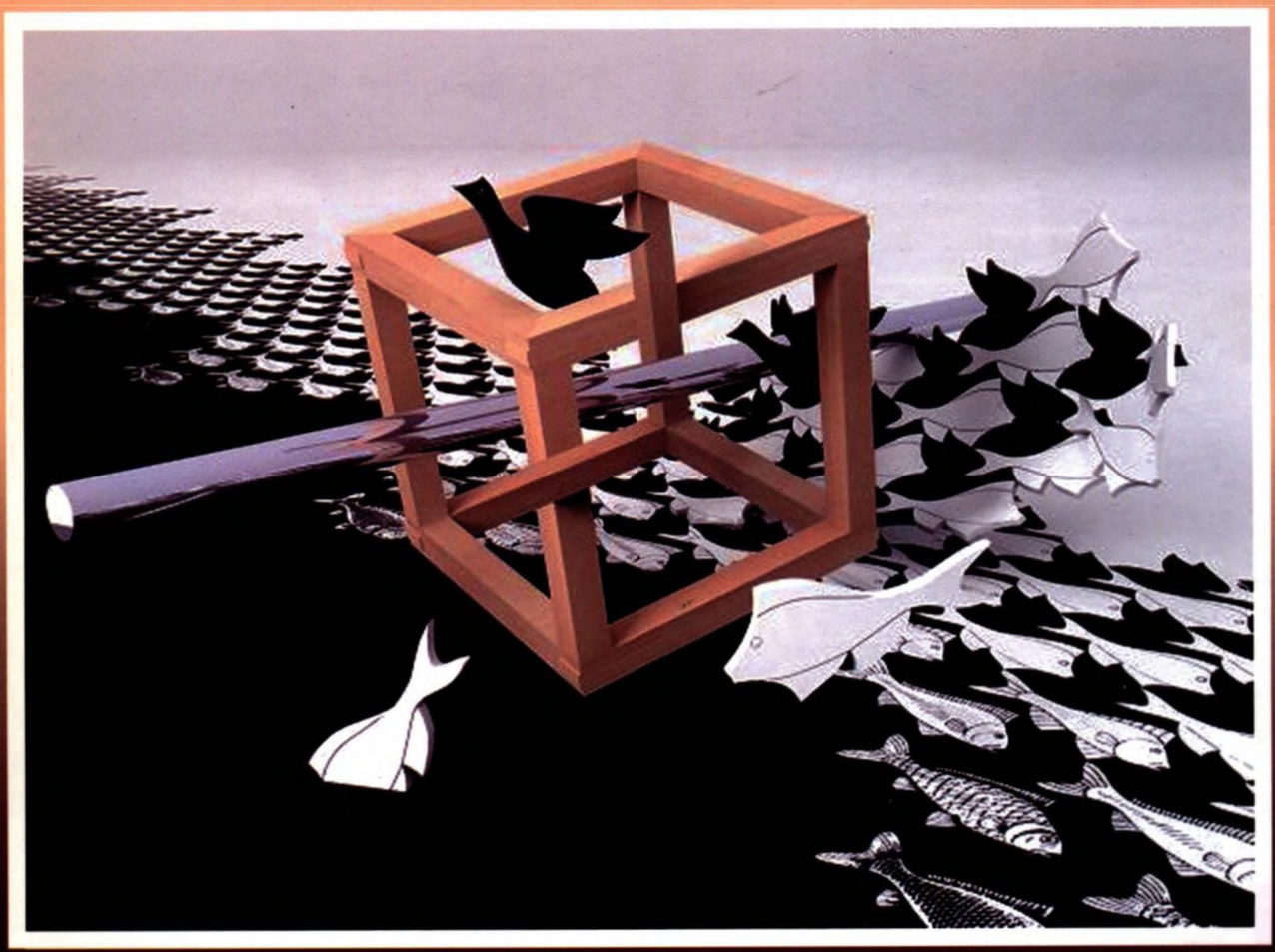
نشریه فنی

سال ۱۸، شمارهٔ ۲

شمارهٔ پیاپی ۳۴



۸۴ صفحه، ۱۵۰۰۰ ریال

مرکز نشر دانشگاهی

www.iup.ir

بسم‌الله الرحمن الرحیم





مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

تهران، صندوق پستی ۴۷۴۸-۱۵۸۷۵

تلفن: ۸۸۷۱۳۳۸۱
پیام‌نگار: nashreriyazi@iup.ir
وب‌گاه: www.iup.ir

علاقه‌مندان به اشتراک، به راهنمای اشتراک مجلات مراجعه کنند.

بهای این شماره ۱۵۰۰۰ ریال

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه‌شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

عضو سامانهٔ نشر مجلات علمی پژوهشی کشور به نشانی:
http://isj.iup.ir

یادآوری

- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۸، شمارهٔ ۲

تاریخ انتشار: آذر ۱۳۸۹

شمارهٔ پیاپی: ۳۴

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: محمدقاسم وحیدی‌اصل

- **هیأت ویراستاران:**
علیرضا جمالی
حسن حقیقی
سیامک کاظمی
محمدقاسم وحیدی‌اصل

- **همکاران:** فریبرز آذرپناه، محمد اردشیر، شاپور اعتماد، اسماعیل بابلیان، غلامرضا برادران خسروشاهی، ناصر بروجردیان، محمد جلوداری‌ممقانی، روح‌الله جهانی‌پور، رحیم زارع‌نهندی، رشید زارع‌نهندی، سیاوش شهشهانی، سید محمدباقر کاشانی، زهرا گویا، محمد صال مصلحیان، همایون معین

- **مدیر داخلی:** زهرا دلاوری
- **طراح جلد:** آتیه موسوی
- **حروف‌نگار و صفحه‌آرا:** شهلا تقوی و شیلا افشایی
- **ناظر چاپ:** علی صادقی
- **چاپ و صحافی:** سامان

(خیابان پیروزی، بیست‌متری نبرد، پلاک ۴۴۶، ۳۳۱۷۰۲۲۵)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

گزارش ۲

مقاله‌ها

آشنایی با جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی — سیامک یاسمی — ۱۰

ریاضیات است که ما را انتخاب می‌کند — میخائیل گلفاند — ۱۹
(گفتگو با یوری منین)

اندرز به ریاضیدان جوان — اتیا، بلوباش، کُن، مک‌داف، سرنک — ۲۶

روش علمی، روش آماری، و سرعت نور — آر.جی.مکای، آر.دبلیو.اُلدفُرد — ۳۵

کدهای میله‌ای: تحلیل توپولوژیک داده‌ها — رابرت گریست — ۴۴

جان مایکل همرزلی — جفری گریمت، دومینیک ولش — ۵۴

آموزش و مسأله

درسی در جبر مجرد با الهام از تاریخ — ایزراییل کلاینر — ۶۷

چه وقتی یک گروه می‌تواند اجتماعی از زیرگروههای نرمال سره باشد؟ — میرا بهارگاوا — ۷۲

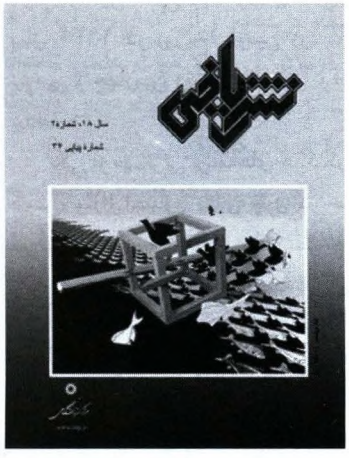
چند مسأله برای حل، مسأله‌ای به همراه حل — ۷۴

نقد و بررسی

همراه‌نامهٔ ریاضی پرینستن — سایمن دانلدسن، گیل کالای — ۷۵

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم (فصل پنجم) — پال هالموس — ۷۸



روی جلد

طرحی از اشر
[تفسیر طرح بر عهدهٔ خواننده است!]

گزارش

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در هند

بزرگ‌ترین گردهمایی ریاضیدانان جهان کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (ICM) است که اول بار در سال ۱۸۹۷ در شهر زوریخ واقع در سویس برگزار شد و از ۱۹۰۰ به بعد (با وقفه‌هایی در دو جنگ جهانی) هر چهار سال یک بار در یکی از کشورها برگزار شده است. از سال ۱۹۵۴ این کنگره با نظارت اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) تشکیل می‌شود. کشور برگزارکننده در یک رقابت فشرده از بین کشورهای داوطلب و با رأی انجمنهای ریاضی ملّیِ عضو اتحادیه که حق رأی دارند، انتخاب می‌شود. کنگرهٔ امسال (ICM 2010) در روزهای ۱۹ـ۲۷ اوت سال جاری میلادی (۲۸ مرداد تا ۵ شهریور ۱۳۸۹) در شهر حیدرآباد هند برگزار شد. چند روز قبل از برگزاری این کنگره، نمایندگان انجمنهای ریاضی عضو اتحادیه در شهر بنگلور تشکیل جلسه دادند و از بین کشورهای داوطلب برگزاری کنگرهٔ سال ۲۰۱۴ که عبارت بودند از کرهٔ جنوبی، برزیل، و کانادا، کرهٔ جنوبی را با اکثریت آرا انتخاب کردند. در این نشست، رئیس جدید اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی نیز، که هر چهار سال یک بار انتخاب می‌گردد، برگزیده شد. وی خانم اینگرید دوبه‌شی[1] استاد دانشگاه پرینستن آمریکاست. او اولین رئیس زن اتحادیه است و از ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۴ این مسؤولیت را به‌عهده خواهد داشت. گفتنی است که خانم دوبه‌شی یکی از چهار زنی است که تاکنون برای ایراد سخنرانی عمومی در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان دعوت شده است. اولین زن، امی‌نوتر در سال ۱۹۳۲ در زوریخ؛ دومین زن، کارن اولنبک[2] در ۱۹۹۰ در کیوتو؛ و سومین و چهارمین زن، مارینا راتنر[3] و اینگرید دوبه‌شی در ۱۹۹۴ در زوریخ بودند.

یکی از مهم‌ترین برنامه‌های هر کنگره، اعطای نشان فیلدز و جوایز نوانلینا، گاوس، و (از امسال) نشان چرن در جلسهٔ افتتاحیهٔ کنگره است. این جوایز در کنگرهٔ حیدرآباد به شرح زیر اعطا شد.

نشان فیلدز. این نشان در هر کنگره به دو تا چهار ریاضیدان برجستهٔ زیر چهل سال داده می‌شود و با آنکه ارزش مالی اندکی (۱۵۰۰۰ دلار کانادا) دارد، شاید معتبرترین مدال افتخار در ریاضیات باشد. برندگان فیلدز در کنگرهٔ امسال عبارت بودند از

1. Ingrid Daubechies 2. Karen Uhlenbeck 3. Marina Ratner

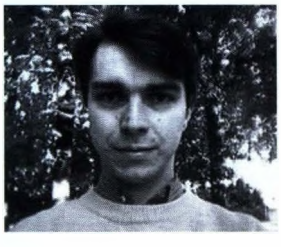
• **الون لیندنشتراوس**[1] از دانشگاه عبرانی بیت‌المقدس، «به‌خاطر نتایجی که دربارهٔ صلبیت اندازه در نظریهٔ ارگودیک به‌دست آورده، و کاربردهای این نتایج در نظریهٔ اعداد».



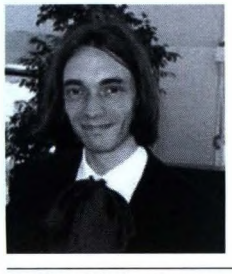
• **نگو بائو چائو**[2] از دانشگاه پاریس جنوب در اورسه، فرانسه، «به‌خاطر اثبات لم اساسی در نظریهٔ فرمهای خودریخت از طریق معرفی روشهای جبری-هندسی جدید». نگو بائو چائو اصلاً اهل ویتنام است و پس از دریافت دیپلم دبیرستان به فرانسه رفته است.



• **استانیسلاو اسمیرنوف**[3] از دانشگاه ژنو، سویس، «به‌خاطر اثبات ناوردایی همدیسِ پرکولاسیون و مدل آیزینگ هامنی در فیزیک آماری». وی اصلاً اهل روسیه است.



• **سدریک ویلانی**[4] از انستیتوی هانری پوانکاره در پاریس، فرانسه، «به‌خاطر اثبات میرایی غیرخطی لانداو و همگرایی به تعادل برای معادلهٔ بولتسمان».



1. Elon Lindenstrauss 2. Ngô Bao Châu 3. Stanislav Smirnov
4. Cédric Villani

جایزهٔ رولف نوانلینا. این جایزه از سال ۱۹۸۲ در هر کنگره برای قدردانی از تحقیقات مهم در «جنبه‌های ریاضی علوم اطلاعات» (از جمله، پیچیدگی محاسبه، تحلیل الگوریتمها، رمزنگاری، پردازش اطلاعات، و نظایر آنها) به دانشمندان زیر چهل سال اهدا می‌شود و شامل یک مدال طلا و ۱۰۰۰۰ یورو وجه نقد است. جایزه به‌نام معروف‌ترین ریاضیدان فنلاند، رولف نوانلینا (۱۸۹۵ـ ۱۹۸۰) نامیده شده است. امسال جایزهٔ نوانلینا به **دانیل اسپیلمن**[1] از دانشگاه ییل در آمریکا «به‌خاطر تحقیقاتش در زمینهٔ آنالیز هموارشدهٔ برنامه‌ریزی خطی، الگوریتمهایی برای کدهای مبتنی بر گراف و کاربردهای نظریهٔ گرافها در محاسبات عددی» تعلق گرفت.

جایزهٔ کارل فریدریش گاوس. این جایزه ازکنگرهٔ ۲۰۰۶ برقرار شده و هدف از آن تقدیر ازکسانی است که تحقیقات ریاضی آنها در خارج از ریاضیات ــ در فناوری، بازرگانی، یا زندگی روزمرهٔ مردم ــ تأثیر مهمی داشته است. این جایزه که شامل یک مدال طلا و ۱۰۰۰۰ یورو وجه نقد است، امسال به **ایو میر**[2] استاد بازنشستهٔ «اکول نرمال سوپریور دُکاشان»[3] در فرانسه تعلق گرفت و دلیل آن «خدمات اساسی او به نظریهٔ اعداد، نظریهٔ عملگرها و آنالیز همساز، و نقش اساسی‌اش در پیشبرد مبحث موجکها و تحلیل چندریزگی» ذکر شد.

نشان چرن. این نشان که برای اولین بار در این کنگرهٔ اعطا شد، برای تجلیل از شینگ‌ـشن چرن[4] ریاضیدان بزرگ چینی‌ـآمریکایی (۱۹۱۱ـ۲۰۰۴) برقرار شده و به کسانی که دستاوردشان در ریاضیات از بالاترین کیفیت برخوردار باشد، بدون شرط سنی، اهدا می‌شود. مبلغ جایزه ۲۵۰۰۰۰ دلار آمریکاست و علاوه‌بر آن، ۲۵۰۰۰۰ دلار به انتخاب شخص برنده به یک مؤسسهٔ آموزشی یا پژوهشیِ فعال در زمینهٔ ریاضیات تخصیص می‌یابد. هزینهٔ جایزه را بنیادِ نشانِ چرن (CMF) تأمین می‌کند و برندهٔ جایزه را این بنیاد و اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی مشترکاً تعیین می‌کنند. برندهٔ این جایزه در کنگرهٔ امسال، **لوئیس نیرنبرگ**[5] از مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در نیویورک، «به‌خاطر نقش او در صورت‌بندی نظریهٔ نوین معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی غیرخطی، و نیز به‌خاطر هدایت و تربیت تعداد زیادی دانشجو و محقق پست دکتری در این حوزه» اعلام شد.

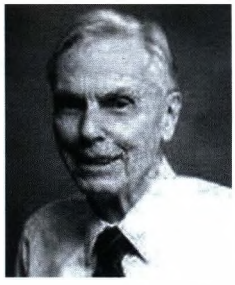
برنامهٔ اصلی سخنرانیهای کنگره، طبق معمول شامل سخنرانیهای یکساعته، ۴۵ دقیقه‌ای، و ۱۵ دقیقه‌ای بود. سخنرانیهای یکساعته صبحها در جلسات عمومی کنگره ایراد می‌شدند و همزمان با آنها سخنرانی دیگری برگزار نمی‌شد. موضوع آنها مرور آخرین پیشرفتها در مباحث داغ تحقیقاتی ریاضی به‌وسیلهٔ ریاضیدانان پیشرو در آن مباحث بود. دعوت‌شدن برای ایراد سخنرانی عمومی درکنگره، از افتخارات حرفه‌ای یک ریاضیدان به‌شمار می‌آید. از میان ایرانیان یا ایرانی‌تبارها، تاکنون فقط کامران وفا، فیزیکدان نظری دانشگاه هاروارد، سخنران عمومی مدعو بوده است که درکنگرهٔ ۱۹۹۸ در زمینهٔ فیزیک هندسی صحبت کرد. سخنرانیهای ۴۵ دقیقه‌ای براساس تقسیم‌بندی ریاضیات به چندین شاخه (امسال به ۲۰ شاخه) برگزار می‌شود و عده‌ای ریاضیدان مدعو در هر شاخه سخنرانی می‌کنند. مریم میرزاخانی، ریاضیدان جوان ایرانی مقیم آمریکا از سخنرانان مدعو درکنگرهٔ امسال در شاخهٔ توپولوژی بود. سخنرانیهای ۱۵ دقیقه‌ای به ارائهٔ مقالات تخصصی‌تر اختصاص داشت.

1. Daniel Spielman 2. Yves Meyer
3. École Normale Supérieure de Cachan 4. Shing-Shen Chern
5. Louis Nirenberg

از رویدادهای جنبی جالب کنگره، برگزاری مسابقهٔ شطرنج همزمان بین آناند[1] قهرمان هندی شطرنج جهان و چهل تن از ریاضیدانانی بود که قبلاً برای این مسابقه ثبت نام کرده بودند. مسابقه در سالن نسبتاً بزرگی انجام شد و پس از ۳٫۵ ساعت مبارزه، آقای آناند با ۳۹٫۵ امتیاز پیروز شد، یعنی فقط یک نفر از ریاضیدانان توانست با او مساوی کند و ۳۹ نفر بقیه به افتخار بازندگی نائل شدند!

کنگرهٔ ۲۰۱۰ از حمایت مالی نهادهای علمی جهانی و دولت هند برخوردار بود و سعی فراوانی به‌عمل می‌آمد که رفاه حال شرکت‌کنندگان تأمین شود.

محمدرضا درفشه



جان تیت برندهٔ جایزهٔ آبل ۲۰۱۰

آکادمی علوم و ادبیات نروژ، جایزهٔ آبل سال ۲۰۱۰ را به جان تورنس تیت[2]، از دانشگاه تکزاس در آستین، به‌خاطر «تأثیر عظیم و ماندگار دستاوردهایش در نظریهٔ اعداد» اهدا کرد. جایزهٔ آبل از سال ۲۰۰۳ به بعد هر ساله برای ارج نهادن به دستاوردهای فوق‌العاده عمیق و تأثیرگذار در علوم ریاضی اعطا می‌شود. مبلغ جایزه ۶۰۰۰۰۰۰ کرون نروژ (تقریباً معادل یک میلیون دلار آمریکا) است. انتخاب برندهٔ جایزه براساس توصیهٔ «کمیتهٔ آبل» که مرکب از ۵ ریاضیدان برجسته در سطح بین‌المللی است، انجام می‌شود. جان تیت این جایزه را در ۲۵ مه ۲۰۱۰ طی مراسم ویژه‌ای از هارالد پادشاه نروژ دریافت کرد.

جان تیت در ۱۳ مارس ۱۹۲۵ در مینیاپولیس واقع در ایالت مینه‌سوتای آمریکا به‌دنیا آمد. مدرک کارشناسی را در ۱۹۴۶ از دانشگاه هاروارد و درجهٔ دکتری را در ۱۹۵۰ از دانشگاه‌پرینستن، تحت راهنمایی امیل آرتین، دریافت کرد. از ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۳ در دانشگاه پرینستن و از ۱۹۵۳ تا ۱۹۵۴ در دانشگاه کلمبیا مشغول به‌کار بود. در ۱۹۵۴ عضو هیأت علمی دانشگاه هاروارد شد، ۳۶ سال در آنجا ماند، و سپس عضو هیأت علمی دانشگاه تکزاس در آستین شد. وی در ۲۰۰۹ از دانشگاه تکزاس بازنشسته شد.

جان تیت جوایز و افتخارات بین‌المللی بسیاری دریافت کرده است. وی در ۱۹۵۶ جایزهٔ کول[3] انجمن ریاضی آمریکا، در ۱۹۹۵ جایزهٔ استیل[4]، و در ۲۰۰۳/۲۰۰۲ به اتفاق میکیو ساتو[5] جایزهٔ ولف[6] را دریافت کرد. وی سخنران مدعو کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در ۱۹۶۲ استکلهلم و همچنین درکنگرهٔ ۱۹۷۰ نیس بود. در ۱۹۶۹ به عضویت آکادمی علوم ملی آمریکا،

1. Viswanathan Anand 2. John Torrence Tate 3. Cole Prize
4. Steele Prize 5. Mikio Sato 6. Wolf Prize

در ۱۹۹۲ به‌عنوان عضو خارجی آکادمی علوم فرانسه، و در ۱۹۹۹ به‌عنوان عضو افتخاری انجمن ریاضی لندن انتخاب شد.

در پس حساب سادهٔ ۱، ۲، ۳، . . .، دنیایی پیچیده و دشوار قرار دارد که طی تاریخ بهترین ذهنها را به مبارزه طلبیده است. این دنیا، از اعداد اسرار آمیز اول تا روشی که برای ذخیره‌سازی، انتقال، و ایمنی اطلاعات در رایانه‌های جدید به‌کار می‌بریم، گسترده است. این رشته، نظریهٔ اعداد نام دارد و طی قرن گذشته به‌صورت یکی از پیشرفته‌ترین شاخه‌های ریاضیات درآمده و ارتباطات عمیقی با سایر حوزه‌های ریاضیات، همچون هندسهٔ جبری و نظریهٔ فرمهای خودریخت یافته است. جان تیت یکی از معماران اصلی این پیشرفتها بوده است.

رسالهٔ تیت در ۱۹۵۰ دربارهٔ آنالیز فوریه در میدانهای عددی، راه را برای نظریهٔ جدید فرمهای خودریخت و Lـتابعهای آنها باز کرد. وی به اتفاق امیل آرتین نظریهٔ میدانهای رده‌ای سراسری را با استفاده از تکنیکهای جدید کوهومولوژی [همانستگی] گروهها متحول ساخت. به اتفاق جاناتان لوبین[1] نظریهٔ میدانهای رده‌ای موضعی را با استفادهٔ هوشمندانه از گروههای صوری شکلی تازه بخشید. ابداع فضاهای تحلیلی صلب توسط تیت تمامی حوزهٔ هندسهٔ تحلیلی صلب را بارور کرد. وی مشابه pـادیک نظریهٔ هاج در نظریهٔ اعداد را پیدا کرد که امروزه نظریهٔ تیت‌ـهاج نامیده می‌شود که به پیدایش تکنیک اساسی دیگری در نظریهٔ مدرن اعداد جبری منجر شده است.

تعداد زیادی از ایده‌ها و ساختهای اساسی ریاضی دیگر نیز توسط تیت بنیاد نهاده شد، از جمله کوهومولوژی تیت، قضیهٔ دوگانی تیت، گروههای تیت‌ـبارسوتی[2]، موتیو[3] تیت، مدول تیت، الگوریتم تیت برای خمهای بیضوی، ارتفاع تیت‌ـنرون روی گروههای موردل‌ـویلِ واریته‌های آبلی، گروههای تیت‌ـمامفرد، قضیهٔ تکزایی[4] تیت و قضیهٔ تیت‌ـهوندا برای واریته‌های آبلی روی میدانهای متناهی، نظریهٔ تغییر شکل تیت‌ـسر[5]، گروههای تیت‌ـشافارویچ، و حدسیهٔ تیت‌ـساتو درباره خمهای بیضوی؛ می‌توان این فهرست را همچنان ادامه داد.

کشف بسیاری از خطوط عمدهٔ تحقیقاتی در نظریهٔ اعداد جبری و هندسهٔ جبری حسابی فقط بر اثر دستاوردهای نافذ و روش‌بینی جان تیت امکان‌پذیر شده است. او به راستی نقشی برجسته و چشمگیر بر چهرهٔ ریاضیات جدید گذاشته است.

برندگان قبلی جایزهٔ آبل عبارت‌اند از: ژان پیر سر (۲۰۰۳)، مایکل اتیا و ایزادور سینگر (۲۰۰۴)، پیتر لکس (۲۰۰۵)، لنارت کارلسون (۲۰۰۶)، اس آر. اس وارادهان (۲۰۰۷)، جان جی. تامپسن و ژاک تیتس (۲۰۰۸)، و میخائیل گروموف (۲۰۰۹).

ح. ح.

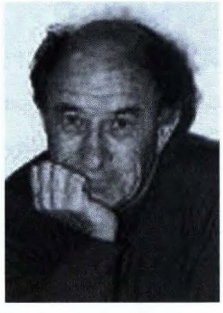
منبع: مجلهٔ نوتیسز، شمارهٔ ژوئن‌ـژوییهٔ ۲۰۱۰

پرلمان جایزهٔ یک میلیون دلاری را هم نپذیرفت

تنها سه سال بعد از اینکه مؤسسهٔ ریاضیات کلی[6] برای حل حدسیهٔ پوانکاره به‌عنوان یکی از مهم‌ترین مسائل حل‌نشدهٔ ریاضی جایزه‌ای یک میلیون دلاری اختصاص داد، گریگوری پرلمان، ریاضیدانی از مؤسسهٔ ریاضی استکلف[1] سن پترزبورگ، که از اوایل دههٔ ۱۹۹۰ به‌طور جدی و مستمر روی این مسأله کار کرده بود، مدعی شد درستی حدسیهٔ مذکور را به اثبات رسانده است. وی راه حل خود و نتایجی را که به‌دست آورده بود طی ۳ مقاله در arXiv قرار داد تا به‌راحتی در معرض قضاوت همهٔ متخصصان قرار گیرد. پس از شک و تردیدهای فراوانی که دربارهٔ اثبات وی ابراز شد، بالاخره اثبات او مورد تأیید اهل فن قرار گرفت. برای ارج نهادن به این دستاورد، کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در ۲۰۰۶ پرلمان را یکی از برندگان مدال فیلدز اعلام کرد. اما پرلمان در این کنگره حضور نیافت و از پذیرفتن مدال امتناع کرد. (شرح مفصل این ماجرا در شمارهٔ پیاپی ۲۹ نشر ریاضی (آذر ۱۳۸۵) آمده است). بعد از آن نوبت مؤسسهٔ کلی بود تا به قول خود وفا کند و جایزهٔ یک میلیون دلاری را که برای حل این مسأله اختصاص داده بود به حل‌کنندهٔ آن اهدا کند. بالاخره مؤسسهٔ کلی در ماه مارس ۲۰۱۰ وی را برندهٔ این جایزه اعلام کرد. اما پرلمان از پذیرفتن این جایزه هم امتناع کرد. به‌نظر می‌آید او مایل نیست آرامش خود را با دریافت این نوع جوایز و تبعات آن از دست بدهد. پرهیز وی از مصاحبه با نمایندگان جراید، دلایل این گونه رفتار او را نامعلوم گذاشته است. ظاهراً پرلمان علاقه‌ای ندارد که ارزش دستاورد علمی‌اش در غبار جنجالهای رسانه‌ای مخدوش شود. طی شش سالی که از تأیید درستی اثبات حدسیهٔ پوانکاره می‌گذرد، کنفرانسها، مقالات، و کتابهای متعدد و با ارزشی در شرح روش حل پرلمان و پیشرفتهای ریاضیِ ناشی از آن برگزار و یا منتشر شده است و بسیاری از متخصصان و دانشجویان علاقه‌مند از چندوچون کار او آگاه شده‌اند. شاید در نظر پرلمان ارزش علمی فعالیتهایی که برای فهم اثبات وی صورت گرفته بسیار بیشتر از ارزشِ اعتباری‌ای باشد که از جایزه و شهرت رسانه‌ای نصیب شخص می‌شود.

بنیاد کلی پس از اعلام انصراف پرلمان تصمیم گرفت مبلغ این جایزه را به نفع جامعهٔ ریاضی هزینه کند.

ح. ح.



ولادیمیر آرنولد (۱۹۳۷ـ۲۰۱۰)

ولادیمیر ایگورویچ آرنولد[2] ریاضیدان معروف روس چندروز مانده به هفتادوسومین سالگرد تولدش، در سوم ژوئن ۲۰۱۰ در پاریس درگذشت، طبق گزارشی که در سال ۲۰۰۶ منتشر شد، وی «پرارجاع‌ترین» دانشمند در میان تمام دانشمندان روس و شوروی در رشته‌های مختلف بود. تحقیقات آرنولد شامل طیف بسیار متنوعی از مباحث ریاضی و فیزیک ریاضی

1. Jonothan Lubin 2. Barsotti 3. Motive 4. isogeny theorem
5. Serre 6. Clay mathematics institute

1. Steklov mathematics institute 2. Vladimir Igorevich Arnold

می‌شد. وی دستاوردهای اساسی و ماندگاری در نظریهٔ دستگاههای دینامیکی، نظریهٔ فاجعه، توپولوژی، هندسهٔ جبری، هندسهٔ همتافته، مکانیک کلاسیک و سماوی، نظریهٔ تکینگی، هیدرودینامیک و هیدرودینامیک مغناطیسی، حساب وردشها، و معادلات دیفرانسیل جزئی داشته است. وی توپولوژی همتافته را به‌عنوان یک رشتهٔ مستقل تأسیس کرد و هندسهٔ جبری حقیقی را به توپولوژی نوین پیوند داد.

از مشهورترین کارهای آرنولد، مشارکت او در ارائهٔ قضیهٔ کام (کولموگورف-آرنولد-موزر) در مکانیک کلاسیک است که به پایداری دستگاههای همیلتنی می‌پردازد و کاربردهای متعددی در خارج از ریاضیات، از جمله در مکانیک سماوی و در مطالعهٔ رفتار خطوط مغناطیسی در سیستمهای محصورسازی پلاسما پیدا کرده است.

وی در ۱۹ سالگی، هنگامی که در دانشگاه مسکو دانشجوی آندرئی کولموگوروف ریاضیدان نامدار شوروی بود، ثابت کرد که هر تابع پیوستهٔ سه متغیره را می‌توان با تعدادی متناهی تابع دومتغیره ساخت و به این ترتیب، کاری را که کولموگورف برای حل و فصل مسألهٔ سیزدهم هیلبرت (دربارهٔ معادلات درجهٔ ۷) آغاز کرده بود، به انجام رساند.

آرنولد در بندر اُدسا، در اوکراین، به‌دنیا آمد و در دانشگاه مسکو در محیطی تحصیل کرد که انبوهی از ریاضیدانان و فیزیکدانان برجسته همچون کولموگوروف، مارکوف، پونتریاگین، خینچین، پ. نوویکوف، شافارویچ، گلفاند، آلکساندروف، گلفوند، دینکین، لانداو، و هر دو لیفشیتس همزمان در آن مشغول کار بودند و همکلاسیهای او نیز افرادی مانند منین، سینایی، سرگی نوویکوف، فوکس، و فادیف بودند که بعدها ریاضیدانان برجسته‌ای شدند. وی در سال ۱۹۶۱ درجهٔ نامزدی دکتری (معادل پی. اچ. دی در غرب) و در سال ۱۹۶۳ درجهٔ دکتری در نظام آموزشی شوروی را گرفت. از ۱۹۶۵ تا ۱۹۸۶ استاد دانشکدهٔ ریاضی و مکانیک دانشگاه مسکو و بعداً پژوهشگر ارشد مؤسسهٔ استکلف در مسکو و استاد دانشگاه پاریس-دوفن بود.

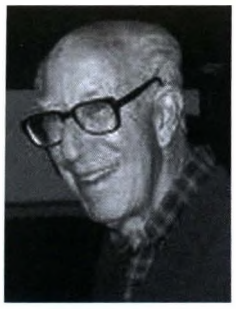
آرنولد در سال ۱۹۹۰ عضو آکادمی علوم شوروی (بعداً، روسیه) شد و جوایز متعددی در طول دورهٔ کاری خود دریافت کرد که از آن جمله می‌توان به جایزهٔ لنین (۱۹۶۵)، جایزهٔ کرافورد (۱۹۸۲)، جایزهٔ هاینه‌من در فیزیکِ ریاضی (۲۰۰۱)، جایزهٔ ولف در ریاضیات (۲۰۰۱)، جایزهٔ دولتی فدراسیون روسیه (۲۰۰۷)، و جایزهٔ شاو در علوم ریاضی (۲۰۰۸) اشاره کرد.

وی کتابهای متعددی نوشته که در توسعهٔ مباحث موجود و پیدایش مباحث جدید بسیار مؤثر بوده‌اند. در اغلب نوشته‌هایش رویکردی هندسی به مباحث سنتی (مانند معادلات دیفرانسیل معمولی) دارد، و دقت ریاضی را با شهود فیزیکی درهم می‌آمیزد. ولی کتابهای او، به هر حال، در معرض این انتقاد بوده است که در آنها بیشتر به ادراک شهودی توجه شده تا به ارائهٔ اثباتهای لازم.

آرنولد مخالف تجرید بیش از حد در ریاضیات و منتقدِ کارِ گروه بورباکی بود. او عقیده داشت که این گونه گرایشها اثرات منفی بر آموزش ریاضی در فرانسه و بعداً در کشورهای دیگر داشته است.

س. ک.

منبع: خبرنامهٔ ICM2010 (*reflections*، شمارهٔ ۲۳ اوت)، «گفتگو با آرنولد» (اسمیلکا ازدرافکوفسکایا، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۲)، ویکی‌پدیا



والتر رودین (۱۹۲۱-۲۰۱۰)

والتر رودین[1] ریاضیدان سرشناس که به‌خصوص به‌خاطر کتابهای درسی‌اش شهرت جهانی دارد، در ۲۰ مِه ۲۰۱۰ درگذشت.

رودین در دوم ماه مِه سال ۱۹۲۱ در یک خانوادهٔ مرفه یهودی در وین متولد شد. پدرش مهندس برق و کارخانه‌دار بود. پس از اتحاد اتریش و آلمان در سال ۱۹۳۸، زندگی برای یهودیان اتریشی دشوار شد و خانوادهٔ رودین، وین را ترک کردند.

رودین در جنگ جهانی دوم در نیروی زمینی و دریایی بریتانیا خدمت کرد و در ۱۹۴۵ به خواهر و والدین خود در آمریکا ملحق شد. در آنجا وارد دانشگاه دوک شد و مدرک کارشناسی و دکتری ریاضی را به‌ترتیب در سالهای ۱۹۴۷ و ۱۹۴۹ دریافت کرد. وی در سال ۱۹۵۲ به تدریس در دانشگاه راچستر مشغول شد و در ۱۹۵۹ به بخش ریاضی دانشگاه ویسکانسین-مَدیسن پیوست و تا زمان بازنشستگی خود به سال ۱۹۹۱ در آن دانشگاه خدمت کرد. رودین و همسر ریاضیدانش مری اِلن رودین، از استادان پرطرفدار در سطوح کارشناسی و تحصیلات تکمیلی بودند و راهنمایی بسیاری از دانشجویان دوره‌های عالی را به‌عهده داشتند.

والتر رودین یکی از ریاضیدانان برجستهٔ نسل خود بود و در چند حوزهٔ مختلف آنالیز ریاضی تحقیق کرد. تحقیقات اولیهٔ او متأثر از تربیت کلاسیک او بود و بر مطالعهٔ سریهای مثلثاتی و توابع تمامریخت از یک متغیر مختلط تمرکز داشت. یکی از نتایج مهم او در این حوزه، مشخص‌سازی کامل ایده‌آلهای بسته در جبر قرصی[2] به سال ۱۹۵۶ بود.

زمینهٔ مورد علاقهٔ دیگر رودین نظریهٔ عام آنالیز همساز بر گروههای آبلی موضعاً فشرده بود که در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ یکی از حوزه‌های پررونق تحقیقاتی به‌شمار می‌رفت. یکی از دستاوردهای مهم رودین در این زمینه تحقیق مشترک او با دو ریاضیدان دیگر در سال ۱۹۵۹ بود که به مشخص‌سازی توابعی که بر تبدیلات فوریهٔ L^1-جبر عمل می‌کنند مربوط می‌شد. رودین این تحقیقات را در کتاب آنالیز فوریه روی گروههای خود در سال ۱۹۶۲ گرد آورد.

علائق رودین در اواخر دهه ۱۹۶۰ مجدداً عوض شد. وی تحقیقاتی را دربارهٔ مسائل چندمتغیرهٔ مختلط آغاز کرد. در آن زمان جنبه‌های تحلیلی آنالیز مختلط چندمتغیره مبحثی نسبتاً تازه و نامکشوف بود. کار وی در مورد «حدس تابع داخلی» به تحقیقات گسترده‌ای منجر شد و پس از حل و فصل آن توسط آلکساندروف و دیگران به سال ۱۹۸۱، رودین نتایج دیگری در مورد این حدس به‌دست آورد. غالب تحقیقات رودین در آنالیز مختلط چندمتغیره در سه کتاب پیشرفتهٔ او نظریهٔ توابع چندقرصیها (۱۹۶۹)، نظریهٔ توابع در گوی یکهٔ C^n (۱۹۸۰)، و ساختهای جدید توابع تمامریخت در گوی یکهٔ C^n گرد آمده است.

1. Walter Rudin 2. disc algebra

رودین به‌خاطر سه کتاب درسی برجسته‌اش: اصول آنالیز ریاضی (۱۹۵۳)، آنالیز حقیقی و مختلط (۱۹۶۶)، و آنالیز تابعی (۱۹۷۳)، در بین چندین نسل از دانشجویان دوره‌های کارشناسی و بالاتر در سراسر جهان معروف است. وی پس از بازنشستگی به سال ۱۹۹۱ زندگینامهٔ شخصی خود را با عنوان «آن‌طور که به‌یاد می‌آورم» نگاشت. در این کتاب وی به خاطرات سالهای جنگ و حرفه ریاضی خود پرداخته است. انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۹۳ جایزه لروی استیل[1] را برای تألیف و تشریح مطالب ریاضی به او اهدا کرد.

ع. ج.

منبع: وبگاه unizeitung.univie.ac



دیوید بلک‌ول (۱۹۱۹ـ۲۰۱۰)

دیوید هرلد بلک‌ول[2]، آماردان برجستهٔ آمریکایی و نخستین سیاهپوستی که به‌عضویت آکادمی ملی علوم آن کشور پذیرفته شد، در ۸ ژوییهٔ سال جاری میلادی درگذشت.

بلک‌ول در سال ۱۹۵۴ به عضویت هیأت علمی دانشگاه کالیفرنیا در برکلی در آمد و نخستین استاد رسمی سیاه‌پوست در تاریخ آن دانشگاه بود. او بعدها بر کرسی ریاست گروه آمار، یکی از مراکز برجستهٔ آمار ریاضی در دنیا، تکیه زد، و در ۱۹۵۵ ریاست مؤسسهٔ آمار ریاضی[3]، را که یک انجمن حرفه‌ای و علمی بین‌المللی است، به‌عهده گرفت. بلک‌ول، صاحب دستاوردهای اساسی در بسیاری از زمینه‌ها از جمله نظریهٔ احتمال، نظریهٔ بازیها، و نظریهٔ اطلاع است.

از جمله دستاوردهای او، ابداع مستقل برنامه‌ریزی پویاست که امروزه در امور مالی و زمینه‌های گوناگونی از علم، که تحلیل ژنوم‌ها را نیز شامل می‌شود، به‌کار می‌رود. او همچنین به‌خاطر قضیهٔ تجدید[4] که امروزه در زمینه‌های مهندسی کاربرد دارد و نیز به‌دلیل ابداع مستقل قضیهٔ رائو-بلک‌ول، مفهومی بنیادین در آمار نوین، شهرت داشت.

وی در واقع هم آماردان و هم ریاضیدان بود و در مصاحبه‌ای خودش را «نوعی آماتور» نامیده و گفته بود که مسأله‌ها را به این دلیل انتخاب می‌کند که به فهم آنها علاقه‌مند است و برایش فرقی ندارد که به چه شاخه‌ای از ریاضیات یا آمار تعلق دارد. او از زمینه‌ای به زمینهٔ دیگر می‌رفت و در هر زمینه مقاله‌ای اساسی می‌نوشت. یکی از همکارانش در مجموعهٔ مقالاتی که به افتخار او در سال ۱۹۹۶ گرد آورد، نوشته است: «هنر بلک‌ول در این بود که در زمینه‌ای که خیلی روی آن کار شده بود وارد می‌شد و چیزی واقعاً تازه و چشمگیر پیدا می‌کرد». بلک‌ول استعداد زیادی در ساده‌نمایی مفاهیم داشت.

یکی دیگر از علائق بلک‌ول، تدریس بود. وی یک‌بار در توضیح اینکه چرا به‌تدریس ریاضیات علاقه دارد گفت که «در بیان و انتقال ریاضیات، زیبایی آن را هر بار حس می‌کنید». دو انجمن ریاضی آمریکا (AMS و MAA) فیلمهایی از تدریس بلک‌ول و عدهٔ کمی از دیگر ریاضیدانان در مورد موضوعات گوناگون برای دانشجویان مقطع کارشناسی تهیه کرده و در دانشگاههای سراسر این کشور توزیع کردند. عنوان فیلم مربوط به بلک‌ول، «حدس‌زدن تصادفی» بود.

وی در دورهٔ کاری‌اش، درکنفرانسهای سازمان ملل دربارهٔ توسعهٔ آموزش در آفریقا شرکت کرد و در دههٔ ۱۹۵۰ از طرف انجمن ریاضی آمریکا برای بازدید از ۳۰ کالج و ایراد ۱۲۰ سخنرانی در سرتاسر جنوب ایالات متحده انتخاب شد. هدف از این کار، ارتقای آموزش ریاضی در کالجهایی بود که بسیاری از آنها از لحاظ تاریخی مخصوص سیاه‌پوستان تلقی می‌شدند.

بلک‌ول با عضویت در بسیاری از اجتماعات، تغییراتی در آنها ایجاد می‌کرد، الگویی شگرف برای جامعهٔ سیاهان بود، به جنبش ضد جنگ علاقه داشت، و طرفدار عدالت بود.

دیوید بلک‌ول در ۲۴ آوریل ۱۹۱۹ در شهر کوچکی در ایلینوی جنوبی به‌دنیا آمد. وی بزرگ‌ترین فرزند یک کارگر راه‌آهن به نام گرور[1] بلک‌ول بود. دیوید به امید اینکه معلم مدرسهٔ ابتدایی شود، در سال ۱۹۳۵ در ۱۶ سالگی، در زمانی که هیچ استاد سیاه‌پوستی در دانشگاه نبود، وارد دانشگاه ایلینوی در اوربانا-شمپین شد. پس از گرفتن مدرک کارشناسی ریاضیات در ۱۹۳۸ هدف خود را بالاتر برد و در همان دانشگاه، مدرک کارشناسی ارشد ریاضیات را در ۱۹۳۹ و درجهٔ دکتری ریاضیات را در سال ۱۹۴۱ گرفت، و هنگام فارغ‌التحصیلی ۲۲ سال داشت.

بلک‌ول پس از فارغ‌التحصیلی، به پژوهشیاریِ پسادکتریِ یکساله در موسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستن برگزیده شد. سپس با فرض اینکه درهای مؤسسات غیرسیاه‌پوست به روی سیاه‌پوستان بسته است برای ۱۰۵ کالج سیاهپوستان تقاضانامهٔ استخدام فرستاد. نخست یک پست مدرسی در دانشگاه جنوبی باتون‌روژ لوئیزیانا و بعد، در دانشگاه کلارک در آتلانتای جورجیا به‌دست آورد. در ۱۹۴۴ به دانشگاه هاورد[2] رفت و قبل از ۱۹۴۷ استاد تمام و رئیس گروه ریاضی شد که تا ۱۹۵۴ این سمت را به‌عهده داشت.

وی هنگامی که در دانشگاه هاورد بود، پس از شنیدن یک سخنرانی توسط ایب گریشیک[3] به آمار علاقه‌مند شد، و این دو نفر سالها با یکدیگر همکاری کردند. بلک‌ول، طی سه سال تابستان، بین سالهای ۱۹۴۸ و ۱۹۵۰، در شرکت RAND به نظریهٔ بازیها توجه یافت و بازیهای زمان‌بندی را مطالعه کرد، از آن‌گونه که دو دوئل کننده با یک تپانچهٔ پر به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند. این نوع مسأله در زمان جنگ سرد ذهن محققان را به‌خود مشغول کرده بود. او متخصص برجسته‌ای در این زمینه شد و با گریشیک در تألیف کتاب نظریهٔ بازیها و تصمیمهای آماری در سال ۱۹۵۴ همکاری کرد.

1. Leroy P. Steel Prize
2. David Harold Blackwell
3. Institute of Mathematical Statistics
4. renewal theorem

1. Grover
2. Howard
3. Abe Grishick

حتی پیش از انتقال بلک‌ول به هاورد، جرزی نیمن، آماردان برجستهٔ آن زمان در دانشگاه برکلی، اظهار علاقه کرده بود که بلک‌ول به آن دانشگاه بیاید، اما به‌خاطر نژادش با مخالفت مواجه شده بود. ولی پس از جنگ جهانی دوم جوّ سرتاسر کشور بهتر شد و نیمن توانست گروه آمار را در مورد استخدام بلک‌ول متقاعد کند. بلک‌ول در ۱۹۵۴ به‌عنوان استاد مدعو وارد برکلی شد و زمانی که گروه آمار از گروه ریاضی مجزا شد، به‌عنوان استاد تمام به گروه آمار پیوست. پس از نیمن، در سالهای ۱۹۵۷ تا ۱۹۶۱ ریاست گروه را برعهده داشت و تا زمان بازنشستگی در ۱۹۸۸ در برکلی ماند. بلک‌ول افزون بر عضویت در آکادمی ملی علوم، عضو آکادمی آمریکایی هنرها و علوم، انجمن آمریکایی پیشرفت علم، موسسهٔ آمار ریاضی، انجمن ریاضی و انجمن فلسفهٔ آمریکا، و نیز عضو افتخاری انجمن آمار سلطنتی [بریتانیا] بود. در سال ۱۹۵۴ به‌عنوان سخنران مدعو در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان شرکت کرد. او همچنین مدتی رئیس جامعهٔ بین‌المللی برنولی برای آمار ریاضی و احتمال، و نایب رئیس انجمن آمار آمریکا، مؤسسهٔ بین‌المللی آمار، و انجمن ریاضی آمریکا بود. در ۱۹۷۹، بلک‌ول جایزهٔ نظریهٔ جان فون نویمان را از انجمن تحقیق در عملیات آمریکا دریافت کرد.

بلک‌ول استاد راهنمای ۶۵ دانشجوی دکتری بود، دو کتاب نوشت و بیش از ۸۰ مقاله به‌چاپ رساند. او صاحب ۱۲ درجهٔ افتخاری از دانشگاههای هاروارد، ییل، کارنگی ملون، و دانشگاه هاورد، و دانشگاه ملی لسوتو بود.

الهه وحیدی‌اصل

منبع: وبگاه دانشگاه برکلی

مارتین گاردنر (۱۹۱۴ـ۲۰۱۰)

مارتین گاردنر نویسندهٔ معروف ستون «بازیهای ریاضی» مجلهٔ ساینتیفیک آمریکن روز ۲۲ ماه مه ۲۰۱۰ در ۹۵ سالگی درگذشت. وی که ابتکار و خلاقیت کم‌نظیری در طراحی سرگرمیها و معماهای ریاضی داشت، طی ۲۵ سال (از ۱۹۵۶ تا ۱۹۸۱) با نوشته‌های خود در این مجله انبوهی از مردم عادی را با زیبایی و جاذبهٔ ریاضیات آشنا کرد و الهامبخش عده‌ای از جوانان در انتخاب رشته و حرفهٔ ریاضی بود. به این ترتیب، با آنکه هیچ درس دانشگاهی در رشتهٔ ریاضی نگذرانده بود، کاری انجام داد که شاید خیلی از ریاضیدانان حرفه‌ای از عهدهٔ آن برنیایند: ترویج علاقه به ریاضیات در میان عامهٔ مردم. در ستون او در این مجله، بعضی از مفاهیم مهم ریاضی مانند بازی زندگی کانوی و آجرفرش پنروز برای اولین بار به عموم شناسانده شد. انجمن ریاضی آمریکا (AMS) در سال ۱۹۸۷ جایزهٔ استیل برای نوشتار توصیفی ریاضی را به‌خاطر آثار ریاضی فراوان گاردنر، به‌خصوص همین ستون «بازیهای ریاضی»، به او اعطا کرد.

نقد و نفی نظریه‌های شبه علمی (از بشقاب پرنده گرفته تا حس ششم) و به‌طور کلی، مغالطه‌ها و فریبکاریهایی که به نام علم صورت می‌گیرد، یکی دیگر از موضوعات مورد توجه این نویسندهٔ آمریکایی بود که مطالب بسیاری دربارهٔ آن نوشته است. به‌خصوص کتاب

Fads and Fallacies in the Name of Science

او اثری کلاسیک در این زمینه به‌شمار می‌رود.

س. ک.

چهل‌ویکمین کنفرانس ریاضی کشور

در روزهای ۲۱ تا ۲۴ شهریور امسال، شهر ارومیه که به‌خاطر مهربانی مردم، دریاچه، انگور، و سیبش شهره است، میزبان چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه ارومیه بود. در این کنفرانس در کنار حدود سیصد و پنجاه نفر شرکت‌کنندهٔ ایرانی چند نفر هم از کشورهای کرواسی، ترکیه، رومانی، و هند شرکت کرده بودند.

۱. در جلسهٔ افتتاحیهٔ کنفرانس که صبح روز یکشنبه ۸۹/۶/۲۱ برگزار شد، علاوه بر گزارشهای برگزارکنندگان کنفرانس و رئیس انجمن ریاضی ایران، جوایز بهزاد، وصال، و هشترودی به برندگان اهدا شد.

• **جایزه بهزاد** امسال به دکتر **امیدعلی کرمزاده** از دانشگاه اهواز، به‌خاطر تلاش مداوم او برای ارتقای سطح ریاضی کشور از طریق آموزش، پرورش و نیز مدیریت تیمهای المپیاد دانشجویی در سالهای نه‌چندان دور، تعلق گرفت.

• **جایزهٔ وصال** به دکتر **کامران شریفی** از دانشگاه صنعتی شاهرود به‌خاطر نوشتن بهترین مقالهٔ آنالیز اهدا شد. این مقاله در هجدهمین سمینار آنالیز ریاضی در دانشگاه تربیت معلم تهران در بهار ۱۳۸۸ ارائه شده بود.

• **جایزهٔ هشترودی** که هزینه‌های آن را بنیاد فرهنگی هشترودی تقبل کرده است به دکتر **مسعود خلخالی** از دانشگاه انتاریوی غربی کانادا تعلق گرفت. نامبرده با ارائهٔ مقاله‌ای در سی‌وهشتمین کنفرانس ریاضی کشور که در تابستان سال ۱۳۸۶ در دانشگاه تربیت معلم آذربایجان برگزار شد ابعاد ناشناخته‌ای از تحقیقات هندسی هشترودی را آشکار کرد. یکی از هدایای بنیاد هشترودی به برندهٔ جایزه، سردیسی از هشترودی بود که نقشی از آن بر نمای خارجی ساختمان بنیاد مذکور به‌چشم می‌خورد. گفتنی است که در این جلسه آقای سیاوش محمودی بختیاری دبیر بازنشسته و از شاگردان شادروان هشترودی از جانب فرزندش آقای امیرخسرو محمودی چکی به مبلغ ۷۵۰۰۰۰۰۰ ریال به حساب جایزهٔ هشترودی اهدا کرد.

۲. از رویدادهای کنفرانس به موارد زیر اشاره می‌کنم.

الف) چکیدهٔ مقالات به‌صورت CD بین شرکت‌کنندگان توزیع شد. گفتنی است که چکیدهٔ چاپی مقالات نیز در مقیاس محدود تهیه و در محل ثبت‌نام به‌فروش می‌رسید.

ب) در روز دوم کنفرانس، انجمن معلمان ریاضی استان آذربایجان غربی سخنرانیهای مفیدی برای معلمان ریاضی برگزار کرد.

پ) در همین روز، شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران در جلسهٔ خود انتخاب اعضای هیأت جدید تحریریهٔ بولتن انجمن ریاضی ایران را نهایی کرد.

ت) باز هم در همین روز، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران تشکیل شد، گزارش مالی خزانه‌دار را تصویب، و بازرس انجمن را انتخاب کرد.

۳. با نگاهی به برنامهٔ سخنرانیها، فهرست اسامی ثبت‌نام‌کنندگان (بیشتر از ۷۰۰ نفر)، و چکیدهٔ دوجلدی مقالات به‌نظر می‌رسد که کنفرانس را اساتید محترم به دانشجویان دکتری و کارشناسی ارشد خود واگذار کرده‌اند.

۴. قرار است مجموعهٔ مقالات کنفرانس با کمک انجمن ریاضی ایران پس از ویرایش طی یک سال آتی منتشر شود.

۵. ساعت ۱۴ روز چهارشنبه ۲۴ شهریور کنفرانس چهل‌ویکم با سخنان

نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران، دبیر علمی کنفرانس، رئیس دانشکدهٔ علوم دانشگاه ارومیه، و دبیر اجرایی کنفرانس به‌کار خود خاتمه داد.

۶. بی‌تردید شرکت‌کنندگانی که از طریق بزرگراه شهید کلانتری از تبریز به ارومیه آمده بودند متوجه شدند که پهنهٔ آبی بین جزیرهٔ اسلامی و روستای خورخور کاملاً خشک شده و جزیرهٔ اسلامی به «جزیرهٔ اسلامی سابق» تبدیل شده است. خشک‌شدن دریاچهٔ ارومیه و تغییرات زیست‌محیطی منطقه، در آیندهٔ نزدیک موجب تغییرات جغرافیایی و اجتماعی وحشتناکی در منطقه خواهد شد. مثلاً، وزش طوفان می‌تواند نمک را از کف سابق دریاچه بکَنَد و به مناطق شهری اطراف بریزد. یک نتیجهٔ فوری این رخداد، مهاجرت مردم و خالی‌شدن و ویرانی روستاها و شهرهای منطقه است. آیا فکری برای آن روز کرده‌ایم؟ بسیار ضروری است که زندگی سابق را به این پهنهٔ بی‌مانند آبی برگردانیم.

محمد جلوداری ممقانی

دهمین کنفرانس آمار ایران

دهمین کنفرانس آمار ایران در روزهای ۱۲ تا ۱۴ مرداد ماه ۱۳۸۹ در دانشگاه تبریز برگزار شد.

هدف انجمن آمار ایران از برگزاری این کنفرانسهای دوسالانه، گسترش فرهنگ آماری درکشور، آگاهی اعضای هیأت علمی و دانشجویان دانشگاهها، مسؤولان، و کارشناسان آمارِ سازمانها از نتایج آخرین یافته‌های علمی در سطح جهان و پژوهشهای جاری کشور در زمینه‌های آمار و احتمال و کارهای علمی و اجرایی آماری انجام‌شده در مؤسسات آماری داخل، و همچنین ایجاد زمینه‌های مشترک همکاری بین دانشگاهیان و سازمانهای آماری کشور است.

در مراسم افتتاحیهٔ این کنفرانس، دبیر دهمین کنفرانس آمار ایران، رئیس انجمن آمار ایران، رئیس دانشگاه تبریز، معاون حقوقی و پارلمانی ریاست جمهوری، و رئیس مرکز آمار ایران سخنرانی کردند.

در همین مراسم، طبق روال کنفرانسهای گذشته در نکوداشت یکی از پیشکسوتان عرصهٔ آمار، جامعهٔ آماری کشور از خدمات ارزندهٔ آقای دکتر کاظم محمد عضو هیأت علمی دانشگاه علوم پزشکی تهران قدردانی کرد.

در این کنفرانس از ارائه‌دهندگان مقالات درخواست شده بود به‌جای خلاصهٔ مقاله، مقالهٔ کامل را در حداکثر ۸ صفحه ارسال دارند. در اختیار داشتن اصل مقاله و همچنین برقراری سیستم مکانیزهٔ داوری، بررسی کیفی‌تر مقالات را امکان‌پذیر کرده بود.

در دهمین کنفرانس آمار ایران حدود یک هزار نفر از استادان، پژوهشگران، کارشناسان، و دانشجویان آمار حضور داشتند. ۶۰۰ مقاله به دبیرخانهٔ سمینار ارسال شده بود که پس از داوری، ۴۳۸ مقاله شامل ۲۶۲ مقاله به‌صورت سخنرانی، و ۱۷۶ مقاله به‌صورت پوستر در این سمینار پذیرفته شدند. از سخنرانیها، ۱۷ سخنرانی، عمومی و بقیه تخصصی بودند. برگزاری ۷ کارگاه آموزشی و نشست تخصصی سرشماری و آمارگیری خانوار نیز از برنامه‌های دهمین کنفرانس آمار ایران بود.

م. ق. و.



یحیی تابش برندهٔ جایزهٔ پال اردوش

یحیی تابش عضو هیأت علمی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برندهٔ جایزهٔ پال اردوش در سال ۲۰۱۰ شد. این جایزه را فدراسیون جهانی مسابقات ریاضی ملی (WFNMC) هر دو سال یک بار به دو یا سه نفر از ریاضیدانانی اهدا می‌کند که نقش مهمی در سازماندهی و هدایت رقابتهای ریاضی در سطح ملی یا بین‌المللی داشته‌اند و کمک مؤثری به رشد آموزش ریاضی کرده‌اند. آقای یحیی تابش در سه دههٔ گذشته با مشارکت فعال در برگزاری المپیادهای ریاضی، تشکیل خانه‌های ریاضیات، برنامه‌ریزی دروس ریاضی و رایانه، و انواع برنامه‌های آموزشی و فرهنگیِ ریاضی، نقش مؤثری در ترویج ریاضیات در کشور ایفا کرده است. ایشان همچنین جزو کادر اولیهٔ مؤسس نشر ریاضی و سالها عضو هیأت ویراستاران این مجله بوده است.

یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

در روزهای ۲۷ تا ۳۰ تیر ۱۳۸۹، ساحل محمودآباد شاهد برگزاری یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران بود. این کنفرانس با حمایت وزارت آموزش و پرورش، اتحادیهٔ انجمنهای معلمان ریاضی کشور، انجمن ریاضی ایران، انجمن آمار ایران، و با حضور بیش از ۱۲۰۰ شرکت‌کننده از سراسر کشور برگزار شد. توجه ریاضیدانان به این کنفرانس (نسبت به کنفرانسهای پیشین) کم‌سابقه بود و عدهٔ چشمگیری از ریاضیدانان به‌عنوان سخنران مدعو در کنفرانس حضور داشتند.

در این کنفرانس، ۴ سخنرانی عمومی یک‌ساعته و ۱۲ سخنرانی ۴۵ دقیقه‌ای برگزار شد. به‌علاوه، ۱۳۴ مقاله در چند بخش (به‌صورت ۱۲ سخنرانی موازی ۲۰ دقیقه‌ای)، و ۱۸۸ مقاله به‌صورت پوستر ارائه شد. از سوی دیگر، ۲۶ کارگاه آموزشی، ۲۴ نمایشگاه ریاضی، و ۸ میزگرد آموزشی، نشان از برنامه‌ای فشرده در یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران داشت. محورهای بحث کنفرانس به‌شرح زیر بود:

۱) برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای؛
۲) نظریه‌ها و شیوه‌های یاددهی، یادگیری و ارزشیابی ریاضی؛
۳) ارتقای توانمندی حرفه‌ای معلمان ریاضی؛
۴) چالشهای آموزش علوم ریاضی در دانشگاهها؛
۵) تأثیر عوامل عاطفی، هیجانی، و روانی ریاضی در آموزش ریاضی.

بیشتر فارغ‌التحصیلان رشتهٔ آموزش ریاضی به جمع معلمان ریاضی کشور پیوسته‌اند و رشد کمّی رشتهٔ آموزش ریاضی در دورهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاهها در سالهای اخیر موجب شده تا شاهد افزایش تعداد مقاله‌های ارسالی به کنفرانسهای آموزش ریاضی باشیم. به‌موازات آن

درخواست شرکت درکنفرانسهای آموزش ریاضی از سوی معلمان ریاضی نیز افزایش یافته است. اما شرط داشتن مقاله (پذیرفته شده یا نشده) برای شرکت در این کنفرانس موجب‌شده تا در برخی موارد مقالات ارسالی از کیفیت خوبی برخوردار نباشد. خوب است این موضوع مورد توجه مسؤولان آموزش و پرورش قرارگیرد و از ظرفیت کنفرانس برای ارتقای حرفه‌ای معلمان و افزایش توانمندی آنان استفاده کنند. هر چند مشکلات اجرایی ممکن است مانع بزرگی برای حضور تمام متقاضیان باشد، اما برنامه‌ریزی مناسب می‌تواند به توسعهٔ این کنفرانس و اثربخشی آن بینجامد.

مانی رضایی

روز جهانی آمار

«بیایید این موقعیت تاریخی را گرامی بداریم و با اذعان به نقش آمار در توسعهٔ اجتماعی و اقتصادی جوامعمان برای تقویت تواناییهای آماری در سطح ملی تلاش کنیم و منابع بیشتری را به آن اختصاص دهیم.»

بان کی مون
دبیرکل سازمان ملل متحد
نامه به رهبران جهان، ژوییهٔ ۲۰۱۰

سازمان ملل متحد روز بیستم اکتبر ۲۰۱۰ (بیست و هشتم مهرماه ۱۳۸۹) را روز جهانی آمار اعلام کرده و شعارهای اصلی این روز را خدمت‌رسانی، حرفه‌ای‌گری، و درستکاری تعیین نموده است. طرح این سه شعار مؤید آن است که هدف آمارهای رسمی باید خدمت‌رسانی، به‌دست آوردن اطلاعات از راههای صحیح، حرفه‌ای، به‌روز، و با ایجاد اطمینان در اشخاصی که منابع اطلاعاتی هستند (مخصوصاً در سرشماریها) و بهره‌گیری حرفه‌ای و درست از آمارها برای برنامه‌ریزیها و تصمیم‌سازیها باشد.

یکی از مسائل مهم درکشور ما، ناآگاهی جامعه و برنامه‌ریزان و تصمیم‌گیران از اهمیت و نقشی است که آمار در زندگی روزمره و در برنامه‌ریزی برای توسعهٔ کشور و حتی در تولید علم به مفهوم واقعی آن دارد. هر شهروندی در زندگی عادی خود با آمار سر و کار پیدا می‌کند و لاجرم برای درک صحیح واقعیات، باید شاخصها را بشناسد، مفهوم آنها را خوب بفهمد و نمودارها را بتواند بخواند. هر برنامه‌ریز و تصمیم‌گیرنده‌ای نیز باید به نقش آمار صحیح در برنامه‌ریزیها اعتقاد داشته باشد.

یکی از راههای معرفی علم آمار به جامعه و ترویج آگاهی از اهمیت و کاربرد آن، آموزش صحیح آن در مقاطع مختلف تحصیلی است.

از جمله اقدامات ضروری در این راستا، تهیهٔ استانداردهای آموزشی از طریق اعتبارسنجی روشها توسط آمارشناسان و معلمان، اقناع معلمان (که مجریان اصلی آموزش هستند) و مدیران مدارس درمورد استفاده از روشهای نوین تدریس، آماده‌سازی معلمان برای تدریس صحیح آمار در مدارس (که اتفاقاً موضوع اصلی یکی از مطالعات کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی در سال ۲۰۰۸ بود) و اصلاح برنامه‌ها و کتابهای آموزشی در مدارس از یک سو و توجه بیشتر به تدریس آمار برای رشته‌های مختلف تحصیلی در دانشگاههاست. دروس آمار برای رشته‌های مختلف طوری باید تدریس شود که فارغ‌التحصیلان دانشگاهی به اهمیت آن و نقش آمار در رشتهٔ اصلی خود توجه کنند و با درک صحیح آن بفهمند که باگذراندن ۲ یا ۳ واحد درسی در زمینهٔ آمار هرگز نمی‌توانند جای آمارشناسان را بگیرند و پروژه‌های سرنوشت‌ساز را با روشهای محدودی که در دانشگاهها یاد گرفته‌اند نمی‌توانند به انجام برسانند.

جذب دانش‌آموزان و دانشجویان مستعد به رشتهٔ آمار و رفع کمبودهای تخصصی دانشگاهها در زمینهٔ علم آمار برای پیشبرد این علم درکشور و بهره‌گیری از آن ضروری است، لذا تلاش برای توسعهٔ سواد آماری و ارتقای دانش عمومی در زمینهٔ آمار برای آنکه خانواده‌ها فرزندان خود را به تحصیل در این رشته ترغیب کنند، می‌تواند نقشی تأثیرگذار در آیندهٔ این حوزه از علم داشته باشد.

انجمن آمار ایران، با اغتنام از فرصتِ اعلامِ روز ۲۰ اکتبر به‌عنوان روز جهانی آمار و تجربهٔ بزرگداشت روز آمار و برنامه‌ریزی (اول آبان ماه) طی سالهای اخیر، هفتهٔ ۸۹/۷/۲۸ لغایت ۸۹/۸/۴ را به نام هفتهٔ آمار اعلام کرده و با برپایی یک کمیتهٔ برنامه‌ریزی به هر روز این هفته عناوینی به شرح زیر داده و برنامه‌هایی برای هر روز تدارک دیده است که از اهم آنها می‌توان به برگزاری چند همایش دانشگاهی و اجرایی، برگزاری تعدادی نمایشگاه، میزگرد تلویزیونی، سخنرانی، مسابقهٔ دانش‌آموزی، و . . . نام برد.

نام روزهای این هفته به این شرح است.

چهارشنبه ۱۳۸۹/۷/۲۸	روز جهانی آمار-آمارهای رسمی
پنجشنبه ۱۳۸۹/۷/۲۹	آموزش و سواد آماری
جمعه ۱۳۸۹/۷/۳۰	ارتقای فرهنگ و آگاهی آماری
شنبه ۱۳۸۹/۸/۱	روز آمار و برنامه‌ریزی
یکشنبه ۱۳۸۹/۸/۲	نقش آمار در صنعت (تولید و خدمات)
دوشنبه ۱۳۸۹/۸/۳	نقش آمار در سایر علوم
سه‌شنبه ۱۳۸۹/۸/۴	آمار و اخلاق حرفه‌ای-نظام آمارشناسی

علی رجالی

آشنایی با جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی*

سیامک یاسمی*

مقدمه

در ریاضیات به دفعات پیش آمده است که مسأله‌ای در یکی از حوزه‌های ریاضی به کمک ابزارهای آن حوزه قابل حل نبوده و لازم آمده است ارتباطی خلاقانه بین مفاهیم مطرح‌شده در آن مسأله و مفاهیمی از سایر شاخه‌های ریاضیات برقرار، و مسأله را به کمک آن حل کنند. در صورتی که مسألهٔ طرح شده عمیق باشد، می‌تواند نظریهٔ جدیدی را در ریاضیات پایه‌گذاری کند که با هدف و شیوه‌های معینی که با خود به همراه می‌آورد رشد و گسترش می‌یابد.

هدف ما از این نوشته، نشان دادن سیر تلاشهای برخی از ریاضیدانان برجستهٔ قرن گذشته و حاضر برای حل یک مسأله ترکیبیاتی به کمک ابزارهای جبر جابه‌جایی است که زمینه‌ساز پیدایش شاخه‌ای جدید با عنوان «جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی» در ریاضیات شده است. این شاخهٔ جدید در ۳۵ سال اخیر به‌سرعت گسترش پیدا کرده و به‌علت کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف، بسیاری را به‌سوی خود جذب کرده است. به استناد شمار و کیفیت مقالات منتشرشده در این شاخه، امروزه جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی از جمله حوزه‌های تحقیقاتی بسیار پرجنب‌وجوش در ریاضیات به‌شمار می‌آید.

یکی از دلایل استقبال ریاضیدانان از جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، قابلیت بی‌نظیر روشهای آن در توصیف ساده و روشن مفاهیم اصلی جبر جابه‌جایی است. مثلاً حلقه‌هایی خاص نظیر حلقه‌های کوهن ـ مکالی، حلقه‌های گورنشتاین، و نیز مدولهای متناهی‌مولد خاص را می‌توان از روی اشیای ترکیبیاتی خاصی ساخت و ویژگیهای آنها را بیشتر بررسی کرد. این حلقه‌ها از جمله ساختارهای بسیار مهم در جبر جابه‌جایی هستند که وجودشان به‌طور نظری ثابت می‌شود و ساختن مثالهای ملموسی از آنها قبلاً به دشواری انجام می‌گرفت. مفاهیمی همچون نرمال‌سازی حلقه‌ها و یا ایده‌آلها، تحلیل آزاد مدولهای متناهی‌مولد و پیداکردن ناورداهای جبری همچون بُعد، عمق، بُعد تصویری که به‌صورتی نظری در قالب قضایا بیان شده بودند و جنبه‌های محاسباتی آنها به دلیل دشواری، پیشرفت چندانی نکرده بود، و یا توصیف جبری تکینگیهای چندگوناهای جبری که عمدتاً برحسب حلقهٔ سریهای صوری بیان می‌شدند، حال از طریق اشیای ترکیبیاتی همچون چندوجهیهای محدب، مجتمعهای سادکی، یا گرافها در چارچوبی ساده‌تر و عملی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند که این امر باعث پیشرفتهای کم‌نظیری در جبر جابه‌جایی شده است. به کمک این اشیا می‌توان انبوهی از مثالهای زیبا از اشیای برشمرده در بالا و یا اشیای دیگر جبری ساخت و خواص آنها را به کمک اشیای ترکیبیاتی متناظر با آنها به‌صورتی ملموس‌تر درک و مطالعه نمود و حتی خواص حاصل از این بررسیها و مطالعات را به‌صورت قضایایی جدید ارائه کرد.

به‌دلیل ماهیت الگوریتمی اثباتهای ارائه شده برای قضایای جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، شاخه‌ای دیگر به‌نام جبر جابه‌جایی محاسباتی نیز پدید آمده و امروزه به‌عنوان یک حوزهٔ تخصصی در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری مطرح است (ر.ک.[۳۱]). یکی از آثار بسیار پرثمر این دستاوردها، پیدایش نرم‌افزارهای رایانه‌ای برای محاسبهٔ برخی ناورداهای جبری و یا ساختن مدولهایی که ساختاری بسیار پیچیده دارند، مانند مدولهای سی‌زی‌جی[1]، مدولهای Tor و مدولهای Ext یک مدول، تحلیل آزاد[2] یک مدول و بسیاری اشیای جبری دیگر به کمک رایانه بوده است، به‌طوری که امروزه این نرم‌افزارها به‌عنوان یکی از ابزارهای اصلی و اجتناب‌ناپذیر کارهای تحقیقاتی در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری به‌شمار می‌روند. در این مورد می‌توان به نرم‌افزارهای CoCoA، Macaulay، و Singular (ر.ک. [۴]، [۵]، و [۶]) اشاره کرد.

در واقع این نرم‌افزارها گاه به‌عنوان وسیله‌ای برای صورت‌بندی یک حدس و زمانی برای آزمودن یک حدس و انجام دادن برخی محاسبات، که اجرای آنها با دست، ساعتها وقت می‌گیرد و شاید نیز امکان‌پذیر نباشد، مورد استفادهٔ فراوانی یافته‌اند. همچنین در شرایطی که فرضهای یک قضیه با فرضهایی که الگوریتمهای این نرم‌افزارها بر آنها بنا شده است یکی باشد، به نتایج حاصل از محاسبات انجام‌شده توسط این نرم‌افزارها می‌توان استناد کرد و درستی بخشی از قضیه را ثابت کرد. نگاهی به مراجع مقالات منتشرشده در این حوزه مؤید این ادعاهاست.

1. syzygy 2. free resolution

از طرف دیگر، ابزارها و روشهای مورد استفاده در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، سبب شده تا بسیاری از مفاهیم جبر جابه‌جایی، که معمولاً در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری و یا در مقالات تحقیقاتی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند، در شکل ساده‌تری برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی قابل بیان باشند. امروزه، در بسیاری از دانشگاهها درسی به نام جبر جابه‌جایی محاسباتی و یا جبر تک‌جمله‌ایها جای خود را در برنامه‌های درسی باز کرده است. این موضوع سبب می‌شود تا سرعت فراگیری مطالب پیشرفته و مجرد در جبر جابه‌جایی در دوره‌های عالی افزایش پیدا کند. دانشجویان می‌توانند با فراگیری مثالهای ساده‌ای از این مبحث توانایی تحقیقاتی خود را به سطحی بالاتر ارتقا دهند.

ترکیبیات جبری و جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی

ترکیبیات جبری[1] یکی از شاخه‌های ریاضیات است که در آن از جبر مجرد، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ نمایش، و توپولوژی جبری برای حل برخی مسائل ترکیبیاتی استفاده می‌شود و به‌عکس، برخی تکنیکهای ترکیبیاتی نیز در حل مسائل جبری کاربردهای فراوانی دارند. این شاخه یکی از شاخه‌های جوان ریاضیات است که در سال ۱۹۹۱ در رده‌بندی موضوعی ریاضی، شمارهٔ 05E به‌عنوان یکی از زیرشاخه‌های موضوع ترکیبیات به آن اختصاص یافت. یکی از زیر شاخه‌های این شاخه که در دههٔ اخیر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است و به‌سرعت نیز در حال گسترش است، جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی می‌باشد. شمارهٔ رده‌بندی موضوعی ریاضی این زیرشاخه 05E40 است و در واقع زیرشاخه‌ای از موضوع جبر جابه‌جایی است. هر چند می‌توان اصطلاح «جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی» را به بررسی موضوعات مشترک جبر جابه‌جایی و ترکیبیات اطلاق کرد، اما بهتر است گفته شود که این زیرشاخه عبارت است از استفاده از روشهای جبر جابه‌جایی برای مطالعهٔ موجودات ترکیبیاتی. پیدایش رسمی این مبحث را می‌توان با انتشار مقالات و کتبِ بسیار اثرگذار ریچارد استنلی از مؤسسهٔ فناوری ماساچوست، (MIT)، (ر.ک. [۲۶] و [۲۷]) و ملوین هاکستر از دانشگاه میشیگان (ر.ک. [۱۴] و [۱۵]) مقارن دانست. علی‌رغم گذشت حدود ۳۵ سال از انتشار آن مقالات، هنوز این آثار منابعی الهام‌بخش برای پژوهشهای بیشتر در این حوزه‌اند.

فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد و $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ را $\mathbb{K}$ـجبر متشکل از چندجمله‌ایها با ضرایب متعلق به $\mathbb{K}$ از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ درنظر بگیرید. ایده‌آلهای تولیدشده توسط تک‌جمله‌ایها در R، حلقه‌های خارج قسمتی این نوع ایده‌آلها، و نیز $\mathbb{K}$ـجبرهای تولیدشده توسط تک‌جمله‌ایها، موسوم به حلقه‌های نیم‌گروه[2] از اشیای اصلی مورد مطالعه در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی هستند.

به کمک تجزیهٔ اولیه هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع R می‌توان یک شیء ترکیبیاتی به نام مجتمع سادکی با آن نظیر کرد، و به‌عکس، با هر مجتمع سادکی می‌توان یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع از R نظیر کرد. این تناظر سبب می‌شود که بتوان مسأله‌ای مربوط به مجتمعهای سادکی را به مسأله‌ای دربارهٔ ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای خالی از مربع ترجمه کرد و با استفاده از قضایا و نظریه‌های موجود در جبر جابه‌جایی پاسخی برای این مسأله یافت و بعد به کمک تناظر اخیر آن را به زبان ترکیبیات برگرداند. به‌عکس، مسأله‌ای دربارهٔ ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای خالی از مربع را می‌توانیم به مسأله‌ای دربارهٔ مجتمعهای سادکی تبدیل کرده و به کمک دانش موجود در ترکیبیات این مسأله را حل و نتیجه را به زبان جبری تعبیر کنیم.

از طرف دیگر، مولدهای هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای در R یک زیرمجموعهٔ متناهی در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) را تعیین می‌کنند. قانون ضرب تک‌جمله‌ایها در ایده‌آل، یک جمع در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) تعریف می‌کند و اعضای تک‌جمله‌ای ایده‌آل با نقاط یک چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) نظیر می‌شوند. در نتیجه برخی خواص ایده‌آل تک‌جمله‌ای را می‌توان با برخی خواص یک چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) مربوط کرد و برعکس، با هر چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) می‌توان یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر کرد. به این ترتیب، ایده‌آلهای چنبره‌ای[1] و $\mathbb{K}$ـجبرهایِ به‌صورت $\mathbb{K}[m_1, \ldots, m_s]$، که m_iها تک‌جمله‌ایهایی برحسب $x_n, \ldots, x_1$ (موسوم به حلقه‌های نیم‌گروه) هستند، به‌دلیل کاربردهایشان، مورد مطالعهٔ وسیعی قرار گرفته و با ترکیبیات پیوند خورده‌اند.

