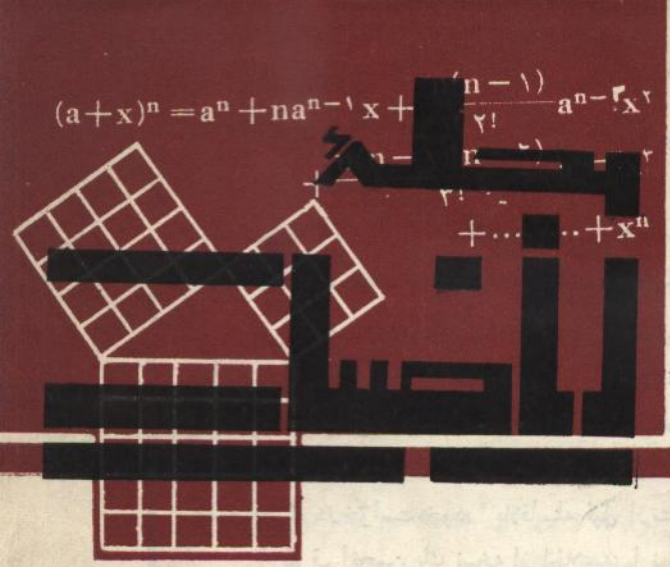


یکان ریاضی

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ

۲

شمارهٔ مسلسل:

۱۵

خردادماه ۱۳۴۴

در این شماره :

نظری اجمالی به‌مبانی ریاضیات	دکتر ستول ـ ترجمهٔ : شمس‌آوری	۱
راه حلی برای یك مسئلهٔ معروف	احمد آرام	۴
چندجمله‌ای‌ها و اعداد اول	مهدی مدغم	۵
هم‌نهشتهای درجهٔ اول	ترجمهٔ : محمد خطیبی	۷
بی‌آنکه عصبانی شوید...	ـ	۱۰
قضیهٔ بخش‌پذیری	ترجمهٔ : محمد شریف زاده	۱۱
مقدار تقریبی اعداد اصم	فیروز بایرامی	۱۲
محاسبهٔ Σn^p	رضا منصوری	۱۳
در حاشیهٔ تاریخ	ترجمهٔ : وارطانیان	۱۵
راهنمای ریاضیات متوسطه	ـ	۱۷
حل مسائل نمونه	پرهامی ـ شیخان ـ دکتر قلم‌سیاه	۲۰
دربارهٔ مسئلهٔ ممتاز یکان‌سال	مهندس خلیل خوئی	۲۴
مسائل امتحانی دبیرستانها	ـ	۲۵
مسائل برای حل	ـ	۴۵
دومسئلهٔ ریاضی (مربوط به مسابقهٔ بیست‌سؤالی)	دکتر محسن هشترودی	۴۸
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها	ایرج ارشاقی	۴۹
حل مسائل شماره‌های گذشته	ـ	۵۰
سرگرمی	ـ	۶۸
از جمله نامه‌های رسیده	ـ	۶۹

بها : بیست ریال

جلسهٔ مجمع عمومی انجمن معلمان ریاضی

تصویب اساسنامه ـ انتخاب شورای مرکزی

بنا بر اطلاعیه‌ای که از طرف انجمن معلمان ریاضی صادر شده است ؛ جلسهٔ مجمع عمومی مؤسسان انجمن معلمان ریاضی ایران درساعت ۵ بعدازظهر روزچهارشنبه ۱۲ خرداد ماه درتالار ۱۷ دی ، سازمان تربیت معلم وتحقیقات تربیتی (خیابان روزولت محل‌سابق دانشسرای‌تهرای) تشکیل‌می‌شود. دستورجلسه تصویب اساسنامهٔ انجمن وانتخاب اعضای شورای مرکزی‌خواهدبود.

مؤسس به معلمان ریاضی اطلاق می‌شود که تاکنون درخواست عضویت کرده‌اند یا تا روز تشکیل جلسه درخواست نمایند. حتی همکارانی که درخواست خودرا بلافاصله قبل ازتشکیل جلسه تسلیم نمایند مؤسس شناخته خواهند شد .

ازطرف انجمن یك نسخه از اطلاعیه با نمونهٔ اساسنامه برای بررسی معلمان ریاضی‌که نشانی‌آنها برای انجمن معلوم بوده ارسال شده است . سایرهمکاران مایل باشند نشانی خودرا اطلاع دهند تا نمونهٔ اساسنامه برای‌آنها ارسال شود یا اینکه در جلسهٔ مجمع عمومی حضور یافته همانجا اساسنامه را مورد مطالعه قرار دهند .

- قابل توجه مشترکان
مجلهٔ یکان

چنانچه در تعطیلات تابستان نشانی پستی شما تغییر می‌کند ادارهٔ مجله را مطلع سازید .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ دوم

شمارهٔ مسلسل : ۱۵

خردادماه ۱۳۴۴

صاحب امتیاز و مدیر مسئول :

عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : **داود مصحفی**

زیر نظر شورای نویسندگان

هر ماه یك بار منتشر می‌شود

نشانی اداره : تهران ـ خیابان لاله‌زارنو ـ شمارهٔ ۸۱

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

تلفن منزل مدیر : ۷۵۸۵۷۰

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

اشتراك ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

تك شماره ۲۰ ریال

مقاله‌های وارده مسترد نمی‌شود

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

از تألیفات هوشنك شریف‌زاده

پانصد مسألهٔ فیزیك

شامل خلاصه‌ای ازمطالب ریاضی وجدولی ازآحاداندازه‌گیری مطابق باآخرین قرارداد بین‌المللی محتوی راهنمای کلیهٔ مسائل کنکور دانشکده‌ها برای کلاسهای پنجم طبیعی وریاضی‌دبیرستانها. بها ۱۰۰ ریال

۴۲۰ مسألهٔ فیزیك

شامل خلاصه‌ای ازمطالب ریاضی‌وجدولی از آحاداندازه‌گیری مطابق باآخرین قرارداد بین‌المللی محتوی راهنمای کلیهٔ مسائل کنکوردانشکده‌ها برای کلاسهای چهارم‌طبیعی وریاضی‌دبیرستانها بها ۶۰ ریال

راهنمای فیزیك

شامل ۲۵۰ مسئلهٔ حل شده وحل‌کردنی و خلاصه‌ای از مطالب کتاب سوم برای‌دانش‌آموزان‌کلاس‌سوم دبیرستانها بها ۳۰ ریال

ناشر : مؤسسهٔ مطبوعاتی معراجی تهران ناصرخسرو روبروی شمس‌العماره

دومین جلسهٔ سخنرانی «انجمن‌معلمان‌ریاضی» در یکشنبهٔ دوازدهم اردیبهشت در تالار ۱۷ دی (سازمان تحقیقات تربیتی و تربیت معلم) تشکیل شد .

اولین جلسهٔ سخنرانی انجمن در تاریخ دوشنبه ۲۴ اسفند ۴۳ در تالار آمفی‌تآتر دبیرستان رضاشاه کبیر برگزار شد که در آن استاد دکتر محسن هشترودی به مدت یك ساعت و نیم باحدت و شوق زایدالوصف (که مبین علاقهٔ ایشان به تشکیل انجمنهای ریاضی است) در بارهٔ مبانی ریاضیات جدید بیانات‌مفصلی ایراد نمودند . متأسفانه چون‌استاد سخنرانی خود را ننوشته بودند و درآن جلسه‌هم تحریر تقریرات ایشان فراموش شده بود چاپ این سخنرانی در مجلهٔ یکان میسر نشد .

در دومین جلسهٔ سخنرانی ، سخنران آقای پروفسور ستول Stoll استاد دانشگاه آمریکایی بیروت بود . این ریاضیدان آمریکایی به دعوت فولبرایت به ایران آمده‌وبه‌دعوت دانشگاه و مؤسسه‌های دیگر جمعاً پنج سخنرانی ایراد نمود. سخنرانی که به دعوت انجمن معلمان ریاضی انجام گرفت توسط آقای جهانگیر شمس‌آوری برای حضار ترجمه گردید . شورای نویسندگان یکان از آقای شمس‌آوری خواست که متن سخنرانی را برای استفادهٔ خوانندگان یکان به فارسی برگردانند و مطالب زیر ترجمهٔ همان سخنرانی است که از نظر خوانندگان محترم می‌گذرد .

نظری اجمالی به‌مبانی ریاضیات

سخنرانی : دکتر ستول

ترجمهٔ : جهانگیر شمس‌آوری

نخستین هدف من از این سخنرانی وصف شرایطی است که بعضی از ریاضیدانان را واداشت که عطف توجهی به مبانی ریاضیات مبذول دارند . اجازه بدهیدکه خیال شما را از این بابت راحت کنم که فرض من براین بوده است‌که هیچ‌آشنایی بااین رشته از دانش‌که همه خودرا وقف آن کرده‌ایم ندارم . نظرمن در این خصوص برحسب تجربه‌های شخصی منعکس ساختن این حقیقت است که از میان کسانی که ریاضیات را به‌کار می‌برند ، یاخالق آن هستند ، تنها چندتنی علاقه‌وآشنایی بامبانی آن دارند. شاید از روی حسن‌نیت باشدکه اذعان‌کنیم که مبانی ریاضیات در وضع نسبتاً تأسف‌انگیزی قرار دارد .

اخیراً یکی از پژوهندگان مشهور ریاضیات وضع بنای ریاضیات را به یك‌کشتی تشبیه کرده است که از یك‌طرف به آهستگی در آب فرومی‌رود و از طرف دیگر به‌نظر می‌رسدکه به علت سرعت خارق العادهٔ نمو و توسعهٔ روبنایش در آب بالا می‌آید .

مطلب را با نام بردن از مفاهیم ریاضی که به‌کار خواهم گرفت آغاز می‌کنم .

۱) سلسلهٔ طبیعی اعداد مانند ۱و۲و۳ و... که به‌منظور شمردن به‌کار گرفته می‌شوند .

۲) مفهوم مجموعه . یك مجموعه، بادرك مستقیم وبه‌طور کشف وشهود ، گردآمده‌ای، از اشیاء است . هریك از اشیاء این مجموعه به‌نام‌عنصر یاعضو مجموعه خوانده می‌شود.چنانچه x عنصرمجموعهٔ A باشد آن راچنین می‌نویسیم : $x \in A$

مجموعه‌های A وB متساویند اگر و فقط اگر عضوهای آنها یکی باشد وآن را باعلامت چنین می‌نویسیم: $A = B$.

به مجموعه‌های خود، مجموعهٔ تهی یاخالی را نیز علاوه‌می‌کنیم وآن مجموعه‌ای است‌که هیچ عضو ندارد و باعلامت چنین‌نشان داده می‌شود : $\emptyset$

۳) رابطهٔ شمول برای مجموعه ها : اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که هرعضو A عضوی از B باشد ، A

جزء B است که با علامت چنین نوشته می‌شود : $A \subseteq B$.
همچنین می‌توان گفت که A **زیرمجموعه‌ای** از B است اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $A \neq B$ ، A زیر مجموعهٔ واقعی B است که با علامت چنین نشان داده می‌شود : $A \subset B$.

۴) چنانچه A مجموعه‌ای باشد، مجموعهٔ توان‌دار A (که با علامت چنین نمایش داده می‌شود: $P(A)$) مجموعه‌ای است که اعضایش زیر مجموعه‌های مختلف A است . مثلا اگر A مجموعه‌ای باعنصرهای ۱ و ۲ و ۳ باشد (که چنین نمایش داده می‌شود: $A = \{۱ و ۲ و ۳\}$)، مجموعهٔ توان‌دار آن‌چنین است:

$$P(A) = \{\emptyset \text{ و } \{۱\} \text{ و } \{۲\} \text{ و } \{۳\} \text{ و } \{۱ و ۲\} \text{ و } \{۱ و ۳\} \text{ و } \{۲ و ۳\} \text{ و } \{۱ و ۲ و ۳\}\}$$

توجه داشته باشید که $P(A)$ دارای $۸ = ۲^۳$ عضواست.
به طور کلی اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد ، مجموعهٔ توان‌دار آن دارای ۲^n عضو است .

۵) مفهوم اندازهٔ یك مجموعه. درزندگی روزانه اندازهٔ یك مجموعه را بایك عدد از سلسلهٔ طبیعی اعداد بیان می‌کنیم. می‌گوییم که مجموعهٔ A دارای اندازه‌ای برابر n است (وآن را چنین می‌نمایانیم $\#A = n$) اگر بتوان عضوهای A را در مقابلهٔ عضوهای مجموعهٔ $\{۱ و ۲ و ... و n\}$ قرارداد .
(به‌زبان دقیق این بدان معنی است که مقابلهٔ یك به یك بین اعضاء مجموعهٔ A و مجموعهٔ $\{۱ و ۲ و ... و n\}$ برقرار است . مجموعه‌هایی که اندازه‌های آنها را بتوان به‌این وسیله معین کرد مجموعه‌های **محدود** نامیده می‌شوند . در ریاضیات اغلب مجموعه‌هایی در نظر گرفته‌می‌شوند که‌محدود نیستند. چنان مجموعه‌هایی **نامحدود** خوانده‌می‌شوند. معمولا مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌ها بوسیلهٔ معین کردن اندازهٔ هریك از آنها وبعد مقایسهٔ اعداد به‌دست آمده‌ازنظر ترتیب قرارگرفتنشان‌درسلسلهٔ طبیعی اعداد به‌عمل می‌آید. مثلا اگر معلم A بگوید که تعداد شاگردان او بیش از تعداد شاگردان B است، احتمال دارد که به‌این مطلب ضمن مقایسهٔ تعداد شاگردان کلاس خود، که مثلا ۴۰ تاست، و تعداد شاگردان کلاس معلم B ، که مثلا ۳۰ تاست ، پی‌برده باشد . اما توجه داشته باشید که حاجتی‌برای به‌کار بردن اعداد طبیعی در این مثال نیست . بدین معنی که هریك از این دو معلم می‌توانند به‌همان نتیجه برسند چنانچه صورت اسامی شاگردان کلاسهای خود را تهیه و مشاهده کنند که صورت اسامی شاگردان معلم B قابل مقابله بایکی از زیر مجموعه‌های واقعی صورت اسامی شاگردان معلم A است .

مطالبی که تااینجا بیان شد برای آمادگی کافی است و اکنون به‌موضوع اصلی باز می‌گردم . در سال ۱۸۸۰ **کانتور** ریاضیدان آلمانی علاقمند به مقایسهٔ اندازهٔ بعضی مجموعه‌های نامحدود گشت . تحقیقات وی منجر به‌نظریهٔ مجموعه‌ها وبه ویژه نظریهٔ **حساب ماورای حد** (Transfinite Arithmetic) که یك رشته ازهمین حساب معمولی اعداد طبیعی است‌گشت . تعریف اساسی وی که خواهیم گفت برپایهٔ آن‌چیزی است که درآخرین قسمت، یعنی شمارهٔ ۵، از مقدمات بالاآمده است .

تعریف ـ فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند . می‌گوییم که A و B دارای یك اندازه‌اند و چنین می‌نویسم $A \frown B$ اگر وفقط اگر مقابله‌ای یك به‌یك بین‌عناصر A وB وجودداشته باشد. اندازهٔ‌مجموعهٔ A بزرگتر از اندازهٔ‌مجموعهٔ B است (که چنین نوشته می‌شود : $A > B$) اگر وفقط اگر مقابله‌ای یك به‌یك بین عناصر B وزیر مجموعه‌ای از A وجود داشته باشد وبرعکس آن چنین نباشد .

هنگامی که مجموعه‌های محدود را به‌کار می‌بریم، تعاریف فوق موافق مفاهیمی است که از اندازه در شمارهٔ ۵ ذکر کردیم .

به‌هرحال آنچه مهم است اینکه این تعاریف درمجموعه‌های نامحدود نیز قابل استعمالند . وقتی که این تعاریف را دربارهٔ مجموعه های نا محدود به‌کار می‌بریم مواجه با نتایجی می‌شویم که اغلب برخلاف آن چیزی است که به‌وسیلهٔ شهود و درك مستقیم و محسوسات حاصل می‌آید. به‌طور مثال اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح واندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت گویا به‌همان اندازهٔ مجموعهٔ N یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی است. بنابراین اندازهٔ مجموعهٔ نامحدود ممکن است که به‌اندازهٔ بعضی اززیر مجموعه‌های واقعی خود باشد!

مجموعه‌های نامحدودی هستند که اندازهٔ آنها بزرگتر از N است . یکی از آنها مجموعهٔ I یعنی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x است به‌قسمی که $۰ < x < ۱$. یعنی $I > N$. از طرف‌دیگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی اندازه‌های برابر اندازهٔ مجموعهٔ I دارد . این حقیقت که $I > N$ مارا در برابراین پرسش قرار می‌دهد که آیا زیر مجموعه‌ای وجود دارد به‌قسمی که‌داشته باشیم $I > S$ و $S > N$. تاکنون پاسخ‌این پرسش معلوم نشده است !

برای هرمجموعهٔ A، مجموعهٔ توان دار A دارای اندازهٔ بیشتری است. این قضیه را **کانتور** عنوان کرده است و تعمیم نتیجه‌ای دربارهٔ مجموعه های نامحدود است. زیرا با به خاطر آوردن اینکه اگر A صاحب n عضو باشد ، P(A) صاحب 2^n عضو است مسلم می‌شود که به‌ازاء هرعدد n از سلسلهٔ طبیعی اعداد $2^n > n$.

متأسفانه این قضیهٔ کانتور منجر به یك تناقض می‌شود . برای نشان دادن این تناقض مجموعهٔ S راکه مجموعهٔ همهٔ مجموعه هاست درنظر بگیرید . طبق قضیه $P(S) > S$. ازسوی دیگر ، چون P(S) خود یك مجموعه است (مجموعه‌ای که عناصرش زیر مجموعه‌های S هستند) $P(S) \subseteq S$. از اینجا عناصر P(S) را می‌توان به راه ساده‌ای در مقابلهٔ عناصر یك زیرمجموعه از S قراردارد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان متعاکساً عناصر مجموعهٔ S رادرمقابلهٔ عناصر زیر مجموعه‌ای از P(S) قراردارد؟ درپاسخ این سؤال اگر فرض کنیم که چنین چیزی امکان دارد می‌توان به این نتیجه رسید که $S \sim P(S)$. واین‌متناقض نتیجه‌ای‌است که $P(A) > S$. حال اگر فرض کنیم که پاسخ به آن پرسش «نه» باشد ، نتیجه می‌گیریم که $S > P(S)$ و باز با تناقض مواجه می‌شویم .

این تناقض که به نام **پارادوکس کانتور** مشهور است یکی از چند تناقضی است که قیاساً از نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه های ماورای حد ، درست در همان زمان که نظریهٔ او مورد قبول ریاضیدانان گشت، استنباط شده است .هنگامی که به اهمیت این تناقضات پی برده شد ، ریاضیدانان ، خود و ریاضیات را مواجه با بحرانی حقیقی یافتند . بعضی متحمل‌بار سنگین به نظم درآوردن خانهٔ خود گشتند. کوشش آنان شکلهای مختلفی گرفت. کوششی برای‌تجدیدساختمان نظریهٔ‌مجموعه‌چون یك‌نظریهٔ‌اصولی(اکسیوماتیك)انجام گرفت. توصیه‌هایی که‌ازاین طریق نیل به‌مقصود مورد بحث قرار گرفت این بود که این تناقضات مربوط به‌مجموعه‌های بسیاربزرگ‌است (قبلا،مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هارا درنظرگرفتیم) - و بنابراین باید حدودی در اطراف مفهوم مجموعه قرار داد تا مجموعه های مزاحم طرد شوند. این‌عمل (آنچنانکه بحثش ادامه دارد) ممکن است به‌وسیلهٔ زیر نفوذ درآوردن مفاهیم نظریهٔ مجموعه توسط اصول موضوعه انجام پذیرد، به‌همان طریق که دریك هندسهٔ مستحکم اقلیدسی «نقطه» و «خط» تحت فرمانبری از اصول موضوعه هستند . نخستین دستگاه اصولی نظریهٔ مجموعه به‌وسیلهٔ **زرملا** Zermela در سال ۱۹۰۸ عرضه‌گشت . بعداً اصلاحاتی در این نظریه به وسیلهٔ **فرانکل** Fraenkel (سال ۱۹۲۰) **سکولم** Skolem (سال ۱۹۲۰) **وان نومان** Von - Neumann (سال ۱۹۲۰) **برنیز** Bernays (سال ۱۹۴۰) و **گودل** Gödel (سال ۱۹۴۰) انجام‌گرفت . وضع موجود اصل بندی نظریهٔ مجموعه راکه توسط اکثر ریاضیدانان پذیرفته شده است چنین می‌توان توضیح داد : هیچ تناقضی ازمیان‌آنها مشتق نشده، است . (البته ، هر اصل بندیی که متضمن تناقضی بوده‌کنارگذاشته شده است) . ازطرف دیگر نامتناقض بودن هیچیك ازآنها ثابت نشده است ، یعنی‌غیرممکن است که مطلبی از نظریه ساخته شود به قسمی که هم آن و هم نفی‌آن قضیه باشند .

راه حل اساسی دیگر برای برطرف ساختن بحرانی که به وسیلهٔ این تناقضات به وجودآمده بود روش بسیار وسیعتری را درنظرگرفت . وآن به وسیلهٔ ریاضیدانانی که قادر نبودند یا در جهت توسعهٔ نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه یا در اشتقاق تناقضات نظیرآنچه بدان اشاره شد نکته‌ای اساسی بیابند عرضه گشت . آنها به موضوع روش استدلال و ناصحیح بودن آن پرداختند . بدین ترتیب آنها به این نتیجه رسیدندکه مسئلهٔ واقعیی که باید به حل‌آن اقدام‌کرد همان روشن ساختن مفهوم اثبات درست است . تصدیقی که در حدود سال ۱۹۰۰ به وسیلهٔ بعضی از ریاضیدانان عرضه‌گشت مبنی براینکه مفهوم اثبات درست را تحت هیچ قاعده سازیی‌نمی‌توان برحسب اصطلاحهای صریح وریاضی درآورد مشخص آغاز پژوهشهای نوین در بنیان ریاضیات است .

بخصوص اساس مطالعه‌ای منظم وتحت قاعده به وسایل ریاضی دربارهٔ قوانین منطق‌که قدم به قلمرو اثبات ریاضی می‌گذارند نهاده شد. ازکارهای اولیهٔ **بول** Boole ودیگران **راسل** Russel منطقدان انگلیسی و همکارش **وایت هد** Whitehead چون یك نظریهٔ اصولی دستگاهی از منطق مناسب‌برای ریاضیات بیرون‌کشیده‌آن‌را توسعه دادند. (اصلاحی از این نظریه ،که عموماً به نام حساب مجهولات از رتبهٔ اول خوانده می‌شود درکتابهای درسی نوین‌منطق‌ریاضی‌آمده است). راسل و وایت‌هد با عدم رضایت ازانجام‌کار ، درکتاب تاریخی خود به نام اصول ریاضیات ، (۱۹۱۳-۱۹۱۰) کوشش‌کردند نشان دهندکه همهٔ ریاضیات می‌تواند در چهار چوب دستگاه منطق‌آنها به تکامل بگراید . ماهیت روش آنها در این خصوص درحقیقیت تجربی بود چه‌آنها نشان دادندکه چگونه رشته‌هایی از ریاضیات نظیرنظریهٔ مجموعه ، نظریهٔ اعداد ، و هندسه را می‌توان براساس نظریهٔ آنها عرضه داشت و قضایای اصلی این نظریه‌ها را براساسی متحدالشکل وباقاعده استوارساخت . اما

(دنباله پائین صفحهٔ بعد)

راه حلی برای یك مسئلهٔ معروف هندسی

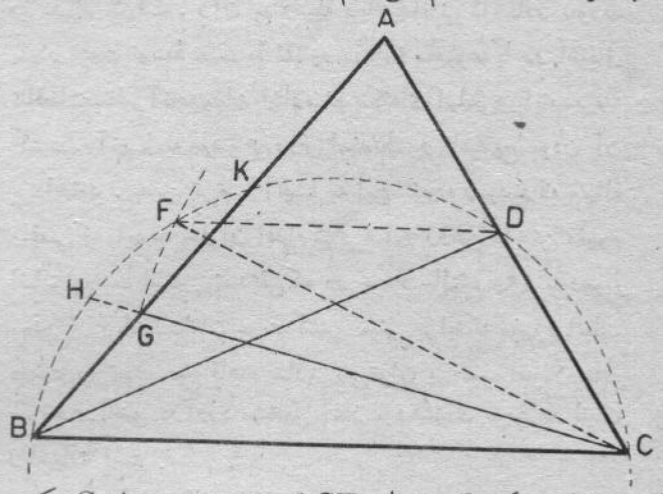
دو راه حلی که برای یك مسئلهٔ قدیمی در یکان سال (مجموعهٔ علمی صفحهٔ ۱۰۲) ارائه شده ، به نظر من با سادگی تمامی که مسئلهٔ عکس آن دارد سازگار نیست . راه حل تازه‌ای به فکر من رسید که ، اگر بی سابقه باشد ، شاید درج آن در مجله مفید فایده‌ای باشد.

احمد آرام

***

مسئله ـ ثابت کنید که اگر دو نیمساز داخلی مثلثی با یکدیگر متساوی باشند ، آن مثلث متساوی ـ الساقین است .

حل ـ ABC آن مثلث و BD یکی از نیمسازهای آن است . بر B و D و C دایره‌ای می گذرانیم ، و DF را به موازات BC رسم می کنیم . آشکاراست که $CF = BD$.



