـ سیاره زیبای منظومهٔ شمسی . ٥ـ ازتکرار آن سلسلهٔ نامحدود اعداد پدید میآید ـ نام واحد فیزیکی و یکی از دانشمندان این علم ٦ـ صحیح آن پاس باید باشد اما پاس نوشته میشود ، خدای اعداد ـ نام مستشرق انگلیسی که جبر ومقابه خوارزمی را به انگلیسی ترجمه کرد. ۷ـ اعداد زوج را عادمیکند ـ واضع لگاریتم ـ در شبانه روز دوبار اتفاق می افتد و ساحل نشینان بر آن اطلاع دارند . ۸ـ ریاضیدان مشهور هندی واضع اعداد منفی که آثار علمی خودرا بشعر بیان مینموده است .

قائم :

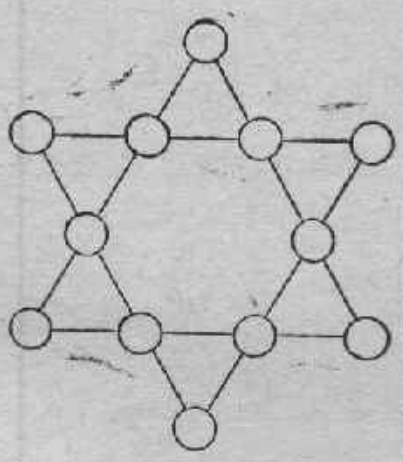
۱ـ دوثلث از یك چهارم ـ بنابر تلفظ باید سه هزار باشد اما سه صد بیشتر نیست . ۲ـ اگر اولش را بآخرش منتقل کنیم نصف میشود . ۳ـ گذشت زمان . ٤ بزرگترین رقم درمبنای سلسله اعشاری . ٥ـ وارونه‌عدداصم معروف . ٦ـ قاعدهٔ بایستی درترجمه عربی برای اعداد غیر منطق بکار رفته باشد . ۷ـ زاویه‌ای که شعاع بصری جسم بالاتر از چشم ناظر باافق میسازد . ۸ـ خط نامحدود دارای جهت . ۹ـ واحدوزن ـ باکافی میآید . ۱۰ـ نام دانشمند و همچنین واحد فیزیکی ـ لغت فارسی وضع شده برای حاده .

معامله با ملیونر خسیس

آقای ساده فما به آقای خرپول ملیونر خسیس پیشنهاد انجام معامله زیردا داده است . برای مدت یکماه ، ساده فما روزانه صد هزار تومان به آقای ملیونر بپردازد و در مقابل ملیونر متعهد شود که روز اول ماه فقط ده دینار (۱۰/. ریال) روز دوم بیست دینار (۲۰/.) وبهمین ترتیب تاآخرماه هرروز باندازهٔ دوبرابر مبلغ روز قبل بپردازد .

در این معامله سود باکیست ؟

ستارهٔ وفقی



یك تصاعد حسابی با دوازده جمله که جمله اولش a و قدر نسبت آن r باشد در نظرمی گیریم . جمله‌های این تصاعد رادر دایره‌های روی ستاره چنان قرار دهید که مجموع هرچهار جمله واقع روی خط برابر مقدار ثابت باشد. این مقدارثابت (وفق ستاره) را نیز حساب کنید .

حالت خاص : $a=1$ و $r=1$

بهترین کتابهای علمی در

کتابخانهٔ اندیشه

۱ ـ از کهکشان تا انسان
ترجمهٔ فریدون بدره‌ای

۲ ـ مجموعهٔ علمی جهان
ترجمهٔ احمد بیرشك

۳ ـ هستهٔ اتم
ترجمهٔ مهندس گرمان

٤ ـ حل مسائل عمومی ریاضیات
تألیف باقر امامی

٥ ـ از ماشین بخار تا قمر مصنوعی
ترجمهٔ مهندس تمدن ـ مهندس منوچهری

٦ ـ هندسهٔ غیر اقلیدسی
ترجمهٔ پرویز شهریاری

۷ ـ جدول مندلیف
تألیف دکتر نجفی

۸ ـ زمین و آونگ
ترجمهٔ باقر امامی

تدریس خصوصی

کلیهٔ دروس دبیرستان
و کنکور دانشکده‌ها
توسط: دانشجویان دانشکده های علوم و فنی
روزهای فرد بین ساعات (۱۰ـ۱۲) صبح
باتلفن ٤۲۸۹٥ مذاکره شود