در تناظرهای فوق، شرط تک‌جمله‌ای بودن مولدهای ایده‌آل محدودیتی جدی در برقراری این ارتباط ایجاد نمی‌کند. در واقع به کمک پایه‌های گروبنر[2] که در اواخر دههٔ هفتاد ابداع شد، می‌توان به هر ایده‌آل R یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر کرد. این ایده‌آل جدید بسیاری از خواص ایده‌آل اولیه را به‌همراه دارد و به این ترتیب، به کمک خواص اشیای ترکیبیاتی که به ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر می‌شود، می‌توان بسیاری از خواص ایده‌آل اولیه را بررسی نمود. نظریهٔ پایه‌های گروبنر به‌کمک تناظر اخیر نه تنها ابزارهای محاسباتی فراوانی را با خود به‌همراه آورد، بلکه به کمک آنها، نتایج نظری فراوانی دربارهٔ ایده‌آلهای دترمینانی که اشیایی نشأت گرفته از چندگوناهای جبری آفین هستند، به‌دست آمد.

چندوجهیهای محدب، محرکی برای پیشرفت

یکی از اصلی‌ترین مسائلی که تلاش برای حل آن زمینه‌ساز پیدایش جبرجابه‌جایی ترکیبیاتی شد، مسأله شمارشی زیر بود:

> حداکثر تعداد ممکن وجه‌های از هر بُعد یک چندوجهی محدب چقدر می‌تواند باشد؟

در سال ۱۹۵۷، ماتزکین [۲۲] با الهام از یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی، که در آن زمان مدت زیادی از پیدایش آن نمی‌گذشت، پاسخ مسألهٔ فوق را حدس زد، که به حدس کران بالا معروف شد. با مطرح‌شدن این حدس، ریاضیدانانی که در ترکیبیات پژوهش می‌کردند به تلاش گسترده‌ای برای اثبات آن دست زدند. مسألهٔ فوق در بهینه‌سازی به این دلیل اهمیت دارد که حداکثر تعداد رأسها را در یک چندبر محدب d بُعدی تعریف‌شده با n نامعادلهٔ خطی به‌دست می‌دهد. به این ترتیب، حداکثر تعدادِ نقاط ماکسیمم موضعی را که این تابع محدب روی چندبر اختیار می‌کند تعیین می‌کند. این حدس با گذشت زمان صورت عام‌تری پیدا کرد و برای رده‌های وسیع‌تری از چندوجهیهای محدب، از جمله کره‌های سادکی و خمینه‌ها مطرح شد تا اینکه در سال ۱۹۷۰ توسط مک‌مالن برای چندوجهیهای محدب و در سال ۱۹۷۵ توسط ریچارد استنلی برای کره‌های سادکی حل شد.

چندبرها و چندوجهیهای محدب مهم‌ترین رده از مجموعه‌های محدب را تشکیل می‌دهند و نه تنها در ریاضیات، بلکه در سایر شاخه‌های علوم از

1. algebraic combinatorics 2. semigroup rings

1. toric ideals 2. Gröbner bases

قبیل فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، و ... کاربردهای فراوانی دارند (ر.ک. [۱]). شناسایی خواص چندضلعیهای محدب در صفحه و چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^3$، به‌خصوص انواع منظم آنها، موسوم به اجسام افلاطونی، از زمانهای بسیار قدیم افراد بسیاری را به خود مشغول کرده است. تحقیقات دربارهٔ چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^3$ یکی از منابع پیدایش گرافهای مسطح ([۷]، قضیهٔ اشتاینیتز، ص. ۲۳۵) بوده و نظریهٔ مربوط به آنها بسیار توسعه یافته است. اما چندوجهیهای محدب از بُعد چهار و بالاتر تا حد زیادی ناشناخته مانده‌اند و در قیاس با چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^3$ اطلاعات چندانی دربارهٔ آنها به‌دست نیامده است. به همین دلیل مسائل اصلی این حوزه بسیار چالش برانگیز و مبارزطلب هستند و تلاش برای فهم آنها منجر به پیدایش نظریه‌های عمیقی، که عمدتاً جبری‌اند، شده است (ر.ک. [۳۴]).

مثالهای بسیاری از چندوجهیهای محدب می‌توان پیدا کرد که با اشیای ترکیبیاتی و هندسی همچون گرافها، مجموعه‌های جزئاً مرتب[1]، خانوادهٔ فضاهای متریک، یا مثلث‌بندی مجموعهٔ نقاط معینی نظیر می‌شوند. در بسیاری از این مثالها مسأله برحسب چندوجهیهای محدب صورت‌بندی می‌شود و این اشیا به‌صورت ابزارهای اساسی برای اثبات قضایایی دشوار درباره اشیای اصلی درمی‌آیند.

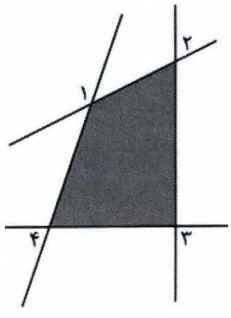
چندوجهیهای محدب را، که مشابه ابعاد بالاترِ چندضلعیهای محدب در صفحه هستند می‌توان به‌صورتی ساده توصیف کرد. قبل از آن لازم است چند مفهوم مرتبط را معرفی کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید V زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی d بُعدی $\mathbb{R}^d$ باشد. کوچک‌ترین زیرمجموعهٔ محدب در $\mathbb{R}^d$ را که شامل V باشد غلاف محدب V در $\mathbb{R}^d$ می‌نامند. غلاف محدب یک مجموعهٔ متناهی را چندوجهی محدب[2] می‌نامند و آن را با $\mathrm{Conv}(V)$ نمایش می‌دهند.

به‌عنوان مثال، فرض کنید $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ مجموعه‌ای متشکل از چهار نقطه در $\mathbb{R}^2$ باشد که هیچ سه نقطهٔ آنها روی یک خط قرار ندارد. در این صورت، غلاف محدب V یک چندوجهی محدب است که در شکل ۱ نشان داده شده است.

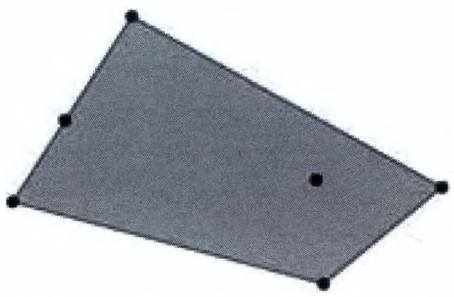
مثال ۱. غلاف محدب مجموعهٔ محدب متشکل از بردارهای یکهٔ

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)$$



شکل ۱ غلاف محدب چهار نقطه

1. poset 2. convex polytope



شکل ۲ غلاف محدب مجموعهٔ $\{V = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6\}$ که دو عضو آن رأسهای چندوجهی نیستند.

در $\mathbb{R}^3$ یک هشت‌وجهی منتظم است.

شایان ذکر است که برای چندوجهی محدب $P = \mathrm{Conv}(V)$ رأسهای P همان اعضای مجموعهٔ متناهی V هستند. اما در حالت کلی ممکن است برخی از آنها عناصر درونی P باشند که در این صورت رأس P محسوب نمی‌شوند.

می‌توان ثابت کرد که برای هر چندوجهی محدب P یک عدد صحیح و نامنفی d وجود دارد به‌طوری که P با گوی d بُعدی B^d همسانریخت است. در این صورت می‌گوییم بُعد P برابر d است و می‌نویسیم $\dim(P) = d$.

برای توصیف وجه‌هایِ از ابعاد مختلفِ یک چندوجهی به مفهوم زیر نیازمندیم.

تعریف ۲. منظور از یک ابرصفحه[1] در $\mathbb{R}^d$ زیرمجموعهٔ H از $\mathbb{R}^d$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} a_i x_t = d \right\}$$

که در آن $b \in \mathbb{R}$، $a_1, \ldots, a_d$ و $(a_1, \ldots, a_d) \neq (0, \ldots, 0)$.

هر ابرصفحه مانند H در $\mathbb{R}^d$ دو نیم‌صفحه به‌صورت زیر تعریف می‌کند

$$H^+ = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \geq b \right\},$$

$$H^- = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \leq b \right\}.$$

تعریف ۳. فرض کنید $R \subset \mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب باشد. ابرصفحهٔ H در $\mathbb{R}^d$ را یک ابرصفحهٔ محمل[2] می‌نامند هرگاه

۱) $P \subseteq H^+$ یا $P \subseteq H^-$،

۲) $P \cap H \neq \varphi$،

قضیهٔ زیر حاکی است که هر چندوجهی محدب را می‌توان مجموعهٔ جوابهای یک دستگاه نامعادلات خطی درنظر گرفت.

قضیهٔ ۱ (مینکوفسکی-وایل). هر چندوجهی محدبِ P را می‌توان به‌صورت

1. hyperplane 2. supporting hyperplane

اشتراک تعداد متناهی از نیم‌صفحه‌ها نمایش داد. به‌عبارت دیگر نیم‌صفحه‌های $H_1^+, \ldots, H_n^+$ موجودند به‌طوری که $P = \cap_{i=1}^n H_i^+$.

از قضیهٔ بالا بلافاصله نتیجه می‌شود که اشتراک یک چندوجهی محدب P در $\mathbb{R}^d$ با هر ابرصفحهٔ مستوی H، یک چندوجهی محدب در $\mathbb{R}^d$ خواهد بود. در حالت کلی، برش چندوجهی محدب P با ابرصفحه‌های مستوی، تعداد نامتناهی چندوجهی محدب به‌دست می‌دهد که بُعد آنها می‌تواند از صفر تا $\dim(P)$ تغییر کند. اما اگر توجه خود را به ابرصفحه‌های محملِ چندوجهی محدب P محدود کنیم، آنگاه تعداد متناهی چندوجهی محدب به‌دست خواهد آمد.

تعریف ۴. فرض کنید P چندوجهی محدب باشد. منظور از یک وجه[1] P زیرمجموعه‌ای از P به‌صورت $P \cap H$ است که در آن H یک ابرصفحهٔ محمل P است. وجه‌های ماکسیمال P را وجه اساسی[2] می‌نامند.

دلیل این نامگذاری این است که بقیهٔ وجه‌های P از روی وجه‌های اساسی به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. در هشت‌وجهی مثال ۱، صفحهٔ $x + y + z = 1$ یک ابرصفحهٔ محمل برای P است و وجه متناظر با این ابرصفحه، که یک وجه اساسی P است، مثلث تولید شده توسط بردارهای $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$، می‌باشد.

تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب یکی از مشخصه‌های تعیین‌کنندهٔ آن است. تعداد وجه‌های از بُعد i در یک چندوجهی محدب P را با f_i نمایش می‌دهیم و چندتایی مرتب $(f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}, f_d)$ را fـدنبالهٔ P می‌نامیم. در اینجا $f_{-1} = 1$ تعداد وجه‌های تهی P و $f_d = 1$ تعداد وجه‌های dبُعدی P را که همان P است نشان می‌دهد. اعداد f_0، f_1، f_{d-1} به‌ترتیب تعداد رأسها، یالها، و وجه‌های اساسی P را مشخص می‌کنند. به این ترتیب، مسالهٔ اصلی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

به‌ازای d و n مفروض، حداکثر درایه‌های یک fـبردار چقدر می‌تواند باشد.؟

مثال ۳. هشت‌وجهی دارای ۸ وجه اساسی است و fـبردار آن برابر است با $(1, 6, 12, 8, 1)$. شش‌وجهی نیز شش وجه اساسی دارد که fـبردار آن برابر با $(1, 8, 12, 6, 1)$ است.

رابطه‌های مختلفی بین تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب وجود دارد. از آن میان می‌توان به رابطهٔ

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} + (-1)^d f_d = 0$$

و یا معادلش

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d+1}$$

اشاره کرد. این فرمول در سال ۱۸۹۷ توسط پوانکاره به اثبات رسید و تعمیم فرمول $V - E + F = 2$ است که اویلر در قرن هجدهم برای چندوجهیهای دوبُعدی با تعداد رأسهای V، یالهای E، و وجه‌های F عرضه کرده بود و به نام این دو ریاضیدان مشهور شده است. به‌ازای $d = 2$، رابطهٔ $f_0 = f_1$ به‌دست

1. face 2. facet

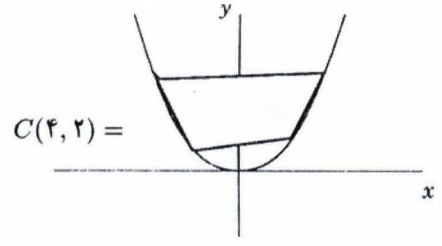
می‌آید که بیانگر این واقعیت آشناست که تعداد رأسهای یک چندضلعی محدب با تعداد یالهای آن برابر است.

وجه‌های برخی از چندوجهیهای محدب ساختمانی ساده‌تر دارند و همین ویژگی نقش آنها را در مطالعهٔ چندوجهیهای محدب برجسته‌تر می‌کند.

تعریف ۵. چندوجهی محدبی از بعد i را که دارای $i + 1$ رأس باشد سادک[1] می‌نامیم. چندوجهی محدب را سادکی[2] می‌نامیم اگر هر وجه آن یک سادک باشد.

به‌عنوان مثال، هشت‌وجهی سادکی است اما شش‌وجهی سادکی نیست. توجه کنید که برای اثبات سادکی بودن یک چندوجهی محدب کافی است نشان دهیم هر وجه اساسی آن یک سادک است.

تعریف ۶. گیریم C خم نرمال گویای $\{(t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d | t \in \mathbb{R}\}$ باشد. همچنین فرض کنیم n عددی طبیعی باشد به‌طوری که $n \geq d + 1$. در این صورت غلاف محدب هر مجموعهٔ n عضوی از نقاط روی این خم را یک چندوجهی محدب دوری[3] می‌نامیم و با $C(n, d)$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۳ چندوجهی دوری در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$

فرض کنید V یک مجموعهٔ n عضوی از نقاط خم C باشد $(n \geq d+1)$. در این صورت، کوچک‌ترین زیر فضای خطی $\mathbb{R}^d$ که یک زیرمجموعهٔ $d+1$تایی از این نقاط را دربر دارد برابر $\mathbb{R}^d$ است، زیرا اگر H ابرصفحه‌ای باشد که با معادلهٔ $a_1 x_1 + \ldots + a_d x_d = b$ تعریف شود و این $d+1$ نقطه را دربرداشته باشد، آنگاه مختصات هر یک از این نقاط به کمک جوابهای متمایز معادلهٔ $a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_d t^d = b$ به‌دست می‌آیند. اما این معادله حداکثر d جواب متمایز دارد و در نتیجه جوابهای آن نمی‌تواند $d+1$ نقطهٔ متمایز از C را تعیین کند. به‌خصوص نتیجه می‌شود که $C(n, d)$ یک چندوجهی از بعد d و هر وجه آن یک سادک است. بنابراین $C(n, d)$ یک چندوجهی سادکی خواهد بود. همچنین با توجه به گزارهٔ ۱ـ۱۲ در [۱۳] می‌دانیم به‌ازای $i \leq d/2$، هر مجموعهٔ iتایی از رأسهای $C(n, d)$ یک وجه $i - 1$ بعدی از $C(n, d)$ است. به‌عبارت دیگر به‌ازای هر $i \leq d/2$، $f_{i-1}(C(n, d)) = \binom{n}{i}$.

در پاسخ به این سؤال اساسی که اگر بُعد و تعداد رأسها را ثابت نگاه داریم حداکثر تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب با n رأس و از بعد d چقدر خواهد بود، حدس زیر به‌عنوان حدس کران بالا در سال ۱۹۵۷ توسط ماتزکین (ر.ک. [۲۲]) مطرح شد.

حدس کران بالا (UBC)[4]. فرض کنید $P \subset \mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب

1. simplex 2. simplicial 3. cyclic polytope
4. Upper Bound Conjecture

با n رأس باشد. در این صورت، به‌ازای هر $0 \le i \le d$

$$f_i(P) \le f_i(C(n,d)).$$

در سال ۱۹۶۴ کلی[1] دامنهٔ اشیایی را که در حدس فوق صدق می‌کنند وسیع‌تر کرد و مدعی شد این حدس برای کره‌های سادکی نیز درست است.

فرض کنیم P یک چندوجهی محدب باشد. با استفاده از یک روش ترکیبیاتی، موسوم به کشیدن[2] می‌توان از P یک چندوجهی سادکی Δ ساخت به‌طوری‌که $f_0(\Delta) = f_0(P)$، $0 < i < d$ و به‌ازای هر $f_i(\Delta) \ge f_i(P)$. بنابراین، اگر بتوان حدس کران بالا را برای یک چندوجهی سادکی ثابت کرد، آنگاه برای هر چندوجهی دیگر هم درست خواهد بود (ر.ک. [۷]، ص. ۸۰).

تعریف ۷. اگر $P \subset \mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب سادکی باشد، آنگاه

$$\Delta(P) = \{F | F \neq P \text{ است و } F \text{ یک وجه } P\}$$

را مجتمع مرزی[3] P می‌نامیم.

برای اثبات حدس کران بالا (UBC)، به‌جای f-بردار، باید از یک چندتایی مرتب دیگر که در زیر معرفی می‌شود، استفاده کرد.

تعریف ۸. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی در $\mathbb{R}^{d-1}$ از بعُد $d-1$ باشد. همچنین فرض کنیم $(f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1})$، f-بردار Δ باشد. به‌ازای هر $0 \le i \le d$، اعداد صحیح $h_i = h_i(\Delta)$، از رابطهٔ

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

محاسبه می‌شوند. بردار $(h_0, \ldots, h_d)$ را h-بردار Δ می‌نامیم.

از این رابطه نتیجه می‌شود که اگر h-بردار مجتمع سادکی در دست باشد، می‌توان f-بردار آن را به‌دست آورد. همچنین از تعریف بالا رابطه‌های مفید $h_1 = f_0 - d$ و $h_0 = 1$ نتیجه می‌شود.

تعریف ۹. فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ

$$|\Delta| = \cup_{F \in A} \mathrm{Conv}\,(\{e_i\}_{v_i \in F})$$

از $\mathbb{R}^d$، که e^i بردار پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^d$ است، حقیقی‌شدهٔ هندسی[4] Δ نامیده می‌شود.

اگر P یک چندوجهی d بعُدی باشد، به‌آسانی نشان داده می‌شود مجتمع مرزی P با یک کرهٔ $(d-1)$ بُعدی همسانریخت است. اما هر مجتمع سادکی چنین خاصیتی ندارد.

تعریف ۱۰. مجتمعی سادکی مانند Δ از بعد $d-1$ را مجتمع $(d-1)$ کره‌ای می‌نامیم هرگاه $|\Delta|$ با کرهٔ $(d-1)$ بعُدی $\mathbb{S}^{d-1}$ همسانریخت باشد که در آن $\mathbb{S}^{d-1}$ مرز گوی d بُعدی ∂B^d است.

در سال ۱۹۷۰ مک‌مالن نتیجهٔ زیر را ثابت کرد.

لم ۱. فرض کنید که Δ یک مجتمع $(d-1)$ کره‌ای با f-بردار $f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1})$ و h-بردار $h(\Delta) = (h_0, \ldots, h_d)$ باشد. قرار دهید $f_0 = t$. در این صورت، اگر

$$h_i \le \binom{t-d+i-1}{i}, \qquad 0 \le i \le [d/2]$$

آنگاه به‌ازای هر $0 \le i \le d-1$، $f_i \le f_i(C(t,d))$.

شایان ذکر است که به‌ازای هر $0 \le i \le [d/2]$ داریم

$$h_i(C(t,d)) = \binom{t-d+i-1}{i}.$$

بنابراین، برای اثبات UBC کافی است ثابت شود که به‌ازای هر $0 \le i \le [d/2]$ داریم

$$h_i \le \binom{t-d+i-1}{i} \qquad (*)$$

مک‌مالن در سال ۱۹۷۰ این نابرابری را برای مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی و نه کره‌های سادکی، ثابت کرد (ر.ک. [۱۸]) و به این ترتیب حدس کلی بی‌پاسخ ماند. به عبارت دیگر:

قضیهٔ ۲. برای هر چندوجهی محدب $P \subset \mathbb{R}^d$ با n رأس داریم

$$f_i(P) \le f_i(C(n,d)), \qquad 0 \le i \le d-1.$$

مک‌مالن در اثبات خود از این قضیه از یک خاصیت ترکیبیاتی، موسوم به پوسته‌پذیری[1] مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی، استفاده کرد. اما پوسته‌پذیری مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی، که بروگزر و مانی (ر.ک. [۲]) آن را ثابت کرده بودند، به کره‌های سادکی قابل تعمیم نیستند، زیرا مثلث‌بندیهایی برای کره وجود دارند که پوسته‌پذیر نیستند (ر.ک. [۸] و [۱۶]). به‌عبارت دیگر مثلث‌بندیهایی برای کره می‌توان پیدا کرد که از یک چندوجهی به‌دست نمی‌آیند. به این ترتیب، استدلال مک‌مالن برای درستی UBC برای کره‌های سادکی، قابل تعمیم به حالت کلی نبود. بالاخره استنلی در سال ۱۹۷۵ حدس فوق را برای مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی، از جمله مجتمعهایی که از مثلث‌بندی کره به‌دست می‌آیند، ثابت کرد (ر.ک. [۲۶]). در واقع وی شرطی قوی‌تر از نابرابری (*)، که شرطی نتیجه‌شده از یک خاصیت جبری بود و شرط مک‌مالن برای اثبات قضیهٔ اخیر را نتیجه می‌داد، ارائه کرد.

برای بیان مراحل استدلال استنلی، باید مفهومی شبیه مجتمع مرزی یک چندوجهی که مستقل از هرگونه نشاندن در یک فضای $\mathbb{R}^d$ باشد، معرفی کنیم.

مجتمعهای سادکی مجرد

فرض کنیم $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ یک مجموعهٔ d عضوی باشد. آنگاه مجموعه‌ای مانند Δ از زیرمجموعه‌های V را یک مجتمع سادکی مجرد[2] با مجموعه رأسهای V گویند هرگاه به‌ازای هر $F \in \Delta$ و هر $G \subset F$ داشته باشیم $G \in \Delta$. به‌علاوه به‌ازای هر i، $\{v_i\} \in \Delta$.

هر عضو Δ را یک وجه و هر وجه ماکسیمال نسبت به رابطهٔ شمول را یک وجه اساسی می‌نامند. Δ را یک مجتمع سادکی محض می‌نامیم هرگاه تعداد

1. V. Klee 2. pulling 3. boundary complex
4. geometric realization

1. shellability 2. abstract simplicial complex

اعضای هر دو وجه اساسی آن برابر باشند. به‌ازای هر $F \in \Delta$، بُعد F را به‌صورت $\dim F = |F| - ۱$ و بُعد Δ را برابر $\dim\Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$ تعریف می‌کنند.

مثال ۴. ۱) مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی.

۲) فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌بُعد، و W یک زیرمجموعهٔ متناهی از V باشد. همچنین فرض کنید Δ مجموعهٔ زیرمجموعه‌هایی از W باشد که استقلال خطی دارند. بنابر تعریف، Δ یک مجتمع سادکی است. بُعد Δ حداکثر برابر با بُعد V است.

فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی $(d-۱)$ بُعدی با رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_d\}$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R = \mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_d]$ را درنظر بگیرید. گیریم I_Δ ایده‌آل تک‌جمله‌ای از حلقهٔ R باشد که توسط تک‌جمله‌ایهای به شکل $x_{i_۱}x_{i_۲}\ldots x_{i_t}$ تولید شود به‌طوری که Δ وجهی با مجموعه رأسهای $\{x_i, \ldots, x_{i_t}\}$ نداشته باشد. ایده‌آل I_Δ را ایده‌آل ناوجه[1] و حلقهٔ

$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_d]/I_\Delta$$

را حلقهٔ استنلی ــ رایزنر Δ می‌نامند.

مثال ۵. مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های هر عضو مجموعهٔ

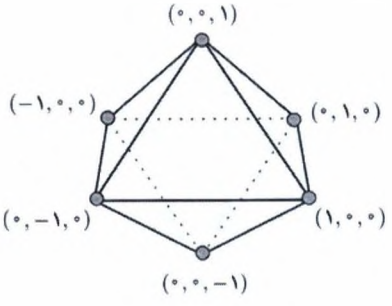
$$\{\{x_۱, x_۲, x_۳\}, \{x_۱, x_۳, x_۴\}, \{x_۱, x_۴, x_۵\}, \{x_۱, x_۲, x_۵\},$$
$$\{x_۲, x_۳, x_۶\}, \{x_۲, x_۵, x_۶\}, \{x_۳, x_۴, x_۶\}, \{x_۴, x_۵, x_۶\}\}$$

یک مجتمع سادکی می‌سازد که ایده‌آل ناوجه آن $I = (x_۱x_۶, x_۲x_۴, x_۳x_۵)$ و حلقهٔ استنلی ـ رایزنر آن

$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_۶]/(x_۱x_۶, x_۲x_۴, x_۳x_۵)$$

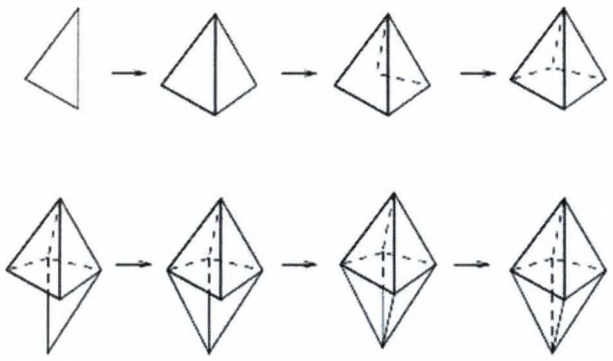
است. این مجتمع در واقع همان مجتمع هشت‌وجهی می‌باشد.

اگر Δ یک مجتمع سادکی $d-۱$ بُعدی باشد، آنگاه حلقهٔ $\mathbb{K}[\Delta]$ یک $\mathbb{K}$ ـ جبر متناهی‌مولد از بُعد d است و با استفاده از قضیهٔ نرمال‌سازی نوتر عناصر $y_۱, \ldots, y_d$ را در $\mathbb{K}[\Delta]$ می‌توان یافت به‌طوری که $\mathbb{K}[\Delta]$ یک $\mathbb{K}[y_۱, \ldots, y_d]$ ـ مدول متناهی‌مولد باشد. به‌خصوص، اگر این مدول آزاد



شکل ۴ یک هشت‌وجهی

1. nonface



شکل ۵ یک پوسته برای مجتمع مرزی هشت‌وجهی

باشد آنگاه $\mathbb{K}[\Delta]$ را یک حلقهٔ کوهن ـ مکالی می‌نامند و مجتمع Δ را نیز کوهن ـ مکالی روی $\mathbb{K}$ می‌خوانند هرگاه $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن ـ مکالی باشد. به‌عنوان مثال، مجتمع مثال ۲، کوهن ـ مکالی است.

استنلی متوجه شد که از برخی خواص جبری این نوع حلقه‌ها می‌توان نابرابری $(*)$ را نتیجه گرفت و به کمک آنها توانست UBC را برای کره‌ها به اثبات برساند. در زیر به شرح این ارتباطات می‌پردازیم.

لم ۲. فرض کنید f و i اعداد صحیح و مثبتی باشند. در این صورت برای f نمایش یکتایی به‌صورت

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-۱}}{i-۱} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

وجود دارد که در آن $n_i > n_{i-۱} > \ldots > n_j \geq j \geq ۱$.

کافی است به کمک مثلث خیام ـ پاسکال نزدیک‌ترین عدد به‌صورت $\binom{m}{i}$ به f را بیابیم. اگر این عدد برابر f بود، لم ثابت شده است، در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $m = n_i$. این انتخاب را برای $f - \binom{n_i}{i}$ و $i-۱$ انجام می‌دهیم و این کار را تکرار می‌کنیم. چون f عددی متناهی است، پس از تعداد متناهی بار انجام عمل اخیر، نمایش مورد نظر به‌دست می‌آید.

تعریف ۱۱. اگر f و i دو عدد صحیح و مثبت باشند و

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-۱}}{i-۱} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

که در آن $n_i > n_{i-۱} > \ldots > n_j \geq j \geq ۱$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$f^{(i)} = \binom{n_i}{i+۱} + \binom{n_{i-۱}}{i} + \cdots + \binom{n_j}{j+۱}.$$

مسألهٔ وجود چندوجهی محدبی با f ـ بردار از پیش داده شده به‌وجود روابطی بین درایه‌های f ـ بردار و اعدادی که از این f ـ بردار به‌دست می‌آید و در قضیهٔ ۳ بیان می‌شود بستگی دارد. این نتیجه را شوتزنبرگر از یک طرف و کروسکال[1] و کاتونا[2] از طرف دیگر، مستقلاً ثابت کردند و جوابی بود برای سؤالی که قبلاً شوتزنبرگر (ر.ک. [۳۰]) مطرح کرده بود. این نتیجه به عنوان

1. Kruskal 2. Katona

قضیهٔ کروسکال-کاتونا معروف گردیده و نقش شوتزنبرگر در آن فراموش شده است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $(f_0, f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ یک بردار باشد به‌طوری که به‌ازای هر $0 \leq i \leq d-1$ داشته باشیم $f_i > 0$. آنگاه یک مجتمع سادکی Δ موجود است به‌طوری که $f(\Delta) = (1, f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $0 \leq i \leq d-2$، $0 < f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)}$.

نماد $f^{<i>}$ همانند $f^{(i)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j+1}{j+1}$$

همچنین قرارداد می‌کنیم که $0^{<i>} = 0$.

بردار $(h_0, h_1, \ldots)$ را M-بردار می‌نامند (به‌دلیل نقش مکالی در به کاربردن این نماد برای اولین بار، از M استفاده شده است اما بعضی آن را O-بردار[1] هم می‌نامند) هرگاه $h_0 = 1$ و $0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>}$ به‌ازای هر $i \geq 1$.

نتیجهٔ زیر منسوب به استنلی است و آن را قضیهٔ کروسکال-کاتونا برای مجتمعهای کوهن-مکالی می‌نامند.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. در این صورت، مجتمع کوهن-مکالی Δ با بعد $d-1$ وجود دارد به‌طوری که $h(\Delta) = h$ اگر و تنها اگر h یک M-بردار باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، M-بردار بودنِ h را به‌راحتی می‌توان ثابت کرد.

گزارهٔ ۱. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی کوهن-مکالی باشد. آنگاه حدس UBC برای Δ برقرار است.

اثبات. توجه می‌کنیم که $h_1(\Delta) = n - d$ و $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ یک M-بردار است. بنابراین، h_i نابیشتر از تعداد تک‌جمله‌ایهای از درجهٔ i در $n-d$ متغیر، یعنی $\binom{n-d+i-1}{i}$ است. در نتیجه، طبق لم ۱، UBC برای Δ برقرار است. ■

برای کامل‌کردن UBC باید مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی را شناخت. به این منظور، استنلی با استفاده از نتیجهٔ رایزنر و هاکستر در مورد دسته‌بندی مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی براساس مانستگی [هومولوژی] مربوط به آنها قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

گزارهٔ ۲. اگر حقیقی‌شدهٔ هندسی Δ، یعنی $|\Delta|$، با $\mathbb{S}^{d-1}$ همسانریخت باشد، آنگاه Δ کوهن-مکالی است.

لذا با توجه به دو گزارهٔ ۱ و ۲ خواهیم داشت:

قضیهٔ ۵. حدس کران بالا، UBC، برای کره‌ها برقرار است.

و به این ترتیب، درستی حدس کلی نیز به اثبات رسید.

۱. O حرف اول کلمهٔ order است.

ادامهٔ راه

اثبات قضیهٔ بالا پایان راه نبود، بلکه آغاز آن بود. با اثبات استنلی توانایی روشهای جبر جابه‌جایی در حل مسائل ترکیبیاتی نشان داده شد و جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی پا به‌عرصهٔ وجود گذاشت. این رشته در مسیر رشد خود، ریاضیات زیبا و با ارزشی را به‌وجود آورده است. همان‌طور که از گزارهٔ ۱ برمی‌آید مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی نیز در UBC صدق می‌کنند. به همین دلیل یکی از موضوعات داغ تحقیقاتی در شاخهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، مشخص‌سازی مجتمعهای کوهن-مکالی و تعمیمهای کوهن-مکالی از جمله مجتمعهای بوکسباوم، k-کوهن-مکالی، و مجتمعهای سادکی با شرط سِر[1] است.

در سالهای اخیر گامهای بلندی برای اثبات درستی UBC برای مجتمعهای دیگر برداشته شده است (ر.ک. [۲۳] و [۲۴]). حدس قوی کران بالا (SUBC)، مطرح شده و ابزارهای جبری جدیدی را، از جمله نظریهٔ پایهٔ گروبنر و ایده‌آلهای آغازی عام[2]، که علاوه بر خواص جبری چندوجهی محدب، خواص توپولوژیکی و ترکیبیاتی آن را نیز با خود به‌همراه می‌آورد، برای پاسخ به این سؤال به‌کار گرفته‌اند (ر.ک. به [۲۳]).

حدس قوی کران بالا نیز همانند UBC از یک مسألهٔ بهینه‌سازی که دربارهٔ کارایی الگوریتم سادکی بوده، نشأت گرفته است. در حالتی که در قضایای بالا هدف اصلیْ بیان خاصیتی دربارهٔ f-بردار و h-بردار یک مجتمع سادکی باشد، حدسها و قضایایی نیز در جهت عکس مطرح شده‌اند. تعیین شرایط لازم و کافی برای اینکه یک چندوجهی محدب با یک h-بردار مفروض وجود داشته باشد، از جمله مسائلی بود که در دههٔ ۱۹۸۰ با استفاده از جبر جابه‌جایی، هندسهٔ جبری، و کوهومولوژی چندگونا‌های جبری حل شدند. با وجود این، تعمیم این قضایا به مجتمعهای غیرسادکی موفقیت‌آمیز نبوده و سوالات پاسخ داده نشدهٔ بسیاری دربارهٔ آنها وجود دارد (ر.ک [۲۸]).

به‌کمک f-بردار وابسته به یک مجتمع $d-1$ بُعدی P، d-گروه مانستگی با P نظیر می‌شود که اطلاعات بسیار مفیدی را دربارهٔ P به‌دست می‌دهد. به‌خصوص بسیاری از چندوجهیها را به کمک این گروههای مانستگی تعریف و خواص آنها را بررسی می‌کنند (ر.ک. [۲۳]).

از جمله دستاوردهای اخیر در حوزهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، تعمیم مفهوم حلقه‌های استنلی-رایزنر به مدولها و پیدایش مفهوم جدیدی به نام مدولهای خالی از مربع بوده است و بسیاری از خواص حلقه‌های استنلی-رایزنر به این مدولها تعمیم داده شده‌اند. این مدولها برخی از استدلالهایی را که مبتنی بر خواص حلقه‌های استنلی-رایزنر هستند ساده‌تر می‌کنند و این حوزه هنوز از حوزه‌هایی است که مسائل حل‌نشده در آن فراوان است (ر.ک. [۳۳]). همچنین در سالهای اخیر حلقه‌های وجهی چنبره‌ای[3] به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های استنلی-رایزنر و حلقه‌های نیم‌گروه مستوی معرفی شده‌اند.

یکی دیگر از موضوعات تحقیقاتی جاری در این شاخه، مطالعهٔ خواص گرافها و یا ابرگرافها از طریق ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای است که به‌شیوه‌ای خاص با آنها نظیر می‌شوند. از این طریق بسیاری از سؤالهای مربوط به گرافها به سؤالهایی در جبر جابه‌جایی ترجمه می‌شوند و سعی می‌شود با ابزارهای جبر جابه‌جایی پاسخی برای آنها پیدا شود (ر.ک. [۳۲] فصلهای ۶ و ۷). به‌عنوان

1. Serre's condition 2. generic initial ideals 3. toric face rings

مثالی دیگر، با هر گراف می‌توان یک مجتمع سادکی نظیر کرد (یعنی مجموعهٔ متشکل از زیرمجموعه‌های رأسهای مستقل گراف)، لذا مشخص‌سازی گرافهای کوهن-مکالی و یا گرافهایی با خاصیت جبری معین از جمله فعالیتهای جدی در این شاخه محسوب می‌شود. با توجه به اینکه هرتسوگ و هیبی از جلوداران این قافله‌اند، لذا علاقه‌مندان به این شاخه می‌توانند با مراجعه به مقالات این دو و مراجع مندرج در آنها، تقریباً اکثر مقالات موجود در این زمینه را جستجو و از موضوعات آن آگاهی یابند.

از جمله مجتمعهای سادکی دیگری که با یک گراف نظیر می‌شود، مجتمعی است که وجه‌های آن زیرگرافهای کامل یک گراف‌اند. پیداکردن f-بردار این مجتمع کاربردهای مهمی در ترکیبیات دارد و می‌توان آن را طریق ایده‌آل ناوجه آن (که ارتباط بسیار روشنی با مجتمع مجموعه‌های مستقل گراف مکمل آن دارد) به‌دست آورد.

منابعی برای مطالعه بیشتر

موضوعات مورد بحث در این حوزه به اندازه‌ای رشد یافته‌اند که بتوان آنها را تدوین کرد و به‌صورت کتاب درآورد. ولی چون این موضوعات هنوز به‌صورت یک برنامهٔ مصوب درسی در تمامی دوره‌های درسی دانشگاههای ایران ارائه نمی‌شود و چون مباحث این حوزه از جمله موضوعات داغ تحقیقاتی روز است، در زیر برخی کتابهای موجود در این زمینه را که به‌صورتی نظام‌مند مطالب و پیشنیازهای لازم برای فراگیری موضوع و آغاز تحقیق روی آنها را در بردارند، معرفی می‌کنیم.

۱. درس‌نامهٔ هیبی [۱۳]، مرجع خوبی برای آشنایی با مفاهیم جبری و ترکیبیاتی مورد نیاز برای فراگیری مقدمات این حوزه است. این درس‌نامه با هدف ارائهٔ برخی موضوعات ترکیبیات شمارشی که در ارتباط با جبر جابه‌جایی هستند، تهیه شده و مخاطبان آن دانشجویان سال آخر دورهٔ کارشناسی هستند.

۲. کتاب استنلی [۲۷]، اولین مرجع منسجم دربارهٔ ارتباط جبر جابه‌جایی و ترکیبیات و در بردارندهٔ مفاهیم، قضایا، و مسائل اصلی و رویکردهای اصیل به مسائل این حوزه است. این کتاب به دلیل اهمیتش نزد محققان به «کتاب سبز» معروف شده است. این مرجع علی‌رغم گذشت ۳۰ سال از اولین چاپ آن هنوز مورد استفادهٔ بسیاری از محققان این رشته است و سرشار از ایده‌های عمیق و بدیع دربارهٔ اشیای مورد مطالعه می‌باشد. برای شروع تحقیق در حوزهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، دانستن مطالب فصلهای صفر، دو، و سهٔ این کتاب ضروری است.

۳. کتاب برونز و هرتسوگ [۳]، یکی از کامل‌ترین مراجع در جبر جابه‌جایی و برای تحقیق در این زمینه از مراجع اصلی است. فصلهای ۵، ۶، و ۷ این کتاب به موضوعات اصلی جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، یعنی حلقه‌های استنلی-رایزنر، حلقه‌های نیم‌گروه و حلقه‌های دترمینانی اختصاص دارد. فصلهای ۱، ۲، ۳، و ۴ کتاب نیز به موضوعات و مفاهیم اصلی جبر جابه‌جایی پرداخته است و دسترسی خواننده به مطالب مورد نیاز برای مطالعهٔ فصلهای ۵، ۶، و ۷ را بسیار سریع و آسان کرده است. فصل ۵ این کتاب شرح ساده شده و مبسوط [۱۵] است. مطالعهٔ این کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد و به‌خصوص دانشجویان دکتری جبر جابه‌جایی قویاً توصیه می‌شود.

۴. کتاب میلر و اشتورم‌فلس [۲۰]، حاوی مطالب بسیار متنوعی دربارهٔ موضوعات اصلی و پایه‌ای این حوزه و موضوعات مرتبط با آن است. تنوع مطالب مورد بحث آن بسیار بیشتر از کتاب [۳] است و می‌تواند کتاب مناسبی برای تدریس در دورهٔ کارشناسی ارشد و یا دکتری باشد. فراگرفتن موضوعات این کتاب، بدون تلاش برای حل مسائل آن، تقریباً ناممکن است. با مطالعهٔ این کتاب، خواننده، می‌تواند در جریان موضوعات تحقیقاتی جاری این حوزه قرار گیرد.

۵. کتاب هرتسوگ و هیبی [۱۱]، به‌تازگی برای چاپ و انتشار به شرکت اشپرینگر-فرلاگ تحویل شده است و طیف گسترده‌ای از مطالب مورد نظر در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی را در بردارد و آخرین نتایج به‌دست آمده در این زمینه را در سطح یک کتاب درسی پیشرفتهٔ دورهٔ تحصیلات تکمیلی عرضه می‌کند. با توجه به اِشراف نویسندگان آن به موضوع گمان می‌رود یکی از کتابهای بی‌بدیل در این شاخه باشد.

پایان سخن

اینجانب در سال ۱۳۸۵ فرصت مطالعاتی خود را در دانشگاه اِسِن[1] گذراندم و در مدت اقامت خود در این دانشگاه مبحث ترکیبیات جبری را ازیورگن هرتسوگ فراگرفتم (ر.ک. [۱۲]). پس از مراجعت، در چند سال اخیر به کمک عده‌ای از محققان کشور و دانشجویان دکتری، شاخهٔ مذکور را درکشور معرفی کرده و در ترویج آن کوشیده‌ایم و خوشبختانه موفقیتهایی هم در این زمینه به‌دست آمده است (ر.ک. [۲۵]). همچنین می‌توان به مقالات [۹]، [۲۱]، [۱۰]، [۱۷] که اخیراً منتشر شده‌اند، به‌عنوان حاصل این تلاشها، اشاره کرد.

در سال ۱۳۸۸، به‌منظور معرفی بیشتر این رشته و معرفی موضوعات و مسائل اصلی آن، اولین سمینار یک‌روزه با عنوان جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، در پژوهشگاه دانشهای بنیادی با حضور عده‌ای از محققان و دانشجویان کشور و همچنین با حضور نائوکی تِرای[2]، یکی از متخصصان بین‌المللی این شاخه، برگزار گردید. امیدواریم در آیندهٔ نزدیک سطح تحقیقات محققان کشور در این حوزه به‌اندازه‌ای پیشرفت کند که آنها نیز در ردهٔ متخصصان تراز اول این رشته قرار گیرند.

سپاسگزاری

از آقایان دکتر رحیم زارع نهندی و دکتر محمدرضا پورنکی و همچنین آقایان سیدفخاری و گودرزی که متن اولیهٔ این مقاله را به دقت مطالعه کردند و با نظرهای سازنده‌شان به ارتقای کیفیت آن کمک کردند، سپاسگزارم.

مراجع

1. M. Atyiah, Polyhedra in physics, chemistry and geometry, *Milan J. math.* **71** (2003) 33-58, Birkhäuer Verlag Basel/Switzerland.

2. H. Bruggesser and P. Mani, "Shellable decomposition of cells and spheres", *Math. Scand.* **29** (1971), 197-205.

3. W. Bruns and J. Herzog, *Cohen Macaulay rings, revised ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

1. Essen 2. Naoki Terai

4. A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano, "CoCoA: a system for doing computation in commutative algebra", available at `http://cocoa.dima.unige.it`

5. D. R. Grayson, and M. Stillman, "Macaulay 2 a software system for research in algebraic geometry", available at `http://www.math.unic.edu/ Macaulay2.`

6. G. M. Gruel, G. Pfister, H. Schönemann, "A computer algebra system for polynomial computations", available at `http://singular.uni-kl.de.`

7. B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, revised ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 2003.

8. G. Grünbaum and V. P. Sreedharan, "An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices", *J. Combinatinatorial Theory*, **2** (1967), 437-465.

9. H. Haghighi, S. Yassemi, and R. Zaare Nahandi, "Bipatite S_2 graphs are Cohen-Macaulay", *Bull. Math. Soc. Sc. Math., Roumanie*, 53 (**101**), No. 2, 2010, 125-132.

10. H. Haghighi, N. Terai, S. Yassemi, and R. Zaare Nahandi, "Sequentially S_2 simplicial complexes and sequentially S_2 graphs", to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

11. J. Herzog, and T. Hibi, *Monomials*, to appear by Springer-Verlag, New York, (2010).

12. J. Herzog, A. Soleyman Jahan and S. Yassemi, "Stanley decompositions and partitionable simplicial complexes", *J. Algebraic Combin.*, (1) **27** (2008) 113-125.

13. T. Hibi, *Algebraic Combinatorics an Convex Polytopes*, Carslaw Publications, Australia (1992).

14. M. Hochster, "Rings of Invariants of tori, Cohen-Macaulay generated by monomials and polytopes", *Ann. Math.* **96** (1972) 318-337.

15. M. Hochster, "Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes" In B. R. MacDonald and R. A. Morris (eds.) *Ring Theory II. Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **26**, M. Dekker, (1977), 171-223.

16. G. Kalai, "Many triangulated spheres", *Discrete Comp. Geom.* **6** (1988) 1-14.

17. M. Mahmoudi, A. Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, and S. Yassemi, "Vertex decomposibility and regularity of very well-covered graphs", submitted.

18. P. McMullen, "The numbers of faces of simplicial polytopes", *Isr. J. Math.*, **9** (1971), 559-570.

19. P. McMullen, and G. C. Shepaed, *Convex Polytopes and Upper Bound Conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1971.

20. E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texs in Math., Springer-Verlag, New York, (2005).

21. F. Mohammadi, D. Kiani, and S. Yassemi, "Shellable cactus graphs", *Math Scand.* **106** (2010) 161-167.

22. T. S. Motzkin, "Comonotone curves and polyhedra", *Bull. Amer. Math. Soc.* **63** (1957) 36-37.

23. I. Novik, "Upper bound theorems for homology manifolds", *Isr. J. Math.*, **108** (1998) 45-82.

24. I. Novik, "Remarks on the upper bound theorem", *Combinatorial Theory*, Series **A 104** (2003), 201-206.

25. M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, M. Tousi, and S. Yassemi, "What is Stanley depth", *Notices of AMS*, (9) **56** (2009).

26. R. Stanley, "The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings", *Studies in Applied Math.*, (June 1975).

27. R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Brikhäuser, second edition, (1996).

28. R. Stanley, "Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results", *Advanced Studies in Pure Math, Commutative Algebra and Combinatorics*, **11** (1987), 187-213.

29. B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes", *Amer. Math. Soc.*, (1996).

30. M. P. Schützenberger, *A characteristic property of certain polynomials of E. F. Moore and C. E. Shannon*, in RLE quarterly progress report no. 55, pages 117-131. Research Lab. of Electronics, MIT, 1959.

31. W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

32. R. Villarreal, *Monomial Algebra*, Marcel Dekker (2001).

33. K. Yanagawa, "Alexnader duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules", *J. of Algebra*, **225**, (2000), 630-645.

34. G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Volume 152, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, revised ed. (1998).

* * * * * *

• این مقاله متن بسط‌یافتهٔ سخنرانی نویسنده در دومین کنفرانس ترکیبیات جبری است که در اردیبهشت ۱۳۸۹ در مشهد برگزار شد.

* سیامک یاسمی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی و دانشکدهٔ ریاضی، آمار، و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران

yassemi@ipm.ir

ریاضیات است که ما را انتخاب می‌کند•

میخائیل گلفاند

یوری منین، ریاضیدان روس، از ریاضیدانان برجستهٔ معاصر است که دستاوردهای مهمی به‌خصوص در هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، و فیزیک ریاضی دارد. وی پس از بازنشستگی از کار در مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک در بُن، در حال حاضر استاد ریاضیات دانشگاه نورث وسترن در آمریکا و در عین حال، پژوهشگر ارشد مؤسسهٔ ریاضی استکلف در مسکو است. از ویژگیهای اندیشهٔ منین، علائق و دیدگاه فرهنگی گستردهٔ اوست که از قلمرو ریاضیات فراتر می‌رود و ریاضیات را هم جزئی از یک کلِّ منسجم، یعنی فرهنگ بشر، می‌داند. این دیدگاه، از جمله، در کتابی از او با عنوان ریاضیات همچون استعاره (*Mathematics as Metaphor*) بازتاب یافته است. وی همچنین صاحب آثار توصیفی فراوان در زمینه‌های متنوعی از منطق ریاضی تا فیزیک نظری است.

قبلاً هم (در شمارهٔ اسفند ۱۳۷۷ نشر ریاضی) ترجمهٔ مصاحبه‌ای با منین در مجله چاپ شده بود. کلمهٔ «دیگر» در عنوان این مصاحبه اشاره به آن است.

مصاحبه‌کننده، میخائیل گلفاند، معاون علمی مؤسسهٔ «مسائل انتقال اطلاعات خارکویچ (A. A. Kharkevich)» در آکادمی علوم روسیه است.

گلفاند: آیا اسلوبِ پژوهش ریاضی در پنجاه سال گذشته تغییر کرده است؟

منین: در سطح فردی یا اجتماعی؟

گلفاند: هردو

منین: به‌نظر من، امروز ریاضیدانها همان‌طور پژوهش می‌کنند که ۲۰۰ سال پیش می‌کردند. علتش تا حدودی این است که ما ریاضیات را به‌عنوان حرفهٔ خود انتخاب نمی‌کنیم، بلکه ریاضیات است که ما را انتخاب می‌کند، و انتخاب‌شدگان نوع خاصی از اشخاص هستند که در هر نسلی در سراسر جهان بیش از چندهزار نفر نیستند و همگی مهر و نشان آن نوع خاص را بر پیشانی دارند.

اما روال کار در سطح اجتماعی تغییر کرده است، به این معنا که نهادها و مؤسساتی که ریاضیدانها در آنها به‌کار تحقیق می‌پردازند تغییر کرده‌اند. این تحول نامعمول نبوده است. در دورهٔ نیوتن، و بعد لاگرانژ و غیره، آکادمیها و دانشگاهها در حال شکل‌گیری بودند؛ ریاضی ورزان آماتورکه زمانی به مطالعهٔ کیمیاگری یا اختربینی می‌پرداختند، به‌همان روش سابق، یعنی از طریق مکاتبه، افکار علمی را مبادله می‌کردند و به این ترتیب، روابط و نهادهای اجتماعی را پایه‌ریزی کردند (از عهد باستان صرف‌نظر می‌کنم که رشد طبیعی آن در اروپا در طی هزارهٔ اول مسیحیت متوقف ماند). بعد مجلات علمی وارد عرصه شدند. همهٔ اینها تا ۳۰۰ سال پیش استقرار یافتند. در نیمهٔ دوم قرن بیستم، ظهور رایانه به تکامل این جریان کمک کرده است.

گلفاند: ولی آیا از زمان نیوتن و لاگرانژ تا نیمهٔ دوم قرن بیستم هیچ اتفاق مهمی نیفتاده است؟

منین: نه. این نظام اجتماعی ــ آکادمیها به‌اضافهٔ دانشگاهها به‌اضافهٔ مجله‌ها ــ تثبیت شد و اندک‌اندک به‌شکلی درآمد که امروز می‌بینیم. مثلاً اولین جلد مجلهٔ کرله (مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی) را که در ۱۸۲۶ انتشار یافت درنظر بگیرید. این مجله هیچ فرقی با یک مجلهٔ امروزی ندارد. در آنجا مقالهٔ آبل دربارهٔ حل‌ناپذیری معادلهٔ کلی درجهٔ پنجم به بالا به‌وسیلهٔ رادیکالها چاپ شده است. مقاله‌ای بسیار عالی! من به‌عنوان عضو هیأت ویراستاران کرله حتی امروز این مقاله را با خرسندیِ زیاد می‌پذیرفتم.

اما در چند دههٔ گذشته نحوهٔ ارتباط بین جامعه و ریاضیدانان حرفه‌ای تغییر کرده است. این ارتباط امروز از طریق جماعت رایانه‌چی و افراد دوروبر آنها، مانند مسؤولان روابط عمومی و نظایر آنها، برقرار می‌شود که به‌خاطر روشهای جدید تأمین منابع مالی برای کارمان ــ پژوهانه‌ها، طرح‌واره‌ها، و غیره ــ به آنها نیازمندیم. این موضوع در ریاضیات، غریب می‌نماید. شما باید اول بنویسید که کاری که می‌کنید دقیقاً چیست که آنقدر اهمیت دارد، و بعد از انجام کار

گزارشی از آنچه کرده‌اید بنویسید.

گلفاند: یکی از شاگردان کانتورویچ می‌گفت که کانتورویچ در یک گزارش وسط سال با لحن جدی نوشته است: «۵۰ درصد قضیه ثابت شده است».

منین: در انستیتوی ریاضیات مسکو روال مشخصی وجود داشت: من باید می‌نوشتم که مشغول برنامه‌ریزی برای اثبات قضایایی هستم، قضیه‌هایی که در واقع در سال قبل ثابت کرده بودم. آن وقت یک سالِ کامل وقت برای ادامهٔ کار داشتم.

اما این چیزها هیچ اهمیتی ندارد. مادامی که ریاضیاتْ ما را انتخاب می‌کند و تا وقتی که امثال گریگوری پرلمان و الکساندر گروتندیک یافت می‌شوند، ما ایده‌آلهای خود را به‌خاطر خواهیم داشت.

گلفاند: بله، این موضوع پژوهانه در ریاضیات خیلی غریب است. ولی اگر پژوهانه‌ای در کار نباشد، چه سازوکار دیگری ممکن است وجود داشته باشد؟

منین: مگر ما به چه چیزی نیاز داریم؟ حقوق برای افراد و بودجه برای مؤسسه. من از این خوش اقبالی برخوردار بوده‌ام که در ازای دریافت حقوق کار می‌کرده‌ام، نه فقط در مسکو بلکه همچنین به‌مدت پانزده سال در بن. هیچ چیز بدی در این نمی‌بینم.

ولی اینکه سازمانهایی که این حقوقها و بودجه‌ها را تأمین می‌کنند تصمیم گرفته‌اند زبان بازار را به‌کار بگیرند، چیز دیگری است. زبان بازار در سه حوزه باعث تقلیل ارزش و اهمیت آن حوزه‌ها می‌شود: بهداشت، آموزش، و فرهنگ. راجر بیکن از کژاندیشی تحت تأثیر «بتهای بازار» سخن می‌گفت. ریاضیات بخشی از فرهنگ به معنی کلی کلمه است و نه بخشی از صنعت یا خدمات یا چیزهایی از این قبیل.

گلفاند: ولی آیا روشهای غیر بازاری به رکود و عدم پیشروی نمی‌انجامد؟

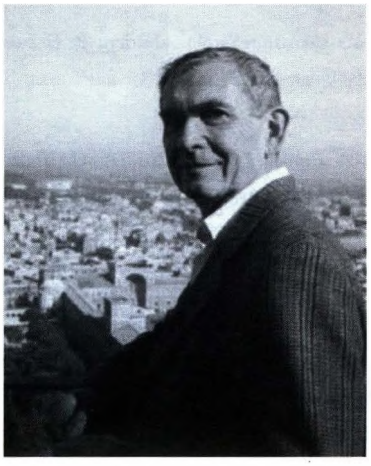
منین: تا حالا رکودی پیش نیامده است.

گلفاند: آنچه می‌گویی برای ریاضیاتْ ممکن است، چون ریاضیات رشتهٔ ارزانی است.

منین: دقیقاً. من همیشه می‌گویم: «چرا باید خودمان را در بازار عرضه کنیم؟ ما اولاً قیمتی در بازار نداریم و ثانیاً منابع طبیعی را مصرف نمی‌کنیم و باعث تخریب محیط زیست نمی‌شویم». به ما حقوق بدهید و ما را به‌حال خود بگذارید. من به‌هیچ وجه نمی‌خواهم این را تعمیم بدهم. فقط در مورد ریاضیات صحبت می‌کنم.

گلفاند: شما از رایانه صحبت کردید. با ظهور رایانه چه تغییری در ریاضیات ایجاد شده است؟

منین: در ریاضیات محض؟ رایانه امکان منحصر به‌فرد اجرای آزمایشهای فیزیکی بزرگْ‌مقیاس را دربارهٔ واقعیات ذهنی به‌وجود آورده است. ما می‌توانیم نامحتمل‌ترین چیزها را امتحان کنیم. دقیق‌تر بگویم، نه نامحتمل‌ترین چیزها، بلکه کارهایی که اویلر حتی بدون رایانه می‌توانست انجام دهد، و گاوس هم می‌توانست. ولی امروز کارهایی را که آنها می‌توانستند انجام دهند هر کسی می‌تواند پشت میزش با رایانه انجام دهد. پس اگر شخص از چنان تخیلی برخوردار نباشد که بعضی از جنبه‌های این واقعیت ذهنی افلاطونی را تشخیص دهد، می‌تواند آزمایش کند. اگر ایدهٔ درخشانی دربارهٔ برابری فلان چیز با بهمان چیز به ذهنش رسید، می‌تواند بنشیند و یک یا دو یا یک میلیون مقدار را محاسبه کند. موضوع به این محدود نمی‌شود. امروز افرادی پیدا شده‌اند که



تصویر ۱ منین با تصویر چشم‌اندازی از رُم، ۱۹۹۸

ذهنی ریاضی با گرایش رایانه‌ای دارند. دقیق‌تر بگویم، این قبیل افراد قبلاً هم بودند ولی بدون استفاده از رایانه، چیزی، به‌گونه‌ای، کم‌وکسر داشتیم. اویلر، تا جایی که ریاضیدانِ صرف بود، از این سنخ اشخاص بود—او بسیار فراتر از ریاضیدانانِ صرف بود—ولی اویلرِ ریاضیدان اگر امروز زنده بود مشتاقانه به سمت رایانه می‌رفت. رامانوجان هم همین‌طور، رامانوجانی که حتی واقعاً ریاضی نمی‌دانست. یا مثلاً همکارم در این انستیتو، دان تساگیر[1]، که ذهن طبیعی و قویِ ریاضی دارد ولی ذهنی که در عین حال، خیلی مستعد کارکردن با رایانه است. رایانه به او کمک می‌کند که این واقعیت افلاطونی را مطالعه کند و اضافه می‌کنم که این کمک بسیار مؤثر است.

من خودم به‌هیچ وجه از این قبیل اشخاص نیستم، ولی می‌فهمم که جریان از چه قرار است و خوشحال می‌شوم همکارانی داشته باشم که بتوانند در این جهت به من کمک کنند. پس، این کاری است که رایانه برای ریاضیات محض کرده است.

گلفاند: دربارهٔ ارتباط بین ریاضیات و فیزیک نظری چه می‌گویید؟ این ارتباط چگونه سازمان می‌یابد؟

منین: این ارتباط طی دورهٔ زندگی خودِ من تغییر کرده است.

توجه به این نکته مهم است که در زمان نیوتن، اویلر، لاگرانژ، و گاوس، این رابطه چنان نزدیک بود که افراد واحدی هم در ریاضیات و هم در فیزیک نظری تحقیق می‌کردند. شخص ممکن بود خودش را بیشتر فیزیکدان یا بیشتر ریاضیدان بداند، ولی یک فرد واحد در هر دو رشته تحقیق می‌کرد. این وضع تا اواخر قرن نوزدهم برقرار بود. در قرن بیستم تفاوتهای مهمی بروز کرد. ماجرای تکوین نظریهٔ نسبیت عام نمونهٔ برجسته‌ای است. اینشتین وقتی در سال ۱۹۰۷ به زبان شهودیِ بسیار درخشان خودش شروع به پروراندن نسبیت عام کرد، نه تنها از ریاضیات مورد نیازش بی‌اطلاع بود بلکه حتی نمی‌دانست چنین ریاضیاتی وجود دارد. پس از سالها وقت که صرف مطالعهٔ کوانتومها کرد، به موضوع گرانش برگشت و در ۱۹۱۲ به دوستش مارسل گراسمان نوشت: «باید به کمک من بیایید وگرنه دیوانه خواهم شد!» عنوان اولین مقالهٔ آنها چنین بود: «طرحی از نظریه‌ای در باب نسبیت عام و نظریه‌ای در

1. Don Zagier

باب گرانش: I بخش فیزیک به قلم آلبرت اینشتین؛ II. «بخش ریاضیات به قلم مارسل گراسمان.»

این اقدامْ نیمه موفق بود. آنها زبان مناسب را یافتند اما معادله‌های لازم را نیافتند. معادله‌های لازم را اینشتین و داوید هیلبرت در ۱۹۱۵ پیدا کردند. هیلبرت آن معادلات را با یافتن چگالیِ لاگرانژیِ صحیح به‌دست آورد که اهمیت این مسأله ظاهراً برای مدتی از نظر اینشتین نیز دور مانده بود. این ماجرا، همکاری مهمی بین دو ذهنِ درخشان بود که متأسفانه تاریخ‌نویسان را به مجادلات احمقانه‌ای دربارهٔ حق تقدم برانگیخت: حال آنکه خودِ این ذهنهای آفریننده دیدگاههای یکدیگر را با خرسندی و سعهٔ صدر می‌پذیرفتند.

به‌نظر من، این ماجرا سر آغاز دوره‌ای بود که ریاضیات و فیزیک از هم جدا شدند. این واگرایی تا حدود دههٔ ۱۹۵۰ ادامه یافت. فیزیکدانها به تفکر دربارهٔ مکانیک کوانتومی پرداختند و در آن به‌فضای هیلبرت، معادله‌های شرودینگر، کوانتوم کنش، اصل عدم قطعیت، و تابع دلتا نیاز پیدا کردند. این نوع کاملاً جدیدی از فیزیک و نظریه‌پردازی فیزیکی بود. هر نوع ریاضیاتی که لازم بود فیزیکدانها خودشان ایجاد می‌کردند.

در این ضمن ریاضیدانها به تحقیق در آنالیز و هندسه پرداختند و در مسیر ایجاد توپولوژی و آنالیز تابعی قدم برداشتند. موضوع مهم در آغاز این قرن، فشار فیلسوفان و منطقدانان بود که سعی می‌کردند دیدگاههای کانتور، تسرملو، وایتهد، و دیگران را دربارهٔ مجموعه‌ها و بینهایت «خلوص ببخشند». نکته‌ای که تا حدی تناقض‌آمیز است، این است که این خط فکری هم به چیزی انجامید که «بحران در مبانی» نامیده می‌شود و هم به علوم رایانه. اینکه زبانی متناهی بتواند اطلاعاتی دربارهٔ چیزهای نامتناهی به‌دست دهد تعارض‌آمیز به‌نظر می‌رسد. آیا چنین چیزی ممکن است؟ در این مدت، مفاهیم و مباحث بسیار مهمی مانند زبانهای صوری، مدلها و صدق، سازگاری، و (نا)تمامیت عرضه شدند ولی کاملاً جدا از مشغلهٔ ذهنی فیزیکدانها در آن زمان.

الن تورینگ ظاهر شد که به ما بگوید: «مدل استنتاج ریاضی یک ماشین است نه یک متن». یک ماشین! ایدهٔ درخشانی بود. طی ده سال بعد، ماشین فون نویمان را داشتیم و اصل جدایی برنامه‌ها (نرم‌افزار) و سخت‌افزار را. بیست سال دیگر هم گذشت و آنگاه همه چیز آماده بود.

طی ثلث اول قرن بیستم، اشخاصی که در هر دو رشته کار می‌کردند بسیار معدود بودند. فون نویمان بی‌شک یکی از این اشخاص بود و من کسی را در قرن بیستم نمی‌شناسم که ذهنش در حد او در هر دو رشتهٔ ریاضی و فیزیک فعال بوده باشد. ریاضیات و فیزیک به موازات هم توسعه می‌یافتند و پس از مدتی از توجه به یکدیگر غافل شدند. در دههٔ ۱۹۴۰ فاینمن انتگرال مسیریِ شگفت‌انگیزش را عرضه کرد که وسیلهٔ جدیدی برای کمّی‌سازی چیزهاست، و به شیوهٔ ریاضی غریبی روی آن کار کرد—چیزی مانند برج ایفل را تصور کنید که در هوا معلق است و روی پایه‌ای قرار ندارد. این ساختار وجود دارد و خیلی هم کاراست ولی روی چیزی که آن را بشناسیم نایستاده است. سپس، در دههٔ ۱۹۵۰ نظریهٔ میدان کوانتومی نیروهای هسته‌ای پدیدار شد، و معلوم شد که میدانهای کلاسیک متناظر از لحاظ ریاضی، فرمهای هموستار هستند. آنها معادلهٔ کلاسیک کنش پایا را در هندسهٔ دیفرانسیل می‌شناختند. معادلهٔ یانگ-میلز وارد صحنه شد. ریاضیدانها با تردید به فیزیکدانها نگریستند و فیزیکدانها به ریاضیدانها. نکتهٔ عجیب—و برای من دلپذیر—این بود که معلوم شد بیشتر از آنکه فیزیکدانها از ما یاد بگیرند ما از آنها یاد می‌گیریم. آشکار



تصویر ۲ منین، ایتالیا، ۱۹۹۴

شد که آنها به کمک نظریهٔ میدان کوانتومی و ابزار انتگرال فاینمن ابزارهایی شناختی پدید آورده‌اند که به آنها امکان می‌دهد حقایق ریاضی را یکی پس از دیگری کشف کنند. اثباتی در کار نبود، هر چه بود کشف بود. بعد ریاضیدانها نشستند، سخت به فکر افتادند که کاری بکنند، و بعضی از این کشفیات را به شکل قضیه درآوردند و شروع به اثبات آنها به شیوهٔ دقیق خود کردند. این نشان داد که آنچه فیزیکدانها می‌کنند از لحاظ ریاضی معنی‌دار است. فیزیکدانها می‌گویند: «ما اینها را همیشه می‌دانستیم، ولی البته از توجه شما متشکریم». اما در نتیجه، ما به‌طور کلی از فیزیکدانان آموختیم که چه پرسشهایی مطرح کنیم و چه پاسخهایی را می‌توانیم مفروض بگیریم—پاسخهایی که قاعدتاً درست از آب درمی‌آیند. فریمن دایسن ریاضیدان و فیزیکدان سرشناس در سخنرانی گیبس[1] خود با عنوان «فرصتهای از دست‌رفته» (۱۹۷۲) موارد متعددی را به‌خوبی توصیف کرده است که «ریاضیدانها و فیزیکدانها شانس اکتشاف را به‌خاطر گفتگو نکردن با یکدیگر از دست دادند». به‌خصوص برای من این نکته جالب بود که خودش «شانس کشف رابطهٔ عمیق‌تری بین صورتهای پیمانه‌ای و جبرهای لی را فقط به این دلیل از دست داد که دایسنِ نظریهٔ اعداددان و دایسنِ فیزیکدان با یکدیگر گفتگو نکردند».

سپس ویتن در صحنه ظاهر شد که استعدادی منحصربه‌فرد در بیرون کشیدن ریاضیاتی پرشکوه از این برج ایفلِ آویزان در هوا دارد. در ویکی‌پدیا دیدم که او قبل از دریافت مدرک دکتری فیزیک در ۱۹۷۶، هنگامی که بیست‌وپنج‌ساله بود، اول به ژورنالیسم سیاسی، و بعداً به اقتصاد گرایش داشت، اما بالاخره به ندای ریاضیات و فیزیک پاسخ مثبت داده است.

او صاحب چنان دستگاه ذهنی شگفت‌انگیزی است که ریاضیاتی با استحکام و نیرویی عجیب، اما برخاسته از دیدگاههای فیزیکی، تولید می‌کند. ولی نقطهٔ شروع دیدگاههای او دنیای فیزیکی، آن‌طور که فیزیک تجربی توصیف می‌کند، نیست بلکه ابزارهایی ذهنی است که فاینمن، دایسن، شرودینگر، تومناگا، و بسیاری فیزیکدانهای دیگر برای تبیین این دنیا پدید آورده‌اند—ابزارهایی که کاملاً ریاضی‌اند اما بنیادِ ریاضی ضعیفی دارند. این

1. Gibbs lecture

مجموعهٔ ابزارها به‌هیچ‌وجه بی‌ارزش نیست بلکه باید دوباره بگویم که، ساختار عظیمی است بدون پایه و مبنا؛ یا لااقل پایه‌ای از آن نوع که ما به آن عادت کرده‌ایم ندارد.

گلفاند: پس همه به این عادت کرده‌اند که مبنایی در کار نباشد و با آن کنار می‌آیند، یا سعی می‌کنند مبنایی ایجاد کنند؟

منین: هیچ یک از اقداماتی که تاکنون انجام شده در حدی که از کلیت کافی برخوردار باشد موفقیت‌آمیز نبوده است. ریاضیدانها تقریبهایی از آنچه می‌توان انتگرال فاینمن نامید به‌دست داده‌اند؛ مثلاً انتگرال‌گیری وینر که در دههٔ ۱۹۲۰ ابداع شد و برای بررسی حرکت براونی به‌کار رفت که در مورد آن نظریهٔ ریاضی مستحکمی وجود دارد. همچنین گونه‌های جالب توجهی از این نظریه وجود دارد ولی نظریه محدودتر از آن است که همهٔ کاربردهای متنوع انتگرال فاینمن را در برگیرد. اگر به‌عنوان نظریه‌ای ریاضی به آن نگریسته شود، استحکام و قدرتش به‌هیچ‌وجه قابل مقایسه با دستگاهی که امروز ریاضیات واقعاً مهم را تولید می‌کند نیست.

من نمی‌دانم که وقتی ویتن کارکردن روی این ابزارها را متوقف کند چه بر سرشان خواهد آمد، ولی خیلی امیدوارم که اینها به‌زودی در دنیای ریاضی رسوخ کند. حوزهٔ کاری کوچکی به‌وجود آمده است که هدف آن اثبات قضایایی است که ویتن حدس زده است، به‌خصوص در نظریهٔ میدانهای کوانتومی توپولوژیک (TQFT)، و نتایج پر بار و معروفی به‌بار آورده است.

در واقع، توپولوژی هوموتوپیک و TQFT چنان نزدیک هم رشد می‌کنند که کم‌کم فکر می‌کنم در حال تبدیل‌شدن به زبان مبانی جدید هستند.

این چیزها قبلاً هم پیش آمده است. نظریهٔ کانتور دربارهٔ بینهایت هیچ پایه‌ای در ریاضیات قدیم‌تر نداشت. شما می‌توانید در این موضوع مناقشه کنید، ولی این نظریه نوع جدیدی از ریاضیات بود، راه جدیدی برای فکرکردن دربارهٔ ریاضیات، و شیوهٔ تازه‌ای برای تولید ریاضیات. در تحلیل نهایی، علی‌رغم جروبحثها و تناقضها، گروه بورباکی دنیای کانتور را بی‌هیچ عذر و بهانه‌ای پذیرفت. آنها «مبانی عملگرایانه» را پدید آوردند که دهها سال است مورد قبول همهٔ ریاضیدانانِ اهل عمل بوده است و در مقابل «مبانی تجویزی» قرار دارد که منطقدانان یا ساختگرایان سعی می‌کرده‌اند بر ما تحمیل کنند.

گلفاند: ظاهراً ریاضیدانانی که به زبان روسی مطالبی دربارهٔ بورباکی نوشته‌اند نظرات متفاوتی دارند. بعضی از آنها از همهٔ این کارِ مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها سخت انتقاد کرده‌اند. آنها از جدایی بورباکی از فیزیکدانها، که می‌توانند امکانات چشمگیری در برابر ما قرار دهند، انتقاد دارند.

منین: هیچ نکتهٔ خاصی در این انتقادها نیست. اینکه به بورباکی می‌تازند، نشان می‌دهد که نمی‌دانند جریان از چه قرار است. بورباکی یک گام تاریخی برداشت، همان‌طور که خود کانتور برداشته بود. ولی این گام، هر چند نقش عظیمی داشته است، خیلی ساده است. کار بورباکی ایجاد مبانی فلسفی برای ریاضیات نیست بلکه ایجاد یک زبان ریاضیِ عام و مشترک برای احتمالدانها، توپولوژیدانها، متخصصان نظریهٔ گراف، آنالیز تابعی، هندسهٔ جبری، ...، و نیز منطقدانهاست.

شما با چند کلمهٔ مشترک ابتدایی شروع می‌کنید: «مجموعه، عنصر، زیرمجموعه، ...»، بعد ساختارهای بنیادی مورد مطالعهٔ خود: «گروه، فضای توپولوژیک، زبان صوری ...» را تعریف می‌کنید. نامهای آنها لایهٔ دوم مجموعهٔ اصطلاحات شما را تشکیل می‌دهد. ممکن است لایهٔ سوم، چهارم، یا پنجم هم درکار باشد، ولی قواعد بنیادیِ ساخت، مشترک است و ریاضیدانها می‌توانند با هم بنشینند و با تفاهم کامل صحبت کنند: «زبان صوری مجموعه‌ای از حروف است به‌اضافهٔ زیرمجموعه‌ای از واژه‌های درست‌ساخت ــ جمله‌ها به‌اضافهٔ رابطها و سورها، به‌اضافهٔ قواعد استنتاج ...». با توجه به این چشم‌انداز، مثلاً، قضیهٔ ناتمامیت گودل هر نوع راز و رمز خود را از دست می‌دهد. این قضیه وقتی پیچیده و رازآمیز است که شما آن را از لحاظ فلسفی بررسی کنید ولی در واقع، این قضیه چیزی نمی‌گوید جز اینکه یک ساختار معین تعداد متناهی مولد ندارد. از این ساختارها در ریاضی زیاد است و این هم یکی دیگر. عمق قضیه وقتی آشکار می‌شود که معناشناسی خود ارجاعیِ خاصی به آن اضافه کنید. آن وقت وارد مبانی فلسفی ریاضیات می‌شود.

بورباکی در واقع کاری متفاوت با آنچه این آقایان فکر می‌کنند انجام داد. (در اینجا از بحث راجع به تأثیر بورباکی بر آموزش ریاضی در فرانسه صرف‌نظر می‌کنم: این موضوع مانند همهٔ مسائل جامعه‌شناختی بحث و مناقشهٔ بسیار به‌دنبال دارد.)

گلفاند: جایگاه فرضیه‌ها در ریاضیات چیست؟ مثلاً در مورد قضیهٔ آخر فرما، در دوران اخیر کسی سعی نکرده مثال ناقضی برای آن بیاورد؛ همه قبول داشته‌اند که درست است و کسی باید آن را ثابت کند. و فرضیه‌های معروف زیادی از این قبیل، به‌خصوص در نظریهٔ اعداد، هست.

منین: من موضعی در این مورد دارم که مرا از بسیاری از همکاران خوبم جدا می‌کند. استدلالهای زیادی علیه نظرم در این باره شنیده‌ام. باید برایتان توضیح بدهم که تصورم راجع به ریاضیات چیست. من افلاطون‌گرای احساسی هستم (نه افلاطون‌گرای عقلی. هیچ استدلال عقلایی به نفع افلاطون‌گرایی وجود ندارد). پژوهش ریاضی درنظر من، به هر نحوی که باشد، از نوع کشف است نه ابداع و اختراع، من قلعهٔ عظیمی، یا چیزی شبیه آن را تصور می‌کنم که شما شبحی از آن را به‌تدریج در میان مه غلیظ می‌بینید. اینکه دیده‌های خود را چطور فرمول‌بندی کنید بستگی دارد به نوع تفکر شما، حدّ و حدود آنچه دیده‌اید، شرایط و اوضاع اجتماعی اطراف شما، و غیره.

آنچه دیده‌اید، ممکن است به‌صورت حضور یا عدم حضور چیزی فرمول‌بندی شود. به معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ توجه کنید. خوشبختانه می‌توانیم همهٔ جوابهای صحیح آن را با یک فرمول نشان دهیم. این موضوع، به معنایی، بر دیوفانتوس هم معلوم بود. وقتی این کار را کردید، این سؤال پیش می‌آید: خُب، ولی در مورد توانهای سوم جوابها چیستند؟ جستجو می‌کنید و هیچ جوابی پیدا نمی‌کنید. عجب! و در مورد توانهای چهارم؟ باز هم هیچ. خُب. آیا ممکن است برای هیچ توان بالاتری جوابی وجود نداشته باشد؟ و به این ترتیب، تفاوتی بین توان دوم و توانهای سوم، چهارم، و بالاتر کشف می‌کنید. این است تاریخچهٔ قضیهٔ آخر فرما. ولی وقتی مسأله‌ای طرح می‌کنید حاکی از اینکه فلان با بهمان برابر است یا فلان و بهمان اصلاً رخ نمی‌دهد، هرگز از قبل نمی‌دانید که مسألهٔ خوبی است یا نه ــ تا وقتی که مسأله حل شود یا تقریباً حل شود.