چون از مرکز C به شعاع CF قوسی بزنیم ، و از C یکی از دو محل تلاقی این قوس با ضلع AB از مثلث خط GC را رسم کنیم ، این خط GC یکی از دو خط داخل مثلث است که با BD مساوی و بنا به فرض مسئله باید نیمساز زاویهٔ C باشد . برای دو نیمه‌ای که این نیمساز از زاویهٔ C می‌سازد ، با درنظر گرفتن قوسهای مقابل آنها می‌توان چنین نوشت :

$$\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{HF} + \overset{\frown}{KF} + \overset{\frown}{DK} \qquad (۱)$$

ولی ، با ملاحظهٔ اینکه DB نیمساز زاویهٔ B است ، و اینکه $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{FB}$ ، رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{BF} - \overset{\frown}{HF} = \overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{HF}$$
$$= \overset{\frown}{DK} + \overset{\frown}{KF} - \overset{\frown}{HF} = \overset{\frown}{DK} + \overset{\frown}{KF} + \overset{\frown}{HF}$$

یا
$$-\overset{\frown}{HF} = \overset{\frown}{HF} \qquad (۲)$$

واین رابطه تنها وقتی درست است که $\overset{\frown}{HF}$ مساوی صفر باشد ، یعنی H و F و K و G بریکدیگر منطبق شوند ، و ضلع AB بر نقطهٔ F بگذرد و مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد .

اگر قوس FG ننطهٔ تقاطع دیگری، مثلا G' ، باضلع AB در داخل مثلث داشته باشد ، عین این استدلال در مورد اینکه خط احتمالی $G'C$ نیز نمی‌تواند نیمساز زاویهٔ C باشد، صادق است .

از نظر **واقعیت** ، آنها برای موضوع مورد بحث خود **اثباتی** ارائه نکرده‌اند . ممکن است که سؤال شود برای اثبات چه می‌توانست ارائه شود ؟ یقیناً ، اگرهمچنانکه راسل ووایت هد ادعاکردند ، ادعا شودکه حساب مقدماتی می‌تواند در میان دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ارائه شده تجلی‌نماید ، آن وقت برای هرفرمول داده شدهٔ حساب باید حالتی باشدکه یا آن یا نفی‌آن یك قضیه باشد (یعنی نظریه بایدکامل باشد) . اینکه اصول ریاضیات‌کامل نیست (یعنی غیرکامل است) در سال ۱۹۳۱ به وسیلهٔ **گودل** Gödel اثبات گردید .

بدین ترتیب که وی نشان داد بر اساس محدود کردن توجه به آن **قسمت** از اصول ریاضیات‌که مناسب برای ظاهر ساختن حساب است ، فرمولی هست به قسمی که نه‌آن و نه نفی آن را می‌توان ازاصول موضوعه و به وسیلهٔ قوانین نتیجه گیری فراهم‌آورده شده اثبات‌کرد . علاوه براین اثبات گودل نشان دادکه مطلب را با افزودن اصول موضوعهٔ اضافی نیز نمی‌توان ترمیم‌کرد . بالاخره ، (با به خاطرآوردن تعریف نا متناقض بودن یا سازگاری که قبلاگفته شد) گودل ثابت‌کردکه اگر دستگاهی مانند دستگاهی که درکتاب اصول ریاضیات ذکرشده است نامتناقض باشد ، غیر ممکن است که بتوان‌آن حقیقت را یعنی نامتناقض بودن‌آن را اثبات‌کرد .

گرچه نتایج مأخوذهٔ گودل پایه های تز وایت هد و راسل وهمچنین امیدهای دیگران را فرو ریخت ، ولی مقدری هم برای موضوع بنیانهای ریاضیات یا منطق ریاضی معلوم نساخت بدین معنی که‌هردوی آنهازینت بخش رشته‌های ریاضیاتند ولی جهت هریك به وسیلهٔ نتایج عمیقی که گودل به دست‌آورد تغییریافته است .

چند جمله‌ای ها و اعداد اول

مهدی مدغم

موضوع اعداد اول و یافتن عبارت یا عباراتی به صورت $P(x)$ که به ازاء جمیع مقادیر x عدد اول باشد مدتهاست افکاربسیاری‌را به‌خود معطوف داشته است . در این راه نه تنها عدهٔ زیادی ازریاضیدانان مدتها وقت صرف کرده و نتیجهٔ قطعی بدست نیاورده‌اند بلکه بیشتر اشخاصی که ازاعداد اول وقضایای مربوط به‌آن اطلاعی داشته‌اند در این‌باره فکرها نموده و کوششها به عمل‌آورده‌اند. چنانچه خوانندگان گرامی درشمارهٔ یازدهم یکان به ترجمهٔ مقاله‌ای دقت نموده‌اندکه دو دانش‌آموز امریکائی معتقد بودند از اعدادی که از چهار عبارت $n^2 \pm n \pm 1$ به ازاء مقادیر مختلف n بدست می‌آید اقلا یکی عدد اول خواهدبود اما بوسیلهٔ ماشین حساب الکترونیکی محاسبه شدکه ادعای این دو دانش‌آموزدربارهٔ این چهارعبارت تا $n=60$ درست درمیآید اما به ازاء $n=61$ هیچ یك از عبارات فوق عدد اول نمی‌شوند .

عباراتی‌که تاکنون ارائه شده چون همراه با اثبات نبوده و جنبهٔ حدس داشته است اغلب مدتها وقت‌گرفته است تا نتیجه شودکه‌آن عبارت نمی‌تواند همواره عدد اول بدست دهد. متأسفانه چون مقدار عددی این‌گونه عبارات به سرعت ترقی می‌نماید و برای تحقیق اول بودن یك عدد بزرگ چند رقمی عدهٔ زیادی تقسیمات مفصل لازم است اگرعبارتی مانند $P(x)$ ارائه شودکه به ازاء چند عدد اولیهٔ x اول باشد نمی‌توان به سهولت نتیجه گرفت‌که این عبارت به ازاء جمیع مقادیر x اول نیست .

در این جا با استفادهٔ از مقاله‌ای از مجلهٔ (ماهنامهٔ ریاضیات‌دانش‌آموز) ثابت‌می‌شود که‌چندجمله‌ای به‌صورت $P(x)$ یا یك یك دسته چند جمله‌ای به صورت $P_i(x)$ وجود ندارد که به ازاء جمیع مقادیر x و به ازاء چند یا یك مقدار i عدد اول باشد . دردوقضیهٔ اول ودوم ازچهارقضیهٔ زیر عدد x جمیع مقادیر مثبت ومنفی را می‌تواند اختیار نماید اما در دو قضیهٔ دیگر منظور از x عدد صحیح ومثبت می‌باشد .

قضیهٔ اول ـ هرگاه $P(x)$ کثیرالجمله‌ای برحسب x و $P(x_1)=P(x_2)$ باشد لااقل یك عدد مانند x_3 در فاصلهٔ $(x_1$ و $x_2)$ وجوددارد به‌قسمی‌که $P'(x_3)=0$ باشد. $P'(x_3)$ مشتق $P(x)$ به ازاء $x=x_3$ میباشد .

اثبات ـ چون $P(x)$ در فاصلهٔ $(x_1$ و $x_2)$ ثابت‌نیست میتوان فاصلهٔ $(x_1$ و $x_2)$ را به فواصل جزئی $(x_1$ و $x_3)$ و $(x_3$ و $x_4)$ و . . . . . چنان تقسیم‌کردکه $P(x)$ در یك فاصله صعودی و در فاصلهٔ پس‌ازآن نزولی باشد. فرض می‌کنیم $P(x)$ در فاصلهٔ $(x_1$ و $x_3)$ صعودی و در فاصلهٔ $(x_3$ و $x_4)$ نزولی باشد در این صورت عدد h را به قسمی می‌توان‌اختیار نمودکه $P(x)$ در فاصلهٔ $(x_3$ و $x_3+h)$ نزولی و در فاصلهٔ $(x_3$ و $x_3-h)$ صعودی باشد.بنابراین خواهیم داشت : $P'(x_3+h)<0$ و $P'(x_3-h)\geqslant 0$ و چون h را به سمت صفر میل دهیم نتیجهٔ میشود $P'(x_3)<0$ و $P'(x_3)\geqslant 0$ وچون $P'(x_3)$ نمی‌تواند منفی و در عین حال مثبت باشد باید داشته باشیم $P'(x_3)=0$.

درصورتی‌که $P(x)$ در فاصلهٔ $(x_1$ و $x_3)$ نزولی و در فاصلهٔ $(x_3$ و $x_4)$ صعودی باشد به ترتیب فوق قضیه ثابت می‌شود .

قضیهٔ دوم ـ اگر $P_i(x)[i=1$ و $2 \ldots r]$ مجموعه‌ای ازکثیر الجمله ها باشد میتوان عددی مانند N به قسمی تعیین نمودکه با شرط $N<x_1<x_2$. اولا $P_i(x_1)\neq P_j(x_1)$ و ثانیاً $P_i(x_2)\neq P_i(x_1)$ باشدیعنی اگر $N<x_1<x_2$ باشد هیچ یك ازکثیرالجمله‌ها به ازاء دو مقدار x_1 و x_2 برابر نمی‌شوند و اگر یك زوج از این کثیرالجمله‌ها در نظرگرفته شود به ازاء عددی مانند x_1 باهم برابر نمی‌گردند .

اثبات ـ اولا $P'_i(x)$ یعنی مشتق $P_i(x)$ یك کثیرالجمله می‌باشد بنابراین تعداد محدودی ریشه خواهد داشت‌که بزرگترین آن‌ها را با a_i نمایش می‌دهیم بنابراین به ازاء یك‌کثیرالجملهٔ $P_i(x)$ عددی مانند a_i خواهیم داشت. از اعداد مجموعهٔ (. . . . و a_2 و a_1) بزرگترین‌آنها را با N_1 نشان می‌دهیم پس : $N_1=Max(a_1$ و a_2 و . . .)

ثانیاً ـ $P_i(x)-P_j(x)$ نیز یك کثیرالجمله خواهد

بود . بزرگترین ریشهٔ این کثیرالجمله را با b_{ij} می‌نمائیم بنابراین به ازاء تفاضل هرزوج از کثیرالجمله‌ها به هرترتیب که باشد یك عدد b_{ij} خواهیم داشت بزرگترین عدد مجموعهٔ ($b_{۱۲}$ و $b_{۳۱}$ و $b_{۲۳}$ و ....) را با $N_۲$ نمایش می‌دهیم پس $N_۲=Max(b_{۱۲}$ و $b_{۳۱}$ و $b_{۲۳}$ و ....) ونیزفرض‌می‌کنیم

$$N=Max(N_۱ \text{ و } N_۲)$$

در این صورت چون $x_۱$ و $x_۲$ هردو از N بزرگتر می‌باشند هرعدد مانند $x_۳$ در فاصلهٔ ($x_۱$ و $x_۲$) ازN بزرگتر خواهد بود. بنابراین $x_۳$ از جمیع ریشه‌های معادلهٔ $P'_i(x)$ بزرگتر خواهد بود یعنی $P'_i(x_۳)\neq ۰$ پس $P_i(x_۱)$ و $P_i(x_۲)$ طبق‌قضیهٔ اول با یکدیگر مساوی نیستند. بعلاوه چون $x_۱$ از جمیع ریشه‌های معادلهٔ $P_i(x)-P_j(x)=۰$ بزرگتر است پس در این معادله صدق نمی‌کند بنابراین $P_i(x_۱)\neq P_j(x_۱)$ و قضیه ثابت است .

قضیهٔ۳ـ هرگاه $P(x)$ یك کثیرالجمله با ضرایب صحیح وضریب جملهٔ بزرگترین‌درجهٔ آن مثبت باشد باقیماندهٔ تقسیم $P(x_۱)$ بر h باباقیماندهٔ تقسیم$P(x_۱+h)$ بر hبرابر است .

اثبات‌ـ حالت اول‌ـ $P(x)=ax^n$. فرض می‌کنیم باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر h برابر R باشددر این صورت $P(x_۱)=mh+R$ و میتوان نوشت :

$$P(x_۱+h)-P(x_۱)=a(x_۱+h)^n-ax_۱^n$$
$$=a[(x_۱+h)^n-x_۱^n]=a(x_۱+h-x_۱)Q(x_۱)$$
$$=ahQ(x_۱)$$

و

$$P(x_۱+h)=P(x_۱)+ahQ(x_۱)$$
$$=mh+R+ahQ(x_۱)=m'h+R$$

و قضیه در این حالت ثابت است .

حالت کلی ـ فرض می‌کنیم

$$P(x)=ax^n+bx^{n-۱}+....$$

پس :

$$P(x_۱+h)=a(x_۱+h)^n+b(x_۱+h)^{n-۱}+...$$
$$P(x_۱+h)-P(x_۱)=a[(x_۱+h)^n-x_۱^n]$$
$$+b[(x_۱+h)^{n-۱}-x_۱^{n-۱}]+....$$

طبق حالت اول هریك از جمل طرف دوم بر h قابل قسمت است در نتیجه مجموع آنها یا $P(x_۱+h)-P(x_۱)$ برh قابل قسمت می‌باشد و میتوان نوشت :

$$P(x_۱+h)-P(x_۱)=kh$$

و :

$$P(x_۱+h)=mh+R+kh=h(m+k)+R$$

وقضیه دراین مورد نیزثابت است .

نتیجهٔ۱ـ اگر $P(x_۱)$ بر h قابل قسمت باشد $P(x_۱+h)$ نیز بر h قابل قسمت است.

نتیجهٔ ۲ـ اگر $P(x_۱)$ و h هردو بر d قابل قسمت باشند $P(x_۱+h)$ نیز بر d قابل قسمت است .

قضیهٔ۴ـ هرگاه یك مجموعه کثیرالجمله به صورت $P_i(x)$ داشته باشیم بی‌نهایت عدد صحیح میتوان به جای x قرار داد به‌قسمی‌که حاصل هریك از کثیرالجمله‌های مجموعه، غیراول باشد . (تعداد کثیرالجمله‌ها r فرض می‌شود)

اثبات‌ـ حاصل ضرب r کثیرالجملهٔ فوق را $M(x)$ می‌نامیم یعنی :

$$M(x)=P_۱(x)P_۲(x)P_۳(x)...P_r(x)$$

حال اگر یکی از این کثیرالجمله‌ها مثل $P_i(x)$ را در نظرگرفته $P_i[x_۱+M(x_۱)]$ را تشکیل دهیم چون $P_i(x_۱)$ و $M(x_۱)$ هردو بر $P_i(x_۱)$ قابل‌قسمت میباشند طبق نتیجهٔ (۲) از قضیهٔ (۳) $P_i[x_۱+M(x_۱)]$ نیز بر $P_i(x_۱)$ قابل قسمت خواهد بود و اگر $x_۱$ را از عدد N که در شرایط قضیهٔ (۲) صدق می‌کند بزرگتر بگیریم $P_i[x_۱+M(x_۱)]$ و $P_i(x_۱)$ طبق همان قضیه مساوی نیستند و چون اولی بر $P_i(x_۱)$ قابل قسمت است پس:

$$P_i[x_۱+M(x_۱)]>P_i(x_۱)$$

بنابراین‌اگر یکی از مقسوم‌علیه‌های $P_i(x_۱)$ را با q_i و $[x_۱+M(x_۱)]$ را با $x_۲$ نمایش دهیم $P_i(x_۲)$ بر q_i که عددی کوچکتر از آن میباشد قابل قسمت است بنابراین $P_i(x_۲)$ اول نمی‌باشد .

نتیجه اینکه هریك از کثیرالجمله‌های این مجموعه به ازاء $x_۲=x_۱+M(x_۱)$ اول نمی‌باشند و چون به‌جای $x_۱$ هرعدد بزرگتر از N را میتوان قرار داد بنابراین بی‌نهایت مقدار برای $x_۲$ بدست می‌آید و قضیه ثابت است .

همنهشتهای درجهٔ اول

دنباله از شمارهٔ قبل

نوشتهٔ : آی . ا . بارنه

ترجمهٔ : محمد خطیبی

همچنانکه قبلا مشاهده شد بین همنهشتها و تساویها یك نوع شباهت بخصوصی وجود دارد. مشابه بامعادلات یك‌مجهولی درجهٔ اول $ax=b$ همنهشتهای درجهٔ اول $ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ وجود دارد .

باوجود این، اختلافهایی نیز یافت می‌شود؛ معادلهٔ $ax=b$ در ازاء $a\neq 0$ همیشه قابل حل است ولی هم‌نهشت‌ها چنین نیستند . در واقع با وجود $a\neq 0$ هم نهشت $6x\equiv 4(\mathrm{mod}\ 3)$ قابل حل نیست . زیرا اگر x عدد صحیح باشد ، از تعریف هم‌نهشت نتیجه میشود که $\frac{6x-4}{3}$ عددی‌درست است واین ممکن نیست زیرا $6x$ بر ۳ قابل‌بخش‌بوده و ۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. درصورتی‌که درحل معادلهٔ $ax=b$ برای x تمام جوابها را اعم از صحیح وکسری می‌پذیریم.

دیگر اینکه هر هم نهشت درجهٔ اول که قابل حل باشد بیش از یك‌جواب دارد . مثلا هم‌نهشت $2x\equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$ در ازاء $x=6$ صحیح است ، ولی در ازاء ۲۰ یا $x=13$ نیز برقرارمیباشد. درواقع این‌هم‌نهشت در ازاء $x=6+7k$ (۶ بعلاوهٔ مضربی‌از ۷)درست‌است . تمام‌این جوابها به‌یك‌طریق بررسی میشوند، یعنی در واقع همهٔ آنها وقتی‌بر ۷ تقسیم شوند باقیماندهٔ ۶ خواهند داشت .

مهمترین نتایج مربوط بهم نهشت‌های درجهٔ اول $ax\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ به قرارزیر است:

الف: فرض‌کنید d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و m باشد. دراینصورت هم‌نهشت قابل‌حل‌نیست مگراینکه d فاکتوری از b باشد .

ب: اگر d مقسوم علیه b باشد ، هم‌نهشت به تعداد d جواب دارد .

ج: اگر $d=1$ باشد یعنی a و m نسبت به هم اول باشند ، هم‌نهشت فقط یك جواب خواهد داشت

مثالهای زیر نتایج فوق‌الذکر را روشن میکنند .

در $6x\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 3)$ ، $d=3$ میباشد ومیدانیم که ۳ مقسوم‌علیه ۴ نیست بنابراین هم‌نهشت قابل حل‌نیست .

در $3x\equiv 12\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ، $d=3$ و درنتیجه مقسوم علیه ۱۲ است بنابراین سه‌جواب ۰و۲و۴ خواهیم داشت و بقیهٔ جوابها با مدول ۶هم نهشت بااینها خواهند بود.

در $2x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 9)$ ، $d=1$ وتنهاجواب‌درازاء مدول ۹ ، $x=7$ است . (جواب‌کلی: $x=7+9k$)

برای حل هم نهشت‌ها روشهای مختلفی وجود دارد . اگر مدول m کوچك باشد و بخواهیم آن دسته ازجوابهای x راکه بین $(1-m)$تا...۲و۱و۰ قرار دارند پیداکنیم،میتوان ازطریق تجسس استفاده کرد . راههای‌دیگری برای حل هم‌نهشت‌ها در مسئلهٔ بعدی ذکر خواهد شد.

مسئله‌ای که‌منجر به‌هم‌نهشت درجهٔ اول میشود.

زارعی ۷سبد تخم‌مرغ دارد ، درهرسبد به‌تعداد مساوی تخم‌مرغ وجود دارد .

بعدازفروش‌تخم‌مرغ‌ها به‌دوجین، ۵ تخم‌مرغ برایش‌باقی‌میماند. کمترین مقدارممکن برای‌تعداد تخم‌مرغهای‌هرسبدچقدراست ؟

اگر x تعداد تخم‌مرغهای هرسبد باشد ، $7x$ وقتی بر ۱۲ تقسیم می‌شود باید باقیمانده‌ای برابر با ۵ داشته باشد .

یعنی داریم : $7x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12)$

در اینجا ۷و۱۲ تنهامقسوم‌علیه مشترکشان۱است‌بنابراین هم‌نهشت فوق فقط یك‌جواب دارد . دریك چنین مسئلهٔ ساده‌ای میتوانیم ۰و۱و۲ تا ۱۱ را بجای x قرار دهیم وبالاخره‌جواب

قابل قبول $x=11$ را بدست آوریم . بنابراین کمترین تعداد ممکن برای تخم مرغ‌های در هرسبد ۱۱ است .

این مسئله را می‌توان با قرار دادن -7 بجای ۵ در سمت راست هم نهشت فوق نیز حل کرد . زیرا

$-7\equiv 5 \pmod{12}$. در اینصورت هم‌نهشت اصلی می‌شود:

$7x\equiv -7 \pmod{12}$ و چون ۷ و ۱۲ عامل مشترکی ندارند ، میتوانیم طرفین را بر۷ تقسیم کنیم که می‌شود

$x\equiv -1 \pmod{12}$ یا $x\equiv 11 \pmod{12}$

و ازآنجا جواب قبلی بدست میآید .

درحالت کلی‌میتوان‌هم‌نهشتی ازنوع $7x\equiv 5 \pmod{12}$ را به‌هم نهشتی که در آن ضریب x برابر با ۱ باشد تبدیل نمود . این امر با استفاده از **تعمیم اولر** (از **قضیهٔفرما**) عملی است. (در اینجا چون‌مدول ۱۲ عددی اول نیست‌نمیتوان از قضیهٔ فرما استفاده کرد).

از تعمیم اولر داریم $7^{\varphi(12)}\equiv 1 \pmod{12}$

وقتی $\varphi(12)=4$ باشد نتیجه می‌شود $7^4\equiv 1 \pmod{12}$

بدین ترتیب اگر هم نهشت $7x\equiv 5 \pmod{12}$ را در $7^3\equiv 7^3 \pmod{12}$ ضرب کنیم

$7^4x\equiv (5)(7^3) \pmod{12}$

بدست میآید. اما چون $7^4\equiv 1 \pmod{12}$ است ، هم‌نهشت درجهٔ اول می‌شود $x\equiv (5)(7^3) \pmod{12}$ و چون

$7^2\equiv 1 \pmod{12}$ و $7^3\equiv 7 \pmod{12}$ و درنتیجه

$(5)(7^3)\equiv 35\equiv 11 \pmod{12}$ ، بنابراین

$x\equiv 11 \pmod{12}$ وبار دیگر به‌همان نتیجهٔ قبلی‌میرسیم.

***

قضیهٔ باقیماندهٔ چینی

اینك ضمن آخرین توضیح به‌یك دستگاه از هم‌نهشت‌های درجهٔ اول میپردازیم . این دستگاه شبیه به یک دستگاه معادلات درجهٔ اول n مجهولی ، شامل n معادله می‌باشد.غالباً این نوع هم‌نهشت‌ها از مسائل مربوط به معماها نتیجه می‌شوند روش حل این‌نوع هم‌نهشت‌ها برای چینی‌های قدیم معلوم بود و به‌همین علت به‌قضیهٔ باقیماندهٔ چینی‌موسوم است .

ابتدا مسئله‌ای مطرح میکنیم که بـه **هم نهشت های مشترك** (Simultaneous Congruencs) منجر شود . برای حل این مسئله ابتدا یك راه حل عمومی برای هم نهشت‌هـای مشترك خواهیم داد که شامل این مورد خاص نیز بشود.

از شخصی‌که بیش ازصدسال عمر داشت سؤال شدکه چند تا نتیجه دارد .

در پـاسخ گفت بطور دقیق نمیداند ولی اگـر از آنها گروه‌های سه‌نفری تشکیل دهند یك‌نفر باقی خواهد ماند و در صورتی که گروه‌های پنج‌نفری تشکیل‌دهندفقط ۳ نفر باقی‌می‌ماند. درحالی‌که در گروه های هشت نفری کسی جا نخواهد ماند . حداقل شمارهٔ نتیجه‌های این شخص چند است ؟.

بسیار ساده است کـه در اینجا یکی از مضارب ۸ را بطوری‌که درشرایط مربوط به مسئله صدق کند پیداکنیم.

مع‌ذالك اگر مسئله را باروش هم‌نهشت‌ها بررسی‌کنیم ، این مسئله و مسائل بسیارپیچیده‌تر دیگری ازاین نوع‌رامیتوان حل‌کرد .

اگر تعداد نتیجه‌های شخص مذکور را با x نمایش‌دهیم داریم :

$x\equiv 1 \pmod{3}$

$x\equiv 3 \pmod{5}$

$x\equiv 0 \pmod{8}$

باید توجه کردکه x در تمام هم‌نهشت‌های فوق یك عدد صحیح ثابت است. به‌همین علت است‌که این نوع‌هم‌نهشت‌هاراهم نهشتهای‌مشترك‌می‌نامیم. روش‌حل چهارهم نهشت‌مشترك که‌برای ۳ ویا هرتعداد دیگر از هم‌نهشت‌های مشترك عملی است به‌شرح زیر است ؛ فرض می‌کنیم :

$x\equiv a \pmod{k}$

$x\equiv b \pmod{l}$

$x\equiv c \pmod{m}$

$x\equiv d \pmod{n}$

که هیچ یك از چهار حرف n و m و l و k دوبدو دارای عامل‌مشترکی نباشند .

باید در نظر داشته باشیم‌که n وm وl وk وd وc وb وa معلومند و میخواهیم x را بطوری‌که‌در تمام هم نهشت‌ها صدق کند پیداکنیم .

فرض‌کنیم R مساوی حاصل‌ضرب‌تمام مدولها باشد یعنی

$$R=klmn$$

$N=klm$, $M=knl$, $L=kmn$, $K=l.m.n$

اعداد N و M و L و K به ترتیب از تقسیم R بـر n و m و l و k بدست‌آمده‌اند .

اکنون هم نهشت های اختصاصی که دارای مجهولات w و u و z و y هستند به ترتیب‌حل‌می‌کنم .

$Ky\equiv 1 \pmod{k}$

$Lz\equiv 1 \pmod{l}$

$Mu \equiv ۱ \pmod m$

$Nw \equiv ۱ \pmod n$

هم‌نهشت $Ky \equiv ۱ \pmod k$ یك هم‌نهشت خطی است ومدول k با $lmn = K$ عامل مشترکی ندارد، بنابراین یك جواب ثابتی برای y وجود دارد. بطور کاملا متشابهی جوابهای ثابت دیگری نیز برای سه هم‌نهشت دیگر خواهیم داشت.