ریاضیات دبیرستان
توسط
دانشجوی دانشکدهٔ علوم
برای کسب اطلاعات بنشانی ادارهٔ مجلهٔ یکان
مکاتبه شود

ازجمله نامه‌های رسیده :

* **آقای عباس نعمتیان** فارغ‌التحصیل ششم‌ریاضی سال جاری درباره سئوالات امتحانی تذکراتی داده‌اند از جمله توضیح داده‌اند ، یکی از مسائل‌امتحان‌جبر با ازراه تعیین پوش حل‌میشود که برنامه متوسطه نیست لذا باید با استفاده از عبارات متحد حل شودکه این قسمت هم در هیچیك از کتابهای درسی نیامده و بیشتر دبیران هم ازآن صحبتی نمیکنند .

* **آقای عبدالرحمن ستارزاده‌آذری** ضمن‌نامهٔ‌مشروح خود بیان داشته‌اند که بهتر است بجای کلمات عربی که در ریاضیات مصطلح است از کلمات فارسی‌سره استفاده شود زیرا این امر به زنده ردن‌واستقلال زبان فارسی کمك می‌کند و اصطلاحات جدید هم بعدازمدتی جزو کلمات مانوس خواهد شد .

مجموعهٔ ادبیات امروز

مجموعه تازه‌ای که نیل زیر عنوان بالا به انتشارش دست زده است چنانکه ازنامش پیدا است شامل آثار ادبیات معاصر ایران وجهان است . کتابهای این مجموعه ازمیان آثار برجسته نویسندگان قرن بیستم «وتاحد امکان نویسندگان معاصر» انتخاب خواهدشد واین کارساده‌ای نیست . زیراوقتی که سخن از آثار ادبی قرون گذشته درمیان است کارانتخاب از میان آنها بوسیله سخن سنجان و محققان گذشته انجام شده وازمیان آثار متعدد وبیشمار آن قرون ، آنها که حائزاهمیت ودارای ارزش بوده انتخاب ومعرفی شده است .

عده‌ای از نویسندگان و شاعران بکلی نامشان فراموش شده وعده دیگری بعنوان بزرگان ادب شناخته شده‌اند وآثارشان نیزمعلوم ومشخص است . دیگرکسی نیست که درمقام بالزاك یااستاندال شك کند و « باباگوریو » یا « سرخ و سیاه » را شاهکار نشمارد.اما درمورد ادبیات امروز چنین سنجش قاطعی بعمل نیامده است و قضاوتهائی هم که همه ساله بوسیله داوران جوائز وبامنقدان مجلات ادبی بعمل می آید ارزش فصلی و زودگذر دارد وپس از مدتی فراموش میشود .

همه ساله در فرانسه جوائز « گنکور » و«رنودو»و «فمینا» و ده ها جایزه دیگر به آثار تازه تعلق میگیرد . اما از میان صدهاکتابی که تاکنون این جوایزرا برده‌اند شاید نتوانیم فقط ده جلدرا نام ببریم که این امتیاز بدست آمده‌راحفظ کرده واهمیت و ارزش پایداری یافته‌باشند.

اما دراین میان کتابهائی هست که زیبائی و ارزش‌شان تردید پذیر نیست و چه بسا که در آینده نیز بعنوان آثار برجسته این عصر باقی بمانند .

کاری که **نیل** آغاز کرده است انتخاب این آثار ازمیان صدها اثر وتهیه آنها بوسیله مترجمان شایسته وقراردادن آنها در این مجموعه تازه است

نیل با تجربه‌ای که در گذشته بدست آورده واعتمادی که تاکنون با انتشارات خود جلب کرده است امیدوار است که‌در این مرحله توفیق یابد ومجموعه پرارزش وبی‌نظیری‌برای خوانندگان فراهم آورد .

طلا

اثر بلزساندرا

شاعر و نویسنده نامدار فرانسوی

ترجمه محمد قاضی

موئیرا

اثر زولین گرین

ترجمه عبدالله توکل

داستانهائی از یك جیب

اثر کارل چاپك

ترجمه ایرج نوبخت

عزاداران بیل

اثر غلامحسین ساعدی

شریفجان ، شریفجان

اثر تقی مدرسی

نویسنده کتاب مشهور یکلیا و تنهائی او

مجموعهٔ ادبیات امروز

بزودی منتشر میشود ــ انتشارات نیل ــ تهران مخبرالدوله ــ تلفن ۳۰٤۱۲۸