مسأله‌ها کیفیاتی دارند. در نظریهٔ اعداد، مسأله‌های زیادی هستند که صورت آنها به زبان مقدماتی قابل بیان است. مسألهٔ فرما را می‌دانیم که مسألهٔ فوق‌العاده‌ای بود. این را از آنجا می‌دانیم که طی تاریخ آن، از بیان تا حل مسأله، معلوم شد که این مسأله با مفاهیم زیادی ارتباط دارد که از قبل

به هم مربوط نبودند، و برای حل آن، تحقیق در آن مفاهیم اساسی لازم بود. معلوم شد که این مسأله، جزئی از عمارتی عظیم است.

اما می‌توانیم مسأله‌های دیگری را درنظر بگیریم، مثلاً دربارهٔ اعداد تام یا عددهای اول دوقلو. آیا تعداد اعداد تام یعنی عددهایی که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های خودشان هستند، نامتناهی است؟ همین‌طور آیا بینهایت جفت عدد اول وجود دارد که تفاضلشان ۲ است؟ تا به امروز هیچ کس نظریهٔ جالبی حول و حوش این مسأله‌ها نپرورانده است، هر چند صورت آنها بدتر از صورت قضیهٔ آخر فرما به‌نظر نمی‌رسد.

گلفاند: آیا این ویژگیها مربوط به خود مسأله‌هاست یا موضوع این است که کسی، به‌دلیلی اجتماعی، فعالانه در آنها تحقیق نکرده است؟

منین: من به‌عنوان افلاطون‌گرا می‌دانم که ویژگیها مربوط به ذات مسأله‌اند ولی ممکن است در هنگام صورت‌بندی مسأله قابل تشخیص نباشند و در فرایند تحول تاریخی نمایان شوند.

من، تا حدی به این دلیل، طرفدار مسأله نیستم. حل مسأله مستلزم مهارت در پیداکردن یک حقیقت جزئی است ولی شما نمی‌دانید که آن حقیقت، جزئی از کدام کل است. من از موضع افلاطون‌گرایی طرفدار برنامه‌های کامل هستم. برنامه وقتی مطرح می‌شود که یک ذهن نیرومند ریاضی چیزی را به‌صورت یک کلّ می‌بیند، یا نه به‌صورت یک کُل، ولی فراتر از حد یک جزء خاص. ولی اول فقط به‌صورت مبهم دیده می‌شود.

گلفاند: یعنی به‌جای یک جزء مجزا، کل یک ساختمان را به‌طرز مبهمی می‌بینید.

منین: بله، و بعد شروع می‌کنید به پس‌زدن غبارها، یافتن دوربینهای مناسب، جستجوی موارد تشابه با بناهایی که قبلاً کشف شده‌اند، خلق زبانی برای چیزهایی که به‌طرز مبهمی می‌بینید، و از این قبیل کارها. این همان چیزی است که من موقتاً آن را برنامه می‌نامم.

نظریهٔ کانتور دربارهٔ بینهایت، چنین برنامه‌ای بود که البته رویداد نادری بود: اینکه مراتبی از بینهایت وجود دارد، هم یک برنامه بود و هم یک کشف. و، مثلاً، فرضیهٔ پیوستار ــ اینکه آیا بین بینهایت شمارا و پیوستار چیزی وجود دارد یا نه ــ پرسشی است که معلوم شده کم‌اهمیت‌تر از بسیاری پرسشهای دیگر است هر چند بسیار انگیزه بخش بوده است. اگر کانتور فقط این پرسش را مطرح کرده بود، کار خوبی نکرده بود ــ اهمیت آن قاعدتاً در آینده معلوم می‌شد. ولی او کار بسیار بیشتری انجام داد و بی‌درنگ یک برنامهٔ کامل تحقیق را آغاز کرد.

فرضیهٔ ویل دربارهٔ تعداد جوابهای معادله‌ای به پیمانهٔ p نیز از این برنامه‌هاست که در دورهٔ زندگی من شهرت یافت. او بی‌درنگ متوجه تشابه مهمی شد: در حوزه‌هایی که او بررسی می‌کرد خلأیی وجود داشت ولی در جاهای دیگر نظریهٔ کاملی، نظریهٔ (کو)هومولوژی، وجود داشت که قضیهٔ لفشتس دربارهٔ نقاط ثابت نگاشتها از آن نتیجه می‌شد. نیمی از عمر گروتندیک و چند نفر از اطرافیان او از جمله پیر دلینی، صرفِ پرکردن آن خلأ شد، تشابه دقیق شد، و هندسهٔ جبری نوین پدید آمد و در نتیجهٔ آن بسیاری چیزهای دیگر هم اتفاق افتاد: نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان تنها زبان ریاضیات شروع به کنار رفتن کرد و رسته‌ها، با همهٔ زیرساختارهای متعاقب آنها، کم‌کم جای مجموعه‌ها را درکارکرد قدیمی‌شان گرفتند.

به‌تدریج فرمها و ساختارهای قدیمی، مانند اعداد طبیعی، جای خود را به اشیایی هندسی می‌دهند که با نیمکرهٔ راست مغز مجسم می‌شوند ... تصویر هوموتوپیک و «راست نیمکره‌ایِ» اشیا به‌صورت شهود بنیادی درمی‌آید و اگر بخواهید مجموعهٔ گسسته‌ای به‌دست آورید، به سراغ مؤلفه‌های همبند فضایی می‌روید که فقط با تقریب هوموتوپی تعریف می‌شود.

در منطق از برنامهٔ هیلبرت می‌توان نام برد، هر چند این برنامه خیلی خوشبینانه صورت‌بندی شده بود. او می‌خواست ثابت کند که هر چه صادق است، اثبات‌پذیر است. او نمای عمارت را درست ندیده بود، ولی این برنامه به‌هرحال پیش رفت. کارهای گودل، تورینگ، چرچ، و فون نویمان، رایانه و علم رایانه، تا اندازه‌ای از برنامهٔ هیلبرت نشأت گرفته است.

مسألهٔ چهاررنگ به‌نظر من نمونه‌ای از مسألهٔ بد است که به برنامه‌ای منجر نشد، این مسأله را به کمک رایانه حل کردند و ازاین‌رو تا امروز شمشیرها در مورد آن غلاف نشده است. ولی نکتهٔ مهم‌تر از حل آن، این است که تا به‌حال هیچ کس نتوانسته است آن را در هیچ نوع مبحثی که از غنای کافی برخوردار باشد بگنجاند. در نتیجه، این مسأله فقط وسیله‌ای برای تمرین فکری است.

به این دلایل، کلاً مسأله، به خودی خود، مورد علاقهٔ من نیست. ولی وقتی مسأله‌ای در قالب یک برنامه مطرح می‌شود می‌تواند مسألهٔ خوبی باشد یعنی وقتی از پیش می‌دانیم که این جزء متعلق به کدام کل است. فرضیهٔ ریمان، بی‌شک، مسأله‌ای است که ریمان آن را در قالب برنامه‌ای طرح کرده است هر چند طی یک قرن و نیم گذشته متخصصانی که دید محدود نظریهٔ اعدادی داشته‌اند همواره به آن چشم مسألهٔ منفرد بسیار مهم و مبارزطلبی می‌نگریسته‌اند. من تا حدی نگرانم که اولین اثبات آن ممکن است اثباتی با استفاده از روشهای آنالیزیِ بی‌مایه باشد. این اثبات البته هر جایزهٔ قابل تصوری را خواهد برد، در هر روزنامه‌ای در هر جای جهان با هیجان و ابزار احساسات عنوان خواهد شد، و همهٔ اینها گمراه‌کننده خواهد بود چون راه‌حل «درست و حسابی» باید در قالب وسیع‌تری عرضه شود که آن را می‌شناسیم. ما حتی چندین رویکرد به حل این مسأله را می‌شناسیم. با این حال، کاملاً ممکن است که نخستین حل آن بی‌مایه و فاقد هر نوع جاذبه‌ای باشد.

گلفاند: آیا فرضیه‌ای هست که همه کس درستی آن را بدیهی می‌دانسته‌اند ولی مثال ناقصی برای آن پیدا شده است؟

منین: فرضیهٔ دیرپایی به‌نظرم نمی‌رسد که ریاضیدانها به آن اعتقاد داشته باشند و مثال ناقصی برایش پیدا شده باشد.

گلفاند: اگر کسی به‌جای اثبات قضیهٔ آخر فرما مثال ناقضی برای آن می‌یافت، واقعهٔ تکان‌دهنده‌ای بود یا فقط به این معنی بود که مسألهٔ فرما مسألهٔ خوبی نیست؟

منین: باز هم مسألهٔ خوبی می‌بود چون محرک توسعهٔ مبحثی بوده است. حال وقتی کسی آن را در این مبحث حل می‌کند، اینکه جواب منفی باشد

یا مثبت، اهمیت ثانوی دارد. اهمیت مسأله در درجهٔ اول به این دلیل است که به ایجاد زمینهٔ مهمی کمک کرده است.

اگر مثال ناقضی پیش از دههٔ ۱۹۶۰ پیدا می‌شد، همه به فکر فرو می‌رفتند. اما اگر چنین مثالی در دههٔ ۱۹۷۰ پیدا می‌شد، موضوع خیلی جالب و تا حدی تکان‌دهنده بود چون در آن زمان روشن شده بود که می‌توان قضیهٔ فرما را از چندین حدس دیگر در ارتباط با برنامهٔ لنگ‌لندز استنتاج کرد، حدسهایی پردامنه که به هیچ‌وجه ساده نبودند. در آن زمان می‌دانستند که اگر آن حدسها درست باشند، قضیهٔ فرما هم درست است. البته اگر مثال ناقضی برای قضیهٔ فرما پیدا می‌شد، همهٔ آن حدسها غلط از آب در می‌آمدند، و این به‌معنای تخریب نظام بسیار اساسی‌تر و پیچیده‌تری از باورها بود. چنین پیشامدی، توجه زیاد و اقدامات گسترده‌ای را موجب می‌شد تا بفهمیم که اشکال کار در کجا بوده است؛ لازم می‌آمد بخش بزرگی از بنا را بازسازی کنیم. همهٔ اینها در نتیجهٔ کشف مثال ناقض پیش می‌آمد.

گلفاند: آیا چنین مثال ناقض قدرتمندی در تاریخ پیدا شده است؟ شاید قضیهٔ گودل؟ چون پیش از آن تصور می‌کردند هر گزارهٔ صادقی را می‌توان ثابت کرد.

منین: هیلبرت چنین تصوری داشت؛ نمی‌دانم چه تعداد از دیگران این اعتقاد را داشته‌اند. ولی به این برنامه باید درست نگاه کرد. اولین نتیجهٔ مهم آن ساختن مبحثی ریاضی است که در آن می‌توان مسائل مربوط به صدق و اثبات‌پذیری را با همان دقت مسائل ریاضی، نه به شکل مبهم فلسفی، صورت‌بندی کرد. بنا به طبیعت این امر، اول باید «خودْارجاعی بودن» را معرفی کرد و بقیهٔ کار از نوع خلاقیت و ابداع است، که گودل و تارسکی آن را بسیار خوب نشان داده‌اند.

در آغازِ صورت‌بندی این برنامه، حدسهای غلطی دربارهٔ سرانجام آن می‌زدند، و پیداشدن مثالهای ناقض نشان داد که آن حدسها خطا بوده‌اند.

گلفاند: چه دریافتهای نادرست و جالب دیگری وجود داشته است؟

منین: مواردی بوده است که نشان‌دهندهٔ فقدان تخیل انسانی است. در تاریخ ریاضی، این گونه موارد را مثال ناقض نمی‌نامند بلکه پارادکس می‌گویند. مثلاً قضیهٔ باناخ-تارسکی را در نظر بگیرید. با یک گوی شروع می‌کنید و معلوم می‌شود که می‌توانید آن را پنج تکه کنید، تکه‌ها را طور دیگری کنار هم بگذارید و دو تا گوی به‌دست بیاورید که اندازهٔ هر کدام با اندازهٔ گوی اول یکی است. این ساختار چیزهای زیادی به ما می‌گوید. مثلاً در نظر غالبِ منتقدان رویکرد نظریهٔ مجموعه‌ای این بدان معنی است که اگر این دیدگاه شخص را به چنین حکمی می‌رساند، پس ریاضیات نیست بلکه مهملات است. درنظر منطقدانان، مثالی از یک کاربرد اصل موضوع انتخاب تسرملوست که به تناقض می‌انجامد و بنابراین، استدلالی علیه پذیرش آن است، ولی جدا از همهٔ اینها، یک مطلب زیبای هندسی است. یک بار از من خواسته شد در یک موزهٔ هنری برای مخاطبان عام سخنرانی کنم، و فکر کردم پارادکس باناخ-تارسکی موضوع مهمی برای نشان دادن «هنر انتزاعی ریاضیات» است. نکتهٔ اصلی بحث من این بود که نباید «تکه‌ها» را اشیای مادی جامدی درنظر بگیریم بلکه باید آنها را «ابرها»یی از نقاط تجسم کنیم. باید تصور کنیم که گوی مرکب از نقطه‌های تقسیم‌ناپذیر است. شما مجازید هر زیرمجموعه‌ای از این نقاط را یک «تکه» بنامید، می‌توانید آن را جابه‌جا کنید و حول خودش بچرخانید ولی به‌صورت یک شیء واحد، به‌طوری که فواصل هر دو نقطهٔ آن ثابت بماند. پس شما کره را به تکه‌هایی که جسمیت دارند تجزیه نمی‌کنید بلکه به پنج ابر تجزیه می‌کنید. این ابرها می‌توانند درهم فرو روند. آنها نه حجم دارند و نه وزن، و اشیای تخیلی فوق‌العاده جالبی برای تخیلِ بسیار پرورش‌یافته هستند.

چرا تناقض آشکاری وجود ندارد؟ آیا تعداد نقاط دو گوی بیشتر از یک گوی نیست؟ نه، تعداد نامتناهیِ نقاط دوگوی و یک گوی دقیقاً یکی است. این را به‌آسانی می‌شود ثابت کرد. من این را برای نوه‌ام توضیح دادم که روی یک ورقهٔ کاغذ همان قدر نقطه هست که روی دیوار اطاق. «یک ورقه کاغذ را در دست بگیر و آن طوری نگه‌دار که دیوار را اصلاً نبینی و کاغذْ دیوار را از نظرت مخفی کند. حال اگر یک پرتو نور از هر نقطهٔ روی دیوار بتابد و به چشم تو برسد، باید از ورقهٔ کاغذ بگذرد، هر نقطهٔ دیوار متناظر با نقطه‌ای از ورقهٔ کاغذ است، پس باید تعداد نقاط دیوار و کاغذ یکی باشد».

پیام این بحث این است که اگر گردوغباری ایجاد کنید که ذرات آن نقطه‌های گوی اولیهٔ شما باشند، تعداد کافی نقطه برای پرکردن دو، یا سه، یا حتی بینهایت گوی با اندازه‌های دلخواه وجود خواهد داشت. مشکل وقتی پیش می‌آید که سعی می‌کنید ابرهایی از نقاط را تعریف کنید که باید حرکت کنند، بچرخند، بازآرایی شوند تا به‌صورت دو گوی درآیند. این یک نوع ترفند ریاضی است، بسیار زیباست، ولی اگر بخواهید آن را خوب توضیح دهید، به وقت بسیار بیشتری نیاز دارید.

پس این مثالِ ناقص نیست بلکه پارادکسی است که اذهان پرورش نیافته را گیج می‌کند.

چند تا از این جور پارادکسها در جریان گذار از ریاضیات کلاسیک به ریاضیات مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها کشف شد. قضیه‌ای مطرح شد که یک خم می‌تواند مربع را پر کند. چیزهای زیادی از این قبیل بود، و ما مطالب زیادی از آنها یاد گرفتیم.

به‌کارگرفتن زبان بازار در سه حوزه باعث تقلیل ارزش و اهمیت آن حوزه‌ها می‌شود: بهداشت، آموزش، و فرهنگ ... ریاضیات بخشی از فرهنگ به معنی کلی کلمه است و نه بخشی از صنعت یا خدمات یا چیزهایی از این قبیل.

خیلیها فکر می‌کردند اینها فانتزی و خیال‌پردازیِ محض است. اما تخیلی که با مفاهیم جدید پرورش یافته بود به شخص امکان می‌داد رفتار «پارادکس‌وار» سریهای فوریه را، برای فهم حرکت براونی، تشخیص دهد و این تشخیص بود که به ابداع موجکها انجامید، و معلوم شد اینها به‌هیچ‌وجه خیال‌پردازی نبوده بلکه تقریباً ریاضیات کاربردی بوده است.

گلفاند: در بیست سال آینده چه پیش خواهد آمد؟

منین: من وقوع هیچ تحول انقلابی را پیش‌بینی نمی‌کنم چون به‌نظر من در ۳۰۰ سال گذشته هم چنین تحولی رخ نداده است. هر زمان ایده‌های شهودی تازه و نیرومندی سربلند کرده، ریاضیات به‌نحو غریبی خصلت خود را محفوظ نگه‌داشته است. این هم موضوع یک سخنرانی است که هنوز ایراد نکرده‌ام. دوست دارم سیر تکامل ایدهٔ اعداد صحیح را از دورترین اعصار تا مفهوم پیچیدگی کولموگوروف نشان دهم، و این کار را بدون توسل به ریاضیات

جدید هم می‌توان انجام داد. ایدهٔ واحدی طی قرون و اعصار باقی‌مانده است. در این یا آن دوره کمی، تغییر کرده، شیوهٔ بیان آن عوض شده، ولی با این همه، اساساً بی‌تغییر مانده و به حیات خود ادامه می‌دهد. هیچ چیزی در ریاضیات فراموش نمی‌شود.

بنابراین، من هیچ اتفاق خارق‌العاده‌ای را برای بیست سال آینده پیش‌بینی نمی‌کنم. احتمالاً بازسازی چیزی که آن را «مبانی عملگرایانهٔ ریاضیات» می‌نامم ادامه خواهد یافت. منظورم، مدون کردن ابزارهای شهودیِ کارامد جدید مانند انتگرال مسیری فاینمن، رسته‌های مراتب بالاتر، «جبر متهورانهٔ جدید» نظریه‌پردازان هوموتوپی، و نیز ظهور نظامهای ارزشیِ نو و اَشکال پذیرفته‌شدهٔ جدید عرضهٔ نتایج است که در اذهان و در مقاله‌های پژوهشی ریاضیدانانِ دست‌اندرکار، اینجا و آنجا در هر زمان خاص وجود دارد.

وقتی «مبانی عملگرایانهٔ» ریاضیات به صراحت بیان شود، که این امر معمولاً به‌صورتهای مختلفی انجام می‌شود، طرفداران این گونه‌های مختلف شاید با هم به مشاجره برخیزند، ولی تا جایی که اینها به‌طور کلی در ذهن ریاضیدانانِ فعال حضور دارد همیشه چیز مشترکی بین آنها هست. پس از کانتور و بورباکی، ما هر چه بگوییم، ریاضیات مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها در ذهن ما هست. وقتی شروع به صحبت‌کردن دربارهٔ چیزی می‌کنم، آن را برحسب ساختارهای بورباکی‌وار توضیح می‌دهم: فضاهای توپولوژیک، فضاهای خطی، میدان اعداد حقیقی، توسیعهای جبری متناهی، گروههای بنیادی. کاری غیر از این نمی‌توانم بکنم. وقتی دربارهٔ مفهوم کاملاً جدیدی فکر می‌کنم، می‌گویم که مجموعه‌ای است با فلان ساختار؛ ساختار نظیر آن قبلاً وجود داشته است به‌نام بهمان، و ساختار دیگری با نامی دیگر؛ من اصول موضوع اندک متفاوتی را به‌کار می‌برم و مفهوم مورد نظر را فلان و بهمان می‌نامم. یعنی با مجموعه‌های گسستهٔ کانتور شروع می‌کنیم و چیز بیشتری را به سبک بورباکی بر آن تحمیل می‌کنیم.

اما تغییرات روانشناختی اساسی هم به وقوع می‌پیوندد. امروز این تغییرات به شکل ارائهٔ قضیه‌ها و نظریه‌های پیچیده‌ای صورت می‌گیرد که با توجه به آنها معلوم می‌شود فرمها و ساختارهای قدیمی، مانند اعداد طبیعی، جای خود را به اشیایی هندسی می‌دهند که با نیمکرهٔ راست مغز تجسم می‌شوند.

به‌جای مجموعه‌ها یعنی توده‌هایی از عناصر گسسته، انواعی از فضاهای مبهم را تجسم می‌کنیم که می‌توانند بسیار تغییر شکل یابند، یکی بر دیگری نگاشته شود، و در این حال، آن فضای خاص مهم نیست بلکه آن فضا با تقریب تغییر شکل درنظر گرفته می‌شود. اگر واقعاً بخواهیم به اشیای گسسته برگردیم، به مؤلفه‌های پیوسته نظر می‌کنیم، قطعاتی که شکل یا حتی بعد آنها مهم نیست. قبلاً همهٔ این فضاها را مجموعه‌های کانتورِ مجهز به توپولوژی درنظر می‌گرفتند که نگاشتهای آنها نگاشتهای کانتور بودند و بعضی از آنها هوموتوپی‌هایی بودند که باید تجزیه می‌شدند و نظایر اینها.

من قویاً عقیده دارم که در ضمیر جمعی ریاضیدانها حرکتی در جهت عکس در جریان است. تصویر هوموتوپوپیک و راست نیمکره‌ایِ اشیا به‌صورت شهود بنیادی درمی‌آید، و اگر بخواهید مجموعهٔ گسسته‌ای به‌دست آورید، به سراغ مؤلفه‌های همبند فضایی می‌روید که فقط با تقریب هوموتوپی تعریف می‌شود.

به‌عبارت دیگر، نقاط کانتور ــ تقریباً از آغاز ــ تبدیل به مؤلفه‌های همبند یا ربایندها و نظایر آنها می‌شوند. مسأله‌های کانتور دربارهٔ بینهایت عقب می‌روند و در پس‌زمینه جای می‌گیرند: از آغازکار، تصویرهای ذهنی ما آنقدر نامتناهی است که اگر بخواهید چیزی متناهی از آنها بیرون بیاورید، باید آنها را بر بینهایت دیگری تقسیم کنید.

این مشابه است با تصوری که از انتگرال فاینمن داریم. این انتگرال در وهلهٔ اول مانند یک علامت رمزی است که تعبیر و تفسیر می‌طلبد. دو، سه، یا چهارگام اول تعبیر، همگی موردی و متکی به تشابهات متعدد با موارد دیگری هستند که ریاضیاتِ شسته‌رفته‌ای دارند («مدلهای اسباب‌بازی»). در مرحلهٔ خاصی، ممکن است یک سری صوری به‌دست آورید که نه تنها واگراست، بلکه مرکب از جمله‌هایی است که خودشان انتگرالهایی واگرا (هرچند متناهی‌ْبعد) هستند. بعد شما هر جمله را به‌طور مصنوعی منظم می‌کنید، آن را متناهی می‌کنید. اما این سری، در حالت کلی، باز هم واگراست. پس تعبیری برای سری ابداع می‌کنید. و بالاخره، پس از اینکه راه خود را به زور از میان انبوه بینهایتها گشودید، یک پاسخ متناهی به‌دست می‌آورید. پاداش کار، رشته‌ای از قضیه‌های شگفت‌انگیز ریاضی است. من در این امر تشابهی با بازسازی مبانی عملگرایانه برحسب نظریهٔ رسته‌ها و توپولوژیِ هوموتوپیک می‌بینم.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

* * * * * *

• Mikhail Gelfand, "We do not choose mathematics as our profession, it chooses us: Interview with Yuri Manin", *Notices Amer Math. Soc.*, (10) **56** (2009) 1268-1274.

هر که شاخ را گرفت، شکست و فرو افتاد،
و هر که درخت را گرفت همهٔ شاخ آن اوست.
شمس‌الدین تبریزی

اندرز به ریاضیدان جوان•

اتیا، بلوباش، کُن، مک‌داف، سرنک
ترجمهٔ بامداد یاحقی

به‌طور قطع ریاضی مهم‌ترین چیزی است که ریاضیدان جوان باید بیاموزد. ولی آموختن از تجربیات دیگر ریاضیدانان هم می‌تواند بسیار باارزش افتد. از نویسندگان این مقاله [که ریاضیدانانی سرشناس‌اند] خواسته شد که تجربیاتی از زندگی و پژوهش ریاضی‌شان را به تصویر بکشند، و اندرزهایی ارائه دهند که خود دوست می‌داشتند در آغاز کارشان بشنوند (عنوان این مطلب اشاره‌ای به کتاب آشنای سِر پیتر مِداور[1]، اندرز به دانشمند جوان، دارد). حاصل این همکاریها، کلمه‌به‌کلمه، همان اندازه جالب بود که انتظار داشتیم. آنچه عجیب می‌نمود این بود که میان این نوشته‌ها همپوشانی بسیار کمی وجود داشت. پس، این شما و این پنج دُر شاهوار برای ریاضیدانان جوان، که بی‌تردید برای عموم ریاضیدانان در هر سنی خواندنی و دلپذیر است.

******

۱. مایکل اتیا[2]

هشدار

آنچه پیش روی شماست دیدگاهی کاملاً شخصی براساس تجربیات نگارنده است، منعکس‌کنندهٔ شخصیت من است، منعکس‌کنندهٔ گونه‌ای از ریاضی است که به آن پرداخته‌ام، و منعکس‌کنندهٔ سبک کاری من است. ولی ریاضیدانان از دیدگاه این مشخصه‌ها بسیار گوناگون‌اند و هرکس باید از غریزهٔ خود پیروی کند. از دیگران بیاموز ولی آنچه را آموخته‌ای به سبک و سیاق خود تعبیر کن. اصالت و ابتکار، از بعضی لحاظ، با جدا شدن از روند گذشته می‌آغازد.

انگیزه

ریاضیدان پژوهشگر، چون هنرمندی خلاق، باید عاشقانه دلبستهٔ ریاضیات باشد و خود را به‌تمامی وقف آن کند. بدون انگیزه‌های قوی درونی نمی‌توانید موفق شوید، اما اگر از ریاضیات لذت ببرید، احساس رضایتی که می‌توانید از حل مسأله‌های سخت ریاضی به‌دست آورید بیکران است.

سخت‌ترین سالها، یکی دو سال نخست پژوهش است. مطالب زیادی هست که باید بیاموزید. یکی با مسأله‌های کوچک درگیر است بدون اینکه موفقیتی به‌دست آورد، و دیگری تردیدهای جدی دارد در اینکه اصلاً بتواند چیزی جالب و دندانگیر ثابت کند. من هم این تجربه را در دومین سال پژوهشم داشتم، و ژان پیر سِر[1]، شاید برجسته‌ترین ریاضیدان نسل من، به من گفت که او هم در برهه‌ای در فکر این بوده که تسلیم شود.

تنها میان‌مایگان به توانایی‌شان اعتماد بی‌حد و حصر دارند. هرچه بهتر باشی، استاندارد بالاتری را برای خود تعیین می‌کنی ــ بدین‌گونه می‌توانی فراتر از نقاطِ در دسترس را ببینی و دریابی.

بسیاری از ریاضیدانانِ آینده علائق و استعدادهایی در زمینه‌های دیگر هم دارند. اینان چه‌بسا که انتخاب سختی بین گام نهادن در حرفهٔ ریاضی یا رشتهٔ دیگری درپیش داشته باشند. مشهور است که گاوسِ بزرگ در انتخاب ریاضیات یا زبان‌شناسی تطبیقی دودل بود، پاسکال در آغاز کار ریاضیات را به‌خاطر الهیات ترک کرد، در حالی که دکارت و لایب‌نیتس به عنوان فیلسوف مشهورند. ریاضیدانهایی چون فریمن دایسن[2]، از ریاضی شروع کردند و به فیزیک پرداختند در حالی‌که دیگرانی، چون هاریش چاندرا[3] و رائول بات[4]، در جهت دیگر حرکت کردند و به ریاضی پرداختند. ریاضیات را نباید به دیدهٔ دنیایی بسته بنگری. به‌بستان بین ریاضی و دیگر شاخه‌ها هم برای ریاضیدان و هم برای جامعهٔ ریاضی سلامت‌بخش است.

1. Sir Peter Medawar 2. Michael Atiyah

1. Jean-Pierre Serre 2. Freeman Dyson 3. Harish Chandra
4. Raoul Bott

جنبه‌های روانی

به دلیل تمرکز ذهنی زیادی که برای کار ریاضی لازم است، فشارهای روحی، حتی وقتی که کارها به‌خوبی پیش می‌روند، ممکن است زیاد باشند. بسته به ویژگیهای شخصیِ شما این مشکل ممکن است عمده یا ناچیز باشد، ولی فرد می‌تواند گامهایی برای کم کردن این تنش بردارد. ارتباط با دوستان دانشجو ــ رفتن به سخنرانیها، سمینارها، و همایشها ــ هم افق دید شخص را گسترش می‌دهد و هم پشتوانهٔ مهم اجتماعی برای او فراهم می‌آورد. انزوا و درونگرایی بیش از حد می‌تواند خطرآفرین باشد. زمان صرف‌شده برای گفتگوهای ظاهراً بی‌فایده آنقدرها هم به هدر نمی‌رود.

همکاری علمیِ دانشجو با دوستان همدوره‌ای یا با استاد راهنما، فواید زیادی دارد، و بعداً همکاری درازمدت با همکاران هم از جنبه‌های ریاضی و هم از جنبه‌های شخصی می‌تواند بسیار مثمر ثمر واقع شود. نیاز به تفکر انفرادیِ عمیق و آرام همواره وجود دارد، ولی با برقراری تعادل بین تفکر انفرادی و دادوستد اندیشه با دوستان علمی می‌توان اندیشهٔ خود را اعتلا بخشید.

مسأله در برابر نظریه

ریاضیدانان را گاهی به دو دستهٔ «مسأله حل کن» و «نظریه‌پرداز» تقسیم می‌کنند. قطعاً افرادی در دو سرِ طیف ریاضیدانها، مانند اردوش و گروتندیک، وجود دارند که نمونه‌های بارز این دو دسته‌اند ولی بیشتر ریاضیدانها، که کارشان هم حل مسأله و هم گسترش نظریه است، جایی بین این دو حالت قرار دارند. در واقع، نظریه‌ای که به حل مسائلی ملموس و جالب رهنمون نشود ارزشی ندارد. برعکس، هر مسألهٔ واقعاً عمیق، گسترش نظریهٔ مربوط به حل آن مسأله را برمی‌انگیزد (قضیهٔ آخر فرما مثالی متعارف از این دست است).

این مطلب چه ربطی به یک دانشجوی تازه‌کار دارد؟ هرچند دانشجو باید کتابها و مقالات را بخواند و مفاهیم و روشهای کلی (نظریه) را جذب کند، در عمل باید روی یک یا چند مسألهٔ خاص تمرکز کند. این امر در عین حالی که غذای فکری برای شخص فراهم می‌آورد مایه و توان او را نیز به بوتهٔ آزمایش می‌گذارد. مسأله‌ای معین که دانشجو با آن درگیر است و جزئیات آن را درک می‌کند، معیاری گرانبهاست که سودمندی و توانایی نظریه‌های موجود نیز با آن سنجیده می‌شود.

بسته به اینکه پژوهش چگونه به پیش رود، شخص ممکن است در پایان‌نامهٔ دکتری‌اش در نهایت بخش بزرگی از نظریهٔ مورد استفاده را به کنار گذارد و تنها روی مسألهٔ اساسی تمرکز کند یا اینکه سناریویی را طرح بریزد که در آن مسأله به‌طور طبیعی جا بگیرد.

نقش کنجکاوی

نیروی محرک در پژوهش کنجکاوی است. چه وقتی نتیجهٔ خاصی درست است؟ آیا برهان مورد نظر بهترین برهان است، یا برهانی طبیعی‌تر و زیباتر وجود دارد؟ کلی‌ترین زمینه‌ای که در آن نتیجهٔ مورد نظر برقرار است چیست؟

اگر به هنگام خواندن یک مقاله یا گوش کردن به یک سخنرانی مدام سؤالهای بالا را از خود بپرسید، دیر یا زود کورسویی از پاسخی، یا مسیری احتمالی برای بررسی پاسخ، پدیدار می‌شود. وقتی که این وضع برای من پیش می‌آید، ایده را پیگیری می‌کنم تا ببینم به کجا می‌رسد یا در برابر موشکافیها پابرجا می‌ماند یا نه. نه بار از ده بار، نتیجهٔ کوچه‌ای تنگ و تاریک از کار در می‌آید، ولی گهگاه شخص به معدن طلا برمی‌خورد. مشکل در این است که بدانیم چه وقتی ایده‌ای که نخست نویدبخش و امیددهنده به‌نظر می‌آید در واقع ره به جایی نمی‌برد. در این مرحله باید جلوی ضرر را گرفت و به مسیر اصلی بازگشت. معمولاً تصمیم من قطعی نیست و غالباً به ایده‌ای که قبلاً دور انداخته‌ام برمی‌گردم و دوباره آن را امتحان می‌کنم.

برخلاف انتظار، ایده‌های خوب ممکن است از یک سخنرانی یا سمینار بد نشأت بگیرند. خیلی وقتها می‌بینم در حال گوش کردن به یک سخنرانی هستم که در آن نتیجهٔ مورد بحث زیباست ولی برهان زشت و پیچیده است. به جای اینکه سعی کنم برهان آشفته را روی تخته‌سیاه دنبال کنم، سعی می‌کنم باقی وقت را صرف اندیشیدن دربارهٔ ایجاد برهانی زیبا و برازنده‌ترکنم. معمولاً، ولی نه همیشه، ره به جایی نمی‌برم، اما با وجود این، استفادهٔ بهتری از وقت کرده‌ام چراکه به سبک و سیاق خودم سخت دربارهٔ مسأله اندیشیده‌ام. این روش خیلی بهتر از این است که منفعلانه به استدلال شخص دیگری گوش بسپاری.

مثالها

اگر شما، همچون من، چشم‌اندازهای وسیع و نظریه‌های توانمند را ترجیح می‌دهید (من تحت تأثیر گروتندیک قرار گرفتم ولی پیرو سبک او نشدم)، لازم است که بتوانید نتایج کلی را با به‌کار بردن آنها در مورد مثالهای ساده محک بزنید. در گذر سالیان، مجموعهٔ بزرگی از چنین مثالهایی، برگرفته از زمینه‌های گوناگون، ساخته‌ام. اینها مثالهایی هستند که در آنها شخص می‌تواند محاسبات ملموس انجام دهد، گهگاه با دستورهایی که استادانه پرداخته شده باشند، مثالهایی که به درک نظریهٔ کلی کمک می‌کنند. این مثالها جای پای شما را بر زمین قرص و محکم می‌کنند. جالب است که گروتندیک از مثالها دوری می‌کرد، ولی خوشبختانه در تماس نزدیک با سِر بود، که می‌توانست این کوتاهی را جبران کند. هیچ تمایز روشنی بین مثال و نظریه وجود ندارد. بسیاری از مثالهای مورد علاقهٔ من از آموخته‌های نخستین من از هندسهٔ تصویری متعارف می‌آیند: مکعب پیچ‌خورده[1]، رویهٔ مربعی[2]، نمایش کلاینی خطها در فضای سه‌بعدی[3]. نظریهٔ خمهای گویا، نظریهٔ فضاهای همگن[4]، و نظریهٔ گراسمانیها[5]: هیچ چیزی نمی‌تواند ملموس‌تر و متعارف‌تر از اینها باشد، به همهٔ اینها می‌توان از دیدگاه جبری یا هندسی نگریست، در عین حال هریک از آنها نخستین مورد در ردهٔ بزرگی از مثالهاست که سپس تبدیل به نظریه می‌شوند. جنبهٔ دیگر مثالها این است که می‌توانند به مسیرها و جهتهای گوناگونی رهنمون شوند. مثال می‌تواند به شیوه‌های متفاوت زیادی تعمیم یابد یا اصول متفاوت زیادی را به تصویر بکشد. به عنوان نمونه، مخروط متعارف در آن واحد خمی گویا، مربعی، و گراسمانی است.

اما مثال خوب، بیش از هر چیز، نمونه‌ای از زیبایی است، می‌درخشد و قانع‌کننده است. بینش و درک و آگاهی می‌بخشد. شالودهٔ باور را فراهم می‌آورد.

1. twisted cubic 2. quadric surface
3. Klein representation of lines in 3-space
4. theory of homogeneous spaces 5. theory of Grassmannians

برهان

همگی آموخته‌ایم که «برهان» مشخصهٔ اصلی ریاضیات است، و هندسهٔ اقلیدسی با آرایهٔ دقیقی از اصول موضوع و گزاره‌ها چارچوب اساسی را برای اندیشهٔ نوین در دورهٔ پس از نوزایی (رنسانس) فراهم آورده است. ریاضیدانان به قطعیتِ مطلق نتایج ریاضی در مقایسه با موقتی بودن نتایج علوم تجربی، چه رسد به تفکرات مغشوش در رشته‌های دیگر، می‌بالند.

درست است که، از زمان گودل، قطعیت مطلق متزلزل شده است، و یورش برهانهای دراز و پیش پاافتادهٔ رایانه‌ای از منزلت آن کاسته است، ولی علی‌رغم اینها، برهان نقش اصلی‌اش را در ریاضیات ایفا می‌کند، و رخنهٔ جدی در برهان شما منجر به رد مقالهٔ شما خواهد شد.

اما اشتباه است که پژوهش در ریاضیات را با فرایند تولید برهان یکی بگیرید. در واقع، می‌توان گفت تمام جنبه‌های خلاقانهٔ تحقیق ریاضی مقدم بر صحنهٔ برهان است. اگر این صحنه را به صحنهٔ تئاتر تشبیه کنیم، باید با ایده شروع کنید، نقشه‌ای بکشید، دیالوگها را بنویسید، و دستورالعملهای نمایش را تهیه کنید. به حاصل کار می‌توان به دیدهٔ «برهان»، نگریست که همان «اجرای» ایده است.

در ریاضیات، نخست ایده‌ها و مفاهیم، و سپس پرسشها و مسأله‌ها می‌آیند. در این مرحله جستجو برای راه‌حل شروع می‌شود، شخص به دنبال شیوه یا راهبردی می‌گردد. وقتی خود را قانع کرده باشید که مسأله خوب طرح شده است، و ابزارهای مناسبِ کار را در دسترس دارید، آنگاه شروع به سخت فکر کردن دربارهٔ جزئیات فنی برهان می‌کنید.

به‌زودی، شاید با یافتن مثالهای ناقض، ممکن است دریابید که مسأله نادرست تنظیم شده بوده است. گاهی شکافی بین ایدهٔ شهودی اولیه و بیان مسأله موجود است. فرضی نهانی را جا انداخته‌اید، جزئیات فنی را نادیده گرفته‌اید، خیلی کلی به مسأله پرداخته‌اید. در این صورت باید برگردید و صورت‌بندی مسأله را اصلاح کنید. اغراق و نامنصفانه است که بگوییم ریاضیدانها عمداً پرسشهایشان را طوری طرح می‌کنند که بتوانند به آنها پاسخ دهند، اما بی‌تردید رگه‌ای از حقیقت در این گفته وجود دارد. هنر ریاضیات خوب (در ضمن، ریاضیات هنر هم هست) در این است که مسائلی را مشخص می‌کند و به آنها می‌پردازد که هم جالب و هم حل‌پذیر هستند.

برهان محصول نهایی بده‌بستانی طولانی بین خیال‌پردازی خلاق و استدلال نقادانه است. بدون برهان برنامهٔ کار ناقص می‌ماند، ولی بدون اندیشهٔ خیال‌پردازانه برنامه هیچ‌گاه آغاز نمی‌شود. اینجا می‌توان تشابهی با کار هنرمند خلاق در رشته‌های دیگر، چون نویسنده، نقاش، آهنگساز، یا معمار، دید. نخست بینش و بصیرت سر برمی‌آورد، به ایده‌ای که به‌گونه‌ای تجربی، موقتی، و شرطی ترسیم می‌شود گسترش می‌یابد، و در نهایت، فرایند فنی و طولانی مدتِ برپا کردن اثر هنری فرا می‌رسد. اما شیوهٔ فنی و بصیرت باید در ارتباط باشند تا هر یک دیگری را بنابه قواعد خودش اصلاح کند.

راهبرد

در بخش پیشین، فلسفهٔ برهان و نقش آن در کلیت فرایند خلاقانهٔ تولید ریاضی را توضیح دادم. اکنون بگذارید به ساده‌ترین و عملی‌ترین پرسش مورد علاقهٔ ریاضیدان جوان بپردازم. شخص چه راهبردی را باید اتخاذ کند؟ عملاً چگونه برهان را می‌یابیم و به سرانجام می‌رسانیم؟

این پرسش در عالم تجرید چندان معنایی ندارد. همان‌طور که در بخش پیشین توضیح دادم، مسألهٔ خوب همواره پیشینه‌ای دارد: یعنی ریشه‌هایی دارد و از پیش‌زمینه‌ای برمی‌خیزد. برای پیشرفت در مسأله باید ریشه‌هایش را دریابید. به همین دلیل بهتر این است که مسألهٔ خودتان را بیابید، و پرسشهای خودتان را بکنید، نه اینکه آن را حاضر و آماده از استاد راهنمایتان بگیرید. اگر می‌دانید که مسأله از کجا می‌آید، یعنی چرا مطرح شده است، در آن صورت در میانهٔ راه به سوی حل مسأله قرار دارید. در واقع، پرسیدن سؤال درست اغلب به همان اندازهٔ حل مسأله سخت است. یافتن زمینهٔ مناسب نخستین گام ضروری است.

خلاصه اینکه، باید آگاهی کافی از تاریخ مسأله داشته باشید. باید بدانید که چه نوع شیوه‌هایی برای مسأله‌های مشابه به‌کارگرفته شده‌اند و محدودیتهایشان چه‌ها هستند. خوب است به محض فهم کامل یک مسأله شروع کنید به اندیشیدن جدی دربارهٔ آن. برای اینکه از پس مسأله برآیید، هیچ راهی ندارید جز اینکه عملاً دست به‌کار شوید. باید حالتهای ویژه را بررسی کنید و سعی کنید ببینید که مشکل اساسی کار کجاست. هرچه بیشتر دربارهٔ پیشینه و شیوه‌های گذشته بدانید، فوت‌وفنهای بیشتری را برای حل مسأله می‌توانید بیازمایید. از سوی دیگر، گاهی نادانی هم نعمتی است! گفته‌اند که لیتلوود به هر یک از دانشجویان پژوهشگرش روایتی مبدل از فرضیهٔ ریمان را برای کار پژوهش واگذار می‌کرد و تنها پس از گذشت شش ماه به آنها می‌گفت که چه کرده است. استدلال او این بود که دانشجو اعتمادبه‌نفس لازم را برای درگیر شدن مستقیم با چنین مسألهٔ معروفی ندارد ولی در صورتی که از شهرت حریف بی‌خبر باشد ممکن است ره به جایی ببرد! این شیوه به حل فرضیهٔ ریمان منجر نشد ولی قطعاً به تربیت دانشجویانی رزم‌دیده و خستگی‌ناپذیر انجامید. رویکرد خود من خودداری از یورش مستقیم و جستجو برای روشهای غیرمستقیم بوده است. این رویکرد بین مسألهٔ شما و ایده‌ها و فنهای موجود در دیگر حوزه‌ها، که ممکن است مسألهٔ شما را حل کنند، ارتباط برقرار می‌کند. اگر این راهبرد به موفقیت بینجامد، می‌تواند برهانی ساده و زیبا به‌بار آورد، که «تبیین کند» چرا مطلبی درست است. در واقع، من بر این باورم که هدف باید جستجو برای تبیین، جستجو برای درک مطلب، باشد. برهان تنها بخشی از این فرایند و گهگاه نتیجهٔ آن است.

به عنوان بخشی از جستجو برای شیوه‌های جدید، خوب است که افقهای دید خود را بسط دهید. گفتگو با دیگران دانش شما را توسعه می‌دهد و گهگاه شما را با ایده‌ها و فوت‌وفنهای نوی آشنا می‌کند. هر از گاهی ممکن است به ایدهٔ سودمندی در ارتباط با پژوهش خود یا اصلاً به مسیری جدید در پژوهش دست یابید.

اگر نیاز به آموختن موضوعی جدید دارید، به نوشتگان موجود مراجعه کنید یا بهتر از آن، متخصصی خوش‌مشرب و صمیمی را بیابید و مطلب را در آن زمینه از سرچشمه کسب کنید—با این روش، بصیرت بیشتری را سریع‌تر به‌دست می‌آورید.

همان‌گونه و همان‌قدر که به پیش می‌نگرید و نسبت به پیشرفتهای نو هشیارید، گذشته را نباید به فراموشی بسپارید. بسیاری از نتایج توانمند ریاضیِ متعلق به دوره‌های گذشته گردوغبار سالیان را بر چهره دارند و به فراموشی

سپرده شده‌اند و تنها پس از اینکه دوباره به‌طور مستقل کشف شوند دوباره به چشم می‌آیند. این نتایج به‌آسانی به چشم نمی‌آیند، بعضاً به این دلیل که اصطلاحات و سبک بیان در طول زمان تغییر می‌کنند، اما آنها ممکن است معدن طلا باشند. همانند جستجوی معادن طلا، باید خوش‌شانس باشی تا به یکی از آنها بربخوری، و پاداش البته نصیب پیشگامان می‌شود.

استقلال

در آغاز پژوهش، رابطهٔ شما با استاد راهنمایتان ممکن است اهمیت حیاتی داشته باشد. پس با دقت، با در نظر داشتن موضوع کار، شخصیت، و پیشینهٔ کاری استاد او را انتخاب کنید. اساتید کمی در هر سه زمینه نمرات بالایی می‌گیرند. به‌علاوه، اگر کارها در خلال نخستین سال بر وفق مراد پیش نرفت یا علایق شما به‌طور چشمگیری تغییر کرد، بی‌درنگ استاد راهنما یا حتی دانشگاهتان را تغییر دهید. استاد راهنمای شما دلخور نمی‌شود و ممکن است حتی راحت هم بشود!

گاهی ممکن است بخشی ازگروه بزرگی باشید و با دیگر اعضای دانشکده بده‌بستان داشته باشید به‌طوری که در عمل بیش از یک استاد راهنما داشته باشید. این وضع می‌تواند از این لحاظ مفید باشد که افکارگوناگون و روشهای کاری دیگری را در اختیارتان می‌گذارد. ممکن است از همکاران دانشجو نیز بسیار بیاموزید، و به این دلیل انتخاب یک بخشِ تحصیلات تکمیلی که دانشجویان زیادی داشته باشد کار خوبی است.

آنگاه که دکتری‌تان را با موفقیت پشت سر می‌گذارید، وارد مرحلهٔ جدیدی می‌شوید. هر چند ممکن است هنوز به همکاری با استاد راهنمایتان ادامه دهید و هنوز عضوی از همان گروه پژوهشی باقی بمانید، برای پیشرفتهای آیندهٔ شما مفید است که به جای دیگری برای یک سال یا بیشتر نقل مکان کنید. این امر درِ تأثیرات و تواناییها و فرصتهای جدید را به روی شما می‌گشاید. حال زمان آن فرا رسیده است که اثری از خود در دنیای ریاضی باقی بگذارید. به‌طور کلی، فکر خوبی نیست که مدت زیادی در خطوط بسیار نزدیک به پایان‌نامهٔ دکتری‌تان طی طریق کنید. باید استقلال خود را با گسترش علائق نشان دهید. این تغییر مسیر لزومی ندارد که ریشه‌ای و افراطی باشد اما باید به وضوح تازگی داشته باشد و ادامهٔ سرراست پایان‌نامه‌تان نباشد.

سبک

در نگارش پایان‌نامه‌تان، استاد راهنما به‌طور طبیعی در روش ارائه و سازماندهی مطلب به شما یاری خواهد داد. اما به‌دست آوردن یک سبک شخصی بخشی مهم از پیشرفت ریاضی شماست. هر چند نیازها بسته به نوع ریاضیات متفاوت است، بسیاری از جنبه‌ها برای همهٔ موضوعها یکسان‌اند. در اینجا چند رهنمود دربارهٔ چگونه نوشتن یک مقالهٔ خوب می‌آورم.

(i) پیش از شروع نگارش دربارهٔ ساختار منطقی کلی مقاله بیندیشید.

(ii) برهانهای پیچیده و طولانی را به گامهای میانی کوتاه (لمها، گزاره‌ها، و غیره) بشکنید. این کار به خواننده کمک می‌کند.

(iii) به زبانی که از نظر منطقی و زیباشناسی و ارتباط بین اجزا سازگار و روان باشد بنویسید. به یاد داشته باشید که ریاضیات هم نوعی از ادبیات و سخنوری است.

(iv) مطلب را چنان بنویسید که تا آنجا که ممکن است موجز و مختصر، و در عین حال روشن و به‌آسانی قابل درک، باشد. این توازن به‌سختی حاصل می‌شود.

(v) مقالاتی را که از خواندن آنها لذت برده‌اید مشخص کنید و سبک آنها را تقلید کنید.

(vi) آنگاه که نگارش قسمت عمدهٔ مقاله‌تان را به پایان آوردید برگردید و مقدمه‌ای بنویسید که به‌روشنی ساختار، نتایج اصلی، و زمینهٔ کلی مقاله را توضیح دهد. از اصطلاحات تخصصی غیرضروری دوری کنید و هدف را خوانندهٔ عمومی ریاضی قرار دهید و نه یک فرد حرفه‌ای باریک‌نگر.

(vii) اگر برای چاپ مقاله عجله ندارید، آن را برای چند هفته به کناری بگذارید و روی مطلب دیگری کار کنید. سپس به مقاله‌تان برگردید و آن را با ذهنی تازه بخوانید. خوانش مقاله متفاوت خواهد بود و ممکن است دریابید که چگونه آن را بهتر کنید.

(ix) دریغ نکنید از اینکه مقاله را، شاید از یک زاویهٔ کاملاً نو و تازه، دوباره بنویسید به این شرط که قانع شده باشید که این سبک جدید مقاله را روشن‌تر و در عین حال سادهٔ‌خوان‌تر می‌کند. مقالات خوبْ نوشته‌شده کلاسیک می‌شوند و بسیاری از ریاضیدانان آتی آنها را خواهند خواند. مقالات بدْ نوشته‌شده نادیده گرفته می‌شوند یا، اگر به قدر کافی مهم باشند، دیگران آنها را دوباره می‌نویسند.

۲. بِلا بُلوباش[1]

به گفتهٔ هاردی: «در این دنیا هیچ جای دائمی برای ریاضیات زشت وجود ندارد». من بر این باورم که به همین ترتیب در این دنیا جایی برای ریاضیدانهای بی‌اشتیاق و بی‌حوصله موجود نیست. تنها در صورتی ریاضی بورز که بدان مشتاقی، تنها در صورتی ریاضی بورز که این کار را بکنی حتی اگر تنها وقتی که برای آن داری پس از یک روز کامل اشتغال به کار دیگری باشد. بسان شعر و موسیقی، ریاضیات حرفه و پیشه نیست بلکه علاقه و دلمشغولی است.

حسن سلیقه و شمّ قوی مهم‌تر از هر چیزی است. معجزهٔ ریاضی این است که به نظر می‌آید توافقی عمومی مبنی بر اینکه ریاضیات خوب چیست وجود دارد. باید در زمینه‌هایی کار کنی که مهم‌اند و نامحتمل است که تا مدتی طولانی، از لحاظ ایده، بخشکند. و باید روی مسأله‌هایی کار کنی که زیبا و مهم‌اند، در زمینهٔ خوبی که انبوهی از این مسأله‌ها موجودند و نه معدودی مسألهٔ معروف. در واقع بلندپروازی مدام ممکن است به دوره‌های دراز عقیمی و بی‌ثمری بینجامد: این دوره‌های طولانیِ سترونی در مرحله‌ای از زندگی شما قابل تحمل است ولی در سرآغاز زندگی حرفه‌ای‌تان بهتر است که از آنها بپرهیزید.

بکوشید که در فعالیتهای ریاضی‌تان به تعادل برسید: برای ریاضیدان واقعی پژوهش مقدم است و باید باشد، ولی علاوه بر پژوهش، بسیار بخوانید و خوب تدریس کنید. از ریاضیات در هر سطحی لذت ببرید، حتی اگر (تقریباً) هیچ ارتباطی با پژوهش شما نداشته باشد. تدریس نباید باری بر دوش شما، بلکه باید سرچشمهٔ الهام شما باشد.

پژوهش (برخلاف نوشتنِ نتایجِ پژوهش) هرگز نباید مانند یک کار عادی و روزمره باشد: باید مسأله‌هایی را انتخاب کنید که فکر نکردن دربارهٔ آنها برایتان

1. Béla Bollobáas

سخت باشد. به این دلیل، خوب است خودتان را در مسأله غرق کنید نه اینکه روی مسأله چنان کار کنید که گویی کاری بر شما تحمیل شده است. در سرآغاز زندگی حرفه‌ای‌تان، آنگاه که دانشجوی تحصیلات تکمیلی در مرحلهٔ پژوهش هستید، باید به کمک استاد راهنمای باتجربه‌تان مسأله‌هایی را که یافته‌اید و دوست دارید محک بزنید، نه اینکه روی مسأله‌ایِ که او به شما داده ولی ممکن است با مذاق شما جور نباشد، کار کنید. در نهایت، استاد راهنمای شما، هرچند ممکن است از توانایی و سلیقهٔ شما آگاه نباشد، باید دید نسبتاً خوبی در این مورد داشته باشد که آیا مسألهٔ خاصی شایستگی تلاشهای شما را دارد یا نه. بعداً در زندگی حرفه‌ای‌تان، هنگامی که نمی‌توانید به استادتان تکیه کنید، گفتگو با همکاران دلسوز و شفیق غالباً الهام‌بخش است.

توصیه می‌کنم که در آنِ واحد دو نوع مسأله برای کار کردن داشته باشید.

(i) «رویا»: مسأله‌ایِ بزرگ که بسیار دوست دارید آن را حل کنید ولی نمی‌توانید انتظار معقولی داشته باشید که آن را حل کنید.

(ii) چند مسألهٔ بسیار ارزنده که گمان می‌کنید با صرف وقت و تلاش کافی و بختْ‌یاری، ممکن است آنها را حل کنید.

علاوه بر اینها، دو نوع دیگر از مسائل هستند که هر چند اهمیت کمتری در مقایسه با مسائل بالا دارند، باید آنها را در نظر داشته باشید.

(i) هر از گاهی روی مسائلی کار کنید که پایین‌تر از حد و شأن شماست و مطمئن هستید که به سرعت از پس آنها برمی‌آیید به‌طوری که وقتی که صرفِ آنها می‌کنید موفقیت شما را در مسائل بالا به خطر نمی‌اندازد.

(ii) حتی در سطح پایین‌تری، همواره حل مسائلی که واقعاً مسائل پژوهشی نیستند ولی آنقدر زیبا هستند که ارزش صرف وقت دارند، لذت‌بخش است (هر چند که مسأله‌های سالیان گذشته باشند). حل چنین مسائلی خوشایند است و توانایی شما را در نوآوری و ابداع بیشتر می‌کند.

صبور و سمج باشید. وقتی که دربارهٔ مسأله‌ای می‌اندیشید، شاید مفیدترین ابزاری که می‌توانید به‌کار بگیرید این باشد که مسأله را همواره در ذهن داشته باشید: این روش برای نیوتن کارگر افتاد و برای بسیاری دیگر نیز به‌کار آمده است. به خود مهلت دهید، به‌ویژه آنگاه که به مسائل بزرگ حمله‌ور می‌شوید؛ با خود پیمان ببندید که مدت زمان خاصی را روی مسأله‌ای بزرگ صرف کنید بی‌آنکه انتظار زیادی داشته باشید، و پس از آن تأمل کنید و تصمیم بگیرید که سپس چه کنید. برای موفقیت رویکردتان زمانی در نظر بگیرید، ولی در عین حال خیلی در آن رویکرد غرق نشوید تا شیوه‌های دیگر حمله به مسأله را از دست ندهید. چابک‌اندیش و سریع باشید: به قول پال اردوش، مغزتان را باز نگه دارید.

از اشتباه نترسید. اشتباه برای شطرنج‌باز مرگ‌آفرین است ولی برای ریاضیدان در حکم تساوی برای ادامهٔ بازی است. چیزی که باید از آن وحشت کنید برگه‌ای خالی در برابر شما پس از مدتی اندیشیدن دربارهٔ مسأله‌ای است. اگر پس از یک جلسه، سطل آشغال شما از یادداشتهایی پر شده که حاکی از تلاشهای نافرجام شماست، احتمالاً هنوز وضع خیلی خوبی دارید. از رویکردهای مبتذل و بی‌روح بپرهیزید، اما همواره از وقت گذاشتن برای کار خشنود باشید. به‌ویژه، حل ساده‌ترین حالتهای یک مسأله بعید است در حکم اتلاف وقت باشد و چه‌بسا بسیار مفید و مؤثر افتد.

هنگامی که مقدار قابل ملاحظه‌ای وقت صرف یک مسأله می‌کنید، به‌آسانی ممکن است پیشرفتی را که کرده‌اید دست‌کم بگیرید و به همان اندازه ممکن است توانایی‌تان را در به خاطرسپاری دستاوردتان دست بالا بگیرید. بهترین کار این است که حتی نتایج خیلی جزئی‌تان را بنویسید: احتمال خوبی وجود دارد که بعداً یادداشتهایتان باعث صرفه‌جویی زیادی در وقت شما شوند.

اگر به‌قدر کافی خوش اقبال باشید که پیشرفتی چشمگیر به‌دست آورید، طبیعی است که احساس کنید از پروژه‌تان خسته شده‌اید و بخواهید به همان دستاورد تکیه کنید. در برابر این وسوسه پایداری کنید و ببینید که آن پیشرفت چه چیزهای دیگری به شما ارزانی می‌دارد.

برتری عمدهٔ شما به عنوان ریاضیدان جوان این است که وقت کافی برای پژوهش دارید. ممکن است این امر را درنیابید، ولی بسیار بعید است که بعداً هرگز به اندازهٔ آغاز زندگی حرفه‌ای‌تان وقت برای پژوهش داشته باشید. هر کسی احساس می‌کند که وقت کافی برای ریاضی ورزیدن ندارد، اما با گذر سالیان این احساس شدید و شدیدتر و موجه و موجه‌تر می‌شود. اما در مورد خواندن، افراد جوان از لحاظ مقدار ریاضیاتی که خوانده‌اند در موقعیتی ضعیف قرار دارند، پس برای جبران این ضعف، تا آنجا که می‌توانید بخوانید، هم در زمینهٔ عمومی پژوهشتان و هم در ریاضیات به‌طور کلی. در زمینهٔ پژوهشی‌تان، مطمئن شوید که مقالات زیادی از بهترین ریاضیدانان را می‌خوانید. چنین مقالاتی اغلب با دقت مطلوب نوشته نشده‌اند، اما کیفیت ایده‌ها و نتیجه‌ها در این مقالات، پاداش کافی برای زحمتی است که برای خواندن آنها متحمل می‌شوید. در مورد هر چه می‌خوانید، هشیار باشید: سعی کنید پیشاپیش دریابید که نویسنده چه خواهد کرد و مسیر بهتری را طراحی کنید. اگر نویسنده در مسیری که شما پیشاپیش اندیشیده‌اید برود، خشنود خواهید شد، و اگر مسیری دیگر را اختیار کند، می‌توانید چشم به راه دریافتِ دلیل آن باشید. از خود دربارهٔ نتیجه‌ها و برهانها پرسش کنید، حتی اگر ساده‌انگارانه به نظر آید: این پرسشها درک شما را از مطلب بسیار بالا می‌برند.

از سوی دیگر، بسیاری اوقات مفید است که همه‌چیز را دربارهٔ مسأله حل‌نشده‌ای که می‌خواهید حل کنید، نخوانید: وقتی عمیقاً دربارهٔ آن اندیشیدید و ظاهراً به جایی نرسیدید، می‌توانید (و باید) شرح تلاشهای شکست‌خوردهٔ دیگران را بخوانید.

امکان شگفت‌زده شدن را برای خودتان نگه دارید، پدیده‌ها را بدیهی نگیرید، قدرشناس ایده‌ها و نتیجه‌هایی که می‌خوانید باشید. بسیار آسان است که فکر کنید موضوع را فهمیده‌اید. ولی هر چه باشد شما تنها برهان را خوانده‌اید. افراد برجسته اغلب زمان زیادی برای هضم اندیشه‌های نو صرف می‌کنند. برای ایشان کافی نیست که زنجیره‌ای از قضیه‌ها را بدانند و برهانهای آنها را دریابند بلکه می‌خواهند آنها را در خون خود حس کنند.

همچنان‌که زندگی حرفه‌ای‌تان به پیش می‌رود، همواره ذهنتان را به روی اندیشه‌های نو و مسیرها و جهتهای نو باز نگه دارید: چشم‌انداز ریاضی همواره در تغییر است، و شما هم، اگر نمی‌خواهید عقب بمانید، احتمالاً باید تغییر کنید. همواره ابزار کارتان را تیز کنید و مطالب نو را یاد بگیرید.

ورای هر چیزی، از ریاضیات لذت ببرید و نسبت به آن شور و اشتیاق داشته باشید. از پژوهشتان لذت ببرید، چشم به راه خواندن نتیجه‌های نو باشید، عشق به ریاضی را در دیگران بپرورانید، و حتی در فراغت، با اندیشیدن دربارهٔ

مسأله‌های کوچک و زیبایی که به آنها برخورد می‌کنید یا از همکارهایتان می‌شنوید سرگرم و محظوظ شوید.

اگر بخواهم اندرزی را که همهٔ ما به منظور موفقیت در دانش و هنر باید تعقیب کنیم جمع‌بندی کنم، به سختی بتوانم کاری بهتر از یادآوری آنچه ویتروویوس[1] بیش از دو هزار سال پیش نگاشت، انجام دهم:

Neque enim ingenium sine disciplina aut disciplina sine ingenio perfectum artificem potest efficere.

برای اینکه نه نبوغ بدون آموختنْ هنرمندی کامل می‌سازد و نه آموختن بدون نبوغ.

۳. الن کُن[2]

ریاضیات ستون فقرات دانش نوین است و سرچشمه‌ای بسیارکارامد از مفاهیم و ابزارهای نو برای درک «واقعیتی» است که در آن شرکت داریم. این مفاهیم جدید خود نتیجهٔ فرایند طولانی «عصاره‌گیری» در انبیق اندیشهٔ آدمی است.

از من خواسته شد که چند اندرز برای ریاضیدانان جوان بنویسم. نخستین نکته‌ای که می‌خواهم بگویم این است که هر ریاضیدان خودْ موردی خاص است، و به‌طورکلی ریاضیدانها مایل‌اند که چون «فرمیونها» رفتار کنند، یعنی از زمینه‌هایی که خیلی مرسوم‌اند احتراز می‌کنند، در حالی‌که فیزیکدانها بیشتر مانند «بوزونها» رفتار می‌کنند، که در دسته‌های بزرگ به‌هم می‌آمیزند، و اغلب دربارهٔ دستاوردهایشان اغراق می‌کنند ــ شیوه و رفتاری که ریاضیدانان آن را خوار می‌شمارند.

در ابتدا ممکن است وسوسه شویم که ریاضیات را مجموعه‌ای از شاخه‌های مجزا چون هندسه، جبر، آنالیز، نظریهٔ اعداد، و غیره، در نظر بگیریم، که موضوع اصلی در هندسه تلاش برای درک مفهوم فضاست، در جبر هنر کارکردن با نمادها، در آنالیز دستیابی به «بینهایت» و «پیوستار»، و همین‌طور الی آخر. ولی این تقسیم‌بندی حق مطلب را در مورد یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های دنیای ریاضی ادا نمی‌کند. یعنی در عمل نمی‌توان هیچ‌یک از شاخه‌های بالا را از شاخه‌های دیگر جدا کرد بدون اینکه روح و جوهرش را از آن گرفت. بدین ترتیب، مجموعهٔ ریاضیات چون وجودی بیولوژیکی است، که تنها به‌عنوان یک کل زنده می‌ماند و اگر به تکه‌های مجزا تفکیک شود، نابود می‌گردد.

زندگی علمی ریاضیدانان را می‌توان به صورت کاوشی در جغرافیای «واقعیت ریاضی» مجسم کرد که اندک اندک در چارچوب ذهنی فردیِ ریاضیدانان آشکار می‌شود.

این فرایند اغلب با عصیانی در برابر توصیفات جزمی درکتابهای موجود آغاز می‌شود. ریاضیدانان جوان بالقوه کم‌کم درمی‌یابند که درک ایشان از دنیای ریاضی ویژگیهایی می‌یابد که در باورهای جزمی موجود نمی‌گنجد. این عصیانگری آغازین، در بیشتر موارد، به ناآگاهی برمی‌گردد، اما با وجود این می‌تواند سودمند باشد، چراکه اشخاص را از کرنش در برابر قدرت و جو غالب رهایی می‌بخشد و به ایشان اجازه می‌دهد که بر شهودشان تکیه کنند، منوط به اینکه آن شهود بتواند از پشتیبانی برهانهای واقعی برخوردار شود. آنگاه که ریاضیدان به‌راستی، به شیوه‌ای «شخصی» و بکر و بدیع، شروع به دریافتن بخش کوچکی از دنیای ریاضی می‌کند، هر قدر این دریافت در آغاز مبهم و رمزآلود به نظر آید،* سفر او واقعاً آغاز شده است. البته، ضروری است که نخ آریادنه[1] گسسته نشود: بدین‌گونه شخص می‌تواند همواره نسبت به هر آنچه در طول مسیر با آن مواجه می‌گردد هشیار باشد، ولی هر وقت احساس گم‌گشتگی کرد، به سرچشمه بازگردد. همچنین ادامهٔ حرکت امری حیاتی است. در غیر این صورت آدمی این خطر را می‌کند که خود را در محدودهٔ نسبتاً کوچکی از تخصص بسیار فنی محصورکند، و بدین‌گونه آگاهی‌اش را از دنیای ریاضی و از گوناگونی سترگ و، چه بسا، رازناک ریاضی محدود سازد.

از این لحاظ، نکتهٔ اساسی این است که هر چند ریاضیدانان بسیاری زندگی‌شان را صرف کاوش در بخشهای گوناگونی از دنیای ریاضی، با چشم‌اندازهای گوناگونی، کرده‌اند همگی پیرامون حدود فاصل و ارتباطات بین رشته‌ای در ریاضیات هم‌رأی هستند.

سفر ریاضیدان از هرجا آغاز شود، اگر او به‌قدرکافی گام بردارد، حتماً روزی به دیاری آشنا پا خواهد گذاشت: به عنوان مثال، به‌قلمرو توابع بیضوی، فرمهای مدولی، یا توابع زتا. «همهٔ راهها به رم می‌رسند»، و دنیای ریاضی «همبند» است. البته این بدین معنی نیست که همهٔ بخشهای ریاضی همانندند، و در اینجا شایسته است که گفتار زیر از گروتندیک را (در «کاشت و برداشت»[2]) نقل کنم که در مقام مقایسهٔ دورنمای آنالیز ریاضی، که نخست در آن زمینه کار می‌کرد، با دورنمای هندسهٔ جبری است، که باقیماندهٔ زندگی ریاضی‌اش را در آن گذراند.

> «هنوز این تصویر (البته کاملاً ذهنی) را به‌خاطر می‌آورم که گویی بیابانهای وسیع خشک و تیره را پشت‌سر می‌گذارم و خود را ناگاه در «سرزمین موعود» می‌یابم، سرزمینی حاصلخیز و پر از ثروت که تا بینهایت گسترده است، به هر سو که بخواهی دست می‌یازی یا زمین را حفر می‌کنی تا چیزی به‌دست آوری».

بیشتر ریاضیدانان سبک و روشی عملگرایانه اتخاذ می‌کنند و خود را کاشفان این «دنیای ریاضی» می‌بینند، دنیایی که در وجودش تردید نمی‌کنند و ساختارش را با ترکیبی از شهود و مقدار زیادی تفکر منطقی آشکار می‌کنند. شهود چندان با «تمایل شاعرانه» (آن‌گونه که شاعر فرانسوی پل والری[3] بر آن تأکید کرده است) متفاوت نیست، در حالی‌که تفکر منطقی نیازمند دوره‌های شدیدِ تمرکز است.

---

* نقطهٔ آغازین دریافت من از دنیای ریاضی مکان‌یابی ریشه‌های چندجمله‌ایها بود. خوشبختانه، در آغاز کار برای شرکت در کنفرانسی در سیاتل دعوت شدم، که در آن با ریشه‌های تمامی کارهای آینده‌ام روی فاکتورها (عاملها) آشنا شدم.

۱. منظور، داستان گلولهٔ نخ آریادنه (Ariadne) در اساطیر یونانی است. آریادنه همسر دیونایسوس (Dionysus) رب‌النوع شراب و میگساری، دختر شاه مینوس (Minos) و شهبانو پسیفایی (Pasiphaë) بود. اما او هنگامی که عاشق تسیوس (Theseus) آتنی شد به پیمان ازدواجش خیانت کرد. او شمشیر جادویی را به همراه یک گلوله نخ به تسیوس داد تا به وسیلهٔ آن مینوتور (Minotaur) هیولای نیمه‌انسان‌ـنیمه‌گاو را نابود کند. تسیوس خود را به دهلیز هزار تو رساند، گلولهٔ نخ را بازکرد و خود را به مرکز مارپیچی که مینوتور در آن زندگی می‌کرد رساند. مینوتور را کشت، و به کمک گلولهٔ نخ آریادنه راه برگشت را پیدا کرد ــ م.

1. Vitruvius 2. Alain Connes

2. Récoltes et semailles 3. Paul Valery

هر نسل تصویری ذهنی می‌سازد که دریافت خودش را از این دنیا منعکس می‌کند. افراد هر نسل ابزارهایی ذهنی می‌سازند که بیشتر و بیشتر در این دنیا نفوذ می‌کند تا از این رهگذر بتوانند جنبه‌هایی از آن را کشف کنند که پیش از این از نظر ایشان پنهان بود.

کار وقتی واقعاً جالب می‌شود که پلهای نامنتظره‌ای بین بخشهایی از ریاضی، که در تصویر ذهنی ایجادشده به‌وسیلهٔ ریاضیدانان نسلهای پیشین از هم دور بودند، پدیدار می‌شوند. آنگاه که این امر رخ دهد، این احساس به آدمی دست می‌دهد که ناگاه نسیمی مه حائل را، که بخشهایی از چشم‌انداز زیبای ریاضی را از دیده‌ها نهان می‌کرد، به کنار می‌راند. در کار خودم چنین شگفتیهای بزرگی بیشتر از راه ارتباط با فیزیک پیش آمده است. مفاهیم ریاضی که به گونه‌ای طبیعی در فیزیک رخ می‌نمایند اغلب، به قول آدامار[1]، مفاهیمی اساسی می‌شوند. از نظر آدامار

> «این مفاهیم دارای آن نوع تازگی زودگذری نیستند که فقط تأثیری بر ریاضیدانِ فرورفته در عوالم خویش می‌گذارد، بلکه تازگی بسیار پرثمری دارند که از طبیعت و ذات اشیاء می‌جوشد.»

این مقاله را با اندرزهایی «عملی‌تر» به پایان می‌آورم. ولی به هر حال، توجه داشته باشید که هر ریاضیدان «مورد خاصی» است و نباید این اندرزها را خیلی جدی گرفت.

پیاده‌روی. یک تمرین بسیار سالم، آنگاه که با مسأله‌ای پیچیده درگیر هستید (که اغلب با محاسبات سروکار دارد) این است که (بدون کاغذ و قلم) به پیاده‌روی طولانی بروید و محاسبات را در ذهنتان انجام دهید صرف‌نظر از اینکه در آغاز ممکن است فکر کنید «خیلی سخت است که محاسبات به این صورت انجام شود». حتی اگر فرد موفق نشود، حافظهٔ در دسترس او پرورش می‌یابد و مهارتش افزون می‌شود.

درازکشیدن. ریاضیدانها معمولاً به‌سختی می‌توانند به شریک زندگی‌شان توضیح دهند که وقتی به شدیدترین صورت کار می‌کنند که در تاریکی روی مبلی دراز می‌کشند. بدبختانه، با ایمیل و دست‌یازی صفحه‌های رایانه به تمامی مؤسسه‌های ریاضی، دستیابی به فرصت تنهایی و گوشه‌گیری و تمرکز نایاب‌تر، و در عین حال با ارزش‌تر می‌شود.

بی‌پروایی. در فرایندی که به کشف ریاضیاتِ نو می‌انجامد، چندین مرحله وجود دارد. مرحلهٔ «بررسی کردن» هر چند ترسناک است، اما تنها نیازمند تعقل و تمرکز است. مرحلهٔ نخست که مرحلهٔ خلاقیت است ماهیت کاملاً متفاوتی دارد. به یک معنی، این مرحله نیازمند نوعی ناآگاهی است، زیرا شخص به هزار و یک دلیل ممکن است به مسأله‌ای که ریاضیدانان بسیاری در حل آن ناموفق بوده‌اند، نپردازد.

شکستها. برای ریاضیدان در هر مرحله از زندگی علمی‌اش (از جمله، در مراحل نخستین) بسیار پیش می‌آید که مثلاً پیش‌چاپ مقالهٔ رقیب را دریافت می‌کند و دچار یأس و ناراحتی می‌شود. تنها پیشنهادی که اینجا دارم این است که این احساس را با تزریق انرژی مثبت به انگیزه‌ای برای سخت‌تر کارکردن تبدیل کنید. هرچند، انجام این کار همیشه آسان نیست.

تأیید اکراه‌آمیز. یکی از همکارانم زمانی گفت: «ما (ریاضیدانها) برای تأیید اکراه‌آمیز اندکی از دوستان کار می‌کنیم.» درست است، از آنجا که کار پژوهش دارای ماهیت انزوایی است، ما به‌شدت به این یا آن نوع تأیید نیازمندیم، ولی آدم واقعاً نباید خیلی انتظار داشته باشد. در واقع، تنها داور حقیقی خود شخص است. هیچ شخص دیگر در وضعیتی به‌خوبی خود فرد نیست که بداند چه کاری انجام شده است، و اهمیت دادن زیاد به گمان و پندار دیگران اتلاف وقت است: هیچ قضیه‌ای تاکنون در نتیجهٔ رأی‌گیری ثابت نشده است. همان‌گونه که فاینمن[1] گفته است: «چرا به آنچه دیگران فکر می‌کنند اهمیت می‌دهی؟».

۴. دوسا مَک‌داف[2]

دورهٔ بزرگسالی‌ام را در وضعیتی بسیار متفاوت با هم‌نسلانم شروع کردم. همواره این‌گونه بار آمدم که فکر کنم زندگی حرفه‌ای مستقلی خواهم داشت، و در عین حال از جانب خانواده و مدرسه بسیار تشویق می‌شدم که به ریاضیات بپردازم. مدرسهٔ دخترانه‌ای که در آن تحصیل می‌کردم، برخلاف معمول، معلم ریاضی بسیار خوبی داشت که زیبایی هندسهٔ اقلیدسی و حسابان را به من نشان داد. ولی احترامی برای معلمان علوم [تجربی] قائل نبودم، و از آنجا که استادان دانشگاه هم در رشته‌های علوم چندان بهتر نبودند، واقعاً چیزی از فیزیک نیاموختم.

من که در این فضای محدود بسیار موفق بودم، انگیزهٔ زیادی داشتم که ریاضیدانی پژوهشگر شوم. در حالی که از بعضی جنبه‌ها اعتماد به نفس زیادی داشتم، از جنبه‌های دیگر احساس کاستی زیادی می‌کردم. یک مشکل بنیادی این بود که این پیام [جامعه] را جذب کرده بودم که زنان تا آنجا که به حرفهٔ ریاضی مربوط می‌شود از درجهٔ دوم هستند و در نتیجه باید نادیده گرفته شوند. دوستان مؤنثی نداشتم و واقعاً قدر هوش خودم را نمی‌دانستم، فکر می‌کردم از نوع هوش عملی برای کارهای روزمره (ویژگی زنانه) است و نه واقعاً هوش خلاق (ویژگی مردانه). این مضمون به صورتهای مختلفی بیان می‌شود: زنان اجاق خانه را روشن نگه می‌دارند ولی مردان در دنیای بیرون سیر می‌کنند، زنان منبع الهام شعر و موسیقی‌اند ولی شاعر و موسیقیدان نیستند، زنان جَنَم واقعی برای ریاضیدان شدن را ندارند، و نظایر اینها. این موضوع را به صورتهای دیگری هم می‌گویند. اخیراً نامهٔ جالبی بین دوستان فمینیست من دست به‌دست می‌گشت که حاوی پیشداوریهای مشترک و متناقضی در زمینه‌های مختلف علمی بود، و پیامش این بود که زنان قادر به درک چیزهای بسیار ارزشمند نیستند.