جواب کلی هم‌نهشت های :

$x \equiv a \pmod k$ $\quad x \equiv b \pmod l$

$x \equiv c \pmod m$ $\quad x \equiv d \pmod n$

برابر است با :

$$x = kya + Lzb + Muc + Nwd$$

و چون

$K = lmn$ و $L = kmn$ و $M = kln$ و $N = klm$

و w و u و z و y جوابهای هم‌نهشت‌های زیر هستند.

$Ky \equiv ۱ \pmod k$ $\quad Lz \equiv ۱ \pmod l$

$Mu \equiv ۱ \pmod m$ و $Nw \equiv ۱ \pmod n$

هرمضربی از $R = klmn$ بعلاوه یامنهای x نیز یك جواب محسوب میشود.

امتحان کنید که هرجواب از x چهار هم‌نهشت اصلی را برقرار میکنددرصورتی که مقادیر هریك از مجهولات w و u و z و y از حل جداگانهٔ چهار هم‌نهشت جدید به دست آمده‌اند.

جواب کلی معلوم نیست، ولی میتوان آنرا با استفاده از عوامل معلوم هم‌نهشت‌ها بدست آورد. از ابتدا این شرط برقراربودکه n و m و l و k دوبه‌دو عامل‌مشترکی‌ندارند حتی اگر دو مدول عامل مشترك داشته باشند باید نتیجه را تغییر داد.

در مسئلهٔ نتیجه‌های مرد صدساله

$x \equiv ۳ \pmod ۵$ و $x \equiv ۱ \pmod ۳$

و $x \equiv ۵ \pmod ۸$ داریم :

$k = ۳$ و $l = ۵$ و $m = ۸$

و (۳و۵) و (۳و۸) همچنین ۵و۸ عامل مشترکی ندارند.

در اینجا

$a = ۱$ و $b = ۳$ و $c = ۰$ و $R = (۳)(۵)(۸) = ۱۲۰$

$$L = \frac{۱۲۰}{۵} = ۲۴ \quad \text{و} \quad M = \frac{۱۲۰}{۸} = ۱۵$$

$$K = \frac{۱۲۰}{۳} = ۴۰$$

اکنون به حل هم‌نهشت‌های جداگانهٔ

$۴۰y \equiv ۱ \pmod ۳$ و $۲۴z \equiv ۱ \pmod ۵$

$۱۵u \equiv ۱ \pmod ۸$ میپردازیم. به سادگی به‌طریق تجسس تعیین میکنم که $y = ۱$ و $z = ۴$ و $u = ۷$ وبدین‌ترتیب از فرمول کلی داریم :

$$x = (۴۰)(۱)(۱) + (۲۴)(۴)(۳) + (۱۵)(۷)(۰) = ۳۲۸$$

چون میتوانیم مضارب $R = ۱۲۰$ را از ۳۲۸ کم کنیم. ملاحظه میکنیم که‌کمترین جواب مثبت x برابر است با $۳۲۸ - (۲)(۱۲۰)$ یا ۸۸. واین شمارهٔ نتیجه‌های مرد صدساله است.

***

هم‌نهشت‌ها با درجات بالاتر

تاکنون هم‌نهشت‌هایی که بررسی شده‌اند نسبت به‌مجهول از درجهٔ اول بوده‌اند. اینك مطالبی بطور خلاصه دربارهٔ هم‌نهشت‌هایی از درجات بالاتر صحبت میکنیم.

فرض کنید هم‌نهشت موردنظر چنین باشد.

$$ax^n + bx^{n-۱} + \dots + l \equiv ۰ \pmod m$$

بطوری که l و ... و b و a اعداد صحیح یاصفرباشند. اگر ضریب بزرگترین توان از x یعنی a قابل بخش بر m نباشد در این‌صورت گویند هم‌نهشت از درجهٔ nام است (در صورتی که a مضربی از mباشد، جملهٔ ax^n راباتوجه‌به‌تعریف هم‌نهشت‌ها میتوان حذف کرد ودر نتیجه هم‌نهشتی از درجهٔ کمتر از n بدست خواهد آمد.)

عدد صحیح $x = r$ ریشهٔ هم‌نهشت محسوب می‌شود در صورتی که‌عبارت $ar^n + br^{n-۱} + \dots + l$ بر m بخش‌پذیر باشد. اگر مدول m عددی غیراول باشد، میتوان نشان داد که عوامل این هم‌نهشت را به استثناء بعضی از آنها میتوان با معلوم بودن هم‌نهشت‌هایی که مدول آنها عوامل اول m هستند به‌دست آورد. در این‌صورت مابایستی مطالعهٔ خود را منحصر به‌هم‌نهشت‌هایی بنماییم که مدول آنها اعداد اولند. خواص‌این هم‌نهشت‌ها بسیار شبیه به‌خواص تساویهای عادی جبری است.

یکی از این خواص موسوم به **قضیهٔ لاگرانژ** دربارهٔ هم‌نهشت‌هاست :

هم نهشت

$$ax^n + bx^{n-۱} + \dots + l \equiv ۰ \pmod p$$

حداکثر دارای n ریشه است. برای مثال :

الف- $x^2-1\equiv 0 \pmod 5$ حداکثر میتواند دو ریشه داشته باشد و در واقع دوریشهٔ $x=\pm 1$ دارد .

ب- $x^3-1\equiv 0 \pmod 5$ میتواند ۳ ریشه داشته باشد و بیش از یك ریشهٔ $x=1$ ندارد .

ج- $x^2-1\equiv 0 \pmod 4$ چهار جواب دارد $x=\pm 1$ و $x=\pm 3$

(چون مدول عددی اول نیست قضیهٔ لاگرانژ دربارهٔ آن صدق نمی‌کند.)

باوجود اینکه هر معادلهٔ جبری حداقل یك ریشه دارد . هم‌نهشت‌ها چنین نیستند .

مثلا برای هم‌نهشت $x^2-2\equiv 0 \pmod 5$ جوابی نداریم. بطوری‌که از قرار دادن ۴ و۳ و۲ و۱ و۰ به جای x میتوان به‌این نتیجه رسید .

بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

در یك کوپهٔ قطار راه‌آهن تهران- مشهد شش‌نفر مسافرجا داشتند که آنها را امید، آرمان، آرزو، آرام، افسون و آزمون می‌نامیم. دربین آنها یك تهرانی، یك‌تبریزی، یك‌کرمانی، یك‌دزفولی، یك‌شیرازی و یك‌مشهدی یافت می‌شد .

در جریان مسافرت معلوم شدکه : امید و تهرانی پزشك هستند ، افسون و تبریزی معلم‌اند ، کرمانی وآرزو مهندس هستند ، آرمان وآزمون در جنگ شهریور ۱۳۲۰ شرکت داشته‌اند درموقعی‌که‌کرمانی هنوز نمی توانسته است سرباز باشد ، شیرازی مسن‌تر از امید و مشهدی مسن‌تر از آرزو است. آرمان و تهرانی در شاهرود پیاده شدند ، آرزو و شیرازی در نیشابور ترن را ترك کردند .

بی‌آنکه عصبانی شوید شغل وشهر هریك از شش‌نفر مسافر را تعیین‌کنید .

پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مذکور در یکان شمارهٔ ۱۴

حل این‌گونه مسائل بااستنتاج منطقی ازروابط داده‌شده وازراه‌حذف متوالی انجام می‌گیرد؛ در مسئلهٔ مذکور درشمارهٔ گذشته، از روابط ذکرشده نتیجه می‌شودکه :

۱- شخص‌همنام نفت‌فروش در خانهٔ واقع‌بین خانه‌های غیور وپایا زندگی‌می‌کند وچون همنام قصاب ساکن‌خانهٔ۲است پس‌همنام نفت‌فروش ساکن‌یکی از خانه‌های ۳یا۴ است.

۲- همنام روزنامه‌فروش‌که خویشاوندی نداردساکن‌یکی از خانه‌های ۴یا۵ است.

۳- غیوردرخانهٔ شمارهٔ ۳ نمی‌تواند ساکن‌باشد زیرا در این‌خانه شخصی‌که فقط دارای خویشاوند برادر زن است‌ساکن می‌باشدواگر همنام نفت‌فروش ساکن خانهٔ ۴باشد غیورکه‌ضمناً همنام روزنامه فروش‌نیست یاساکن خانهٔ ۵ است‌که دراین‌حال باید همنام روزنامه فروش باشد ویاباید ساکن خانهٔ ۳باشدوهر دوحال قابل‌قبول نیست . بنابراین همنام نفت‌فروش ساکن‌خانهٔ شمارهٔ۳ ، پایا ساکن‌خانهٔ ۴ وغیورساکن خانهٔ ۲ است.

۴- غیور، وفا وپایا هیچکدام همنام نفت‌فروش نیستند و چون صبورهم نمی‌تواند ساکن‌خانهٔ ۳ باشد (به‌علت همان‌دلیلی که‌برای غیورذکر شد) پس‌آقای صبا همنام نفت‌فروش و ساکن خانهٔ ۳ است.

۵- صباهمسایهٔ دیوار به‌دیوار همنام روزنامه فروش است پس‌پایا ساکن خانهٔ ۴ همنام‌روزنامه فروش‌می‌باشد.

۶- همنام نانواکه فقط خویشاوند شوهر خواهر ساکن خانهٔ ۳دارد درخانهٔ ۱ساکن نبوده‌وساکن خانهٔ ۵است.

۷- صبورکه همنام نانوانیست (دلیل‌داشتن خویشاوند خواهرزن) ساکن خانهٔ ۱ وهمنام بقال است.

۸- آقای‌وفا همنام نانوا ساکن خانهٔشمارهٔ ۵ است.

برای آشنائی بیشتر خوانندگان بااین نوع مسائل مسئلهٔ این دفعه هم از همین‌نوع انتخاب شد .

☆☆☆ قضیهٔ بخش پذیری ☆☆☆

نوشتهٔ : **میشل لیپمن**

ترجمهٔ : **محمد شریف زاده** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۲

آیاعدد ۱۷۵۴۶۲۰۵۹ بر ۳ یا ۹ بخش پذیراست ؟ قاعدهٔ کلی وساده این‌است که ارقام عدد مورد نظررا جمع کنیم اگرمجموع ارقام بر۳ یا۹ قابل‌قسمت باشد عدد اصلی نیز بر ۳یا۹ قابل‌قسمت است .

مجموع ارقام عدد فوق ۳۹است که بر۳ قابل‌قسمت است ولی بر۹ بخش‌پذیرنیست پس عدد فوق‌الذکر نیزبر بر۳ قابل قسمت بوده ولی بر۹ قابل قسمت نیست .

***

مدتها این‌موضوع مرا به فکرانداخته بودکه چرا این روش واقعاً صحیح است . باعلاقهٔ خاصی‌که به آن داشتم ابتدا فرمولی برای آزمایش باتمام توانهای ۲ ابداع نمودم سپس فرمولی عمومی به شرح زیر به دست‌آوردم :

هرعدد طبیعی R متشکل ازارقام d_i رامیتوان به صورت

$$\overline{d_n d_{n-1} \cdots d_i \cdots d_2 d_1 d_0}$$

نوشت (iعددطبیعی می‌باشد). هرگاه هررقم d_i را درباقیماندهٔ مخصوص r_i (بعداً توضیح داده خواهد شد) ضرب کنیم، مجموع این‌حاصل ضربهای مخصوص فقط وفقط موقعی بر y (عددی‌که درموردآن‌آزمایش می‌شود) قابل‌قسمت خواهد بودکه y مقسوم علیهی‌از R باشد . باقیماندهٔ r_i ازرابطهٔ‌زیر بدست میآید .

$\frac{10^i}{y}=q+\frac{r_i}{y}$ که معادل است با : $r_i=10^i-6y$

(10^i مرتبهٔ دهدهی عدداست)

من هیچ دلیل مثبتی نداشتم که این‌فرض صحیح است هر چند هیچ تناقضی نیز پیش نیامده بود . محض اطمینان خاطر آلگوریتم اقلیدسی و قضایای مختلفی‌که دربارهٔ قابلیت تقسیم وجود دارد مطالعه نمودم ولی هیچ‌کدام ازآنها را شبیه حکم خود نیافتم . بعد از اینکه به حساب مدول(همنهشتها) توجه نمودم فرض خودرا بطرز ساده‌ای بیان‌کردم و به مجرد مطالعهٔ رشته‌ها وسری‌ها، برای اثبات قضیهٔ خود فرمولی به صورت زیر درست نمودم :

برای اینکه عدد صحیح R برعدد صحیح دیگری مانند y قابل قسمت باشد . بایدR مساوی حاصل ضرب y در عدد صحیح سومی مانند P باشد یعنی: $R=P\cdot y$ و این‌معادل است با: $R\equiv 0 \pmod y$ زیراR مساوی مجموع حاصل‌ضربهای هریك ازارقامش در شمارهٔ مرتبهٔ دهدهی‌مربوط به‌خودمیباشد:

$$R\equiv \sum_{i=0}^{n} d_i\cdot 10^i \qquad (1)$$

تقسیم سادهٔ توانی ازده به صورت زیرنوشته می‌شود:

$\frac{10^i}{y}=q+\frac{r_i}{y}$ و از آنجا $10^i=r_i+qy$ که معادل است‌با:

$10^i\equiv r_i \pmod y$. با قراردادن‌این‌مقداردر هم‌نهشت(۱) خواهیم داشت :

$$R\equiv \sum_{i=0}^{n} d_i\cdot 10^i\equiv \sum_{i=0}^{n} d_i\cdot r_i \pmod y$$

اگرR برy قابل‌قسمت باشد داریم: $R\equiv 0 \pmod y$

بنابراین‌اگرyمقسوم‌علیهی‌ازR باشدمقسوم‌علیهی‌از $\sum_{i=0}^{n} d_i\cdot r_i$

خواهد بود .که این جمله در واقع مجموع حاصل ضربهای ارقام d_i درباقیماندهٔ مشخصی است .

مثلا می‌خواهیم بدانیم که‌آیا عدد ۵۷۰۴۳۱۲۸ بر ۱۲ قابل‌قسمت‌است؟ با درنظرگرفتن اولین تعریف داریم :

$d_0=8$ و $d_1=2$ و $d_2=1$ و $d_3=3$

$d_4=4$ و $d_5=0$ و $d_6=7$ و $d_7=5$

حال با در نظرگرفتن هم‌نهشت $r_i\equiv 10^i \pmod y$ خواهیم داشت :

در مدول ۱۲ :

$r_0 \equiv 10^0 \equiv 1$ و $r_1 \equiv 10^1 \equiv 10 \equiv -2$

و $r_2 \equiv 10^2 \equiv 4$ و $r_3 \equiv 10^3 \equiv 4$

و $r_4 \equiv 10^4 \equiv 4$ و $r_5 \equiv 10^5 \equiv 4$

$r_6 \equiv 10^6 \equiv -8$ و $r_7 \equiv 10^7 \equiv 4$

حال $\sum_{i=0}^{n} d_i r_i$ را محاسبه می‌کنیم .

$d_0 r_0 = 8 \times 1 = 8$ و $d_1 r_1 = 2 \times -2 = -4$

$d_2 r_2 = 1 \times 4 = 4$ و $d_3 r_3 = 3 \times 4 = 12$

$d_4 r_4 = 4 \times 4 = 16$ و $d_5 r_5 = 0 \times 4 = 0$

$d_6 r_6 = 7 \times -8 = -56$ و $d_7 r_7 = 5 \times 4 = 20$

و خواهیم داشت :

$$\sum_{i=0}^{7} d_i r_i = 8 - 4 + 4 + 12 + 16 + 0 - 56 + 20 = 0$$

حاصل برابرصفر بوده ومضربی از۱۲ می‌باشد .

اگر تمام r هارا مثبت محاسبه‌کنیم $\sum_{i=0}^{7} d_i r_i$ مساوی۱۰۸ خواهد شدکه‌بازهم مضربی‌از۱۲است . وحال هرکس می‌تواند دریابدکه ۱۲ مقسوم علیهی‌از ۵۷۰۴۳۱۲۸ میباشد . درموردی که R مضربی ازy نباشد مجموع حاصل ضربهای‌مذکور مساوی یك عدد غیرقابل تقسیم بر y خواهد شد.

خلاصهٔ مطلب چنین می‌شودکه :

برای اینکه ببینیم عدد R بر y قابل‌قسمت است یانه،ابتدا به ترتیب واحد هریك از،مرتبه های یکان دهگان و . . . یعنی 10^0 و 10^1 و 10^2 و ... و 10^n را بر y تقسیم میکنیم سپس رقمهای یکان ، دهگان و ... عدد را به ترتیب در باقیماندهٔ مربوط به مرتبهٔ خود ضرب میکنیم درصورتی‌که مجموع این‌حاصل‌ضربها بر y قابل قسمت باشد عدد R نیز بر y قابل قسمت خواهد بود اگر مجموع مذکور مساوی صفر بشود بازهـم R بر y قابل قسمت است ، چه صفر مضربی ازهرعدد است .

وحال خوانندگان می‌توانند این‌قاعده را درمورد اعداد دیگری نیزآزمایش کنند .

نکته : درمورد تقسیم عددی بر۳ یا ۹ مقدار r_i همیشه مساوی یك می‌باشد .

یعنی : $r_i \equiv 10^i \equiv 1 \pmod{3 \text{ یا } 9}$

واز اینجا معلوم میشودکه چرا برای فهمیدن اینکه عددی بر ۳ یا ۹ قابل قسمت است باید ارقام‌آن عدد را باهم جمع‌کرد وقابلیت تقسیم مجموع را بر۳ یا ۹ آزمایش نمود .

تعیین مقدار تقریبی بعضی از اعداد اصم

عدد $\sqrt{2}-1$ را درنظرمی گیریم میدانیم که

$0.4 = 1 - 1.4 \neq 1 - \sqrt{2}$ یعنی $\sqrt{2}-1 < 1$

بنابراین : $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}-1)^n = 0$

از این مطلب استفاده‌کرده و مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را به صورت‌کسری محاسبه می‌کنیم ؛

ابتدا $\sqrt{2}-1$ را به قوهٔ ۲ می‌رسانیم :

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

حاصل را بازهم به قوهٔ دو می‌رسانیم :

$$(3-2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 - 12\sqrt{2} = 17 - 12\sqrt{2}$$

$$(17-12\sqrt{2})^2 = 289 + 288 - 408\sqrt{2} = 577 - 408\sqrt{2}$$

$$(577-408\sqrt{2})^2 = 665857 - 470832\sqrt{2}$$

این مقدار بسیارکوچك است ومی‌توانیم آنرا با صفر اشتباه‌کنیم ، درنتیجه :

$$\sqrt{2} \# \frac{665857}{470832}$$

مثال دیگر- محاسبهٔ $\sqrt{10}$ ؛ میدانیم :

$\sqrt{10} - 3 \# 0.16 < 1$

پس مانند مثال قبل عمل می‌کنیم :

$$(\sqrt{10}-3)^2 = 10 + 9 - 6\sqrt{10} = 19 - 6\sqrt{10}$$

$$(19-6\sqrt{10})^2 = 361 - 360 - 228\sqrt{10}$$

$$= 721 - 228\sqrt{10}$$

چون عبارت حاصل تقریباً صفر است پس :

$$\sqrt{10} \# \frac{721}{228}$$

حال مقدارکسر $\frac{721}{228}$ را حساب‌کنیم‌برای $\sqrt{10}$ مقدار تقریبی ۳٫۱۶۲۲ را بدست می‌آوریم .

به همین ترتیب می‌توان مقدار تقریبی بعضی از اعداد اصم را حساب‌کرد . مثلا بـرای محـاسبهٔ $\sqrt{3}$ از رابطهٔ $\sqrt{3}-2$ استفاده می‌کنیم .

تبصره : یك ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ برابر $x = \sqrt{2}$ است اگرازطریق نیوتن این معادله را با تقریبات متوالی حل‌کنیم برای $\sqrt{2}$ همان‌کسر $\frac{577}{408}$ را به‌دست‌می‌آوریم.

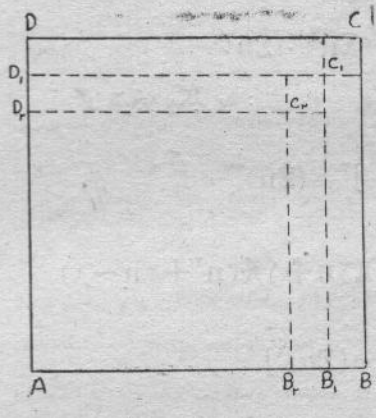
فیروز بایرامی(پنجم ریاضی - دبیرستان ادیب)

محاسبهٔ Σn^p

توسط : **رضا منصوری** دانش‌آموزششم ریاضی دبیرستان رهنما

با الهام از: روش **ابوبکر محمدکرخی** در محاسبهٔ Σn^3 (مذکور درکتاب جبر و مقابلهٔ خیام ، تألیف : مصاحب)

۱ـ محاسبهٔ Σn : مربع ABCD را به ضلع n(عدد صحیح مثبت) بناکرده و مطابق شکل طولهای BB_1 و DD_1 را برابر با واحد جدا می‌کنیم . مساحت‌سطح محصور به $BB_1C_1D_1DC$ برابر خواهدبودبا: $2n-1$



اگر طولهای B_1B_2 و D_1D_2 را نیزبرابر با واحد جدا نمائیم مساحت سطح محصور به $B_1B_2C_2D_2D_1C_1$ برابر خواهد شدبا $2(n-1)-1$ وبا تکرار این‌عمل نتیجه خواهیم گرفت که سطح مربع ABCD برابر است با :

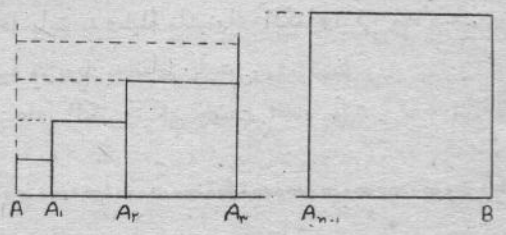
$$[2n-1]+[2(n-1)-1]+[2(n-2)-1]+\dots+[4-1]+[2-1]$$

که برابر می‌شود با $2\Sigma n-n$ و چون مساحت سطح مربع به‌ضلع n برابر n^2 است پس :

$$2\Sigma n-n=n^2 \text{ و } \Sigma n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

***

۲ـ محاسبهٔ Σn^2 : قطعه‌خط AB به‌طول $AB=\Sigma n$ را در نظر می‌گیریم. براین‌قطعه‌خط ابتدا از A قطعه خطهای $AA_1=1$ و $A_1A_2=2$ و ... و $A_{n-1}B=n$...



را جداکرده روی‌هریك از این قطعه خطها مربعی‌بنامی‌کنیم. مجموع‌سطوح این مربعا برابر با Σn^2 است

اگر مجموع سطوح این مربعها را از سطح مستطیل به طول AB وبه‌عرض n کم‌کنیم ، مساحت سطح باقیمانده‌برابر است با :

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+[1+2+\dots+(n-1)]$$

یا به صورت دیگر :

$$\Sigma(n-1)+\Sigma(n-2)+\dots+\Sigma[n-(n-1)]$$

که برابر می‌شود با .

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\dots+\frac{[n-(n-2)][n-(n-1)]}{2}$$

و به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\frac{1}{2}[n^2-n+(n-1)^2-(n-1)+(n-2)^2-(n-2)+\dots]$$

ودر نتیجه برابر است با

$$\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)$$

و چون سطح کل مستطیل فوق‌الذکر برابر $n.\Sigma n$ است پس :

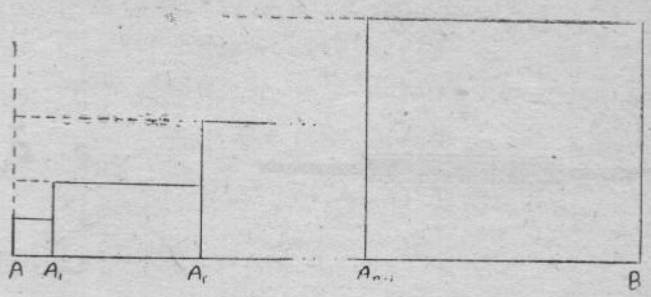
$$\Sigma n^2+\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)=n\Sigma n$$

واز آنجا به‌دست خواهد آمد :

$$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

***

۳ـ محاسبهٔ Σn^p : به‌فرض‌اینکه Σn^{p-1} معلوم باشد قطعه خط AB را به طول Σn^{p-1} اختیارکرده بر آن قطعه



خطهای $AA_1=1^{p-1}$ و $A_1A_2=2^{p-1}$ و ... و $A_{n-1}B=n^{p-1}$ را جداکرده برروی آنها مستطیلهایی می‌سازیم که ارتفاع آنها به ترتیب برابر با ۱ و۲ و۳ و... و n باشد . مجموع سطوح این مربع مستطیلها برابر با Σn^p است و چنانچه مجموع این مساحتها را از مساحت مستطیل به طول AB و به‌عرض n کم‌کنیم . مساحت سطح باقیمانده برابر است با :

$$1^{p-1}+(1^{p-1}+2^{p-1})+\dots+[1^{p-1}+2^{p-1}+\dots+(n-1)^{p-1}]$$

که برابر است با :

$$\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

وبا توجه به‌اینکه مساحت سطح مستطیل فوق‌الذکر برابر با $n\cdot\Sigma n^{p-1}$ است خواهیم داشت :

$$n\Sigma n^{p-1}=\Sigma n^p+\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

واز آنجا :

$$\Sigma n^p=n\Sigma n^{p-1}-[\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1]$$

از فرمول بالا بامعلوم بودن Σn مقدار Σn^2 و از روی آن Σn^3 و بعد Σn^4 و... و بالاخره Σn^p حساب می‌شود

***

تمرین : روابط زیر را محقق کنید .

$$8\Sigma n^3=3(2n+1)\Sigma n^2-\Sigma n$$

$$5\Sigma n^4+\Sigma n^2=6\Sigma n\Sigma n^2$$

$$2\Sigma n^5+(\Sigma n)^2=3(\Sigma n^2)^2$$

$$7\Sigma n^6+5\Sigma n^4=12\Sigma n^2\cdot\Sigma n^3$$

و نتیجه بگیرید :

$$\Sigma n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2=(\Sigma n)^2$$

$$\Sigma n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\Sigma n^5=\frac{1}{12}[3(\Sigma n^2)^2-(\Sigma n)^2]$$

$$\Sigma n^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]$$

مسائل مورد بحث در انجمنهای ریاضی دبیرستانها در اتحاد جماهیر شوروی

(نقل از مقالهٔ «پرورش ریاضیدان» مذکور در مجموعهٔ علمی یکان سال)

برای دانش آموزان سالهای هفتم‌وهشتم

(سن بین‌سیزده‌تا پانزده‌سال) درسال‌تحصیلی۵۶-۱۹۵۵ :

۱ـ روشهای جمع‌کردن سریها

۲ـ دربارهٔ ترسیمات‌هندسی که‌فقط‌باپرگار انجام‌می‌گیرد.

۳ـ ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی .

۴ـ تقارن وحرکت درصفحه .

۵ـ حل‌مسائل ریاضی، به‌وسیلهٔ روشهای مکانیك.

۶ـ بردارها . موارد استعمال آنها درهندسهٔ مقدماتی .

۷ـ قضایای محاسباتی و مسائل ترسیمی .

۸ـ تعبیرهندسی تساویها و نامساویهای جبری‌درجهٔ اول.

برای دانش آموزان کلاسهای نهم ودهم

(سن بین ۱۵ تا ۱۷سال) در سال تحصیلی۵۶-۱۹۵۵:

۱ـ انالیز ریاضی

۲ـ مختصات .

۳ـ بینهایتهای مختلف .

۴ـ مساحت اشکال و تئوری مساحت‌یاب .

۵ـ محاسبات به وسیلهٔ ماشینهای الکترونیکی محاسبه .

۶ـ قضیهٔ مربوط به نقاط ثابت .

۷ـ مغزهای الکترونیکی چیست ؟

اطلاعات مکشوفهٔ جدید دربارهٔ ریاضیات بابل

ذوزنقه و معادلات درجهٔ دوم

نوشتهٔ : **فیلیپ . س . جونس** از دانشگاه میشیگان

ترجمهٔ : **وارتان وارتانیان**

دراین مقاله به مطلب مکشوفهٔ نوینی که ازیك لوحه‌بدست آمده است می‌پردازیم وگرچه این موضوع را قبلا نیز جزء گنجینهٔ ریاضیات بابل می‌دانستیم با وجود این برای آشنائی بیشترخوانندگان باآن مطرح می‌کنیم .

این مسئله نمونهٔ بارزی از مهارت ریاضی بابلیها بوده و بهرحال برای خوانندگان‌آموزنده خواهد بود .

موضوع عبارتست از محاسبهٔ مساحت ذوزنقه با استفادهٔ ازدستگاه معادلات ومعادلات درجهٔ دوم. این مسئله با دومسئلهٔ دیگر ویك جدول ضرایب که محتملا مربوط به‌کارهای مهندسی ودستورالعمل اختلاط‌گل برای‌آجر وحفر زمین‌برای ساختمان بوده است بر روی‌لوحه‌ای‌به ابعاد $15{,}9 \times 9{,}7 \times 3{,}4\,cm$ حك شده است .

مسئله عبارتست از محاسبهٔ طول اضلاع یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین وقتی مساحت‌آن ۱۵۰ بوده و اختلاف طولهای قاعده‌های‌آن $B-b=5$ ۵ وهریك از دو ساق‌آن مساوی دوسوم مجموع دوقاعده به علاوهٔ ۱۰ باشد :

$$l_1=l_2=\frac{2}{3}(B+b)+10$$

ما این مسئله را بااستفاده از قضیهٔ فیثاغورث با محاسبهٔ ارتفاع سپس بابکار بردن فرمول سطح ذوزنقه حل‌کرده و در معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل برحسب b و B مجهول B را با قراردادن $B=b+5$ حذف می‌کنیم .

بابلیها نیزهمین روش را تعقیب می‌کردند بااین اختلاف که فرمول غلطی برای محاسبهٔ سطح ذوزنقه بکارمی‌بردند. آنها مساحت ذوزنقه را حاصل ضرب مقادیر متوسط اضلاع مقابل می‌دانستند .

(این فرمول برای بعضی‌ازچهارضلعی‌ها صحیح است. آیا می‌توانید این چند ضلعی‌هارا پیداکنید) به این ترتیب بابلیها مسئله را به طریق زیرحل می‌کردند (البته آنها اعداد میخی در پایهٔ ۶۰ را بجای اعداد درپایهٔ ده (هندو ـ عربی) بکار میبردند و همچنین بجای حروف وعلامات‌کلمات بکار برده و عملا هیچ فرمولی نمی‌نوشتند وفقط باعبارات «عمل‌کنید ـ انجام دهید» اکتفا می‌کردند . با این‌نحو بیان‌آنها، مقدار مساحت معادل فرمول زیراست :

$$S=\frac{B+b}{2}\cdot\frac{l_1+l_2}{2}$$

(این رابطه برای مساحت غلط بوده ولی تاحدی به‌قدر واقعی نزدیك است .)

$$150=\frac{2b+5}{2}\times\frac{2}{2}\left[\frac{2}{3}(2b+5)+10\right]$$

واگر قراردهیم $x=B+b=2b+5$

$$150=\frac{x}{2}\left[\frac{2}{3}x+10\right]$$

کسرهارا ساده‌کرده وباز می‌کنیم .

$$150\times\frac{3}{2}\times 2=x^2+\frac{3}{2}\times 10x$$

به مربع‌کامل تبدیل می‌کنیم :

$$450+\left[\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 10\right]^2=x^2+\frac{3}{2}\times 10x$$

$$+\left[\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 10\right]^2$$

$$\pm\sqrt{506\frac{1}{4}} = \pm 22\frac{1}{2} = x + 7\frac{1}{2}$$

$$x = -7\frac{1}{2} \pm 22\frac{1}{2}$$

بابلیها به همین مفهوم عمل کرده منتها آنها هیچ تصوری از اعداد منفی نداشتند بنابراین نتیجه می گرفتند که $x = 15$ و یا $B + b = 15$ سپس می‌نوشتند .

$$\frac{B+b}{2} = \frac{15}{2} \quad و \quad \frac{B-b}{2} = \frac{5}{2}$$

و از جمع دورابطه نتیجه می‌گرفتند $B = 10$ و ازکسر آنها $b = 5$ و با قراردادن درفرمول مسئله :

$$l_1 = l_2 = \frac{2}{3} \times 15 + 10 = 20$$

مطلب جالب آنکه برای تحقیق دردرستی مسئله مقادیر بدست آمده را درفرمول مخصوص تعیین سطح قرارارداده و با بدست آوردن مقدار ۱۵۰ به درستی حل واقف میشدند .

برای اینکه تصورروشنی ازطرزعمل بابلیها بدون فرمول وعلامت داشته باشید ذیلا حل آنهارا درج می کنیم. پس ازطرح مسئله می‌نوشتند .

۱) معکوس مقدار $\frac{2}{3}$ را بدست آورید پیدا می کنید $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$ را نصف کنید. پیدا می کنید $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{4}$ را در ۱۵۰ ضرب کنید پیدا می کنید ۲۲۵

توضیح ـ مرحلهٔ (۲) اشتباه است یعنی احتیاجی به‌نصف کردن $\frac{3}{2}$ نیست . نتیجهٔ (۳) درست بوده ولی از $\frac{3}{2} \times 150$ بدست می‌آید مانند رابطهٔ سوم حل ما)

۴) ۲۲۵ را دوبرابر کرده ۴۵۰ بدست می‌آید ـ آنرا به خاطر بسپارید

(توضیح ـ این محاسبات قسمت چپ معادلهٔ ما را تکمیل می کند)

۵) معکوس $\frac{2}{3}$ را حساب کنید می‌شود $\frac{3}{2}$

۶) $\frac{3}{2}$ را نصف کنید می‌شود $\frac{3}{4}$ آنرا در ۱۰ ضرب کنید بدست می‌آید $7\frac{1}{2}$

۷) بنویسید $7\frac{1}{2}$ وآنرا مربع کنید بدست می‌آید $56\frac{1}{4}$

۸) $56\frac{1}{4}$ را به ۴۵۰ که به خاطر سپرده‌اید اضافه کنید به دست می‌آید $506\frac{1}{4}$

۹) جذر $506\frac{1}{4}$ را حساب کنید می‌شود $22\frac{1}{2}$

۱۰) ازجذر فوق $7\frac{1}{2}$ راکسر کنید عدد ۱۵ حاصل مقدار مجهول است

۱۱) ۱۵ را نصف کنید نتیجه می‌شود $7\frac{1}{2}$

۱۲) اختلاف دوقاعده یعنی ۵ را نصف کنید می‌شود $2\frac{1}{2}$

۱۳) $2\frac{1}{2}$ را با $7\frac{1}{2}$ جمع کنید نتیجه می‌شود ۱۰ حال از ۱۰ مقداراختلاف ۵ راکم کنید می‌شود ۵ پس‌قاعدهٔ بزرگتر ۱۰ وکوچکترمساوی ۵ است)

۱۴) درستی حل را تحقیق کنید .

۱۵) حل به طریق فوق است .

بر پایهٔ یك عدهٔ چنین مسائلی است که نتیجه می گیریم بابلیها معادلات درجهٔ دوم با ریشه های مثبت و منطق را با مراحلی که برای تمام معادلات درجهٔ دوم قابل بسط است حل می کرده‌اند بدون آنکه ازعلامات مخصوص استفاده کرده و یا تئوریهای عمومی بوجود آورند .

برنامه برای تعطیلات تابستان

دانش آموزی که در امتحانات خرداد ماه موفق شده است و مایل نیست تعطیلات تابستان را به بطالت بگذراند . مجموعهٔ یکان سال را برای مطالعه انتخاب می‌کند . بدین‌وسیله هم اطلاعات علمی خویش را توسعه داده و هم رابطهٔ بین تحصیلات سال گذشته و سال آینده را محفوظ نگاه‌داشته‌است.

مجموعهٔ علمی یکان سال مجموعه‌ای است شامل آخرین اطلاعات دربارهٔ علوم ریاضی، نجوم ، فیزیك وشیمی ، و جالبترین سرگرمیها و داستانهای تفننی ریاضی

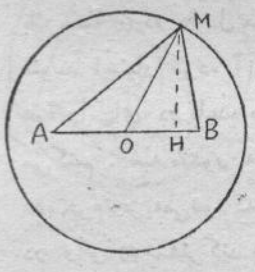
راهنمای ریاضیات متوسطه

قضیه‌هایی از هندسه که در کتابهای درسی فعلی مذکور نیست اما از لحاظ حل‌مسائل شایان کمال اهمیت است .

برای کلاس چهارم ریاضی

قضیهٔ ۱ـ مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل آنها از دونقطهٔ ثابت برابر مقدار ثابت است دایره‌ای است که مرکز آن وسط قطعه خطی است که آن دونقطه را به یکدیگر وصل می‌کند .

برهان ـ فرض می‌کنیم A و B دو نقطهٔ ثابت و M یك نقطه از صفحه و O وسط AB و طول قطعه خط AB برابر $2a$ بوده و داشته باشیم .



$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=K^2 \qquad (1)$$

اگر H تصویر M بر AB باشد درمثلثهای AMO و BMO می توانیم بنویسیم .

$$\overline{MA}^2=\overline{AO}^2+\overline{OM}^2\pm 2OA.OH \qquad (2)$$

$$\overline{MB}^2=\overline{BO}^2+\overline{OM}^2\mp 2OB.OH \qquad (3)$$

(علامت جملهٔ $\pm 2OA.OH$ مربوط است به اینکه زاویهٔ مقابل‌ضلع AM یا BM حاده باشد یا منفرجه وچون یکی از دوزاویهٔ AOM و BOM حاده و دیگری منفرجه خواهد بودجملهٔ مزبور دردو رابطهٔ (۲) و (۳) مختلف‌العلامت است . اگردوزاویهٔ فوق‌الذکر قائمه‌باشند اندازهٔ OH برابر صفر خواهد بود) .

ازجمع نظیر به نظیر طرفین دورابطهٔ (۲) و (۳)حاصل می‌شود :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{OM}^2+\frac{\overline{AB}^2}{2}=2\overline{OM}^2+2a^2$$

وبا توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت .

$$2\overline{OM}^2+2a^2=K^2 \quad \text{و} \quad \overline{MO}^2=\frac{K^2-2a^2}{2} \qquad (4)$$

چنانچه $K^2>2a^2$ یعنی $K>a\sqrt{2}$ باشد داریم :

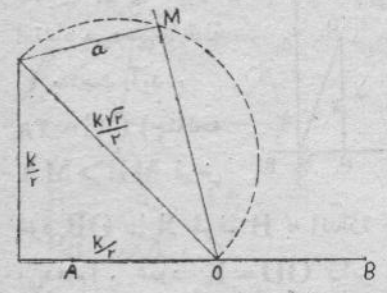
$$OM=\frac{1}{2}\sqrt{2K^2-4a^2}$$

و چون نقطهٔ O ثابت است پس مکان M یك دایره به مرکز O می‌باشد .

رسم OM بامعلوم بودن K و a : از رابطهٔ (۴) که به‌صورت‌زیر نوشته می‌شود :

$$\overline{OM}^2=\frac{K^2}{2}-a^2$$

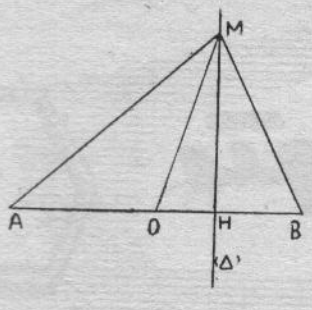
معلوم می‌شود که OM ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که‌وتر آن برابر با $\frac{K\sqrt{2}}{2}$ وضلع دیگرش برابر با a است و مطابق شکل مقابل با معلوم بودن K و a طول OM به وسیلهٔ ترسیم معین می‌گردد .



* * *

قضیهٔ ۲ـ مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت برابر مقدار ثابت است خطی است که در نقطهٔ ثابت برخط واصل بین دونقطهٔ ثابت مفروض عمود می‌باشد.

برهان ـ فرض می‌کنیم A و B دو نقطهٔ ثابت و O وسط AB و M نقطه‌ای از صفحه باشد که :



$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = K^2 \quad (1)$$

از این رابطه معلوم می‌شود که MA>MB و در نتیجه زاویهٔ AOM منفرجه بوده وچنانچه H تصویر M بر AB باشد داریم :

$$\overline{MA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 + 2OA.OH$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OM}^2 - 2OB.OH$$

طرفین دو رابطه را نظیر به نظیر از یکدیگر کم می‌کنیم .

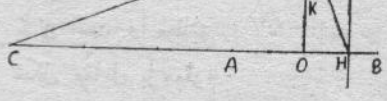
$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 4OA.OH = 4a.OH$$

و با توجه به‌رابطهٔ (۱) خواهیم دانست .

$$OH = \frac{K^2}{4a}$$

یعنی طول OH مقدار ثابت است و چون نقطهٔ O نیز ثابت است پس نقطهٔ H ثابت بوده مکان M خطی است مانند Δ که در نقطهٔ ثابت H بر AB عمود می‌باشد .

رسم مکان با معلوم بودن K و a : از رابطهٔ $4a.OH = K^2$ معلوم می‌شود که K طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ایست که دو قطعهٔ وتر آن با طولهای OH و 4a باشند. مطابق شکل OA را از طرف A به‌اندازهٔ چهار برابر خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به‌دست آید ، OC=4a (چنانچه MB>MA فرض شود OB را از طرف B به اندازهٔ چهار برابر خود امتداد می‌دهیم) . عمود OD=K رابر AB رسم کرده با وصل CD و رسم DH عمود بر CD نقطهٔ H و خط Δ مشخص می‌شود .



برای کلاس پنجم ریاضی

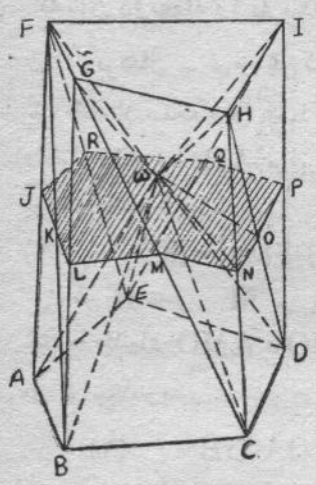
تعریف : جسمی که محصور باشد به دوچند ضلعی واقع در دوصفحهٔ متوازی (دوقاعده) و یك عده مثلث (وجوه جانبی) که هریك از آنها در رأس بایکی از دوقاعده و درضلع مقابل به آن رأس با قاعدهٔ دیگر مشترك باشند **شبه منشور** نامیده می‌شود . ارتفاع شبه منشور فاصلهٔ دو صفحهٔ دوقاعده می‌باشد .

(چند ضلعیهای دو قاعدهٔ شبه منشور ممکن است عموماً با تعداد اضلاع مختلف می‌باشند و ممکن است هردو دارای‌یك عدهٔ ضلع باشند . ممکن است که دو مثلث مجاور از وجوه جانبی شبه منشور در یك صفحه واقع بوده و ذوزنقه‌ای تشکیل دهند .)

صفحه‌ای که از دو قاعدهٔ شبه منشور به یك فاصله باشد همهٔ یالهای جانبی را نصف می‌کند (چرا ؟) و چند ضلعی که توسط این صفحه در شبه منشور ایجاد می‌شود **مقطع متوسط** شبه منشور نامیده می‌شود .

قضیه : حجم شبه منشور برابر است با حاصل ضرب یك ششم ارتفاع آن در مجموع مساحتهای دوقاعده و چهار برابر مساحت مقطع متوسط آن

شبه منشور ABC....HI مفروض است و چند ضلعی JKL....R مقطع متوسط آن می‌باشد . طول ارتفاع شبه منشور را با h و مساحت دو قاعده و مقطع متوسط را به ترتیب با S و S' و S" می‌نمائیم. یك نقطهٔ ω در داخل مقطع متوسط اختیار کرده آنرا به همهٔ رأسهای دو قاعده وصل می‌کنیم . شبه منشور به یك عده هرم تجزیه‌می‌شود که همه در رأس ω مشترکند و دو قاعدهٔ شبه منشور و وجوه جانبی آن به‌ترتیب قاعده‌های این هرمها می‌باشند . حجم هرم به رأس ω و به مساحت قاعدهٔ S برابر است با



$$v_1 = \frac{1}{3} \times \frac{h}{2} \times S = \frac{1}{6} hS$$

و حجم هرم به رأس ω و به‌مساحت قاعدهٔ S' برابراست با

$$v_2 = \frac{1}{6} hS'$$

هرم ω.CHI را در نظر می‌گیریم حجم این هرم چهار برابر حجم هرم ω.CNO است (زیرا دو هرم ω.CNO و ω.CHI در ارتفاع مشترك بوده و مساحت قاعدهٔ CHI چهار برابر مساحت قاعدهٔ CNO است).حجم

هرم $\omega.CNO$ برابر است با (مساحت ωNO)$\frac{h}{6}$ بنابراین

حجم هرم $\omega.CHI$ برابر می‌شود با (مساحت ωNO)$\frac{h}{6}\times 4$

ونتیجه می‌شود که مجموع حجمهای هرمهای به‌رأس ω وباقاعده های وجوه جانبی شبه‌منشور برابراست با

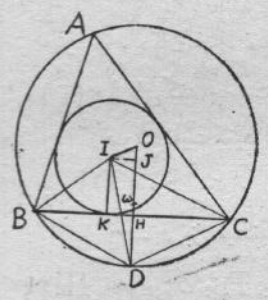
$v_4 = 4\times\frac{h}{6}\times S''$ وازآنجاحجم شبه منشور برابرمی‌شودبا:

$$v=\frac{1}{6}h(S+S'+4S'')$$

برای کلاس ششم ریاضی

قضیهٔ اولر : اگر R شعاع دایرهٔ محیطی یك مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن و d طول خط المرکزین این دو دایره باشد رابطهٔ زیر برقرار است .

$$d^2=R^2-2Rr$$



فرض می‌کنیم I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. چنانچه D وسط کمان BC ازدایرهٔ محیطی، ω وسط OD و H و K به‌ترتیب تصویرهای O و I بر BC و J تصویر I بر OD باشد در مثلث IOD داریم :

$$\overline{ID}^2-\overline{IO}^2=2\overline{DO}\cdot\overline{\omega J}$$

$$\overline{ID}^2-\overline{IO}^2=2\overline{DO}(\overline{HJ}-\overline{H\omega})$$

$$=2\overline{DO}\cdot\overline{HJ}-2\overline{DO}\cdot\overline{H\omega}$$

$$\overline{ID}^2-\overline{IO}^2=2\overline{DO}\cdot\overline{KI}-2\overline{DO}\cdot\overline{H\omega}\quad(1)$$

هریك از مثلثهای BDI و CDI متساوی‌الساقین‌بوده $DB=DI=DC$ و در مثلث BDO داریم

$$\overline{BO}^2-\overline{BD}^2=2\overline{DO}\cdot\overline{H\omega}$$

یا

$$\overline{DO}^2-\overline{DI}^2=2\overline{DO}\cdot\overline{H\omega}$$

واز آنجا رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\overline{ID}^2-\overline{IO}^2=2\overline{DO}\cdot\overline{KI}-(\overline{OD}^2-\overline{DI}^2)$$

وبه‌صورت دیگر:

$$d^2=2Rr-R^2 \quad \text{یا} \quad -d^2=2Rr-R^2$$

قضیهٔ اولر : اگر R شعاع دایرهٔ محیطی یك مثلث و r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A از آن و d طول خط‌المرکزین این دو دایره‌باشد رابطهٔ زیر برقرار است :

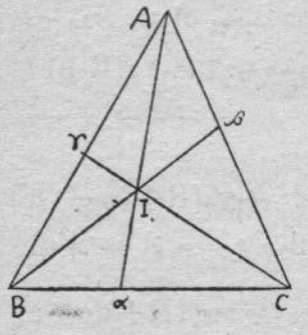
$$d^2=R^2+2Rr_a$$

اثبات نظیر حالت دایرهٔ محاطی داخلی

***

قضیهٔ سوا : هرگاه از نقطهٔ I واقع در صفحهٔ مثلث ABC به رأسهای A و B و C وصل کنیم تا اضلاع یا امتداداضلاع BC و CA و AB رابه‌ترتیب در α و β و γ قطع کنند رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$



در مثلث $AB\alpha$ نسبت به مورب $CI\gamma$ و بنابر قضیهٔ منلائوس‌داریم:

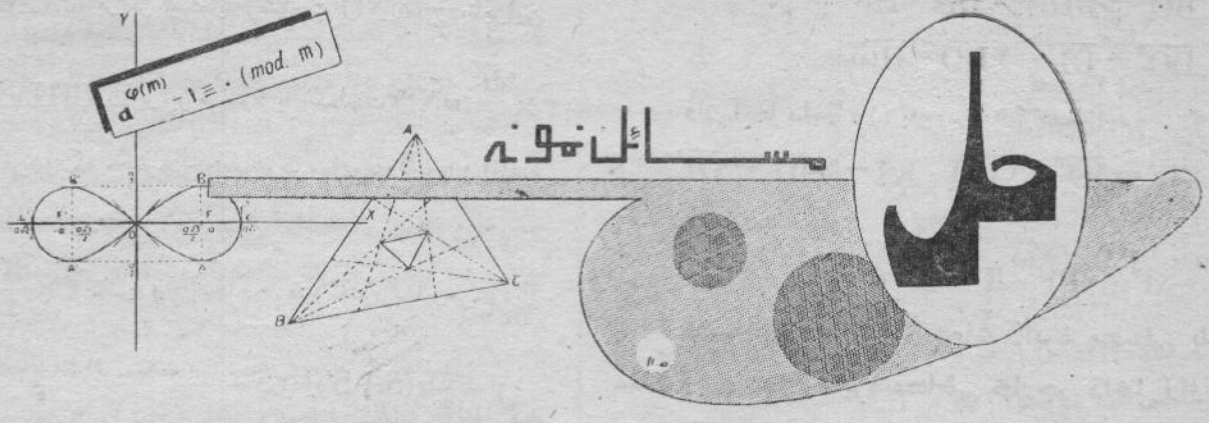
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{C\alpha}}\cdot\frac{\overline{I\alpha}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1$$

و در مثلث $AC\alpha$ نسبت به مورب $BI\beta$ داریم

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{IA}}{\overline{I\alpha}}=1$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین دو رابطهٔ اخیر و با توجه بـه اینکه $\overline{BC}=-\overline{CB}$ رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید .

جایزهٔ نوبل چیست؟ درچه رشته‌هایی وبه‌چه‌اشخاصی داده می‌شود؟ تاکنون چه‌اشخاصی و از چه ملیتهایی جوایز نوبل را دریافت داشته‌اند ؟ تاکنون چه کشوری در مجموع جوایز نوبل مقام اول را دارا است ؟ پاسخ همهٔ این پرسشها در مقالهٔ نوبل مجموعهٔ علمی یکان‌سال داده شده است .



برای کلاسهای چهارم

حل مسئلهٔ ۲۲۶۱ـ نواری به طول l و به ضخامت e مفروض است. آنرا دوراستوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ R می‌پیچیم. شعاع جدید استوانه را پس از پیچیدن نـوار پیدا کنید. هر گاه بخواهیم شعاع استوانه مقدار مفروض a شود با معلوم بودن e مقدار l را حساب کنید.