مشکل دیگری که کمی بعد آشکار شد این بود که توانسته بودم پایان‌نامهٔ موفقیت‌آمیزی بنویسم در حالی‌که ریاضیات بسیار کمی آموخته بودم. پایان‌نامه‌ام در زمینهٔ جبرهای فون نُویمان بود، موضوعی تخصصی که به هیچ چیزی که برای من معنی واقعی داشته باشد مربوط نمی‌شد. در آن زمینه راهی به سوی جلو نمی‌دیدم و در عین حال تقریباً چیز دیگری نیز نمی‌دانستم. هنگامی که در آخرین سال تحصیلات تکمیلی‌ام به مسکو رسیدم، گلفاند مقاله‌ای در زمینهٔ کوهومولوژی جبر لیِ میدانهای برداری روی یک خمینه داد تا بخوانم، و من

1. Jacques Salomon Hadamard

1. Richard Phillips Feynman 2. Dusa McDuff

نمی‌دانستم که کوهومولوژی چیست، خمینه چیست، میدان برداری چیست، و جبر لی چیست.

هر چند که این جهل تا حدی ناشی از اشکالِ آموزش تخصص‌محور بود، به عدم ارتباط من با دنیای گسترده‌تر ریاضیات نیز برمی‌گشت. این مشکل را که چگونه زن بودن را با ریاضیدان بودن آشتی دهم اساساً با ترتیب دادن دو زندگی جداگانه برای خودم حل کرده بودم. انزوای من پس از بازگشت از مسکو شدت گرفت. با تغییر رشته از آنالیز تابعی به توپولوژی، از راهنمایی چندانی برخوردار نبودم، خیلی می‌ترسیدم که اگر زیاد سؤال کنم، ناشی و نادان به نظر آیم. در مرحلهٔ پُست‌دکتری کودکی خردسال داشتم که مرا با مشکلات عملیِ بسیار درگیر می‌کرد. در آن مرحله، بدون هیچ درکی از فرایند ریاضی‌ورزیدن، بیشتر با خواندن می‌آموختم، بی‌خبر از نقشی اساسی که صورتبندی پرسشها و امتحان کردنِ، چه بسا، خامِ ایده‌های خود شخص ایفا می‌کند. همچنین شناختی از اینکه چگونه زندگی حرفه‌ای را بسازم نداشتم. چیزهای خوب خودبه‌خود پیش نمی‌آیند: باید برای پژوهشیاری[1] و شغلهای دیگر اقدام کرد و نگاهی به همایشهای جالب داشت. قطعاً داشتن راهنمایی که روشهای بهتری برای دست و پنجه نرم کردن با چنین مشکلاتی پیشنهاد کند کمک‌کننده است.

احتمالاً لازم‌ترین کار این بود که بیاموزم چگونه سؤالِ خوب مطرح کنم. کار دانشجو نه‌تنها این است که به‌قدر کافی بیاموزد تا بتواند پرسشهای مطرح‌شده توسط دیگران را جواب دهد بلکه همچنین باید بیاموزد که چگونه پرسشهایی تنظیم کند که ممکن است به جاهایی جالب برسند. به هنگام آموختن مطلبی جدید، اغلب با استفاده از نظریهٔ پیچیده‌ای که قبلاً توسط دیگران ارائه شده بود از وسط مطلب شروع می‌کردم. اما اغلب با شروع کردن از ساده‌ترین پرسشها و مثالهاست که می‌توان جلوتر را دید، زیرا از این طریق است که فهم مسألهٔ اساسی آسان‌تر می‌شود و چه بسا که رهیافت جدیدی نیز به‌دست آید. به عنوان مثال، همواره دوست داشتم که روی قضیهٔ نافشردگی گروموف[2] در هندسهٔ همتافته[3] کار کنم، که محدودیتهایی بر شیوه‌های دستکاری یک گوی به‌صورت همتافته تحمیل می‌کند. این نتیجهٔ بسیار اساسی و هندسی به‌طریقی در ذهن من طنین‌انداز است، و پایهٔ استواری برایم می‌سازد که از آنجا به کاوشگری می‌پردازم.

این روزها مردم خیلی بیشتر آگاه‌اند که ریاضیات حاصل تلاش همگانی است: حتی درخشان‌ترین ایده معنای خود را تنها از رابطه‌اش با کلیت موضوع می‌گیرد. وقتی که شخص درکی از زمینه دارد، بسیار مهم و مثمر ثمر است که به تنهایی کار کند. ولی، مراوده با دیگران به هنگامی که شخص در کار آموختن است امری حیاتی است.

تلاشهای موفقیت‌آمیز زیادی برای آسان نمودن این ارتباط، از طریق تغییر ساختار ساختمانها، نشستها و همایشها، برنامه‌های دانشکده‌ها، و همچنین به گونه‌ای کمتر رسمی از طریق تغییر ساختار سمینارها و سخنرانیها، شده است. چقدر فضای یک سمینار تغییر می‌کند وقتی که ریاضیدان پیشکسوتی، به جای چرت زدن و خسته به نظر رسیدن، سؤالهایی می‌پرسد که موضوع را برای دیگران روشن می‌کند و بدین‌گونه بحث را برای شرکت‌کنندگان باز می‌نماید. اشخاص (پیر و جوان) اغلب از ترسِ نشان دادن ناآگاهی، فقدان تخیل و کاستیهای مهم دیگرشان به سکوت فرو می‌روند. اما در مواجهه با موضوعی به دشواری و به زیبایی ریاضیات، هرکس می‌تواند چیزی از دیگران بیاموزد. حالا بسیاری همایشها و کارگاههای کوچک و خوب برگزار می‌شوند که سازماندهی آنها به‌نحوی است که بحث دربارهٔ جزئیات نظریه‌های خاص و همچنین دربارهٔ صورتبندی جهتها و پرسشهای جدید به‌آسانی انجام می‌شود.

هر چند این عقیده که ریاضیات ذاتاً مردانه است دیگر خیلی کمتر رایج است، مشکل برقراری آشتی بین زن بودن و ریاضیدان بودن هنوز مطرح است. فکر نمی‌کنم که ما زنان آن گونه که باید و شاید در دنیای ریاضی حضور داشته باشیم، ولی آنقدر حضور داریم که به عنوان موردهای خاص و استثنایی در نظر گرفته نشویم. من نشستهایی را که در درجهٔ نخست برای زنان در نظر گرفته شده‌اند، برخلاف انتظار، ارزنده می‌یابم؛ فضای این نشستها وقتی که اتاق سخنرانی پر از زنانی است که به بحث ریاضی مشغول‌اند دیگرگونه است. همچنین، این نکته روز به روز بیشتر درک می‌شود که مسألهٔ حقیقی این است که چگونه هر فرد جوانی در عین حالی که می‌خواهد ریاضیدان خلاقی شود، بتواند زندگی شخصی رضایت‌بخشی فراهم کند. آنگاه که مردم به‌طور جدی تدابیری در این مورد بیندیشند واقعاً راه درازی را پیموده‌ایم.

۵. پیتر سَرنَک[1]

من طی سالیان تعداد قابل ملاحظه‌ای دانشجوی دکتری را راهنمایی کرده‌ام و بنابراین، احتمالاً به عنوان یک مربی با تجربهٔ واجد صلاحیت برای نوشتن این اندرزنامه هستم. وقتی دانشجویی باهوش را راهنمایی می‌کنم (و به‌قدر کافی خوشبخت بوده‌ام که سهم خودم را از این‌گونه دانشجویان داشته باشم). تعامل من با او تقریباً مثل این است که به کسی بگویم در جایی به دنبال طلا بگردد و تنها پیشنهادهایی مبهم ارائه دهم. وقتی دانشجویان با مهارت و استعدادشان دست به‌کار می‌شوند به جای طلا الماس می‌یابند (و البته، پس از آن آدم نمی‌تواند از گفتن اینکه «من که به تو گفته بودم»، خودداری کند). در این موارد، و همچنین در موارد بسیار دیگری، نقش استاد پیشکسوت بیشتر شبیه یک مربی است: مربی تشویق می‌کند و اطمینان می‌یابد که شخص تحت تربیت او روی مسائل جالب کار می‌کند و از ابزارهای اساسی که در دسترس هستند باخبر است. سالهای سال همواره نکته‌ها و پیشنهادهای ویژه‌ای را تکرار کرده‌ام که ممکن است مفید از آب درآمده باشند. در اینجا برخی از این نکته‌ها و پیشنهادها را فهرست‌وار می‌آورم.

(i) وقتی که رشته‌ای را می‌آموزید، باید علاوه بر خواندن نوشته‌های تازه، مقاله‌های اصلی و اولیه را هم مطالعه کنید، به‌خصوص مقاله‌هایی را که استادان مسلم موضوع مورد نظر نوشته‌اند. یکی از مشکلات شرحهای جدیدِ بعضی از مباحث این است که ممکن است بیش از حد شسته‌ورفته باشند. از آنجا که هر نویسندهٔ جدید برهانها و شرحهای هوشمندانه‌تری از یک نظریه می‌یابد، این شرحها به سوی شرحی که شامل «کوتاه‌ترین برهانها»ست تکامل پیدا می‌کند. بدبختانه، این شرحها اغلب به شکلی هستند که دانشجوی تازه‌کار را به این اندیشه فرو می‌برد که «چگونه کسی این برهانها را ابداع کرده است؟» با مراجعه به متون اصلی شخص معمولاً می‌تواند سیر تکامل طبیعی موضوع را ببیند و دریابد که چگونه موضوع به شکل نوینش رسیده است. (آن گامهای نامنتظر و هوشمندانه که شخص را از نبوغ ابداع‌کننده دچار حیرت می‌کنند همچنان باقی

1. fellowship
2. Gromov's nonsqueezing theorem
3. symplectic geometry

1. Peter Sarnak

می‌مانند، اما چنین گامهایی خیلی کمتر از آن هستند که ممکن است فکر کنید).
به عنوان مثال، معمولاً توصیه می‌کنم که مقاله‌های اصلی وایل دربارهٔ نظریهٔ نمایش گروههای لی فشرده و به‌دست آوردن دستور مشخصهٔ وایل[1] در کنار یکی از شرحهای نوین از این مطلب مطالعه شود. همچنین، کتاب مفهوم رویهٔ ریمان[2] وایل را به کسی که آنالیز مختلط را می‌داند و می‌خواهد دربارهٔ نظریهٔ نوین رویه‌های ریمان، که اهمیت زیادی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی دارد، بیاموزد، سفارش می‌کنم. همچنین مطالعهٔ مجموعه آثار ریاضیدانان برجسته‌ای مانند وایل آموزنده است. تقریباً همواره یک خط طبیعی فکری وجود دارد که شخص را که از یک مقاله به مقالهٔ دیگر رهنمون می‌شود و درک می‌کنید که مراحل و نتایج خاصی اجتناب ناپذیرند. این امر می‌تواند بسیار الهام‌بخش باشد.

(ii) از سوی دیگر، باید در عقاید جزمی و «فرضیه‌های متعارف» تردید کنید، حتی اگر این فرضیه‌ها را افراد نخبه‌ای مطرح کرده باشند. بسیاری از فرضیه‌های متعارف براساس موارد خاصی که شخص درک کرده است ساخته شده‌اند. در ورای آن موارد، گاهی اوقات این فرضیه‌ها چندان فرقی با آرزو و خیال ندارند: شخص فقط امید دارد که تصویر کلی با تصویری که از موارد خاص برمی‌آید خیلی متفاوت نباشد. مواردی را می‌شناسم که افرادی شروع به اثبات حکمی کردند که باور عمومی به‌درستی آن گواهی می‌داد و هیچ پیشرفتی نکردند تا اینکه به‌طور جدی در درستی آن تردید کردند. از سوی دیگر، کمی ناراحت‌کننده است که می‌بینم گاهی، بدون دلیل معقولی، سایهٔ شک و تردید بر بعضی فرضیه‌های خاص، مانند فرضیهٔ ریمان، یا بر اثبات‌پذیری این فرضیه‌ها، افکنده می‌شود. هر چند دانشمند قطعاً باید موضع نقادانه‌ای اتخاذ کند (به‌خصوص در مورد بعضی از اشیای مصنوعی که ما ریاضیدانها ابداع کرده‌ایم)، از نظر روانی مهم است که باورهایی دربارهٔ دنیای ریاضی‌مان و دربارهٔ آنچه درست است و آنچه اثبات‌پذیر است داشته باشیم.

(iii) «مقدماتی» را با «آسان» اشتباه نکنید: برهان قطعاً می‌تواند مقدماتی باشد بدون اینکه ساده باشد. در واقع، مثالهای زیادی از قضیه‌هایی موجودند که اندکی استفاده از مطالب پیشرفته‌تر برهان آنها را آسان می‌کند و ایده‌های زیربنایی را برملا می‌سازد، ولی در شرحی مقدماتی که شامل مفاهیم پیشرفته‌تر نیست، ماجرا پنهان می‌ماند. در عین حال، مواظب باشید که پیشرفتگی را با کیفیت یا «ملاط استدلال» یکی نگیرید (این عبارت را ظاهراً دوست دارم زیاد به این معنی به‌کار ببرم: خیلی از دانشجویان پیشینم در این باره سر به سرم گذاشته‌اند). در بین بعضی از ریاضیدانان جوان گرایشی وجود دارد که فکر می‌کنند به کار بردن زبان پیچیده و پرزرق و برق به معنای ژرف بودن کار آنهاست. با وجود این، ابزارهای نوین وقتی به‌درستی درک شوند و با اندیشه‌های نو ترکیب شوند، قدرتمندند. افرادی که در بعضی زمینه‌ها (مثلاً نظریهٔ اعداد) کار می‌کنند و وقت و زحمت زیادی برای آموختن این‌گونه ابزارها صرف نمی‌کنند خود را در معرض ضرر و زیان بسیار قرار می‌دهند. نیاموختن این ابزارها چون خراب کردن یک ساختمان با تنها یک اِسکِنه است. حتی اگر در استفاده از اسکنه خیلی ماهر باشید، فردی مجهز به بُلدوزر، برتری عظیمی برای این کار دارد و نیازی ندارد که آنقدرها هم ماهر باشد.

(iv) کار پژوهش ریاضی خسته‌کننده و سرشار از فراز و نشیب است. اگر نمی‌توانید به این حالت عادت کنید، ریاضیات ممکن است پیشهٔ مطلوبی برای شما نباشد. بیشتر اوقات آدمی گیر می‌افتد، و اگر این امر شامل شما نمی‌شود، یا استعداد خارق‌العاده‌ای دارید یا درگیر با مسائلی هستید که پیشاپیش می‌دانسته‌اید چگونه باید آنها را حل کنید. امکان این نوع کار وجود دارد، و ممکن است از کیفیت بالایی هم برخوردار باشد، ولی بیشتر پیشرفتهای شگرف با کار سخت و جانفرسا، با برداشتن گامهای اشتباه زیاد و طی کردن دوره‌های طولانی از پیشرفت اندک یا حتی پسرفت، به‌دست آمده‌اند. راههایی وجود دارند که این جنبه از پژوهش را کمتر ناخوشایند می‌کند. این روزها افراد زیادی با هم کار می‌کنند، که علاوه بر برتری روشن این شیوه از لحاظ کنار هم آوردن تخصصهای گوناگون به فرد اجازه می‌دهد که خستگی‌اش را با دیگران قسمت کند. برای بیشتر مردم، این امر نقطهٔ مثبت بزرگی است (و در ریاضیات، برخلاف رشته‌های دیگر، سهم متناظر از خوشی و اعتبار به خاطر به‌دست آوردن یک پیشرفت بزرگ، دست‌کم تاکنون، به جنگ و دعواهای بزرگ نینجامیده است). اغلب به دانشجویان سفارش می‌کنم که در هر لحظه، حوزه‌ای از مسائل را در دسترس داشته باشند. آسان‌ترین این مسائل باز باید آنقدر سخت باشد که به شما احساس رضایتمندی دهد (چرا که بدون این احساس، هدف چیست؟) و اگر بخت یارتان باشد، مورد علاقهٔ دیگران واقع شود. سپس باید حوزه‌ای از مسائل چالش‌برانگیزتر داشته باشید، که سخت‌ترین آن مسائل باید مسائل حل‌نشدهٔ عمده باشند. شخص باید به این‌گونه مسائل در طی زمان بپردازد و به آنها از دیدگاههای گوناگون نگاه کند. مهم است که خود را در معرض احتمال حل مسائل بسیار سخت قرار دهید، شاید از اندکی بختْ‌یاری بهره‌مند شوید.

(v) هر هفته به سخنرانیهای عمومی دانشکده‌تان بروید، به این امید که برگزارکنندگان آنها سخنرانان خوبی انتخاب کرده‌اند. مهم است که آگاهی وسیعی از عرصهٔ ریاضی داشته باشید. در این سخنرانیها علاوه بر کسب اطلاع از مسائل جالب و پیشرفتی که دیگران در زمینه‌های دیگر کرده‌اند، ممکن است هنگامی که سخنران دربارهٔ مطلبی کاملاً متفاوت سخنرانی می‌کند، اندیشه‌ای در ذهنتان برانگیخته شود. همچنین، ممکن است فن یا نظریه‌ای بیاموزید که در یکی از مسائلی که به آن می‌پردازید به‌کار آید. در دوران اخیر، تعداد قابل ملاحظه‌ای از حلهای جدیدِ برجسته‌ترین مسائل قدیمی از ترکیبی نامنتظر از ایده‌ها از شاخه‌های گوناگون ریاضی نشأت گرفته‌اند.

******

• این مقاله ترجمهٔ مطلبی با عنوان «advice to a young mathematician» در صفحات ۱۰۰۶ـ۱۰۱۵ از کتاب *The Princeton Companion to Mathematics* است. این کتاب در بخش نقد و بررسی این شماره با عنوان «همراه‌نامهٔ ریاضی پرینستن» معرفی شده است.

1. The Weyl character formula
2. *The Concept of a Riemann Surface*

روش علمی، روش آماری، و سرعت نور• (۱)

آر.جی. مکای*، آر. دبلیو. اُلدفُرد**
ترجمهٔ الهه وحیدی‌اصل

۱. مقدمه

«وحدت علم صرفاً در روش آن است نه در محتوای آن» (کارل پیرسون، ۱۸۹۲ [۴۳]، ص. ۱۲).

> «آمار آن شاخه از روش علمی است که با داده‌های به‌دست آمده از شمارش یا اندازه‌گیریِ خصوصیات گروههایی از پدیده‌های طبیعی سروکار دارد. در این تعریف، «پدیده‌های طبیعی» شامل همهٔ رخدادهای جهان بیرونی است، خواه انسانی باشد یا نه» (کندال، ۱۹۴۳ [۳۰]، ص. ۲).

این دیدگاه که آمار شامل توصیف کَمّی روش علمی است از زمان پیدایش آمار به‌عنوان یک رشتهٔ علمی مطرح بوده است. با این حال، آماردانان، شاید به‌دلیلی موجه، از بیان صریح ارتباط بین آمار و روش علمی پرهیز کرده‌اند. در طول قرنها، متفکران بزرگ دربارهٔ اینکه علم از چه چیزی تشکیل می‌یابد و در مورد روش آن به مباحثه پرداخته‌اند بی‌آنکه راه‌حلی بیابند (برای مثال، ر.ک. [۳۶]). و در قرن حاضر، بررسیهای تاریخی رویدادهای علمی (برای مثال، [۳۲]) دربارهٔ روش اکتشاف علمی شبهه ایجاد کرده است. یک موضع رادیکال، که از طریق بازبینی کارهای گالیله مطرح شد، همان سخن پل فایرابنتِ[1] فیلسوف است که دربارهٔ روش در علم چنین می‌نویسد:

> ... رویدادها، شیوه‌ها، و نتایجی که علوم را تشکیل می‌دهند هیچ ساختار مشترکی ندارند؛ هیچ عنصری نیست که در هر تحقیق علمی موجود باشد اما در هیچ جای دیگر حضور نداشته باشد (فایرابنت، ۱۹۸۸ [۱۹]، ص. ۱، تأکید از اوست).

فایرابنت سپس، باکمی شوخ‌طبعی، مطرح می‌کند که تنها روش جهانشمول که ممکن است در علم یافت شود «بی‌روشی» است. اینکه دیدگاه فایرابنت در مورد علم به‌طور عام صادق باشد، قابل بحث است؛ و اینکه این دیدگاه در مورد آمار صادق نیست، تزِ اصلی این مقاله است.

در این مقاله، با بازبینیِ نسبتاً تفصیلیِ یک مطالعهٔ خاص، یعنی تعیین سرعت نور توسط آلبرت آبراهام مایکلسن [۳۷] در سال ۱۸۷۹، آنچه را ساختار مشترک آمار تلقی می‌کنیم و آنچه را می‌خواهیم روش آماری بنامیم، شرح می‌دهیم.

دلایل متعددی برای انتخاب مطالعهٔ مایکلسن وجود دارند. نخست آنکه، به علم فیزیک گاهی به‌عنوان علمی نگریسته می‌شود که چالشی بزرگ‌تر در برابر توضیح روش آماری قرار می‌دهد تا، مثلاً، پزشکی یا علوم اجتماعی که در آنها جوامع مورد نظر خوش‌تعریف هستند. یک مورد اولیه، تردید اِج‌ورث در ۱۸۸۴ در توصیف آمار به‌عنوان «علم میانگینها به‌طور کلی (از جمله مشاهدات فیزیکی)» بود و در عوض، این توصیفِ مصالحه‌آمیز کمتر «فلسفی» را ترجیح داد که [آمار] علم «آن دسته از میانگینهایی است که توسط پدیده‌های اجتماعی مطرح می‌شوند» [۱۸].

دوم اینکه، سرعت نور در خلأ یک ثابت بنیادی است که مقدار آن «معلوم شده» است؛ در ۱۹۷۴، مقدار آن برابر با ۲۹۹۷۹۲٫۴۵۸ کیلومتر بر ثانیه تعریف شد. بنابراین، ما در وضعیت استنباطیِ فوق‌العاده نادری یعنی «دانستن پاسخ» هستیم (آن زمان مقادیر تعیین‌شده چنان تغییرپذیری کمی داشتند که آن را تا یک جزء در 10^9 جزء معلوم در نظر می‌گرفتند، و متر استاندارد را نمی‌شد با چنین دقتی اندازه‌گیری کرد. دومی نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود، و مدت زمانی است که ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ دوره از تابش متناظر با گذار بین دو تراز فوق ریز از اتم سزیم-۱۳۳ طول می‌کشد. حال متر به صورت مسافتی تعریف می‌شود که نور از میان خلأ در ۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه می‌پیماید! ر.ک. [۹]).

سوم اینکه، مایکلسن بررسی‌اش را در دوره‌ای گزارش کرد که انتشار میزان قابل‌توجهی از جزئیات بررسی امکان‌پذیر بود، و این امر به دیگران امکان می‌داد از مشکلاتی که او با آنها مواجه بود و راه‌حلهایی که یافته بود، آگاهی پیدا کنند.

1. Paul Feyerabend

چهارم اینکه، تعیین سرعت نور برای علم و فناوری اهمیت داشته (و هنوز هم دارد) در نتیجه، تاریخچهٔ آن به‌قدری غنی است که می‌توان پشت‌صحنه‌ای تدارک دید و پرسشهای بزرگ‌مقیاس دربارهٔ ماهیت علم و آمار را در آن مورد بحث قرار داد.

پنجم، این مقداریابیها در نوشتگان آماری در دسترس هستند و نخست در مقالهٔ استیگلر [۴۷] دربارهٔ برآوردهای استوار مکان پدیدار شدند.

سرانجام و مهم‌تر از همه، مطالعهٔ تاریخی این خصوصیت مهم را دارد که کاملاً مبتنی‌بر مطالب و مواد عمومی است. اطلاعاتی را که با هم به‌صورت یک منبع واحد جمع‌آوری می‌شوند، می‌توان در مقایسه با منابع متداول بازبینی کرد و با دستیابی به مطالب تاریخی جدید بهبود بخشید، و این اطلاعات می‌تواند بستر آزمون مشترکی برای استفادهٔ دیگران باشد.

این بحثها مستلزم بررسی زمینه‌های جداگانه‌ای با جزئیات متفاوت است. نیاز به گشت و گذار تاریخی گسترده‌ای داریم تا شاید منظور از روش علمی را بفهمیم. این کار در بخش ۲ انجام می‌شود، که در آن تاریخچه‌ای از تعیین سرعت نور از روزگار باستان تا اواخر دههٔ ۱۸۰۰ را ارائه می‌کنیم. با آماده‌شدن صحنه، مبانی اپتیکی، ابزارها، و روش نخستین مقداریابیهای سرعت نور به‌وسیلهٔ مایکلسن در بخش ۳ توصیف می‌شوند. اینها جزئیات لازم برای بحث دربارهٔ روش آماری را فراهم می‌کنند. ساختاری که ما پیشنهاد می‌کنیم در بخش ۴ توصیف می‌شود. روش علمی در بخش ۵ مورد بازبینی قرار می‌گیرد و در بخش ۶ با روش آماری مقایسه می‌شود.

۲. سابقهٔ تاریخی

اندیشهٔ ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ ق.م.) به‌مدت نزدیک دوهزار سال بر علم غربی حکفرما بود. کیهان‌شناسی او چنان قدرتمند است که او را وادار به این اظهارنظر می‌کند که «... نور ناشی از وجود چیزی است که از نوع حرکت نیست» ([۵]، $۴۴۶^b۲۵ - ۴۴۷^a۱۰$). نه حرکتی، و نه سرعتی. و اگر اینها کافی نباشند، استدلال به نفع سرعت متناهی به‌سادگی رد می‌شود:

> اِمپدوکلس (و همراه او همهٔ افراد دیگری که از عبارات مشابهی استفاده می‌کردند) در سخن گفتن از اینکه نور «در حال حرکت است» یا در لحظهٔ معین بین زمین و پوش آن قرار دارد اشتباه کرده‌اند. حرکت نور برای ما قابل مشاهده نیست، این دیدگاه هم با شواهد استدلالی روشن و هم با واقعیتهای مشاهده‌شده مغایرت دارد؛ اگر مسافت پیموده‌شده کوتاه می‌بود، حرکت شاید غیرقابل مشاهده می‌بود، اما وقتی مسافت از خاور دور به انتهای باختر باشد، باورکردن موضوع بیش از حد مشکل است.
>
> (ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ ق. م.)، در باب روح: مقالهٔ II [۴]، $۴۱۸^b۲۰ - ۴۱۸^b۲۷$).

این دیدگاه را بسیاری از متفکران در تاریخ غرب بازگو کرده‌اند: از جمله آنها اوگوستن (حدود ۳۵۴ـ ۴۳۰)، جان پچام[1] (حدود ۱۲۳۰ـ۱۲۹۲)، آلبرت کبیر (حدود ۱۲۰۰ـ ۱۲۸۰)، توماس آکویناس (حدود ۱۲۲۵ـ۱۲۷۴)، و ویتلو[2] (حدود ۱۲۳۰ـ۱۲۷۵) هستند. عده‌ای نیز معتقد به دیدگاه مقابل بودند، از جمله ابن هیثم (حدود ۹۶۵ـ ۱۰۴۰) و راجر بیکن[3] (حدود ۱۲۱۹ـ۱۲۹۲). اما در نبودِ برهان تجربی برخلاف آن، می‌شد به نفع ادراک آنی منبع حکم صادر کرد. در غیاب داده‌ها، استدلالهای موافق یا مخالف به ناچار بر مبنای نظریهٔ نور در آن عصر، یا براساس تفسیر دیدگاههای صاحبنظران باستان یا عقاید دینی غالب، یا استدلالهای ریاضی که وجوب یا بطلان یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کرد، استوار می‌شد [۳۴].

بحث تا آغاز «انقلاب علمی» قرن ۱۷ ام ادامه یافت. لیندبرگ[1] شواهدی مقدماتی از مباحث اروپای قرون وسطی را ارائه می‌دهد [۳۴]. غولانی همچون فرانسیس بیکن[2] (۱۵۶۱ – ۱۶۲۶)، یوهان کپلر[3] (۱۵۷۱ـ ۱۶۳۰)، و رنه دکارت (۱۵۹۶ـ ۱۶۵۰) به نامتناهی‌بودن سرعت نور باور داشتند. بیکن با ملاحظهٔ فواصل عظیمی که نور می‌بایست از ستارگان تا زمین بپیماید، تردیدهایی دربارهٔ نامتناهی‌بودن سرعت نور داشت، اما پذیرش چنین سرعتی را در مقایسه با سرعتهای سرسام‌آور ستارگان حول زمین، قابل‌هضم‌تر می‌یافت! کلمات قصار ۴۶ از جلد دوم کتاب نووم ارگانوم، مثلاً [۶]، را ببینید.

دکارت، برای مثال، انتقال نور را به فشاردادن یک چوب سخت تشبیه کرد ــ لحظه‌ای که یک انتهای آن (منبع) فشار داده شود، انتهای دیگر حرکت می‌کند (ادراک) ([۲۴]، صص. ۲۵۸ـ۲۵۹). این قیاس، قوی است؛ هیچ حرکت قابل درکی در هیچ نقطه‌ای در امتداد چوب وجود ندارد، مهم نیست که طول چوبی که مورد استفاده قرار گرفته چقدر باشد! دکارت به‌شدت به این دیدگاه باور داشت؛ زمانی که همکار و مربی علمی‌اش، ایزاک بیکمن[4] (۱۵۸۸ـ۱۶۳۷) ادعا کرد که آزمایشی را انجام داده که نشان می‌دهد سرعت نور متناهی است، دکارت این ادعا را با گفتن اینکه اگر این ادعا درست باشد، او (دکارت) از فلسفه هیچ نمی‌داند و تمام نظریه‌اش باطل خواهد شد، رد کرد! (ر.ک. نکتهٔ ۱). بیکمن و دکارت نتوانستند در مورد آزمایشی که موضوع را رفع و رجوع کند، توافق کنند (ر.ک. نکتهٔ ۲).

در میان این غولان، گالیله گالیلئی (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) یکه و تنها برعدم توافق خود پای می‌فشارد؛ او نوشت:

> ساگردو[5]: ... من نمی‌توانم باور کنم که عمل نور، هر چقدر هم خالص، می‌تواند بدون حرکت باشد، و درواقع سریع‌ترین حرکت را دارد.
>
> سالویاتی[6]: اما سرعت نور را چه و چقدر بزرگ درنظر بگیریم؟ آیا ممکن است آنی و زودگذر باشد؟ یا مانند بقیهٔ حرکتها مستلزم زمان است؟ آیا می‌توانیم خودمان را با آزمایشی در مورد چگونگی آن مجاب سازیم؟
>
> (گالیله‌گالیلئی (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲)، دو علم جدید (۱۶۳۸) [۲۳]، ص. ۴۹).

در همان کتاب، گالیله برهانی را برای تعیین آنی‌بودن یا نبودن نور پیشنهاد کرد. این برهان اساساً همان بود که بیکمن پیش‌تر پیشنهاد داده بود و همان‌قدر خشم دکارت را برانگیخت. در نامه‌ای به دانشمند آزمایشگر بزرگ مارین مرسن[7] (۱۵۸۸ـ۱۶۴۷)، به‌تاریخ ۱۱ اکتبر ۱۶۳۸، دکارت نقد آتشینی از کتاب گالیله (ر.ک. نکتهٔ ۳) به‌عمل آورد. راجع به آن برهان پیشنهادی، دکارت نوشت:

1. John Pecham 2. Witelo 3. Roger Bacon

1. Lindberg 2. Francis Bacon 3. Johannes Kepler
4. Issac Beeckman 5. Sagredo 6. Salviati 7. Marin Mersenne

«آزمایش او برای دانستن اینکه نور در یک لحظه انتقال می‌یابد یا نه، بی‌فایده است، زیرا ماه‌گرفتگیها، که ارتباطِ بسیار نزدیکی با محاسباتی دارند که از روی آنها انجام می‌شود، بهتر از هر چیزی که بتوان برروی زمین آزمایش کرد این غیرقابل مقایسه‌بودن را اثبات می‌کند» ([۱۶]، ص. ۳۸۹). (به‌نظر می‌رسد که این تکذیبیه مبتنی‌بر استدلالی باشد که او، آن‌گونه که در نکتهٔ ۲ توصیف شد، برای بیکمن ارائه داد.) معهذا، این برهان توسط اعضای آکادمی فلورانس مورد آزمایش قرارگرفت، اما موفقیتی کسب نشد [۱۲]. حرکت نور یا آنی یا به‌قدرکافی نزدیک به آن بود یعنی سریع‌تر از آن بود که بتوان آن را اندازه گرفت.

در ۱۶۷۶، نخستین شواهد تجربی از سرعت متناهی ارائه شد. ستاره‌شناس دانمارکی اُله رُمر[1] (۱۶۴۴ـ۱۷۱۰)، زمانی که روی موضوع کاملاً متفاوتی تحقیق می‌کرد، داده‌هایی جمع‌آوری کرد و به‌تفاوتی دست یافت که به این اکتشاف منتهی شد. جالب اینجاست که این کشف مهم و کاملاً خالص علمی زمانی اتفاق افتاد که رُمر روی مسأله‌ای کار می‌کرد که امروزه آن را بسیار کاربردی می‌نامیم.

نکتهٔ ۱. (از [۱۴B]، ص. ۳۰۸):

"*Contra ego, si quae talis mora sensu perciperetur, totam meam Philosophiam funditus eversam fore inquiebam.*"

ترجمهٔ خام این گفته این است: «درست برخلاف آن، من نگرانم که اگر تأخیری از این نوع به‌وسیلهٔ حواس پنجگانه درک شود، کل فلسفهٔ من در معرض ابطال قرار می‌گیرد».

نکتهٔ ۲. موفقیت‌آمیز بودن آزمایش بیکمن [۸] در سال ۱۶۲۹ قابل تردید بود. آزمایش عبارت بود از شلیک یک خمپاره و مشاهدهٔ روشنایی آن در آینه‌ای که حدود ۱۸۵۱٫۸۵ متر دورتر قرارگرفته بود؛ حرکت ساعتی که درکنار خمپاره قرارگرفته بود مدت زمان سپری‌شده را اندازه‌گیری می‌کرد. با مقادیر امروزی، زمان رسیدن روشنایی به آینه و بازگشت آن حدود ۱/۱۰۰۰۰۰ ثانیه است ! دکارت استدلال می‌کند که حتی اگر بیکمن می‌توانست تأخیری به میزان ۱/۲۴ ضربان قلب (یا حدود ۱/۲۴ ثانیه را، که سرعتی تنها حدود ۸۹ کیلومتر بر ثانیه از آن حاصل می‌شود)، کشف کند در آن صورت آشکارساختن تأخیر بین رخداد و مشاهدهٔ گرفتگی ماه که در حدود یک ساعت است امکان‌پذیر می‌بود. اشکالهای این استدلال به‌تفصیل در [۴۵] مورد بحث قرارگرفته است.

نکتهٔ ۳. برای مثال، «. . . سبک او در نوشتن مطالب به شکل گفتگو، که در آنها سه شخص را معرفی می‌کند که هیچ کاری نمی‌کنند جز اینکه به‌نوبت از هر یک از ابداعات او تمجید کنند به بالابردن قیمت متاع او کمک می‌کند» ([۱۶]، ص. ۳۸۸). انتقادهای جدی عموماً متوجه گالیله می‌شود که علل پدیده‌ای را که در آن تحقیق می‌کرد، تشخیص نمی‌دهد. برای اغلب دانشمندان در آن زمان، و به‌خصوص برای دکارت، لب کلام علم در همین خلاصه می‌شود.

۱.۲ طول جغرافیایی

یکی از مسائل مهم کاربردیِ آن زمان تعیین طول جغرافیایی به‌خصوص در دریا بود. مبانی این محاسبه، مقایسهٔ زمان محلی در دریا با زمان در یک نقطه مرجع ثابت ــ نصف‌النهار اصلی ــ است. اگر مثلاً زمان محلی دو ساعت زودتر از زمان نصف‌النهار اصلی تعیین‌شده باشد، موقعیت باید ۳۰ = ۲/۲۴ × ۳۶۰ درجهٔ طول جغرافیایی در غرب نصف‌النهار اصلی باشد.

زمان را می‌توان به‌طور نجومی تعیین کرد. برای مثال، وقت محلی صفر را می‌توان زمانی تعریف کرد که ستاره‌ای مثلاً آرکتوروس[1]، در حال عبور از خط فرضی طول جغرافیایی که مستقیماً در راستای شمال ـ جنوب از موقعیت محلی بگذرد مشاهده شود؛ وقت صفر استاندارد متناظر زمانی است که همان ستاره از نصف‌النهار اصلی می‌گذرد. ستارگان به‌قدرکافی از ما دور هستند که این دو عبور در دو لحظهٔ متفاوت از زمان اتفاق بیفتد. جدولهایی که به‌دقت از زمانهای عبور ستارگان مختلف از نصف‌النهار اصلی تهیه می‌شوند، به دریانوردان این امکان را می‌دهند که وقت محلی خود را تنظیم کنند. برای تعیین اختلاف میان ساعت محلی و ساعت استاندارد، می‌توان از اتفاقات نجومی نزدیک‌تری چون اختفا یا گرفتگی ماه یا یک سیاره استفاده کرد. این اتفاقات، صرف‌نظر از موقعیت راصد برکرهٔ زمین اساساً در یک لحظهٔ یکسان از زمان مشاهده می‌شوند، و گذشته از اینها قابل پیش‌بینی هستند. بنابراین، مقایسهٔ وقت محلی یک اتفاق نزدیک با زمان استاندارد جدول‌بندی‌شدهٔ آن، تفاوت زمانی را که برای محاسبهٔ طول جغرافیایی مورد نیاز است به‌دست خواهد داد.

در ۱۶۰۹، گالیله پس از شنیدن خبرهایی از اهالی فلاندر دربارهٔ یک تلسکوپ ساخته‌شده از دو عدسی که قابلیت بزرگ کردن تصویر اجسام دور را داشت، درصدد طراحی و ساخت نخستین تلسکوپ سودمند نجومی برآمد. [به گفتهٔ استیلمن دریک[2] ([۱۵]، ص. ۲۹)، هانس لیپرشی[3]، عدسی‌تراشی از اهالی هلند، را عموماً مخترع تلسکوپ می‌دانند که در سال ۱۶۰۸ تقاضای حق ثبت اختراعش را داد]. در ماه مارس سال بعد، گالیله اعلام کرد که چهار قمر مشتری را کشف کرده است [۲۱]. برای نخستین بار، در اینجا یک سیستم مداری وجود داشت که آشکار بود حول زمین نمی‌چرخد. گالیله استدلال کرد که این مطلب، گواه محکمی علیه نظام بطلمیوسی است (که طبق آن همهٔ اجرام آسمانی حول یک زمینِ ثابت می‌چرخند) و به نفع نظام خورشید مرکزی کپرنیکی است. حمایت آشکار او از نظام کپرنیکی به‌عنوان نمایش واقعی حرکت سیارات (در تقابل با مدل محاسباتی مناسب) گالیله را به تعارض با کسانی واداشت که بعضی عبارات کتاب مقدس را به‌صورت ظاهری تفسیر می‌کردند [۲۲]. برخی از این افراد نفوذ قابل توجهی در کلیسای کاتولیک رم داشتند. گالیله به فرمان پاپ اوربان[4] هشتم، از نشر آثارش محروم شد و از سال ۱۶۳۳ تا زمان مرگش در ۱۶۴۲ تحت بازداشت خانگی قرار داشت. این کار او را از ادامهٔ کار علمی باز نداشت (بازدیدکنندهٔ امروزی از موزهٔ فلورانس می‌تواند صندوق شیشه‌ای عاجکاری‌شده‌ای را ببیند که یادگاری طعنه‌آمیزی را نشان می‌دهد ــ انگشت میانی استخوانی گالیله که به سمت آسمان اشاره می‌کند).

اما این اکتشاف مهم علمی دارای پتانسیل تجاری نیز بود. فیلیپ سوم، پادشاه اسپانیا، جایزهٔ معتنابهی به هر شخصی می‌داد که بتواند روشی علمی برای تعیین موقعیت کشتی در زمانی که از دید خشکی ناپدید می‌شود به‌دست آورد. این ایده به ذهن گالیله خطور کرد که با استفاده از زمانهای پیش‌بینی‌شدهٔ گرفتگی اقمار مشتری، ساعت سماوی مشترک مورد نیاز برای تعیین طول جغرافیایی را به‌دست آورد. در نوامبر ۱۶۱۶، مذاکراتی را با اسپانیا برای

1. Ole Römer

1. Arcturus 2. Stillman Drake 3. Hans Lippershey
4. Pope Urban

کاربردهای ناوبری اکتشافات نجومی خود آغاز کرد و در ۱۶۱۷، در حالی که به مذاکرات خود با اسپانیا ادامه می‌داد، به کارِ ساخت تلسکوپی قابل استفاده در دریا پرداخت [۱۵]. متأسفانه جداولی که تهیه کرده بود به‌قدر کافی برای هدف موردنظر دقیق نبودند ــ در نظریهٔ موجود در آن زمان، اختلالات اقمار که به‌سبب برهم‌کنش آنها ایجاد می‌شد، به‌حساب نیامده بود [۱۳].

گرچه بسیاری از نویسندگان متون از کاربرد تلسکوپ در دریا طرفداری می‌کردند، آنهایی که دشواری عملی هدایت یک تلسکوپ بسیار طویل به‌سوی مشتری از روی یک کشتی در حال حرکت را درک می‌کردند نسبت به روش پیشنهادی شک داشتند و بی‌تردید اسباب تفریح آنها بود. این روش هیچ‌گاه در دریا با موفقیت همراه نشد (این مسأله بیش از ۱۵۰ سال، تا زمانی که جان هریسن مخترع انگلیسی ساعتهای قابل حمل دقیقی ساخت، حل نشده باقی ماند. برای شرح عامه‌پسندی از ماجرا، ر.ک. [۴۶]). اما در خشکی، مقادیر بسیار دقیقی از طول جغرافیایی را می‌شد به این روش به‌دست آورد و نتیجهٔ آن، اصلاحاتی اساسی در جغرافیای قرن ۱۷ و ۱۸ام بود.

۲.۲ نخستین شواهد

در ۱۶۷۱، رُمر به ون[1]، جزیره‌ای مسکونی نزدیک کپنهاک، رفت تا در تعیین دوبارهٔ طول جغرافیایی رصدخانه‌ای که در آنجا واقع بود کمک کند. وی همراه با دیگران، رصدکردن مجموعه‌ای از گرفتگیهای یو[2]، بزرگ‌ترین قمر مشتری، را آغاز کرد. در پایان، آنها اطلاعات مربوط به هشت ماه رصد یا، چون قمر یو یک بار گردش حول مشتری را در ۴۲ ساعت انجام می‌دهد، زمانهای حدود ۱۴۰ گرفتگی در ۲/۳ از سال را در دست داشتند. فواصل زمانی بین این گرفتگیها منظم نبودند اما مطابق با مکانی که زمین در مدار خود قرار داشت ظاهر می‌شدند. طول فاصله با نزدیک‌شدن زمین به مشتری کوتاه‌تر و با دورشدن زمین بلندتر می‌شد؛ زمان پیش‌بینی‌شدهٔ یک گرفتگی به‌طور ریاضی، در صورتی که زمین به مشتری نزدیک بود بسیار زود و در صورتی که زمین از مشتری دور بود بسیار دیر بود. این نقص برازش سیستماتیک به رُمر این اجاره را داد که در پاریس در سپتامبر ۱۶۷۶ اعلام کند که گرفتگی‌ای که برای ۹ نوامبر آن سال پیش‌بینی شده بود به واقع ۱۰ دقیقه دیرتر رخ خواهد داد. مشاهده نظر او را تأیید کرد و رُمر استدلال کرد که اختلاف به واسطهٔ متناهی بودن سرعت نور است. هر چه ما دورتر از منبع نور باشیم، نور زمان بیشتری برای رسیدن به ما نیاز دارد.

برمبنای این رصدها، رُمر برآورد کرد که نور حدود ۲۲ دقیقه برای گذر از قطر کامل مدار زمین نیاز دارد یا حدود ۱۱ دقیقه زمان لازم است تا نوری که از خورشید می‌آید در زمین به ما برسد. بر این اساس، او سرعت نور را حدود ۲۱۴۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه برآورد کرد (برای اطلاعات بیشتر از کار رُمر، ر.ک. [۳۱]. برای اطلاع از جزئیات این تحقیق، ر.ک. [۱۲]).

«اثبات» رُمر بلافاصله مورد اقبال همگانی قرار نگرفت. توضیحات جایگزین را جیان دومنیکو کاسینی[3] (۱۶۲۵ـ۱۷۱۲) که در آن زمان منجمی در آکادمی علوم تازه تأسیس در پاریس بود، عرضه کرد. در ۱۶۶۶ کاسینی جداولی را در مورد گرفتگی اقمار مشتری منتشر کرده بود که از طریق آن به‌وجود نابرابریهایی در فواصل زمانی گرفتگیهایی که به مکان مشتری در مدار بیضوی خودش وابسته بودند، پی برد. او به‌مدت کوتاهی در سال ۱۶۷۵ متناهی بودن سرعت نور را پذیرفته بود اما بعد آن را به نفع توضیحی سنتی‌تر کنار گذاشت. کاسینی و پس از او برادرزاده‌اش جیاکومو فیلیپو مارالدی[1] (۱۶۶۵ـ۱۷۲۹)، این نظر را در پیش نهادند که مدار مشتری و حرکت اقمار آن شاید بتوانند نابرابریهای مشاهده‌شده را توضیح دهند ([۵۰]، [۴۲]، و [۳۱]). بسیاری از منجمان بر این عقیده که حرکت نور آنی است، باقی ماندند.

گزارش بررسیهای جیمز برادلی[2] (۱۶۹۳ـ۱۷۶۲) (ر.ک. [۱] و [۳۱]) در سال ۱۷۲۹ موجب شد که تقریباً همه در مورد متناهی‌بودن سرعت نور اتفاق نظر پیدا کنند. برادلی که در حال مطالعهٔ اختلاف‌منظر[3] ستارگان بود، تغییرات سالانه‌ای را در موقعیت ستارگان کشف کرد که نمی‌شد آن را براساس اثر اختلاف منظر توضیح داد، ولی می‌شد آن را با حرکت زمین درصورتی که سرعت نور متناهی باشد تبیین کرد. برادلی برمبنای مشاهدات دقیق برآورد کرد که ۸ دقیقه و ۱۲ ثانیه طول می‌کشد تا نور از خورشید به زمین برسد، که در نتیجهٔ آن، مقدار سرعت نور ۳۰۱۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه است.

در ۱۸۰۹، برمبنای مشاهدات مربوط به گرفتگیهای مشتری طی ۱۵۰ سال، ژان باپتیست ژوزف دالامبر[4] (۱۷۴۹ـ۱۸۲۲) مدت‌زمانی را که طول می‌کشد تا نور از خورشید به زمین برسد، ۸ دقیقه و ۱۳٫۲ ثانیه برآورد کرد، که منجر به‌سرعتی حدود ۳۰۰۲۶۷٫۶۴ ≃ ۳۰۰۳۰۰ کیلومتر بر ثانیه می‌شود. زمان در اینجا همان‌گونه است که در [۴۲] گزارش شد. برای محاسبهٔ نور، فاصلهٔ بین زمین و خورشید باید معلوم باشد. دربرآوردی که در اینجا گزارش شد، فاصلهٔ به‌کار رفته ۱۴۸۰۹۲۰۰۰ کیلومتر بود که همان است که از ارقام برادلی در بالا استخراج می‌شود.

نتایج این برآمدهای اولیه نجومی در جدول ۱ خلاصه شده‌اند.

متأسفانه، اندازه‌گیریهای سرعت که با این روش انجام شد، به نظریهٔ نجومی و مشاهدات به‌کاررفته وابسته بود. سایمن نیوکم[5] (۱۸۳۵ـ۱۹۰۹) از رساله‌ای در ۱۸۷۵ سخن می‌گوید که گلازناپ[6] ارائه کرده و طبق آن، رصدهای مربوط به گرفتگیهای یو از سال ۱۸۴۸ تا ۱۸۷۰ نشان می‌دهد که مقادیری بسیار متفاوت برای سرعت را می‌توان از رده‌های مختلفی از این رصدها تحت فرضیه‌های متفاوتی به‌دست آورد ([۴۲]، ص. ۱۱۴). نشان داده شد که مقادیر مربوط به زمان خورشید تا زمین را می‌توان بین ۴۹۶ و ۵۰۱ ثانیه به‌دست آورد، که سرعتی حدود ۲۹۵۶۰۰ ≃ ۲۹۵۹۲٫۸ و ۲۹۸۶۰۰ ≃ ۲۹۸۵۷۲٫۶ کیلومتر بر ثانیه را (دوباره با استفاده از فاصلهٔ زمین تا خورشیدِ برادلی) نتیجه می‌دهد.

جدول ۱ بررسیهای مبتنی بر رصدهای نجومی

سال	مؤلفان	منابع مشاهداتی	سرعت (کیلومتر بر ثانیه)
۱۶۷۶	رُمر	اقمار مشتری	۲۱۴۰۰۰
۱۷۲۶	برادلی	ابیراهی ستارگان	۳۰۱۰۰۰
۱۸۰۹	دالامبر	اقمار مشتری	۳۰۰۳۰۰

1. Hven 2. Io 3. Gian Domenico Cassini

1. Giacomo Filippo Maraldi 2. James Bradley 3. parallax
4. Jean-Baptiste Joseph Delambre 5. Simon Newcomb
6. Glasenapp

در صورتی که هم منبع و هم مشاهده‌کننده زمینی باشند مقدار سرعت را بهتر می‌توان محاسبه کرد. زیرا همه چیز در آن صورت قابل دسترسی خواهد بود و می‌توان کنترل بیشتری در طول مطالعه و در نتیجه بر روی مشاهدات اعمال کرد. اما این ما را به یک مسألهٔ قدیمی باز می‌گرداند: چگونه سرعت نور را می‌توان روی زمین اندازه‌گیری کرد؟

۳.۲ مقداریابیهای زمینی

دو نفر را تصور کنید که در انتهای یک ریل طولانی ایستاده‌اند. نفر اول پوشش منبع نور پرقدرتی را در زمان معینی برمی‌دارد و نفر دوم زمانی را که نور مشاهده می‌شود، ثبت می‌کند. طول ریل تقسیم بر اختلاف بین زمان شروع و زمانی که نور مشاهده می‌شود اندازه‌ای از سرعت نور را به‌دست می‌دهد. (این آزمایش اساساً همان آزمایشی است که آیزک بیکمن در سال ۱۶۲۹ به دکارت پیشنهاد کرد. ر.ک. نکتهٔ ۲). البته، مشکل این است که نور چنان سریع حرکت می‌کند که مسافت باید بسیار بزرگ باشد و در غیر این‌صورت مدت زمان حرکت بسیار کوتاه است. اندازه‌گیری مستقیم مسافتهای فوق‌العاده بزرگ و فواصل زمانی فوق‌العاده کوتاه بسیار دشوار است.

در صورتی که هر دو مشاهده‌گر منابع نوری در اختیار داشته باشند که با پرده‌ای پوشانیده شوند، کار بهتر انجام می‌شود. اندازه‌گیری زمان موقعی آغاز می‌شود که مشاهده‌گر اول پرده را برمی‌دارد و نور را به دومی می‌فرستد. زمانی که مشاهده‌گر دوم نور اول را می‌بیند، پرده را از منبع نور دوم برمی‌دارد. سپس زمانی که مشاهده‌گر اول منبع نور دوم را می‌بیند دوباره منبعش را با پرده می‌پوشاند. مدت زمان بین پرده‌برداری و پوشاندن منبع نور اول، اندازهٔ مدت‌زمان لازم برای آن است که نور مسافت بین دو مشاهده‌گر را دوبار بپیماید. بهترشدن کار آشکار است. مسافت دوبرابر شده و به‌جای یک ساعت، دوساعت قرارداده شده که فرض می‌کنیم همزمان شده‌اند. این همان آزمایش پیشنهادی گالیله در ۱۶۳۸ است؛ قریب ۲۰۰ سال طول کشید تا این آزمایش به‌قدر کافی اصلاح شود تا نتیجه‌ای از آن به‌دست آید.

نوآوریهای ضروری را ایپولیت فیزو (۱۸۱۹ـ۱۸۹۶) مطرح کرد. یکی از نوآوریها این بود که به‌جای نفر دوم یک آینهٔ مسطح ثابت قرار گیرد که سطح آن بر پرتو نور ساطع‌شده از منبع عمود باشد. هنگامی که این کار انجام شد، پرتو نور به‌طور مستقیم به مبدأ خود بازتابانده می‌شد و یک منبع انسانی خطا به‌طور کامل از سیستم حذف می‌شد. نوآوری دوم، خودکارسازی پوشاندن و پرده‌برداری از منبع بود که موجب کاهش خطای منبع انسانی اول می‌شد.

این پیشرفتها، توأماً، به فیزو امکان داد به‌جای اندازه‌گیری مستقیم زمان، سرعت را به‌طور غیرمستقیم اندازه‌گیری کند. یعنی به‌جای اندازه‌گیری مدت‌زمان بین پرده‌برداری و پرده‌افکنی توانست حداقل سرعتی را اندازه بگیرد که پرده می‌بایست برای پوشاندن منبع نور در زمان دقیقی که نور بازمی‌گشت طی مسافت کند. ترفند او این بود که از چرخی که دندانه‌هایی به‌طور دقیق برآن تعبیه شده بود، استفاده شود که در حال چرخش مقابل منبع نور قرار داده می‌شد تا به‌عنوان یک پردهٔ متحرک عمل کند. دندانه‌ها منبع را می‌پوشاندند در حالی که شکافها آن را نشان می‌دادند و بنابراین چرخ دقیقاً همانند مشاهده‌گر گالیله عمل می‌کرد. هر نوری که به منبع باز می‌گردد به دندانه یا شکاف برخورد می‌کند. اگر چرخش چرخ به‌قدر کافی سریع تنظیم شده باشد که هر پرتوی که به بیرون فرستاده می‌شود به دندانه‌ای در مسیر برگشت برخورد کند، هیچ تصویری از منبع مشاهده نمی‌شود. دوبرابرکردن این سرعت، هنگامی که پرتوِ به بیرون فرستاده‌شده به درون شکاف موجود بعدی باز می‌گردد، تصویری کامل ایجاد می‌کند. سرعتِ سه‌برابر، هیچ تصویری ایجاد نمی‌کند و به‌همین ترتیب الی آخر. سرعت چرخش همراه با مسافت طی‌شده (درچارچوب کار فیزو، دوبرابر ۸۶۳۳ متر)، را می‌شد به‌اندازه‌ای از سرعت نور تبدیل کرد. بدین طریق، فیزو نخستین مقداریابی زمینی سرعت نور را در سال ۱۸۴۹ انجام داد.

دیگران به‌سرعت به تقلید از این دستاورد ماندگار پرداختند. تنها دو سال بعد لئون فوکو[1] (۱۸۱۹ـ۱۸۶۸) یکی از همکاران سابق فیزو، اجرای اندازه‌گیری‌های دقیق‌تری را برمبنای آینهٔ چرخان به‌جای چرخ دندانه‌ای میسرکرد.

۳. مقداریابیهای سرعت نور به‌وسیلهٔ مایکلسن در ۱۸۷۹

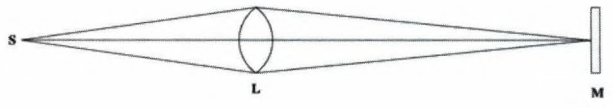
در نوامبر ۱۸۷۷، آلبرت آبراهام مایکلسن[2] (۱۸۵۲ـ۱۹۳۱)، که در آن زمان ناوبان دوم ۲۴ساله‌ای در نیروی دریایی ایالات متحده و معلم فیزیک در آکادمی نیروی دریایی ایالات متحده در آناپولیسِ مریلند بود، به ابزارهایی برای اصلاح رویکرد آینهٔ چرخان فوکو دست یافت. حتی با وجود این، لازم بود بررسیهای مقدماتی بسیاری انجام دهد تا از دستیابی به مقدار دقیق‌تری برای سرعت نور اطمینان حاصل کند. عین گفتهٔ خود او ([**۳۷**]، ص. ۱۱۵) چنین است: «بین آن زمان و ماه مارس سال بعد، چند آزمایش مقدماتی به‌منظور آشناکردن خودم با راهکارهای اپتیکی انجام دادم. تا این زمان تنها دستگاهی که از آن استفاده می‌شد از نوعی بود که می‌شد با اصلاحاتی در دستگاههای موجود در آزمایشگاه آکادمی نیروی دریایی به‌دست آورد».

در آوریل ۱۸۷۸، برقراری تماس با پروفسور سایمن نیوکم (۱۸۳۵ـ۱۹۰۹) از نیروی دریایی ایالات متحده ([**۴۹**]، ص. ۳۸) را آغاز کرد که در آن زمان سرپرست سالنامهٔ دریانوردی[3] نیروی دریایی بود و در نیروی دریایی و جامعهٔ علمی به‌عنوان اخترشناس شهرت داشت. مایکلسن دربارهٔ کار و روشهایش با نیوکم گفتگو کرد. با این حال، در این زمان، مایکلسن هنوز فرد ناشناخته‌ای بود که برای یک چنین تحقیق تخصصی از طرف نیروی دریایی ایالات متحده وجوهی در اختیارش قرار داده نمی‌شد. خوشبختانه، پس از ازدواج با مارگارت مک لین همینوی[4] در بهار ۱۸۷۷، می‌توانست برای پشتیبانی مالی به پدرزن متمولش روبیاورد. پدرزن او (در [**۳۷**]) از او تنها به‌عنوان «شخص محترم غیرنظامی» یادشده است) به‌شدت به‌نتایج اولیهٔ مایکلسن علاقه‌مند شده بود و در ژوییهٔ ۱۸۷۸ مبلغ ۲۰۰۰ دلار مورد نیاز او را برای خرید ابزارهای نوری دقیق جهت اجرای اندازه‌گیری‌هایش فراهم نمود. این‌گونه بود که مایکلسن تلاش مادام‌العمر خود را برای تعیین سرعت نور آغاز کرد.

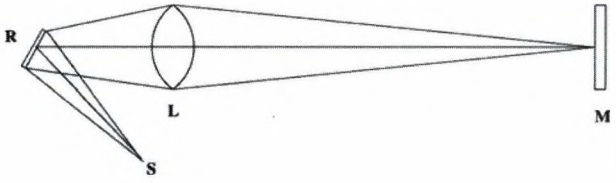
۱.۳ نظریهٔ اپتیکی

یکی از مشکلات ناشی از فواصل زیاد بین منبع و آینه در طرح فیزو این است که شدت نور با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. تصویر با قراردادن یک عدسی بین منبع و آینه، درخشان‌تر می‌شود. اگر، مطابق شکل ۱، منبع S و آینهٔ M به‌گونه‌ای قرار گیرند که یک نورِ با منبع نقطه‌ای از یکی، دقیقاً روی

1. Leon Foucault
2. Albert Abraham Michelson
3. *Nautical Almanac*
4. Margaret McLean Heminway



شکل ۱ S و M در موقعیت تصویر نقطه‌ای یکدیگر قرار دارند.



شکل ۲ قراردادن آینهٔ R بین منبع S و عدسی L.

دیگری متمرکز شود، آنگاه تصویر بازگشتی تا حد امکان شفاف خواهد بود.

توجه کنید که فاصلهٔ بین L و M با فاصلهٔ بین L و S برابر نیست. هرچه M از عدسی دورتر می‌شود، S را باید نزدیک‌تر کرد تا هر دو نقطه در کانون منبع نقطه‌ای دیگری باقی بمانند. این مطلب درصورتی صحیح است که هر دو نقطه خارج از فاصلهٔ کانونی عدسی باشند (نقطه‌ای که در آن باریکه‌های نور موازی در یک طرف عدسی یکدیگر را در طرف دیگر قطع می‌کنند).

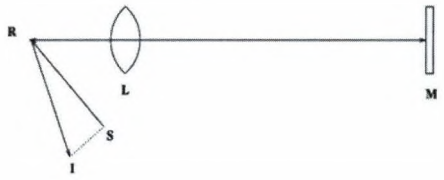
با دورترکردن S و M از یکدیگر، در همان حال که هر یک در کانون دیگری نگه‌داشته می‌شود، مسافتی را که نور باید طی کند و بنابراین مدت‌زمانی را که سپری می‌شود، افزایش داده‌ایم. با این حال مدت‌زمانی که سپری می‌شود بیش از حد کوتاه و اندازه‌گیری آن دشوار است.

فوکو، به‌جای چرخ فیزو، از آینه‌ای چرخان استفاده کرد که مطابق شکل ۲ بین S و L قرارگرفته بود [به‌گفتهٔ نیوکم [۴۲]، ص. ۱۱۷) این تدبیر بسیار پیش‌تر از آن توسط چارلز ویتستن[1] (۱۸۰۲ـ۱۸۷۵) پیشنهاد شده و دومینیک فرانسواز ژان آراگو[2] (۱۷۸۶ـ۱۸۵۳) در ۱۸۳۸ آن را امتحان کرده بود بدون آنکه موفقیتی کسب کند]. پرتوهای نورگسیلی از منبع که با R برخورد می‌کنند و از عدسی L می‌گذرند با M برخورد خواهند کرد و به منبع S بازخواهند گشت. اگر، پس از اینکه باریکهٔ نورگسیلی از S برای نخستین بار بر R فرود می‌آید بتوان R را پیش از برخورد دوباره با باریکه‌ای که از M باز می‌گردد، چرخاند، آنگاه باریکهٔ بازگشتی دیگر به‌طور دقیق به منبع S باز نمی‌گردد بلکه در جهت چرخش از S منحرف می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳ چرخاندن آینهٔ R موجب بازتاب پرتو بازگشتی می‌شود.

1. Charles Wheatstone 2. Dominique Francois Jean Arago



شکل ۴ تصویر بازگشتی I توسط آینهٔ چرخان R دورتر از منبع S قرار می‌گیرد.

هرگاه آینه را با سرعت ثابت بچرخانند، میزان انحراف برای همهٔ باریکه‌های نور که از L عبور می‌کنند، با M برخورد می‌کنند و باز می‌گردند، یکسان خواهد بود. در این صورت برای یک باریکهٔ پیوستهٔ نور ناشی از S و سرعت چرخش ثابت و زیاد R، تصویری از منبع به‌جای انطباق بر آن (همان‌گونه که در شکل ۴ نشان داده شده است) کنار S ظاهر خواهد شد. هرچه R سریع‌تر بچرخد یا هر چه $|RS|$ طویل‌تر باشد، تصویر بازگشتی I از منبع S دورتر قرار خواهد گرفت و اندازه‌گیری انحراف آسان‌تر خواهد شد.

با اندازه‌گیری دقیق میزان جابه‌جایی از S تا I (ر.ک. شکل ۴)، و فاصلهٔ بین S تا R، زاویهٔ انحراف را می‌توان تعیین کرد. با استفاده از این زاویه همراه با سرعت چرخش ثابتِ معلوم، می‌توان مدت‌زمانی را که لازم است تا نور فاصلهٔ از R تا M و بالعکس را بپیماید تعیین کرد. با تقسیم این فاصله برزمان مقداری برای سرعت نور به‌دست می‌آید.

فرض کنید θ نشان‌دهندهٔ زاویهٔ انحراف باشد. در این صورت به‌آسانی می‌توان نشان داد که زاویهٔ چرخش آینه $\theta/۲$ است. زاویهٔ θ برحسب درجه برابر است با $\arctan(|IS|/|IR|)$. اگر سرعت چرخش برحسب دور برثانیه برابر n باشد، آنگاه مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا باریکهٔ نور از R تا M را بپیماید و بازگردد برابر است با

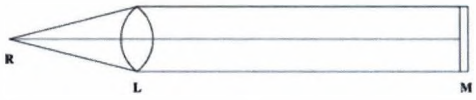
$$\frac{۱}{n} \times \frac{\theta/۲}{۳۶۰} \text{ ثانیه}$$

بنابراین، سرعت نورگسیل‌شده تحت شرایط مطالعه برابر است با

$$۲\frac{۳۶۰n}{\arctan(|IS|/|SR|)} \times ۲|RM|$$

در این وضعیت، فاصله‌های $|IS|$ و $|SR|$ باید تا آنجا که ممکن است بزرگ باشند تا خطای اندازه‌گیری θ کاهش یابد. فاصلهٔ $|IS|$ با ماکسیمم‌کردن سرعت چرخش R و فاصلهٔ $|RM|$ ماکسیمم می‌شود. نوآوری مهم مایکلسن در طرح فوکو اجازهٔ بسیار بزرگ کردن $|RM|$ را می‌دهد. در طرح فوکو M به‌شکل کره‌ای با مرکز R بود. بزرگ‌ترین فاصلهٔ $|RM|$ که توسط فوکو به‌دست آمد ۲۰ متر بود ([۳۷]، ص. ۱۱۷)، که تنها موجب جابه‌جایی به میزان ۷ر۰ میلی‌متر برای $|IS|$ می‌شد ([۴۲]، ص. ۱۱۸). مایکلسن تصمیم گرفت آینهٔ چرخان را در نقطهٔ کانونی عدسی قرار دهد که به او امکان استفاده از یک آینهٔ مسطح برای M را می‌داد. یعنی، R می‌بایست در نقطه‌ای قرارگیرد که در آن باریکه‌های نور موازی که در عدسی از M می‌گذرند در طرف دیگر همان‌گونه که در شکل ۵ نشان داده شده به‌هم برسند.

بنابراین، اگر قطر M به بزرگی اندازهٔ قطر L باشد، هر باریکهٔ واحدی که از R از درون M می‌گذرد، لزوماً با M برخورد می‌کند و از درون L به R



شکل ۵ R در نقطهٔ کانونی L.

بازمی‌گردد صرف‌نظر از اینکه فاصلهٔ بین L و M چقدر باشد. این کار اجازه می‌دهد که M بسیار دور واقع شود. تنها مشکل این است که هرچه M از L دورتر باشد، کانون منبع نقطه‌ای S به کانون R نزدیک‌تر خواهد بود، که با ماکسیمم کردن فاصلهٔ بین S و R تعارض دارد. این کار را می‌توان تاحدودی با به‌کاربردن یک عدسی با طول کانونی بزرگ اصلاح کرد.

این نوآوریها، باعث جابه‌جایی به‌میزان بیش از ۱۰۰ میلی‌متر شد. چنین جابه‌جایی بزرگی مشکل دیگری را پیش آورد. در اصل، چشمی برای مشاهدهٔ تصویر جابه‌جا شده در S با استفاده از یک صفحهٔ شیبدار از جنس شیشهٔ نقره‌اندود منحرف شده بود تا از تداخل بین باریکهٔ نورگسیلی از ناظر و باریکهٔ نورگسیل‌شده جلوگیری شود. به‌محض اینکه جابه‌جایی از ۴۰ میلی‌متر تجاوز کرد، برداشتن سطح شیبدار نقره‌اندود و مشاهدهٔ مستقیم تصویر جابه‌جاشده امکان‌پذیر می‌شود. مایکلسن ([۳۷]، ص. ۱۱۶) خاطرنشان کرد که «بدین‌ترتیب چشمی خیلی ساده‌تر می‌شود و بسیاری از منابع احتمالی خطا حذف می‌شوند».

۲.۳ تجهیزات فیزیکی

نقل‌قولها و جزئیات زیر از شرحی که مایکلسن از بررسیهای خود به‌دست داده اقتباس شده است ([۳۷]، صص. ۱۱۸ـ۱۲۴).

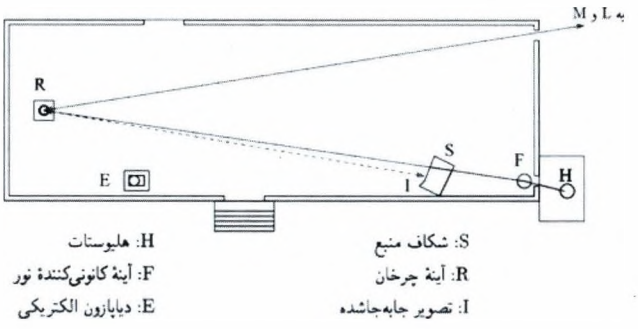
«این مطالعه در بخشی روشن و تقریباً تراز در امتداد مرز دریایی شمالی آکادمی نیروی دریایی اجرا می‌شود. یک سازهٔ چارچوبی در انتهای غربی این مرز برپاشد که نموداری از آن در شکل ۳ نشان داده شده» (ر.ک. شکل ۶، که بازسازی شکل ۳ مایکلسن است).

«این سازه ۴۵ فوت طول و ۱۴ فوت پهنا داشت، و به‌گونه‌ای بنا شده بود که خطی که نور در امتداد آن می‌پیمود حدود ۱۱ فوت بالاتر از زمین بود. یک هلیوستات [خورپای] در H پرتوهای خورشید را از میان شکاف S به آینهٔ چرخان R، و سپس از سوراخی در بستاور و از طریق عدسی، به آینهٔ دور باز می‌تاباند».

هلیوستات ابزاری است که برای کانونی کردن پرتوهای خورشید و هدایت آنها به‌صورت باریکه‌ای باریک به‌کار می‌رود. از آن پس این باریکه در حکم منبع نور عمل می‌کرد. از آن جاکه تنظیم یک آینهٔ کوچک F در مقایسه با هلیوستات آسان‌تر است، چنین آینهٔ کوچکی باریکه را از هلیوستات به شکاف هدایت می‌کند.

«عدسی بر قابی چوبی نصب شده بود، که بر تکیه‌گاهی قرار داشت که روی کشویی به‌طول حدود ۱۶ فوت حرکت می‌کرد و فاصلهٔ آن از سازه در حدود ۸۰ فوت بود. آینهٔ ثابت . . . حدود ۷ اینچ قطر داشت، که بر یک قاب برنجی با قابلیت تنظیم از طریق حرکت پیچ روی یک صفحهٔ افقی و عمودی سوار شده بود. برای تسهیل تنظیم، یک تلسکوپ کوچک مجهز به تارهای چلیپایی بر یک مفصل چرخنده به آینه متصل شده بود. این قاب سنگین بر یک پایهٔ آجری نصب‌شده و کل آن را قاب چوبی دربرگرفته بود تا آن را در برابر نور خورشید محافظت کند».

برخلاف روش فوکو، یک آینهٔ مسطح به‌عنوان آینهٔ ثابت به‌کار رفته بود و



شکل ۶ اتاقی که چینش آزمایشی را نشان می‌دهد.

یک عدسی با فاصلهٔ کانونی طولانی، نور را کانونی می‌کرد (یک عدسی ۸ اینچی غیرناقام با فاصلهٔ کانونی ۱۵۰ فوت). عدسی در موضعی به‌فاصلهٔ حدود ۸۰ فوت از سازه و آینهٔ ثابت در فاصله‌ای حدود ۱۹۲۰ فوت از سازه قرار داشت. لازم بود هم آینهٔ M و هم عدسی L بر یک محور مرکزی مشترک عمود باشند، همان‌گونه که در شکل ۲ نشان داده شده است.

مایکلسن هیچ شرحی در مورد چگونگی قرارگرفتن عدسیها نمی‌دهد، اما با ذکر جزئیاتی طرز قرارگرفتن آینه را توصیف می‌کند. در ابتدا، در مکانی قرار داده شده بود که سطح بازتابان آن روبه‌روی سوراخ در سازه قرار می‌گرفت.

«یک زاویه‌یاب [نوعی ابزار مساحی زمین که برای اندازه‌گیری زاویه‌ها به‌کار می‌رفت] در حدود ۱۰۰ فوتی مقابل آینه قرار داشت و این آینه به‌وسیلهٔ پیچهایی به‌اطراف حرکت می‌کرد تا اینکه مشاهده‌گر در زاویه‌یاب، تصویر تلسکوپ خود را ببیند که در مرکز آینه بازتابیده است. اکنون، تلسکوپی که به آینه متصل شده بود (بدون حرکت دادن خود آینه) به‌سوی علامتی روی یک قطعه مقوای متصل به زاویه‌یاب نشانه می‌رفت».

به این طریق، تلسکوپ بالای آینه به‌صورت قائم برسطح بازتابنده‌اش قرار می‌گرفت.

«آنگاه زاویه‌یاب را ۱۰۰۰ فوت منتقل کردند، و، در صورت لزوم، تنظیمها [در مورد تلسکوپ] تکرار می‌شد».

پس از قرارگرفتن تلسکوپ در این وضعیت، آینه حرکت داده شد به‌طوری که تلسکوپ آن به‌سمت سوراخ واقع در ساختمان نشانه برود. تنظیم نهایی از طریق کانونی کردن دوربین تلسکوپ واقع بر آینهٔ ثابت، به‌دست شخصی که خارج از ساختمان قرار داشت، انجام گرفت. پس از آن آینه با استفاده از پیچهایی حرکت داده شد تا اینکه مشاهده‌گر تصویر دوربین تلسکوپش را مشاهده کند که در مرکز آینه بازتابیده شده بود.

آینهٔ چرخان یک قرص مدّور ۱٫۲۵ اینچی (با قطر ۱٫۰ اینچ) بود که یک طرف آن نقره‌اندود شده و بر یک میلهٔ عمودی قرارگرفته بود که به نوبه خود در یک قاب آهنی جا داشت. این قاب را می‌شد به کمک ریسمانهای کوچکی به‌هر دو طرف حرکت داد یا جلو و عقب برد. میله نوکهای تیزی داشت که درون حفره‌های مخروطی در قاب حرکت محوری داشت؛ و اینها تنها نقاط تماس بین قاب و میله بودند. قسمت بالایی میله از مرکز یک چرخ کوچک درون یک دیوارهٔ متصل به قاب عبور می‌کرد. این چرخ به‌وسیلهٔ اصطکاک میله را درجای خود نگاه می‌داشت. با دمیدن هوا به‌داخل محفظه، بر فراز

سطح چرخ و توقف آن به‌شیوه‌ای دایره‌وار، چرخ و در نتیجهٔ آن میله به‌چرخش در می‌آمد. لازم بود میله را به‌دقت میزان کرد تا بدون لرزش به‌آرامی بچرخد. هوای محرک این توربین کوچک از تلمبه‌ای با نیروی بخار تأمین می‌شد که در زیرزمین ساختمان قرار داشت. یک لوله تلمبه را به توربین متصل می‌کرد. از آنجا که سرعت چرخش آینه در صورتی ثابت می‌ماند که فشار تلمبه ثابت باشد، سیستمی از تنظیم‌کننده‌ها، سوپاپها، و کنترل بازخورد ([۳۷]، شکلهای ۱۱ و ۱۲، ص. ۱۲۴) برای تنظیم فشار و در نتیجه سرعت نصب شده بود. مایکلسن متذکر می‌شود که این سیستم می‌تواند به‌مدت سه یا چهار ثانیه سرعت چرخش را ثابت نگه دارد، که برای انجام اندازه‌گیری کافی بود.

برای افزایش بیشتر فاصلهٔ $|SR|$، آینهٔ چرخان کمی نزدیک‌تر از کانون عدسی در مقابل عدسی (یعنی نقطهٔ کانونی‌شدن باریکه‌های موازی) قرار گرفته بود. این کار به‌بهای ایجاد تصویر اندکی غیرواضح [تار] در مقایسه با قراردادن R درکانون به‌دست می‌آمد زیرا پرتوهای کمتری به M برمی‌خوردند و از آن برمی‌گشتند.

«با این حال، پس از کوتاه زمانی به یک حد رسیدند زیرا کمیت نور دریافتی به سرعت با نزدیک‌شدن آینهٔ چرخان به‌عدسی کاهش می‌یابد».

این حد تقریباً ۱۵ فوت نزدیک‌تر از کانون عدسی به عدسی است. مطالعات قبلی مایکلسن نشان داد که اگر R حدود ۲۵۸ دور در ثانیه بزند و فاصلهٔ $|SR|$، یا شعاع در حدود ۲۸٫۶ فوت باشد، در این صورت انحراف حدود ۱۱۵ میلی‌متر خواهد بود.

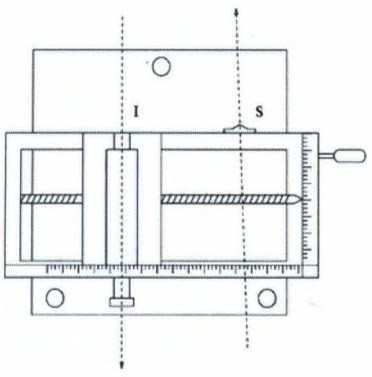
۳.۳ تجهیزات اندازه‌گیری

مایکلسن از قطعات متعددی از تجهیزات اندازه‌گیری استفاده کرد.

فاصله‌های $|SR|$ و $|RM|$ با استفاده از یک تسمهٔ فولادی به‌طول اسمیِ ۱۰۰ فوت اندازه‌گیری می‌شدند.