حل: مقدار نواری که لازم است تا یك دورروی استوانه پیچیده شود برابر است با محیط قاعدهٔ استوانه یعنی برابر با $l_1 = 2\pi R$ می‌باشد. شعاع قاعدهٔ استوانه با این یك دورنوار $R+e$ بوده و از اینجهت مقدار نوار لازم برای اینکه دردور دوم روی استوانه پیچیده شود برابر خواهد بود با $l_2 = 2\pi(R+e)$ وبه همین ترتیب‌مقادیر l_3 و ... l_n حساب شده خواهیم داشت.

$$l = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$
$$l = 2\pi R + 2\pi(R+e) + \cdots + 2\pi[R+(n-1)e]$$

l عبارتست از مجموع جمل تصاعد حسابی و خواهیم داشت

$$l = \frac{n}{2}[4\pi R + (n-1)2\pi e] = \pi n(2R + ne - e]$$

با معلوم بودن مقدار l نسبت به مجهول n معادلهٔ درجهٔ دوم زیررا خواهیم داشت:

$$\pi e n^2 + \pi(2R-e)n - l = 0$$

از این معادله همواره یك مقـدار قابل قبول برای n به دست می‌آید و با معلوم شدن مقدار n اندازهٔ شعاع جدید استوانه برابر با $R' = R + ne$ به دست خواهدآمد.

چنانچه $R' = a$ و معلوم باشد از رابطهٔ $R + ne = a$ مقدار n واز روی‌آن مقدار l معلوم خواهد شد:

(پرویز برهامی)

برای کلاس پنجم ریاضی

۲۵۷۲ـ در صفحهٔ P مربع $ABCD$ به ضلع $2a$ مفروض است از IJ خط واصل بین اوساط دوضلع مقابل BC و AD از مربع مفروض صفحه‌ای عمود برصفحهٔ P رسم نموده نیمدایرهٔ (Γ) را به قطر IJ روی آن رسم مینمائیم اگر S نقطهٔ دلخواهی از محیط این نیمدایره باشد.

اولا ـ الف ـ ثابت‌کنید صفحات SAD و SBC برهم عمودند. مکان فصل مشترك این صفحات وقتی‌که S نیمدایرهٔ (Γ) را طی‌کند چیست؟.

ب ـ ثابت‌کنید ارتفاع نظیر ضلع SD از مثلث SAD بر DJ عمود است.

ج ـ فرض میکنیم H محل تلاقی ارتفاعات مثلث SAD و H' تصویرآن بر P باشد ثابت‌کنید H' محل تلاقی‌ارتفاعات مثلث ADJ است. طول $H'I$ را بر حسب a محاسبه‌کنید.

د ـ در صورتی‌که S محیط نیمدایرهٔ (Γ) را طی‌کند مکان هندسی نقطهٔ H چیست؟

ه ـ اگر K محل تلاقی ارتفاعات مثلث SBC و K' تصویر آن بر صفحهٔ P باشد ثابت‌کنید حاصل ضرب $H'K \cdot K'K$ مقداری است ثابت واین مقدار ثابت را به حسب a پیداکنید. (توجه‌کنید K و K' همان وضعی را دارندکه H و H')

ثانیاً ـ الف ـ فرض می‌کنیم $SI = x$ باشد مقـدار $y = SA^2$ را به حسب a و x محاسبه‌کنید. و تحقیق‌کنید نمایش تغییرات $y = SA^2$ را وقتی‌که S نیمدایرهٔ (Γ) را طی‌کند.

ب ـ در صورتیکه مثلث SDA متساوی‌الاضلاع باشد

مقدار x چقدر است؟ ونوع مثلث SBC را در این حالت تعیین کنید.

ج ـ به ازاء چه مقدار x مثلث SAD قائم‌الزاویه است.

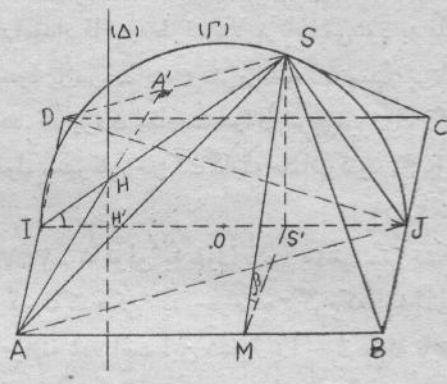
ثالثاً الف ـ فرض می‌کنیم $SIJ=\alpha$ز ومسطحهٔ فرجهٔ (P و $\overline{AB}$ و S) برابر β باشد

ثابت کنید $tg\beta=\sin 2\alpha$

ب ـ ثابت کنید یك مقدار برای α می‌توان پیدا کرد که درازاء آن مثلث SAD متساوی‌الاضلاع باشد. نوع مثلث SBC را در این حالت تعیین کنید.

ج ـ به ازاءچه مقدار α مثلث SAD قائم‌الزاویه است.

د ـ جای S را آنطور تعیین کنید تا $\beta=\frac{\pi}{4}$شود. حجم و سطح کل هرم S.ABCD ونیز طول شعاع کره‌ای راکه در این حالت می‌توان بر هرم مذکور محیط کرد به حسب a محاسبه کنید.



حل ـ اولا ـ صفحهٔ SIJ صفحهٔ عمود منصف AD و BC است باتوجه به اینکه زاویهٔ ISJ برابر ۹۰ درجه است به آسانی نتیجه می‌شود که دو صفحهٔ مذکور برهم عمودند. فصل مشترك صفحات SBC و SAD که از دو خط موازی BC و AD گذشته‌اند با این دو خط موازی است پس وقتی که S نیمدایرهٔ (Γ) را طی می‌کند این فصل مشترك قسمتی از سطح استوانه‌ای را ایجاد می‌کند که نیمدایرهٔ (Γ) منحنی هادی آن و BC راستای مولد این سطح میباشد.

ب ـ اگر AA' ارتفاع نظیرضلع SD باشد چون در صفحهٔ SAD قرار دارد بر SJ و ازآنجا بر صفحهٔ SDJ و بالنتیجه بر JD عمود خواهد بود.

ج ـ H' بر IJ یعنی یکی از ارتفاعات مثلث JAD قراردارد. JD بر HH' و AA' یعنی بر صفحهٔ AHH' عمود است پس بر AH' عمود بوده و حکم ثابت است. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ IH'A و IDJ (اضلاع زوایای حادهٔ آنها نظیر بنظیر برهم عمودند) داریم $\frac{IH'}{ID}=\frac{IA}{IJ}$ ولی

$$IH'=\frac{a}{2} \text{ پس } IJ=2a \text{ و } a=IA=ID$$

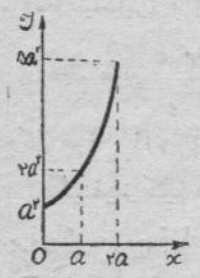
د ـ چون فاصلهٔ H' (تصویر یك وضع غیر مشخص H بر صفحهٔ P) تا I ثابت بوده و برابر $\frac{a}{2}$ است معلوم‌است وقتی که S نیمدایرهٔ (Γ) را طی می‌کند H روی خطی تغییر مکان میدهدعمودبر صفحهٔ P در H' محدودبه نقطهٔ H' ومحل‌تلاقی آن با نیمدایرهٔ (Γ)ـ برعکس‌اگرهر نقطه مانند H روی این خط (خطی‌که در H' بر صفحهٔ P عمود می‌شود) اختیارنموده فرض‌کنیم IH نیمدایره را در S قطع‌کند می‌توان به آسانی تحقیق‌کردکه این نقطه محل تلاقی ارتفاعات مثلث SAD است.

ه ـ از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ IH'H و KK'J (اضلاع زوایای حادهٔ این دو مثلث نظیر به نظیر برهم عمودند) داریم $\frac{HH'}{K'J}=\frac{IH'}{KK'}$ یا $H'H\cdot K'K=IH'\cdot K'J$

و داریم $IH'=K'J=\frac{a}{2}$ پس $H'H.K'K=\frac{a^2}{4}$

ثانیاً ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SIA می‌توان نوشت :

$$y=SA^2=SI^2+IA^2=x^2+a^2$$



این تابع وقتی معین است که $0<x<2a$ باشد در این صورت y بین‌صفرتا $5a^2$ تغییر خواهدکرد. نمایش هندسی آن قوسی از سهمی شکل مقابل است.

ب ـ درصورتیکه‌مثلث SAD متساوی‌الاضلاع باشد داریم

$$SA=SD=AD=2a$$

واز آنجا $x=SI=a\sqrt{3}$

ونیز $\overline{JS}^2=\overline{IJ}^2-\overline{SI}^2=4a^2-3a^2=a^2$

پس $JS=JB=JC$ یعنی مثلث SBC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

ج ـ بدیهی است باید داشته باشیم :

$$x=SI=IA=ID=a$$

ثالثاً ـ اگر SS' عمود بر صفحهٔ P باشد داریم :

$$\sin\alpha=\frac{SS'}{SI}$$

$\cos\alpha=\frac{S'I}{IS}$ ویا $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=\frac{2SS'.S'I}{SI^2}$

واما $SI^2=IJ.IS'$ پس $\sin 2\alpha=\frac{SS'}{a}$

حال اگر $S'M$ عمود بر AB رسم‌شود بنابه‌قضیهٔ سه‌عمود SM عمود بر AB است و $\widehat{SMS'}=\beta$

و $tg\beta=\frac{SS'}{MS'}=\frac{SS'}{a}$ پس $tg\beta=\sin 2\alpha$

ب ـ درصورتیکه مثلث SAD متساوی‌الاضلاع باشد دیدیم $SI=x=a\sqrt{3}$ و از آنجا $S'I=\frac{3a}{2}$ و

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{6}$ است و مثلث SBC در این‌حالت مثلث قائم‌الزاویه است .

ج ـ برای‌آنکه SAD قائم‌الزاویه باشد باید

$x=a=2a\cos\alpha$

و ازآنجا $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\frac{\pi}{3}$ است .

د ـ درصورتیکه $\beta=\frac{\pi}{4}$ باشد $\sin 2\alpha=1$ خواهد شد

پیداست که $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ یا $\alpha=\frac{\pi}{4}$ است . در این حالت S بروسط نیمدایرهٔ (Γ) و S' بر O مرکز مربع قراردارد .

حجم هرم : $v=\frac{4a^3}{3}$ ،

سطح‌کل هرم : $S=4a^2(1+\sqrt{2})$ است .

اگر فرض‌کنیم در صفحهٔ SBS' (S بروسط نیمدایره و S' برمرکز مربع قرار دارد) عمود منصف SB امتداد SS' را در O' قطع‌کند O' مرکز کرهٔ محیطی هرم $S.ABCD$ است و طول شعاع‌آن $O'S=\frac{3a}{2}$ است (زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ $SS'B$ اگر N وسط SB فرض شود می‌توان نوشت :

$(SN.SB=SS'.SO'$

(محمدعلی شیخان)

کلاس ششم ریاضی

سؤالات امتحان مکانیك سال ششم ریاضی دبیرستانها در شهریورماه ۱۳۴۳ (دریکان‌سال مخصوص امتحانات نهایی از قلم افتاده است)

طرح و حل از: **دکتر ابوالقاسم قلم سیاه**

(مدت ۲٫۵ ساعت)

۲۵۷۳ ـ ماشین اتوودی دارای دو وزنه به جرمهای $M=90$ گرم و $M'=100$ گرم است سربار $m=20$ گرم را روی M (وزنهٔ ۹۰ گرمی) میگذاریم و دستگاه را رها میسازید تا شروع به حرکت‌کند

اولا سرعت دستگاه را پس از ۳ ثانیه حرکت حساب کنید . (۱٫۵ نمره)

ثانیاً اگر در آخر ثانیهٔ سوم ، سربار ۲۰ گرمی حذف شود حرکت دستگاه پس از حذف سربار چگونه است .

معادلات‌این‌حرکت را بنویسید . زمانی‌که طول میکشد تا سرعت دستگاه صفر شود و همچنین مسافتی‌که وزنهٔ M در این زمان می‌پیماید چه اندازه است . $g=980C.G.S$ (۲٫۵ نمره)

۲۵۷۴ـ گلوله‌ای به جرم ۱۰۰ گرم با سرعت ۸۰۰متر برثانیه درامتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود به علت وجود مقاومت هوا با سرعت ۴۰۰ متربرثانیه به مبدأ پرتاب اولیه برمی‌گردد. کارنیروی مقاومت هوا را برحسب ژول وکیلوگرم متر در طول مسیر کلی حرکت‌گلوله حساب‌کنید. $g=MKS$ (۲٫۵ نمره)

۲۵۷۵ـ شاغولی به طول ۱۰۰ سانتی متر تشکیل یافته است از گلولهٔ‌کوچکی به جرم ۲۰ گرم‌که به انتهای نخ بی‌وزنی‌آویخته شده است این شاغول را حول نقطهٔ ثابتی دریك سطح قائم میچرخانند . اگرشاغول درهرثانیه ۳ دور بچرخد مطلوبست : اولا سرعت زاویه‌ای (به رادیان) ، سرعت خطی (به متر درثانیه) ونیروی‌گریز از مرکز (برحسب‌کیلوگرم) برای سهولت محاسبه قراردهید $\pi=3$ و $g=10m/s^2$ (۲ نمره)

ثانیاً ـ اگردرحین دوران‌گلوله به مانع سختی برخورد کند وتمام انرژی‌آن به حرارت‌تبدیل شود چندکالری حرارت تولید می‌گردد $J=418\frac{\text{ژول}}{\text{کالری}}$ (۱٫۵ نمره)

سؤالات:* ـ سرعت متوسط وسرعت لحظه‌ای‌را دریك حرکت متغیر مستقیم‌الخط تعریف‌کنید و واحدهای آنرا دردستگاههای مختلف بنویسید . (۲ نمره)

* ـ محاسبهٔ شتاب در سطح شیب دار در حالات مختلف. (۲ نمره)

* ـ قوانین پاندوك مرکب را بنویسید و پاندول سادهٔ همزمان پاندول مرکب را تعریف‌کنید . (۲ نمره)

* ـ ثابت کنید در یك جسم منفرد (مانند جسمی که در خلاء سقوط میکند) مقدار کل انرژی مکانیکی همواره ثابت است (اصل بقاء انرژی مکانیکی) (۲ نمره)

* ـ آزمایش میکولسکو برای تعیین j معادل مکانیکی حرارت . (شرح و شکل) (۲ نمره)

حل : مسألهٔ اول ـ ۱) شتاب حرکت دستگاه ازفرمول زیر حساب میشود :

$$\gamma=\frac{(M+m-M')}{M+M'+m}g$$

و یا $\gamma=\frac{(۹۰+۲۰-۱۰۰)۹۸۰}{۲۱۰}=\frac{۱۴۰}{۳}\ cm/s^۲$

وسرعت حرکت دستگاه پس از سه ثانیه حرکت :

$$x=\gamma t=\frac{۱۴۰}{۳}\times ۳=۱۴۰cm/s$$

۲) پس از حذف سربار ۲۰ گرمی حرکت دستگاه متشابه‌التغییر کند شونده است با شتاب :

$$\gamma'=\frac{M'-M}{M+M'}g=\frac{(۱۰۰-۹۰)}{۱۹۰}\times ۹۸۰$$

$$=\frac{۹۸۰}{۱۹}\ cm/s^۲$$

و با سرعت اولیه $V_۰=V=۱۴۰\ cm/s$.

معادلات این حرکت عبارتند از :

$$\begin{cases} x=V_۰t-\frac{۱}{۲}\gamma' t^۲=۱۴۰t-\frac{۴۹۰}{۱۹}t^۲ \\ V=V_۰-\gamma' t=۱۴۰-\frac{۹۸۰}{۱۹}t \end{cases}$$

در لحظهٔ توقف $V=۰$

پس زمانی که طول میکشد تا دستگاه متوقف شود برابر است با :

$$t=\frac{V_۰}{\gamma'}=۱۴۰\times\frac{۱۹}{۹۸۰}=\frac{۱۹}{۷}Sec$$

و مسافت طی شده توسط وزنهٔ M دراین مدت :

$$x=\frac{V_۰^۲}{۲\gamma'}=\frac{۱۴۰\times۱۴۰}{۲\times\frac{۹۸۰}{۱۹}}=۱۹۰cm$$

مسئلهٔ دوم ـ طبق قضیهٔ فرس ویو تغییر انرژی جنبشی گلوله برابر است باکار نیروی مقاومت هوا یعنی :

$$W=\frac{۱}{۲}MV_۰^۲-\frac{۱}{۲}MV^۲$$

به ازاء $M=۱۰۰g=۰ر۱kg$ و $V_۰=۸۰۰m/s$

و $V=۴۰۰\frac{m}{s}$ داریم

$$W=\frac{۱}{۲}M(V_۰+V)(V_۰-V)=$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۰ر۱\times ۱۲۰۰\times ۴۰۰=۲۴۰۰\ ژول$$

و به ازاء $g=۱۰^{MKS}$:

$$W=\frac{۲۴۰۰}{۱۰}=۲۴۰kgm$$

مسئلهٔ سوم : ۱) سرعت زاویه‌ای

$$\omega=۲\pi N=۲\times۳\times۳=۱۸Rad/s$$

سرعت خطی $V=R\omega=۱\times۱۸=۱۸m/s$

نیروی گریز از مرکز :

$$f=mR\omega^۲=۰ر۰۲۰\times۱\times۱۸^۲=۶ر۴۸$$ نیوتن

به ازاء $g=۱۰^{MKS}$:

$$f=\frac{۶ر۴۸}{۱۰}=۰ر۶۴۸\ kg$$

۲) انرژی جنبشی گلوله در حین دوران برابر است با :

$$E=\frac{۱}{۲}mV^۲=\frac{۱}{۲}\times ۰ر۰۲۵\times۱۸^۲=۳ر۲۴$$ ژول

در برخورد گلوله به مانع سخت تمام این انرژی به حرارت تبدیل میشود وحرارت حاصل برابر است با :

$$Q=\frac{E}{j}=\frac{۳ر۲۴}{۴ر۱۸}=۰ر۷۷۵\ Cal$$

☆☆☆ **یکان سال مخصوص امتحانات نهایی** ☆☆☆

شامل حل مسائل ریاضی ، مکانیك ، فیزیك و شیمی امتحانات نهایی سال ۱۳۴۳ ایران ـ مسائل امتحانات نهایی کشورهای خارج

این مجموعهٔ مفید را که در عین حال هم **راهنمای امتحانات نهایی کلاسهای ششم و هم راهنمای کنکور** است از ادارهٔ مجله تهیه نمائید

تعمیم و راه حل دیگر مسئلهٔ ممتاز صفحهٔ ۹۹ یکان سال

مهندس خلیل خوئی

در یك چهار ضلعی غیرمشخص متوازی‌الاضلاعی چنان محاط کنید که اولا رؤس آن روی اضلاع (یا امتداد اضلاع) چهار ضلعی بوده و ثانیا پهلوهایش موازی امتدادهای داده شده باشد .

برای حل این مسئله اول گوئیم مکان هندسی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که سه رأس آن برسه ضلع چهارضلعی قرار گرفته وپهلوهایش موازی دوامتداد داده شده باشد یك خط است که وضع آن را مشخص میکنیم .

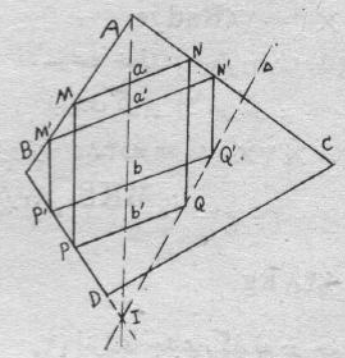
اگر MNPQ و M'N'P'Q' دو متوازی‌الاضلاع مرسوم طبق حکم مسئله باشندو AI خطی موازی امتداد یکی ازپهلوهای متوازی‌الاضلاع و I محل برخورد آن با ضلع BD از چهار ضلعی باشد از تشابه دومثلث AMN و AM'N' نتیجه میشود که :

$$\frac{Ma}{aN}=\frac{M'a'}{a'N'}$$

چون $M'a'=P'b'$ و $a'N'=b'Q'$ و $Ma=Pb$

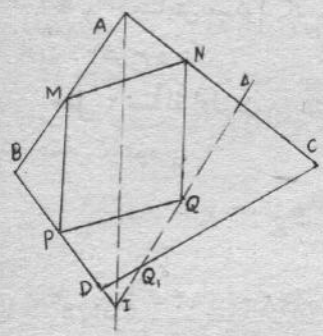
و $aN=bQ$ است رابطهٔ زیر محقق می‌باشد :

$$\frac{bP}{bQ}=\frac{b'P'}{b'Q'}$$



و از این رابطه نتیجه می‌شود که سه خط BD و AI و QQ' در یك نقطه به هم میرسند و چون I محل برخورد BD و AI است پس QQ' هم از I خواهد گذشت و گوئیم مکان هندسی Q خطی است که از I میگذرد .

برای مشخص کردن خط QQ' کافی است که MN را موازی یکی از امتداد ها و AI را موازی امتداد دیگر رسم کنیم و MP را بموازات AI رسم کرده و نقطهٔ P را بدست آوریم از P

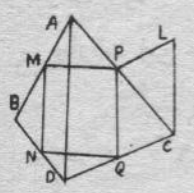


به موازات MN رسم و روی آن طول PQ را مساوی MN جدا کرده و نقطهٔ Q را مشخص می‌کنیم و مکان Q خط IQ≡(Δ) مشخص میشود . محل برخورد این مکان با DC رأس چهارم متوازی‌الاضلاع خواسته شده خواهد بود (Q_1) .

بحث: اگر AI از D بگذرد تعداد متوازی‌الاضلاعهایی که‌واجدشرط مسئله باشد بی‌نهایت است. (همچنین اگر BC||MN باشد باز به همین منوال است)

واگر Δ موازی CD باشد نقطهٔ Q_1 در بی‌نهایت قرار گرفته و طبعاً جوابی به مبنای هندسهٔ اقلیدسی وجود نخواهد داشت

توضیح : برای روشن شدن قسمت اول بحث که یکی از امتداد موازی یکی از دوقطر چهار ضلعی است گوئیم که اگر خط دلخواهی



موازی AC رسم کنیم که AB و AD را در نقاط M و N قطع کند. درمثلث ACD میتوان پاره خطی مساوی وموازی آن تکیه داد مانندPQ. پس شکل MNPQ متوازی‌الاضلاع است.(MN||CD و CL=LP اختیار شده است)

چند سطری از مقالهٔ «نجوم» مذکور در مجموعهٔ علمی یکان سال

سرعت آفرینش به تقریباً یك اتم ئیدرژن دریك پای مکعب (تقریباً ۳۰ دسیمترمکعب) در هرچند میلیارد سال می‌رسد واضح است که چنین محصولی کوچکتر وکمتراز آن است که بتوان آن راکشف ونمایان کرد . اما توجه به این نکته هم مهم است که آزمایشهایی که قانون بقاء ماده برمبنای آنها استوار است ، با ضریبهایی‌ازنوع صدها میلیارد، درشت تر ازآنند که امکان آفرینش ماده را با سرعتی آنقدر ناچیز که دیدیم نفی کنند . به این ترتیب مخالفتی بین فرضیهٔ آفرینش مداوم وواقعیات قابل مشاهده نیست هرچند فرضیهٔ مذکور مسلماً با فرمولهای ریاضی معمولی سرشوخی ندارد . این عدم توافق طوری است که بسیاری از دانشمندان را برآن می‌دارد که فرضیهٔ دیگری را ترجیح دهند.

آنچه مورد علاقهٔ دانشمندان متعدد است مبتنی بر فرضیهٔ نسبیت است که بیان قوانینش در مورد وضع ماده در مجاورت ما بیشتر از همه با مشاهدات تطبیق می‌کند . نسبیت متضمن قانون بقای ماده است و در نتیجه در تعبیر عادی خود بااصل کامل جهان شناسی، که با انبساط جهان لازمه دارد ، سازگار نیست . فرض اول (همنواختی) با نسبیت عام سازش دارد. انبساط جهان نه‌تنها مستقیماً از راه مشاهده استنباط شده بلکه تا حدی نظریه نیز آن را ایجاب می‌کند . ترکیب همنواختی و انبساط و نسبیت به وجود جهانی همنواخت و متغیر و در حال تکامل منجر می‌شود . در هر حال همنواختی در مقیاسی بزرگ وجود دارد و در هرمکان تغییر روی می‌دهد اما به قسمی که همهٔ نواحی باهم پیش می‌روند وبدین طریق همنواختی دستگاه محفوظ می‌ماند .

مسائل امتحانات ثلث دوم دبیرستانها

دنباله از شمارهٔ قبل

جبر کلاس چهارم طبیعی

دبیرستان هدف ۱

۲۵۷۶ـ دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} \frac{y+1}{5}=\frac{x+2}{7}=\frac{z-1}{2} \\ 2y-x+2z=9 \end{cases}$$

۲۵۷۷ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش جوابهای دستگاه زیر باشد .

$$\begin{cases} 3x'+x''=10m+7 \\ x'+2x''=5m+4 \end{cases}$$

۲۵۷۸ـ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2-(4m+3)x+3m^2+5m+2=0$$

مفروض است .

اولاً ـ m را طوری تعیین کنید که دو ریشهٔ معادله قرینه باشند .

ثانیاً ـ m را طوری تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله رابطهٔ $\frac{1}{3}=\frac{2}{x'}+\frac{2}{x''}$ برقرار باشد .