مقدار جابه‌جایی $|IS|$ با استفاده از یک ریزسنج مدرج مانند شکل ۷، اندازه‌گیری شد. منبع نور یک شکاف عمودی باریک بود که در یک جای ثابت روی ریزسنج قرار داشت. ریزسنج به یک تلسکوپ کوچک مجهز بود که قابل حرکت از چپ به راست با استفاده از یک صفحهٔ مدرج واقع در سمت راست آن بود. هر چرخش پیچ، تلسکوپ را به میزان نسبتاً کوچک مشخصی حرکت می‌داد. در شکل ۷، مقیاس افقی میزان گردش را مشخص می‌کند. درکانون عدسی تلسکوپ (حدود ۲ اینچ)، و تقریباً در همان صفحهٔ شکاف S، یک رشته الیاف ابریشمی عمودی قرار داشت که به‌عنوان یک خط نشانهٔ عمودی برای میزان کردن به‌کار می‌رفت. با چرخاندن پیچ، می‌شد تلسکوپ را به‌گونه‌ای قرار داد که این رشته در مرکز تصویر بازگشتی شکاف در I قرار گیرد. با این شرایط مقداری که لازم است تا تلسکوپ از موقعیت اولیه‌اش در شکاف به موقعیت تصویر حرکت داده شود، میزان جابه‌جایی $|SI|$ خواهد بود.

سرعت چرخش آینهٔ چرخان n، تعداد دورها در هر ثانیه، با استفاده از دیاپازون الکتریکی با ارتعاش حدود ۱۲۸ دور در ثانیه تنظیم می‌شد. سوپاپ تلمبه برای به‌چرخش‌درآوردن آینهٔ R و هماهنگ نمودن سرعت گردش آن در هر ثانیه با بسامد ارتعاش دیاپازون الکتریکی در هر ثانیه، گشوده می‌شد. سرعت و بسامد با قراردادن آینه‌ای کوچک متصل به یک بازوی دیاپازون هماهنگ می‌شد به این گونه که بخشی از نور بازتابیده از آینهٔ چرخان به نوبهٔ



شکل ۷ ریزسنج مقدار جابه‌جایی $|IS|$ را اندازه می‌گیرد.

خود به‌وسیلهٔ آینهٔ دیاپازون بازتاب می‌یافت تا تصویری از صفحهٔ آینهٔ چرخان روی یک تکه شیشهٔ صاف مستقر در مجاورت عدسی چشمی ریزسنج ایجاد شود. اگر بسامد دیاپازون و سرعت آینه چرخان یکی باشد، آنگاه تصویر نهایی ظاهر شده بر شیشه واضح خواهد بود. در بیشتر مقداریابی‌های مایکلسن، بسامد ارتعاش دیاپازون نصف بسامد آینهٔ چرخان بود، به‌طوری که دو تصویر واضح تشکیل می‌شد ([۳۷]، شکل۱۳، ص. ۱۲۴).

بسامد دیاپازون الکتریکی، که Vt_2 نامیده می‌شود، با شمردن تعداد زنشها [ضربانها] درهرثانیه بین آن و یک دیاپازون استاندارد Vt_3 با بسامد ارتعاش معلوم ۲۵۶٫۰۷۰ دور در ثانیه در ۶۵° فارنهایت اندازه‌گیری شد. در اینجا از یک دور شمار ۶۰ ثانیه‌ای استفاده شد و دما برای تصحیح بسامد دیاپازون استاندارد از لحاظ دما ثبت شد. بنابراین، بسامد ارتعاش دیاپازون الکتریکی نصف مجموع ۲۵۶٫۰۷۰، تعداد زنشها در هر ثانیه و تصحیح برای دماست.

نتیجهٔ نهایی برای سرعت آینهٔ چرخان در هر ثانیه برمبنای بسامد ارتعاش دیاپازون الکتریکی و تعداد تصاویر واضح روی صفحهٔ شیشه‌ای تعیین می‌شود.

۴.۳ یک مقداریابی سرعت نور

۱. فاصلهٔ $|RM|$ از آینهٔ چرخان تا آینهٔ ثابت پنج بار، هربار با درنظرگرفتن دما، و متوسط به‌کاررفته به‌عنوان «فاصلهٔ واقعی» بین آینه‌ها در همهٔ محاسبات، اندازه‌گیری شد.

۲. روشن کردن کوره برای تأمین بخار جهت به‌حرکت درآوردن تلمبه حدود نیم ساعت قبل از شروع اندازه‌گیری آغاز شد. پس از این زمان، فشار کافی برای شروع مقداریابی‌ها وجود داشت.

۳. آینهٔ ثابت M همان‌گونه که در بالا توصیف شد تنظیم شده بود و هلیوستات به‌گونه‌ای مستقر و تنظیم شده بود که تصویر خورشید به‌سمت شکاف، نشانه رفته بود.

۴. آینهٔ چرخان بر دو محور متفاوت تنظیم شده بود. نخست، به‌گونه‌ای به راست یا چپ متمایل شده بود که بازتاب مستقیم نور از شکاف، بالا یا پایین چشمی ریزسنج می‌افتاد. مایکلسن دریافت که بایستی آینهٔ چرخان را کج کند. زیرا «در غیر این‌صورت این نور بر نوری که تصویری را تشکیل می‌دهد که باید مشاهده شود غلبه خواهد کرد» [۳۷]. «پس از آن، آینهٔ چرخان با چرخاندن آن به‌اطراف و خم‌کردن به جلو یا عقب تنظیم می‌شود تا اینکه نوری

که از آینهٔ دور بازتاب یافته است، مشاهده شود» ([۳۷]، ص. ۱۲۴). برخی تعدیلات در محاسبات برای کج‌کردن آینه انجام شد.

۵. فاصلهٔ $|SR|$ از آینهٔ چرخان تار چلیپایی چشمی، با استفاده از نوار فولادی اندازه‌گیری شد.

۶. تار چلیپایی عمودی چشمی ریزسنج در مرکز شکاف قرار گرفت و موقعیت آن برحسب موقعیت پیچ ثبت شد.

۷. دیاپازون الکتریکی شروع به‌کار کرد. بسامد ارتعاش دیاپازون برای هر مجموعه از مشاهدات دو یا سه بار اندازه‌گیری شد.

۸. دما ثبت شد.

۹. آینهٔ چرخان شروع به‌کار کرد. چشمی به‌طور تقریبی برای گرفتن تصویر جابه‌جا شده تنظیم شد. اگر تصویر در چشمی ظاهر نشود، آینه به جلو یا عقب کج می‌شود تا زمانی که دیده شود.

۱۰. سرعت چرخش آینه طوری تنظیم شد که تصویر آینهٔ چرخان یک جا ثابت شود.

۱۱. چشمی ریزسنج با چرخاندن پیچ جابه‌جا شد تا آنکه تار چلیپایی عمودی آن در مرکز تصویر بازگشتی از شکاف قرارگرفت. تعداد دفعات پیچاندن پیچ ثبت شد. مقدار جابه‌جایی اختلاف این دو موقعیت است. برای بیان این اختلاف به‌عنوان فاصلهٔ $|IS|$ برحسب میلی‌متر، تعداد دفعات پیچاندن اندازه‌گیری شده در تعداد میلی‌مترهای مدرج برحسب پیچش پیچ ضرب شد.

۱۲. مراحل ۱۰ و ۱۱ تکرار شدند تا اینکه ۱۰ بار اندازه‌گیری مقدار جابه‌جایی $|IS|$ انجام گیرد.

۱۳. آینهٔ چرخان متوقف شد، دما یادداشت شد و بسامد ارتعاش دیاپازون الکتریکی باردیگر تعیین گردید.

۴. روش آماری و مطالعهٔ مایکلسن در سال ۱۸۷۹

سودمند است که روش آماری به‌صورت رشته‌ای از پنج مرحله ارائه شود: مسأله، برنامه، داده‌ها، تحلیل، و نتیجه‌گیری. ما از حروف اختصاری PPDAC برای ارجاع به این رشته گامها استفاده می‌کنیم.[1] هر مرحله از روش آماری با مباحث خودش همراه است که باید آنها را درک کرد و به آنها پرداخت. (این مباحث در جدول شکل ۸ خلاصه شده‌اند).

هر مرحله به مرحلهٔ بعدی منجر می‌شود و به مرحله‌های پیشین وابسته است. با نگاه به گذشته، این بدان معناست که هر مرحله در متن مراحل پیش از خود انجام می‌شود و اعتبار می‌یابد (یا نمی‌یابد) (برای مثال، برنامه‌ای که در آن مسأله مورد توجه قرار نمی‌گیرد، ارزش چندانی ندارد؛ در چنین موردی، یکی از دو مرحله باید اصلاح شود). با نگاه به پیش‌رو در هر مرحله، می‌توان انتخابهایی به‌عمل آورد که اقدامات مرحلهٔ بعدی را ساده کند (برای مثال، یک برنامهٔ خوش‌طرح می‌تواند تحلیل را ساده‌تر کند) جهش به پیش‌وپس بین مرحله‌ها در تکمیل ساختار PPDAC متداول است.

ساختار برای روش آماری از دو جهت سودمند است: نخست برای فراهم نمودن قالبی برای استفادهٔ مؤثر از تحقیق تجربی و دوم، برای بازنگری نقادانهٔ بررسیهای انجام‌شده. ساختار همهٔ بررسیهای تجربی، چه به‌طور ضمنی و چه صریح، را می‌توان به‌کمک این مدل پنج مرحله‌ای نمایش داد.

1. PPDAC: Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusion

مسأله	ـ واحدها و جامعهٔ هدف (فرایند) ـ متغیر(های) پاسخ ـ متغیرهای توضیحی ـ صفت(های) جامعه ـ جنبه(های) مسأله‌ـعلّی، توصیفی، پیشگویانه
برنامه	ـ جامعهٔ تحت مطالعه (فرایند) (واحدها، متغیرها، صفات) ـ گزینش متغیر(های) پاسخ ـ پرداختن به متغیرهای توضیحی ـ قرارداد نمونه‌گیری ـ فرایندهای اندازه‌گیری ـ قرارداد گردآوری داده‌ها
داده‌ها	ـ اجرای برنامه و ثبت همهٔ انحرافها ـ نظارت برداده‌ها ـ بازبینی داده‌ها از لحاظ سازگاری درونی ـ انبارش داده‌ها
تحلیل	ـ تلخیص داده‌ها عددی، نموداری ـ مدلسازی ساخت، برازش، چرخهٔ نقد ـ تحلیل رسمی
نتیجه‌گیری	ـ هم‌نهاد زبان صریح، نمودارهای ارائهٔ مؤثر ـ محدودیتهای مطالعه بحث خطاهای بالقوه

شکل ۸ روش آماری

در این بخش، با معرفی اصطلاحات فنی مورد نیاز، مفاهیم و کارهای مهمی را که در هر بخش انجام می‌شود شرح می‌دهیم. مطالعهٔ مایکلسن در ۱۸۷۹ به‌عنوان مثالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌گونه که در بخش اول خاطر نشان شد، از بسیاری لحاظ، این تحقیق نمونهٔ نوعیِ تحقیق آماری نیست و ما خوانندگان را به امتحان‌کردن ساختار و زبان پیشنهادی در کاربردهای دیگر ترغیب می‌کنیم.

ادامهٔ مقاله در شمارهٔ آینده می‌آید که مشتمل خواهد بود بر تشریح مراحل پنجگانه در روش آماری (با استفاده از مطالعهٔ مایکلسن به‌عنوان مثال) و سپس بحث دربارهٔ روش علمی و مقایسهٔ آن با روش آماری که هدف نهایی این مقاله است.

******

- R. J. MacKay and R. W. Oldford, "Scientific method, statistical method, and the speed of light", *Statistical Science*, (3) **15** (2000) 254-278.

* آر. جی. مکای، دانشگاه واترلو، کانادا

** آر. دبلیو. اُلدفُرد، دانشگاه واترلو، کانادا

کدهای میله‌ای: تحلیل توپولوژیک داده‌ها•

رابرت گریست*

ترجمهٔ حسن حقیقی

۱. شکل داده‌ها

وقتی از توپولوژیدان سؤال می‌شود: «چگونه یک شیء چهاربعدی را در ذهن خود مجسم می‌کنید؟» پاسخ مناسبی که می‌تواند بدهد، یک پاسخ سقراطی است: «شما چگونه یک شیء سه‌بعدی را در ذهن خود مجسم می‌کنید؟» ما اشیا را در فضای سه‌بعدی مستقیماً نمی‌بینیم بلکه آنها را از طریق ترکیب یک سلسله تصاویر مسطح به‌گونه‌ای حس می‌کنیم. بخش قابل توجهی از اولین سال زندگی ما صرف آموختنِ این امر می‌شود که چگونه داده‌های فضایی سه‌بُعدی را از تصاویر مسطح جفت‌وجور شده استنتاج کنیم. سالها ممارست، توانایی چشمگیری برای استخراج ساختار کلی از تصاویری در بُعد پایین‌تر پدید آورده است.

استنتاج ساختار کلی از طریق تبدیل داده‌های گسسته به تصاویر پیوسته، در مقیاسهای بسیار ظریف‌تری هم انجام می‌پذیرد. چاپگرهای سوزنی، تابلوهای تبلیغاتی LED، تلویزیون، و نمایشگر رایانه‌ها، همگی تصاویر را از طریق آرایه‌هایی از نقاط گسسته که در قالب اشیایی کلی و منسجم ترکیب شده‌اند، انتقال می‌دهند. این نیز مهارتی است که ما از کودکی آن را تمرین کرده‌ایم.

۱.۱ تحلیل توپولوژیک داده‌ها

مسأله‌های تحلیل داده‌ها، ویژگیهای مشترک بسیاری با این دو مسألهٔ بنیادیِ ترکیب اشکال دارند: (۱) چگونه ساختاری با بُعد بالا از نمایشهای بُعد پایین استنتاج می‌شود؛ و (۲) چگونه نقاط گسسته در ساختار کلی گرد می‌آیند.

این مقاله مروری بر کارهای کارلسن، دو سیلوا، ادلزبرونر[1]، هارر[2]، زمردیان و دیگران در این زمینه است. [مترجم مفاهیم پایهٔ عمده‌ای را که پیشنیاز مطالعهٔ این مقاله‌اند در تابلو «یادآوری بعضی مفاهیم» آورده است و خوانندگانی که آنها را از یاد برده‌اند می‌توانند به این تابلو مراجعه کنند]. موضوعات اصلی مقاله، تکنیکهای مفید زیرند.

۱. به جای مجموعه‌ای از نقاط داده، خانواده‌ای از **مجتمعهای سادکی** را در نظر بگیریم که با یک پارامتر نزدیکی[1] اندیس‌گذاری شده باشند. این کار مجموعهٔ داده‌ها را به اشیای توپولوژیک کلی تبدیل می‌کند.

۲. این مجتمعهای توپولوژیک را با عدسی توپولوژی جبری ــ به‌خصوص از طریق نظریهٔ جدید **مانستگی ماندگار**[2]، که بر خانواده‌های پارامتری تطبیق یافته باشد، ببینیم.

۳. مانستگی ماندگار مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌صورت نسخهٔ پارامتری‌شده یک عدد بتی، یعنی **کد میله‌ای**[3] بیان کنیم.

در این مقالهٔ مروری، این موضوعات را معرفی می‌کنیم و مثالی از کاربرد این تکنیکها را در مورد یک مجموعهٔ داده‌های از بعد بالا، مستخرج از تصاویر طبیعی، بررسی خواهیم کرد.

۲.۱ توده‌های داده‌ها

داده‌ها اغلب به‌صورت دنباله‌ای نامرتب از نقاط در فضای اقلیدسی nبُعدی $\mathbb{E}^n$ نمایش داده می‌شوند. داده‌های حاصل از یک حسگر در یک میز آزمایش[4] مهندسی، یا حاصل از پاسخهای مندرج در پرسش‌نامهٔ یک آزمایش روانشناسی، یا از اندازه‌های جمعیت در یک اکوسیستم پیچیده، همگی در فضایی بالقوه از بُعد بالا قرار دارند. «شکل» کلی داده‌ها اغلب ممکن است دربارهٔ پدیده‌های اصلی که داده‌ها نمایش می‌دهند، اطلاعات مهمی به‌دست دهد.

نوعی از مجموعهٔ داده‌ها که ویژگیهای کلی آن معلوم و مهم‌اند، داده‌های **تودهٔ‌نقطه‌ای**[5] نام دارد که از اشیای فیزیکی در فضای سه‌بُعدی به‌دست می‌آید. کاوشگرهای تماسی[6]، لیزرهای نقطه‌ای یا لیزرهای خطی، جسم معلق را می‌روبند و از سطح نمونه‌گیری می‌کنند، و به ثبت مختصات نقاط اصلی روی سطح جسم می‌پردازند. چنین توده‌ای از نقاط را می‌توان خیلی سریع

1. Edelsbrunner 2. Harer

1. proximity parameter 2. persistent homology 3. barcode
4. testbed 5. point cloud data 6. touch probes



شکل ۱ تعیین ساختار کلی یک تودهٔ‌نقطهٔ نوفه‌ای، وقتی نقاط در $\mathbb{E}^2$اند مشکل نیست، اما برای توده‌های در ابعاد بالاتر، رمزگشایی از یک تصویر مسطح همیشه آسان نیست.

به‌دست آورد و برای نمایش رایانه‌ای شیء از آن استفاده کرد. یک روایت موقتِ این وضعیت در داده‌های ضبط حرکت پیدا می‌شود که در آنها نقاط هندسی به صورت یک سری زمانی ضبط می‌شوند. در هر دوی این حالتها، شناختن ویژگیهای کلی حائز اهمیت‌اند: انگشت اشاره کجاست؟ سوراخ کلید کجاست؟ شکستگی کجاست؟

به پیروی از روش متداول، هر گردایه از نقاط در $\mathbb{E}^n$ را با داده‌های تودهٔ‌نقطه‌ای نمایش می‌دهیم، اگرچه معنای ضمنی آن این است که نمونه‌ای از نقاط (که شاید نوفه باشد) روی زیرمجموعه‌ای از بُعد پایین‌تر قرار دارند. برای توده‌هایی از نقاط که در یک فضای کم‌بعد قرار دارند، رویکردهای متعددی برای استنتاج ویژگیها براساس تصاویر مسطح وجود دارد: تکنیکهای بازسازی در نوشتگان گرافیک رایانه‌ای و آمار، گوناگون است. از یک منظر طبیعی، وقتی داده‌ها به‌طور ذاتی از بُعد بالا هستند، یا آنقدر «تابیده» (مخدوش)اند که مانع ایجاد یک تصویر مسطح قابل اعتماد می‌شوند، تصاویر مسطح ارزش محدودی دارند.

اخیراً رویکردی کلی‌تر و درونی‌تر به توده‌داده‌های از بُعد بالا در کارهای کارلسن و همکارانش مشاهده شده است. در این رویکرد، از ابزارهایی از توپولوژی جبری استفاده می‌شود تا ویژگیهای کلی مجموعهٔ داده‌های از بعد بالا استخراج شود. این مقاله مروری است موجز بر برخی از کارهای ایشان. به‌خاطر تمرکز توجه به تکنیکهایی از توپولوژی جبری، قسمت اعظم کارهایی را که در این زمینه در آمار غیرخطی انجام گرفته (و به‌ندرت توپولوژیک هستند) و همچنین تحقیقات انجام‌شده در گرافیک رایانه‌ای را (که به‌ندرت در بُعد بالا هستند) نادیده می‌گیریم.

۳.۱ از توده‌ها به مجتمعها

بدیهی‌ترین راه برای تبدیل گردایه‌ای از نقاط $\{x_\alpha\}$ در یک فضای متریک به یک شیء کلی، به‌کار گرفتن تودهٔ نقاط به‌عنوان رئوس یک گراف ترکیبیاتی است که یالهای آن با رابطهٔ نزدیکی (رأسهایی که در فاصلهٔ معین ϵ قرار می‌گیرند) تعیین می‌شود. چنین گرافی هرچند داده‌های مربوط به همبندی را در خود ضبط می‌کند، اما بسیاری ویژگیهای از مرتبهٔ بالاتر، که در ورای خوشه‌بندی قرار دارد، در آن نادیده گرفته می‌شود. با پذیرفتن گراف به‌عنوان قالبی برای یک شیءِ از بُعد بالاتر، این ویژگیها به‌صورتی دقیق قابل درک هستند. به‌طور مشخص: گراف به یک **مجتمع سادکی**، فضایی که از قطعات ساده‌ای (سادکهایی) ساخته شده که به‌طور ترکیبیاتی در طول وجه‌ها یکی گرفته شده‌اند، ترفیع می‌یابد. انتخاب شیوهٔ پر کردن سادکهای ابعاد بالاتر گرافِ نزدیکی، نمایشهای کلی متفاوتی را امکان‌پذیر می‌سازد. دوتا از طبیعی‌ترین روشها برای انجام این کار به شرح زیرند.

تعریف ۱.۱ گردایه‌ای از نقاط $\{x_\alpha\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^n$ داده شده است. مجتمع چخ[1] [همچنین، موسوم به عصب]، $\mathcal{C}_\epsilon$، مجتمع سادکی مجردی است که kـسادکهای آن به‌وسیلهٔ $(k+1)$تاییهای نامرتب نقاط $\{x_\alpha\}_\circ^k$ تعیین می‌شوند، به‌طوری که همسایگیهای بستهٔ $\epsilon/2$ـگوی آنها، یک نقطهٔ مشترک دارند.

تعریف ۲.۱ گردایه‌ای از نقاط $\{x_\alpha\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^n$ داده شده است. مجتمع ریپس[2] $\mathcal{R}_\epsilon$، مجتمع سادکی مجردی است که kـسادکهای آن متناظر با $(k+1)$ـتاییهای نامرتب $\{x_\alpha\}_\circ^k$ از نقاط‌اند که دوبه‌دو در فاصله‌ای کمتر از ϵ قرار دارند.*

قضیهٔ چخ (یا «قضیهٔ عصب») حاکی است که $\mathcal{C}_\epsilon$ نوع هوموتوپی‌ای برابر اجتماع گویهای بسته به شعاع $\epsilon/2$ حول مجموعهٔ نقاط $\{x_\alpha\}$ دارد. این بدان معناست که $\mathcal{C}$، هرچند مجتمع سادکی مجردی است که بعد آن به‌طور بالقوه بالاست، درست مثل زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{E}^n$ رفتار می‌کند (شکل ۲ را ببینید). مجتمع چخ، از نظر توپولوژیک یک مدل سادکی معتبر برای توپولوژی یک توده‌نقطه است که از گویها انباشته شده است. اما مجتمع چخ و زیرمجتمعهای گوناگونی که به‌طور توپولوژیک هم‌ارز آن هستند (برای مثال، **مجتمع آلفای** [۱۳]) اشیای خوبی از لحاظ محاسبه، با تکیه بر فاصلهٔ دقیق بین گرهها در $\mathbb{E}^n$ هستند.

از نظر محاسباتی، در مورد مجتمع ریپس به عملیات کمتری نیاز است تا در مورد مجتمع چخ، اگرچه مجتمع ریپس (در حالت کلی) سادکهای بیشتری دارد. دلیل آن هم این است که مجتمع ریپس یک **مجتمع پرچم**[3] است. یعنی در میان تمام مجتمعهای با ۱ـاسکلت مفروض، ماکسیمال است. بنابراین، خاصیت ترکیبیاتی ۱ـاسکلت مجتمع را، به‌طور کامل، مشخص می‌کند و مجتمع ریپس را می‌توان به‌صورت یک گراف ذخیره کرد و دوباره ساخت، به‌جای اینکه تمامی عملگرهای مرزی مورد نیاز برای مجتمع چخ را ذخیره کنیم. این مزیت، که داده‌های حاصل از نزدیکی ناظریف[4] روی زوجهای گرهها، مجتمع ریپس را تعیین می‌کند، خالی از هزینه نیست. جریمهٔ این ساده‌سازی این خواهد بود که آنچه در نوع هوموتوپی $\mathcal{R}$ منعکس می‌شود بلافاصله روشن نیست؛ به‌طور کلی، نه یک زیرمجتمع $\mathbb{E}^n$ است و نه اینکه لزوماً مانند یک فضای nـبعدی رفتار می‌کند (شکل ۲).

1. Čech complex 2. Rips complex

* برای به رسمیت شناختن کار اصیل ویه‌توریس در استفاده از این اشیا در دورهٔ اولیهٔ نظریهٔ مانستگی، بهتر است این مجتمع را ویه‌توریس-ریپس بنامیم. اما برای رعایت اختصار، در اینجا اصطلاح «مجتمع ریپس» را به‌کار می‌بریم.

توضیح مترجم. ویه‌توریس در اوایل پیدایش نظریهٔ مانستگی از این مجتمع به‌عنوان وسیله‌ای برای ساختن مدلهای سادکی از فضای متریک استفاده کرد [۲۱] و ریپس در دههٔ ۱۹۸۰ این مجتمع را در نظریهٔ هندسی گروهها برای ساختن مدلهای سادکی برای عمل گروه به‌کار برد.

3. flag complex 4. coarse proximity

یادآوری بعضی مفاهیم

۱. مدول آزاد

همان‌گونه که هر عنصر یک فضای برداری V روی یک میدان F را می‌توان به‌صورت یکتایی به شکل ترکیب خطی مجموعه‌ای معین از عناصر V نوشت، ممکن است بتوان هر عنصر یک Rـمدول M را به‌صورت یکتایی به شکل ترکیب خطی یک مجموعهٔ معین از عناصر M نوشت. در این صورت، M را یک Rـمدول آزاد می‌نامند. به عبارت دیگر، Rـمدول M را آزاد می‌نامند هرگاه با یک جمع مستقیم از Rها یکریخت باشد. یعنی $M \simeq \bigoplus R$.

۲. دامنهٔ ایده‌آل اصلی

دامنهٔ صحیح R را یک دامنهٔ ایده‌آل اصلی می‌نامند هرگاه هر ایده‌آل آن توسط یک عنصر تولید شود. $\mathbb{Z}$ و حلقهٔ چندجمله‌ایها با ضرایبِ متعلق به یک میدان F، $F[x]$ مثالهایی از دامنه‌های ایده‌آل اصلی‌اند.

قضیهٔ ساختاری مدولهای متناهی‌ْمولد روی دامنه‌های ایده‌آل اصلی
فرض کنیم R یک دامنهٔ ایده‌آل اصلی و M یک Rـمدول متناهی‌ْمولد باشد. آنگاه

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{i=n} x^{t_i} \cdot R \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{j=m} (R/x^{s_j} \cdot R) \right)$$

۳. حلقهٔ مدرج

حلقهٔ R را $\mathbb{N}$ـمدرج می‌نامند هرگاه زیرگروههای $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ از R وجود داشته باشند به‌طوری که $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$ و به‌ازای هر $i, j \in \mathbb{N}$، $R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}$.

۴. مجتمع سادکی مجرد

فرض کنیم $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه و Δ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ زیرمجموعه‌های V باشد. Δ را یک مجتمع سادکی روی V می‌نامند هرگاه

- به‌ازای هر $x_i \in V$، $\{x_i\} \in \Delta$،
- اگر $A \in \Delta$ و $B \subset A$ آنگاه $B \in \Delta$.

هر عضو Δ را یک وجه می‌نامند و برای هر وجه F عدد $|F| - 1$ را بُعد F می‌خوانند. عدد $\max\{\dim F | F \in \Delta\}$ را بُعد Δ می‌نامند.

۵. rـاسکلت یک مجتمع سادکی

فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی از بُعد n روی V و r یک عدد صحیح با ویژگی $-1 \leq r \leq n$ باشد. مجموعهٔ

$$\Delta^{(r)} = \{F \in \Delta | \dim F \leq r\}$$

را که خود یک مجتمع سادکی روی V است، rـاسکلت Δ می‌نامند.

۶. گروههای مانستگی [هومولوژی]

به هر مجتمع سادکی Δ از بُعد n، $n+1$ گروه جابه‌جایی (یا مدول) به‌صورت زیر نسبت داده می‌شود.
فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکه‌دار و $F = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ یک وجه Δ باشد که عناصرش به‌ترتیب صعودی اندیسها مرتب شده‌اند. در این صورت، این وجه را با $[x_{i_1} \ldots, x_{i_s}]$ نمایش می‌دهیم. به هر وجه $F \in \Delta$ یک نشان e_F نسبت می‌دهیم. فرض کنیم به‌ازای هر $-1 \leq k \leq n$، $C_k(\Delta) = \oplus_{F\in\Delta, \dim F = k} R \cdot e_F$، Rـمدول آزاد پدید آمده توسط وجه‌های k بُعدی Δ باشد.
تناظر $\partial_k : C_k(\Delta) \to C_{k-1}(\Delta)$ که به‌صورت

←

$$\partial_k([x_1,\dots,x_{k+1}] = \sum_{i=1}^{i=k+1}(-1)^i[x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{k+1}]$$

تعریف می‌شود به یک همریختی Rـمدولها از $C_k(\Delta)$ در $C_{k-1}(\Delta)$ گسترش می‌یابد. از نحوهٔ تعریف ∂_k نتیجه می‌شود $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. به این ترتیب یک مجتمع زنجیری از Rـمدولها و Rـهمریختیها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$0 \to C_n(\Delta) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\Delta) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Delta) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

اگر $\{$به‌ازای یک b' در $C_{k+1}(\Delta)$ $\partial_{k+1}(b') = b, b \in C_k(\Delta)\}$ = Im ∂_{k+1} و $\{a \in C_k(\Delta) | \partial_k(a) = 0\}$ = ker ∂_k، از $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ نتیجه می‌شود Im$\partial_{k+1} \subset$ ker ∂_k. Rـمدول $H_k(\Delta) = \ker \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$ را kـامین مدول مانستگی [هومولوژی] مجتمع سادکی Δ می‌نامند. اگر R یک میدان باشد آنگاه $\dim H_k(\Delta)$ را kـامین عدد بتی Δ می‌نامند و با β_k نمایش می‌دهند.

مثال. فرض کنیم Δ مجتمع سادکی وابسته به بطری کلاین باشد. آنگاه گروههای مانستگی آن به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول به‌صورت زیرند

$$H_n(\Delta) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n = 1 \\ \{0\} & n = 2 \end{cases}$$

۷. هوموتوپی

فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $f, g : X \to Y$ دو نگاشت پیوسته باشند. f و g را هوموتوپ گویند هرگاه یک تابع پیوستهٔ $F : X \times I \to Y$، که I بازهٔ بسته $[0, 1]$ است، وجود داشته باشد به‌طوری که $F(x, 0) = f(x)$ و $F(x, 1) = g(x)$.

هم‌ارزی هوموتوپی

دو فضای توپولوژیک X و Y را هوموتوپی‌ـهم‌ارز گوییم هرگاه دو تابع پیوستهٔ $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ وجود داشته باشند به‌طوری که $f \circ g$ با تابع همانی Y و $g \circ f$ با تابع همانی X هوموتوپ باشند. در این صورت، X و Y را دارای یک نوع هوموتوپی هم می‌نامند.



شکل ۱. سه فضای فوق متشکل از خطوط سیاه، دارای یک نوع هوموتوپی هستند.

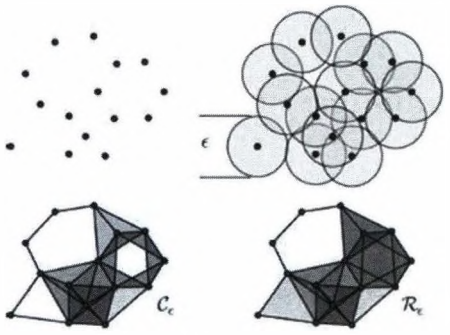
۸. نظیر کردن مجتمع سادکی به یک فضای توپولوژیک

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. به هر پوشش باز $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ برای X یک مجتمع سادکی به‌صورت زیر می‌توان نظیر کرد. به‌ازای هر $\alpha \in A$، یک عضو x_α از $\mathcal{U}_\alpha$ انتخاب می‌کنیم. اگر $N(\mathcal{U})$ مجموعهٔ تمام چنین عناصری باشد، روی آن یک مجتمع $\Delta(\mathcal{U})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha n}\} \in \Delta(\mathcal{U}) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \mathcal{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha n} \neq \phi$$

این مجتمع را عصب[1] $\mathcal{U}$ می‌نامند. حال اگر $\{\mathcal{V}_\beta\}_{\beta \in B}$ یک پوشش باز دیگر برای X باشد به‌طوری که به‌ازای هر $\alpha \in A$ یک $\beta \in B$ وجود داشته باشد که $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{U}_\alpha$، آنگاه یک نگاشت سادکی از $N(\mathcal{U})$ در $N(\mathcal{V})$ تعریف می‌شود که با تقریب هوموتوپی خوشتعریف است. به‌خصوص اگر X یک فضای متریک باشد، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ می‌توان یک پوشش باز برای X از گویهای باز به شعاع ϵ و یک عصب برای این پوشش ساخت که با تغییر ϵ، زنجیری از چنین مجتمعهایی ساخته می‌شوند. دو نوع خاص آن، یعنی چخ و رییس اشیای اصلی مورد بحث در این مقاله‌اند.

1. nerve



شکل ۲ با کامل‌سازیِ یک مجموعهٔ معین نقاط [گوشهٔ چپ بالا] می‌توان یک مجتمع چخ C_ϵ [گوشهٔ چپ پایین] یا یک مجتمع ریپس R_ϵ [گوشهٔ راست بالا] براساس یک پارامتر نزدیکی ϵ به‌دست آورد. این مجتمع چخ نوع هوموتوپی‌ای برابر پوشش $\epsilon/۲$ ($S^۱ \vee S^۱ \vee S^۱$) دارد؛[۱] در حالی‌که مجتمع ریپس نوع هوموتوپی کاملاً متفاوت ($S^۱ \vee S^۲$) را دارد.[۲]

۴.۱ کدام ϵ؟

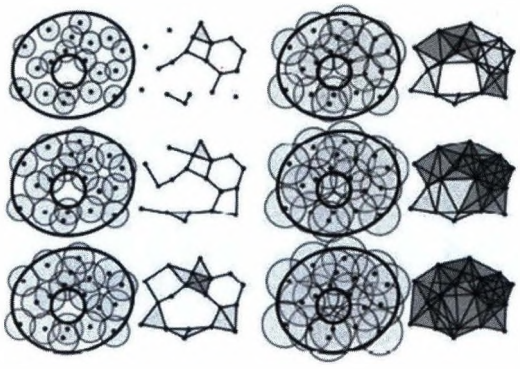
تبدیل مجموعه‌ای از داده‌های توده‌نقطه‌ای به یک مجتمع کلی (خواه ریپس، چخ یا دیگری)، مستلزم انتخاب پارامتر ϵ است. به‌ازای ϵ به اندازهٔ کافی کوچک، مجتمع یک مجموعهٔ گسسته است؛ به‌ازای ϵ به اندازهٔ کافی بزرگ، مجتمع یک سادک تنها از بعد بالا خواهد بود. آیا انتخابی بهینه برای ϵ وجود دارد که به بهترین نحو توپولوژی مجموعهٔ داده‌ها را منعکس کند؟ مجموعهٔ داده‌های توده‌نقطه‌ای و دنباله‌ای از مجتمعهای ریپس را چنانکه در شکل ۳ تصویر شده در نظر بگیرید. این توده‌نقطه، از نمونه‌گیری از نقاط روی یک طوق مسطح به‌دست آمده است. آیا می‌توان این را نتیجه گرفت؟ از روی شکل به نظر می‌رسد که مقدار ایده‌آل ϵ، اگر وجود داشته باشد، بسیار نادر است. زمانی که ϵ افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که حفره‌های کوچک از درون طوق برداشته می‌شوند، حفرهٔ بزرگی که طوق را از قرص متمایز می‌کند، پر می‌شود.

۲. توپولوژی جبری برای داده‌ها

توپولوژی جبری مجموعهٔ کاملی از ابزارها برای شمردن و شماره‌گذاری حفره‌ها و دیگر ویژگیهای توپولوژیک در فضا و نگاشتهای بین آنها ارائه می‌دهد. در مورد داده‌های از بُعد بالا، توپولوژی جبری به مانند تلسکوپ عمل می‌کند، اشیا و ویژگیهایی را که با چشم غیرمسلح قابل رؤیت نیستند آشکار می‌کند. در آنچه در پی می‌آید، ما توجه خود را به مانستگی [هومولوژی] معطوف می‌کنیم، زیرا توازنی بین محاسبه و تحلیل توپولوژیک ایجاد می‌کند. آشنایی مقدماتی با مانستگی را، به اندازه‌ای که مثلاً از فصل ۲ی [۱۵] می‌توان کسب کرد، مفروض می‌گیریم [به تابلو «یادآوری بعضی مفاهیم» هم نگاه کنید.ـم.].

مانستگیِ مجتمعی وابسته به یک توده‌نقطه در یک ϵ مشخص، هرچند هم قابل محاسبه و هم اطلاع‌دهنده است، کافی نیست؛ اشتباه است که سؤال شود کدام مقدار ϵ بهینه است. اطلاع از نحوهٔ «شمردن» سادهٔ تعداد و انواع حفره‌هایی که به‌ازای هر مقدار پارامتر ϵ ظاهر می‌شود هم کافی نیست. اعداد

۱. فضایی همسانریخت با اجتماع سه دایره که در یک و فقط یک نقطه مشترک‌اند.ـم.
۲. فضایی همسانریخت با اجتماع یک کره ۲ بُعدی و یک دایره که در یک و فقط یک نقطه مشترک‌اند.ـم.



شکل ۳ دنباله‌ای از مجتمعهای ریپس برای یک مجموعهٔ داده‌های توده‌نقطه‌ای که نمایش‌دهندهٔ یک طوق است. با افزایش ϵ، حفره‌ها ظاهر و محو می‌شوند. کدام حفره‌ها واقعی و کدام نوفه است؟

بتی کفایت نمی‌کنند. وسیله‌ای لازم است که مشخص کند کدام حفره‌ها اساسی هستند و کدام حفره‌ها را با اطمینان می‌توان نادیده گرفت. شیوه‌های توپولوژیک استاندارد هوموتوپی و مانستگی، انعطافی در طبیعت انعطاف‌ناپذیر آنها پدید نمی‌آورند. حفره، حفره است؛ مهم نیست که چقدر صاف یا ناصاف است.

۱.۲ ماندگاری

ماندگاری بدان‌گونه که توسط اِدِلزبرونر، لِتشِر[1] و زمردیان معرفی شده [۱۲] و توسط کارلسن و زمردیان پالایش یافته [۲۲]، پاسخی دقیق به این مسأله است. فرض کنیم خانواده‌ای پارامتری‌شده از فضاها داده شده است. آن ویژگیهای توپولوژیکی که روی یک حوزهٔ پارامتری قابل ملاحظه ماندگارند به‌عنوان سیگنال و ویژگیهای زودگذر به‌عنوان نوفه در نظر گرفته می‌شوند. به‌عنوان یک مثال مشخص، فرض کنیم $\mathrm{R} = (\mathcal{R}_i)_۱^N$ دنباله‌ای از مجتمعهای ریپس باشد که به توده‌نقطهٔ معینی به‌ازای یک دنبالهٔ افزایشی از مقادیر پارامتر $(\epsilon_i)_۱^N$ وابسته شده است. نگاشتهای شمول طبیعی

$$\mathcal{R}_۱ \hookrightarrow \mathcal{R}_۲ \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{R}_{N-۱} \hookrightarrow \mathcal{R}_N \qquad (۱.۲)$$

وجود دارند. به جای بررسی مانستگی تک‌تک جملات $\mathcal{R}_i$، مانستگی شمولهای مکرر $\iota : H_*\mathcal{R}_i \to H_*\mathcal{R}_j$ به‌ازای همهٔ $i < j$ها بررسی می‌شود. این نگاشتها معلوم می‌کنند کدام ویژگیها ماندگارند.

به عنوان مثالی ساده، ماندگاری توضیح می‌دهد که چرا مجتمعهای ریپس تقریب قابل قبولی از مجتمعهای چخ هستند. با وجود آنکه هیچ مجتمع ریپس منفردی، تقریب قابل اعتمادی از یک مجتمع چخ منفرد نیست، زوجهای مجتمعهای ریپس، مجتمع چخ مناسب را در حفره‌ای با اندازهٔ مناسب «فشرده» می‌کنند.

لم ۱.۲ (دوسیلوا [۱۰]) به‌ازای هر $\epsilon > ۰$، زنجیری از نگاشتهای شمول

$$\mathcal{R}_\epsilon \to \mathcal{C}_{\epsilon\sqrt{۲}} \to \mathcal{R}_{\epsilon\sqrt{۲}} \qquad (۲.۲)$$

وجود دارد.

1. Letscher

(برای کران وابسته به بعد نابیشتر از $\sqrt{۲}$، نگاه کنید به [۱۰]). این دلالت بر این امر دارد که هر ویژگی توپولوژیکی که تحت نگاشت شمول $\mathcal{R}_\epsilon \to \mathcal{R}_{\epsilon'}$ ماندگار بماند، وقتی که $\epsilon'/\epsilon > \sqrt{۲}$، در واقع یک ویژگی توپولوژیک مجتمع چخ $\mathcal{C}_{\epsilon'}$ خواهد بود. نتیجه: مانستگی شمول $\iota_* : H_*\mathcal{R}_\epsilon \to H_*\mathcal{R}_{\epsilon'}$ اطلاعاتی را آشکار می‌کند که از $H_*\mathcal{R}_\epsilon$ قابل رؤیت نیست و $H_*\mathcal{R}_{\epsilon'}$ بی‌آلایش[1] است. این نشانه‌ای از ایدهٔ گسترده‌تر ماندگاری است که در دنباله‌ای دلخواه از مجتمعهای زنجیری مطرح می‌شود.

۲.۲ مانستگی ماندگار

با یک **مجتمع ماندگار** شروع می‌کنیم، یعنی دنباله‌ای از مجتمعهای زنجیری $\mathrm{C} = (C^i_*)_i$ به همراه نگاشتهای زنجیری $x : C^i_* \to C^{i+۱}_*$ (برای سادگی در علامت‌گذاری، نگاشتهای زنجیری x را اندیس‌گذاری نمی‌کنیم.) منشأ آن دنباله‌ای از مجتمعهای ریپس یا چخ افزایشی برحسب ϵ است که به‌ازای یک دنبالهٔ صعودی از پارامترهای $\{\epsilon\}$ نمونه‌گیری شده‌اند. چون مجتمعهای ریپس یا چخ با ϵ رشد می‌کنند، نگاشتهای زنجیری، به‌طور طبیعی با نگاشت شمول یکی گرفته می‌شوند.

تعریف ۲.۲ به‌ازای $i < j$، مانستگی (i,j) ماندگار C که با $H^{i\to j}_*(\mathrm{C})$ نشان داده می‌شود، به‌عنوان تصویر همریختی القایی $H_*(C^i_*) \to H_*(C^j_*)$ تعریف می‌گردد.

به عنوان مثال، پالایهٔ $\mathrm{R} = (\mathcal{R}_i)$ از مجتمعهای ریپس، پارامتری شده با نزدیکیهای ϵ_i، را در نظر بگیرید. لم ۱.۲ ایجاب می‌کند که اگر $\epsilon'_j/\epsilon_i \geq \sqrt{۲}$ آنگاه از $H^{i\to j}_k(\mathrm{R}) \neq ۰$ نتیجه می‌شود $H_k(C_{\epsilon_j}) \neq ۰$. حفره‌ها در مجتمع چخ، به‌وسیله مانستگی ماندگار پالایهٔ ریپس به‌دست می‌آیند.

همان‌طور که کارلسن و زمردیان توضیح داده‌اند، مقدار بیشتری ساختار جبری در لابه‌لای گروههای مانستگی ماندگار وجود دارد. یک دامنهٔ ایده‌آل اصلی R را به‌عنوان حلقهٔ ضرایبْ ثابت نگاه می‌داریم و یک ساختار $R[x]$ـمدول مدرج روی C قرار می‌دهیم که x به‌عنوان یک نگاشت انتقال عمل می‌کند، یعنی یک تک‌جمله‌ای واحد x^n از $R[x]$، C^i_x را از طریق n بارکاربرد متوالی x به C^{i+n}_* می‌فرستد. شرطی از نوع متناهی را با این مضمون می‌پذیریم که هر C^i_*، به عنوان $R[x]$ـمدول، متناهی‌مولد است و اینکه دنباله در i پایدار می‌ماند (در حالتی که دنباله‌ای نامتناهی از مجتمعهای زنجیری داده شده است).

اگرچه پالایش C از طریق نگاشتهای زنجیری x است (مقایسه کنید با وضعیت مجتمعهای ریپس که با افزایش ϵ سادکها اضافه می‌شوند اما هرگز برداشته نمی‌شوند)، C به عنوان یک $R[x]$ـمدول، آزاد است. مانستگی حاصل، $H_*(\mathrm{C})$، ساختار یک $R[x]$ـمدول را حفظ می‌کند اما برخلاف مدول زنجیری، لزوماً آزاد نیست، و به‌آسانی رده‌بندی نمی‌شود: نظریهٔ آرتین‌ـریس[2] در جبر جابه‌جایی دلالت به این دارد که مسألهٔ رده‌بندی (از نوع متناهی) مدولهای ماندگار، مثل $H_*(\mathrm{C})$، معادل است با رده‌بندی $R[x]$ـمدولهای متناهی‌مولد که با اعداد نامنفی مدرج شده باشند. این نیز معلوم شده که بسیار دشوار است، برای مثال، در مورد $\mathbb{Z}[x]$.

1. unadorned 2. Artin-Rees

اما برای ضرایب متعلق به یک میدان F، رده‌بندی $F[x]$ـمدولها از «قضیهٔ ساختار» برای دامنهٔ ایده‌آلهای اصلی نتیجه می‌شود، زیرا ایده‌آلهای مدرج $F[x]$ تنها به‌صورت $(x^n \cdot F[x])$ هستند. از اینجا نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۳.۲ (رک. [۲۲]) برای یک مدول ماندگار متناهی C، با ضرایب متعلق به میدان F، یکریختی زیر برقرار است

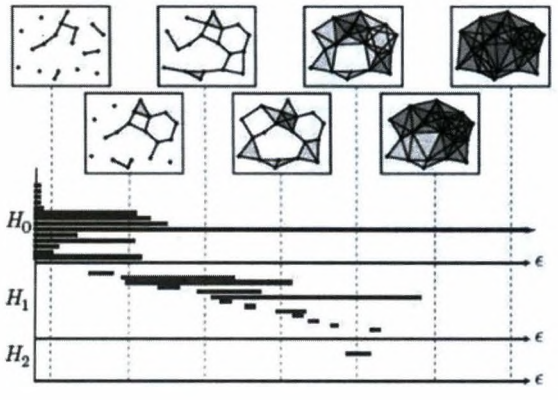
$$H_*(\mathrm{C};F) \simeq \oplus_i x^{ti} \cdot F[x] \oplus (\oplus_j x^{r_j} \cdot (F[x]/(x^{s_j} \cdot F[x]))) . \quad (۳.۲)$$

این قضیهٔ رده‌بندی تعبیری طبیعی دارد. قسمتهای آزاد رابطهٔ (۳.۲) با آن مولدهای مانستگی که به‌ازای پارامتر t_i به‌وجود می‌آیند و برای تمام مقادیر بعدی پارامتر ماندگار می‌مانند، در تناظری دوسویی قرار می‌گیرند. عناصر تابدار[1] نیز با آن مولدهای مانستگی که در پارامتر r_j ظاهر می‌شوند و در پارامتر $r_j + s_j$ محو می‌شوند، متناظر می‌شوند. در سطح زنجیر، قضیهٔ ساختار، یک زوج‌سازی تولد‌ـمرگِ مولدهای C را (به‌استثنای آنهایی که تا بینهایت ماندگار می‌مانند) به‌دست می‌دهد.

۳.۲ کدهای میله‌ای

بازه‌های پارامتری که از پایهٔ $H_*(\mathrm{C};F)$ در رابطهٔ ۳.۲ به‌دست می‌آیند، الهامبخشِ یک تصویر بصری کلی از $H_k(\mathrm{C};F)$ به‌صورت **کد میله‌ای‌اند**. هر کد میله‌ای، نمایشی گرافیکی از $H_k(\mathrm{C};F)$ به‌صورت گردایه‌ای از پاره‌خطهای افقی در صفحه است که محور افقی آن متناظر با پارامتر است و محور عمودی آن ترتیبی (اختیاری) از مولدهای مانستگی را نمایش می‌دهد. شکل ۴ نشان‌دهندهٔ مثالی است از نمایش مانستگیِ نقاط نمونه‌گیری شده از یک طوق از شکل ۳ با استفاده از کد میله‌ای (در حالتی که تعداد زیادی مقدار پارامتر، ϵ_i، مورد نظر است).

قضیهٔ ۳.۲ مشخصهٔ اساسی کدهای میله‌ای را به‌دست می‌دهد.



شکل ۴ [پایین] مثالی از کدهای میله‌ای برای $H_*(\mathrm{R})$ در مثال شکل ۳. [بالا] رتبهٔ $H_k(\mathcal{R}_{\epsilon_i})$ برابر است با تعداد بازه‌هایی در کد میله‌ای $H_k(\mathrm{R})$ که خط‌چین $\epsilon = \epsilon_i$ را قطع می‌کنند.

1. torsional elements

قضیهٔ ۴.۲ (ر.ک. [۲۲]) رتبهٔ گروه مانستگی ماندگار $H_k^{i\to j}(\mathrm{C};F)$ برابر است با تعداد بازه‌هایی در کد میله‌ای $H_k(\mathrm{C};F)$ که بازهٔ $[i,j]$ را می‌پیمایند. به‌خصوص، $H_*(C_*^i;F)$ برابر است با تعداد بازه‌هایی که شامل iاند.

بهترین تعبیر کد میله‌ای آن است که آن را مشابه عدد بتی برای ماندگاری بدانیم. یادآور می‌شویم که k امین عدد بتی یک مجتمع، $\beta_k := \mathrm{rank}H_k$، نقش یک اندازهٔ عددی ناظریف برای H_k را ایفا می‌کند. همانند β_k، کد میله‌ای مربوط به H_k هیچ اطلاعاتی درباره ساختار ظریف‌تر مانستگی نمی‌دهد، بلکه فقط یک رتبهٔ پارامتری شدهٔ پیوسته را به‌دست می‌دهد. ویژگی نمایش با کد میله‌ای، توانایی پالایش کیفی نوفهٔ توپولوژیک و جذب کردن ویژگیهای مهم است. در واقع، همان‌گونه که در [۷] تشریح شده، کدهای میله‌ای، در حضور نوفه‌های افزوده شده به یک پالایهٔ [مورس]، پایدارند. برای مثال در شکل ۴، می‌توان (با استفاده از یک نمونه‌گیری بسیار ناظریف) ملاحظه کرد که توده‌نقطه، احتمالاً یک شیء همبند را با یک یا دو حفرهٔ قابل رؤیت، آن‌طور که با H_1 اندازه گرفته شده، نشان می‌دهد و هیچ مانستگی بالاتر قابل ملاحظه‌ای ندارد.

۴.۲ محاسبه

اکثر ناورداها در توپولوژی جبری به دلیل دشواری محاسبه شناخته‌شده نیستند. مانستگی (در ساده‌ترین صورتهایش) به نظر استثنایی می‌آید از این لحاظ که در آن ناورداها به عنوان خارج قسمت فضاهای برداری ظاهر می‌شوند. در زمینهٔ کاربردها، «متناهی» ممکن است از کرانهای معقول فراتر رود. وقتی با میلیونها سادک مواجه می‌شویم، هیچ دلیلی برای این شعار نداریم که «مانستگی فقط جبر خطی است» بلکه به الگوریتم خوب نیاز است. خوشبختانه چنین الگوریتمهایی، با دامنه و سرعت فزاینده، وجود دارند. مرجع [۱۶] درآمدی جامع بر مباحث و الگوریتمهای قابل دسترس برای محاسبهٔ مانستگی در مسائل واقعی در حوزه‌های کاربردی است.

خوش‌اقبالی بیشتر اینکه، یک الگوریتم عالی برای محاسبهٔ گروههای مانستگی ماندگار و کدهای میله‌ای در دسترس است. این الگوریتم، مجتمع سادکی پالایش‌شدهٔ متشکل از زوج (σ_i,τ_i) را، که σ_i یک سادک و τ_i زمانی است که این سادک در پالایش ظاهر می‌شود، به‌عنوان متغیر خود می‌گیرد. این الگوریتم ابتدا در مرجع [۱۲] برای زیرمجتمعهای سادکی $\mathbb{E}^3$ با ضرایبِ متعلق $\mathbb{Z}_2$ و بعد در مرجع [۲۲] برای مجتمعهای ماندگار عمومی با ضرایب متعلق به یک میدان، انتشار یافت. برنامهٔ رایانه‌ای مبتنی بر Matlab موسوم به Plex که دو سیلوا و پری [۱۱] آن را تهیه کرده‌اند، برنامهٔ کتابخانه‌ای مانستگی ماندگار به زبان $C++$ تهیه‌شده به‌وسیلهٔ کِتنِر[1] و زمردیان را با ابزارهایی برای وارد کردن داده‌ها و نیز محاسبه ادغام کرده است.

شایان ذکر است که برای پالایه‌های زنجیری حاصل از مجموعه‌های داده‌های واقعی، مجتمعهای ریپس اندازهٔ غیرقابل کنترلی دارند. این ویژگی، نمونه‌گیری کارا یا فروکاهش مجتمع با توپولوژی صحیح را ضروری می‌سازد. **مجتمع شاهد**[2] کارلسن و دو سیلوا ([۸]، [۹]، و [۱۴]) راه‌حلی ساده برای این مسأله به‌دست می‌دهد.

1. Kettner 2. witness complex

۵.۲ راههای دیگر

باید خاطرنشان کنیم که آنچه در بالا آمد، مختصرترین برداشت از مبحثی است که به‌سرعت به یک زیرشاخهٔ جذاب و پر جنب‌وجوش از توپولوژی محاسباتی تبدیل شده است. برای افرادی که به جنبه‌های جبری‌ـتوپولوژیک نظریه علاقه‌مند هستند، پیشرفتهای اخیر را در زیر ذکر می‌کنیم.

- پالایه‌های دیگری، علاوه بر آنهایی که به مجتمعهای چخ و ریپس وابسته‌اند، وجود دارند که وضعیتهایی طبیعی برای بررسی ماندگاری هستند. **پالایهٔ مورسِ** یک فضای X مجهز به $f:X\to\mathbb{R}$، پالایه‌ای از X به توسط مجموعه‌های

$$X_t=\{f^{-1}([-\infty,t])\}$$

است. این (یا نسخهٔ گسسته شده مربوط به آن) وضعیت بررسی شده‌ای است ([۱] و [۷])، گرچه پالایش به‌وسیلهٔ داده‌های خمیدگی انجام می‌گیرد[۵].
- بحث ما دربارهٔ ماندگاری در وضعیتی بود که با زنجیر مجتمعهای سادکیِ اندیس‌گذاری شده با یک پارامتر سروکار داریم. انگیزه‌های قوی برای بررسی خانواده‌های چند پارامتری مجتمعها وجود دارد. لکن در این وضعیت مشکلات جبری اساسی در ساختن نظریه‌ای مشابه برای مدولهای ماندگاری پیش می‌آید [۲۴].
- محاسبهٔ مانستگی نسبی ماندگار پیچیده‌تر است، زیرا زنجیر مجتمعهای پارامتری شدهٔ C، که به دنبال آن می‌آید، دیگر به عنوان یک $F[x]$ـمدول، آزاد نیست. بندیک[1] و هارِر (در تحقیقی در حال پیشرفت) یک روش ساخت جبری برای تعریف و محاسبهٔ مانستگی ماندگار ارائه داده‌اند که در مورد پالایهٔ مورس صورت بسیار روشنی دارد. قضیهٔ مشابه قضیهٔ ۳.۲ زوج‌سازی کامل نقاط بحرانی مورس را میسر می‌کند.
- محاسبهٔ همانستگی [کوهومولوژی[2]] ماندگار سرراست نیست. همان‌طور که دوسیلوا (در تحقیقی در حال پیشرفت) نشان داده است، اگر $F[x]$ـمدول مدرج آزاد زنجیر مجتمعهای C برای پالایهٔ مورس X_tی فضای X را بگیرید و آن را به عنوان یک $F[x]$ـمدول آزاد مدرج دوگان‌سازی کنید، یعنی اگر $\mathrm{Hom}_{F[x]}(\mathrm{C},F[x])$ را بسازید، آنگاه مانستگی شیء حاصل دیگر به عنوان یک $F[x]$ـمدول مدرج، همانستگی ماندگار $H^*(X_t)$ نخواهد بود، بلکه همانستگی نسبی $H^*(X,X_t)$ خواهد بود. محاسبهٔ همانستگیِ ماندگار مطلق، توسل به دوگانی و نظریهٔ بندیک‌ـهارر را که در بالا عنوان شد الزامی می‌سازد.

۳. مثال: تصاویر طبیعی

مثال جدیدی از کشف ساختار توپولوژیک در یک مجموعهٔ داده‌های بعد بالا، از **تصاویر طبیعی** می‌آید. در اواخر دههٔ ۱۹۹۰، فان‌هاترن و فان دِر شاف مجموعهٔ ۴۱۶۷ عدد عکس دیجیتالی تصادفی از صحنه‌هایی در فضای باز را کنار هم گذاشتند [۲۰]. مامفرد و همکارانش چندین سؤال جالب دربارهٔ ساختار و عمومیت بالقوهٔ جنبه‌های آماری این مجموعه و مجموعه‌هایی مشابه از تصاویر، در زمینهٔ درک بصری مطرح کرده‌اند [۱۷].

1. Bendich 2. cohomology

۱.۳ مسأله، مسأله می‌آفریند: گامی به‌جلو

مامفرد، لی[1] و پدرسن[2]، ۵۰۰۰ مربع ۳ پیکسل در ۳ پیکسل را به تصادف از هر تصویر دیجیتالی انتخاب کردند و با نگه داشتن ۲۰ درصد بالایی آنها برحسب تباین [کنتراست]شان، یک مجموعهٔ داده‌ها ساختند [۱۸]. هریک از چنین مربعهایی، ماتریسی از شدتهایِ خاکستری‌مقیاس است. مجموعهٔ کامل داده‌ها تقریباً از ۸۰۰۰۰۰۰ نقطه در $\mathbb{E}^9$ تشکیل شده است. با بهنجارسازی نسبت به‌میانگین شدت و محدود کردن توجه به تصاویری که تباین زیاد دارند (آنهایی که از مبدأ دورند)، مجموعهٔ داده‌ها روی مجموعه‌ای چون $\mathcal{M}$ از نقاط یک کرهٔ توپولوژیک هفت بُعدی $S^7 \in \mathbb{E}^8$ تصویر می‌شود. این نحوهٔ ساختن مجموعهٔ داده‌ها نیازمند انتخاب پایه‌ای طبیعی برحسب نرم خاصی برای مقادیر تباین قطعات است. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر، خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۱۸] ارجاع می‌دهیم.

۲.۳ ساختاری هنوز مبهم

فروکاهش ناظریفِ یک تصویر طبیعی (به مربعهای ۳×۳ از شدتهای خاکستری‌مقیاس) بازهم به توده‌نقطه‌ای می‌انجامد که بعد آن بالاتر از آن است که قابل تجسم باشد. از این بدتر، ساختاری که در آنجاست مبهم و آشفته است: به نظر می‌آید نقاط ابتدا باید روی کل کرهٔ S^7 توزیع شوند. به این ترتیب، بررسی چگالی در دستور قرار می‌گیرد. موضوع پالایش چگالی، حوزهٔ بسیار شناخته‌شده‌ای در آمار است. برای مثال [۱۹] را ببینید.

در [۳] یک تابع **هم‌چگالی** به‌صورت زیر مورد استفاده قرارگرفته است. یک عدد صحیح مثبت k را ثابت نگاه دارید. برای هر نقطهٔ x_α در مجموعهٔ داده‌ها، $\delta_k(x_\alpha)$ را به‌عنوان فاصلهٔ در $\mathbb{E}^n$ از x_α تا kامین همسایهٔ x_α از لحاظ نزدیکی تعریف کنید. برای یک مقدار ثابت k، δ_k توزیعی مثبت روی توده‌نقطه‌ست، که شعاع‌گویی را که برای دربرگرفتن kـهمسایه مورد نیاز است اندازه می‌گیرد. (به این ترتیب) مقادیر δ_k با چگالی توده‌نقطه رابطهٔ معکوس دارند. با استفاده از مقدار بزرگ‌تر برای k، میانگین‌گیری از نقاط بیشتری در میان همسایه‌ها صورت می‌گیرد که تغییرات ظریف‌تر را نامشخص می‌کند.

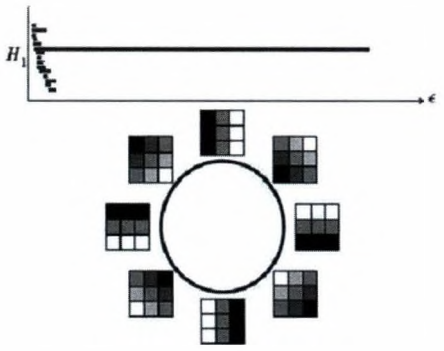
هم‌چگالی به‌صورت زیر برای پالودن داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. زیرمجموعهٔ $\mathcal{M}$ در T درصد بالایی چگالی، آن‌طورکه با δ_k اندازه‌گیری‌شده، را با $\mathcal{M}[k, T]$ نمایش می‌دهیم. این یک زیرمجموعهٔ دو پارامتری از توده‌نقطه است که برای مقادیر قابل قبول k و T، هستهٔ مناسبی را نمایش می‌دهد.

۳.۳ بازگشت به آغاز: وضوح بیشتر

محاسبهٔ اولین مانستگی ماندگار جالب روی این مجموعهٔ داده‌ها در سطح H_1 روی می‌دهد. تا چه میزان «طوقه» در مجموعهٔ داده‌ها وجود دارد که در امتداد آنها توده‌داده متمرکز شده است؟

با در نظر گرفتن آستانهٔ چگالی $T = ۲۵$ به‌ازای پارامتر همسایگی $k = ۳۰۰$، با ۵۰۰۰ نقطه که به‌تصادف از $\mathcal{M}[k, T]$ نمونه‌گیری شده‌اند، محاسبهٔ کد میله‌ای برای اولین مانستگی H_1 یک مولد ماندگار یکتا را آشکار می‌کند [۳]. شکل ۵ را ببینید. این دلالت بر آن دارد که مجموعهٔ داده‌ها حول دایرهٔ اولیه‌ای در کرهٔ ۷بعدی پراکنده شده‌اند. ساختار کد میله‌ای نسبت به نمونه‌گیری تصادفی نقاط در $\mathcal{M}[k, T]$ استوار[3] است.

1. Lee 2. Pederson 3. robust



شکل ۵ کد میله‌ای H_1 برای یک نمونه‌گیری تصادفی از ۵۰۰۰ نقطه از $\mathcal{M}[۱۵, ۲۵]$ یک مولد تنها را به‌دست می‌دهد. این مولد نشان‌دهندهٔ خط گرهی بین یک قطعهٔ روشن و یک قطعهٔ تاریک، ویژگی بارز دایرهٔ اولیه در $\mathcal{M}$، است.

هدف از محاسبهٔ مانستگی، کشف یک ویژگی «پنهان» مجموعهٔ داده‌هاست که فقط با خوشه‌بندی و همبندی قابل تشخیص نیست. همان‌گونه که محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد، ساده‌ترین ویژگی از این نوع، یک دایرهٔ اولیه است که داده‌ها حول آن پراکنده شده‌اند. این را با چه چیزی می‌توان نظیرکرد؟ یک بررسی دقیق نقطه‌دادهٔ متناظر با دایرهٔ اولیه یک الگوی ۳×۳ از قطعات را با یک ناحیهٔ روشن و یک ناحیهٔ تاریک که با یک انتقال خطی از هم جدا شده‌اند نشان می‌دهد. **خم گرهی**[1] بین ناحیهٔ تاریک و روشن، خطی است و در خانواده‌ای دایره‌ای که با زاویهٔ بین خطوط گرهی پارامتری شده، طبق شکل ۵ ظاهر می‌گردد.

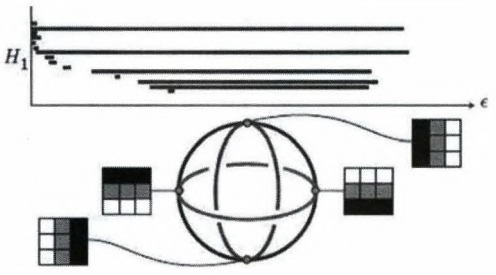
همان‌طور که از کد میله‌ای ملاحظه می‌شود، این مولد به‌ازای آستانه و پارامترهای هم‌چگالی انتخاب شده نمایان است. بررسی کدهای میله‌ای مربوط به اولین گروه مانستگی H_1 مجموعهٔ داده‌ها، پالایش شده با پارامتر هم چگالی $k = ۱۵$ و آستانهٔ $T = ۲۵$، اولین مانستگی ماندگار متفاوت را نمایان می‌کند. کاهش k، به میانگین‌گیری از نقاطِ کمتر و حساسیت چگالی موضعی‌تر منجر می‌شود. کد میله‌ای شکل ۶ نشان می‌دهد که H_1، مانستگی ماندگار نمونه‌های انتخاب شده از $\mathcal{M}[k, T]$، عدد بتی‌ای برابر ۵ دارد. این به معنای حضور پنج دایرهٔ مجزا در مجموعهٔ داده‌ها نیست، بلکه با توجه به مولدها و محاسبهٔ کد میله‌ای برای H_0 مشاهده می‌شود [۳] که علاوه بر دایرهٔ اولیه، حاصل از محاسبهٔ H_1 برای kی بزرگ، دو دایرهٔ ثانویه نیز وجود دارد که در پارامتر چگالی پایین‌تر به چشم می‌آیند.

بررسی دقیق این سه دایره نشان می‌دهد که هریک به‌ازای kی بزرگ، دایرهٔ اولیه را دوبار قطع می‌کنند، با این حال دو دایرهٔ ثانویه جدا هستند. این دو دایرهٔ ثانویه با چه ویژگیهایی در داده‌ها ممکن است متناظر باشند؟ همان‌طور که در [۳] خاطرنشان شده، هر دایرهٔ ثانویه تصاویر را با سه ناحیهٔ تباین تنظیم می‌کند و بین این حالتها و دایرهٔ اولیه درون‌یابی می‌کند. تفاوت بین دو دایرهٔ ثانویه، به ترتیب، در گرایش آنها به لایه‌لایه‌شدن افقی و عمودی است. شکل ۷ تعبیری از معنای دایره‌های ثانویه را نشان می‌دهد.

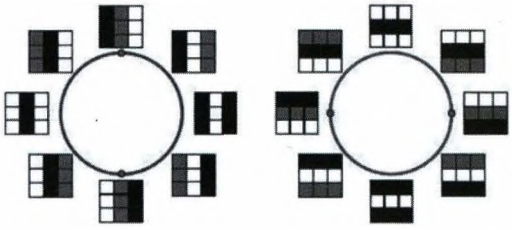
۴.۳ مشابه، اما متفاوت

فایدهٔ ویژگیهای توپولوژیک موقتی که به‌صورت تابعی از پارامتر ϵ ظاهر می‌شوند و محو می‌شوند چیست؟ آیا این به چیزی بیشتر از یک روش اکتشافی[2]

1. nodal curve 2. heuristic



شکل ۶ کد میله‌ای H_1 برای $\mathcal{M}[15, 25]$ پنج مولد ماندگار را آشکار می‌کند که از اینجا وجود دو دایرهٔ ثانویه معلوم می‌شود که هریک دایرهٔ سوم را قطع می‌کند. به‌ازای kی بزرگ، دایرهٔ اولیه دوبار قطع می‌شود.

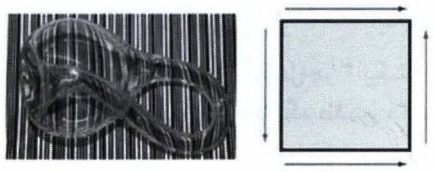


شکل ۷ مولدهای ثانویهٔ H_1 برای $\mathcal{M}[15, 25]$ به‌عنوان تنظیم‌کنندهٔ تغییرات از قطعهٔ دوگان به قطعهٔ سه‌گانهٔ نواحی با تباین بالا، به ترتیب با گرایشهای افقی و عمودی تعبیر می‌شوند.

برای مجموعه‌های داده‌های از بعد بالا که تجسم آنها دشوار است، می‌انجامد؟ هرچند تحقیقات کارلسن و همکارانش خیلی جدید است، رویکرد توپولوژیک به تحلیل داده‌ها کاربردهای متعددی دارد که مؤید این گزاره‌اند که ساختارهای مانستگی در مجموعه‌های داده‌های از بعد بالا اهمیت علمی دارند. علاوه‌بر مجموعهٔ داده‌های مامفرد که در اینجا بررسی شد، محاسبات مانستگی ماندگار در چندین زمینهٔ متفاوت به‌کار می‌روند، از جمله، ویژگیهای هندسی خمها (برای مثال، تشخیص اپتیکی نویسه‌ها) [۵] و دنبالهٔ داده‌های حاصل از آرایه‌های الکترودی کاشته‌شده در قشر بینایی نخستینِ مغز میمونهای ماکاک[1] [۴]. یکی از اهداف طرح تحقیقاتی اخیر، پی بردن به این نکته بود که چگونه توپولوژی یک فضای پارامتری‌شدهٔ تصاویر در داده‌های عصبی ظاهر می‌شود. درست همان‌گونه که عدسی چشم تصاویر را کنترل می‌کند و روی شبکیه می‌اندازد. فضای پارامتری تصویر تبدیل می‌شود و در قشر بینایی انعکاس می‌یابد.

در مورد داده‌های تصویری طبیعی، آموزنده خواهد بود که مانستگی ماندگار $\mathcal{M}$ را چیزی شبیه بسط سری فضای واقعی بینگاریم. فروکاهش مجموعهٔ کامل داده‌ها به یک S^1 از طریق تصویر کردن، در واقع یک نوع بهنجارسازی برای حذف جملات از مرتبهٔ صفر (یا «تک‌قطعه») در یک مجموعهٔ داده‌هاست. به پیروی از این تشبیه، مولد اولیهٔ H_1، نقش جملهٔ بعدی را در بسط نوع هوموتوپی مجموعهٔ داده‌ها ایفا می‌کند، خم گرهی دو قطعهٔ متباین را از هم متمایز می‌کند. دایره‌های ثانویه با درون‌یابی بین خمهای گرهی منفرد و دوگان آنها، به عنوان جملات از مرتبهٔ بالاتر بسط عمل می‌کنند که در آنها انحرافهای عمودی و افقی پیش می‌آید.

1. Macaque



شکل ۸ [چپ] یک بطری کلاین (تصویر شده در برابر کد میله‌ای‌اش). [راست] رویه جهت‌ناپذیری که از یکی گرفتن ضلعهای مقابل یک مربع طبق شکل به‌دست می‌آید.

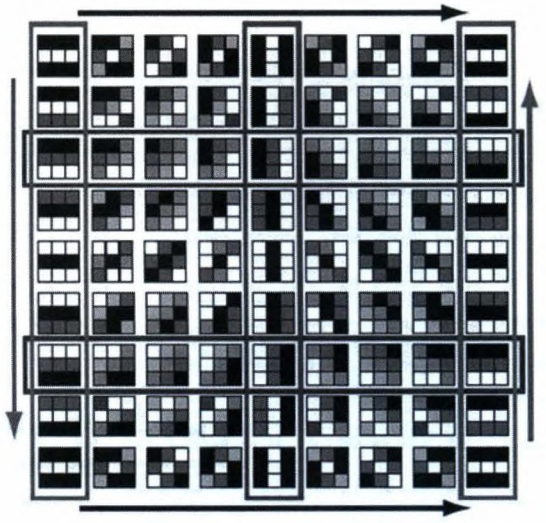
از اینجاست که بصیرتی عمیق‌تر در مورد مجموعهٔ داده‌ها پیدا می‌کنیم. با الهام گرفتن از معنای کدهای میله‌ای H_1 متعلق $\mathcal{M}$ و بررسی بیشتر، گرایش ذاتی به سمت راستاهای افقی و عمودی در داده‌های تصویری طبیعی، در مقابل زاویهٔ قراردادی قائمه که دوربین در آن وضعیت نگاه داشته می‌شود، آشکار می‌گردد: مرجع [۳] گزارش می‌دهد که با تکرار آزمایش عکس‌برداری با دوربینی که در زاویهٔ $\pi/4$ قرار داده شده است، مجموعه‌ای از داده‌ها به‌دست می‌آید که مولدهای ماندگار آن گرایشی به‌سمت راستای افقی واقعی و عمودی واقعی را نشان می‌دهد: محور پیکسل‌بندی، کمتر از محورگرانی در داده‌های تصویری طبیعی مطرح است.

آیا قدرتی پیشگویانه در کدهای میله‌ای مجموعهٔ داده‌ها نهفته است؟ پیشرفت اخیر [۳] چشم‌اندازی از این‌گونه قابلیت رویکرد توپولوژی ماندگار را نشان می‌دهد. کدهای میله‌ای برای دومین مانستگی ماندگار H_2، برحسب تغییرات چگالی و آستانه بی‌ثبات‌ترند. جای تعجب نیست: جملاتِ ازکمترین مرتبه در هر بسط به سری، همیشه به آسانی درک می‌شوند. اما نشانی از یک مولد ماندگار H_2 (با ضرایب متعلق به $\mathbb{Z}_2$) در وضعیتهای معینی از k و T وجود دارد که همراه با مولدهای پایهٔ H_1، بصیرتی در پیش‌بینی ساختار فضای قطعاتِ با تباین زیاد به‌دست می‌دهد. در آستانه‌های چگالی معین، کد میله‌ای H_2 که به‌طور مناسب با تیغ اُکام[1] بریده شده باشد، کامل‌شدهٔ دوبُعدی پایهٔ مانستگی ماندگار H_1 به‌ازای kی کوچک را به‌صورت **بطری کلاین** (شکل ۸) القاء می‌کند. به‌یاد آورید که این رویهٔ جهت‌ناپذیر می‌تواند به عنوان فضای یکی‌سازی[2] یک مربع، به‌صورتی که در شکل نشان داده شده، محقق شود. شکل ۹ نمایشی از نشاندن این رویه در فضای تصاویر پیکسل‌بندی‌شده را نشان می‌دهد. باید توجه کرد که این کامل‌سازیِ طبیعی چگالی پایین تعبیر مانستگی ماندگار H_1 است: دایره‌های اولیه و ثانویه با خواص تقاطعی مناسب ظاهر می‌شوند. خوشبختانه محاسبات یک زوج مانستگی با ضرایب متعلق $\mathbb{Z}_2$ــ طبیعی‌ترین میدان متناهی موجود برای آزمایشهای رایانه‌ای ــ در بررسی اینکه رویهٔ ماندگار پیدا شده یک بطری کلاین است، سودمند می‌باشد.

تأکید می‌کنیم که مجموعهٔ داده‌های توده‌نقطه‌ای $\mathcal{M}$، گسترده و از بُعد بالاست و به هیچ‌وجه به‌طور واضح ویژگیهای متمایز را مشخص نمی‌کند. یک نگاه گذرا به داده‌ها، چنین می‌نمایاند که کرهٔ ۷ بُعدی به‌طور چگال با نقاط داده‌ای پر می‌شود و ظاهراً در آن هیچ ساختار روشنی نمی‌توان پیدا کرد. از طریق عدسی مانستگی ماندگارــ که به‌طور مناسب تنظیم و هدف‌گذاری شده

۱. Occam's razor، اصلی منسوب به ویلیام اُکام، فیلسوف و منطقدان انگلیسی قرن ۱۴ حاکی از آنکه از میان دو نظریه که توان توصیف و پیش‌بینی یکسان دارند، ساده‌ترین را باید برگزید.ــم.

2. identification



شکل ۹ یک بطری کلاین به‌طور طبیعی در فضای پارامتر، به عنوان کامل‌شده مدل ۳ـدایره، نشانده می‌شود. در فضای یکی‌سازی تابیدهٔ نشان داده شده، دایرهٔ اولیه دور محور افقی دوبار می‌پیچد. دو دایرهٔ ثانویه هریک حول محور عمودی یک بار می‌پیچند (توجه: دایره‌های واقع در منتهی‌الیه چپ و راست با جهتهای مخالف به یکدیگر چسبانده شده‌اند). هر دایرهٔ ثانویه، دایرهٔ اولیه را دوبار قطع می‌کند.

باشد ــ ویژگیهای بارزی ظاهر و محو می‌شوند. به‌محض بررسی دقیق، معلوم می‌شود که این مولدهای ماندگار با ساختارهای معنی‌داری در داده‌ها متناظر می‌شوند و الهامبخش پارامتری‌سازی قابل درکی از ساختار کلی مجموعه داده‌ها هستند. این است آن نوع قدرت توصیفی که هر مثال خوب ریاضیات کاربردی به چالش علمی عرضه می‌کند.

مراجع

1. P. Bubenik and P. Kim, "A statistical approach to persistent homology", preprint (2006), `math.AT/0607634.`
2. E. Carlsson, G. Carlsson, and V. de Silva, "An algebraic topological method for feature identification", *Intl. J. Computational Geometry and Applications* 16:4 (2006), 291-314. MR2250511 (2007c: 52015)
3. G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. de Silva, and A. Zomorodian, "On the local behavior of spaces of natural images", *Intl. J. Computer Vision*, in press.
4. G. Carlsson, T. Ishkhanov, F. Mémoli, D. Ringach, and G. Sapiro, "Topological analysis of the responses of neurons in V1", in preparation (2007).
5. G. Carlsson, A. Zomorodian, A. Collins, and L. Guibas, "Persistence barcodes for shapes", *Intl. J. Shape Modeling*, 11(2005), 149-187.
6. F. Chazal and A. Lieutier, "Weak feature size and persistent homology: computing homology of solids in $\mathbb{R}^n$ from noisy data samples", in *Proc. 21st Sympos. Comput. Geom.* (2005).
7. D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer, "Stability of persistence diagrams", in *Proc. 21st Sympos. Comput. Geom.* (2005), 263-271.
8. V. de Silva, "A weak definition of Delaunay triangulation", preprint (2003).
9. V. de Silva and G. Carlsson, "Topological estimation using witness complexes", in *SPBG04 Symposium on Point-Based Graphics* (2004), 157-166.
10. V. de Silva and R. Ghrist, "Coverage in sensor networks via persistent homology", *Alg. & Geom. Topology*, 7 (2007), 339-358.
11. V. de Silva and P. Perry, PLEX home page, http://math.stanford.edu/comptop/programs/plex/.
12. H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian, "Topological persistence and simplification", *Discrete Comput. Geom*, 28:4 (2002), 511-533. MR1949898 (2003m: 52019).
13. H. Edelsbrunner and E. P. Mücke, "Three-dimensional alpha shapes", *ACM Transactions on Graphics*, 13:1 (1994), 43-72.
14. L. Guibas and S. Oudot, "Reconstruction using witness complexes", in *Proc 18th ACMSIAM Sympos. on Discrete Algorithms* (2007).
15. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). MR1867354 (2002 k:55001)
16. T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, 157, Springer-Verlag (2004). MR2028588 (2005g:55001)
17. D. Mumford, "Pattern Theory: The Mathematics of Perception", Proc. Intl. Congress of Mathematicians, Vol. I (2002), 401-422. MR1989195 (2004k:91168)
18. D. Mumford, A. Lee, and K. Pedersen, "The nonlinear statistics of high-contrast patches in natural images", *Intl. J. Computer Vision*, 54 (2003), 83-103.
19. B. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC (1986). MR848134 (87k:62074)
20. J. van Hateren and A. van der Schaff, "Independent Component Filters of Natural Images Compared with Simple Cells in Primary Visual Cortex", *Proc. R. Soc. London*, B 265 (1998), 359-366.
21. L. Vietoris, "Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen", *Math. Ann.*, 97 (1927), 454-472. MR1512371.
22. A. Zomorodian and G. Carlsson, "Computing persistent homology", *Discrete Comput. Geom.*, 33 (2005), 249-274. MR2121296 (2005j:55004).
23. A. Zomorodian and G. Carlsson, "Localized homology", *Proc. Shape Modeling International* (2007), 189-198.
24. A. Zomorodian and G. Carlsson, "The theory of multidimensional persistence", *Proc Symposium on Computational Geometry* (2007), 184-193.

******

• Robert Ghrist, "Barcodes: the persistent topology of data", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S)*, (1) **45** (2008) 61-75.

* رابرت گریست، دانشگاه ایلینوی، اُربانا، آمریکا

`ghrist@math.uiuc.edu`

جان مایکل همرزلی

گریزان از انتزاع، شیفتهٔ مسائل ملموس•

جفری گریمت*، دومینیک ولش**
ترجمهٔ فرزانه صفوی‌منش



سه تن از برندگان نشان فیلدز در دو کنگرهٔ اخیر (ونده‌لین ورنر و آندری آکونکوف در سال ۲۰۰۶، و استانیسلاو اسمیرنوف در سال ۲۰۱۰) این نشان را به‌خاطر دستاوردهایی گرفته‌اند که ریشه در تحقیقات جان همرزلی ریاضیدان انگلیسی (۱۹۲۰ـ۲۰۰۴) در زمینهٔ پرکولاسیون دارد. در ضمن، این نشانها اولین مدالهای فیلدز است که در مباحث احتمالاتی داده شده و حاکی از توجه جامعهٔ ریاضی بین‌المللی به اهمیت پژوهشهایی است که در این زمینه‌ها صورت می‌گیرد. به‌این مناسبت مقاله‌ای دربارهٔ همرزلی برای خوانندگان نشر ریاضی انتخاب کرده‌ایم که ترجمهٔ آن را با اندکی تلخیص در اینجا می‌خوانید. این مقاله به زندگی و تحقیقات او و تأثیر گستردهٔ دستاوردهایش در مباحث مربوط به مدلهای شبکه‌ای و فرایندهای تصادفی می‌پردازد و همچنین جنبه‌هایی از شخصیت و آرای او را دربارهٔ ریاضیات بازمی‌تاباند. گفتنی است که همرزلی به‌شدت علاقه‌مند به مسأله‌های ملموس و مشخص و مخالف تجرید و نظریه‌پردازی بود و مواضع رادیکال او در این زمینه، و بحث و جدلهایش با بعضی از ریاضیدانان دیگر در محافل آکادمیک انگلیس مشهور است.

جان همرزلی در صف اول ریاضیدانانی قرار داشت که رده‌بندی ریاضیات را به دو ردهٔ «محض» و «کاربردی» به چالش می‌گرفتند؛ یک بار هنگامی که در کالج ترینیتی آکسفرد به میهمانان معرفی می‌شد، گفته بود که سروکارش با «مجموعه‌های دشوار» است. وی اعتقاد پرشوری به اهمیت ریاضیاتی داشت که پیوندهای قوی با وضعیتهای زندگی واقعی داشته باشد و نیز به یک نظام آموزش ریاضی که در آن، حل مسائل بر ایجاد نظریه ارجحیت داشته باشد. او به خاطر کارهایش در نظریهٔ پرکولاسیون، فرایندهای تصادفی زیرجمعی، قدم‌زدنهای از خودگریز، و روشهای مونت‌کارلو، و نیز در نظر کسانی که او را می‌شناختند، به‌دلیل کمال عقلانی و توانایی‌اش در الهام‌بخشی و به چالش کشاندن دیگران در یادها خواهد ماند. صرف‌نظر از دستاوردهای پژوهشی گسترده‌ای که به‌خاطر آنها به‌عنوان مسأله‌حل‌کن برجسته شهرت یافت، یکی از پیشگامان نهضت دهه‌های پنجاه و شصت میلادی در بازنگری محتوای برنامهٔ ریاضیات مدارس انگلیس نیز به‌شمار می‌رود.

پیشینهٔ خانوادگی

جان همرزلی از زوجی که ارتباطات قوی بین‌المللی داشتند متولد شد. مادرش مارگارت (فامیل دختری‌اش وایتهد) در مسکو به‌دنیا آمده بود که در آنجا تامس پدر مارگارت به کار صادرات و فروش دستگاه نخ‌تابی کتان و سایر ماشین‌آلات نساجیِ لنکاشر[1] مشغول بود. او در ۱۴ سالگی به یک مدرسهٔ شبانه‌روزی در انگلیس فرستاده شد و بدین‌ترتیب، از رنجها و محرومیتهایی که برادرانش در پی انقلاب اکتبر ۱۹۱۷ با آنها مواجه شدند، رهایی یافت [۳۷]. پس از آن انقلاب، بلشویکها اعلام کرده بودند که همهٔ داراییهای خارجی به مردم روس تعلق دارد و اموال آنها مصادره شد و خانوادهٔ وایتهد از راه مرمانسک[2]، در سال ۱۹۱۸ به لندن بازگشتند. بامداد روزی در ژانویهٔ ۱۹۲۰، جورج، داییِ جان، توسط پلیس مخفی شوروی (چکا[3]) از بسترش

1. Lancashire 2. Murmansk 3. Cheka

بیرون کشیده شد و به مدت سه هفته، در لوبیانکا[1] در دمای زیر صفر درجه، در حالی که روی زمین سیمانی خالی می‌خوابید، مورد بازجویی قرار گرفت و سپس به اردوگاه کار اعزام شد. ولی آلفرد برادر جورج توانست او را به استناد اینکه در شرف مرگ است، رهایی بخشد. در هر حال، او زنده ماند و همراه آلفرد، در همان روز، با قطاری خود را به مرز فنلاند رساندند.

گای هیو[2]، پدرِ جان، دومین پسر یک پزشک لندنی بود. پدرگای، وقتی او چهارده ساله بود، درگذشت و خانواده‌اش را در شرایط سخت تنها گذاشت. گای مجبور به ترک مدرسه شد و پس از آن زندگی پرفرازونشیبی را با مشاغل متعددی از پیشخدمتی تا مدیریت در شرکتهای مختلفی در آمریکا و انگلیس گذراند.

مارگارت و گای در سال ۱۹۱۴ ازدواج کردند و جان مایکل، تنها پسر آنها که زنده به دنیا آمد، در ۲۱ مارس ۱۹۲۰ متولد شد.

تحصیلات

آنچه در زیر می‌آید، برگرفته از یادداشتهایی است که جان دربارهٔ زندگی‌اش نوشته و علاوه بر آنکه شرح جالب توجهی از زندگی وی در دوران قبل از آکسفرد است، شخصیت او را نیز تا حدی نشان می‌دهد.

«من از سال ۱۹۲۵ تا ۱۹۲۹، به کودکستانی به نام واترساید اسکول در شهر بیشاپس استورفرد[3] می‌رفتم. این کودکستان را خانم مدیری به نام بلندفورد اداره می‌کرد و محل بسیار مناسبی برای شروع خواندن، نوشتن، و حساب بود. در آخرین سالی که در آنجا بودم، پدرش آقای بلندفورد مرا با زبان لاتینی و جبر آشنا کرد.

در سال ۱۹۲۹ مرا به عنوان شاگرد شبانه‌روزی به مدرسهٔ بمبریج[4] در آیل آو وایت[5] فرستادند که مدرسه‌ای با ایده‌های مترقی دربارهٔ تدریس هنر، صنایع دستی، و نجاری بود، اما در آن توجه چندانی به مباحث آکادمیک نمی‌شد. بعد از گذراندن چند ترم در بمبریج، والدینم که از آنچه به من درس داده می‌شد، ناراضی بودند، مرا به مدرسه‌ای معمولی به نام استراتون پارک[6] نزدیک بلچ‌لی[7] فرستادند و من از ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۴ در آنجا ماندم.

شخصی که در استراتون پارک ریاضی درس می‌داد، آقای پیلینر[8]، با پرسیدن این سؤال از من که «با چند لوبیای آبی می‌توان عدد ۵ را ساخت؟» تقریباً مرا از شور و شوق انداخت. وقتی نتوانستم پاسخ این معما را بیابم، به من گفت که پاسخ ۵ است و من نادان هستم. اما من قبلاً این پاسخ را از آنجا که بدیهی‌تر از آن بود که درست باشد، کنار گذاشته بودم (و اکنون با نگاهی به گذشته می‌توان دید که احتمالاً پاسخ درست چیزی شبیه به $^{1-}$[تعداد لوبیاها]۵ است). هر چند بخت ریاضی من کمی پس از این اتفاق، با ورود جرالد میستر[9]، معلم ریاضی دیگری به استراتون پارک، دوباره به من روی آورد.

او در زمان حضورش در استراتون پارک، آموزشی درست و حسابی در ریاضیات به من داد و علاقهٔ مرا به این موضوع برانگیخت. این آموزش مقدار زیادی هندسهٔ اقلیدسی (شامل موضوعاتی همچون دایرهٔ نه‌نقطه)، جبر (اتحادهای نیوتن برای ریشه‌های چندجمله‌ایها)، و مثلثات (اتحادهای حاکم بر زوایای مثلث، محیط دایره، دایرهٔ محاطی و غیره) را در بر می‌گرفت؛ اما شامل حسابان نبود. به کمک او، یک بورس تحصیلی از سدبرگ به‌دست آوردم.

من از ۱۹۳۴ تا ۱۹۳۹ در مدرسهٔ سدبرگ[10] بودم. در آن روزها مرسوم بود که بچه‌های باهوش‌تر را به سمت دورهٔ کلاسیک هدایت کنند و در سال اول حضورم در آنجا مرا در دانشپایهٔ پنجم کلاسیک[1] قرار دادند که در آنجا مدرکی در کلاسیک (معادل با سطح اُ ـ لِوِل[2] امروزی) گرفتم و پس از آن در پایان سال اول، در دانشپایهٔ ششم کلاسیک[3] جای گرفتم. با این حال، لاتین و یونانی مرا مجذوب نکرد و بعد از یک ترم در دانشپایهٔ ششم کلاسیک، به من اجازه دادند که به دانشپایهٔ عالی نوین[4] بروم تا مقداری علوم بیاموزم. درسهای بسیار خوبی در فیزیک از لن تیلر[5] و در شیمی از چارلز مابی[6] فراگرفتم. استاد ریاضیات من، سیدنی آدامس[7] بود. دانش او در ریاضیات، درست و حسابی بود؛ اما از آنچه برای تدریس در مدارس مناسب بود، فراتر نمی‌رفت: سردرگمی خود را از اینکه یک تابع پیوسته ممکن است هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد، به‌یاد می‌آورم و اگرچه او می‌توانست مطلب را تأیید کند، اما نمی‌توانست مثال مشخصی از آن برای من بیاورد. در تابستان ۱۹۳۷، گواهینامهٔ عالی (معادل با اِی ـ لِوِل[8] امروزی) را در ریاضیات، فیزیک، و شیمی دریافت کردم؛ اما به کسب رتبهٔ ممتاز در ریاضیات نائل نشدم. من در امتحان بورس تحصیلی برای کالج امانوئل[9] کیمبریج در سال ۱۹۳۷، و نیز نیوکالج[10] آکسفرد در سال ۱۹۳۷ شرکت کردم، ولی موفقیتی در هیچ‌یک از آنها کسب نکردم. با این حال، در دومین تلاش خود، در سال ۱۹۳۸ کمک هزینه‌ای از کالج امانوئل به من اعطا شد».

کیمبریج

همرزلی ادامه می‌دهد:

«در سال ۱۹۳۹ وارد دورهٔ کارشناسی کیمبریج شدم. جنگ تازه آغاز شده بود و بسیاری از دانشجویان کارشناسی از جمله من، به عنوان داوطلب شرکت در جنگ، خود را به پایگاهی که برای ثبت‌نام نیروی تازه‌نفس در کیمبریج اختصاص یافته بود، معرفی کرده بودند. حداقل، تا آنجا که برای این پایگاه مهم بود، در آن زمان، شواهد چندانی از استفاده از افراد دارایِ صلاحیت علمی بالقوه در جنگ وجود نداشت. بعد از یک معاینهٔ پزشکی مختصر، خود را جلوی میز سه‌پایهٔ مقابل یکی از استادان که لباس گروهبانی پوشیده بود، یافتم و گفتگوی زیر صورت گرفت.

گروهبان: شما می‌خواهید به نیروی دریایی ملحق شوید یا زمینی یا هوایی؟

من: فکر می‌کنم زمینی. (من در مدرسه، در جوخهٔ آموزش افسران بودم).

گروهبان: کدام هنگ را در نظر دارید؟

من: هیچ نظری ندارم. من به‌تازگی شروع به خواندن ریاضیات در کیمبریج کرده‌ام. آیا در ارتش استفاده‌ای از ریاضیات می‌شود؟

گروهبان: نه، در این جنگ، هیچ استفاده‌ای از ریاضیات نمی‌شود و در هر حال، شما فقط یک دانشجوی کارشناسی هستید. نیروها فقط سه ریاضیدان حرفه‌ای از کیمبریج را به خدمت گرفته‌اند. یکی برای نیروی دریایی که به آنها اطلاعاتی دربارهٔ انفجارهای زیر آب بدهد، یکی برای نیروی هوایی به‌منظور تشریح ناوبری فضایی، من هم سومین نفر هستم. کار ریاضی من این است که هر روز تعداد کل نیروهای تازه‌وارد به نیروی دریایی، زمینی، و هوایی را با هم جمع کنم.

نمی‌دانم گروهبان چه کسی بود؛ شاید نظریهٔ اعداددان بود. البته او راجع به استفاده از علم، از جمله ریاضیات، در زمان جنگ و تعداد دانشمندان و ریاضیدانانی که از کیمبریج به خدمت گرفته شده بودند، در اشتباه بود،* اما من در این خصوص، تا مدتها بعد از آن روز، چیزی نمی‌دانستم. در این ضمن، مدتی که منتظر بودم تا سرانجام فراخوانده شوم، وقت خود را در کیمبریج کاملاً به بطالت گذراندم. درسهای کمکی استونلی[11] را که فقط به من یاد داد چگونه $\nabla^2\phi$ را در

1. Classical Fifth Form 2. O-Level 3. Lower Sixth Classical 4. Upper Sixth Modern 5. Len Taylor 6. Charles Mawby 7. Sydney Adams 8. A-Level 9. Emmanuel 10. New College

* اوکم و بیش هم‌عقیده با هاردی بود که به نظرش واضح می‌رسید که «ریاضیات واقعی، کاربرد مستقیمی در جنگ ندارد» (ر.ک. [۱۹] و [۲۰])، اما هنگام طرح این سؤال که «آیا ریاضیات، در جنگ، مفید است؟»، این را محتمل دانست که مهارت فنی، ریاضیدانان جوان را از خط مقدم دور نگه داشته و بنابراین جان آنها را نجات بدهد.

11. Stoneley

1. Lubianka 2. Guy Hugh 3. Bishops Stortford 4. Bembridge 5. Isle of Wight 6. Stratton Park 7. Bletchley 8. Pilliner 9. Gerald Meister 10. Sedbergh

مختصات قطبی کروی بیان کنم ونیز درسهای کمکی وودز[1] راکه موضوع مورد علاقه‌اش مکعب تاب‌خورده بود، به یاد دارم. شاگردان می‌کوشیدند با پرسیدن سؤالاتی ازوی دربارهٔ سایر بخشهای ریاضیات محض، تا جایی که ممکن بود، او را از مکعب تاب‌خورده دورکنند. اما ده دقیقه بعد از شروع کلاس، درگیر مسألهٔ مکعب تاب‌خورده می‌شد و بقیهٔ وقت کلاس از دست می‌رفت. خوش‌شانس بودم که پیش از آنکه به خدمت نظامی در توپخانهٔ سلطنتی فراخوانده شوم، در سال ۱۹۴۰، رتبهٔ سوم* را در امتحان مقدماتی ریاضیات در ترم تابستانی[2] به‌دست آوردم».

خدمت در ایام جنگ

همرزلی ادامه می‌دهد:

«برخلاف ادعای گروهبان سربازگیر درکیمبریج مبنی بر اینکه ریاضیات در زمان جنگ هیچ فایدهٔ نظامی ندارد، بعدها وقتی در توپخانهٔ سلطنتی در قسمت توپخانهٔ ضد هوایی خدمت می‌کردم، کاربردهایی از ریاضیات پیدا کردم. هواپیما هدفی متحرک با سرعت بالاست که مسیر پروازش توسط رادار، شناسایی و ردیابی می‌شود. برای زدن هدف، لازم است پیش‌بینی کنیم که در مدت‌زمان بین شلیک و اصابت گلولهٔ توپ، هواپیما چه مسافتی را می‌پیماید. این محاسبات به‌وسیلهٔ یک قطعهٔ سخت‌افزاری حسابگر، موسوم به «پیشگو» انجام می‌شد. دو نوع افسر ارتش وجود داشت که از آنها انتظار می‌رفت دانش فنی زیادی راجع به تجهیزات ضد هوایی داشته باشند که به‌ترتیب، «آموزشیار توپخانه» و «آموزشیارکنترل آتش» نامیده می‌شدند. هر دوی آنها دارای تخصص فنی در ارتباط با این سه جزء (رادار، پیشگو، سلاح) بودند؛ اما رشته‌های تخصص آنها با هم تداخل داشت؛ بدین‌معنا که آموزشیارهای توپخانه، در زوج اسلحه-پیشگو تخصص داشتند؛ حال آنکه آموزشیاران کنترل آتش در رادار-پیشگو متخصص بودند. آموزشگاه توپخانهٔ ضدهوایی (S.A.A.A)، بر ساحل پمبروکشر[3] در مانوربیر[4] واقع شده بود وگروه آزمایشهای هوایی S.A.A.A در لیدستپ[5]، حدود یک مایلی شرق مانوربیر مستقر بودند. وظیفهٔ گروه آزمایشهای هوایی، ترتیب‌دادن تحقیقاتی دربارهٔ عملکرد قطعه‌های تجهیزات ضدهوایی، هم تجهیزات موجود و هم تجهیزات پیشنهادی برای استفاده‌های آتی، و نیز ارسال گزارشی دربارهٔ آن برای ادارهٔ جنگ و وزارت تدارکات[6] بود. درگروه آزمایشهای هوایی، سه آموزشیار توپخانه و دو آموزشیارکنترل آتش وجود داشت و در سال ۱۹۴۲، من یکی از آموزشیارهای کنترل آتش شدم و تا پایان جنگ در آنجا ماندم.

با این حال، قبل از آن در اواخر تابستان سال ۱۹۴۰، ابتدا به‌عنوان سرباز و سپس سرجوخهٔ توپخانه در یک اردوی آموزشی در واحد آربورفیلد[7] به خدمت نظامی فراخوانده شدم تا اینکه سرانجام به یک واحد آموزش دانشجوی دانشکدهٔ افسری در شریونم[8] فرستاده شدم. در بهار ۱۹۴۱ به‌عنوان ستوان دوم به خدمت گمارده شدم و به یک پایگاه ضدهوایی، که از یک کارخانهٔ اسلحه‌سازی نزدیک ورشام[9] دفاع می‌کرد، اعزام شدم. در شرایونهام از وجود رادار اطلاع پیدا کردم. ایستگاه توپخانهٔ ورشام یک دستگاه رادار قدیمی داشت که با طول موجی به اندازهٔ چند متر عمل می‌کرد. عملکرد آن در اندازه‌گیری فاصله از یک هدف، قابل قبول بود؛ اما دقت آن در نشان دادن سمت هدف، که مبتنی بر اثرهای تداخلی بین سیگنالهای هوایی دوقطبی مستقیماً دریافت‌شده و نیز منعکس‌شده از یک صفحهٔ بزرگ افقی شبکهٔ سیمی بود، زیاد نبود. به هر حال، این دستگاه نشان‌دهندهٔ وضع موجود فناوری بود و خیلی به آن علاقه‌مند شدم. با تمایلی که به کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ تواناییهای بالقوهٔ رادار داشتم، با ستادهای مختلف تماس تلفنی می‌گرفتم که اقدام نامتعارفی بود و در نتیجهٔ آن، برای تصدی شغل آموزشیار کنترل آتش برای آموزش دیدن انتخاب شدم.

این آموزش، با یک دورهٔ شش‌هفته‌ای دربارهٔ فناوری پایه‌ای بی‌سیم در ریجنت استریت پلی‌تکنیک[1] آغاز و با یک دورهٔ طولانی‌تر و تخصصی‌تر دربارهٔ رادار در واچت[2] در سامرست[3] ادامه یافت. در واچت، راداری با طول موج ده سانتی‌متر داشتند که در آن زمان، در توپخانهٔ ضدهوایی هنوز متداول نشده بود. در آنجا دربارهٔ ویژگیهای مگنترون‌ها و هدایت امواج آموختم. با فراغت از واچت در سمت آموزشیار کنترل آتش که خودبه‌خود درجهٔ سروانی را به‌همراه داشت، ابتدا در تشکیلاتی در اسوستری[4] به خدمت گمارده شدم که متصدیان دستگاههای رادار را آموزش می‌داد و سپس به ستاد یک تیپ ضد هوایی در اورکنیز[5] رفتم که در آنجا مسئول استقرار رادارها برای دفاع از اسکاپا فلو[6] شدم. سرانجام در ۱۹۴۲ به گروه آزمایشهای هوایی در لیدستپ منتقل شدم.

در میان پرسنل شاخهٔ آزمایشهای هوایی، تیمی متشکل از ۴۰ دختر وجود داشت که محاسبات لازم برای تحلیل عملکرد تجهیزات ضدهوایی را انجام می‌دادند و من مسؤولیت نظارت بر محاسبات آنها را برعهده داشتم. یکی از وظایف آنها کاربری تئودولیت[زاویه‌یاب]های حرکتی برای مسیریابی هدف بود. تئودولیت حرکتی یک جفت دوربین تلسکوپی هم‌زمان در دو انتهای یک خط مبنا با طول حدوداً ۲ مایل بود که می‌توانستند زاویه‌های مربوط به هدف را به طور هم‌زمان به‌دست دهند (خواه یک هواپیما، خواه آستینهای نشانه‌گیری رادار که پشت هواپیما یدک کشیده می‌شد). به‌کمک داده‌های حاصل، امکان محاسبهٔ نسبتاً دقیق موقعیتهای هدف و چگونگی وابستگی این موقعیتها به زمان، در حین حرکت هدف در طول مسیر پروازش، فراهم می‌شد. این کار در عمل، مقداری محاسبات مثلثاتی سه‌بعدی نامطبوع بود. در اوایل ورودم به لیدستپ، طبق عرف نقشه‌برداران ارتش این کار با مداد و کاغذ و به‌کمک جدولهای ۷رقمی تابعهای مثلثاتی انجام می‌شد. اما هرچند نقشه‌برداران علاقهٔ موجهی به تعیین موقعیتی تا یک‌دهم اینچ داشتند، چنین کاری برای یک هدف هوایی با توجه به خطاهای غالب ذاتی در توپخانه، بیهوده بود. یکی از نخستین اصلاحات من، استفاده از جدولهای ۴ رقمی و تجهیز اتاق محاسبات با ماشینهای حساب رومیزی به جای نوشتن مجموعه‌های طولانی با مداد و کاغذ بود. ماشینهای حساب از خزانه‌داری بیرون آورده شدند. در آنجا آنها را در قفسه‌هایی بزرگ با این تصور نگهداری می‌کردند که ممکن است در آینده، برای اهداف مالی مورد استفاده قرار گیرند.

مطالبی از ریاضیات بود که من هیچ دانش قبلی از آنها نداشتم؛ به‌خصوص، لازم بود چیزهایی دربارهٔ روشهای عددی و آمار بیاموزم. از روی کتاب ویتاکر[7] و رابینسن[8] مطالبی دربارهٔ موضوعاتی همچون تفاضلهای متناهی و درونیابی یاد گرفتم. برای تشریح مسیر یک گلولهٔ توپ، با در دست داشتن زاویهٔ تراز اسلحه‌ای که آن را شلیک کرده، جدولهای دامنهٔ مجموعها برحسب مختصات دکارتی توپ در بازه‌های متوالی با فاصلهٔ زیاد از یکدیگر در طول مسیر حرکت آن، در دسترس بود. به ذهن مفسران جدولهای دامنه خطور نکرده بود که نمایش این داده‌ها برحسب مختصات قطبی طبیعی‌تر خواهد بود، و حتی وقتی این کار انجام شد، کار غیربدیهیِ درونیابی دوبعدی این داده‌ها باقی ماند. حکمی منسوب به کولموگوروف وجود دارد حاکی از اینکه یک تابع پیوسته از d متغیر مستقل را می‌توان برحسب یک چندجمله‌ای از $2d+1$ تابع تک‌متغیره بیان کرد؛ اما من از این نتیجه تا بعد از پایان جنگ اطلاع نداشتم. با وجود این، اندکی پس از ورود به لیدستپ پی‌بردم که این نتیجه، در حالت خاص $d=2$، حداقل برای توپهای ضدهوایی با مختصات قطبی ″۳٫۷ و ″۴٫۵ (۳٫۵ اینچ و ۴٫۵ اینچ) آشکارا درست است. از این رو ما جدولهای دامنهٔ این سلاحها را برحسب ارتفاع ۴۵ درجه و ارتفاع مماس دوباره محاسبه کردیم و توانستیم مسیر پیش‌بینی‌شده را با استفاده از درونیابی یک‌بعدی کامل کنیم.

عدم آشنایی با فنون آماری، نقص عمدهٔ دیگری در تحصیلات ریاضی قبلی من بود

---

1. P. W. Woods

* از میان ۳۳ داوطلب آزمون مقدماتی ریاضیات در سال ۱۹۴۰، ۱۱ نفر رتبهٔ نخست، ۱۵ نفر رتبهٔ دوم، و ۷ نفر رتبهٔ سوم را کسب کردند.

2. Easter Term 3. Pembrokeshire 4. Manorbier 5. Lydstep 6. Ministry of Supply 7. Arborfield 8. Shrivenham 9. Worsham

1. Regent Street Polytechnic 2. Watchet 3. Somerset 4. Oswestry 5. Orkneys 6. Scapa Flow 7. Whittaker 8. Robinson

و برای رفع آن یک مرخصی چندهفته‌ای برای بازگشت به کیمبریج گرفتم. جلد اول کتاب کندال دربارهٔ آمار ریاضی، تازه منتشر شده بود. من همچنین کتاب فیشر دربارهٔ روشهای آماری برای پژوهشگران را خواندم. فنون آماری در لیدستپ نقش مهمی برای اطمینان یافتن از عملکرد رادارهای ضدهوایی و پیشگوها و نیز ارتباط نظامی با مؤسسهٔ تحقیقات رادار در مالورن[1] در زمینهٔ تولید رادارها ایفا می‌کردند.

در اواخر جنگ به درجهٔ سرگردی ارتقا یافتم و به‌عنوان مشاور دفتر اردنانس[2] در لندن منصوب شدم. شلیکهای ضدهوایی که در آغاز جنگ بسیار نادقیق بود تا پایان جنگ به‌تدریج بهتر شده بود. به‌خصوص به دلیل متداول شدن فیوزهای انفجار از راه دور گلوله‌های توپ، ساقط کردن بمبهای V۱ در مقایسه با قبل ساده‌تر شده بود. علی‌رغم این، بمبهای پرندهٔ V۲، موشکهای بالستیکی و بنابراین غیرقابل اصابت بودند. دیری نپایید که ظهور سلاحهای هسته‌ای، بحث در دفتر اردنانس دربارهٔ دفاع هوایی لندن را به بحثی بی‌ثمر بدل کرد. دفتر توپخانهٔ ضدهوایی عملاً بسته شد».

فعالیتهای پس از جنگ

همرزلی ادامه می‌دهد:

«در سال ۱۹۴۶، به‌عنوان دانشجوی کارشناسی کالج امانوئل به کیمبریج بازگشتم. گاه‌وبیگاه، سفرهای اتفاقی به لندن برای انجام وظایفی در دفتر اردنانس پیش می‌آمد؛ اما این سفرها ارتباط چندانی به آیندهٔ تسلیحات ضدهوایی نداشت.

در زمان دانشجویی در دانشگاه کیمبریج طی دو سال پس از جنگ بسیار بیشتر از سالهای ۱۹۳۰ـ۱۹۴۰ انگیزه داشتم و همچنین از این اقبال برخوردار بودم که تحت تعلیم معلمان بهتری قرار گیرم، به‌خصوص وارد[3] و تاد[4] در ریاضیات محض و لیتلتون[5] در ریاضیات کاربردی. در سال ۱۹۴۸ رتبهٔ ممتاز (رانگلر[6]) را در بخش ۲ی تراپیس ریاضی[7] به‌دست آوردم.

در سال ۱۹۴۸ به نظرم رسید که مایلم شانس خود را برای یافتن شغلی آکادمیک در ریاضیات یا آمار ریاضی بیازمایم. آن زمان در کیمبریج، هیچ جای خالی برای من نبود و لذا برای پستهای خالی مربیگری در دانشگاههای ریدینگ[8] و سنت‌اندروز[9] درخواست فرستادم؛ اما درخواستهای من با توفیق همراه نبود. با این حال، سمتی به‌عنوان دستیار تحصیلات تکمیلی در آکسفرد، در مرکز آموزشی طرح و تحلیل آزمایشهای علمی، به‌دست آوردم.

این مرکز آموزشی، دپارتمان کوچکی بود با یک مدیر و دو دستیار دانشجوی تحصیلات تکمیلی (که یکی از آنها من بودم) همراه با یک منشی و دو خانم که با ماشین حساب رومیزی کار می‌کردند. در آن زمان، این بخش تنها ارائه‌دهندهٔ معروف خدمات آماری در آکسفرد بود و حوزهٔ عمل آن به‌طور عام شامل هر نوع مسأله‌ای می‌شد که ممکن بود در رشته‌های گوناگون مطرح شود. این مرکز همچنین موظف به ارائهٔ درسها و سخنرانیهایی دربارهٔ آمار بود. به عنوان مثال، من عهده‌دار ارائهٔ درسی در دپارتمان جنگلداری برای جنگلبانان ماورای بحار دربارهٔ گردآوری و تحلیل داده‌های مربوط به درختان و رشد آنها شدم.»

آکسفرد

همرزلی تا سال ۱۹۵۵ که در سمت کارمند ارشد علمی[10] به مؤسسهٔ تحقیقات انرژی اتمی در هارول[11] منتقل شد، پُست دستیار آموزشی را در دپارتمان طرح و تحلیل آزمایشها در دانشگاه به عهده داشت. او در سال ۱۹۵۹ در سمت کارمند تحقیقاتی ارشد مؤسسهٔ اقتصاد و آمار به آکسفرد بازگشت. این سمت، تقریباً مشابه با سمت مدرس دانشگاه اما بدون وظایف تدریس رسمی و عضویت دانشکده بود.

در طول همین دوره بود که پیوندی با کالج ترینیتی برقرار کرد که تا پایان عمرش پابرجا ماند. وقتی موران[1] (عضو انجمن سلطنتی)، در اواخر سال ۱۹۵۱ آکسفرد را به مقصد دانشگاه ملی استرالیا ترک کرد، همرزلی وظایف آموزشی او را به‌عنوان مدرس ریاضیات به‌عهده گرفت. مدت زیادی از انتخاب او به‌عنوان عضو پژوهشی ارشد در سال ۱۹۶۱ نگذشته بود که عضو رسمی کالج شد. در ۱۹۶۹ به دانشیاری[2] در آمار ریاضی ارتقا یافت و به‌عنوان عضو حرفه‌ای[3] در ترینیتی انتخاب شد، دو مقامی که تا زمان بازنشستگی‌اش در سال ۱۹۸۷ در آنها باقی ماند. گاهی گفته می‌شود که از بدو تأسیس کالج ترینیتی در ۱۵۵۵، همرزلی دومین عضو ریاضی در ترینیتی بعد از تامس الن (که در سال ۱۵۶۴ انتخاب شد) بوده است. ولی به‌طور مستدل می‌توان گفت که وی در حقیقت اولین عضو بوده است. در اواخر قرن شانزدهم، از همهٔ اعضای ترینیتی خواسته شد که سوگند تفوق[4] یاد کنند، ولی الن به قیمت خروج از دانشکده در سال ۱۵۷۱، از آن سر باز زد. در طول همان دوره و بعد از آن بود که فعالیتهای ریاضیاتی الن گسترش یافت؛ گرچه گفته می‌شود که برخلاف همرزلی، «کم نوشت و هیچ چیز منتشر نساخت».

علی‌رغم اینکه همرزلی در سالهای ۱۹۵۵ تا ۱۹۵۹ هیچ سمت رسمی در دانشگاه نداشت، نخستین دانشجو از چهار دانشجوی دکتری‌اش را در اکتبر سال ۱۹۵۶ گرفت. وی دفترکاری در خیابان کیبل رود[5] داشت و به‌نظر می‌رسد که بسیاری از اوقات خود را در آنجا می‌گذرانده است. از سال ۱۹۵۹ تا زمان بازنشستگی‌اش در سال ۱۹۸۷، در حالتی که به‌نظر، عزلتی باشکوه می‌آمد، در دفتر کارش در مؤسسهٔ اقتصاد و آمار کار می‌کرد. تا جایی که معلوم است، به غیر از دیدن دانشجویان تحصیلات تکمیلی‌اش و تدریس به تعداد کمی دانشجوی کارشناسیِ ترینیتی، وقت خود را به پژوهش اختصاص داده بود.

سر ناهار یکشنبه در آکسفرد، مدت کوتاهی بعد از ورودش به آنجا، با گون بیکول[6] که در سال ۱۹۵۱ همسر وی شد، برای اولین بار ملاقات کرد. آنها صاحب دو پسر به نامهای جولیان و هوگو شدند.

هرچند سمت دانشگاهی او در زمینهٔ ریاضیات نبود، وی عضو هیأت علمی بود و تحت لوای آن تدریس می‌کرد و امتحان می‌گرفت. همرزلی به‌خاطر توقعات زیادش از دانشجویان کارشناسی، انگشت‌نما بود. به‌عنوان مثال، یک سال، درسی بدون امتحان با عنوان «حل مسأله» ارائه کرد که تعداد کمی از دانشجویان در آن دوام آوردند. در سال ۱۹۶۶، به‌عنوان ممتحن امتحانات نهایی، دشوارترین تکالیف امتحانی را تا آنجا که کسی به‌خاطر می‌آورد، طرح کرد (یا حداقل به آن متهم شد). سال ۱۹۶۶ به خاطر سؤالی که او در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل طرح کرد و با این عبارت آغاز می‌شد: «اگر یک تکه هویج، در لحظهٔ $t = 0$، در βـایندولیل[7] استیک اسید فرو برده شود ...»، به «سال هویج» مشهور شد.

1. Malvern 2. Ordnance 3. A. J. Ward 4. J. A. Todd
5. R. A. Lyttleton 6. Wrangler
۷. mathematical tripos، نوعی امتحان سنتی در کیمبریج ـ م.
8. Reading 9. St Andrews 10. Principal Scientific Officer
11. AERE Harwell

1. P. A. P. Moran 2. Reader 3. Professorial Fellow
۴. supremacy؛ قانون تفوق هنری هشتم پادشاه انگلستان، و جانشینان او، به‌عنوان تنها رهبر عالی کلیسای انگلستان بر روی زمین ـ م.
5. Keble Road 6. Gwen Bakewell 7. β-indolyl

فنون ریاضیات پایه در نظر همرزلی خیلی بیشتر از بسیاری از دستاوردهای پیشرفته اهمیت داشت. زمانی در یک جلسهٔ ممتحنین از این موضع خود عقب ننشست که در یک سؤال احتمال پیشرفته نمرهٔ نسبتاً زیادی برای استفادهٔ درست از کسرهای جزئی داده شود.

برای دانشجویان و همکارانش همیشه ساده نبود که در برابر معیارهای ذهنی انعطاف‌ناپذیری که همرزلی تعیین کرده بود، قد علم کنند. اما این یک میدان عمل منصفانه برای همه بود و او معیارهایش را برای خودش نیز همچون سایرین اعمال می‌کرد. محض اطلاع ریاضیدانان کنونی می‌گوییم که او طی دورهٔ کاری‌اش فقط راهنمایی ۸ دانشجوی دکتری را به‌عهده گرفت که حداقل ۵ نفر از آنها مسیر خود را تا مرحلهٔ زندگی حرفه‌ای موفقیت‌آمیز ادامه دادند. وی از این دانشجویان انتظار داشت که آن‌گونه که جان هالتن[1]، توصیف کرده است، ارزش خود را نشان دهند:

«عموزاده‌ام توجه مرا به یک آگهی تبلیغاتی در روزنامهٔ آبزرور جلب کرد ...، پذیرش تقاضا برای دانشجویی پژوهشی در سازمان انرژی اتمی بریتانیا[2] برای تحصیل در زمینهٔ روشهای مونت‌کارلو تا اخذ درجهٔ دکتری در آکسفرد...، چند هفته بعد، برای حضور در امتحان، به محل سازمان دعوت شدم. با تصور مبهمی از آنچه مراد آنها بود، رفتم. در آنجا تعدادی داوطلب دیدم که به قدر خودم سردرگم بودند و به سمت سالنی مجهز به تعدادی میز و صندلی کوچک، راهنمایی شدیم. جان همرزلی، با گامهای بلند به سمت تریبون رفت؛ خودش را معرفی کرد و از ما خواست به سؤالات آزمون چهار ساعته‌ای پاسخ دهیم. آزمون شامل ۱۲ سؤال بسیار سخت ریاضی بود. من سعی کردم مسأله‌ها را یک‌به‌یک حل کنم. رویکردهای ممکن را پیشنهاد کردم و کوشیدم به سؤالات مطرح‌شده پاسخ دهم ولی موفقیت چندانی نداشتم. در پایان چهار ساعت، برگه‌ها جمع شد و ما نگران منتظر نتایج ماندیم».

پیتر مارسر[3] داستان را ادامه می‌دهد:

«شب قبل از روز مصاحبه چقدر بی‌خوابی کشیدم (و فکر می‌کنم دیگران هم همین‌طور بودند). وقتی هر یک از ما از اعضای کمیته، جان و پروفسور فلاورز، پرسیدیم که پاسخها چیست‌اند و چگونه می‌توان مسأله‌ها را حل کرد، تنها به گفتن این اکتفا کردند که جان در جلسهٔ پرسش و پاسخ اعضای بخش فیزیک نظری هارول این سؤالات را از میان سؤالهایی که اعضای بخش سعی در یافتن پاسخ آنها داشتند جمع‌آوری کرده است! یعنی هنوز هیچ پاسخی برای این پرسشها وجود نداشت، و کمیته تنها می‌خواست ببیند که ما داوطلبان، چگونه رویکردی می‌توانیم برای پرداختن به آنها ارائه کنیم. فکر می‌کنم این قصه، خلاصهٔ نظرم دربارهٔ جان است، ذهنی قوی، که گاهی رفتار شیطنت‌آمیز دارد، اما برای اهداف عالی! و مهم‌تر از همه، مردی بزرگ از مکتب قدیم. آشنایی با او شعف‌انگیز بود، جای خالی‌اش به تلخی احساس می‌شود، و من بسیار به او مدیونم».

نتیجهٔ داستان بالا این بود که هالتن، مارسر، دیوید هندزکم[4]، و جیلیان بردوود[5]، برای تحصیل تحت راهنمایی همرزلی انتخاب شدند.

همرزلی برای مدتی در آکسفرد و کالیفرنیا به یک اندازه خود را در خانه حس می‌کرد. او «در سیمپوزیومهای برکلی» دربارهٔ آمار ریاضی و احتمال به طور منظم شرکت می‌کرد و دوست نزدیک آماردان برجسته، جرزی نیمن[6] بود. وی نیمسال اول سالهای ۱۹۵۸ و ۱۹۶۱ را به‌ترتیب در اوربانا در ایلینوی و آزمایشگاه تلفن بل در نیوجرسی گذراند. در هر دوی این سفرها شاگردان تحصیلات تکمیلی‌اش او را همراهی می‌کردند.

او شاید به‌خاطر سنش بعد از خدمت نظام، هرگز برای تحصیل دکتری اقدام نکرد؛ اما در سال ۱۹۵۹ دانشگاه کیمبریج، درجهٔ ScD (دکتری علوم) و در همان سال دانشگاه آکسفرد نیز درجهٔ DSc (دکتری علوم) به او اعطا کرد. همچنین در سال ۱۹۶۶ مدال فون نویمان را به‌خاطر ریاضیات کاربردی از دانشگاه بروکسل و در سال ۱۹۸۴ مدال طلای مؤسسهٔ ریاضی و کاربردهای آن[1] و در سال ۱۹۹۷ جایزهٔ پولیا را از انجمن ریاضی لندن دریافت کرد. در سال ۱۹۷۶ به عضویت انجمن سلطنتی برگزیده شد. او سخنرانی رزبال[2] ۱۹۸۰ را در دانشگاه کیمبریج ایراد کرد و گزارشی از آن را در [۲۶] منتشر ساخت.

پس از بازنشستگی از مدرسی دانشگاه آکسفرد در سال ۱۹۸۷، به مرکز ریاضیات کاربردی و صنعتی آکسفرد[3] (OCIAM) رفت. او با قرار دادن تجربهٔ ریاضی وسیع‌اش در اختیار هر کسی که خواستار آن بود، این مهمان‌نوازی را جبران کرد.

بسیاری از دوستان و همکاران همرزلی در سال ۱۹۹۰ به‌مناسبت بزرگداشت هفتادمین سالروز تولد وی در مؤسسهٔ ریاضی آکسفرد گرد هم آمدند. به افتخار او، کتابی تحت عنوان بی‌نظمی در سیستمهای فیزیکی [۱۷] با مقاله‌هایی از افرادی که از ایده‌های وی بهره برده بودند، منتشر شد. همرزلی سخنرانی اختتامیهٔ این نشست را با عنوان «آیا جبر، خزعبلات است؟» ایراد کرد، اما برخلاف معمول، در این سخنرانی از پاسخ‌دادن به این سؤال خودداری کرد!

در سالهای آخر می‌شد او را در ویلو کاتج در حال مطالعه، حل جدول کلمات متقاطع، و کار دربارهٔ خوشه‌های اِدِن[4] یافت. وی در ۲ مه ۲۰۰۴ درگذشت.

جان همرزلی، ریاضیدان

جان همرزلی ریاضیدانی فوق‌العاده مبتکر و مسأله‌حل‌کنی برجسته و جسور بود. وی توانایی کم‌نظیری در کشف دقیق ریاضیات پایه در بطن یک مسألهٔ علمی و بنیانگذاری یک نظریهٔ سودمند داشت. وی آنچه را که ریاضیات ملموس[5] می‌نامید، به ریاضیات انتزاعی[6] ترجیح می‌داد؛ یعنی حل مسأله را برتر از «ریاضیات خیلی سطح بالا» می‌دانست که به‌شدت منتقد آن بود.

رده‌بندی مرسوم نوین ریاضیات به رده‌های «محض»، «کاربردی»، و «آمار» ممکن است شکاف میان این حوزه‌ها را برجسته سازد، شکافهایی که باید پر شوند. همرزلی چنین نگرشی را مردود می‌دانست. هنگام مواجهه با یک مسألهٔ عملی، هر آنچه را که می‌توانست منجر به یافتن راه‌حل مسأله شود، مورد استفاده قرار می‌داد. گرچه این رویکردِ «با دست‌خالی»، همیشه به شسته‌رفته‌ترین راه‌حل، نمی‌انجامد، در مورد همرزلی، بیشتر ریاضیات حاصل از کار او، با گذر زمان آزمون خود را پس داد. چندین مسأله که وی آنها را فرمول‌بندی و به‌طور جزئی حل کرد، بعداً به‌صورت نقاط تحول ترکیبیات و احتمال درآمدند. به‌عنوان مثال، کارهای وی در زمینهٔ قدم‌زدن‌های ازخودگریز[7]

1. John Halton 2. UKAEA 3. Peter Marcer
4. David Handscomb 5. Jillian Beardwood
6. Jerzy Neyman

1. Institute of Mathematics and its Applications
2. Rouse Ball lecture
3. Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics
4. Eden 5. implicated 6. contemplative
7. self-avoiding walks

و پرکولاسیون، در نظریهٔ تحول لوئونری[1] تصادفی که امروزه منجر به بازنگری رابطهٔ میان احتمال و نظریهٔ میدان همدیس شده است، جنبهٔ بنیادی دارد. نتایجی که همرزلی، دربارهٔ مسألهٔ اولام[2] به‌دست آورد، زمینهٔ اصلی برهان [۲] این موضوع است که حد ضعیف مربوط، توزیع تریسی-ویدوم[3] است. این دو مبحث عمومی، به گواهی اعطای نشانهای فیلدز در سال ۲۰۰۶ به وندەلین ورنر[4] و آندری آکونکوف[5]، در زمرهٔ سرزنده‌ترین بخشهای ریاضیات معاصر هستند.

مقالهٔ [۵۸] که با همکاری بیل مورتن نوشته شده است، از دو لحاظ نقطهٔ عطفی در کارهای اولیهٔ اوست. نخست آنکه، نشانهٔ آغاز مطالعهٔ گستردهٔ همرزلی دربارهٔ مسائل گسسته در احتمال و مکانیک آماری اوست. ثانیاً این مقاله شامل دو مسأله و یک فن است که توجه زیادی را در ۵۰ سال اخیر به خود جلب کرده است. برخلاف عنوان مقاله، «مونت کارلوی آدم فقیر»، این اثر ماندگار شامل بیان روشنی از مسألهٔ شمردن قدم‌زدن‌های ازخودگریز، استفاده از زیرجمعی‌بودن برای اثبات وجود ثابت رابط، و بحث محیطهای تصادفی است که در فرمول‌بندی سایمن برودبنت[6] از مدل پرکولاسیون به اوج می‌رسد.

اینها و سایر موضوعات، در بخشهای آتی، با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند، و مقاله با شرح خلاصه‌ای از اینکه چگونه کارهای همرزلی بعداً انگیزه‌بخش زمینه‌های وابسته بوده است، پایان می‌پذیرد.

محاسبهٔ دستی و رایانه‌ای/ برآورد

کارهای علمی اولیهٔ همرزلی بر مبنای ریاضیاتی بود که در طول جنگ روی آن کار می‌کرد. اولین اثر منتشرشدهٔ او، برخاسته از نظرات مستقل سرگرد بیلی[7] و سرگرد همرزلی در بحثی بود که پس از ارائهٔ مقاله‌ای دربارهٔ فرایندهای تصادفی به‌وسیلهٔ بارتلت [۳] در سمیناری دربارهٔ خودهمبستگی در سریهای زمانی درگرفت. این سمینار در سال ۱۹۴۶ در انجمن سلطنتی آمار برگزار شد. مسأله‌ای که بیلی و همرزلی با آن مواجه بودند، نشأت‌گرفته از آزمایشهای تجهیزات ضدهوایی بود. جزئیات آن در زمرهٔ «گزارشهای غیرقابل دسترس برای عموم» قرار داشت، اما منبع [۵۱] برخی نتایج به‌دست آمده از آن را به اختصار دربردارد.

به دنبال آن رشته مقالاتی دربارهٔ مسائل عمدتاً نامرتبط با هم نوشت که بسیاری از آنها به محاسبات سخت و برآورد مربوط بود. احتمالاً اولین اثر مهم او در این زمینه مقاله‌ای بود [۵۴] دربارهٔ برآورد پارامترها وقتی فضای پارامتر، مجموعهٔ گسسته‌ای از نقاط است. به‌عنوان مثال، وی نشان داد که اگر میانگین نامعلوم یک جامعهٔ نرمال با واریانس مفروض، صحیح‌مقدار در نظر گرفته شود، آنگاه برآورد ماکسیمم درستنمایی آن، نزدیک‌ترین عدد صحیح به میانگین نمونه است. علاقهٔ وی به زمینه‌هایی از این دست، برخاسته از یک مسألهٔ برآورد جرم مولکولی انسولین بود که ممکن است ضمن کارش به‌عنوان مشاور مسائل آماری اعضای هیأت علمی دانشگاه در علوم طبیعی، توجه وی را به خود جلب کرده باشد.

مسأله‌ای ریاضی در [۵۴] بود که منجر به مقالهٔ [۵۵] دربارهٔ فرمول مجانبی برای مجموعهای حاصلضربهای اعداد طبیعی شد. اگر به مقالهٔ [۵۵] بدون ارتباط با سایر مطالب نگریسته شود، چندان توجیهی برای آن دیده نمی‌شود. ولی قطعاً مهارتهای تحلیلی قوی همرزلی را نشان می‌دهد و توجه پال اردوش را که یکی از مسائل مطرح‌شده در آن را حل کرد [۸]، به خود جلب نمود. اکنون آشکار است که او در [۵۵]، در حقیقت، در حال محاسبهٔ آن چیزی بود که کرامر [۵]، اخیراً به‌عنوان «عبارات مهم» برای مد اعداد استرلینگ نوع اول، توصیف کرده است.

جان همرزلی در طول مابقی زندگی علمی‌اش این علاقه به روشهای محاسباتی و علوم رایانه را عمدتاً به‌واسطهٔ کارهایش در زمینه شبیه‌سازیهای بزرگ‌مقیاس (که در زیر می‌بینید) حفظ کرد.

احتمال کاربردی

ظاهراً همرزلی در دورهٔ بین ترک خدمت نظامی و شروع همکاری‌اش با مورتن سعی می‌کرده بختش را در گستره‌ای از مسائل در احتمال کاربردی، آنالیز سخت[1] و محاسبات بزرگ‌مقیاس بیازماید. به عنوان مثال، وی در [۵۲] مسأله‌ای برگرفته از طرح آزمایشها را درنظر گرفت که می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد: با در دست‌داشتن گردایه‌ای از k سکهٔ تقلبی و $n-k$ سکهٔ سالم، چگونه می‌توان سکه‌های تقلبی را تشخیص داد؟ علاقهٔ وی به هندسهٔ تصادفی در [۵۳] مشهود است که در آن توزیع فاصلهٔ میان دو نقطه را که به طور مستقل و یکنواخت روی کرهٔ nبعدی توزیع شده‌اند، بررسی کرده است. در [۵۶] حالت خاصی از یک حدس فِیش توت[2] دربارهٔ مجموع طول اضلاع یک چندوجهی محدب شامل کره‌ای به قطر واحد را ثابت کرده است. مقالهٔ [۵۷] دربارهٔ قدم‌زدن‌های مارکوفی روی شبکه‌های بلور است که از بررسی انتشار الکترونها در بلورهایی همچون شبکه‌های حاصل از تنگ‌چینی کروی شش‌ضلعی نشأت گرفته است.

در حوالی سال ۱۹۵۳، مسأله‌ای در شمارش تعداد سلولهای خون را بررسی کرد که در بخش آسیب‌شناسی بالینی درمانگاه رادکلیف[3] در آکسفرد مطرح شده بود. معلوم شد که مسألهٔ ریاضی مربوط در اینجا معادل است با یافتن توزیع احتمال تعداد شکافهای بین بازه‌هایی به طول تصادفی که به تصادف روی یک دایره قرار داده شوند. همرزلی (با استفاده از آنالیز سخت) نشان داد که این توزیع به‌طور مجانبی نرمال است. سریل دامب (عضو انجمن سلطنتی)، شرحی از تاریخچه و شاخه‌های این مسألهٔ خاص ارائه داده است [۶] و این کار همرزلی، استعداد ذاتی او را در برگزیدن مسائل اصالتاً جالب و سختِ علوم کاربردی و تبدیل آنها به ریاضیات معتبر نشان می‌دهد.

وی در [۶۰]، نتیجهٔ کلاسیکی از مارک کاتس[4] را که در ارتباط با تعداد صفرهای یک چندجمله‌ای با ضرایب تصادفی است، گسترش داد. نتایج کاتس در مورد میانگین تعداد صفرها در حالتی بود که ضرایب، مستقل از یکدیگر، دارای توزیع مشترک نرمال هستند، و همرزلی تعمیمی اساسی، اما پیچیده، از آن را ارائه داد. فعالیتهای اخیر در این زمینه، توسط فریدمن [۱۲]، فرهمند [۱۰]، و رامپونی [۳۸] توصیف شده است.

مؤثرترین کار همرزلی در احتمال کاربردی، تحقیقات وی در زمینهٔ پرکولاسیون و ویژگیهای هندسی بزرگ‌مقیاس n نقطه است که به‌تصادف به

1. stochastic Löewner evolution 2. Ulam 3. Tracy-Widom
4. W. Werner 5. A. Okounkov 6. Simon Broadbent 7. Bayley

1. hard analysis 2. Fejes Toth 3. Radcliffe Infirmary
4. Mark Kac

ناحیه‌ای کراندار از فضای اقلیدسی افکنده شده‌اند. مجدداً به این دو حوزه باز خواهیم گشت.

حال که شرح مختصری از کارهای اولیهٔ همرزلی آورده‌ایم، به کارهای وی بعد از بازنشستگی که تقریباً همهٔ آنها به رشد بلورها مربوط می‌شود، باز می‌گردیم. وی با همکاری ماتزارینو دربارهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ سوم به‌عنوان مدلی برای رشد یک بلور در مایعی با دمای فوق‌العاده سردشده تحقیق کرد ([۷۷]، [۷۸]). در پی این کار «کلاسیک»، دو مقالهٔ پژوهشی نهایی‌اش را با نگاهی به مدل تصادفی معرفی‌شده توسط موری ادن[1] برای رشد سلولهای زیستی نوشت. مدل ادن برخلاف سادگی ظاهری‌اش، توجه زیادی را در طول سالها به خود جلب کرد.

فرض می‌شود «سلول»ها، در ساده‌ترین صورت، مربعهای بستهٔ واحدی در یک شبکهٔ مربعی دوبعدی هستند. در بدو امر، همهٔ سلولها بجز یکی، به رنگ سفید رنگ‌آمیزی شده‌اند و سپس در هر لحظه، یکی از آنها سیاه می‌شود. سازوکار رشد، به‌صورت زیر است. یالی از شبکه، فعال نامیده می‌شود اگر یک سلول سیاه را از یک سلول سفید جدا کند. در مرحلهٔ n، یک یال فعال به تصادف انتخاب شده و سلول سفید مرتبط با آن به رنگ سیاه رنگ‌آمیزی می‌شود. در لحظهٔ n، خوشه‌ای مانند C_n شامل $n+1$ سلول سیاه، موجود است. شکلهای C_n، دارای توزیعی با مدل پرکولاسیونِ نخستین گذر به‌صورت توضیح‌داده‌شده در زیر هستند، به شرط آنکه زمانهای گذر از یال آن مدل، دارای توزیع نمایی باشند.

سؤالهای طبیعی مورد علاقه دربارهٔ این فرایند اینها هستند: (i) C_n به‌ازای nهای بزرگ به چه شکل است؟ (ii) «دریاچه»های سلولهای سفید پیش از آنکه سرانجام توسط سلولهای سیاه پر شده و محو شوند، تا کجا رشد می‌کنند؟ در [۳۰]، همرزلی بحثهای غیردقیقی ارائه کرد که از آن چنین برمی‌آمد که همهٔ دریاچه‌ها در «جزیرهٔ» C_n، با احتمال زیاد، در فاصلهٔ $O(\log n)$ از ساحل قرار می‌گیرند.

همرزلی (با ماتزارینو) در مقالهٔ پژوهشی ماقبل آخرش [۷۹] شبیه‌سازی مونت‌کارلوی بزرگ‌مقیاسی ترتیب دادند که در آن خوشه‌هایی به بزرگیِ مرتبهٔ 10^9 رشدیافته وکمیتهای متعددی همچون میانگین شعاعهای خوشه‌ها برآورد شدند. نویسندگان مباهات می‌کردند که توانسته‌اند این کار محاسباتی عظیم را تنها با استفاده از ۲۴ مگابایت از یک ماشین کانوکس ۲۲۰، در مقایسه با شبیه‌سازیهای زابولیتسکی و اشتوفر [۵۰] با استفاده از یک کری ۲ با چهار پردازشگر موازی و یک ذخیرهٔ عظیم ۲۰۴۵ مگابایتی، انجام دهند.

موضوعی که در این دو مقاله بسیار مورد توجه است، «همواری سطح» یک خوشهٔ نوعی است. در تحلیل نظری انجام‌شده در [۸۰] از نظریهٔ مهارها[2]، آن‌گونه که همرزلی در سال ۱۹۶۷ معرفی کرده است، استفاده شد. مهارها را می‌توان به زبان ساده به عنوان تعمیمی فضایی از یک مارتینگل توصیف کرد. به‌نظر می‌رسد که مهارها از سال ۱۹۶۷ به بعد چندان مورد توجه قرار نگرفته‌اند، گرچه مقالهٔ اصلی همرزلی در این زمینه [۷۰] یکی از ۴۵ مقاله‌ای بود که در زمرهٔ آثار اساسی دربارهٔ قانونهای مقیاس‌بندی که سطوح به‌طور تصادفی تولیدشده را مشخص می‌کنند، انتخاب و در [۹] تجدید چاپ شد.

1. Murray Eden 2. harnesses

روشهای مونت‌کارلو

جان همرزلی در همان اوایل آغاز زندگی علمی‌اش، به‌جستجوی روشهایی برای انجام دادن محاسبات بزرگ پرداخت. تجهیزات موجود در آن زمان، محدود و غیرقابل اعتماد بودند. وی همچون دورهٔ خدمتش در ارتش، استاد ماشین‌حساب‌های رومیزی و رایانه‌های اولیه شد. استفاده از منابع محاسباتی به روالی کارا و اقتصادی در نظرش بسیار مهم بود و این نگرش را در سرتاسر زندگی‌اش داشت. او به‌خاطر داشتن رکورد جهانی سال ۱۹۶۱ برای کار بی‌وقفه با رایانه به مدت ۳۹ ساعت به خود می‌بالید.

امتیاز نامگذاری و بنیانگذاری سیستماتیک روشهای مونت‌کارلو، معمولاً به فرمی[1] (عضو انجمن سلطنتی)، متروپولیس[2]، فون نویمان، و اولام نسبت داده می‌شود. این حوزه، همرزلی را شیفتهٔ خود کرد. ایدهٔ این مبحث این است که می‌توان یک کمیت را با محاسبات دربردارندهٔ اعداد تصادفی برآورد کرد. یک هدف عمده، کاهش درجهٔ تغییرات دربرآورد و بدین‌ترتیب، افزایش دقت نتیجه است.

به‌نظر می‌رسد علاقهٔ همرزلی به روشهای مونت‌کارلو از شرکت وی در یک سمپوزیوم برکلی در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ نشأت گرفته است. وی در مراجعت به آکسفرد درسی در سطح کارشناسی ارشد در این زمینه ارائه کرد. در بین حاضران، بیل مورتن حضور داشت که به‌تازگی از آکسفرد فارغ‌التحصیل شده و شغلی در هارول به‌دست آورده بود. تقریباً در همین زمان بود که همرزلی کارگاهی در زمینهٔ روشهای مونت‌کارلو در هارول ترتیب داد که در آن سایمن برودبنت را ملاقات کرد.

با مورتن بود که همرزلی مقالهٔ «مونت‌کارلوی مرد فقیر» [۵۸] را نوشت. تز ابتدایی مقاله این بود که لزوماً به ماشینهای بزرگ با سرعت بالا برای استفادهٔ کارا از مونت‌کارلو نیازی نیست. برای تشریح این نکتهٔ مهم، نویسندگان مقاله به گستره‌ای از مثالها همچون قدم‌زدن‌های از خودگریز متوسل شدند. در میان مثالهای جالب توجه آنها، آزمودن یک فرضیهٔ کوانتومی از الکساندر تام[3] دیده می‌شود. تام قطرهای ۳۳ دایرهٔ دروئید در اسکاتلند غربی را اندازه‌گیری کرد و برمبنای داده‌های (صحیحْ‌مقدار)، حدس زد که این قطرها گرایش به این دارند که مضاربی از ۱٫۱۱ فوت باشند. شواهد این امر، آن بود که ۲۷ دایره، قطرهایی داشتند که به‌ازای عدد صحیح n، در دامنهٔ $(n \pm \frac{1}{4})$۱٫۱۱ قرار داشتند. همرزلی و مورتن، از روشهای مونت‌کارلوی ساده‌ای برای آزمودن این فرضیه استفاده کردند و همان‌طور که دیوید کندال [۲۵] پیشنهاد کرد، کار آنها منجر به یک آزمون آماری شد که تا حد زیادی نظر تام را تأیید کرد.

روشهای مونت‌کارلو مبتنی‌بر استفاده از اعداد شبه‌تصادفی یا تصادفی نما هستند و این امر برخی مسائل مربوط به اصول را پیش می‌آورد. ناشکیبایی همرزلی در برابر بحثهای فلسفی مربوط به اخلاقیات یا درستی استفاده از اعداد شبه‌تصادفی یا تصادفی‌نما به جای اعداد واقعاً تصادفی از پاسخ وی به بحثهای سمپوزیومی دربارهٔ روشهای مونت‌کارلو که مقالهٔ [۵۸] در آن ارائه شد، هویداست:

> این بحثها، چندین سؤال دربارهٔ اعداد تصادفی پیش آورده است. آیا آنها اصلاً وجود دارند؟ آیا آنها را می‌توان به‌ترتیب، تولید کرد و اگر چنین است، چگونه؟ آیا می‌توان آنها را تشخیص داد؟ و آیا می‌توانیم آزمون کنیم که تقلبی هستند یا نه؟ اینها تأملات فلسفی جالبی هستند، اما ریاضیدانان کاربردی باید آنها را خارج از موضوع تلقی کنند.

1. E. Fermi 2. N. Metropolis 3. Alexander Thom

درواقع، به نظر می‌رسد که ناشکیبایی وی در برابر فلسفه، به‌عنوان یک موضوع آکادمیک، در سراسر زندگی‌اش با وی بوده است. دانشکدهٔ مشترک ریاضیات و فلسفهٔ آکسفرد مایهٔ نفرت وی بود و داستانهای سرگرم‌کنندهٔ بسیاری دربارهٔ سالی که آن را در سمت رئیس ممتحنین به پایان برد، بر سر زبانهاست. وقتی این اقبال به سراغ وی آمد که بر کرسی ریاست هیأت بنشیند، مشتاقانه در آن مستقر شد و (با اجازهٔ همکارانش) بحثی را که پس از پایان جلسه دربارهٔ ارزش مدرک این دانشکده صورت گرفت روی نوار ضبط کرد. تلاشهای مجدانهٔ بعدی وی، در نهایت نتوانست ریاضیدانان یا فیلسوفان را ترغیب کند که این مدرک را باید کنار گذاشت.

عمده‌ترین سهم همرزلی در نظریهٔ روشهای مونت‌کارلو، علاوه بر به‌کارگیری پیوستهٔ آن، احتمالاً کارهای وی بر روی متغیرهای متضاد[1] بود. استفاده از این متغیرها تکنیکی برای به‌دست آوردن برآوردهایی است که واریانسهای آنها به میزان قابل‌ملاحظه‌ای کمتر از آنهایی باشد که از طریق رویکردهای ساده قابل حصول‌اند. این هدف نوعاً با نمایش برآوردگرها به‌عنوان مجموعی از متغیرهای تصادفی همبسته حاصل می‌شود و یکی از متداول‌ترین فنون کاهش واریانس است. اشکال آن، این است که بسیاری از طرحهای نمونه‌گیری متضاد، از منظر محاسباتی، پیچیده‌تر از آن هستند که در شبیه‌سازیهای عملی مورد استفاده قرار گیرند. با وجود این، کار همرزلی و مورتن [۵۹]، در حال حاضر کاری اساسی محسوب می‌شود (به‌عنوان مثال، ر.ک. [۳۹]). بنابراین جالب است که همرزلی و هندزکم [۶۷] تنها اسم روش و نه ایدهٔ اصلی آن را از خود دانستند که چنانکه توکی [۴۷] متذکر شد، می‌توان آن را حالت مهم خاصی از رگرسیون تلقی کرد. این فن شاید اکنون یکی از مهم‌ترین فنون در کاربرد روشهای مونت‌کارلو در انتگرال‌گیری‌های عددی با ابعاد بالا باشد که کاربردهایی در بسیاری از حوزه‌ها از جمله ریاضیات مالی دارد.

تگ‌نگاشت همرزلی-هندزکم [۶۷]، که در سال ۱۹۶۴ منتشر شد، نقطهٔ عطفی در مطالعهٔ روشهای مونت‌کارلو بوده و امروز هم استفادهٔ بسیاری از آن می‌شود. به‌نظر می‌رسد علاقهٔ همرزلی در این زمینه، بعد از انتشار این اثر، کاهش یافته باشد.

پرکولاسیون

پرکولاسیون به‌عنوان یک مفهوم ریاضی از تفکر دربارهٔ محیطهای تصادفی که در [۵۸] دیده می‌شود، نشأت گرفت و به‌صورت سنگ بنای هندسهٔ تصادفی و مکانیک آماری درآمده است. یکی از بحث‌کنندگان[2]، سایمن برودبنت، در «انجمن بهره‌برداری زغال‌سنگ بریتانیا» کار می‌کرد که در آن زمان مشغول طراحی ماسکهای گاز برای کارگران زغال‌سنگ بود. همرزلی اهمیت بالقوهٔ پیشنهاد برودبنت را در مورد جریان در یک محیط تصادفی تشخیص داد و آنها در نوشتن مقالهٔ بنیادی [۶۱] با یکدیگر همکاری کردند که در آن احتمال پرکولاسیون بحرانی تعریف شد. قبلاً نیز اشاره‌هایی به فرایندهایی معادل با پرکولاسیون شده است (به‌عنوان مثال، ر.ک. [۴۹]؛ اما این همرزلی بود که یک نظریهٔ ریاضی منسجم را در این مورد بنیان نهاد.

مدل پایه به این صورت است: یک شبکهٔ بلوری را در نظر بگیرید. هر یال شبکه را (به‌طور مستقل)، با احتمال p، باز (برای عبور مایع) و با احتمال $1-p$، بسته اعلام می‌کنیم. مایع از مبدأ شبکه وارد می‌شود و مجاز است فقط در طول یالهای باز جریان یابد. مسألهٔ اساسی عبارت است از توصیف اندازه و هندسهٔ مجموعهٔ C، مرکب از رئوسی که مایع به آنها می‌رسد. این مدل پیامدهای مهمی در هندسهٔ تصادفی و مکانیک آماری دارد و نوشتگان فیزیک و ریاضی مرتبط با آن اکنون بسیار گسترده است. موضوعی که اهمیت درجهٔ اول دارد، وجود گذار فاز است: یک مقدار بحرانی مانند p_c وجود دارد به‌قسمی که C، وقتی $p < p_c$، متناهی است و وقتی $p > p_c$، با احتمال اکیداً مثبتی، نامتناهی است. همرزلی نابدیهی‌بودن گذار فاز را به‌صورت زیر ثابت کرد: همرزلی و برودبنت [۶۱] کران پایینی برای p_c برحسب تعداد قدم‌زدن‌های از خودگریز و ثابتِ رابط به‌دست آوردند (شرحی از ثابتِ رابط در بخش بعد آمده است). این نتیجه در [۶۲] با نشان‌دادن این موضوع تقویت شد که $|C|$ در صورتی که امید ریاضی متناهی داشته باشد، دارای دُم محوشوندهٔ نمایی است. روش ارائه‌شده در [۶۲]، پیشاهنگ استدلال متعارف امروزی است که به سایمن [۴۲] و لیب [۳۲] منسوب است و معمولاً به این صورت بیان می‌شود: مستعد بودن متناهی مستلزم همبستگیهای به‌طور نمایی محوشونده است. در [۶۳]، همرزلی کران بالایی برای p_c برحسب اندازه‌های مرزی همسایگیهای مبدأ به‌دست آورد و براساس دوگانی گرافها نتیجه گرفت که برای پرکولاسیون سودار و غیرسودار، روی شبکهٔ مربعی، $p_c < 1$. این معادل پرکولاسیونِ استدلال پیرلس[1] برای مدل آیزینگ[2] است. این خط مشی کلی برای نشان دادن وجود گذار فاز، اکنون در بسیاری از مدلها جنبهٔ استاندارد دارد.

در یک مدل جایگزین، به‌جای یالها، رئوس شبکهٔ بلوری هستند که باز یا بسته اعلام می‌شوند. همرزلی [۶۵] این حکم سودمند را ثابت کرد که C برای مدل بستی[3] نسبت به مدل بندی[4]، مقدار کوچک‌تری دارد و به این ترتیب، نتیجه‌ای از مایکل فیشر (عضو انجمن سلطنتی، ۱۹۷۱) را گسترش داد. بهترین نتیجهٔ جدید از این نوع به یکی از دانشجویان او تعلق دارد (ر.ک. [۱۶]).

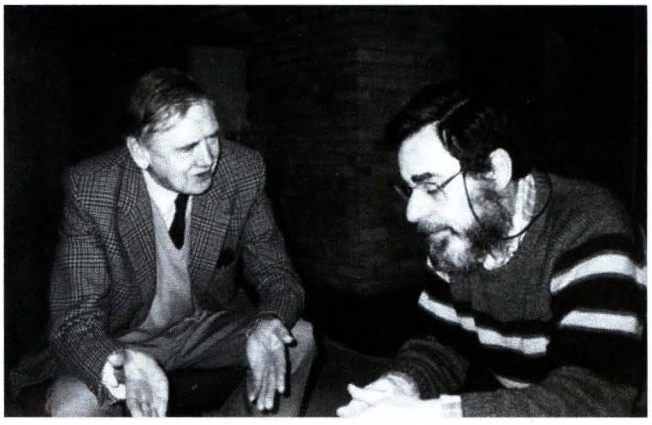
همرزلی که محاسبه‌گری قهارّ بود علاقه داشت مقدار عددی p_c را برای شبکهٔ مربعی محاسبه یا برآورد کند. تئودور هریس در مقالهٔ مهمی ثابت کرد که $p_c \geq (1/2)$ [۲۱] و برآوردهای عددی همرزلی نشان می‌داد که $p_c < (1/2)$؛ «چه شواهدی بهتر از این می‌توانست برای $p_c = (1/2)$ وجود داشته باشد؟». بنابراین، وقتی هری کستن[5] (تصویر ۱)، هدف مقدس را ثابت کرد، به هیجان آمد. هرچند این فقط پایان یک آغاز برای پرکولاسیون بود.

نظریهٔ پرکولاسیون در سالهای اخیر هر روز استحکام بیشتری یافته است. پرسشهای عمده‌ای که بر ذهن همرزلی فشار می‌آوردند، امروزه عمدتاً حل شده‌اند (ر.ک. [۱۴]) و اکنون توجه به ماهیت گذار فاز در دو بعد معطوف است. شرام [۴۱] پیش‌بینی کرد که حد مقیاس‌بندی پیرامونهای خوشه‌های بزرگ پرکولاسیون بحرانی، یک تحول لوئونری تصادفی (SLE که اغلب، تحول شرام-لوئونر نامیده می‌شود) با پارامتر ۶ می‌سازد. اسمیرنوف [۴۳] فرمول کاردی[6] برای احتمالهای گذر پرکولاسیون بستی بحرانی بر روی شبکهٔ مثلثی را

1. antithetic variates

۲. وقتی مقاله‌ای در «برابر» اعضای انجمن سلطنتی خوانده می‌شود، عده‌ای «بحث‌کننده» که مقاله را از قبل خوانده‌اند، به بحث دربارهٔ مقاله می‌پردازند که عموماً این بحثها همراه با مقاله در مجلهٔ انجمن سلطنتی چاپ می‌شود.ـــم.

1. Peierls 2. Ising 3. site model 4. bond model
5. Harry Kesten 6. Cardy



تصویر ۱ جان همرزلی و هری کستن در مؤسسهٔ ریاضی دانشگاه آکسفرد، نوامبر ۱۹۹۳.

ثابت کرد و نشان داد که چگونه حد مقیاس‌گذاری کامل را به‌دست آوریم. اثر شرام [۴۱] حاوی مروری بر SLE و مسائل و حدسهای مرتبط با آن است.

قدم‌زدنهای از خودگریز و مسألهٔ مونومر-دایمر

در پارادایم مکانیک آماری، هر سیستم با مجموعه‌ای از پیکربندیها که به هر یک وزنی تخصیص داده شده است، مدل‌بندی می‌شود. مجموع همهٔ وزنها، «تابع افراز» نامیده می‌شود و وضعیت حال سیستم را می‌توان با تحلیل این تابع و مشتقاتش توصیف کرد. در سیستمی از پلیمرها، اولین محاسبه، یافتن تعداد چنین پلیمرهایی است. وقتی پلیمرها زنجیرهای ساده‌ای هستند که ریشه در مبدأ یک شبکه دارند، این مسأله عبارت از شمارش قدم‌زدنهای از خودگریز (SAW) است. فرض کنید s_n، تعداد SAWهای به‌طول n روی یک شبکهٔ مفروض باشد. اولین پیشرفت جدی به‌سوی تعیین مقادیر مجانبی s_n وقتی $n \to \infty$، در [۵۸] انجام شد. نکتهٔ اساسی، نابرابری زیرجمعی $t_{m+n} \le t_m + t_n$ است که $t_n = \log s_n$ در آن صدق می‌کند و وجود ثابت $\kappa = \lim_{n\to\infty} n^{-1}$ که ثابت رابط نامیده می‌شود، بی‌درنگ از آن نتیجه می‌شود. این موضوع که اکنون در پرتو تحلیل پیچیده‌ای که بعداً به‌دست آمده، اساساً بدیهی تلقی می‌شود، اثری قابل توجه بر ترکیبیات و احتمال فضایی داشته است. این سرآغاز استفاده از زیرجمعی‌بودن به‌عنوان یک ابزار استاندارد است و نیز سرآغاز مطالعه‌ای مفصل، و هنوز در حال انجام، در هندسهٔ نمونه‌های نوعی پیکربندیهایی هندسی همچون مسیرها و موجودات شبکه‌ای[1] است.