۲۵۷۹ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید .

$$\frac{3-2x}{x+2}>2$$

۲۵۸۰ـ معادلهٔ زیر را حل کنید ـ

$$(2+\sqrt{2})x^2-(2\sqrt{2}+1)x+1=0$$

دبیرستان هدف ۲ دختران

۲۵۸۱ـ دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{3x}{4}-\frac{y}{3}=\frac{1}{12} \\ x+y=z \\ \frac{2x}{3}+\frac{z}{2}=2\frac{1}{6} \end{cases}$$

۲۵۸۲ـ مقادیری از x را که در نامعادلهٔ زیر صدق میکند تعیین کنید .

$$\frac{3x-4}{2x-1}-\frac{x-1}{2x+1}>1$$

۲۵۸۳ـ عبارت زیر را ساده کنید .

$$\left(a^{-\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}}\sqrt{ax^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

۲۵۸۴ـ اولا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیدکه ریشه های آن $\frac{m}{2}$ و $\frac{m-3}{3}$ باشد .

ثانیاً ـ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x(x+1)-\frac{m}{2}=\frac{m}{6}(5x-m)$$

را حل کنید .

ثالثاً ـ ثابت کنید این معادله بازاء جمیع مقادیر m دارای دوریشهٔ حقیقی است .

رابعاً ـ m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله مساوی صفر باشد .

خامساً ـ m را طوری تعیین کنیدکه یکی از ریشه‌های معادله‌برابر یك باشد ودر اینصورت باکمك روابط بین‌ضرائب

وریشه‌ها ریشهٔ دیگر معادله را بدست آورید .

۲۵۸۵ـ با استفاده از قضایای لگاریتم عبارت زیر را بسط دهید .

$$\log \frac{3x^2y}{5\sqrt[7]{x^2}} = ?$$

۲۵۸۶ـ مطلوبست محاسبهٔ A تا یکصدم تقریب در صورتیکه بدانیم $\log A = 2/8547$

دبیرستان هدف ۳

۲۵۸۷ـ اگر

$$x = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \quad و \quad y = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

باشد مطلوبست محاسبهٔ عددی عبارت

$$z = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

۲۵۸۸ـ عبارت زیر راباقوای مثبت ورادیکالی بنویسید و ساده کنید .

$$(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{1}{2}}-1)\times(x^{\frac{1}{3}}y^{-1})(x^{\frac{1}{2}}y^{-1})$$

۲۵۸۹ـ علامت عبارت $4x^4-12x^3-x^2+3x$ را تعیین کنید .

۲۵۹۰ـ کسر زیر را ساده کنید .

$$\frac{a^3-5a^2+7a-3}{a^3-3a+2}$$

۲۵۹۱ـ صحت تساوی

$$\frac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9}-\sqrt{65}}$$

را ثابت کنید .

۲۵۹۲ـ مطلوبست حل و بحث نامعادلهٔ زیر :

$$\frac{3x-1}{m}+\frac{x}{m-1} > \frac{5x+3}{m^2-m}$$

دبیرستان هدف شمارهٔ ٤

۲۵۹۳ـ مخرج کسر زیر را گویاکنید .

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$$

۲۵۹۴ـ دستگاه زیر را حل‌کنید .

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{3} = \frac{3y-2}{2} = \frac{5z+1}{6} \\ 2x+3y-5z = 1 \end{cases}$$

۲۵۹۵ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید .

$$\frac{3x+1}{x-2} < \frac{x-2}{3x+1}$$

۲۵۹۶ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن $x'' = m-3$ و $x' = m+1$ باشد .

۲۵۹۷ـ معادلهٔ

$$x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3 = 0$$

مفروض است .

اولاـ m را بقسمی‌پیداکنیدکه یکی از جوابهای معادله ۳ باشد .

ثانیاً بازاء $m = 2$ جواب دیگر معادله را محاسبه‌کنید

ثالثاًـ m را طوری تعیین‌کنیدکه بین ریشه‌های معادله این رابطه برقرار باشد.

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} = -1$$

مسائل هندسه چهارم طبیعی

دبیرستان هدف ۱

۲۵۹۸ـ مثلث ABC که در آن $AC = 2\sqrt{2}$ و $BC = 2$ و $B = 45°$ است مفروض است .

اولاـ طول ارتفاع CD و ضلع AB ومساحت مثلث را حساب کرده .

ثانیاًـ اندازهٔ هریك اززوایای مثلث را حساب‌کنید.

۲۵۹۹ـ دایرهٔ O ونقطهٔ ثابت P دربیرون آن‌مفروض است نقطهٔ M روی دایرهٔ O حرکت میکند اگر M' درروی PM طوری باشد که $PM' = \frac{2}{3}PM$ باشد وقتی نقطهٔ M روی دایرهٔ O حرکت میکند مکان هندسی نقطهٔ M' را تعیین کنید .

۲۶۰۰ـ اگر $tg\alpha = \frac{3}{4}$ باشد سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ حاده α را حساب کنید .

دبیرستان هدف ۲

۲۶۰۱ـ به چه دلیل خطی که از وسط یك ساق مثلث به‌وسط ساق دیگر وصل شود موازی باضلع سوم ونصف آنست.

۲۶۰۲ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $AB = 3$ و $BC = 5$ میباشد ارتفاع AH رسم شده و به قطر AH دایره‌ای کشیدایم که اضلاع AB و AC را در

نقاط D و F قطع کرده است. DF را وصل کرده‌ایم ثابت کنید :

۱ـ چرا DF از مرکز دایره میگذرد .

۲ـ چرا AF و AD تصاویر AH روی اضلاع AC و AB می‌باشند .

۳ـ ضلع BC و ارتفاع AH و قطعات BH و HC را حساب کنید .

۴ـ چرا مثلث‌های ADF و ABC متشابهند .

۵ـ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را حساب کنید.

۲۶۰۳ـ اگر $\cos x = ۰/۶$ باشد سایر خطوط مثلثاتی x را حساب کنید .

۲۶۰۴ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در رأس A چنانچه $BC = ۶$ و $tgB = \frac{۵}{۸}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ اضلاع AC و AB

دبیرستان هدف ۳

۲۶۰۵ـ از نقطهٔ P واقع برروی دایرهٔ O به قطر AB خط PM را بر قطر عمود میکنیم دوایری به اقطار AM و BM خطوط PA و PB را در E و F قطع‌میکنند ثابت کنید که شکل PEMF مستطیل است و EF برهردو دایره مماس است .

۲۶۰۶ـ برامتداد پاره‌خط AB و در خارج آن نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$$

۲۶۰۷ـ ثابت‌کنید قرینه‌های یك‌مثلث نسبت به‌دومحور مفروض باهم برابرند .

۲۶۰۸ـ سه نقطهٔ O و A و B بهمین ترتیب برخط راست Δ قرار دارند از A و B دوخط به‌موازات‌هم‌رسم‌میکنیم تاخطی راکه از O رسم میشود در C و D قطع کنند از نقطهٔ D به موازات BC میکشیم تا خط Δ را در E قطع‌کند ثابت کنید OB واسطهٔ هندسی است بین OA و OE

دبیرستان هدف شمارهٔ ٤

۲۶۰۹ـ برامتداد پاره خط AB بطول ۶ سانتیمتر نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که $\frac{MA}{MB} = ۳$ باشد .

۲۶۱۰ـ مثلث OAB به‌اضلاع $OA = ۳$ و $OB = ۴$ و $AB = ۵$ مفروض است این مثلث را رسم کنید و مجانس ضلع AB را با مرکز تجانس نقطهٔ O و نسبت تجانس $K = -۲$ بدست آورید .

۲۶۱۱ـ اضلاع مثلث ABC بترتیب $a = ۱۰$ و $b = ۸$ و $c = ۶$ میباشد مساحت مثلث و شعاعهای دوایر محیطی و محاطی آنرا بدست آورید .

۲۶۱۲ـ در صورتیکه $tg\alpha = \frac{۵}{۱۲}$ باشد عبارت زیررا محاسبه کنید .

$$S = \frac{۴\sin\alpha - ۲tg\alpha}{\cos^۲\alpha + ۳}$$

جبر چهارم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر : پرویز شهریاری)

۲۶۱۳ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است :

$$(m+۲)x^۲ + (۲m+۱)x + m - ۱ = ۰$$

اولاـ باکمك سه‌نامعادله m را چنان پیداکنیدکه‌معادله دو ریشهٔ مثبت داشته باشد .

ثانیاـ m را چنان پیدا کنید که داشته باشیم .

$$\frac{۲}{x'} - \frac{۱}{x''} = ۲$$

ثالثاـ m را چنان پیدا کنید که یك ریشهٔ آن مساوی m شود .

۲۶۱۴ـ معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$۶(a+۱)x^۴ - (۳a^۲ + ۲۶a + ۳a)x^۳ + ۲(۵a^۲ + ۱۶a + ۳۱)x^۲ - (۳a^۲ + ۲۶a + ۳۵)x + ۶(a+۱) = ۰$$

۲۶۱۵ـ معادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\sqrt{۲ + \sqrt{x-۵}} = \sqrt{۱۳ - x}$$

۲۶۱۶ـ سه عدد صحیح متوالی چنان تعیین کنید که مکعب عدد بزرگتر مساوی سه‌برابر حاصل جمع مکعبات‌دوعدد دیگر باشد .

دبیرستان سعیدالعلماء (دبیر: عطری ــ فرستنده: بختیار سلطانی)

۲۶۱۷ـ دستگاه زیر را بگشائید .

$$\begin{cases} \frac{۱}{y} - \frac{۱}{x} = \frac{۲}{۱۵} \\ x^۲y - xy^۲ = ۳۰ \end{cases}$$

۲۶۱۸ـ همچندی زیر را بگشائید .

$$\frac{x^۲ + ۳x}{۴} = \frac{۵}{x^۲ + ۳x - ۸}$$

۲۶۱۹ـ همچندی کنگ زیررا بگشائید .

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$$

۲۶۲۰ـ λ را چه باید گرفت تا اینکه مقدار برخهٔ

$$\frac{2x^2+2\lambda x+\lambda}{4x^2+6x+3}$$

همیشه کوچکتراز یك گردد .

۲۶۲۱ـ همچندی دو زینه‌ای بنویسید که ریشه‌های آن.

$$x'=\frac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

و $x''=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ باشند .

دبیرستان دکتر فاطمه سیاح
دبیر: خانم جمالی ـ فرستنده : طلعت مشکین

۲۶۲۲ـ معادلهٔ اصم زیررا حل کنید .

$$\frac{3}{3-\sqrt{9-2y}}=\frac{3}{3+\sqrt{9-2y}}=\frac{9}{\sqrt{2y}}$$

۲۶۲۳ـ نامعادلهٔ زیر راحل کنید .

$$\frac{(x^2-3x+2)(9-x^2)}{(x^2-x-30)}<0$$

۲۶۲۴ـ دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{5}\\ 2x-y+z=13\end{cases}$$

۲۶۲۵ـ دستگاه زیررا حل کنید .

$$\begin{cases}\sqrt{x}+4\sqrt{y}=9\\ x+16y=65\end{cases}$$

دبیرستان هدف ۱

۲۶۲۶ـ دستگاه معادلات

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2a+4}=\dfrac{y}{3a-7}=\dfrac{z}{a+3}\\ xy+yz=9a^2=49\end{cases}$$

را حل کنید .

۲۶۲۷ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیدکه بین x' و x'' ریشه های‌آن رابطه های زیر برقرار باشد :

$$\begin{cases}m(x'+x'')-x'x''=m^2+4\\ 2x'x''=(m+2)(x'+x''-4)\end{cases}$$

۲۶۲۸ـ اولا تحقیق کنید معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2-2mx+m^2-4=0$$

به ازاء جمیع مقادیر m دارای دو ریشهٔ حقیقی و گویا است .

رابطه‌ای بین ریشه ها تعیین کنیدکه به مقدار m بستگی نداشته باشد .

ثانیاً مقدار m را چنان حساب کنیدکه رابطهٔ

$$x'x''^{-2}+x''x'^{-2}=\frac{2}{m}$$

بین ریشه های معادله بر قرار باشد .

۲۶۲۹ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(p+q)x^2-(2p+q)x+p-3=0$$

مقدار p و q را چنـان حساب کنیدکه معادله دارای جواب مضاعف مساوی۲ باشد .

۲۶۳۰ـ مقدارp را چنان حساب کنیدکه معادلهٔدرجهٔدوم

$$7x^2-4x-3m+1=0$$

دارای دو جواب مثبت باشد .

دبیرستان هدف ۲ دختران

۲۶۳۱ـ درصورتیکه $x=\dfrac{1}{a-1}$ و $a\neq 1$ باشد

عبارت ذیل را حساب و ساده کنید

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\times\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$$

۲۶۳۲ـ دستگاه معادلهٔ ذیل را حل کنید

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=41\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=901\end{cases}$$

۲۶۳۳ـ نامعادلهٔ کسری ذیل را حل کنید

$$\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}>1$$

۲۶۳۴ـ معادلهٔ دو مجذوری ذیل را حل کنید

$$c^2x^4+c^2(a^2-b^2)x^2-a^2b^2=0$$

۲۶۳۵ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$mx^2-2(m-3)x+m+3=0$$

اولا مقدار m را تعیین کنید در صورتیکه یکی از ریشه هـا دو برابر دیگری‌باشد ثانیاً درصورتیکه x' وx'' ریشه های معادلهٔ مفـروض باشد m را چنـان تعیین کنیدکه رابطهٔ ذیل بین ریشه های معـادله برقرار باشد .

$$x'^2+x''^2-5(x'+x'')=1$$

ثالثاً بین ریشه های معادله وضرایب‌آن رابطه‌ای برقرار کنیدکه مستقل از m باشد (رابطه بحسب x' و x'' بر قرار شود) و صحت رابطه را بحسب ضرایب معادله تحقیق کنید

رابعاً به ازاء جمیع مقادیر m وجود وعلامت ریشه‌هارا تعیین کنید .

دبیرستان هدف ۳

۲۶۳۶ـ درستی تساوی زیررا تحقیق کنید .

$$\sqrt{\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۱۷-۱۲\sqrt{۲}}}-\sqrt{\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۱۸+۱۲\sqrt{۲}}}=۲$$

۲۶۳۷ـ ثابت کنید معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^۳+۳abx+a^۳-b^۳=۰$$

همواره بر $x+a-b$ قابل‌قسمت است سپس ریشه های دیگر را بدست‌آورید .

۲۶۳۸ـ مقدار پارامترهای p و q را چنان تعیین کنید که $x^۴+qx^۳-۳x^۲+px+۸$ بر $(x-۱)(x+۲)$ قابل قسمت باشد .

۲۶۳۹ـ کسر زیررا بساده ترین صورت خلاصه کنید .

$$\frac{x^۳-x+x^۲-۱}{x^۲y+۲xy-x^۲-۲x+y-۱}$$

۲۶۴۰ـ درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases}-۴=z(۱-۲x)-(x+y)\\ x^۲+y^۲+z^۲=۷\end{cases}$$

$$-\frac{x^۳-(z-y)^۳}{x^۲+x(z-y)+(z-y)^۲}+\frac{(z-y)^۳+x^۳}{z-y+x}+\frac{x^۳+(z+y)^۳}{x+y+z}=۱۰$$

۲۶۴۱ـ معادلات اصم زیررا حل کنید .

$$۵\sqrt[۳]{x^۳+۲۴}+\sqrt[۳]{(x^۳+۲۴)^۲}+۶=۰$$

$$\frac{۲x}{۴-\sqrt{۱۶+x}}-\frac{۳x}{۴+\frac{۱۱}{x}\sqrt{\frac{۱۶x^۳+x^۴}{x}}}=۴$$

۲۶۴۲ـ کسرهای زیررا گویا کنید .

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}+\sqrt[۳]{۵۶}+\sqrt[۳]{۴۹}}\quad\text{و}\quad\frac{۳}{\sqrt[۴]{۳}+\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}\quad\text{و}\quad\frac{۲}{\sqrt[۶]{۳}-\sqrt[۶]{۲}}$$

۲۶۴۳ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید.

$$\begin{cases}x+y+xy=۵\\ x+y=\frac{۶}{xy}\end{cases}$$

۲۶۴۴ـ پارامتر a را چنان تعیین کنید که :

$$f(x)\frac{x-۲}{ax^۳-۵x^۲+a-۷}$$

هیچگاه صفر نشود .

۲۶۴۵ ـ جواب مشترك دستگاه نامعادلات زیر را تعیین کنید .

$$\begin{cases}\frac{۲x^۲-۹x+۶}{x-۴}>x\\ \frac{x-۲}{x^۲-۱۶}<۰\end{cases}$$

۲۶۴۶ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید.

$$\begin{cases}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۶}\\ y^۲x-x^۲y=۶\end{cases}$$

۲۶۴۷ـ درصورتیکه بدانیم سه‌جمله‌ای $x^۲+ax+b$ دارای ریشه های موهومی است ثابت کنید معادلهٔ :

$$۲x^۲+۲ax+a^۲-۲b=۰$$

دارای ریشه های حقیقی است .

۲۶۴۸ ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌هایش روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases}m(x'+x'')=۲\\ x'x''(x'+x'')+m(x'^۲+x''^۲)=۴m\end{cases}$$

۲۶۴۹ـ a و b راطوری تعیین کنید که معادلهٔ :

$$(a+b)x^۲+bx+۱=۰$$

دارای ریشهٔ مضاعف $x=۱$ باشد .

۲۶۵۰ـ بین ریشه های معادلهٔ :

$$۲mx^۲-(m-۱)x+۳=۰$$

رابطه‌ای مستقل از پارامتر m تعیین کنید .

مسائل هندسه کلاسهای چهارم ریاضی

دبیرستان هدف ۱

۲۶۵۱ـ ذوزنقهٔ ABCD مفروض است خطی موازی قاعده های ذوزنقه رسم کنید که ساقهای ذوزنقه را در M و N و اقطار ذوزنقه را در P و F قطع کند بطوریکه سه قسمت جدا شده برابر شوند یعنی $MP=PF=FN$ باشد . (اثبات)

۲۶۵۲ـ نیمدایرهٔ O به قطر $AB=۲a$ مفروض است وتر $CD=a$ را موازی AB در نیمدایره رسم میکنیم . اولا ثابت کنید چهار ضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی ـ

الساقین است محل تلاقی اقطار AC و BD را M نامیده از M موازی AB رسم می‌کنیم تا ساقهای دوزنقه را در P و F قطع کند طول PF را برحسب a حساب کرده مساحت دوزنقه را برحسب a حساب کنید .

۲۶۵۳ـ مثلث ABC که $AB=۵$ و $AC=۴$ و $BC=۶$ است مفروض است طول نیمساز زاویهٔ A را حساب کنید .

دبیرستان هدف ۲

۲۶۵۴ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است مربعی در داخل آن به‌طریقی محاط کنید که دو رأس آن روی اضلاع AB و AC متکی بوده و یك ضلع آن روی BC منطبق باشد .

۲۶۵۵ـ مثلث غیرمشخص ABC مفروض است ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم . ثابت کنید

$$\overline{AM}^{۲}=AC\times AN+MN\times MP$$

نقاط M و N و P پای ارتفاعات است .

۲۶۵۶ـ نیم دایرهٔ به قطر $AB=۲a$ مفروض است. چهار ضلعی ABCD در این نیم دایره محاط شده بطوریکه $A=۶۰$ ز و $B=۷۵^{\circ}$ ز می‌باشد .

اضلاع مقابل را امتداد میدهیم تا یکدیگررا درنقاط E و F قطع کنند .

اولا قطعات AD و BD و CD را حساب کنید

ثانیاً ثابت کنید که محور قائم نقطهٔ E از محل برخورد اقطار چهارضلعی میگذرد ،

ثالثاً نقطهٔ C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AEF است .

دبیرستان هدف ۳

۲۶۵۷ـ خط Δ و نقطهٔ O و دایرهٔ (C) داده شده‌اند برخط Δ نقاطی بدست آورید که قرینه هایشان نسبت به O روی دایرهٔ (C) باشند. (در جوابهای مسئله بحث کنید)

۲۶۵۸ـ سه خط D و $D_۱$ و $D_۲$ درنقطهٔ G متقاطعند ونقطهٔ A روی خط D قرار دارد مطلوبست رسم مثلثی که A یك رأس آن بوده و سه خط میانه های آن باشند .

۲۶۵۹ـ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C' طوری مفروض‌اند که $A=A'=۹۰^{\circ}$ و $AB=A'B'$ و C'ز $>C$ز ثابت کنید $BC<B'C'$

۲۶۶۰ـ از مثلثی دو زاویه ویك نیمساز معلومند مثلث را رسم کنید .

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۶۶۱ـ دو نقطهٔ C و D در یك طرف خط نامحدود Δ واقعند برروی خط Δ نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فواصلش از C و D کوچکترین مقدار ممکنه را داشته باشد. (اثبات)

۲۶۶۲ـ دو دایره به مراکز C و C' در نقطهٔ M متقاطعند ازنقطهٔ M قاطعی بموازات خط‌المرکزین C'C رسم میکنیم تا دو دایره را در نقاط دیگر F و F' قطع کند ثابت کنید طول قاطع FF' ازطول هر قاطع دیگری که از M رسم شود بزرگتراست .

۲۶۶۳ـ مثلث غیرمشخص CDM مفروض است نقطهٔ K را درامتداد ضلع CD طوری اختیار کنید که :

$MK^{۲}=KC.KD$ باشد .

متمم حساب کلاسهای چهارم ریاضی

دبیرستان دکتر کریم فاطمی اهواز (دبیر: گیتی‌زاده)

۲۶۶۴ـ تعداد و مجموع اعداد سه رقمی راکه بر ۷ بخش پذیرند پیدا کنید .

۲۶۶۵ـ اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند .

اولا ـ قدر نسبت تصاعد را پیدا کنید .

ثانیاً ـ اگر مساحت این مثلث $\sqrt{۲+\sqrt{۲۰}}$ باشد طول اضلاع را بدست آورید .

۲۶۶۶ـ مجموع پنج عدد که تشکیل تصاعد عددی داده‌اند ۲۵ و مجموع مربعاتشان ۱۶۵ است این اعداد را پیدا کنید .

۲۶۶۷ـ سه عدد تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند اگر بر عدد دومی ۴ واحد بیفزائیم تصاعد عددی می‌شود واگر دراین تصاعد عددی ۳۲ واحد بر عدد سومی اضافه کنیم تصاعد هندسی می‌شود این سه عدد را تعیین کنید .

۲۶۶۸ ـ اگر $x>۱$ باشد حد مجموع زیر را حساب کنید :

$$\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۳}{x^{۳}}+\frac{۴}{x^{۴}}+\cdots+\frac{n}{x^{n}}+\cdots$$

۲۶۶۹ ـ بین دو عدد ۱ و ۲ تعداد ۴ واسطهٔ عددی درج کنید .

۲۶۷۰ ـ عدد اعشاری ۱٫۱۳۳۳... را بکسر متعارفی تبدیل کنید .

دبیرستان هدف ۱

۲۶۷۱ـ مجموع سه عدد که تصاعد حسابی تشکیل داده‌اند ۳۳ و حاصلضرب آنها ۷۹۲ است این سه عدد را تعیین کنید .

۲۶۷۲ـ مابین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه واسطهٔ هندسی درج کنید .

۲۶۷۳ ـ کسر اعشاری ۰٫۲۵۴۹۵۴۹.... را بکسر متعارفی تبدیل کنید .

۲۶۷۴ـ زاویهٔ چهار ضلعی تشکیل تصاعد عددی میدهند اگر بزرگترین زاویه ۵ برابر کوچکترین زاویه باشد مقدار هر زاویه را تعیین کنید .

۲۶۷۵ـ اضلاع مثلثی تشکیل تصاعد هندسی میدهند اگر ۱۲ واحد به ضلع متوسط آن اضافه کنیم مثلث دیگری پدید می‌آید که اضلاع آن تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند واگر در مثلث اخیر ۹۶ واحد بضلع بزرگتر اضافه کنیم اضلاع مثلث جدید تصاعد هندسی تشکیل میدهند اضلاع مثلث اول را حساب کنید .

۲۶۷۶ـ دستگاه زیررا حل کنید .

$$\begin{cases} ۲^{x}+۲^{x-۱}+۲^{x-۲}+\ldots=۳(۴^{y}+۴^{y-۱}+۴^{y-۲}+..) \\ ۲^{y}+۲\times ۴^{۳-x}=۱ \end{cases}$$

دبیرستان هدف ۲ دختران

۲۶۷۷ـ چهار عدد که تشکیل تصاعد هندسی داده‌اند مجموعشان ۸۰ و عدد اولی ۹ برابر عدد سومی است این چهار عددرا مشخص کنید .

۲۶۷۸ ـ مطلوبست محاسبهٔ کسر مولد کسر متناوب ۱٫۳۱۷۱۷۱۷۱۷ با استفاده از تصاعد

۲۶۷۹ـ مطلوبست محاسبهٔ حاصل عبارت :

$$\log_{\sqrt{x}} x+\log_{۲\sqrt{۲}} ۶۴-\operatorname{colog}_{۳\sqrt{۳}} ۲۷+\log_{\sqrt{۳}} \frac{۱}{x^{-۲}}$$

۲۶۸۰ـ مطلوبست محاسبهٔ مجموع ده جمله از رشتهٔ زیر به‌کمك فرمولهای تصاعد

$$a-۲ \text{ و } ۷و۹+\frac{۴}{a-۳} \text{ و } ۱۳+\frac{۸}{(a-۳)^{۲}} \text{ و } \ldots\ldots$$

۲۶۸۱ـ مطلوبست محاسبهٔ حاصل کسر زیر تا یکصدم تقریب .

$$A=\frac{(۲٫۰۴۱)^{\frac{۱}{۳}}\times(۵٫۱۲)^{۴}}{\sqrt{۲۰۰۱}\times(۰٫۰۰۲)^{-۳}}$$

دبیرستان هدف ۳

۲۶۸۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید.

$$\begin{cases} ۲^{۲x-۴y}=۸ \\ ۳\log\sqrt{۳x-۲y+۱۵}+۲\operatorname{colog}\sqrt{۲x-y+۱}=\log ۳ \end{cases}$$

۲۶۸۳ـ مطلوبست تعیین x در معادلات زیر

$$(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^{x}+(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^{x}=۴$$

$$۷^{۲x-۴}-۹\times ۷^{x-۲}=-۱۴$$

$$\log_{۳}x^{۲}+\log_{\frac{۱}{۳}}x^{۲}+\log_{۹}x^{۲}+\log_{x^{۲}}x^{۲}=۲$$

$$۸+۸^{-x}=\frac{۶۵}{۸}$$

$$\log(x-۵)=\log ۸۱-۲\log ۳+\operatorname{colog}۲۷+۲+\log\frac{۳}{۲۵}$$

(بدون استفاده از جدول x را تعیین نمائید)

۲۶۸۴ـ مطلوبست تعیین A در عبارت زیر تا یکصدم تقریب .

$$A=\frac{\sqrt[۷]{(۳۶۹۲۶٫۵)^{۳}}\cdot\sqrt[۵]{۰٫۰۰۲۲۶۲۹}}{\sqrt[۵]{(۶٫۲۵۸۹۶)^{۲}}\cdot(۱۳٫۷)^{۲}}$$

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۶۸۵ـ در یك تصاعد حسابی مجموع سه جملهٔ اول آن ۱۵ و مجموع سه جملهٔ آخر آن ۵۷ و مجموع تمام جمله‌هایش ۱۲۰ می‌باشد .