نابرابری زیرجمعی، کران $s_n \ge \kappa^n$ را به‌دست می‌دهد. همرزلی مقدار زیادی انرژی صرف یافتن یک کران بالای مکمل برای s_n کرد، اما تنها موفقیتی جزئی به‌دست آورد. او با دانشجویش ولش در [۱۶] ثابت کرد که به‌ازای، $\lambda < \infty$، $s_n \le \kappa^n \exp(\lambda n^{\frac{1}{2}})$. کستن [۲۸] این کران را به‌ازای $d \ge 3$ بهبود بخشید و چنین کرانهایی بهترین کرانهای موجود بودند تا آنکه عده‌ای دیگر دریافتند که می‌توان از یک بسط توری[2] برای ابعاد به‌قدر کافی بزرگ استفاده کرد [۳۴]. در نتیجهٔ مقدار زیادی کار سخت و به‌کمک ابزارهای ریاضی اساسی، هارا و اسلید [۱۸] مسألهٔ شمارش SAW را در ۵ بعد و بیشتر حل کردند. حالت دوبعدی که کران مذکور در [۶۶] بهترین کران برای آن شناخته‌شده است، با معرفی تحول لوئونر تصادفی (SLE) از سوی شرام و این حدس که یک SAW تصادفی در دوبعد، وقتی $n \to \infty$، به‌معنایی مناسب به یک SLE با پارامتر $8/3$ همگراست، توجه و علاقهٔ بسیاری را در سالهای اخیر به خود جلب کرده است. این حدس، یکی از مهم‌ترین مسائل حل‌نشده کنونی در احتمال است.

همرزلی در دوران بعدی زندگی‌اش از اخبار پیشرفتها در پرکولاسیون و قدم‌زدنهای از خودگریز خوشحال می‌شد. وی احساس می‌کرد که «کمک کرده تا این مسائل به‌وجود آیند» تا دیگران آنها را حل کنند. مسائل پرکولاسیون دوبعدی و SAW، دو مورد از داغ‌ترین مسائل احتمال معاصر، و شاهدی بر ذوق عالی علمی همرزلی هستند.

مسألهٔ شمارش دیگری در مکانیک آماری که توجه همرزلی را به‌خود جلب کرد، مسألهٔ مونومر-دایمر است. این مسألهٔ کلاسیک در شیمی حالت جامد را می‌توان به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد: هر آجر، یک متوازی‌السطوح قائم d بعدی ($d \ge 2$) با اضلاعی به‌طول صحیح و حجم زوج است. مکعب واحد، مونومر[1] و آجری به حجم دو، دایمر[2] نامیده می‌شود. مسألهٔ دایمر عبارت است از تعیین تعداد دایمرها، $f(a_1, a_2, \ldots, a_d)$، برای سنگ چینیِ آجری به اضلاع a_1، a_2، ...، a_d. همرزلی در [۶۹] ثابت کرد که دنبالهٔ $(a_1, a_2, \ldots, a_d)^{-1} \log f(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ وقتی $a_i \to \infty$، به حد متناهی λ_d همگراست. اما مقدار عددی λ_d چیست؟ در این مورد نتیجه‌ای «کلاسیک» در فیزیک آماری به‌دست آمده که متعلق به تمپرلی و فیشر [۴۵] و کستلین [۲۴] است. آنها مستقل از یکدیگر در ۱۹۶۱ نشان دادند λ_2 موجود و برابر با $\exp(2G/\pi) = 1.29156\ldots$ است که در آن G ثابت کاتالان[3] است. همرزلی انرژی زیادی را صرفِ رویکردهای محاسباتی و نظری برای یافتن نتیجهٔ مربوط به‌ازای $d \ge 3$ کرد، اما تا آنجا که می‌دانیم مقدار دقیق، حتی وقتی $d = 3$، هنوز نامعلوم است.

مسألهٔ مونومر-دایمر در کلی‌ترین شکل آن معادل با مسألهٔ ترکیبیاتی محض شمارش $f_G(N_1, N_2)$ها یعنی تعداد آرایشهای متمایز N_1 مونومر و N_2 دایمر بر یالها و رئوس گرافی مانند G است، به‌طوری که هر دایمر روی یک یال و هر مونومر روی یک رأس قرارگیرد و هر رأس G یا دقیقاً یک توسط مونومر اشغال شده باشد یا رأس پایانیِ دقیقاً یک دایمر باشد. برای اینکه این امر ممکن باشد، G باید دقیقاً $N_1 + 2N_2$ رأس داشته باشد و چگالی pی پیکربندی به‌صورت $2N_2/N_1$ تعریف شود. همرزلی در [۶۹] ثابت کرد که تعداد پیکربندیهای با چگالی p روی مکعب به حجم n در d بعد، به‌ازای تابعی مفروض مانند λ از مرتبهٔ $\lambda(d,p)^n$ است. وی برای به‌دست آوردن کرانهایی برای λ بسیار تلاش کرد؛ اما امروزه حتی در حالت دوبعدی، دانش ما بسیار محدود است (به‌عنوان مثال، ر.ک. [۱۱]).

مسألهٔ دایمر امروزه بسیار مطرح است. معلوم شده است که مدل دوبعدی به میدان آزاد گاوسی و تحول لوئونر تصادفی با پارامترهای ۲، ۴، و ۸ ارتباط دارد (ر.ک. مثلاً [۲۶] یا [۲۷]).

1. lattice animals 2. lace expansion

1. monomer 2. dimer 3. Catalan

پرکولاسیونِ نخستین گذر و فرایندهای زیرجمعی

پرکولاسیون مدلی ایستاست بدین مفهوم که هر یال، یا باز یا بسته است و فرض می‌شود آب به‌صورت آنی در طول یالهای باز جریان می‌یابد. همرزلی و ولش، صورتی وابسته به زمان از این مدل را در [۶۸] فرمول‌بندی کردند و آن را «پرکولاسیون نخستین گذر» نامیدند. در این مدل، به هر یال شبکه، یک زمان گذر تصادفی اختصاص یافته و زمان لازم $a_{x,y}$ برای اینکه آب با شروع از نقطهٔ x به نقطهٔ مفروض y برسد، زیرینه [اینفیمم] زمانهای گذر همهٔ یالها روی همهٔ مسیرهای π از x به y است. این مقالهٔ پیشگام [۶۸] اکنون به‌عنوان یکی از اولین کارهای ریاضی مهم در نظریهٔ انتشار و پخش چیزها (خواه بیماری باشد، یا سیال، یا شایعه) از طریق یک محیط تصادفی شناخته می‌شود. مسألهٔ اصلی، اثبات وجود یک تابع سرعت $\sigma_x = \lim_{n\to\infty} n^{-1}a_{0,nx}$ بود که در آن، ۰ نشان‌دهندهٔ مبدأ شبکه است. همرزلی و ولش دریافتند که کلید حل مسأله، استفاده از زیرجمعی بودن $a_{0,x+y} \le a_{0,x} + a_{x,x+y}$ است و تفاوت با کاربردهای قبلی آن در این بود که این نابرابری به‌جای کمیتهای تعیّنی، دربردارندهٔ متغیرهای تصادفی است.

این دو نفر صورتی از قضیهٔ حدی زیرجمعی برای فرایندهای تصادفی مانا را که با فضای d بعدی اندیس‌گذاری می‌شوند، یعنی اولین «قضیهٔ ارگودیک زیرجمعی» را ثابت کردند. آنها دریافتند که این کار به‌بهترین صورت در چارچوب مجموعه‌ای کلی از مفروضات قابل اجراست و نه وضعیت خاصی که در بالا مختصراً شرح داده شد، و لذا مقالهٔ آنها منجر به پیدایش یکی از فنون عمده برای تحلیل فرایندهای تصادفی فضایی شد. جستجو برای ترکیب «درست» تعریف/قضیه، آغاز شد. این ترکیب به‌وسیلهٔ جان کینگمن (عضو انجمن سلطنتی، ۱۹۷۱) در یکی از مقاله‌های کلاسیک احتمال قرن بیستم به‌دست آمد. علی‌رغم کارهای دقیق بعدی، این نوشتگان اولیه، به‌خصوص گفتگوی بین کینگمن [۳۱] و همرزلی [۷۳] همچنان خواندنی است. مقالهٔ مروری کینگمن در سالنامهٔ احتمال[1] (با چاپ بحثها) انتشار یافت. نوشتهٔ همرزلی در این بحث، بسیار مبسوط‌تر از آن بود که ویراستار مجله آن را برای چاپ بپذیرد و بعدها به‌صورت [۷۳] منتشر شد. اینجا بود که شرط ضعیف‌ترِ ابرپیچشی‌بودن[2] اندازه‌های احتمال وابسته، جایگزین شرط زیرجمعی بودن مسیری شد.

همرزلی در یکی از کاربردهای اولیهٔ زیرجمعی‌بودن در سیستمهای فضایی که با همکاری دوتن از دانشجویانش به‌بررسی آن پرداخت، سهمی بنیادی در مطالعهٔ نمونه‌های نوعی مسائل تحقیق در عملیات ایفا کرد. n نقطه را به تصادف در ناحیهٔ مسطح R با مساحت متناهی بیندازید. طول درخت فراگیر مینیمال (اشتاینر) و مسیر مینیمال فروشندهٔ دوره‌گرد[3] روی این نقاط چیست؟ آنها در مقالهٔ کلاسیک خود [۶۴] نشان دادند که پاسخ، به‌ازای ثابتی مانند c_R، با $c_R\sqrt{n}$ متناسب است و همچنین نظریه‌ای برای بعدهای بالاتر به‌وجود آوردند. نکتهٔ رهگشا این بود که مسأله را به‌نحوی صورت‌بندی کنند که مقیاس طول طبیعی، $\sqrt{n}$ باشد و سپس از یک نوع زیرجمعی بودن فضایی استفاده کنند. این قضیه در کار بعدی کارپ [۲۳] دربارهٔ تحلیل احتمالاتی مسأله فروشندهٔ دوره‌گرد اقلیدسی تصادفی، اهمیت اساسی یافت. گسترشهای بعدی موضوع در مقالهٔ استیل [۴۴] توصیف شده است.

1. *Annals of Probability* 2. superconvolutivity
3. travelling-salesman

عنوان مقالهٔ استیل [۴۴] الهام گرفته از عنوان مقالهٔ مشهور همرزلی، «چند جوانهٔ پژوهش» است که در سال ۱۹۷۲ در مجموعهٔ مقالات ششمین سمپوزیم برکلی منتشر شد. همرزلی در این شرح الهام‌بخش دربارهٔ چگونگی اجرای پژوهشهای ریاضی، به‌خصوص نشان داد که چگونه از زیرجمعی‌بودن برای حلِ جزئی مسألهٔ معروف اولام می‌توان استفاده کرد: در یک جایگشت تصادفی از اولین n عدد طبیعی، طول l_n بزرگ‌ترین زیردنبالهٔ صعودی چقدر است؟ به‌دلایل هندسی مرتبط با [۶۴] نتیجه می‌شود که پاسخ، به‌طور مجانبی $c\sqrt{n}$ است. این سرآغاز پیدایش حوزهٔ مهمی از نظریهٔ احتمال بود. همرزلی ادعایی براساس یک استدلال سردستی ارائه کرد تا نشان دهد که $c = 2$، اما در ارائهٔ برهان رسمی موفق نشد و این برهان را ورشیک و کروف [۴۸] و لوگان و شپ [۳۳] در چارچوب تابلوی یانگ[1] تصادفی به‌دست آوردند. پس از آن، توجه به اندازهٔ انحراف $l_n - 2\sqrt{n}$ معطوف شد. پیش از برهان شایان توجه بیک و همکاران [۲] نتایج جزئی بسیاری در این مورد به‌دست آمد که وقتی $n \to \infty$، $[l_n - 2\sqrt{n}]n^{-1/6}$ به‌توزیع مشهور تریسی-ویدوم در نظریهٔ ماتریسهای تصادفی همگراست.

میدانهای تصادفی

یکی از مهم‌ترین مباحث در آمار نوین، نظریهٔ بیزی تحلیل تصویر است. در این مطالعهٔ سیستمهای تصادفی فضایی، داشتن یک رده‌بندی از آن اندازه‌های احتمال که در یک «ویژگی مارکوفی فضایی» صدق کنند، یعنی پیکربندی درون هر ناحیه مانند V تنها از طریق حالتهای رئوس در مرز ∂V به پیکربندی خارج از V بستگی داشته باشد، سودمند است اورینتسف[2]، دوبروشین[3]، اسپیتزر[4] و دیگران در حوالی ۱۹۷۰ نظریه‌ای محدود دربارهٔ چنین اندازه‌هایی پروراندند. در سال ۱۹۷۱، همرزلی به‌دنبال پیشنهادی از کلیفرد (ر.ک. [۴] و [۷۲])، آن را به شبکهٔ دلخواهی تعمیم داد. قضیه‌ای که به‌دنبال آن آمد، قضیهٔ همرزلی-کلیفرد نامیده شد و اگرچه هیچ‌گاه رسماً منتشر نشد، در احتمال و آمار بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. این قضیه حاکی است که یک اندازهٔ مثبت، میدان مارکوفی است اگر و تنها اگر نمایشی گیبسی برحسب یک تابع پتانسیل داشته باشد. نویسندگان بعدی و از جمله یکی دیگر از دانشجویان او، گریمیت، که برهان را به تمرینی در اصل شمول-عدم شمول فروکاست [۱۳]، روش مورد استفادهٔ همرزلی را بسیار روشن‌تر ساختند.

در نیمسال پاییزی[5]، همرزلی درسی برای دورهٔ کارشناسی دربارهٔ میدانهای مارکوفی در «مؤسسهٔ ریاضی»[6] ارائه داد. وی نوید راه‌حلی برای مسألهٔ متناظر را داد که در آن فرض مثبت‌بودن کنار گذاشته شده است. آن‌گونه که عادتش بود، او هنوز این نتیجه را ثابت نکرده بود و در واقع، یکی از حاضران این کلاس به نام جان موسوریس[7] با یافتن یک مثال ناقض، بطلان قضیه را نشان داد (ر.ک. [۳۵] و [۷۴]).

مسائل آموزشی

در طول زندگی همرزلی، تغییرات زیادی در آموزش ریاضیات در مدارس صورت گرفت و وی برای مدتی، طلایه‌دار بحثها در این زمینه بود. از دههٔ

1. Young tablaux 2. Averintsev 3. Dobrushin 4. Spitzer
5. Michaelmas Term 6. Mathematical Institute
7. John Moussouris

۱۹۵۰ به بعد، قویاً استدلال می‌کرد که دانش‌آموزان مدارس و دانشجویان کارشناسی باید برای حل مسأله آموزش ببینند و برنامهٔ درسی را باید این هدف طراحی کرد. وی در همه جای بریتانیا سخنرانیهایی در این باره ایراد کرد و در ایجاد «پروژهٔ ریاضیات مدارس» همکاری نمود. از آنجا که وی کسی نبود که سخن دوپهلو بگوید، موضع سازش‌ناپذیر وی را تحریک‌آمیز تلقی کردند، اما او پشتیبانان و تحسین‌کنندگان بسیاری هم داشت. با این حال، پروژهٔ ریاضیات مدارس، نوشدارویی برای بیماری مورد نظر او از آب در نیامد: گرچه این برنامه جنبه‌هایی از آموزش ریاضی را «مدرن» کرد، اما نظریه‌ای انتزاعی را که در آن عنصر مسأله به حد کفایت وجود نداشت وارد مدارس کرد.

همرزلی اغلب سخنرانیهایش را در بولتن مؤسسهٔ ریاضی و کاربردهای آن[1] منتشر می‌کرد. مقالهٔ اصلی او [۷۱] دربارهٔ آموزش ریاضی، سرانجام، با عنوان «دربارهٔ سست‌سازی مهارتهای ریاضی از راه «ریاضیات مدرن» و مزخرفات ذهنی مشابه در مدارس و دانشگاهها» انتشار یافت. این مقالهٔ انتقادی جدی و مُطوّل در انتقاد از ریاضیات مدرسه، برایان توایتس [۴۶] را وادار به‌صدور رویه‌ای با لحن ملایم کرد:

«با این حال من فوق‌العاده [از پاسخ‌دادن به «اتهامات» همرزلی] اکراه دارم. دلیل آن این است که تحسین من نسبت به او و عقیده‌ام دربارهٔ مقاله‌اش، تضاد بسیار شدیدی با هم دارند. بخش اعظم تحسین من از او به‌دلیل دستاوردهای ریاضی اوست؛ اما این تحسین همچنین تا حد زیادی مبتنی‌بر این است که به نظرم او، بیش از هر فرد انگلیسی دیگر، سرانجام اصلاحات دیرآغاز در برنامه‌های ریاضی مدارس را به‌جریان انداخت».

همرزلی از طریق مقاله‌های «عامه‌پسند»ش، نظراتی را که به‌شدت به آنها پایبند بود، دربارهٔ بسیاری از مسائل، عمدتاً علمی و آموزشی، ابراز داشت. این نوشته‌ها آموزنده، تحریک‌آمیز، و از لحاظ اِنشا متبحرانه‌اند، گرچه گاهی خودبینانه‌اند. افکار او دربارهٔ پژوهش ریاضی همراه با دیدگاه مایکل اتیا (عضو انجمن سلطنتی) به‌چاپ رسیده‌اند [۷۴]، و برخی عبارتهای قابل توجه را دربردارند: «... تزریق بیهوده‌کاری حرفه‌ای خودش»، «ریاضیات محض در معرض دو بیماری است که ناشی از دقت و اصل موضوعی سازی است»، «هرآنچه دستاورد جبر باشد، شاخه‌ای دیگر از ریاضیات باید بتواند به روش زیباتری به آن دست یابد»، ... و «... تولید راه‌حلهای پاکیزه‌تر (شسته و رفته‌تر)، صرفاً مورد توجه نظریه‌پردازان است». او عاشق عبارتهای خوب بود، حتی (شاید، به‌ویژه) زمانی که خطر تعرض متقابل هم می‌داشت. ولی در واقع، او هر نظریه‌ای را که ارزش خود را به ثبوت می‌رساند، قبول می‌کرد. آن‌گونه که به اتیا (در (۲۴)) نوشت:

«اهل مشاجره نیستم، اما آماده‌ام که وارد میدان بحث شوم. ... رقابت و بحث‌وجدل بین انواع مختلف ریاضیدانان و دانشمندان، بین خلق‌وخوها و سلیقه‌های مختلف است که علم را درکل به‌پیش می‌برد. تنوع هر چه بیشتر باشد، بهتر است و نمک کار همین است، و الخ».

مراجع

1. Atiyah, M. F. 1973 How research is carried out. *Bull. Inst. Maths Applics* **9**, 276-280.

2. Baik, J., Deift, P. & Johansson, K. 1999 On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Am. Math. Soc.* **12**, 1119-1178.

3. Bartlett, M. S. 1946 On the theoretical specification of sampling properties of auto-correlated time series. *J. R. Statist. Soc.* (suppl). **8**, 27-41.

4. Clifford, P. 1990 Markov random fields in statistics. In *Disorder in Physical Systems (A volume in honour of John M. Hammersley)* (ed. G. R. Grimmett & D. J. A. Welsh), pp. 19-32. Oxford University Press.

5. Cramer, E. 2000 Asymptotic estimators of the sample size in a record model. *Statist. Pap.* **41**, 159-171.

6. Domb, C. 1990. on Hammersley's method for one-dimensional covering problems. In *Disorder in Physical Systems (A volume in honour of John M. Hammersley)* (ed. G. R. Grimmett & D. J. A. Welsh), pp. 33-53. Oxford University Press.

7. Eden, M. 1961 A two dimensional growth process. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (ed. J. Neyman), vol. 4, pp. 223-229. University of California Press.

8. Erdős, P. 1953 On a conjecture of Hammersley. *J. Lond Math. Soc.* **28**, 232-236.

9. Family, F. & Vicsek, T. 1991 *Dynamics of fractal surfaces.* Singapore: World Scientific.

10. Farahmand, K. 1998 *Topics in random polynomials.* Harlow: Longman.

11. Friedland, S. & Peled, U. N. 2005 Theory of computation of multidimensional entropy with an application to the monomer-dimer problem. *Adv. Appl. Maths* **34**, 486-522.

12. Friedman, J. 1990 Random polynomials and approximate zeros of Newton's method. *SIAM J. Comput.* **19**, 1068-1099.

13. Grimmett, G. R. 1973 A theorem about random fields. *Bull. Lond. Math. Soc.* **5**, 81-84.

14. Grimmett, G. R. 1999 *Percolation*, 2nd edn. Berlin: Springer.

15. Grimmett, G. R. 2000 Percolation. In *Development of mathematics 1950-2000* (ed. J. P. Pier), pp. 547-576. Boston: Brikhäuser.

16. Grimmett, G. R. & Stacey, A. M. 1998 Critical probabilities for site and bond percolation models. *Ann. Probabil.* **26**, 1788-1812.

17. Grimmett, G. R. & Welsh, D. J. A. (eds) 1990 *Disorder in Physical Systems (A volume in honour of John M. Hammersley).* Oxford University Press. (See `http://www.statslab.com.ac.uk/~grg/books/jmh.html`)

1. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*

18. Hara, T. & Slade, G. 1992 Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.* **147**, 101-136.

19. Hardy, G. H. 1940*a* Mathematics in war-time. *Eureka* **1**, 5-8.

20. Hardy, G. H. 1940*b* *A mathematician's apology*, Cambridge University Press.

21. Harris, T. E. 1960 A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Camb. Phill. Soc.* **56**, 13-20.

22. Kac, M. 1943 On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Am. Math. Soc.* **49**, 314-320.

23. Karp, R. 1977 Probabilistic analysis of partitioning algorithms for TSP in the plane. *Maths Oper. Res.* **2**, 209-224.

24. Kasteleyn, P. W. 1961 The statistics of dimers on a lattice. *Physica* **27**, 1209-1225.

25. Kendall, D. G. 1990 Speech proposing the toast to John Hammersley, 1 October 1987. In *Disorder in Physical Systems (A volume in honour of John M. Hammersley)* (ed. G. R. Grimmett & D. J. A. Welsh), pp. 1-3. Oxford University Press.

26. Kenyon, R. W. 2004 An introduction to the dimer model. In *School and Conference on Probability Theory (ICTP Lecture Notes* XVII*)* (ed. G. F. Lawler), pp. 267-304. Trieste: Abdus salam International Centre for Theoretical Physics.

27. Kenyon, R. W. & Wilson, D. B. 2006 Boundary partitions in trees and dimers. arXiv: math/0608422v2.

28. Kesten, H. 1964 On the number of self-avoiding walks, II. *J. Math. Phys.* **5**, 1128-1137.

29. Kesten. H. 1980 The critical probability of bond percolation on the square lattics equals 1-2. *Commun. Math. Phys.* **74**, 41-59.

30. Kingman, J. F. C. 1968 The ergodic theory of subadditive stochastic processes, *J. R. Statist. Soc.* B**30**, 499-510.

31. Kingman, J. F. C. 1973 Subadditive ergodic theory. *Ann. Probabil.* **1**, 883-909.

32. Lieb, E. H. 1980 A refinement of Simon's correlation inequality. *Commun. Math. Phys.* **77**, 127-135.

33. Longan, B. F. & Shepp, L. A. 1977 A variational problem for random Young tableaux. *Adv. Maths* **26**, 206-222.

34. Madras, N. & Slade, G. 1993 *The self-avoiding walk.* Boston: Birkhäuser.

35. Moussouris, J. 1974 Gibbs and Markov random fields with constraints. *J. Statist. Phys.* **10**, 11-33.

36. Peierls, R. 1936 On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Camb. Phill. Soc.* **36**, 447-481.

37. Pitcher, H. 1984 *The Smiths of Moscow: a study of Britons abroad.* Cromer: Swallow House Books.

38. Ramponi, A. 1999 A note on the complex roots of complex random polynomials. *Statist. Probabil. Lett.* **44**, 181-187.

39. Roach, W. & Wright, R. 1976/77 Optimal antithetic sampling plans. *J. Statist. Comput. Simul.* **5**, 99-114.

40. Schramm, O. 2000 Scaling limits of loop-erased walks and uniform spanning trees. *Israel J. Maths* **118**, 221-288.

41. Schramm, O. 2007 Conformally invariant scaling limits: an overview and a collection of open problems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid* (ed. M. Sanz-Solé *et al.*) vol. 1, pp. 513-544. Zurich: European Mathematical Society.

42. Simon, B. 1980 Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun. Math. Phys.* **77**, 111-126.

43. Smirnov, S. 2001 Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. *C. R. Séans Acad. Sci. Paris, Ser. I* **333**, 239-244.

44. Steele, J. M. 1990 Seedlings in the theory of shortest paths. In *Disorder in physical systems (A volume in honour of John M. Hammersley)* (ed. G. R. Grimmett & D. J. A. Welsh), pp. 277-306. Oxford University Press.

45. Temperley, H. N. V. & Fisher, M. E. 1961 Dimer problems in statistical mechanics–an exact result. *Phil. Mag.* **6**, 1061-1063.

46. Thwaites, B. 1969 Ways ahead in secondary-school mathematics. *Bull. Inst. Maths Applics* **5**, 49-53.

47. Tukey, J. W. 1957 Antithesis or regression? *Proc. Camb. Phil. Soc.* **53**, 923-924.

48. Vershik, A. M. & Kerov, S. V. 1977 Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux. *Soviet Maths Dokl.* **18**, 527-531.

49. Wood, De. V. 1894 Problem 5. *Am. Math. Mthly* **99**, 211-212.

کتابنامه

50. Zabolitsky, J. G. & Stauffer, D. 1986 Simulation of large Eden clusters. *Phys. Rev.* A**34**, 1523-1530.

51. 1946 (With G. V. Bayley) The effective number of independent observations in an autocorrelated time series. *J. R. Statist. Soc.* (suppl.) **8**, 184-197.

52. 1950 Further results for the counterfeit coin problems. *Proc. Camb. Phill. Soc.* **46**, 226-230.

53. The distribution of distance in a hypersphere. *Ann. Math. Statist.* **21**, 447-452.

54. On estimating restricted parameters, *J. R. Statist. Soc.* B **12**, 192-229.

55. 1951 The sums of products of the natural numbers. *Proc. Lond. Math. Soc.* **1**, 435-452.

56. The total length of the edges of the polyhedron. *Compos. Math.* **9**, 239-240.

57. 1953 Markovian walks on crystals. *Compos. Math.* **11**, 171-186.

58. 1954 (With K. W. Morton) Poor man's Monte Carlo. *J. R. Statist. Soc.* B **16**, 23-38.

59. 1956 (With K. W. Morton) A new Monte Carlo technique: antithetic variates. *Proc. Camb. Phill. Soc.* **52**, 449-475.

60. The zeros of a random polynomial. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (ed. J. Neyman), vol. 2, pp. 89-111. University of California Press.

61. 1957 (With S. R. Broadbent) Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **53**, 629-641.

62. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statist.* **28**, 790-795.

63. 1959 Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration. In *Le calcul des probabilities et ses applications,* pp. 17-37. Paris: CNRS.

64. (With J. Beardwood & J. H. Halton) The shortest path through many points. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **55**, 299-327.

65. 1961 Camparison of atom and bond percolation processes. *J. Math. Phys.* **2**, 728-733.

66. 1962 (With D. J. A. Welsh) Further results on the rate of convergence to the connective constant of the hypercubical lattice. *Q. J. Maths Oxf.* **13**, 108-110.

67. 1964 (With D. C. Handscomb) *Monte Carlo methods.* London: Methuen.

68. 1965 (With D. J. A. Welsh) First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli, Bayes, Laplace anniversary volume* (ed. J. Neyman & L. LeCam), pp. 61-110. Berlin: Springer.

69. 1966 Existence theorems and Monte Carlo methods for the monomer-dimer problem. In *Research papers in statistics* (*Festschrift for J. Neyman*), (ed. F. N. David), pp. 125-146. London: Wiley.

70. 1976 Harnesses. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (ed. L. LeCam & J. Neyman), vol. 3, pp. 89-117. University of California Press.

71. 1968 On the enfeeblement of mathematical skills by 'Modern Mathematics' and by similar soft intellectual trash in schools and universities. *Bull. Inst. Maths Applics* **4**, 66-85.

72. 1971 (With P. Clifford) Markov fields on finite graphs and lattices. (Unpublished)

73. 1974 Postulates for subadditive processes. *Ann. Probabil.* **2**, 652-680.

74. Poking about for the vital juices of mathematical resarch. *Bull. Inst. Maths Applics* **10**, 235-247.

75. 1983 Origins of percolation theory. In *Percolation structures and processes* (*Annals of the Israel Physical Society*, vol. 5), pp. 47-57. Bristol: Hilger.

76. 1988 Room to wriggle. *Bull. Inst. Maths Applics* **24**, 65-72.

77. 1989 (With G. Mazzarino) A differential equation connected with the dendritic growth of crystals. *IMA J. Appl. Maths* **42**, 43-75.

78. (With G. Mazzarino) Computational aspects of some autonomous differential equations. *Proc. R. Soc. A* **424**, 19-37.

79. 1994 (With G. Mazzarino) Properties of large Eden clusters in the plane. *Combinatorics Probabil. Comput.* **3**, 471-505.

80. Fractal dynamics of Eden clusters. In *Probability, statistics and optimisation*, pp. 79-87. Chichester: Wiley.

******

- Geoffrey Grimmett and Dominic Welsh, "John Michael Hammersley", *Bull. London Math. Soc.*, (6) **41** (2009) 1125-1143.

* جفری گریمت، مرکز علوم ریاضی، دانشگاه کیمبریج، انگلستان

** دومینیک ولش، کالج مرتن، دانشگاه آکسفرد، انگلستان

درسی در جبر مجرد با الهام از تاریخ•

ایزراییل کلاینر
ترجمهٔ علیرضا جمالی

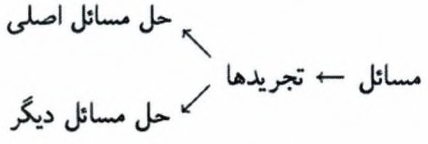
در اینجا قصدم این است درسی را در جبر مجرد که در یک برنامهٔ ضمن خدمت برای دبیران ریاضی در دانشگاه خود تدریس کرده‌ام تشریح کنم. دانشجویان در ادامهٔ این درس، درس دیگری در جبر مجرد ندارند. این وضعیت هم فرصت و هم چالشی ایجاد می‌کند: اگر بخواهم اطلاعاتی را به دانشجویان منتقل کنم، کدام قسمت از ایده‌های اساسی جبر مجرد را باید برای آنها مطرح کنم؟ کدام قسمت میراث جبری را باید به عهدهٔ آنها بگذارم؟ با توجه به اینکه دانشجویان از دبیران ریاضی دبیرستانها بودند، خواهان این بودم که این درس دست‌کم با علایق آنها در تدریس ارتباط گسترده‌ای داشته باشد. اضافه می‌کنم که به‌نظر من این درس را می‌توان به‌صورتی درآورد که برای سایر مخاطبان دانشجو نیز مفید باشد.

ملاحظات بالا (دست‌کم، در نظر من) حاکی از این است که تاریخ ریاضیات باید نقش مهمی را در این درس ایفا کند. تاریخ به سرچشمه‌های جبر مجرد، و در نتیجه به برخی از ایده‌های عمدهٔ آن، می‌پردازد، زمینهٔ مناسبی برای بحث فراهم می‌کند، و موجب جان بخشیدن به موضوع می‌شود.

برای فراهم آوردن زمینهٔ درس، در اینجا تاریخ جبر مجرد را، در کمتر از صد کلمه، می‌آورم.

پیش از سدهٔ نوزدهم جبر اساساً به مطالعهٔ معادلات چندجمله‌ای اطلاق می‌شد. در سدهٔ بیستم، جبر به مطالعهٔ دستگاههای مجردِ اصل موضوعی مانند گروهها، حلقه‌ها، و میدانها تبدیل شد. گذار از جبر موسوم به جبر کلاسیکِ معادلات چندجمله‌ای به جبرِ به‌اصطلاح نوینِ دستگاههای اصل موضوعی در سدهٔ نوزدهم به وقوع پیوست. جبر نوین عمدتاً به این دلیل به‌وجود آمد که ریاضیدانان قادر به حل مسائل کلاسیک با روشهای کلاسیک (ماقبلِ سدهٔ نوزدهم) نبودند. آنان مفاهیم گروه، حلقه، و میدان را برای کمک به حل چنین مسائلی ابداع کردند.

حاصل این تاریخچهٔ کوتاه جبر کمک به تمرکز روی موضوع اصلی درس است، یعنی بیان اینکه چگونه جبر مجرد از حل مسائل «ملموس» نشأت گرفت و خود بر آن مسائل پرتو افکند. این تأییدی است بر نظر وایتهد[1] مبنی بر اینکه «تجریدهای تمام‌عیار، سلاحهایی واقعی‌اند که با آنها تفکرات خود دربارهٔ واقعیت ملموس را مهار می‌کنیم». طرح درسم را می‌توانم با نمودار زیر نمایش دهم:



عبارت «حل مسائل دیگر» بیانگر ایدهٔ مهمی است، و آن اینکه، مفاهیم مجردی که انگیزهٔ معرفی آنها مواجهه با مسائل ملموس بود، مسائل اصلی را که موجد آنها بودند از حیث اهمیت تحت‌الشعاع قرار دادند. به‌خصوص، مفاهیم و نتایج جدیدِ حاصل برای حل مسائل دیگری به‌کار گرفته شدند که غالباً بی‌ربط با، و گاهی مهم‌تر از، مسائل اصلی بودند که به آنها حیات بخشیده بودند. حل چنین مسائلی را «پیامدها» خواهم نامید. اینک به این مسائل می‌پردازم.

مسألهٔ I: چرا $(-1)(-1) = 1$؟

این مسأله نمونه‌ای است از موضوع توجیه قانونهای حساب، که با روابط بین حساب و جبر مجرد سروکار دارد و به مفاهیم حلقه، حوزهٔ صحیح، ساختار مرتب، و بحث اصول موضوع منجر می‌شود.

مسألهٔ فوق مسألهٔ عاجلی برای ریاضیدانان انگلیسی در اوایل سدهٔ نوزدهم بود که می‌خواستند با تدارک توجیهات منطقی برای جبر ــ که در نظر آنها قانونهای عمل با اعداد بود ــ جبر را در موقعیتی برابر با هندسه قرار دهند. این وظیفه را اعضای انجمن تحلیلی در کیمبریج[1] [۱۹] انجام دادند. ما در اینجا توجه خود را به اثر پیکاک[2] با عنوان رسالهٔ جبر[3] (۱۸۳۰)، که بسیار تأثیرگذار از آب درآمد، معطوف می‌کنیم.

1. Whitehead

1. Analytical Society at Cambridge
2. Peacock
3. *Treatise of Algebra*

ایدهٔ اصلی پیکاک، ایجاد تمایز بین «جبر حسابی» و «جبر نمادی» بود. جبر حسابی تنها به اعمال متضمنِ اعداد مثبت مربوط بود، بنابراین، از دیدگاه پیکاک نیاز به توجیه نداشت. به‌عنوان مثال، وقتی $b > c$ و $a > (b - c)$، قانونِ $a - (b - c) = a + c - b$، قانونی در جبر حسابی بود. اگر هیچ محدودیتی برای a، b، و c قائل نشویم، این قانون، قانونی در جبر نمادی محسوب می‌شود. در واقع، هیچ تعبیری از نمادها به‌عمل نمی‌آید. بنابراین، جبر نمادی ــ که به‌تازگی به‌وسیلهٔ پیکاک ابداع شده بود ــ موضوع اَعمال روی نمادهایی است که نیازی به ارجاع به اشیای خاص ندارند، ولی این نمادها از قانونهای جبر حسابی تبعیت می‌کنند. توجیه پیکاک برای یکسان گرفتن قانونهای جبر نمادی با قانونهای جبر حسابی، اصل ثُبات صورتهای هم‌ارز اوست، نوعی «اصل پیوستگی» که سابقهٔ آن دست‌کم به لایب‌نیتس برمی‌گردد:

> درمورد هر دو صورت جبری، اگر وقتی نمادها از لحاظ شکلْ کلی و از لحاظ مقدارْ مشخص‌اند آن دوصورت هم‌ارز باشند، وقتی هم که نمادها از لحاظ شکل و مقدارْ کلی‌اند آن دوصورت هم‌ارز خواهد بود.

بنابراین، پیکاک حکم کرد که قانونهای حساب، قانونهای جبر (نمادی) نیز خواهند بود ــ ایده‌ای که کاملاً شبیه رهیافت اصل موضوعی به‌حساب است. به‌عنوان مثال، می‌توان با اصل پیکاک ثابت کرد که $(-x)(-y) = xy$:

چون وقتی که $a > b$ و $c > d$، $(a-b)(c-d) = ac+bd-ad-bc$، این یک قانون حساب است، و لذا توجیهی لازم ندارد، این قانون به قانونی از جبر نمادی نیز تبدیل می‌شود ــ یعنی، بدون محدودیت روی a، b، c، و d. با قراردادن $a = ۰$ و $c = ۰$ خواهیم داشت $(-b)(-d) = bd$.

اهمیت کار پیکاک در این بود که نمادها برای خود هویت پیدا کردند، و به‌جای اینکه زبانی برای نمایش روابط بین اعداد باشند، مستقلاً به ابزار مطالعه تبدیل شدند. بعضی گفته‌اند که این تحولات نشانهٔ تولد جبر مجرد بوده است.

اینک با جهشی هفتادساله به پیش، به رهیافت جدید هیلبرت به مبحث فوق می‌پردازیم. ایدهٔ او تعریفِ (مشخص‌سازیِ) اعداد صحیح به‌صورت اصل موضوعی به‌عنوان یک حوزهٔ صحیح مرتب است که در آن اعضای مثبت، خوش ترتیب‌اند ([۱۷]، [۲۲])، همان‌گونه که او (در ۱۹۰۰) اعداد حقیقی را به‌صورت اصل موضوعی به‌عنوان میدان مرتب ارشمیدسی ماکسیمال مشخص کرد ([۳]، [۱۱]). البته، در این فرایند باید مفاهیم جبری متعددی را که وارد توصیف فوق از اعداد صحیح شدند، تعریف کنیم. سپس به آسانی می‌توانیم قانونهایی مانند $(-a)(-b) = ab$ و $a \times ۰ = ۰$ را ثابت کنیم. این کار در مورد موضوع کلی‌تر حلقه‌ها به‌وسیله فرنکل[1] در ۱۹۱۴ صورت گرفت.

پیامدها

موارد زیر از بحث فوق ناشی می‌شود:

(الف) چگونه می‌توان قانونی مانند $(-۱)(-۱) = ۱$ را ثابت کرد؟ این سؤال به اصول موضوع منجر می‌شود. همه چیز را نمی‌توان ثابت کرد.

(ب) چه اصول موضوعی را برای ارائهٔ توصیفی از اعداد صحیح باید وضع کرد؟ این سؤال به معرفی حلقه، حوزهٔ صحیح، حلقهٔ مرتب، و خوش‌ترتیبی (استقرا) می‌انجامد.

1. Fraenkel

(پ) چگونه می‌توان دریافت که به اندازهٔ کافی اصل موضوع در دست است؟ در اینجا ایدهٔ تمامیت مجموعه‌ای از اصول موضوع را معرفی می‌کنیم.

(ت) مقصود از مشخص‌سازی اعداد صحیح چیست؟ این سؤال صحنه را برای معرفی مفهوم یکریختی آماده می‌کند.

(ث) آیا می‌توانستیم اصول موضوع کمتری را برای مشخص‌سازی اعداد صحیح به‌کار ببریم؟ به‌عنوان مثال، $a+b = b+a$ مورد نیاز نیست. در اینجا با مفهوم استقلال مجموعه‌ای از اصول موضوع مواجه می‌شویم.

(ج) آیا در انتخاب اصول موضوع به دلخواه خود آزادیم؟ این سؤال موجب معرفی مفهوم سازگاری، و کلی‌تر از آن، موضوع آزادی انتخاب در ریاضیات می‌شود.

مسألهٔ به‌ظاهر سادهٔ $(-۱)(-۱) = ۱$ می‌تواند منبعی غنی از ایده‌ها باشد!

مسألهٔ II: جوابهای صحیح $x^۲ + ۲ = y^۳$ کدام‌اند؟

این معادلهٔ دیوفانتی نمونه‌ای از معادلهٔ مشهور باشه[1]، یعنی معادلهٔ $x^۲ + k = y^۳$، است که در سدهٔ هفدهم معرفی شد و همین اواخر به‌ازای هر kی دلخواه (به‌طور نظری) حل شد. مسأله به ارتباط بین نظریهٔ اعداد و جبر مجرد می‌پردازد، و به مفاهیم حوزهٔ تجزیهٔ یکتا و حوزهٔ اقلیدسی ــ مثالهایی مهم از حلقه‌های جابه‌جایی ــ منجر می‌شود.

با مسأله‌ای ساده‌تر، یعنی حل معادله دیوفانتیِ $x^۲ + y^۲ = z^۲$، که در آن $(x, y) = ۱$، آغاز می‌کنیم، یعنی با مسألهٔ یافتن همهٔ سه‌تاییهای اولیهٔ فیثاغورسی. هر چند که از ۲۰۰۰ سال پیش، و حتی زودتر، در یونان باستان از راه‌حل این مسأله آگاه بودند، ما به حل «جبری» آن علاقه‌مندیم که میراثی از سدهٔ نوزدهم است.

ایدهٔ اصلی، تجزیهٔ طرف چپِ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ و رسیدن به معادلهٔ $(x + yi)(x - yi) = z^۲$ در حوزهٔ $G = \{a + bi: a, b \in Z\}$ متشکل از اعداد صحیح گاوسی است. همان‌طور که گاوس ثابت کرد، این حوزه در ویژگی تجزیهٔ یکتا با اعداد صحیح مشترک است. به‌خصوص چون در G اعداد $x + yi$ و $x - yi$ نسبت به‌هم اول‌اند (این حکم از متباین بودن x و y در Z ناشی می‌شود) و حاصلضرب آنها مربع کامل است، هر یک از آنها در G مربع کامل است (و همین‌طور در هر حوزهٔ تجزیهٔ یکتا). پس $x + yi = (a + bi)^۲ = (a^۲ - b^۲) + ۲abi$. با مقایسهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی معلوم می‌شود که $x = a^۲ - b^۲$، $y = ۲ab$، و چون $x^۲ + y^۲ = z^۲$، $z = a^۲ + b^۲$. برعکس به‌آسانی ثابت می‌شود که به‌ازای هر a و b صحیح، $(a^۲ - b^۲, ۲ab, a^۲ + b^۲)$ جوابی از $x^۲ + y^۲ = z^۲$ است. بدین‌ترتیب همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی را به‌دست می‌آوریم. اینک جداکردن همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه از بین آنها آسان است.

اینک به $x^۲ + ۲ = y^۳$ برمی‌گردیم، و به‌طور مشابه با تجزیهٔ طرف چپ و به‌دست‌آوردن $(x + \sqrt{۲}i)(x - \sqrt{۲}i) = y^۳$، به حل معادله، که معادله‌ای است در حوزهٔ $D = \{a+b\sqrt{۲}i : a, b \in Z\}$، اقدام می‌کنیم. در اینجا نیز می‌توان نشان داد که $(x + \sqrt{۲}i, x - \sqrt{۲}i) = ۱$، و درنتیجه $x + \sqrt{۲}i$ و $x - \sqrt{۲}i$ در D مکعب کامل‌اند. به‌خصوص، $x+\sqrt{۲}i = (a+b\sqrt{۲}i)^۳$.

1. Bachet

با استفاده از جبر مقدماتی نتیجه می‌شود که $x = \pm 5$ و $y = 3$. البته به‌آسانی دیده می‌شود که اینها جوابهای معادلهٔ $x^2 + 2 = y^3$ هستند. از ملاحظات فوق معلوم می‌شود که این جوابها تنها جوابهای معادله هم هستند. این روش، اساساً همان روشی است که اویلر برای حل این معادله به‌کار برد. البته باید ثابت کرد که D حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست.

می‌توان به‌طور مشابه به معادلهٔ فرمای $x^3 + y^3 = z^3$ پرداخت: $z^3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x+y\omega)(x+y\omega^2)$ــ که معادله‌ای است در حوزهٔ $E = \{a + b\omega : a, b, \in Z$ و ω یک کعب اولیهٔ ۱ است$\}$. توضیحات فنی در اینجا پیچیده‌تر است ([۱]، [۹]).

توجیه «جزئیات» حل سه معادلهٔ دیوفانتی فوق کار قابل توجهی می‌طلبد. به‌خصوص، به معرفیِ مفاهیم حوزهٔ تجزیهٔ یکتا و حوزهٔ اقلیدسی و بحث دربارهٔ ویژگیهای حسابی آنها نیاز داریم. این سه معادلهٔ دیوفانتی را می‌توان به روش گفته‌شده حل کرد، زیرا حوزه‌های متناظر G، D، و E که در آنها این معادلات درنظر گرفته می‌شوند حوزه‌های تجزیهٔ یکتا هستند.

پیامدها

(**الف**) مسألهٔ فرما دربارهٔ نمایش‌پذیری اعداد صحیح به‌صورت مجموع دو مربع را می‌توان با مداقه در اعداد اول حوزهٔ G متشکل از اعداد صحیح گاوسی حل کرد ([۹]، [۱۸]).

(**ب**) در حوزه‌های حسابی که در آنها تجزیهٔ یکتا برقرار نیست، به تأسی از دد کیند، ایده‌آلها را وارد کار می‌کنیم. بدین‌ترتیب، برهانی از قضیهٔ آخر فرما ــ یعنی حل ناپذیری $x^p + y^p = z^p$ ــ در اعداد صحیح نامنفی به‌ازای هر $p < 100$ ــ به‌دست می‌آوریم [۱۸]. در اینجا مقدماتِ موضوعی غنی نمایان می‌شود ــ نظریهٔ اعداد جبری، که در آن ایده‌های جبر مجرد نقشی اساسی ایفا می‌کند. این نظریه تا حد زیادی از تلاش برای حل معادلاتی دیوفانتی از نوع مذکور در بالا، به‌خصوص معادلهٔ فرما، ریشه گرفته است.

مسألهٔ III: آیا می‌توان زاویهٔ 60° را تنها به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کرد؟

این مسأله یکی از سه مسألهٔ ترسیمِ مشهور کلاسیکِ است که سابقهٔ آنها به عهد یونان باستان برمی‌گردد. مسألهٔ تثلیث با روابط بین هندسه و جبر مجرد سروکار دارد، و به مفاهیم میدان و فضای برداری منجر می‌شود. این مسأله، مسأله‌ای استاندارد است، که معمولاً پس از تشریح نظریهٔ گالوا مطرح می‌شود. من در این درس جایگاه ویژه‌ای برای آن قائلم زیرا وسیله‌ای برای ورود «آرام» به مبحث میدانهاست.

مسألهٔ تثلیث در حدود ۲۵۰۰ سال پیش مطرح شد ولی تازه در ۱۸۳۷ بود که وانتسل[1] آن را، به‌دنبال معرفی ابزارهای جبری مورد نیاز حل‌وفصل کرد. نباید موضوع را رها کرد!

ایدهٔ اصلی اولیه، ترجمهٔ این مسألهٔ هندسی به زبان جبر کلاسیک ــ اعداد و معادلات ــ بود. این امر در سدهٔ هفدهم به‌وقوع پیوست. بدین‌ترتیب، هدف اساسی به ترسیم اعداد حقیقی، غالباً به‌عنوان ریشه‌های معادلات، تبدیل شد (از این پس در این مقاله، «ترسیم» به‌معنی «ترسیم با خط‌کش و پرگار» خواهد بود.) چگونه میدانها و فضاهای برداری در این ترسیم وارد می‌شوند؟

اگر a و b ترسیم‌پذیر باشند، $a+b$، $a-b$، ab، و a/b، که در آن $b \neq 0$، نیز چنین‌اند ــ اثبات همهٔ اینها آسان است. بنابراین اعداد ترسیم‌پذیر یک میدان تشکیل می‌دهند. ولی این اعداد کدام‌اند؟

از توضیحات بالا معلوم می‌شود که با مفروض بودن طول واحد، همهٔ اعداد گویا را می‌توان رسم کرد. به‌عنوان مثال، $\sqrt{2}$ را نیز می‌توانیم به‌عنوان قطر یک مربع واحد رسم کنیم. به‌طور کلی، اگر a ترسیم‌پذیر باشد، $\sqrt{a}$ نیز چنین است. بنابراین، می‌توان میدان $Q(\sqrt{a}) = \{p + q\sqrt{a} : p, q \in Q\}$ را ساخت. به این ترتیب مفهوم مهم میدان الحاقی وارد کار می‌شود. هدف این است که نشان دهیم همهٔ اعداد ترسیم‌پذیر را می‌توان با تکرارِ الحاقِ ریشه‌های دوم به‌دست آورد.

برای این منظور به یک اندازهٔ عددی برای تعیین میزان دوری $Q(\sqrt{a})$ از Q نیاز داریم، و این به مفهوم درجهٔ میدان توسیعی منجر می‌شود که در اینجا بُعد $Q(\sqrt{a})$ به‌عنوان یک فضای برداری روی Q است. این همان جبر مجرد اواخر سدهٔ نوزدهم است. ابزارهای کافی برای توسیعهای میدانی ــ و نه بیش از آن ــ برای حل مسألهٔ تثلیث معرفی می‌شود [۱۲].

نکته‌ای دربارهٔ تاریخ در برابر تکوین. وانتسل مسألهٔ تثلیث را در ۱۸۳۷، اساساً به‌همان صورتی که ما حل می‌کنیم، حل کرد: وی مسأله را به‌حل معادلات چندجمله‌ای تحویل کرد، و چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر و تابعهای گویای تعدادی مفروض از اعضا را معرفی کرد، و شرایطی را برای ترسیم‌پذیری برحسب تکرار جوابهای معادلات چندجمله‌ای استخراج نمود [۲۸]. هر چند رهیافت وانتسل در اساس با رهیافت نوین مشابه است، ولی او نه میدانها را به‌کار برد و نه فضاهای برداری را. ما هر دوی آنها را به‌کار می‌بریم. رهیافت ما در این درس صرفاً تاریخی نیست و هر وقت لازم باشد، به‌شرح تکوینی موضوع هم می‌پردازیم.

پیامدها

(**الف**) مشخص‌سازی اعداد حقیقی به‌صورت یک میدان مرتب کامل [۳].

(**ب**) بحثی در اعداد جبری و اعداد متعالی ([۸]، [۱۸]).

(**پ**) مشخص‌سازی میدانهای متناهی ([۱۰]، [۱۷]).

(**ت**) اثبات حالت خاص قضیهٔ دیریکله دربارهٔ اعداد اول در تصاعد حسابی، یعنی اثبات اینکه دنبالهٔ $1, 1+b, 1+2b, 1+3b, \ldots$ که در آن b عدد صحیح مثبت دلخواهی است، دارای تعدادی نامتناهی عدد اول است. برای این منظور، به توسیعهای میدان دایره‌بری نیاز داریم [۸].

مسألهٔ IV: آیا می‌توان $x^5 - 6x + 3 = 0$ را با رادیکالها حل کرد؟

طرح مسائلی از این قبیل که به حل معادلات با رادیکالها مربوط می‌شوند، به‌نظریهٔ گالوا منجر شد. این مسائل حاکی از ارتباط بین جبر کلاسیک و جبر مجردند.

نظریهٔ گالوا در صورت نوین خود یک سمفونی باشکوه در دو تم ماژور ــ گروهها و میدانها ــ، و دو تم مینور ــ حلقه‌ها و فضاهای برداری ــ است.

1. Wantzel

بنابراین، نظریهٔ گالوا بخش مهمی از هر درس جبر مجرد است. ولی اگر به تفصیل به آن برداخته شود، قسمت اعظم یک ترم را خواهد گرفت. به‌علاوه، اثبات قضیه‌ها غالباً طولانی، و گاهی کسل‌کننده است، و زودبازده نیست. بنابراین هدف این درس فهماندن و انتقال بعضی از ایده‌های اصلی نظریهٔ گالوا ــ به‌عنوان مثال، تناظر بین گروهها و میدانها و فایدهٔ آن ــ اغلب با استفاده از مثالها به‌جای برهانهاست.

ما از جایی آغاز می‌کنیم که تاریخ موضوع آغاز می‌شود ــ با لاگرانژ. وی راه‌حلهای قبلی معادلات درجهٔ سوم و چهارم را برای یافتن روش مشترکی که قابل تعمیم به معادلهٔ درجهٔ پنجم باشد مورد تحلیل قرار داد. هر چند موفق نشد تکلیف حل‌پذیری معادلهٔ درجهٔ پنجم با رادیکالها را تعیین کند، به یک ایدهٔ اصلی برخورد، یعنی به اینکه جایگشتهای ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای، «متافیزیک» حل‌پذیری این معادله با رادیکالهاست.

سعی می‌کنم با نشان دادن اینکه چگونه جایگشتهای ریشه‌های معادلات درجهٔ سوم و چهارم به حل آنها با رادیکال کمک می‌کند، دانشجویان را قدری با ایده‌های لاگرانژ آشنا کنم ([۵]، [۶]، [۲۵]).

اگرچه قضیهٔ اساسی نظریهٔ گالوا برای حل مسألهٔ حل‌پذیری معادلهٔ درجهٔ پنجم لازم نیست، در مورد این قضیه بحث، و با مثالهایی آن را تشریح می‌کنیم. این نتیجه‌ای زیبا و مهم است و کاربردها ــ پیامدها ــ یی زیبا صرف‌نظر از حل‌پذیری با رادیکالها دارد.

پیامدها

(**الف**) برهانهای چند قضیهٔ مهم در نظریهٔ اعداد: قضیهٔ «کوچک» فرما، قضیهٔ اویلر، و قضیهٔ ویلسن. برای برهان این قضیه‌ها از نظریهٔ بسیار مقدماتی گروهها استفاده می‌شود [۲۱].

(**ب**) رده‌بندی چندضلعیهای منتظم که با خطکش و پرگار ترسیم‌پذیرند. اگرچه نظریهٔ گالوا راه‌حل نسبتاً سریعی به‌دست می‌دهد [۲۳]، این مسأله را می‌توان با استفاده از مطالبی در نظریهٔ میدانها (توسیعهای دایره‌بری) و نظریهٔ بسیار مقدماتی گروهها حل کرد [۲۱].

(**پ**) برهانی اساساً جبری برای قضیهٔ بنیادی جبر [۲۳].

(**ت**) برهان گنگ بودن عباراتی مانند $\sqrt{۷۲}$ یا $\sqrt{۳}+\sqrt{۴}$، [۲۰].

مسألهٔ ۷: «پدر، می‌توانی سه‌تاییها را درهم ضرب کنی؟»

این مسأله با تعمیمهای اعداد مختلط به اعداد ابرمختلط، به‌خصوص چهارگانها سروکار دارد. سؤال مطرح‌شده در عنوان، پرسش پسران همیلتن از او بود که می‌خواستند ببینند پدرشان، پس از سالها تلاش، شیوه‌ای برای عملیات روی سه‌تاییهای حقیقی مشابه با اعداد حقیقی به‌دست آورده است یا نه. این مسأله به روابط بین جبر حسابی/کلاسیک و جبر مجرد مربوط است، و به مفاهیم جبر (نه لزوماً شرکت‌پذیر) و حلقهٔ تقسیمی (میدان چاوله) می‌انجامد.

برای فراهم‌کردن زمینه، تاریخ مختصری از اعداد مختلط را برای دانشجویان ذکر می‌کنیم. نکتهٔ مهمی که در اینجا باید در ذهن داشت این است که اعداد مختلط در ارتباط با حل معادلهٔ درجهٔ سوم، نه معادلهٔ درجهٔ پنجم، پیش آمدند [۱۵].

چهارگانهای همیلتن ــ که یک دستگاه عددی «تعویض‌ناپذیر» است ــ مفهوماً پیشرفت بسیار مهمی بود، زیرا این دستگاه جبر را از معیارهای حساب آزاد ساخت. تاریخ ابداع این چهارگانها در ۱۸۴۳ کاملاً مستند است و تصویر اجمالیِ نادری را از فرایند خلاقیت در کار ریاضی به‌دست می‌دهد [۲۷].

آیا «اعدادی» در ورای چهارگانها وجود دارند؟ (در هر حال، عدد چیست؟) با کشف هشتگانهای کیلی و، مستقلاً گریوز (هشت‌تاییهایی از اعداد حقیقی) پاسخ مثبتی برای این پرسش به‌دست آمد، و این سؤال واضح مطرح شد که آیا در ورای هشتگانها اعدادی وجود دارند. این بار فروبنیوس و پیرس، دوباره مستقل از هم، تاحدی پاسخ منفی به این سؤال دادند[۱۳]. در این ایده‌ها مفاهیم حلقهٔ تقسیمی و جبر تقسیمی به‌طور ضمنی نهفته بود.

پیامدها

(**الف**) با ایده‌هایی دربارهٔ چهارگانها می‌توان قضیهٔ چهار مربع لاگرانژ را ثابت کرد: هر عدد صحیح مثبت مجموعی از چهار مربع است [۹]، [۱۰].

(**ب**) آیا می‌توان از اعداد مختلط در حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌اصطلاح تحویل‌ناپذیر اجتناب کرد؟ خیر. برهانی با استفاده از قدرت قابل‌ملاحظه نظریهٔ گالوا موجود است [۳]، ولی می‌توان این نتیجه را به‌وسیله نظریهٔ توسیع میدانها اثبات کرد [۲۴].

(**پ**) برهانی نسبتاً مقدماتی از قضیهٔ فروبنیوس-پیرس دربارهٔ عدم وجود حلقه‌های تقسیمی (شرکتپذیر) متشکل از nتاییهایی از اعداد حقیقی به‌ازای $n \neq ۱, ۲, ۴$، [۱۳].

نکات کلی دربارهٔ درس

(**الف**) مسألهٔ اول و آخر، و شاید مسألهٔ دوم نیز، در درس جبر مجرد معمول نیستند، ولی من آنها را از نظر آموزشی روشنگر و سرشار از ایده‌های جبری یافته‌ام. از لحاظ تاریخی، آنها نشانه‌هایی ازگذار از جبر کلاسیک به جبر (مجرد) نوین هستند.

(**ب**) اولین مسأله با یک سؤال عددی «ساده» شروع می‌شود. هدف این است که دانشجو به آرامی وارد مرحلهٔ تجرید شود.

(**پ**) در حالی که ترتیب مباحث در کتابهای جبر، و در نتیجه در درسهای جبر، معمولاً از گروهها به حلقه‌ها و سپس به میدانهاست، مسائل ما دانشجویان را ابتدا با حلقه‌ها، سپس با میدانها، و سرانجام با گروهها آشنا می‌کند. این ترتیب را مؤثرتر دیدم. با این ترتیب، مفهوم بسیار دشوار از نظر ذهنی، یعنی مفهوم گروه، که اغلب به‌نظر دانشجویان «غیرطبیعی» می‌رسد، به بعد موکول می‌شود.

(**ت**) من تنها پنج مسأله را ذکر کردم. ممکن است استدلال شود که اینها برای درس کاملی در جبر کافی نیستند ولی این مسأله‌ها بسیار پردامنه و سرشار از ایده، و در جهات مختلف قابل بسط‌اند، که به بعضی آنها در بخش «پیامدها»ی هر مسأله اشاره شده است.

(**ث**) هیچ کتاب درسی در این درس به‌کار نمی‌رود، اما، منابع زیادی، هم فنی و هم تاریخی، ارائه می‌شود، و از دانشجویان انتظار می‌رود که بعضی از آنها را بخوانند!

(ج) مطالب تاریخی مورد استفاده در این درس بیشتر از منابع فرعی آورده می‌شوند. به دانشجویان (و معلمان) گوشزد می‌شود که سعی در خواندن و درک منابع اصلی و دست اول، درس را درحد غیرمعقولی دشوار می‌سازد. این درس نسبتاً چالش‌انگیز است، و با استفاده از منابع فرعی می‌توان به‌اهداف آن رسید.

(چ) تلاش ما در این درس پرداختن به ایده‌های ریاضی به‌علاوهٔ پرداختن به سازوکار استاندارد جبری است: «چرا» و «برای چه» به‌علاوهٔ «چگونه». این در تکلیفها منعکس می‌شود. بنابراین، از دانشجو خواسته می‌شود صرف‌نظر از حل انواع مسأله‌ها، مثلاً اثبات اینکه وارون جمعی در حلقه یکتاست، «گزارش کوتاهی» مشتمل بر جنبه‌های تاریخی و فنی موضوع بنویسد، به‌عنوان نمونه در مورد سهم دومورگن[1] در جبر و چگونگی نقش آن در پیشبرد اندیشهٔ جبر مجرد.

خواندن آثار ریاضی به‌طور مستقل، و نوشتن دربارهٔ آنچه خوانده‌اند، وظایفی است که دانشجویان ریاضی به آن عادت ندارند—ولی باید به آن عادت کنند.

مراجع

1. W. W. Adams and L. J. Goldstein, *Introduction to Number Theory*, Prentice-Hall, 1976.
2. G. Brikhoff, Current trends in algebra, *Amer. Math. Monthly* 1973, **80**: 760-782.
3. G. Brikhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 5th ed., A K Peters, 1996.
4. D. M. Burton and D. H. Van Osdol, Toward the definition of an abstract ring, in *Learn from the Masters*. ed. by F. Swetz et al, Math. Assoc. of America, 1995, pp. 241-251.
5. A. Clark, *Elements of Abstract Algebra*, Dover, 1984
6. R. A. Dean, *Elements of Abstract Algebra*, Wiley, 1966.
7. A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, *Jour. für die Reine und Angew. Math.* 1914, **145**: 139-176.
8. L. J. Goldstein, *Abstract Algebra: A First Course*, Prentice-Hall, 1973.
9. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, 1938.
10. I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Blaisdell, 1964.
11. D. Hilbert, Über den Zahlbegriff, *Jahresb. der Deut. Math. Verein.* 1900, **8**: 180-184.
12. A. Jones, S. A. Morris, and K. R. Pearson, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer-Verlag, 1991.
13. I. L. Kantor and A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag, 1989. (Translated from the Russian by A. Shenitzer.)
14. I. Kleiner, The roots of commutative algebra in algebraic number theory, *Math Magazine* 1995, **68**: 3-15
15. I. Kleiner, Thinking the unthinkable: The story of complex numbers (with a moral), *Math. Teacher* 1988, **81**: 583-592.
16. M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford Univ. Press, 1964.
17. N. H. McCoy and G. J. Janusz, *Introduction to Modern Algebra*, Wm. C. Brown, 1992.
18. H. Pollard and H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers*, Math. Assoc. of America, 1975.
19. H. Pycior, George Peacock and the British origins of symbolical algebra, *Hist. Math.* 1981, **8**: 23-45.
20. I. Richards, An application of Galois theory to elementary arithmetic, *Advances in Math.* 1974, **13**: 268-273.
21. F. Richman, *Number Theory: An Introduction to Algebra*, Brooks/Cole, 1971.

* * * * * *

• I. Kleiner, "A course in abstract algebra inspired by history", in *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser (2007) 103-110.

* ایزراییل کلاینر، دانشگاه یورک، کانادا

1. De Morgan

چه وقتی یک گروه می‌تواند اجتماعی از زیرگروههای نرمال سره باشد؟•

میرا بهارگاوا*

ترجمهٔ سهیل برادران

اینکه گروه G نمی‌تواند اجتماع دو زیرگروه سره باشد، بارها مورد بررسی قرار گرفته و موضوعی معروف است (ر.ک. [۱]، [۲]، [۴]، یا [۶]). ولی ممکن است یک گروه اجتماع سه زیرگروه سره باشد. ظاهراً اسکورزا برای اولین بار توصیف ساده‌ای از همهٔ گروههایی که می‌توان آنها را به‌صورت اجتماعی از سه زیرگروه سره بیان کرد به‌دست داده است [۶]. او نشان داد که

قضیهٔ ۱. گروه G را می‌توان به‌صورت اجتماع سه زیرگروه سره بیان کرد اگر و تنها اگر دارای خارج قسمتی باشد که با چهارـگروه کلاین $C_۲ \times C_۲$ یکریخت باشد.

به‌سادگی می‌توان به‌کفایت شرط پی برد: $C_۲ \times C_۲$ اجتماع سه زیرگروه $H_۱$، $H_۲$، و $H_۳$ با شاخص ۲ است و اگر همریختی پوشایی چون $\phi : G \to C_۲ \times C_۲$ وجود داشته باشد، آنگاه G اجتماع زیرگروههای محض $\phi^{-۱}(H_۱)$، $\phi^{-۱}(H_۲)$، و $\phi^{-۱}(H_۳)$ خواهد بود.

با نگاهی به کارهای کوهن [۳] و تامکینسن [۸] درمی‌یابیم که اگر بخواهیم G اجتماع تعداد بیشتری از زیرگروهها باشد، موقعیت به‌طرز فزاینده‌ای پیچیده می‌شود. از طرف دیگر، قضیهٔ ۱ دلالت بر این دارد که اگر گروهی به‌صورت اجتماع سه زیرگروه سره قابل بیان باشد، آنگاه این گروه باید دقیقاً اجتماع سه زیرگروه نرمال سره باشد. بدین‌ترتیب، پرسش مطرح‌شده در عنوان این مقاله پرسشی طبیعی به‌نظر می‌رسد.

گروههایی را که اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ خودشان باشند می‌توانیم پادساده[1] بنامیم. زیرا این گروهها تا حدی که ممکن است با سادگی فاصله دارند. درگروه پادسادهٔ G نه تنها زیرگروههای نرمال سرهٔ نابدیهی وجود دارند، بلکه هر عنصر G، مشمول در یکی از آنهاست.[2] مسألهٔ تعیین تمام گروههای سادهٔ متناهی به حدود یک سده همکاری و تلاش جمعی سترگ نیاز داشت تا حل شود ولی خوشبختانه، مسألهٔ رده‌بندی گروههای پادساده، مسألهٔ خیلی دشواری نیست. در حقیقت پاسخ پرسش ما دست‌کم در زمینهٔ گروههای متناهی، به شکل قابل‌ملاحظه‌ای همانند قضیهٔ ۱ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۲. گروه متناهی G اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ خودش است، اگر و تنها اگر به‌ازای عدد اولی چون p دارای خارج قسمتی یکریخت با $C_p \times C_p$ باشد.

برهان. روشن است که $C_p \times C_p$ اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ خودش، $H_۱$، $H_۲$، ...، $H_{p+۱}$ با شاخص p، است و اگر $\phi : G \to C_p \times C_p$ یک همریختی پوشا باشد، آنگاه G اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ $\phi^{-۱}(H_۱)$، $\phi^{-۱}(H_۲)$، ...، $\phi^{-۱}(H_{p+۱})$ خواهد بود.

برعکس، گیریم $G = \cup_{i=۱}^{n} H_i$ که در آن H_iها زیرگروههای نرمال سرهٔ G هستند. می‌توانیم فرض کنیم که هر H_i یک زیرگروه نرمال ماکسیمال است، یعنی، هیچ یک از آنها مشمول در زیرگروه نرمال سرهٔ دیگری نیست. همچنین می‌توانیم برای راحتی کار اجتماع $\cup_{i=۱}^{n} H_i$ را غیر زاید[1] درنظر بگیریم، به این معنا که هیچ زیرگروهی مانند H_j در اجتماع $\cup_{i \neq j} H_i$ نیست.

فرض کنیم $N = \cap_{i=۱}^{n} H_i$، و $\psi : G \to G/N$ همریختی طبیعی باشد. در این‌صورت، $G/N = \cup_{i=۱}^{n} \psi(H_i)$ نیز اجتماع زیرگروههای نرمال سره است. به‌علاوه، اگر G/N دارای خارج قسمتی یکریخت با $C_p \times C_p$ باشد، آنگاه G نیز چنین است. از این رو برای اثبات قضیه می‌توانیم به‌جای G از G/N و به‌جای H_i از $\psi(H_i)$ استفاده کنیم. همچنین می‌توانیم فرض کنیم که $\cap_{i=۱}^{n} H_i = \{e\}$.

اگر $I \subset \{۱, ۲, \ldots, n\}$ یک مجموعهٔ اندیس‌گذار ماکسیمال باشد به‌طوری که $\cap_{i \in I} H_i \neq \{e\}$، و $k = |I|$، می‌توانیم فرض کنیم که $I = \{۱, ۲, \ldots, k\}$.

ادعا می‌کنیم که $k < n-۱$. اگر $k = n-۱$، آنگاه $H_۱ \cap \ldots \cap H_{n-۱}$ شامل عنصری مانند $a \neq e$ است. چون $\cap_{i=۱}^{n} H_i = \{e\}$، پس $a \notin H_n$، و چون $\cup_{i=۱}^{n} H_i$ غیر زاید است، bای در H_n وجود دارد که به‌ازای هر

1. anti-simple

۲. گروه را ساده می‌نامند اگر هیچ زیرگروه سرهٔ نرمال نابدیهی نداشته باشد.ـــ م.

1. irredundant

$b \notin H_i$، $i < n$. اکنون حاصلضرب $ab \in G = \cup_{i=1}^{n} H_i$ را درنظر می‌گیریم. اگر $ab \in H_n$، آنگاه $a \in H_n$ که این یک تناقض است، و اگر به‌ازای یک $i < n$، $ab \in H_i$، آنگاه $b \in H_i$ که این نیز تناقض است. از این رو عنصر a نمی‌تواند وجود داشته باشد، لذا $H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$ بدیهی است و همان‌طور که ادعا کردیم، $k < n - 1$.

فرض کنیم $T = H_1 \cap \ldots \cap H_k$. آنگاه T یک زیرگروه نرمال نابدیهی G است، که به‌ازای $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ داریم $T \cap H_i = \{e\}$. حال l و m را طوری درنظر می‌گیریم که $m \leq n$، $k+1 \leq l$. بنابراین TH_l و TH_m زیرگروههایی نرمال از G هستند که به‌ترتیب اکیداً شامل H_l و H_mاند، و چون اینها زیرگروههای نرمال ماکسیمال هستند، باید داشته باشیم $G = TH_l = TH_m$، و در نتیجه $G \cong T \times H_l \cong T \times H_m$.

به‌ویژه T می‌تواند با هر دوی H_l و H_m جابه‌جا شود، پس T با $G = H_l H_m$ جابه‌جا می‌شود و در نتیجه T آبلی است. علاوه‌براین $T \cong G/H_l \cong G/H_m$، و از اینکه H_l و H_m زیرگروههای نرمال ماکسیمال‌اند، نتیجه می‌گیریم که T ساده است. پس به‌ازای عدد اولی چون p، $T \cong C_p$.

سرانجام چون $G/H_l \cong G/H_m \cong C_p$، داریم

$$G/(H_l \cap H_m) \cong C_p \times C_p$$

■

ولی برخلاف قضیهٔ ۱، قضیهٔ ۲ در مورد گروههای نامتناهی برقرار نیست. برای نمونه فرض می‌کنیم G گروه جمعی اعداد گویا باشد. دراین‌صورت، روشن است که G اجتماع زیرگروههای نرمال سره است، اما هیچ خارج قسمتی به شکل $C_p \times C_p$ ندارد. این مطلب می‌تواند این گمان را به‌وجود آورد که گروه G (متناهی یا نامتناهی) اجتماع زیرگروههای نرمال سره است اگر و تنها اگر دارای خارج قسمتهای آبلی غیر دوری (متناهی یا نامتناهی) باشد. اما حتی این درست نیست. در واقع، اگر فرض کنیم $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_5$، مجموع مستقیم نامتناهی گروه متناوب A_5 با خودش باشد، آنگاه G اجتماع زیرگروههای نرمالش یعنی $H_n = \bigoplus_{i=0}^{n} A_5$ هاست. ولی G دارای خارج قسمت آبلی (نابدیهی) نیست، زیرا به‌سادگی مشاهده می‌شود که زیرگروه جابه‌جاگر G، خود G است. اینک آیا شکل دیگری از قضیهٔ ۲، که برای گروههای نامتناهی برقرار باشد، وجود دارد؟

در حالتی که علاقه‌مند به بررسی گروههایی باشیم که اجتماع تعدادی متناهی از زیرگروههای نرمال سرهٔ هستند، پاسخ مشابهی به‌دست می‌آید، که ما آن را در قضیهٔ ۳ که صورت قوی‌تری از قضیهٔ ۲ است، بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۳. گروه G (متناهی یا نامتناهی) اجتماع تعدادی متناهی از زیرگروههای نرمال سره است اگر و تنها اگر دارای خارج قسمتی باشد، که به‌ازای عدد اولی چون p با $C_p \times C_p$ یکریخت باشد.

برهان. فرض کنیم G اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ $H_1, \ldots, H_n$ باشد. سپس با استفاده از استدلال سان [۷، برهان قضیهٔ ۱] گروه متناهی G' و یک همریختی پوشا مانند $\phi : G \to G'$، که در آن G' اجتماع زیرگروههای نرمال سرهٔ $\phi(H_1), \ldots, \phi(H_n)$ است، وجود دارد. بنابراین، می‌توانیم از قضیهٔ ۲ برای به‌دست آوردن خارج قسمتی از G' به شکل $C_p \times C_p$ که درگذشته به‌عنوان خارج قسمت مطلوب G بیان شده بود، استفاده کنیم. ■

در پایان می‌توان این پرسش جالب را مطرح کرد که کوچک‌ترین عددی مانند $\eta(G)$، به‌طوری که G بتواند بیانگر اجتماع $\eta(G)$ زیرگروه نرمال سره باشد، چیست؟ این مطلب در قضیهٔ ۴ بررسی شده است.

قضیهٔ ۴. G را گروهی پادساده درنظر می‌گیریم. فرض کنیم p_0 کوچک‌ترین عدد اولی باشد که به‌ازای آن G دارای خارج قسمتی یکریخت با $C_{p_0} \times C_{p_0}$ است (در صورتی که چنین خارج قسمتی موجود باشد) و در غیر این صورت فرض می‌کنیم $p_0 = \infty$. آنگاه $\eta(G) = p_0 + 1$.

برهان. اگر وقتی p_0 مینیمال است، G دارای خارج قسمتی باشد که با $C_{p_0} \times C_{p_0}$ یکریخت است، آنگاه دیده‌ایم که G اجتماع $p_0 + 1$ زیرگروه نرمال سره می‌باشد. از این رو $\eta(G) \leq p_0 + 1$.

برای ملاحظهٔ اینکه $\eta(G) \geq p_0 + 1$، مشابه برهان قضیهٔ ۲ عمل می‌کنیم. همانند قبل فرض کنیم $G = \cup_{i=1}^{n} H_i$، و T، k، p، ... را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم که $n \geq p_0 + 1$.

فرض کنیم x عنصری از H_m باشد که به‌ازای هیچ $i \in \{1, \ldots, k\}$ مشمول در H_i نیست. پس هم‌مجموعهٔ xT باید مشمول در $\cup_{r=k+1}^{n} H_r$ باشد. ادعا می‌کنیم که هر H_r با شرط $k+1 \leq r \leq n$، حداکثر شامل یک عنصر از xT است؛ اگر H_r دارای دو عنصر مجزای $xt_1, xt_2 \in xT$ باشد، آنگاه $t_1 t_2^{-1}$ در $T \cap H_r = \{e\}$ است، که این تناقض است. بنابراین، چون $xT \subset \cup_{r=k+1}^{n} H_r$، باید داشته باشیم $n - k \geq |T| = p$. همچنین به‌ازای $k \geq 1$ داریم $n \geq p + 1 \geq p_0 + 1$، که این همان نتیجهٔ مورد نظر است.

■

مراجع

1. M. Bhargava, Problem E1592, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964) 319.
2. M. Bruckheimer, A. C. Bryan, and A. Muir, Groups which are the union of three subgroups, *Amer. Math. Monthly* **77** (1970) 52-57.
3. J. H. E. Cohn, On n-sum groups, *Math. Scand.* **75** (1994) 44-58.
4. S. Haber and A. Rosenfeld, Groups as unions of proper subgroups, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959) 491-494.
5. K. P. S. Bhaskara Rao and J. D. Reid, Abelian groups that are unions of proper subgroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **45** (1992) 1-7.
6. G. Zappa, The papers of Gaetano Scorza on group theory (Italian), *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. (9) Mat. Appl.* **2** (1991) 95-101.
7. J. Sonn, Groups that are the union of finitely many proper subgroups, *Amer. Math. Monthly* **83** (1976) 263-265
8. M. J. Tomkinson, Groups as the union of proper subgroups, *Math. Scand.* **81** (1997) 191-198

******

- Mira Bhargava, "When is a group the union of proper normal subgroups?", *Amer. Math. Monthly*, (5) **109** (2002) 471-473.

چند مسأله برای حل*

مسائلی که ارزش حل‌کردن دارند با مقاومت
در برابر ما ارزش خود را نشان می‌دهند.
پال اردش

۱. فرض کنید X و Y دومجموعه‌اند و f تابعی از X به Y و g تابعی از Y به X است. ثابت کنید افرازهای $X = A \cup B$ و $Y = C \cup D$ از X و Y وجود دارند به‌طوری که $f(A) = C$ و $g(D) = C$.

۲. فرض کنید E توسیعی متناهی از میدان F است و $f(x) \in E[x]$. ثابت کنید $g(x) \in E[x]$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)g(x) \in F[x]$.