اولا تصاعد را تشکیل دهید .

ثانیاً بین جمله های سوم و چهارم ۴ جمله درج کنید.

۲۶۸۶ـ یك تصاعد هندسی صعودی تشکیل دهید که تفاضل دو جملهٔ پنجم و سوم آن که مساوی با مجموع دو جملهٔ سوم وچهارم آنست ۳۶ باشد .

ثانیاً مجموع ۵ جملهٔ آنرا نیز محاسبه کنید .

۲۶۸۷ـ دستگاه زیررا حل کنید .

$$\begin{cases} x+y=۳xy \\ \log(۳x-y)-\log x=\log y \end{cases}$$

۲۶۸۸ـ مقدار x را بدون استفاده از جدول محاسبه کنید .

$$\log x=\frac{۱}{۴}\log ۶۲۵+\frac{۱}{۲}\log ۶۴-\frac{۱}{۳}\log ۸+\operatorname{colog}۵$$

۲۶۸۹ ـ کسر مولد کسر اعشاری ۰٫۲۵۸۴۸۴ را محاسبه کنید .

جبر کلاسهای پنجم طبیعی

دبیرستان هدف ۱

۲۶۹۰ـ از دوتابع زیر مشتق بگیرید و علت تساوی مشتق‌ها را بیان کنید .

$$y_1=\sqrt{6(1-x^2)} \quad \text{و} \quad y_2=(1-x^2)\sqrt{\frac{6}{1-x^2}}$$

۲۶۹۱ـ اولاً ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=x^2-4x-5$ و خط (d) به معادله $y=x-5$ را روی یکدستگاه متعامد xoy رسم کنید .

ثانیاً اگر مختصات نقاط تلاقی منحنی (c) را با جهت مثبت محور طولها A و با محور عرضها B بنامیم مطلوبست

۱ـ مختصات نقاط A و B

۲ـ معادلهٔ خط AB

۳ـ نقطه‌ای ازمنحنی(c) را تعیین کنید که مماس برمنحنی درآن نقطه باخط d موازی باشد .

ثالثاً ـ نقطه‌ای مانند P روی محور عرضها تعیین کنید بقسمی که مثلث ABP قائم‌الزاویه گردد . ($A=90^\circ$) و تحقیق کنید که مثلث ABP متساوی الساقین است .

دبیرستان هدف ۲

۲۶۹۲ـ مشتق تابع $y=x\sqrt{2x^2+1}$ را حساب و ساده کنید .

۲۶۹۳ـ تابع $y=\dfrac{x^3-2x^2+mx+m}{x-1}$

مفروض است معلوم کنید به ازاء چه مقداری از m این تابع پیوسته اتصالی است .

۲۶۹۴ـ نقطهٔ $A(-1\text{و}4)$ مفروض است .

اولاً ـ مطلوبست تعیین مختصات نقطهٔ B واقع در ناحیهٔ اول بطوریکه طول $AB=5$ بوده وطول تصویر AB برروی محور x'x برابر ۳ باشد .

(از دو جواب آنرا انتخاب کنید که B سمت چپ A باشد) .

ثانیاً ـ بفرض $B(1\text{و}3)$ نقطهٔ C را روی نیمساز ربع دوم طوری انتخاب کنید که مساحت مثلث ABC برابر ۱۰ واحد مربع باشد .

۲۶۹۵ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است.

اولاً ـ مقادیر a و b و c را قسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض محور xها را در نقطهٔ A بطول ۱ قطع کرده و نقطهٔ می‌نیمم آن $M(-1\text{و}-2)$ باشد و مختصات نقطهٔ دیگر تقاطع منحنی را با محور xها حساب کنید.

ثانیاً ـ به‌ازاء $a=\frac{1}{2}$ و $b=1$ و $c=\frac{-3}{2}$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع (y) رارسم کنید .

ثالثاً ـ مماس از نقطهٔ A برمنحنی رسم کرده تامحور تقارن منحنی را قطع کند مختصات نقطهٔ تقاطع را حساب کنید

دبیرستان هدف ۳

۲۶۹۶ـ m را چنان تعیین کنید که دوخط $y=mx+5$ و $y=(m-2)x+3$ برهم عمود باشند .

۲۶۹۷ـ سه نقطهٔ

$A(2\text{و}3)$ و $B(-1\text{و}6)$ و $C(2-m\text{و}m-5)$

مفروضند m را چنان تعیین کنید که این سه‌نقطه بریك‌استقامت باشند .

۲۶۹۸ـ سه‌نقطهٔ $A(-1\text{و}3)$ و $B(1\text{و}2)$ و $C(2-\text{و}5)$ رؤوس یك مثلث میباشند اولا معادلهٔ ارتفاع BH این مثلث را بنویسید ثانیاً مساحت این مثلث را حساب کنید .

۲۶۹۹ـ نقطه A بطول ۲ واقع برخط $y=3x-4$ مفروض است ازاین نقطه خطی رسم میکنیم که با این‌خط‌زاویهٔ 45° بسازد معادلهٔ آنرا بنویسید (دوجواب) .

۲۷۰۰ـ نقطهٔ $A(3\text{و}5)$ رأس قائمهٔ یك مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که معادلهٔ وترآن $4y-3x+9=0$ میباشد و میدانیم رأس B روی خط $y=-2x-5$ قرار دارد مختصات رؤوس B و C این مثلث را حساب کنید .

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۷۰۱ـ اولا مطلوب است مختصات رئوس مستطیلی که یك رأس آن نقطهٔ M بطول ۳ ـ واقع برمحور طولها بوده و یك‌ضلعش برخط $y=x-2$ و یك رأسش برنیمساز بخش دوم واقع باشد .

ثانیاً ـ مساحت مستطیل را حساب کنید .

۲۷۰۲ـ اولا ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2-4x+4$ را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید .

ثانیاً ـ دردو نقطهٔ A و B بطولهای صفر و ۴ واقع برمنحنی دومماس رسم کنید ومعادلات این مماس‌ها را بنویسید. ومختصات نقطهٔ C محل برخورد این دومماس را بدست آورید .

ثالثاً ـ تحقیق کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است و مساحتش را پیدا کنید .

۲۷۰۳ـ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید .

$$y=\sqrt{2x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=3(4x^2-2x)^5(x^2-1)$$

مثلثات کلاسهای پنجم طبیعی

دبیرستان هدف ۱

۲۷۰۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابها را بصورت کلی بنویسید .

$$tg^2(3x-\frac{5\pi}{4})-tg^2 2x=0$$

۲۷۰۵ـ درستی تساوی زیررا تحقیق کنید .

$$\frac{\cos 70^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ}{\sin 5^\circ\cos 25^\circ+\sin 85^\circ\sin 25^\circ}=\sqrt{3}$$

۲۷۰۶ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشنددرستی تساوی زیررا تحقیق کنید :

$$\sin\frac{3A+2B}{4}=\cos\frac{A-2C}{4}$$

۲۷۰۷ـ معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابهای بین‌صفر و 2π را تعیین کنید .

$$2\sin x\cos\frac{\pi}{8}+2\cos x\sin\frac{\pi}{8}=2$$

دبیرستان هدف ۲

۲۷۰۸ـ قوس 1050° مفروض است‌از طریق حاصل‌جمع قوسها $\sin$ و $\cos$ این قوس را حساب کنید .

۲۷۰۹ـ معادلهٔ

$$\sin(\frac{2}{3}x-45^\circ)+\cos(\frac{3}{2}x+45^\circ)=0$$

مفروض است تمام جوابهای x را حساب کنید .

۲۷۱۰ـ درصورتیکه $tga=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ و $tgb=\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشند ثابت کنید .

$$tg(a-b)=tg\frac{\pi}{4}$$

۲۷۱۱ـ اتحاد ذیل را ثابت کنید محقق است .

$$tg^2(\frac{\pi}{4}-a)=\frac{1-\sin 2a}{1+\sin 2a}$$

۲۷۱۲ـ درصورتیکه $\sin x-\cos x=\frac{1}{5}$ باشد $\sin 2x$ را حساب کنید .

دبیرستان هدف ۳

۲۷۱۳ـ درصورتیکه $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ و انتهای کمان α در ربع دوم و $\sin\beta=-\frac{24}{25}$ وانتهای کمان β در ربع سوم باشد مطلوبست محاسبه عددی عبارت زیر

$$A=\frac{4tg\alpha-7tg\beta}{3\cos\beta+\sin\alpha}$$

۲۷۱۴ـ صحت اتحاد زیر را ثابت کنید .

$$(tg\alpha+cotg\alpha)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

۲۷۱۵ـ صحت‌رابطهٔ زیررا ثابت کنید .

$$tg350^\circ\cos 20^\circ-2cotg100^\circ\sin 250^\circ-$$
$$-3tg190^\circ\cos 160^\circ=0$$

۲۷۱۶ـ معادلهٔ زیر را حل‌کرده و جواب بین صفر و 2π را بدست آورید .

$$\sin(2x+\frac{3\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{8}-2x)=-1$$

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۷۱۷ـ درستی اتحاد زیررا تحقیق کنید .

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{cotgx-1}{cotgx+1}$$

۲۷۱۸ـ عبارت زیر را ساده کنید .

$$\frac{\cos 50^\circ+\cos 230^\circ+2\sin 140^\circ}{2\sin 40^\circ-3\cos 130^\circ-5\sin 220^\circ}$$

۲۷۱۹ـ با فرض اینکه $cotg\alpha=\frac{4}{3}$ و $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در بخش سوم و انتهای کمان β در بخش دوم باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

۲۷۲۰ـ درصورتیکه $cotgx=\frac{12}{5}$ و x حاده باشد نسبتهای مثلثاتی $2x$ را محاسبه کنید .

۲۷۲۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابها ـ ای کلی و جوابهای آنرا بین صفر و 2π بدست آورید .

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

جبر پنجم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویز شهریاری)

۲۷۲۲ـ در تابع $y=(a+3)x^2-2x-(a-2)$ مقدار a را چنان پیدا کنید که عرض می‌نیمم یا ماکزیمم آن ۳ برابر طولش باشد .

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات دوتابع

$y=x^2-2x+4$ و $y=4x^2-2x+1$

را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

ثالثاً ـ اگر $A(3\text{و}1)$ $B(-1\text{و}7)$ و C نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=4x^2-2x+1$ باشد مساحت مثلث ABC را بدست آورید .

رابعاً ـ از نقطهٔ تلاقی دو منحنی واقع در ربع دوم مماسهایی بر هر دو منحنی رسم کرده‌ایم . معادلات مماسها و تانژانت زاویهٔ بین دومماس را بدست آورید .

۲۷۲۳ـ اولا ـ برحسب مقادیر مختلف a درنقاط تلاقی دو منحنی $y=\frac{a(x-1)}{x+1}$ و $y=\frac{x}{x-1}$ بحث کنید.

ثانیاً ـ به ازاء $a=-\frac{1}{8}$ هردو منحنی رارسم کنید .

ثالثاً ـ در حالتی که منحنی $y=\frac{x}{x-1}$ خط $y=mx+1$ را در دونقطه قطع میکند . مکان وسط نقاط تقاطع را پیدا کنید و حدود مکان را کاملا مشخص کنید .

۲۷۲۴ـ اگر $y=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ باشد ثابت کنید .

$$y+y''=3y^5$$

دبیرستان هدف ۱

۲۷۲۵ـ نقاطی از صفحهٔ دو محور را معلوم کنید که مختصاتشان در دستگاه دونا معادلهٔ زیر صدق کند .

$$\begin{cases}(x-y)(x+2y-4)<0\\3x-4>0\end{cases}$$

۲۷۲۶ـ در ازاء $x=2$ مقدار حقیقی کسر

$$y=\frac{\sqrt{x+2}+2x-6}{x\sqrt{x-1}-2}$$

را معلوم کنید .

۲۷۲۷ـ مشتق هریك از دوتابع زیر را حساب کنید .

$$\begin{cases}y=\dfrac{x\cdot tg2x+\sin 2x}{x\cdot \cot g2x+\cos 2x}\\[2ex] y=\sqrt[8]{x^2+x+\sqrt{x^2+x}}\end{cases}$$

۲۷۲۸ـ تابع $y=ax^2+2ax-\frac{3}{2}$ مفروض است .

اولا ـ ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع در ازاء جمیع مقادیر a از دو نقطهٔ ثابت میگذرد مختصات این دونقطه را معلوم و معادلات دومماس برمنحنی از این دو نقطه را بنویسید و برحسب تغییرات a مکان هندسی نقطهٔ تلاقی این دو مماس را معلوم کنید .

ثانیاً ـ a را طوری تعیین کنید که اگر از نقطهٔ $P(-4\text{و}0)$ خطی با ضریب زاویهٔ m منحنی را در دو نقطهٔ A و B قطع کند و نقاط A' و B' پای عمودوار از دونقطهٔ A و B بر محور طولها باشد مقدار $\overline{PA'}\times\overline{PB'}=5$ گردد .

ثالثاً ـ جدول و منحنی c نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{2}(x^2+2x-3)$ را رسم کنید .

رابعاً ـ روی خط $y=x$ نقطه‌ای چنان تعیین کنید که اگر از این نقطه دومماس برمنحنی (c) رسم کنیم زاویهٔ بین دومماس ۹۰ درجه گردد .

دبیرستان هدف ۲ دختران

۲۷۲۹ـ دو تابع

$y_1=-x^2+bx+c$ و $y_2=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$

مفروضند .

اولا ـ b و c رادر تابع (y_1) چنان پیدا کنید که منحنی نمایش آن به ازاء $x=\frac{5}{2}$ دارای ماکزیمم بوده و از نقطهٔ $P(2\text{و}2)$ بگذرد .

ثانیاً ـ منحنی نمایش دو تابع را در روی یك دستگاه محور مختصات رسم کرده و مختصات نقاط تقاطع رادرصورتیکه $b=5$ و $c=-4$ باشد پیدا کنید .

ثالثاً ـ خط D را از نقطهٔ P برمنحنی نمایش (y_2) مماس کرده و مختصات دو نقطهٔ تماس را پیدا کنید و خطوط مماس را رسم کنید .

رابعاً- اگر از نقطهٔ P خط Δ را باضریب زاویهٔ m رسم کنید ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ K وسط دو نقطهٔ M_1 و M_2 محل تقاطع خط Δ با منحنی نمایش (y_2) وقتی m تغییر کند روی منحنی y_1 میباشد .

۲۷۳۰- خط D بمعادلهٔ $y=ax+b-4$ و خط Δ بمعادلهٔ $y=(a-2)x+b+2$ مفروضند .

اولا- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو خط D و Δ در نقطه‌ای بعرض ۴ بریکدیگر عمود باشند .

ثانیاً- بفرض $a=1$ و $b=5$ دو خط D و Δ رادر یك دستگاه محور مختصات رسم کرده و محل تلاقی D و Δ را A نامیده و نقطه‌ای مانند C روی محور yy' با عرض منفی طوری انتخاب کنید که عمود منصف AC از نقطهٔ مبدأ مختصات بگذرد .

۲۷۳۱- مقدار حقیقی کسر $\frac{2x-6}{4-\sqrt{5x+1}}$ را به‌ازاء $x=3$ حساب کنید .

۲۷۳۲- مطلوبست پیداکردن نقاطیکه مختصات آنهادر دستگاه نامعادلات ذیل صدق کند .

$$\begin{cases}(x-y)^2-(2x-y+3)^2<0\\ y+2>0\end{cases}$$

۲۷۳۳- مشتق تابع $y=(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ را بساده‌ترین صورت تبدیل نموده و به ازاء $x=1$ مقدارعددی مشتق را تعیین کنید .

دبیرستان هدف شمارهٔ ٤

۲۷۳۴- مطلوبست تعیین مواضع نقطهٔ $M(a\ و\ b)$ بطوریکه معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(a-2b+2)u^2-(a-b)u+(2a+b)=0$$

دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت باشند .

۲۷۳۵- تابع $y=\frac{x-2}{5-\sqrt{x^2+21}}$ مفروض است .

اولا- مقدار تابع را به ازاء $x=2$ حساب کنید .

ثانیاً- معین کنید این تابع درچه حدودی معین و درچه حدودی نامعین است .

ثالثاً- مشتق تابع فوق را حساب کنید .

۲۷۳۶- ازنقطه $A(-1و2)$ دوممماس برمنحنی $y^2-2y=2x$ رسم میکنیم معادلات این دوممماس را بنویسید و ثابت کنید که این دوممماس برهم عمودند .

۲۷۳۷- تابع $y=\frac{ax+1}{x-1}$ مفروض است .

اولا- مطلوبست تعیین مقدار a بطوریکه مماس برمنحنی در نقطهٔ بطول ۲ موازی خط $y=-1-2x$ باشد .

ثانیاً- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید .

مثلثات پنجم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویز شهریاری)

۲۷۳۸- ثابت کنیدکه باشرط اینکه AوBوC زوایای یك مثلث باشند رابطهٔ زیر برابر مقدار ثابتی است .

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin C}$$

۲۷۳۹- حاصل عبارت زیررا بدست آورید :

$$16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ$$

۲۷۴۰- بهازاء چهمقادیر α رابطهٔ زیر صحیح است :

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$$

۲۷۴۱- معادلهٔ زیر را حل‌کنید و جوابهای بین صفرو ۹۰ درجه را بدست آورید :

$$\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

۲۷۴۲- اگر $tg(\alpha+\frac{\pi}{4})=-2$ باشد $tg3\alpha$ را محاسبه کنید .

دبیرستان ششم بهمن بندرپهلوی

دبیر : بهمن ازگمی ــ فرستنده : ایرج صفی‌نیا

۲۷۴۳- درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید .

$$(1+tg^2\frac{x}{2})(1+\cos x)+(1+\cot g^2\frac{x}{2})(1-\cos x)=4$$

۲۷۴۴- ثابت‌کنید عبارت زیر بستگی به a و b ندارد

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{(\cos\frac{a+b}{2}+\sin\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}-\sin\frac{a-b}{2})}$$

۲۷۴۵- معادلهٔ مثلثاتی $\sin x-2\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3}=0$ را حل نموده و جوابهای محصور بین صفر و 2π را حساب کنید .

۲۷۴۶ـ هرگاه $\cos\frac{2x}{5}=2a^2-4a+1$ باشد.

ثابت کنید (x زاویهٔ منفرجه است)

$$\frac{\cos^2\frac{x}{10}}{a}+\frac{\sin^2\frac{x}{10}}{2-a}=1$$

۲۷۴۷ـ به فرض آنکه

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\dots+\cos 2nx=K$$

باشد ثابت کنید.

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\dots+\sin^2 nx=\frac{n-K}{2}$$

دبیرستان هدف ۱

۲۷۴۸ـ اگر انتهای دو کمان x و y در ربع دوم و

$$\cos 2x=-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ و } \cos 2y=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

باشد حساب کنید $\cos(x-y)$ را و معلوم کنید که انتهای کمان $(x-y)$ در کدام ناحیه قرار دارد.

۲۷۴۹ـ مطلوبست تعیین مقدار b به‌فرض اینکه رابطهٔ

$$\text{Arc tg}\frac{2b-1}{b+2}-\text{Arc tg}\frac{1}{4}=\frac{2\pi}{3}$$

بر قرار باشد.

۲۷۵۰ـ درستی اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\cos 2a(\sin 6a+\sin^3 2a)+\sin 2a(\cos 6a-\cos^2 2a)=\frac{3}{4}\sin 8a$$

۲۷۵۱ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای کلی و زوایای بین صفر و ۳۶۰ درجه را معلوم کنید.

$$\frac{1+\cos 2x+\cos 4x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=-\sqrt{3}$$

۲۷۵۲ـ اگر a و b دو کمان حاده و رابطه

$$tg^2 a-2tg a\,tg(\frac{\pi}{4}-b)-1=0$$

مفروض باشد.

اولاً ـ رابطه‌ای بین کمانهای a و b مشخص کنید ثانیاً به‌فرض اینکه:

$$\sin a-\cos a=2\sqrt{2}\sin b\cos b$$

باشد کمانهای a و b را معلوم کنید.

۲۷۵۳ـ اگر در مثلثی رابطه

$$\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$$

برقرار باشد ثابت کنید که این مثلث یک زاویهٔ ۶۰° درجه دارد.

دبیرستان هدف ۲ دختران

۲۷۵۴ـ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{64}(1-2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2})=\sin^4 x\cos^4 x$$

$$\frac{\cos 2x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 6x}+\frac{\cos 6x-\cos x}{\cos 5x-\cos 2x}=\frac{2\sin 4x}{\sin 3x}$$

$$\sin a(\cos 2a+\cos 4a+\cos 6a)=\sin 3a\cos 4a$$

۲۷۵۵ـ معادلات زیر را حل کرده جوابهای کلی آنها را بدست آورید.

$$\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin 5x$$

$$tg 2x+\cot g x=7\cos^2 x$$

۲۷۵۶ـ درصورتیکه A و B و C زوایای یک مثلث باشند درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

۲۷۵۷ـ عبارات زیر را قابل محاسبه به‌لگاریتم کنید.

$$S=4\cos^2 x-3 \qquad S=1+\sin a+\cos a$$

دبیرستان هدف ۳

۲۷۵۸ـ اگر $tg x-\cot g x=\frac{8}{3}$ باشد خطوط مثلثاتی کمان x واقع در ربع سوم را حساب کنید.

۲۷۵۹ـ مقدار عددی عبارت

$$tg 3x+\cot g x+\sin 2x+\cos 4x$$

را به ازاء $x=405°$ حساب کنید.

۲۷۶۰ـ اگر $tg 22/5°=\sqrt{2}-1$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{\sin 202/5°+S112/5°}{tg 337/5-tg 67/5}$$

۲۷۶۱ـ رابطه‌ای بدست آورید از a و b درصورتیکه میدانیم:

$$\begin{cases} tg x+\sin x=a \\ tg x-\sin x=b \end{cases}$$

۲۷۶۲ـ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1-\cot g^4 x=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۷۶۳ـ مطلوبست اولا حل و بحث معادلهٔ زیر برحسب مقادیر مختلف.

$$2\cos x-3\sin x+m=0$$

ثانیاً ـ بفرض آنکه $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد جوابهای محصور بین -2π و $+2\pi$ را محاسبه کنید.

۲۷۶۴ـ ثابت کنیددر هر مثلث رابطهٔ زیر برقراراست.

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

۲۷۶۵ـ به فرض آنکه

$$\cos 2y=\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{و} \quad \cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}+2}$$

و $\cos 2z=\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ باشد مطلوبست اثبات رابطهٔ

$$tg^2x+tg^2y+tg^2z=1$$

۲۷۶۶ـ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{3\cos x+\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}=\cot g^3x$$

مسائل هندسهٔ کلاس پنجم ریاضی

دبیرستان دکتر کریم فاطمی اهواز (دبیر: گیتی‌زاده)

۲۷۶۷ـ کنج $S-xyz$ که $xSy=ySz=60^\circ$ و $xSz=90^\circ$ میباشد مفروض است روی یالهای Sx و Sy و Sz به‌ترتیب نقاط B و A و C را به‌طریقی انتخاب میکنیم که داشته باشیم:

$$SA=a \quad \text{و} \quad SB=SC=2b$$

۱ـ ثابت کنید یال SA بر BC عمود است.

۲ـ طول اضلاع و مساحت مثلث ABC را برحسب a و b تعیین کنید.

۳ـ اگر B و C ثابت بمانند و A برروی Sy تغییر مکان دهد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار باشد تا مساحت مثلث ABC می‌نیموم شود.

۴ـ فرض میکنیم $a=b$ باشد در اینحالت.

اولاـ مسطحهٔ فرجه‌ای که یالش BC است محاسبه کنید.

ثانیاً ـ ثابت کنید یال SA برصفحهٔ مثلث ABC عمود است سپس حجم هرم $SABC$ را بیابید.

دبیرستان هدف ۱

۲۷۶۸ـ مستطیل $ABCD$ که $AB=5a$ و $AD=4a$ از رئوس مستطیل و یك طرف آن عمودهای $AA'=a$ و $BB'=4a$ و $CC'=DD'=4a$ را رسم میکنیم ثابت کنید:

۱ـ نقاط A' و B' و C' و D' در یك صفحه‌اند و چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است.

۲ـ سطح کل و حجم جسم پدید آمده را برحسب a حساب کنید.

۲۷۶۹ـ خط d و پاره خط AB که متنافرند مفروض است خطی رسم کنید که باخط d موازی بوده و ازنقطهٔ A به فاصلهٔ α و از نقطهٔ B بفاصلهٔ β باشد. (بحث)

۲۷۷۰ـ خطوط متنافر α و d و Δ مفروض است نقطهٔ A را روی d و B و C را روی Δ طوری اختیار کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه گردد بطوریکه وتر $BC=1$ باشد و صفحهٔ مثلث باخط α موازی باشد (بحث).