۳. فرض کنید G یک گروه است و $a \in G$ و $C_G^{(a)} \underline{\Delta} G$. ثابت کنید a متعلق به زیرگروهی نرمال و آبلی از G است.

۴. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان F است. ثابت کنید:

$$\text{۲rank}A^{\text{۲}} \leq \text{rank}A + \text{rank}A^{\text{۳}}.$$

۵. یک n ضلعی منتظم را که درون دایره‌ای به شعاع ۱ محاط شده است درنظر می‌گیریم. رأسهای این n ضلعی را از $P_{\text{۰}}$ تا $P_{n-\text{۱}}$ در جهت مثلثاتی نامگذاری می‌کنیم و فاصلهٔ $P_{\text{۰}}$ تا P_k، $\text{۱} \leq k \leq n-\text{۱}$، را λ_k می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\lambda_{\text{۱}}\lambda_{\text{۲}} \cdots \lambda_{n-\text{۱}} = n.$$

۶. فرض کنید f تابعی پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}) \ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ثابت کنید به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = ax^{\text{۲}}$، که در آن $a = f(\text{۱})$.

۷. (الف) فرض کنید p یک عدد اول فرد است و q و r اعدادی اول‌اند به‌طوری که $p|q^r + \text{۱}$. ثابت کنید $\text{۲}r|p-\text{۱}$ یا $p|q^{\text{۲}} - \text{۱}$.

(ب) فرض کنید $a > \text{۱}$ و n اعدادی طبیعی‌اند. اگر p یک مقسوم‌علیه اولِ $a^{\text{۲}^n} + \text{۱}$ باشد، ثابت کنید $p - \text{۱}$ مضربی از $\text{۲}^{n+\text{۱}}$ است.

۸. ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی $\alpha > \text{۱}$ داریم:

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \frac{dx}{\text{۱} + x^{\alpha}} = \frac{\pi/\alpha}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

* * * * * *

* انتخاب از: محمدرضا درفشه، دانشگاه تهران

مسأله‌ای به‌همراه حل*

مطلوب است تعیین همهٔ توابع حقیقی‌مقدارِ تعریف شده بر $\mathbb{Z}^{\text{۲}}$ مانند f به‌طوری که به‌ازای هر دو بردار متعامد $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از $\mathbb{Z}$، $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

حل. واضح است که همهٔ توابع مانند f با ویژگیِ مذکور در صورت مسأله، یک فضای برداری (حقیقی) مانند V تشکیل می‌دهند، و به‌ازای هر f از V، $f(\mathbf{o}) = \text{۰}$، ثابت می‌کنیم توابع زیر یک پایه برای V به‌دست می‌دهند

$$f_{\text{۱}}(x, y) = x$$

$$f_{\text{۲}}(x, y) = y$$

$$f_{\text{۳}}(x, y) = x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}$$

و

$$f_{\text{۴}}(x, y) = \begin{cases} \text{۱} & \text{اگر } x \text{ فرد و } y \text{ زوج باشد} \\ -\text{۱} & \text{اگر } x \text{ زوج و } y \text{ فرد باشد} \\ \text{۰} & \text{اگر } x \text{ و } y \text{ یا هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند} \end{cases}$$

اثبات اینکه $f_{\text{۱}}$ و $f_{\text{۲}}$ دارای ویژگی مذکورند، آسان است. برای $f_{\text{۳}}$، این ویژگی از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود. در مورد $f_{\text{۴}}$ می‌توان مستقیماً نشان داد که به‌ازای همهٔ زوجهای $(x_{\text{۱}}, y_{\text{۱}})$ و $(x_{\text{۲}}, y_{\text{۲}})$، بجز زوجهایی که در آنها یا $x_{\text{۱}}$ و $x_{\text{۲}}$ هر دو فردند و یا $y_{\text{۱}}$ و $y_{\text{۲}}$ هر دو فردند (ولی نه هر دو حالت)، داریم

$$f_{\text{۴}}(x_{\text{۱}}, y_{\text{۱}}) + f_{\text{۴}}(x_{\text{۲}}, y_{\text{۲}}) = f_{\text{۴}}(x_{\text{۱}} + x_{\text{۲}}, y_{\text{۱}} + y_{\text{۲}}).$$

چون زوجهای استثنایی بر هم عمود نیستند، نتیجه می‌شود که $f_{\text{۴}} \in V$.

اینک ملاحظه می‌کنیم که توابع $f_{\text{۱}}$، $f_{\text{۲}}$، $f_{\text{۳}}$، و $f_{\text{۴}}$ مستقل خطی‌اند، بنابراین باقی می‌ماند نشان دهیم که بُعد V برابر ۴ است. این حکم از اینجا نتیجه می‌شود که هر $f \in V$ به‌طورکامل با مقادیر آن در $(\text{۱}, \text{۰})$، $(-\text{۱}, \text{۰})$، $(\text{۰}, \text{۱})$، $(\text{۰}, -\text{۱})$ معین می‌شود. در واقع داریم

$$f(x, y) = f(x, \text{۰}) + f(\text{۰}, y)$$

$$f(\text{۲}x, \text{۰}) = f(x, x) + f(x, -x)$$

و

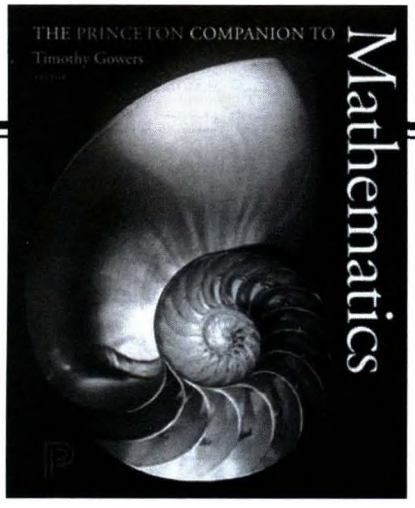
$$f(\text{۲}x + \text{۱}, \text{۰}) = f(\text{۲}x + \text{۱}, \text{۱}) - f(\text{۰}, \text{۱})$$

همچنین $f(\text{۲}x + \text{۱}, \text{۱}) = f(x + \text{۱}, x + \text{۱}) + f(x, -x)$. این روابط (و روابط مشابه برای $f(\text{۰}, \text{۲}y)$، $f(\text{۰}, \text{۲}y + \text{۱})$، و $f(\text{۱}, \text{۲}y + \text{۱})$) نشان می‌دهد که به‌ازای هر (x, y) که $|x| + |y| > \text{۱}$، می‌توان $f(x, y)$ را به‌صورت تابعی از (x, y)های «کوچک‌تر» بیان کرد.

* * * * * *

* انتخاب و ترجمه از: علیرضا جمالی، از مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ آوریل ۱۹۹۷، ص. ۳۶۵.

نقد و بررسی



همراه‌نامهٔ ریاضی پرینستن

***The Princeton Companion to Mathematics*,**
Timothy Gowers, editor,
June Barrow-Green and Imre Leader, associate editors,
Princeton University Press (2008) xxii+1034 pp.

این کتابْ مجموعهٔ متنوعی از مقالات خواندنی دربارهٔ جنبه‌های گوناگون ریاضیات (مباحث، مفاهیم، کاربردها، تاریخ، حل مسأله، و زندگینامهٔ ریاضیدانان بزرگ) است. سرویراستار این مجموعه تیموتی گاورز (**Timothy Gowers**) ریاضیدان مشهور و برندهٔ نشان فیلدز است که علاوه‌بر کار پژوهش، اهتمام خاصی نیز در ترویج ریاضیات دارد. مقاله‌ها را ریاضیدانان مختلفی (از جمله، ویراستاران کتاب) نوشته‌اند. سطح مقاله‌ها متفاوت است و از این لحاظ می‌توان آنها را به‌طور تقریبی به سه دسته تقسیم کرد: مطالب عامه فهم، مطالبی در سطح دورهٔ کارشناسی، و مطالبی که مخاطبان آنها ریاضیدانان حرفه‌ای هستند.

مجلهٔ نوتیسز انجمن ریاضی آمریکا (**AMS**) در شمارهٔ نوامبر ۲۰۰۹ خود (صص. ۱۲۷۶ـ۱۲۸۱) نقد و نظر پنج ریاضیدان صاحب نام را دربارهٔ این کتاب چاپ کرده است که نظر به اهمیت کتاب، ترجمهٔ دو تا از این نقدها را، به انتخاب نشر ریاضی، در اینجا می‌آوریم. ضمناً مقالهٔ «اندرز به ریاضیدان جوان» در این شماره نیز از این کتاب ترجمه شده است.

سایمن دانلدسن *

دو قطعه از پیشگفتار کتاب تصویر کلی خوبی از مطالب آن به‌دست می‌دهد: «هدف [همراه‌نامه] ارائهٔ نمونه‌ای وسیع و تمام‌نما از مفاهیمی است که ریاضیدانان در آغاز سدهٔ بیست‌ویکم با آنها دست و پنجه نرم می‌کنند».

> این کتاب دانشنامه نیست: ... بلکه شبیه همراهی انسانی است که اطلاعاتش نقصهایی دارد و دیدگاههایش دربارهٔ بعضی مباحث ممکن است مورد توافق همگان نباشد.

* Simon Donaldson، امپریال کالج، انگلستان.

این کتاب هشت قسمت دارد که مشتمل بر مطالب نسبتاً متنوعی برای خوانندگان احتمالی مختلف است. مطالب کتاب را می‌توان، تقریباً، به سه دسته تقسیم کرد:

(۱) مطالب عامه‌فهم، شبیه مطالب مقالات ساینتیفیک امریکن یا سخنرانیهای عمومی ریاضی؛

(۲) مطالبی در سطح ریاضیات دورهٔ کارشناسی؛

(۳) مقالاتی توصیفی که مخاطب آنها ریاضیدانان حرفه‌ای‌اند، تا اندازه‌ای به سبک مقالات بولتن انجمن ریاضی آمریکا.

مؤلفان مختلفی در این کار تشریک مساعی کرده‌اند، ولی دیدگاه خاص گاورز بر کتاب حاکم است و بسیاری از مطالب را او نوشته است.

قلب کتاب قسمت IV است که مشتمل بر توصیف بیست‌وشش «شاخهٔ ریاضیات»، هر یک تقریباً در پانزده صفحه، است. به‌عنوان مثال شاخه‌های زیر را داریم: «اعداد جبری» (میزر[1])، «توپولوژی دیفرانسیل» (تاوبز[2])، «معادلات دیفرانسیل جزئی» (کلاینرمن[3])، «ترکیبیات کرانگین و احتمالاتی» (الون[4] و کری‌ولویچ[5]). این مباحث تقریباً در سطوح (۲) و (۳) فوق هستند. تعدادی از این مقالات، عالی‌اند، و چشم‌اندازی کلی و شناختی از موضوع به‌دست می‌دهند که به‌ندرت می‌توان در جای دیگر یافت. به‌خصوص، از دو مقالهٔ «معادلات دیفرانسیل جزئی» (پرداختن به چنین موضوع گسترده‌ای در چنین فضای اندکی) و «نظریهٔ نمایش» (گرونوسکی[6]) که از نظریهٔ مقدماتی به مباحث پیشرفته می‌رسد و در عین حال از انسجامی کلی برخوردار است، خیلی خوشم آمد. دو مقالهٔ نخست، «اعداد جبری» و «نظریهٔ تحلیلی اعداد» (گرنویل[7])، دست‌کم درنظر نگارنده، بسیار آموزنده و جالب‌اند، و سبکهای متفاوتی دارند. مقالهٔ اول بسیاری از مفاهیم اساسیِ موضوع را (مانند گروههای رده‌ای ایده‌آل و تجزیهٔ یکتا) با شرح برهانها توضیح می‌دهد، در حالی که مقالهٔ دوم بیشتر به بیان نتایج و مسائل حل‌نشدهٔ جالب می‌پردازد. هر دو رهیافت کارا و شاید رهیافتهای مناسب برای این موضوعات‌اند. هر یک از این مقالات در قسمت IV با فهرست کوتاهی از منابع برای مطالعهٔ بیشتر خاتمه می‌یابد.

قسمت III کتاب را مقالات کوتاه‌تر (یک یا دوصفحه‌ای) دربارهٔ نودونه «مفهوم ریاضی» تشکیل می‌دهد. سطح و سبک آنها بسیار متفاوت است. نمونه‌ای از سه مقالهٔ مجاور که به‌ترتیب الفبایی [انگلیسی] آمده‌اند، مبین رهیافتهایی متفاوت‌اند:

> «معادلات اویلر و ناویر–استوکس[8]» (فِفِرمن[9]). بیان معادلات و بحثی در مورد مسألهٔ قدیمی وجودی، تمایز بین جوابهای ضعیف و قوی، و چند نتیجهٔ جدید. این مقاله به این دیدگاه منتهی می‌شود که «لازم است بفهمیم که چرا یک چسبندگی اندک باعث اتلاف انرژی بسیار زیادی می‌شود».
>
> «بسطگر[10]ها» (ویگدرسن[11]). تعریف (گرافی با n رأس یک c بسطگر است هرگاه به‌ازای هر m که $m \leq (n/2)$ و هر مجموعهٔ S با m رأس دست‌کم cn یال بین S و مکمل آن وجود داشته باشد.) توصیف ساختها و اینکه چرا بسطگرها اهمیت دارند، همراه با کاربردهای شگفت‌انگیز (و جدید) برای برآورد متوسطها روی مجموعه‌های بزرگ.
>
> «توابع نمایی و لگاریتمی» (گاورز). این موضوع در سطحی بسیار مقدماتی‌تر بیان شده است: مسألهٔ تعریفِ a^x وقتی که a صحیح، گویا، یا گنگ است. تابع نمایی با سریهای توانی یا حد $(1+x/n)^n$، با ذکر رئوس برهانها، تعریف می‌شود. لگاریتمها و تعمیم آنها به متغیرهای مختلط.

بازهم همهٔ اینها، هر یک به‌نحوی، عالی‌اند. دو مقالهٔ نخست مقالاتی فشرده در سطوح (۲)–(۳) پیشگفته، با ارجاعاتی هوشمندانه، اند و مقالهٔ سوم به‌طرز زیبایی مطالب متعارف در سطح اوایل دوره کارشناسی و اواخر دورهٔ دبیرستان را به‌صورت قابل فهم‌تری از آنچه در یک کتاب درسی می‌آید خلاصه می‌کند. ارجاعاتِ جامعی بین مقالات مختلف وجود دارد. در قسمت III ارجاعات اندکی به سایر منابع دیده می‌شود؛ ارجاعاتِ بیشتر می‌توانست مفید واقع شود (به‌عنوان مثال، مقالات تحقیقی اصلی در موضوع «بسطگرها» که در بالا مطرح شد، و منابعی که خواننده بتواند اطلاعات بیشتری درباره شارش ریتچی به‌دست آورد).

این از بابت قسمتهای III و IV. قسمت I، «مقدمه» (۷۶ صفحه به قلم گاورز) به‌خودی خود می‌تواند توصیفی کلی از ریاضیات نوین باشد. این بحث، علاوه‌بر بسیاری بحثهای دیگر، مشتمل است بر «ریاضیات دربارهٔ چیست؟»؛ «چند تعریف اساسی ریاضی»؛ «شیوه‌های مختلف تفکر در مشخص‌سازی جبر، هندسه، و آنالیز»؛ «زبان صوری و غیرصوری به‌کار رفته در برهانها»؛ و «در یک مقالهٔ ریاضی چه می‌توان یافت؟». این مطالب برای دانشجویان کارشناسی که در فکر انتخاب مسیری در تحقیقات ریاضی‌اند می‌تواند بسیار با ارزش باشد. قسمت II شامل هفت مقالهٔ اساسی تاریخی است. قسمت V، تا اندازه‌ای همانند قسمت III، از مقالات کوتاه تشکیل شده است، با این تفاوت که در آنها به نتایج و مسائل خاص پرداخته می‌شود (باز هم در حوزه‌ای وسیع، از «قضیهٔ اساسی حساب» گرفته تا «حدس پوانکاره»). قسمت VI مجدداً تاریخی است، زندگینامهٔ مختصر نودوشش ریاضیدان، و قسمت VIII («چشم‌انداز نهایی») از مقالات متنوعی در مباحث عام، و گاهی فلسفی‌تر، تشکیل شده است.

قسمت VII («تأثیر ریاضیات») شایان تحسین است. همان‌گونه که در پیشگفتار شرح داده شده است، توجه کتاب عمدتاً معطوف به ریاضیات محض است ولی به‌کاربردها نیز توجه دارد. در قسمت VII کاربردها با تفصیل بیشتری ذکر می‌شوند، و هر چند کاربردهای مورد بحث الزاماً خیلی خاص هستند، مقالات فوق‌العاده جالب‌اند؛ و شاید هم برای ریاضیدانان محض حرفه‌ای بسیار آموزنده. در اینجا «کاربردها» را باید به‌طور گسترده تعبیر کرد: این مقالات مشتمل‌اند بر «موجکها»، «آمار پزشکی»، «ریاضیات و موسیقی».

شِکوه و شکایت در مورد مطالبی که در کتاب نیامده کار آسانی است، هرچند که چنین شِکوه‌ای با توجه به اینکه این کتاب دانشنامه نیست چندان محلی از اِعراب ندارد. مطالب اندکی در مورد هندسهٔ دیفرانسیل وجود دارد. انتظار داشتم بحث جامعی از تأثیر کوهمولوژی در موارد گوناگون (که یقیناً یکی از پیشرفتهای اصلی سدهٔ بیستم است) در کتاب می‌آمد، ولی این انتظار به یأس مبدل شد.

در صورتی که مطالب بیشتری دربارهٔ نظریهٔ میدانهای کوانتومی، به‌عنوان ایده‌ای مهم «که ریاضیدانان در آغاز سدهٔ بیست‌ویکم با آن دست و پنجه نرم می‌کنند»، در کتاب می‌دیدیم، بسیار جالب و باب روز می‌بود (هر چند که مطالبی در این باب تحت «تقارن آینه‌ای» و «جبرهای عملگری رأسی» آمده است). به‌طور کلی در صورتی که بعضی از تعریفها، و غیره، قدری صوری‌تر می‌بودند خشنودتر می‌شدم، ولی در آن صورت کتاب شبیه دانشنامه می‌شد، استانداردتر می‌شد، و تمایز و تشخص کمتری می‌داشت.

روی هم‌رفته، این کتاب دستاورد بزرگی است که مؤلفانش شایستهٔ قدردانی‌اند. کتاب شامل مطالب زیادی است که اغلب آنها را نمی‌توان در جایی یافت، و قابل استفاده برای خوانندگانی با زمینه‌های بسیار گوناگون است.

ترجمهٔ علیرضا جمالی

1. Mazur 2. Taubes 3. Klainerman 4. Alon 5. Krivelevich
6. Gronowski 7. Granville 8. Navier-Stokes 9. Fefferman
10. expander 11. Wigderson

گیل کالای*

تمجید

این کتابْ توصیفی بسیار پرمایه از بسیاری از جنبه‌های ریاضیات به‌عنوان علم، هنر، ابزاری نیرومند، و فعالیتی انسانی است.

جنبهٔ انسانی ریاضیات نه تنها در فصلهای تاریخیِ عمومی و زندگینامه‌های ریاضیدانان بلکه همچنین در فصلهای مربوط به مباحث ریاضی و مفاهیم و مسائل و نتایج نیز به نمایش در آمده است. مثلاً به این قول توجه کنید: «بورچردز مجذوب شباهت صوری بین V^1 و جبرهای کایرال CFT شد.» (ماجرای اثبات حدس مون‌شاین از فصل مربوط به عملگرهای رأسی، ص. ۵۴۹) لازم نیست این مفاهیم را کاملاً درک کنید تا لحظات اولیهٔ اکتشاف را خوب حس کنید و از آنها لذت ببرید. مثال دیگری از یک لحظهٔ مهم در ریاضیات در قالبی شخصی بیان شده است: گرهارد فرای پی برد که چنین خمی آنقدر نامتعارف است که ممکن است با حدسهای شیمورا-تانیاما-ویل مغایرت داشته باشد (از فصل «قضیهٔ آخر فرما» ص. ۶۹۲).

روشهای متفاوتی که مؤلفان مختلف مقاله‌ها برای توصیف یک مبحث، مفهوم، یا قضیه به‌کار برده‌اند، تفاوت رویکردهای اشخاص به ریاضیات را نشان می‌دهد.

هرچند هدف تعیین‌شدهٔ کتاب محدود به ریاضیات محض است، گرایش بسیار قوی ریاضی کاربردی نیز در آن مشهود است. ریاضیات قدیمی‌ترین و قوی‌ترین رابطه را با فیزیک و از آن طریق با سایر علوم دقیق و مهندسی دارد. حضور فیزیک در بیشتر قسمتهای کتاب قویاً احساس می‌شود. بعد از آن، به نظر من، آمار است. خواننده اهمیت آمار و احتمال را به‌خوبی درمی‌یابد. بهینه‌سازی و الگوریتمها هم به‌قدر کافی در کتاب مطرح می‌شود. فلسفهٔ ریاضیات و ریاضیات در فلسفه درحدی نامعمول در این کتاب مورد توجه قرار گرفته است و این توجه مایهٔ خوشوقتی است.

انتقاد

در فیلمی تخیلی دربارهٔ فرود انسان در کرهٔ مریخ، نزدیکان سه فضانوردی که در سطح مریخ پیاده شده بودند خواستند با فضانوردان صحبت کنند. پس از سلام‌کردن به آنها گفته شد که با توجه به مقدار سرعت نور باید ۹۰ ثانیه در انتظار جواب بمانند. به‌محض اینکه این ۹۰ ثانیه سپری شد و فیلم به این طریق دین خودش را به علم ادا کرد، مکالمه بی‌هیچ مکث و وقفه‌ای بین دوطرف ادامه یافت. این ماجرا شبیه مشکل رایجی است که وقتی سعی می‌کنند متن ریاضی خودبسنده باشد، پیش می‌آید (و راه‌حل ناموفق رایجی هم دارد). در این کتاب، فصلهای مقدماتی مفصلی دربارهٔ کل ریاضیات آمده که عالی است، ولی به‌نظر می‌رسد بعضی فصلها که شاخه‌های عمدهٔ ریاضیات را توصیف می‌کنند نیازمند مقدمه‌های کوچکی از همان نوع‌اند. این کتاب خودبسنده نیست و واقعاً هم نمی‌تواند باشد.

گذشته از این، خواندن کتاب بزرگ دانشنامه‌واری مانند همراه نامهٔ ریاضی پرینستن ممکن است باعث دلسردی خواننده شود چون می‌بیند که بیشهٔ کوچک او در این جنگل وسیع، چقدر کوچک است. ولی چیزی که می‌تواند مایهٔ آرامش او شود، ماهیت برخال [فرکتال] گونهٔ علم و ریاضیات است. کشف کوچکی در یک گوشهٔ کوچک، یک مفهوم یا قضیه، تفاوت بزرگی در کل تصویر پدید می‌آورد، و چیزی که از این هم بیشتر مایهٔ دلخوشی می‌شود، این است که نه به ارزش ریاضیات بلکه به ریاضیات به‌منزلهٔ یک ارزش توجه شود، ایده‌ای که این کتاب به‌شدت حامی آن است.

این کتاب ۲٫۶ کیلویی خیلی سنگین است. امیدوارم نویسندگان مقاله‌ها آنها را در وبگاه خود قرار دهند و ویراستهای بعدی کتاب به چند جلد تفکیک شود.

اندرز

اندرزهایی خطاب به ریاضیدانان جوان درکتاب آمده است ولی شایسته بود اندرزنامه‌ای هم برای ریاضیدانان میانسال و مسن‌تر بیاید. بلا بولوباش در اندرزنامهٔ زیبای خود این گفتهٔ گادفری هرلد هاردی را نقل می‌کند که در این دنیا هیچ جای دائمی برای ریاضیات زشت وجود ندارد. هاردی زمانی که این عبارت را می‌نوشت لازم دید دربارهٔ کلمهٔ «زشت» توضیح بدهد (و به همین دلیل دربارهٔ معنای «زیبایی» در ریاضیات بحث کرد) ولی کاری که امروز برای ما پرزحمت‌تر است، توضیح‌دادن کلمهٔ «دائمی» است. ما نه می‌توانیم گفتهٔ رمانتیک هاردی را به‌عنوان اندرز تجویزی بپذیریم و نه گفتهٔ بلوباش را مبنی بر اینکه در این دنیا جایی برای ریاضیدان بی‌اشتیاق و بی‌حوصله وجود ندارد. وقتی لمها و قضیه‌های خوبی ثابت می‌کنید یا به‌نحو دیگری در تحقیقات ریاضی پیش می‌روید، شور و اشتیاق زیادی نسبت به ریاضی دارید. همان‌طورکه این کتاب به‌خوبی نشان می‌دهد، ریاضیات و ریاضیدانان انواع بسیار دارند، و در این دنیا برای همهٔ آنها جا هست، جایی که، متأسفانه، شاید دائمی نباشد.

فقط یک لم خوب دیگر

پل اردوش در هنگام دریافت جایزهٔ ولف گفت: «اگر می‌توانستم لم خوبی به‌دست آورم آن را با صد تا مدال عوض نمی‌کردم.» (این گفتهٔ اردوش در واقع اقتباسی از سخن یانوش آرانی[1] شاعر مجار بود که نوشته بود: «اگر می‌توانستم خواب آرامی داشته باشم آن را با صد تا مدال عوض نمی‌کردم.») ولی ظاهراً گوستا-میتاگ-لفلر شیوهٔ دیگری داشته است. او که (به قول هاردی) بیش از هر ریاضیدان دیگر زمان خودش در ترویج ریاضیات می‌کوشید، مجبور بود گهگاه با وسوسهٔ اثبات لمها مقابله کند. خدمت به ریاضیات و جامعهٔ ریاضی نیز راههای بسیار دارد، و تهیه و تدوین این کتاب اقدامی بدیع و موفقیت‌آمیز در تقویت شالودهٔ ریاضیات است. همراه‌نامهٔ ریاضی پرینستن کتابی است که منابعی غنی و سودمند دربارهٔ ریاضیات و ریاضیدانان در اختیار خوانندگان می‌گذارد؛ دستاوردی است که تیموتی گاورز و همکارانش در ویراستاری کتاب و نیز نویسندگان مقالات آن می‌توانند به آن ببالند و ما می‌توانیم از آن لذت ببریم.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

---

* Gil Kalai، دانشگاه عبرانی در بیت‌المقدس و دانشگاه ییل در آمریکا.

1. János Arany

فصلی از یک کتاب

دوست دارم ریاضیدان باشم•

پال هالموس

ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل

فصل ۵ــ یاد می‌گیرم فکر کنم

کناره‌نشینی انتخابی

ری وایلدر[1] رئیس هر دو سازمان ریاضی مهم ایالات متحده بوده است؛ وی عضو آکادمی ملی، و مؤلف چندین کتاب و تعداد کثیری مقاله بود. وقتی ۸۰ سال داشت، پانزده سال پس از آنکه از دانشگاه میشیگان بازنشسته شد، به من گفت که ایام مطالعه‌اش (و نیز احساس فشاری که آدم را وادار به مطالعه می‌کند) قطعاً سر نیامده است: او هنوز مطالب ریاضی می‌خواند، به سخنرانیهای عمومی می‌رفت، و سعی می‌کرد با وقایع [ریاضی] همراه باشد.

سراسر عمر یک دانشمند به یک معنی، به یادگیری می‌گذرد، اما فراگیری آنچه دیگران کشفش کرده‌اند (مطالعه) نوعی یادگیری است که با نوع دیگری از یادگیری یعنی کشف بخشی از حقایق توسط خود شما (تحقیق) تفاوت بسیاری دارد. روزی از روزهای بهار یا تابستان ۱۹۳۷ مطالعاتی که انجام داده بودم مرا به نقطه‌ای رساند که مثل هر کس دیگر می‌توانستم درون تونل باریکی را ببینم، و زمان آن فرا رسیده بود که مطالعه را متوقف کنم و خود شروع به کندوکاو کنم. مطمئناً دوب جهتی را به من نشان داد که در آن جهت موضوعی برای رساله پیدا کنم (تونل)، ولی حد و حدود راهنمایی او را برای نیل به یک یا دو قضیه (اگر چنین راهنمایی در کار بوده باشد) به‌خاطر نمی‌آورم.

ایدهٔ اصلی، گسترش کارِ دوب در ریاضی‌سازیِ اصل رگلوسیگ‌کایت[2] (بی‌نظمی) فون میزس بود. «تصادفی»[3] چه معنی دارد؟ بخشی از پاسخ فون میزس آن است که دنباله‌ای از مشاهدات یک آزمایش، در یک آزمایشگاه علمی یا کازینوی قمار، شایستهٔ عنوان تصادفی نیستند مگر اینکه کلاً پیش‌بینی‌ناپذیر باشند. به زبان کازینو، پیش‌بینی‌ناپذیری به‌معنی موجود نبودن یک سیستم قماربازی موفقیت‌آمیز است. مثالی ساده اما نوعی، آزمایشی است که در آن تنها دوبرآمد ممکن (بله و خیر، روشن و خاموش، ۰ و ۱، یا شیر و خط) به‌طور منظم، یک‌بار در دقیقه تکرار می‌شود. تعریف پیشنهادی دوب برای یک سیستم قماربازی در این چارچوب، دنباله‌ای از تابعها مانند f_1، f_2، f_3، ... است که nامین آنها تابعی از n متغیر است که تنها مقادیر بله یا خیر را اختیار می‌کند. ایده این است که بازیکن روی آزمایش شمارهٔ $n+1$ شرط‌بندی می‌کند هرگاه نتیجهٔ $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ حاصل از خواندن نخستین n برآمد x_1، ...، x_n به تابع f، بله باشد؛ اگر نتیجه خیر باشد، او در آن نوبت بازی کنار می‌نشیند (دوب این کنارنشستن را با اصطلاح «کناره‌نشینی انتخابی»[1] توصیف می‌کند). حالت خاص ملموس این موضوع این است: $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ بله است اگر و تنها اگر ده تا x آخری خط باشد. فرمول‌بندی دوب از اصل مبتکرانه اما نادقیقِ رگلوسیگ‌کایت، به‌صورت یک قضیه است: تبدیلی که هر دنبالهٔ نامتناهی $x_1, x_2, x_3, \ldots$ از برآمدها را به‌دنباله‌ای مانند $y_1, y_2, y_3, \ldots$ از برآمدهای بازی مبدل می‌کند که بازیکن روی آنها واقعاً شرط‌بندی کرده است، در همهٔ قوانین احتمال صدق کند. در نتیجه، در حالت خاصی که احتمال برابر با ۱ باشد، میانگین حدی xها برابر با میانگین حدی yهاست. به‌عبارت دیگر، هیچ سیستم قماربازی «موفقیت‌آمیز»ی نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ صرف‌نظر از سیستمی که شما براساس آن تصمیم می‌گیرید که چه وقت شرط‌بندی کنید و چه وقت منتظر بمانید، شانس شما همان‌قدر است که تصمیم بگیرید در هر نوبت شرط‌بندی کنید ــ نه بیشتر نه کمتر.

1. Ray Wilder 2. Regellosigkeit 3. random

1. optional skipping

قضیهٔ دوب دربارهٔ تکرارهای مستقل یک آزمایش بود؛ مسألهٔ من این بود که ببینم در حالتی که آزمایشهای انجام‌شده لزوماً مستقل نیستند، چه می‌توان گفت. نتیجه‌ای که سرانجام از عهدهٔ اثبات آن برآمدم، از این نوع است که کناره‌نشینی انتخابی نمی‌تواند «منصفانه بودن» یک بازی را تغییر دهد. برای اینکه موضوع اندکی صریح‌تر بیان شود، فرض کنید که «متغیرهای تصادفی» x_1، x_2، x_3، ... لزوماً مستقل نیستند، اما به معنی زیر یک بازی منصفانه را توصیف می‌کنند: امید ریاضی شرطی بازیکن در بازی شمارهٔ $n+1$، به‌شرط برآمدهای x_1، ...، x_n در نخستین n بازی، همواره ۰ است. (تذکر: بنابراین، امید ریاضی شرطی کازینو نیز ۰ است؛ بازی با هر دو طرف میز منصفانه برخورد می‌کند). مثال: بازیکن هر روز روی کل مقدار بارندگی شرط‌بندی می‌کند؛ اگر بیش از ۵ میلی‌متر باران بیاید او برنده می‌شود و در غیراین‌صورت می‌بازد. مشاهدات مستقل نیستند—اگر دوشنبه باران آمده باشد، احتمال بیشتری دارد که سه‌شنبه هم باران بیاید—اما پرداخت[1] طوری درنظر گرفته می‌شود که آن را به یک قمار منصفانه تبدیل کند، بدین معنی: در یک سه‌شنبهٔ بارانی پس از یک دوشنبهٔ بارانی، پرداخت کم است و در یک سه‌شنبهٔ بدون باران پس از دوشنبه‌ای بارانی، زیان بالاست و عددها، به‌طور متوسط، طوری جفت و جور می‌شوند که امید شرطیِ بردن، صرف‌نظر از اینکه طی هفتهٔ قبل از آن چقدر کم یا چقدر زیاد بارندگی شده، ۰ باشد. تحت این شرایط بازیکنی که از کناره‌نشینی انتخابی استفاده می‌کند، ممکن است فراوانی بردهایش را افزایش دهد، اما، به‌دلیل دستکاری در مقدار پرداخت، در درازمدت از نظر مالی سربه‌سر می‌شویم.

سالها پس از آنکه رساله‌ام را نوشتم، جیمی سِوِج[2] و من در تدریس درسی دربارهٔ فرایندهای تصادفی در دانشگاه شیکاگو همکاری داشتیم (کم‌وبیش یک هفته در میان درس می‌دادیم). یکی از هفته‌ها من می‌بایست دربارهٔ سیستمهای قماربازی درس بدهم؛ سر کلاس گیر کردم و بدجوری سردرگم شدم. تا آن موقع در چندین بخش دیگر ریاضیات کار کرده بودم و احتمال دیگر جزو وجودم نبود. چون کتاب دوب، کتاب درسی رسمی ما بود، سعی کردم که با نگاه به آن از سردرگمی درآیم. در کمال حیرت، دریافتم که دوب سخاوتمندانه بحث خود دربارهٔ موضوع بالا (صص. ۳۰۹ تا ۳۱۱) را باعنوان «در تبعیت از هالموس» توصیف کرده است—مطلبی که در دههٔ ۱۹۵۰ برای من جزو دشوارترین مطالب بود، همان بود که در دههٔ ۱۹۳۰ با آن کلنجار می‌رفتم.

ترن هوایی

اینها با الهام آنی به‌دست نمی‌آیند—حداقل در مورد من چنین نبوده است. این فرایند برای من چرخ‌فلکی نه‌چندان شادی‌آور، و درواقع یک ترن هوایی[3]، بوده است، با خوشیهای نادر آمیخته با ناامیدیهای فراوان: ژوئن ۱۹۳۷: «داشتن ایده دلچسب است، حتی اگر درست ازکار درنیاید»، دو روز بعد: «داشتن ایده دلچسب‌تر است اگر درست ازکار در آید». روز بعد، با اوقات تلخی: «کسی دربارهٔ تبدیلهای اندازه‌نگهدار چیزی نمی‌داند». روزها بعد: «کار پژوهشی، ... پای درگل، ... کاش جواب را می‌دانستم، ...، هرچه بیشتر دربارهٔ موضوع رساله می‌خوانم، کمتر می‌دانم». بعدها، در اکتبر: «جلسهٔ مشاوره با دوب که برخلاف معمول، روحیه‌بخش بود، ... پیشرفت در مقالهٔ دوب، ... رساله را شروع کن!». سه روز بعد: «در رساله گیر کرده‌ام، ... چکش کاری آهسته»، و، یک هفته پس از آن: «کار را شروع کن—قضیه را تمام کن—به دوب فخر بفروش». ترن هوایی به‌همین روال در حرکت است، به یکباره در سرازیری بدی پایین می‌رود، پس از آن به سربالایی غیرمنتظره‌ای می‌رسد، و سپس، به‌تدریج که ماههای آخر سال آخر دانشجویی‌ام در حال سپری‌شدن است، به سرازیری دیوانه‌کننده، آزاردهنده، و تحریک‌آمیزی می‌رسد.

کار کردن با دوب خوب بود. او به پروپای من نمی‌پیچید، گاهی تشویقم می‌کرد، و همیشه آمادهٔ شنیدن بود. ولی، به هر حال در فردوس برین کار نمی‌کردیم و انسان بودیم—اوقاتی پیش می‌آمد که تحملش را نسبت به من از دست می‌داد، و اوقاتی هم بود که به‌نظرم می‌توانست بیشتر کمک کند. زمانهایی که درحضیض بودم، با پرسیدن بیش از حد سؤالهای ریز، با جزئیات، احتمالاً خیلی آزارش می‌داده‌ام، و در این موارد بود که شکیبایی خود را از دست می‌داد. عین کلماتی را که او به‌کار می‌برد از یاد برده‌ام، اما قطعاً مضمون حرفش را به‌خاطر دارم: «می‌دانی که قرار بوده این مقالهٔ تو باشد، اما اگر به این ترتیب پیش برویم، مقالهٔ مشترکی خواهد شد، که برایت خوب نیست».

این گفته‌ها مرا به جنبش واداشت. با شدت و حدت به‌کار پرداختم، و مدخلهای دفتر خاطراتم تقریباً لحن امیدوارانه یافت. «حالت پیوسته را بعدازظهر به‌دست آوردم، ... همهٔ روز روی رساله کار کردم. سراسر خوشی—نمی‌توانم سری لعنتی را همگرا کنم، ... مثال ناقض[1] مورد نظر را پیدا کردم، ... شاید قضیه‌ای در افق پیدا شود—قضیه‌های مجانبی امیدوارکننده به‌نظر می‌رسند، ... ناوردایی قانون اعداد بزرگ را به‌دست آوردم، ... و بازخوانی رساله را آغاز کردم—کار سختی است) ... رساله را تایپ می‌کنم و با دست تکمیل می‌کنم (تا آنجا که لازم است)—امکانات جدید را در فرایندهای تصادفی پیوسته بررسی کن».

[معنای «تکمیل با دست» را شاید امروز کسی نداند؛ آن روزها این کار بخشِ اجتناب‌ناپذیر تایپ مطالب ریاضی بود. اگر خوش‌شانس بودید، ماشین تایپ شما علامت به‌علاوه و علامت مساوی داشت، اما با حروف یونانی و علامتهای نامساوی، بگذریم از انتگرالها و دیگر نمادهای عجیب و غریب که ریاضیدانها با آنها انس دارند، کسی آشنا نبود. شک دارم که امروز ماشینهای تایپی تولید شوند که دکمهٔ نیم‌فاصله نداشته باشند؛ آن زمان چنین چیزی از تجملات پرهزینه بود. در نتیجه، تایپ ریاضی عبارت بود از تایپ کردن کلمات [انگلیسی] و گذاشتن جای خالی کافی برای حروف دیگر زبانها و علامتهای عجیب و غریب—پس از آنکه این کار انجام می‌شد، به صفحات قبلی باز می‌گشتید و با قلم، اندیسها و بقیهٔ چیزهایی را که از آنها گذشته بودید، وارد می‌کردید. وقتی حدود ده سال پس از نوشتن رساله‌ام، کتاب نظریهٔ اندازهٔ خود را تایپ کردم، چند صد صفحهٔ اصل متن و پنج کپی آن، یعنی شش تا چند صفحه را با دست تکمیل کردم—صرف‌نظر از دستگاه کپی‌برداری (فوتواستات[2]) گران‌قیمت و نامطلوب، هیچ وسیله‌ای برای تهیهٔ شش کپی نبود].

وجد و سرور من پیش از هنگام بود: چیزی که آن را مشتاقانه رساله می‌نامیدم، واجد شرایط نبود. بعدازظهر یک روز ژانویه، دفتر خاطراتم حکایت

1. Payoff 2. Jimmie Savage

۳. roller coaster، قطاری در پارکهای بازی که روی ریلِ پرفراز و نشیبی حرکت می‌کند.—م.

۱. Gegenbeispiel؛ کلمهٔ آلمانی برای مثال ناقض.

2. photostat

از این می‌کند که «رویارویی نهایی در مورد رساله با دوب، نشانشان می‌دهم، حتی اگر ده سال طول بکشد! سطحی است؟ خیال کردید؟!». اختلاف نظر حرفه‌ای، لطمه‌ای به دوستی ما نزد، اواخر همان هفته دفتر خاطراتم می‌گوید که «شکست‌دادن جو در یک رشته بازی اسکواشِ خیلی خوب».

پس از آن اوضاع بهتر شد. چند یادداشت پشت سر هم در دفتر خاطرات: «دارم به‌جایی می‌رسم؟، . . . همهٔ روز کمی کار کردم ــ نگران نیستم چون از کارکردن لذت می‌برم، . . . ساعت هشت‌ونیم صبح گیر کردم ــ ساعت چهارونیم بعدازظهر مشکل را برطرف کردم . . . کار امروز خوب پیش رفت ــ دست و پایت را جمع کن و با سرعت پیش برو؛ امروز کار خوب بود ــ دو مطلب دیگر به رساله اضافه کردم ــ روی مثال ناقض کار کن، تمامش کن، . . . شاد و خوش‌بین، اوضاع عالی است». در اواسط مارس (۱۹۳۸) چهار روز را صرف کپی کردن آنچه دوباره امید داشتم رساله‌ام باشد، کردم و بعد آن را به جو دادم. روز بعد: «جو از پانوشتها دلخور است»، اما، یک هفته بعد: «در حد یک پی. اچ. دی هستم».

آیا احساس خود را دربارهٔ پدیدهٔ ترس‌آور و در عین حال باشکوهِ فراز ـ فرود ـ فراز در تحقیق خوب بیان کرده‌ام؟ اول به هیجان می‌آیید چون مسأله را فهمیده‌اید و مشتاق‌اید که از عهدهٔ حلش برآیید. کلی نکات ریز هست که باید روشن شوند و اینها شما را مشغول می‌کنند و سبب می‌شوند که فکر کنید دارید به‌جایی می‌رسید ــ و سپس گیر می‌افتید. به‌کار ادامه می‌دهید، هر هفته (هر روز؟ هر ساعت؟) مسیر متفاوتی را می‌آزمایید، دور خود می‌چرخید، وقتی غذا می‌خورید، راه می‌روید، خواب می‌بینید، دربارهٔ آن فکر می‌کنید، اما می‌بینید در یک وضع ثابت هستید و فکر می‌کنید هیچ اتفاقی نمی‌افتد.

وقتی به‌تدریج دریافتم که اوضاع از چه قرار است، کم‌کم برایم روشن شد که نمی‌توانم به‌طور مستقیم با قضیه‌ها در کلی‌ترین شکل نهاییِ آنها، رویارویی کنم ــ باید سعی می‌کردم که آنها و برهانها را به‌ساده‌ترین حالتها تجزیه کنم. به ساده‌سازی مسأله ادامه دادم. فضاهای اندازه را مجموعه‌های متناهی در نظر گرفتم؛ تابعهای کناره‌نشینی انتخابی را آن‌قدر محدود گرفتم که هر یک از آنها تنها وابسته به یک متغیر باشد؛ به‌جای بینهایت ۲، و به‌جای دنباله‌های همگرا، مقدارهای ثابت قرار دادم. نیاز به این نوع کارها برای هر کس که در عمرش تحقیق کرده است، بدیهی است. همهٔ اینها در این گفتهٔ پولیا مستتر است: اگر نمی‌توانید مسأله‌ای را حل کنید، پس مسألهٔ ساده‌تری وجود دارد که نمی‌توانید آن را حل کنید ــ پیدایش کنید!

سرانجام آن را یافتم، به‌چیزی رسیدم که برایم کاملاً روشن بود و از طریق آن توانستم لب مطلب را درک کنم ــ و این اوج پیشرفت بود. فرود پایان یافته بود و من در حال صعود بودم. باقی (برای من در آن زمان، و به‌نظرم همیشه برای همه کس) صرفاً کار بود ــ کار فرح‌بخش، ثمربخش، کمرشکن. فشرده کردن برهانها، ساده‌کردن تکنیکها، گسترش نتیجه‌ها، درو کردن فرعها، و پایان کار بانهایتِ افتخار. یک ماه بعد، نسخهٔ رسمی را تایپ کردم و به ادارهٔ تحصیلات تکمیلی تحویل دادم؛ نسخه‌ای دیگر از آن را، که عین اولی بود، برای چاپ در مجلهٔ دوک[1] از طریقِ پست ارسال کردم. عنوان رساله، توصیفی و اندکی نامتعارف بود: «ناوردایی برخی تبدیلهای تصادفی: نظریهٔ ریاضی سیستمهای قمار». البته فخر و شادمانی چند روزی، شاید یک هفته، بیشتر دوام ندارد و پس از آن این احساس به آدم دست می‌دهد که «چرا در چنین مدت طولانی نتوانسته‌ام کاری انجام دهم؟».

1. *Duke Journal*

دریغ از شغل

من هر دقیقه از سال آخر دانشجویی را صرف رساله نکردم ــ اما اندازهٔ مجموعهٔ دقایقی که مشغول این کار نبودم نزدیک صفر بوده است.

در آغاز آن سال تحصیلی، سپتامبر ۱۹۳۷، برای نخستین بار در همایش انجمن ریاضی امریکا (AMS) ــ در استیت کالج[1]، پنسیلوانیا، شرکت کردم. هیچ کس را نمی‌شناختم، همه چیز عجیب بود، چیز چندانی یاد نگرفتم و احساس تنهایی کردم.

هم‌چنان‌که سال سپری می‌شد، با بازیهای مکرر اسنوکر و صرف ساعتها وقت روی کتاب باناخ، آرامش می‌یافتم. به‌دومی اعتیاد پیدا کرده بودم. در دفتر خاطراتم چندین یادداشت از این گونه آمده است: «همهٔ روز را باناخ خواندم، . . . من دیوانهٔ آنم، . . . باناخ خیلی ساده نیست، . . . صبحْ باناخ خواندم و به کمک هربی وان[2] بر مشکلات آن فائق آمدم».

بله، هربی وان. او مدرسی جوان و هنوز جاه‌طلب بود که در آن اواخر از میشیگان آمده و توپولوژی‌دان بود. با هم خیلی دربارهٔ ریاضیات، و سایر چیزها، حرف می‌زدیم، و دوازده سال بعد در نوشتن یک مقالهٔ کوچولوی دوصفحه‌ای، «مسألهٔ ازدواج»، با هم همکاری کردیم. این مقاله ما را در محافل ترکیبیات‌دانان به شهرت رساند و شاید پرارجاع‌ترین مقاله‌ای است که نام مرا بر خود دارد. در مسألهٔ ازدواج فرض می‌شود که هر یک از اعضای مجموعه‌ای شاید نامتناهی از پسران با مجموعه‌ای متناهی از دختران آشنا می‌شوند؛ مسأله خواستار شرایطی اضافی است که ازدواج هر پسر را با یکی از دخترانی که با آنها آشنا شده است، میسر گرداند. سهم هربی صورت‌بندی برهانی استقرایی در حالت متناهی بود که از هر برهان قبلی روشن‌تر بود و سهم من یک برهان توپولوژیک از طریق قضیهٔ تیخونوف برای حالت نامتناهی بود. هربی سپس یک نتیجهٔ مبتکرانهٔ عمومی‌تر به‌دست آورد که آن را «مسألهٔ پرآوازهٔ راهبان»[3] نامید و به‌عنوان زمینهٔ تاریخی آن اشاره به بخشی از کتاب داستانهای خنده‌آور[4] بالزاک، «راهبه‌ها و نوچه‌ها»، کرد که اصلاً نوشته نشده است. این اشاره خوانندگان زیادی را تحت تأثیر قرار داد؛ من هنوز هم گهگاه نامه‌ای دریافت می‌کنم که از من می‌پرسند چگونه می‌توان آن مقاله را پیدا کرد.

در فهرست خواندنیهای کاری من در سالهای ۱۹۳۷ ـ ۱۹۳۸ چندین مقالهٔ نیکودیم قرار دارد که او پشت سرهم دربارهٔ آنچه امروزه قضیهٔ رادون ـ نیکودیم نامیده می‌شود چاپ می‌کرد و همچنین نظریهٔ کوانتومی[5] ژولیا[6]، و هر شمارهٔ تسنترالبلات[7] که در می‌آمد، و چند نفری از ما به‌خاطر اشتیاق برای کسب آخرین خبرها، تقریباً آن را از چنگ هم می‌قاپیدیم.

کار مهم و بسیار وقتگیر دیگری بجز رساله، تایپ کردن تقاضانامه‌های کار بود. دستگاه زیراکس وجود نداشت و خدمات منشی دردسترس دانشجویان تشنهٔ تحصیلات تکمیلی نبود. من ۱۲۰ نامهٔ تقاضا را تایپ کردم و همه را با پست فرستادم و هر روز چندبار صندوق پستی خود را برای دریافت پاسخهایی که نمی‌رسید، وارسی می‌کردم. چندتایی پاسخ دریافت کردم ــ بیش از دوتایی که دفعهٔ قبل که این داستان را تعریف می‌کردم به‌خاطر آوردم. اما نه خیلی

1. State College 2. Herbie Vaughan
3. the celebrated problem of the monks 4. *Droll Stories*
5. *Théorie Quantique* 6. Julia 7. *Zentralblatt*

بیشتر ــ دفتر خاطراتم خبر از پنج تا می‌دهد (یا اگر یادداشت ناخوانایی اشاره به پاسخی داشته باشد، شش تا). دفتر خاطراتم چندین‌بار اشاره به هاروارد دارد: در ۸ مارس؛ «منتظر نامه از هاروارد بمان»؛ در ۱ آوریل: «بی‌خبری از هاروارد خبر خوبی است»؛ و سرانجام، در ۷ آوریل، «پروفسور والش[1] اظهار تأسف می‌کند». بعداً در ماه آوریل: «کورسویی از میشیگان»؛ سه روز بعد: «میشیگان؟»؛ در ۶ ماه مه: «منتظر نامه باش»؛ در ۱۱ ماه مه «هنوز شغلی نیست ــ منتظر نامه باش»؛ در ۲۰ مه: «پروفسور هیلده‌برانت[2] (از میشیگان) اظهار تأسف می‌کند». کلمبیا، کانزاس، و دانشگاه اوهایو هم اظهار تأسف کردند. تعداد کل پیشنهادهای کار: صفر.

به‌دنبال به‌دست آوردن شغل، البته، به نشست بهارهٔ AMS در شارلوتسویل[3] رفتم، و به‌عنوان عضو تازه‌ای از انجمن، از امتیاز ایراد یک سخنرانی ۱۰ دقیقه‌ای دربارهٔ رساله‌ام برخوردار شدم. خبرگزاری آسوشیتدپرس معمولاً چند خبرنگار را به همایش اعزام می‌کرد تا ببیند که این ریاضیدانها چه می‌کنند، اما خبرنگاران بدجوری از عنوانهای سخنرانیهای مهم دلسرد شدند ــ آنها معانی کلمات را نمی‌دانستند. درمورد سخنرانی من هم تا وقتی که به نیمهٔ دوم عنوان سخنرانی ــ بخش مربوط به سیستمهای قمار ــ نرسیده بودند، وضع از این گونه بود. و پس از این بود که آنها به موضوع علاقه پیدا کردند. کلاین[4] دبیر انجمن بود و از من پرسید که آیا مایلم با من مصاحبه شود یا خیر. پاسخ البته مثبت بود؛ قدری به من برخورد، اما خُب چرا مصاحبه نکنم؟ جالب خواهد بود و البته، شاید در حل مشکل شغلی مؤثر باشد. من و خبرنگاران گفتگوی دلپذیری داشتیم؛ آنها خبر کوتاهی را از طریق آسوشیتدپرس مخابره کردند؛ بیشتر روزنامه‌های کشور به‌راحتی از کنار آن گذشتند. اما برای دیلی ایلینی[5]، در خود ایلینوی، این خبر، خبر داغی بود، نه فقط از لحاظ «موفقیت بچه‌محل» بلکه همچنین به دلیلی دیگر. قضیه این بود که شهر شمپین در حال مبارزهٔ دوره‌ای علیه فساد بود؛ اولیای شهر مخالف شراب، زن، و ساز و آواز ــ و در ضمن قماربازی ــ بودند. مصاحبهٔ من درست به‌موقع بود؛ اسم من در تیتر خبر چشمگیر بود: «**نمی‌توان برنده شد، این را پی. آر. هالموس می‌گوید**».

امتحان نهایی دکتری فرمالیته بود، و مانند هرکس دیگر، به‌آسانی آن را گذراندم. خوشحال بودم و به خود می‌بالیدم؛ هنوز هم خوشحال و سربلندم که دانشجوی دوب بوده‌ام: [ضمناً من نخستین دانشجوی او بودم. او چهار دانشجوی دکتری به فاصله دو یا سه سال از هم داشت و بعداً وقفه‌ای پیش آمد ــ چندسالی گذشت تا اینکه او دوباره شروع به گرفتن دانشجوی دکتری کرد. دومی، سومی، و چهارمی امبروز، کیبی[6]، و بلک‌ول[7] بودند]. بلافاصله پس از اینکه امتحان تمام شد، نفس راحتی کشیدم و فکر کردم «دوباره هرگز! دیگر در همهٔ عمرم مجبور نیستم امتحان دیگری از سر بگذرانم!» ــ و هنوز هم بعضی از صبحها که از خواب بیدار می‌شوم احساس خوبی دربارهٔ آن دارم. در مراسم فارغ‌التحصیلی شرکت نکردم؛ چنین مراسمی را قبول ندارم. گواهینامهٔ دکتری را به‌خواست من با پست فرستادند و آن را در میان اسنادم گذاشتم. هنوز هم آن را دارم، اما قاب گرفته و نصب‌شده بر دیوار نیست ــ بین اسناد قدیمی لای پرونده‌هاست.

1. Walsh 2. Hildebrandt 3. Charlottesville 4. J. R. Kline
5. *Daily Illini* 6. Kibbey 7. Blackwell

سالی که من دکتری گرفتم، ۶۸ نفر در ایالات متحده درجهٔ دکتری در ریاضیات را دریافت کردند، نام آنها در مجلد ۱۹۳۹ بولتن *AMS* آمده است. دوازده نفر از این ۶۸ نفر از دانشگاه ایلینوی بودند. یکی از آنها نتزورگ بود؛ گمان می‌کنم که صرف‌نظر از او من بهترین نفر در میان این دوازده نفر بودم. آن همه تقاضانامه برای پژوهشیاری، دستیاری، و شغل فرستادم و هیچ یک نصیبم نشد، حال آنکه بقیه همگی شغلی به‌دست آوردند. فکر این مسأله هنوز هم کمی عذابم می‌دهد.

روی پای خودم

سال بعد، تقریباً از ژوئیهٔ ۱۹۳۸ تا ژوئیهٔ ۱۹۳۹، نوعی دورهٔ فترت بود. زندگی ادامه یافت، اتفاقاتی افتاد، اما آن موقع این طور به‌نظرم می‌رسید، و هنوز هم با نگاه به گذشته این‌طور به‌نظرم می‌رسد، که باید تمام تلاشم را می‌کردم تا وضع از آنچه بود بدتر نشود.

در اوایل ماه اوت عمل جراحی کوچکی روی پای معیوبم انجام شد («کوچک» کلمه‌ای است که جراح برای آن به‌کار برد؛ دو ماه دردِ اولیه پس از جراحی و به دنبالش ناراحتی و نگرانی، به‌نظرم می‌رسید نیازمند اصطلاح پرهیبت‌تری باشد). در دورهٔ نقاهت توصیه شد که از عصا استفاده کنم ــ و از آن به بعد همیشه عصا به‌دست می‌گیرم. هنوز هم اولین عصایم را دارم؛ سابیده و صاف‌شده، رنگ‌باخته، اما به‌قدر یک عصای نو خوب است.

بعداً در ماه اوت دو مورد از آخرین خبرهای مربوط به شغل را دریافت کردم. پاسخ منفی از دانشگاه دوک و پاسخ مثبت از ایلینوی. (دوب، سالها بعد، به من گفت که گرگن[1] مدیر گروه دوک به او گفته بود که چرا مرا استخدام نکرده‌اند. گفته بود: «من پناهنده‌ها را نمی‌خواهم»). اینکه پاسخ مثبتِ ایلینوی از کجا ناشی شده، حالا به‌نظر کمی مبهم می‌رسد ــ تا حدی از روی ترحم، شاید جایزه‌ای برای تسلی‌دادن به من؟ من نمی‌خواستم دندان اسب پیشکشی را بشمارم، اما دفتر خاطراتم به‌طرز عجیبی نشان از غم دارد؛ این دفتر فقط حقایق را ضبط کرده است. حقوق سالانه ۱۸۰۰ دلار بود و کار موظف ۱۵ ساعت تدریس در هفته. اینها شرایط استانداردی بودند. و، چه باشکوه! ــ به مقصود رسیده بودم، حالا بالغ شده بودم؛ اجازه داشتم حسابان تدریس کنم.

کلاسها هر یک شخصیتی برای خود دارند. در بعضی همکاری هست، بعضی عبوس و بی‌روح‌اند، بعضی دوستانه‌اند، و بعضی ملال‌آور. دو تا از کلاسهایم در پاییز ۱۹۳۸ در زمینهٔ مثلثات بود. هر سه‌شنبه و پنجشنبه، دو درس مثلثات پشت سرهم می‌دادم: یکی ۹ صبح و دیگری، پس از ده دقیقه تنفس برای سیگارکشیدن، در ساعت ۱۰. کلاس ساعت ۹ را دوست داشتم. از کلاس ساعت ۱۰ متنفر بودم. تفاوت بین کلاسها را، حداقل تا حدی، می‌شد تقصیر من دانست. در کلاس ساعت ۹ سرحال بودم و کنجکاو که توضیحاتی که آماده کرده بودم، چطور از کار در می‌آیند. لطیفه می‌گفتم و آنها می‌خندیدند، یکدیگر را دوست داشتیم. در ساعت ۱۰ کمتر سرحال بودم، و توضیحات را خیلی روان‌تر و سریع‌تر می‌دادم، همان لطیفه‌ها را هم می‌گفتم، ولی آنها به من زل می‌زدند. از هم خوشمان نمی‌آمد.

امروز پانزده ساعت تدریس کار سنگینی به‌نظر می‌رسد ولی ما آن موقع یاد گرفته بودیم که با آن سر کنیم. روزهایی که سه کلاس پشت سر هم داشتم، غرولند می‌کردم ــ این هم شد کار! اما باز هم وقت برای تحقیق داشتم. وقت

1. J. J. Gergen

زیادی نداشتم، اما کمی داشتم، و البته با توجه به اینکه عضو کمیته‌ای نبودم و کار اجرایی نداشتم، با وجود ۱۵ ساعت تدریس، بیشتر از آنچه بعدها مقدور می‌شد، وقت برای تحقیق در اختیارم بود.

تا آنجا که به تحقیق مربوط می‌شود، روی پای خودم بودم، که وضعیتی ترسناک است. دوب البته همچنان دوروبرم بود، اما او دیگر «معلم» من نبود—تنها دوست و همکاری بود اندکی مسن‌تر و خیلی خردمندتر. باب مارتین هم آن دور و بر بود، و در آن هفته‌ها که می‌خواستم همگرایی سریهایی را ثابت کنم، به من کمک می‌کرد و من پشت سر هم ثابت می‌کردم که سری مورد نظر، جمله‌به‌جمله مغلوبِ یک سری همساز است. امبروز آن طرفها نبود؛ او یک کار موقتی را در آلاباما پذیرفته بود. ما مکاتبهٔ زیادی با هم داشتیم—دو یا سه نامهٔ طولانی در هر هفته—اما این مکاتبات نمی‌توانست جای مکالمهٔ رو در رو را بگیرد.

یادداشتهای دفتر خاطرات در آن سال خیلی بیشتر از آنکه احساسِ ندانستنِ پاسخ و بودن در «ترن هوایی» مربوط به آن را بازتاب دهد، گویای احساسی عذاب‌آورتر یعنی احساس ندانستن پرسش است. رشته‌ای از این یادداشتها (که از ژوئیه تا دسامبر ادامه دارد) از این نوع‌اند: «ایده‌ای برای تحقیق پیدا کردم—امیدوارم که به نتیجه برسد. همهٔ روز دربارهٔ جزئیات مسأله فکر کردم. فوق‌العاده خوشبینم. گمان می‌کنم چیزی پیدا کرده‌ام. حالا اگر فقط جواب را پیدا کنم. . .، همهٔ روز را محکم به مسأله چسبیدم، اما ناامید نیستم، . . . محکم به تحقیق بچسب: تردیدهای بدبینانه دربارهٔ ریاضیدان بودنم، . . . در تحقیق پیش می‌روم اما بعداً متوجه می‌شوم سرابی بیش نیست. دربارهٔ آیندهٔ تحقیق نگرانم . . . مسألهٔ تحقیق را کنار می‌گذارم . . . نابرابری در شکل بهتر؛ هنوز کامل نیست، . . . با دوب گپ بزن: راهنمایی خوبی دربارهٔ نابرابری می‌گیرم. کار می‌کنم، وجد و خوشی. زندگی زیباست، . . . بیهوده با سریهایم ور می‌روم. تحقیقم نومیدکننده است، اما هنوز دست بردار نیستم، . . . بعدازظهر دیگری را بیهوده صرف نابرابری‌ام کردم، . . . روزی دیگر و عذاب‌آور. نتایج شش ماه کار گذشته را بنویس: شش صفحه مطلب سطحی».

لابه‌لای اینها، یادداشتهایی حاکی از جستجوی راه برون‌رفت دیده می‌شود: «نمی‌توانم در روز بیش از چهار ساعت ریاضی بخوانم. [هنوز هم نمی‌توانم. کسی می‌تواند؟] . . . نگران آیندهٔ ریاضی خودم هستم؛ جبر را انتخاب کن. مبحث مفرحی است. همه‌جا مثال ناقض بساز، . . . فکر می‌کنم که امسال مقدار زیادی ریاضی یاد می‌گیرم. . . . (دوباره!) تصمیم گرفته‌ام که حوزهٔ کارم را عوض کنم و می‌خواهم ببینم که آیا نمی‌توانم در جایی از ریاضیات که واقعاً ریاضیات باشد، تحقیق کنم: فضای هیلبرت و موضوعات وابسته. پل لوی مرده‌شورش ببرد. . . چه لذتی دارد خواندن نظریهٔ طیفی[1] وینتنر[2]. . . یک روز لعنتی دیگر تنها با نظریهٔ طیفی وینتنر برای شیرین کردن زندگی. . . فکر می‌کنم حوزهٔ کارم را یافته‌ام، اما سورتمه‌سواری دشواری خواهد بود. امیدوارم که محورِ دانش، ارشمیدسی باشد».

من نظری داشتم که ابتدا ناخودآگاه اما بعداً سنجیده بود و آن اینکه برای جوان ماندن [در ریاضیات] باید به کرات حوزهٔ کار را عوض کرد. من هرگز جبردان نشدم، اما از نظریهٔ اندازه (که در نظر من احتمال و نظریهٔ ارگودیک را در بر می‌گیرد) به سراغ فضای هیلبرت، بعد به سروقتِ منطق جبری، و سپس دوباره به سراغ فضای هیلبرت رفتم، و گهگاه کمی به گروههای توپولوژیک و آمار هم می‌پرداختم. پس از حدود سی سال، حول و حوش ۱۹۶۸، تشخیص دادم که محتملاً نخواهم توانست دوباره تغییر گرایش دهم، و حدوداً از همان زمان شروع به نوشتن مقاله‌های توصیفی بیشتر (نظیر «ده مسأله در فضای هیلبرت») و اندرز نامه‌هایی (نظیر «چگونه ریاضی بنویسیم») کردم.

1. Spektraltheorie 2. Wintner

پایان یک دوره

همهٔ کارم آموزش و تحقیق نبود. آن روزها هنوز هم، حداقل کمی، وقت برای تمرین پیانو داشتم، و وقت برای خواندن، دیدن چند نمایش، و تقاضای مداوم کار.

لازم بود چیزی را که پینکرله[1] نوشته بود بخوانم؛ برای اینکه این کار را بکنم، یک روزِ طاقت‌فرسا را با یک فرهنگ ایتالیایی و کتاب گرامر و یک ایتالیایی «تحصیل کرده» گذراندم. دربارهٔ «خطهای ژولیا»، خانواده‌های نرمال، و قضیهٔ پیکار مطالعه کردم؛ سعی کردم چیزهایی دربارهٔ معادلات انتگرالی یاد بگیرم، و وقت زیادی صرف خواندن کتاب اوسپنسکی[2] درباره احتمال کردم. بین این کارها، چندین کتاب از چارلی چن[3]، اروپای بریفو[4]، داشیل همت[5]، نرو ولف[6]، فقه‌اللغه (آیا در آن زمان زبانشناسی نامیده می‌شد؟)، دوروتی سایرز[7]، ساکی، الری کویین[8] جنگل آپتون سینکلر[9]، و فضا، زمان، مادهٔ هرمان وایل را خواندم.

بعدازظهرهای شنبه از رادیو به توسکانینی[10] گوش می‌کردم و به‌دیدن «رودیگور»[11] (آماتورهای محلی)، «ناپدیدشدن بانو»[12] (یک فیلم کلاسیکِ هیچکاک)، الک تمپلتن[13] (پیانو نواز-طنزپرداز-تقلیدگر، که به‌معنایی پیش‌درآمد ظهور ویکتور بورگه[14] بود)، و «توهم بزرگ» (فیلم مورد علاقه‌ام—آن را ۱۴ بار دیده‌ام) رفتم. شبها تا دیر وقت بیدار بودم—نیمه‌شب، یا ساعت ۱، ۳، یا حتی ۵ صبح به رختخواب می‌رفتم، یا حتی از خواب صرف‌نظر می‌کردم.

و نامه تایپ می‌کردم. نمی‌دانم آن سال چند تا تقاضانامه پست کردم، اما خیلی بود. هم برای چیزهای فوق‌العاده خوب درخواست می‌دادم (پژوهشیاری شورای ملی پژوهش)[15]، چیزهای خوب (مدرسی بنجامین پیرس[16] در هاروارد)، و هم برای چیزهای معمولی (هر نوع شغل تدریس در هرجا). آن سال جوابهای بیشتری دریافت کردم، اما همهٔ آنها نه، نه، و نه بود؛ سیل جوابها از نیمهٔ فوریه به بعد، و در سراسر بهار سرازیر بود. شورای پژوهش در اوایل بهار نه گفت، و هاروارد چند روز بعد؛ اوایل ماه مه، کورسوی امیدی از کالیفرنیا پیدا شد و به یکباره فروکش کرد. دفتر خاطراتم مرتباً اشاره به نامه‌ها دارد. «امروز صبح نامه‌های زیادی رسید؛ هیچ کدام دلپسند نبود، . . . هیچ نامه‌ای ندارم، . . . زندگی در هاله‌ای از عدم اطمینان خوشایند نیست. . . مطمئناً آرزو دارم کاری گیرم بیاید. . . . خبرهای بد از سیاتل . . . . همهٔ بعدازظهر را نامه تایپ کردم . . .».

1. Pincherle 2. Uspensky 3. Charlie Chan 4. Briffault
5. Dashiell Hammett 6. Nero Wolfe 7. Dorothy Sayers
8. Ellery Queen 9. Upton Sinclair 10. Toscanini 11. Ruddigore
12. The lady vanishes 13. Alec Templeton 14. Victor Borge
15. National Research Council Fellowship 16. Benjamin Peirce

سرانجام، در اواسط ماه مه، گشایشی حاصل شد. شغلی موقت در کالج ایالتی اورگان (در آن زمان به این نام نامیده می‌شد) در کوروالیس[1] دایر شد، و، البته با جدیت تمام دنبال آن رفتم. هیچ مصاحبه‌ای در کار نبود ــ بسیار دور و بسیار پرهزینه بود ــ اما چندین نامه و چند تلگراف ــ و در اواسط ژوئن شغل را به‌دست آوردم. ولی یک ماه بعد در نیمهٔ ژوییه، با پوزش از آن استعفا کردم!

جریان از این قرار بود که امبروز در ۷ ژوییه خبری از «مؤسسه» دریافت کرد (مؤسسهٔ به‌طور مطلق، مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در پرینستن بود) ــ او فرد ذخیره برای یک شغل پژوهشیاری در آنجا بود و نامزد اول از قبول شغل سرباز زده بود. به او گفتم، نباید این کار را با من بکنی، اگر تو می‌خواهی به مؤسسه بروی، من هم هرطور شده خواهم آمد. (در ضمن، امبروز با این روایت من از ماجرا موافق نیست. او می‌گوید که فرد ذخیره نبوده است. و به هر حال، ما از کجا خبر داشتیم که او ذخیره بوده است؟ ــ این چیزها معمولاً به اطلاع شخص ذی‌نفع نمی‌رسد. شاید حق با او باشد، اما من ماجرا را آن گونه که به‌خاطر می‌آورم، نقل می‌کنم. اطلاع ما از ماجرا [ذخیره‌بودن امبروز] شاید تنها به‌علت تأخیر در زمان اعلام بود ــ پذیرش برای سمتهایی از قبیل پژوهشیاری معمولاً در اول آوریل اعلام می‌شد ــ و شاید از روی یادداشت پوزش‌خواهانهٔ همراه‌نامه ــ که «نمی‌شد شما را زودتر از این دعوت کنیم چون ...». اما واقعیتهای اصلی مورد مناقشه نبودند: امبروز دعوت‌نامه را دریافت کرده بود، و من مصمم بودم که اگر لازم باشد حتی در محل زندگی او اتراق کنم).

1. Corvallis

نقشه‌های نسنجیده‌ای کشیدم و بعداً از همه صرف‌نظر کردم؛ امید خود را حفظ کردم اما بعداً مأیوس شدم. هزینه‌های احتمالی را محاسبه کردم و به پدرم نوشتم: می‌توانم ۱۰۰۰ دلار از شما قرض کنم؟ در ساختمان بخش ریاضی، همه از امیدواریها و نقشه‌های من خبر داشتند. سام کمپل[1] (همدورهٔ من در تحصیلات تکمیلی که همیشه او را با مهر به یاد خواهم داشت) پیشنهاد ۳۰۰ دلار قرض به من داد (پیشنهادی که با گردش حوادث، نیازی به پذیرفتن آن پیدا نکردم). پدرم وارد قضیه شد. به اورگان نامه نوشتم و تقاضای کناره‌گیری کردم. با آن موافقت شد. ماه بعد و بعد از آن با هیجان به جمع کردن بساط زندگی‌ام در ایلینوی پرداختم. اجارهٔ آپارتمانم را واگذار کردم (آسان بود. آپارتمان به زحمت یافت می‌شد)؛ دوچرخه‌ام را فروختم؛ همهٔ کتابها و یادداشتهایم را بسته‌بندی کردم، و، در ۲۵ اوت ۱۹۳۹، چهار روز پیش از دهمین سال نخستین ورودم به ایالات متحده، سوار قطار عازم پرینستن شدم (فارغ‌التحصیلان جوان دکتری اتوموبیل نداشتند). نُه روز بعد جنگ جهانی دوم آغاز شد.

******

• ترجمهٔ فصل پنجم (صفحات ۷۴ـ۸۳) از کتاب

Paul R. Halmos, *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag (1985).

ترجمهٔ این کتاب به‌صورت پاورقی در نشر ریاضی چاپ می‌شود.

1. Sam Campbell

جدی نگیرید

• مهندس گمان می‌کند که معادلاتش تقریبی از واقعیت است. فیزیکدان فکر می‌کند که واقعیت تقریبی از معادلات اوست. ریاضیدان، اما، کاری به واقعیت ندارد.

• ریاضیات عبارت است از گذاشتن اسم واحد روی اشیای متفاوت. (هانری پوانکاره)

• فلسفهٔ نوعی بازی با عینیّات است بدون آنکه قاعده‌ای در کار باشد؛ ریاضیاتْ بازی با قواعد است بدون اینکه عینیّتی در کار باشد.

نحوهٔ اشتراک مجلات مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی ۱۰مجلهٔ تخصصی در رشته‌های متنوع علمی منتشر می‌کند.

راهنمای اشتراک سالیانه				
نام مجله	تعداد شماره در سال	بهای هر شماره (ریال)	هزینهٔ اشتراک + هزینهٔ ارسال (ریال)	
			تهران	شهرستان
نشر دانش	۶	۱۵۰۰۰	۱۰۸۰۰۰	۱۱۰۰۰۰
زبان‌شناسی	۲	۲۰۰۰۰	۴۶۰۰۰	۴۷۰۰۰
معارف	۳	۲۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	۷۲۰۰۰
باستان‌شناسی و تاریخ	۲	۲۰۰۰۰	۴۶۰۰۰	۴۷۰۰۰
نامهٔ ایران باستان	۲	۳۰۰۰۰	۶۶۰۰۰	۶۷۰۰۰
پژوهشهای ایران‌شناختی	۲	۴۰۰۰۰	۸۵۰۰۰	۸۵۰۰۰
فیزیک	۴	۱۵۰۰۰	۷۲۰۰۰	۷۴۰۰۰
شیمی	۳	۱۵۰۰۰	۵۵۰۰۰	۵۷۰۰۰
نشر ریاضی	۲	۱۵۰۰۰	۳۶۰۰۰	۳۷۰۰۰
بهداشت جهان	۴	۱۳۰۰۰	۶۵۰۰۰	۶۶۰۰۰

لطفاً مبلغ اشتراک مجلهٔ درخواستی را به حساب سیبا ، شمارهٔ ۲۱۷۲۴۳۹۰۰۱۰۰۶، بانک ملی ایران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز و اصل رسید بانکی را به همراه فرم تکمیل شدهٔ اشتراک به نشانی زیر ارسال کنید:

تهران، خیابان شهید بهشتی، خیابان خالد اسلامبولی، نبش کوچهٔ دهم، پلاک ۵۰ ،کد پستی ۱۵۱۱۷۸۶۹۱۱، صندوق پستی ۴۷۴۸-۱۵۸۷۵ ، مرکز نشر دانشگاهی، امور مشترکین تلفن ۶۶۴۰۴۰۱۱ دورنگار ۶۶۴۱۰۷۶۱

فرم اشتراک

در این قسمت چیزی ننویسید

در صورت تغییر نشانی مراتب را بلافاصله به بخش اشتراک اطلاع دهید

نام مؤسسه، سازمان، شرکت .....

نام خانوادگی .....

نام .....

میزان تحصیلات ..... رشتهٔ تحصیلی .....

متقاضی اشتراک مجله ..... از شماره ..... تا شماره ..... دوره ..... از هر شماره ..... نسخه

شمارهٔ اشتراک..... (در صورتی‌که قبلا" مشترک این مجله بوده‌اید شمارهٔ اشتراک خود را در این قسمت قید کنید)

نشانی .....

کدپستی ..... صندوق پستی ..... پست الکترونیکی .....

تلفن ..... همراه .....

شمارهٔ فیش بانکی..... مبلغ به ریال ..... نام بانک ..... شعبه .....

تاریخ واریز.....

امضاء متقاضی و تاریخ درخواست

سامانهٔ نشر مجلات علمی کشور

(سـ نـ م)

http://isj.iup.ir

مدیریت بر تولید محتوا و به اشتراک گذاشتن محتوای رقومی مجلات علمی کشور

NASHR-E RIYĀZI

Volume 18, Number 2, November 2010

Editorial Board

H. HAGHIGHI, A. JAMĀLI, S. KĀZEMI,
M. Q. VAHIDI-ASL (chairman)

***Nashr-e Riyāzi* is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually by Iran University Press.**

For more information write to Iran University Press, 50 Park Avenue, Tehrān 1511786911, Iran.

For subscription, please contact us at majallat@iup.ir

CONTENTS

Notes & News

Articles

An introduction to combinatorial commutative algebra, S. YĀSEMI

* We do not choose mathematics as our profession, it chooses us: Interview with Yuri Manin, M. GELFAND

* Advice to a young mathematician, M. ATIYAH, B. BOLLOBÁAS, A. CONNES, D. MCDUFF, and P. SARNAK

* Scientific method, statistical method, and the speed of light, R. J. MACKAY and R. W. OLDFORD

* Barcodes: The persistent topology of data, R. GHRIST

* John Michael Hammersley, G. GRIMMETT and D. WELSH

Teaching/Problems

* A course in abstract algebra inspired by history, I. KLEINER

* When is a group the union of proper normal subgroups?, M. BHARGAVA

Reviews

**The Princeton Companion to Mathematics* , (reviewed by S. DONALDSON and G. KALAI)

A chapter from a book

* I want to be a mathematician (ch.5), P. R. HALMOS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شماره‌های آینده می‌خوانید:

✓ پژوهش چگونه انجام می شود	مایکل اتیا
✓ هندسه باید به مدرسه باز گردد	امیدعلی کرمزاده
✓ داستان دو انتگرال	ویلموس تونیک
✓ فیشر و مفهوم بیشینهٔ درستنمایی	جان آلدریچ
✓ دوست دارم ریاضیدان باشم	پال هالموس