۲۷۷۱ـ ذوزنقهٔ $ABCD$ نیمی از یك شش ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای بقطر $AD=2\alpha$ قاعدهٔ هرم $S.ABCD$ است که تصویر S بر قاعده نقطهٔ O وسط AD می‌باشد و $SO=a\sqrt{3}$ می‌باشد.

۱ـ ثابت کنید $SA=SB=SC=SD$

۲ـ سطح کل و حجم هرم $S.ABCD$ را برحسب a حساب کنید.

۳ـ صفحهٔ متغییری که بر BC میگذرد SA را در M و SB را در N قطع می‌کند شکل مقطع را معین کنید.

۴ـ اگر $SM=a$ باشد در این وضع فرجهٔ صفحات $ABCD$ و $MNCB$ را حساب کنید.

۵ـ اگر R محل برخورد امتداد های BM و CN باشد مکان هندسی R را معین کنید.

(راهنمائی ـ AB و CD را امتداد دهید ونقطهٔ تقاطع را به S وصل کنید).

دبیرستان هدف ۳

۲۷۷۲ـ از نقطهٔ مفروض A خطی رسم کنید که خط Δ را قطع کند وبرخط مفروض Δ عمود باشد.

۲۷۷۳ـ دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و $A'BC$ که در قاعده BC مشترك میباشند (غیر واقع در یك صفحه) مفروضند ثابت کنید پاره خط AA' بر BC عمود است.

۲۷۷۴ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=90^\circ$) مفروض از رأس A عمود AD را برصفحهٔ مثلث اخراج کرده و از D به B و C وصل میکنیم هم‌چنین از A عمود AH را بر صفحهٔ DBC فرود میآوریم ثابت کنید:

اولاـ نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث DBC میباشد.

ثانیاً $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$

دبیرستان هدف شماره ٤

۲۷۷۵ـ ثابت کنید که مجموع فواصل هر نقطه واقع در داخل چهاروجهی منتظم ازچهاروجه مقداری است ثابت .

۲۷۷۶ـ ثابت کنید که تصویر هرمکعب برروی صفحه‌ای که برامتداد قطرعمود باشد مسدسی است منتظم .

۲۷۷۷ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$) و $BCA=30^\circ$ و $AB=a$ مفروض است. درنقطهٔ B عمودی بر صفحهٔ مثلث اخراج میکنیم و روی این عمود طول $SB=a\sqrt{3}$ را اختیار می‌کنیم و از S به A و C وصل می‌کنیم .

۱ـ ثابت کنید که صفحات SAB و SAC بر هم عمودند .

۲ـ ارتفاع هرم BSAC راکه از رأس B بر وجه مقابل عمود شود حساب کنید .

۳ـ ثابت کنید که مقطع هرصفحه که موازی SB و AC باشد درهرم SABC یك مستطیل است .

۴ـ حجم هرم و سطح جانبی آنرا حساب کنید .

جبر و مثلثات ششم طبیعی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویز شهریاری)

۲۷۷۸ـ معادلهٔ درجه دوم

$$x^2-y^2+ax-by-6=0$$

مفروض است :

اولا a و b را چنان‌پیدا کنید که منحنی آن از نقاط $M(1$ و $-1)$ و $M'(-1$ و $-5)$ بگذرد

ثانیاً به ازاء $a=4$ و $b=2$ منحنی را مشخص ورسم کنید (مختصات مرکز ورئوس وکانونهای آنرا بدست‌آورید و تحقیق کنید که مجانبهای آن برهم عمودند) .

ثالثاً m را طوری پیدا کنید که خط $y=mx-1$ بر منحنی فوق مماس شود. مختصات نقاط تماس را پیدا کنید).

رابعاً مختصات نقاط تلاقی منحنی‌فوق را بادایرهٔ بمرکز $C(-1$ و $-2)$ و بشعاع $3\sqrt{3}$ پیدا کنید .

۲۷۷۹ـ نقطهٔ $F(1$ و $1)$ و خط $x-y=1$ مفروض است معادلهٔ مکان نقاطی را پیدا کنید که از نقطهٔ F و خط فوق بیك فاصله باشند .

مکان فوق یك سهمی است که بایستی مختصات رأس آنرا پیدا کنید .

ثانیاً ثابت کنید که اگر ازنقطهٔ $A(0$ و $1)$ دو مماس بر منحنی فوق رسم کنیم، دومماس برهم عمودند .

۲۷۸۰ـ منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=2\sin^2x-\sin x+1$$

را درفاصلهٔ صفر تا 2π رسم کنید .

دبیرستان خوارزمی ۱ (دبیر: هادی چاوشیان)

۲۷۸۱ـ منحنی تابع $y=x^3+3x^2-4$ را رسم کنید .

۲۷۸۲ـ مشخصات منحنی تابع

$$4x^2+16y^2-8x+64y+4=0$$

را معلوم کنید . (بدون رسم)

۲۷۸۳ـ بیضی $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ را رسم کنید .

۲۷۸۴ـ بیضی را با خط $x=3$ تقاطع دهید مختصات نقاط تقاطع‌را محاسبه کنید ومعادلات خطوط مماس بر بیضی‌را درنقاط تقاطع خط وبیضی بنویسید .

۲۷۸۵ـ منحنی نمایش تابع

$$y=\sin x(\cos x+1)$$

را در فاصلهٔ صفر و 2π رسم کنید .

۲۷۸۶ـ مساحت سطح منحنی تابع مثلثاتی‌را در فاصلهٔ $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ محاسبه کنید .

۲۷۸۷ـ معادلهٔ $\sin-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ را حل کنید.

دبیرستانهای گروه فرهنگی هدف

۲۷۸۸ـ دوخط $4x-3y+7=0$ و $4x+3y+1=0$ مجانب‌های یك هذلولی را تشکیل می‌دهند که عرض یکی‌ازدو کانون‌آن برابر (۶) می‌باشد .

۱ـ معادلهٔ این هذلولی را تعیین کنید .

۲ـ هذلولی (H) بمعادلهٔ

$$16x^2-9y^2+32x+18y+151=0$$

را رسم کنید ومعادلات مجانب‌های آنرا بنویسید .

۳ـ دایرهٔ (C) بمعادله

$$x^2+y^2+2x-2y-23=0$$

را درهمان دستگاهی رسم کنید که هذلولی (H) رسم شده است و بوسیلهٔ محاسبه تحقیق نمائید دایرهٔ (C) ازدوکانون هذلولی (H) میگذرد .

۴ـ از نقطهٔ M بعرض (۵) وبطول مثبت واقع بر دایرهٔ (C) مماسی براین دایره رسم کرده معادلهٔ آنرا تشکیل دهید.

۲۷۸۹ـ معادلهٔ زیررا حل کنید و جوابهای محصوربین صفر و ۳۶۰ را بدست آورید .

$$\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = 3$$

۲۷۹۰ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیـررا وقتی که x ازصفر تا 2π تغییر کند رسم نمائید .

$$y = \frac{1}{4}(2\sin x - 1)^2$$

جبر ششم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویزشهریاری)

۲۷۹۱ـ a را چنان پیداکنیدکه منحنی $y = \frac{(x+a)^3}{x^2+1}$ مجانب خود را درنقطهٔ بطول -1 قطع کند .

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{(x-1)^3}{x^2+1}$ را رسم کنید و مختصات محل تلاقی آنرا با مجانبش پیداکنید.

ثالثاً معادلهٔ مماس برمنحنی‌را در نقطهٔ تلاقی آن بامحور عرضها بنویسید .

رابعاً ببینید آیا این منحنی مرکز تقارن دارد یانه؟

۲۷۹۲ـ اولا منحنی نمایش تغییرات تابع ،

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$ را رسم کنید .

ثانیاً سطح محصور بین منحنی ومحور xx' را در فاصلهٔ $x=2$ و $x=3$ بدست آورید .

ثالثاً حجمی که ازدوران همین سطح دورمحور xx' بدست می‌آید محاسبه کنید .

۲۷۹۳ـ اولا علامت عبارت :

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x^2}$$

را وقتی که x تمام مقادیرممکنه را اختیارکند بدست آورید.

ثانیاً نمایش تغییرات تابع

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x^2}$$ را رسم کنید .

دبیرستان خوارزمی ۱ (دبیر : پرویز شهریاری)

۲۷۹۴ـ رابطه‌ای بین a و b چنان پیداکنیدکه تابع $y = \frac{(x+a)^3}{(x+a)^2}$ دارای مجانبی بمعادلهٔ $y = x - 5$ باشد .

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ را رسم کنید و مختصات محل تلاقی منحنی را با مجانب مایل آن پیداکنید .

ثالثاً سطح محصوربین منحنی، محورعرضـها و مجانب مایل را پیداکنید .

رابعاً معادلهٔ قائم منحنی را درنقطهٔ تـلاقی‌آن با محور عرضها بنویسید .

۲۷۹۵ـ درتابع $y = (x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$ مقدار a را چنان پیداکنیدکه نقطهٔ تلاقی‌آن با خط $y = x - 1$ روی محور طولها واقع باشد .

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع

$y = \pm(x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ را رسم کنید .

۲۷۹۶ـ علامت عبارت $y = x - 1 + \sqrt{x^2}$ را بـه ازاء مقادیرمختلف x بدست آورید .

ثانیاً نمایش‌تغییرات تابع y را روی محورهای مختصات رسم کنید .

دبیرستانهای گروه فرهنگی هدف

۲۷۹۷ـ تابع $y = \frac{ax^2+abx+b}{(x+1)^4}$

مفروض است .

۱ـ مقادیر a و b را چنـان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض برمحور طول ها درنقطه‌ای بطول $(-\frac{1}{2})$ مماس شود .

۲ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع

$y = \frac{(2x+1)^2}{(x+1)^4}$ را رسم کنید .

۳ـ بوسیلهٔ محاسبه ثابت کنید ازمبـدأ مختصات میتوان سه ممـاس برمنحنی (C) رسم نمودکه برهم منطبق می‌شـوند مختصات نقاس تماس ومعادلهٔ خط مماس مشترك را تعیین کنید.

۴ـ مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و دو محور مختصات را (آن قسمت‌که در ربع اول قرارگرفته) محاسبه کنید .

۵ـ درتعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ

$m(x+1)^4 - (2x+1)^2 = 0$.

بحث کنید و نتیجه را در جدولی ثبت نمائید ودرستی نتیجه را روی منحنی (C) تحقیق کنید .

۲۷۹۸ـ تابع $y=ax+b+\sqrt{x^2-1}$ مفروض است .

۱ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا خط $y=1$ دربع اول با منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض مجانب شود.

۲ـ تحقیق کنید نقطهٔ $\omega(1\ و\ 0)$ مرکز تقارن منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=1-x\pm\sqrt{x^2-1}$ می‌باشد .

۳ـ منحنی (C) را رسم کنید .

مثلثات ششم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویز شهریاری)

۲۷۹۹ـ ثابت کنید در هرمثلث روابط زیر برقراراست:

$$\begin{cases}(a+b)\sin\frac{C}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}\\(a-b)\cos\frac{C}{2}=c\sin\frac{A-B}{2}\end{cases}$$

۲۸۰۰ـ درمثلثی A و $\frac{b-c}{h_a}=m$ مفروض است ، زوایای B و C را محاسبه کنید (بحث)

۲۸۰۱ـ مطلوبست حداکثر محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن معلوم باشد .

۲۸۰۲ـ دستگاه زیررا حل کنید .

$$\begin{cases}\sin x+\cos 2y=0\\tg2x+\cotg y=0\end{cases}$$

۲۸۰۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع

$y=\frac{1}{3}\sin 3x-\sin x$ را در یك فاصلهٔ تناوب رسم کنید .

دبیرستان پهلوی اراك

دبیر: غلامرضا نخعی ـ فرستنده : یدالله ارضی

۲۸۰۴ـ معادلهٔ : $tgx-tg3x=m\,tg2x$ مفروض است :

اولا ـ معادلهٔ فوق را به ازاء $m=0$ و $m=-1$ حل کنید .

ثانیاً ـ نشان دهیدکه درحالت کلی معادلهٔ فوق را میتوان بصورت دو معادلهٔ زیر تجزیه نمود .

$$\begin{cases}\sin 2x=0\\2m\cos^2 2x+(m+2)\cos 2x-m=0\end{cases}\quad(I)$$

ثالثاً ـ درصورتیکه 2x زاویهٔ حاده‌ای انتخاب گردد در عدهٔ جوابهای معادلهٔ I برحسب مقادیر مختلف m بحث کرده و به ازاء $m=-1$ معادله را حل نمائید .

رابعاً ـ ازروی منحنی : $y=\frac{-2x}{2x^2+x-1}$ بحث مربوط به ثانیاً را نتیجه گرفته و جواب را در جدولی ثبت نمائید .

۲۸۰۵ـ مثلث ABC به اضلاع a و b و c و شعاع دایرهٔ محیطی R در دست است :

اولا هرگاه بین a و b و c و R رابطهٔ زیربرقرار باشد نوع آن را تعیین نمائید .

$$a^2+b^2+c^2=8R^2$$

ثانیاً ـ درحالتی که $h_a=\frac{a}{4}$ و $A=90^\circ$ انتخاب گردد ، زوایای B و C را بدست‌آورده و نتیجهٔ استنباط خود خودرا بنویسید (طریقهٔ هندسی مورد نظراست) .

ثالثاً ـ درحالتی که $R=4$ فرض گردد ، اضلاع a و b و c ومساحت مثلث را محاسبه نمائید .

۲۸۰۶ـ ـ هریك از معادلات زیر را حل کرده و در صورت لزوم بحث کنید ؛

I : $tg(\cotg x)=\cotg(tgx)$

II : $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$

۲۸۰۷ـ اولا ثابت کنیدکه خط $x=\pi$ محور تقارن منحنی نمایش تابع ؛

$z=\sin x\cos x-\sin^2 x$

بوده وسپس منحنی y را بین یکدورهٔ تناوب دردستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

۲۸۰۸ـ در مثلث ABC ضلع a و مجموع اضلاع b و c ثابت هستند، مدلل کنیدکه حاصلضرب فواصل رؤس B و C از نیمساز خارجی زاویهٔ A مقدارثابتی است .

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: خلیل همت ـ فرستنده : سید حسین مشکین

۲۸۰۹ـ اولا معادلهٔ زیررا حل وبحث نمائید وبه ازاء $x=\frac{2\pi}{3}$ مقدار m را حساب کنید سپس به ازاء این مقدار m جوابهای کلی معادله را بدست‌آورید .

$$(m+1)\sin x+\cos x=m\sin^2\frac{x}{2}+2m\cos^2\frac{x}{2}$$

۲۸۱۰ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل وبحث نمائید سپس به ازاء $m=-2$ جوابهای کلی دستگاه را پیدا کنید .

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\\cos 3x+\cos 3y=m\end{cases}$$

۲۸۱۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم نمائید .

$$y=\frac{\sin x}{1+tg^2 x}$$

۲۸۱۲ـ ثابت کنید که اگر در مثلثی رابطهٔ

$$\cos 2x=\frac{c^2-b^2}{a^2}$$

برقرار باشد مثلث قائم‌الزاویه است .

ثانیاً برعکس اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشدثابت کنید که رابطهٔفوق برقرار است .

۲۸۱۳ـ در مثلثی زاویهٔ A معلوم و رابطهٔ زیر برقرار است .

$$K=\frac{b-c}{h_a}$$

اولا معادله‌ای تشکیل دهیدکه زوایای دیگر از حل آن مشخص گردند (معادله را برحسب $\sin\frac{B-C}{2}$. تشکیل دهید)

ثانیاً در صورتی معادله بصورت :

$$2K\sin^2\frac{B-C}{2}+2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}-K\cos^2\frac{A}{2}=0$$

باشد به ازاء چه مقادیری از K و A معادله دارای جوابست (K عددیست ثابت)

ثالثاً ریشه های معادلهٔ فوق را قابل محاسبهٔ لگاریتم نمائید .

دبیرستانهای گروه فرهنگی هدف

۲۸۱۴ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔدوم زیررا بدون استفاده از جدول قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید (کمان معین را برحسب رادیان اختیار نمایید) .

$$2x^2\sqrt{2}-4x\sqrt{2+\sqrt{3}}-1=0$$

۲۸۱۵ـ معادلهٔ

$$(m+2)\sin 2x-\cos 2x=2m\cos^2 x+3$$

مفروض است .

۱ـ معادلهٔ مفروض را بیك معادلهٔ قابل‌حل تبدیل کنید.

۲ـ بفرض اینکه $\frac{-\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ باشد در تعداد جوابهای معادلهٔ زیر برحسب مقادیر مختلفه m بحث کنید :

$$tg^2 x-(m+2)tgx+m+2=0$$

۲۸۱۶ـ تابع $y=\frac{1}{4}(2\sin x-1)^3+2$

مفروض است :

۱ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع مفروض را در یکدورهٔ تناوب رسم کنید .

۲ـ مساحت سطح محصور بین منحنی (C) ومحورطول‌ها و دوخط $x=0$ و $x=\pi$ را محاسبه نمایید .

۲۸۱۷ـ دستگاه زیر مفروض است :

$$\begin{cases} tgx+tgy=m \\ \cos x\cos y=\frac{1}{4} \end{cases}$$

۱ـ در تعداد جوابهای دستگاه مفروض به ازاء مقادیر مختلفه m بحث کنید .

۲ـ به ازاء $m=2\sqrt{3}$ دستگاه مفروض‌را حل کنید .

حساب استدلالی ششم ریاضی

دبیرستان اندیشه (دبیر: پرویز شهریاری)

۲۸۱۸ـ اولا n را چنان پیدا کنیدکه 2^n-1 بر ۷ قابل قسمت باشد .

ثانیاً ثابت کنیدکه 2^n+1 هرگز بر۷قابل قسمت نیست.

۲۸۱۹ـ اگر $a^3-b^3=19$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید .

۲۸۲۰ـ اولا شرط قابلیت تقسیم x^2+y^2 را بر ۷ بدست آورید .

ثانیاً ثابت کنید معادلهٔ $x^2+y^2=7z^2$ هرگز جواب صحیح ندارد .

۲۸۲۱ـ کسر کوچکتر ازواحد $\frac{a^5}{b^3}$ مفروض است . اگر این کسر برابر کسراعشاری متناوب مرکب باسه رقم ثابت وسه رقم گردش باشد a و b و همچنین ارقام ثابت وگردش را پیدا کنید .

۲۸۲۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$(172)_x=y^2$$

دبیرستان پهلوی اراك

(دبیر: محمود کاشانی ـ فرستنده : یدالله ارضی)

۲۸۲۳ ـ دو عدد چنان تعیین کنیدکه بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان برابر با حاصلضرب خارج قسمت‌های هریك از آندو عدد بربزرگترین مقسوم علیه مشترك خودگردند وبعلاوه تفاضل حاصلضربشان ازمجموع مربعاتشان برابربا ۲۵۲ شود.

۲۸۲۴ـ در صورتیکه a و b در رابطهٔ با $b^2=24a^2+1$ صدق نمایند ثابت کنید همواره حاصلضرب ab بر ۵ قابل‌قسمت خواهد بود .

۲۸۲۵ـ ثابت کنید در هرمبنای $n>3$ عدد ۱۲۳۳۲۱ بر ۱۱ قابل‌قسمت خواهد بود .

۲۸۲۶ـ کسر غیرممکن التحویل $\frac{a}{b}$ را طوری بدست آورید که مولد یك کسر اعشاری متناوب ساده گردیده و تعداد ارقام دورهٔ گردشش ۲ باشد و ضمناً مجموع صورت و مخرج این کسر نیز برابر با ۱۱۲ گردد .

۲۸۲۷ـ عدد چهاررقمی $N=\overline{mcdu}$ را بطریقی بدست آورید که خود عدد مربع کامل بوده و ضمناً هریك از اعداد $\overline{du}$ و $\overline{mc}$ نیز مربع کامل گردند .

۲۸۲۸ـ مطلوبست محاسبهٔ S_n بطوریکه داشته‌باشیم :

$$S_n=1\times 2n+2(2n-1)+3(2n-2)+\dots+n(n+1)$$

۲۸۲۹ـ عدد $N=\overline{mcdu}$ را چنان بیابید که در شرط زیرصدق کند .

$$\overline{mcdu}=3(\overline{umcd}-1)$$

۲۸۳۰ـ عدد $N=\overline{mcdu}$ را آنطور بدست آورید که داشته باشیم :

$$\overline{mcdu}=(\overline{du})^2$$

۲۸۳۱ـ شخصی در قرن هیجدهم متولد گردید، درسال ۱۹۰۱ مجموع ارقام مطلق عدد سن او مساوی با مجموع‌ارقام مطلق عددسال تولد وی گردیده است ، سال تولد او را بدست آورید .

دبیرستان دکترکریم فاطمی اهواز (دبیر: گیتی‌زاده)

۲۸۳۲ـ دوعدد پیداکنید که‌مجموع مربعات کوچکترین مضرب و بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان ۳۶۲۵ باشد .

۲۸۳۳ـ دوعدد پیداکنید که نسبت آنها $\frac{2}{3}$ وکوچکترین مضرب مشترکشان ۱۲۰ باشد .

۲۸۳۴ـ در تجزیهٔ دوعدد به‌عوامل اول تنها عوامل ۲و۵ موجود است‌حاصلضرب این‌دوعدد ۳۵ مقسوم‌علیه ویکی ازآنها ۲ مقسوم‌علیه بیشتر از دیگری دارد این دوعدد را تعیین کنید .

۲۸۳۵ـ مطلوبست تعیین همهٔ کسرهای $\frac{\overline{ab}}{bc}$ که معادل کسر تحویل ناپذیر $\frac{a}{c}$ باشند .

۲۸۳۶ـ اولا: ثابت کنید مجموع دوکسر تحویل‌ناپذیر بنا بر آنکه مخرجهایشان نسبت بهم اول باشند کسری تحویل ناپذیر است .

ثانیاً : اگر مجموع چنین دوکسری مولد عدد اعشاری متناوب .... ۰٫۹۱۶۶۶ باشد این دوکسر را بیابید.

۲۸۳۷ـ کوچکترین عددی پیداکنید که بر ۱۴ و ۳۵ بخش پذیر بوده و باقیماندهٔ تقسیمش بر ۱۸ و ۲۷ برابر ۴ باشد .

دبیرستانهای گروه فرهنگی هدف

۲۸۳۸ـ دستوری برای تعیین مقادیر a طوری بدست آورید که عبارت $5a+61$ همیشه بر ۱۱ قابل‌قسمت باشد .

۲۸۳۹ـ اولا ـ ثابت کنید که هرگاه‌دوعدد نسبت‌بیکدیگر اول باشند مجموع و حاصلضرب آنها هم نسبت بیکدیگر اول خواهند بود .

ثانیاً ـ مطلوبست تعیین دوعدد بطوریکه مجموعشان مساوی ۴۱۴ وکوچکترین مضرب مشترکشان مساوی ۲۱۶۰ شود .

۲۸۴۰ـ ثابت کنید عبارت $13^{2n+2}-13^{2n}-24$ بازاء جمیع مقادیر n همیشه بر ۷۲ قابل قسمت است .

۲۸۴۱ـ اولا ـ مطلوبست تعیین اعدادی چهار رقمی که براعداد ۲۷ و ۴۵ و ۳۰۰ قابل قسمت باشند .

ثانیاً ـ بین جوابهای فوق فقط یکی از آنها مثلا a بر ۳۶۰ قابل قسمت است مطلوبست تعیین کوچکترین عددیرا که مجذورش برعدد a قابل قسم باشد .

۲۸۴۲ـ بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك عدد ۲۰۱۶ باعدد دیگری کوچکتر ازآن مساوی ۱۴۴ می‌باشد مطلوبست تعیین عدد مزبور (تمام جوابهای مسئله باید تعیین شود) .

هندسهٔ رقومی و ترسیمی ششم ریاضی

دبیرستان دکترکریم فاطمی‌اهواز (دبیر: گیتی‌زاده)

۲۸۴۳ـ ازنقطه aa' ببعد ۱ وارتفاع ۴ خطی‌بگذرانید که خط‌الارض راقطع‌کند و اقصر فاصله‌اش باخط منتصب‌معلومی طول معلوم l باشد .

۲۸۴۴ـ ازنقطهٔ معلوم aa' خطی رسم کنید که برخط معلوم dd' عمود بوده و فاصلهٔ بین آثار افقی این دوخط طول ملعوم l باشد .

۲۸۴۵ـ ازنقطه aa' صفحه‌ای بموازات خط معلومی رسم‌کنیدکه برصفحهٔ نیمسازناحیهٔ اول عمود باشد .

۲۸۴۶ـ ازنقطهٔ aa' خطی بموازات صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم رسم کنیدکه نیمرخ معلوم $bcb'c'$ را قطع کند .

۲۸۴۷ـ مقدار حقیقی مسطحهٔ فرجه‌ای که از صفحه‌ای غیرمشخص $P\alpha Q'$ و صفحهٔ افقی S' تشکیل می‌شود بدست آورید .

۲۸۴۸ـ فصل مشترك یك صفحهٔ مواجه را باصفحه‌ای‌که برخط‌الارض میگذرد ویك نقطه از آن معلوم است پیداکنید.

۲۸۴۹ـ فصل مشترك صفحه‌ای باصفحات نیمسازهامعلوم است آثار این صفحه را رسم کنید .

۲۸۵۰ـ نقطهٔ تلاقی یك خط نیمرخ را بایك صفحهٔقائم بدست‌آورید .

۲۸۵۱ـ از نقطهٔ aa' ببعد ۲ و ارتفاع ۳ صفحه‌ای‌رسم کنیدکه باصفحات تصویر زوایای متساوی بسازد .

دبیرستان فرهنگ اهواز (دبیر گیتی‌زاده)

۲۸۵۲ـ برنیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله‌اش از صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ اول طول معلوم l باشد .

۲۸۵۳ـ اولا: از نقطهٔ aa' ببعد ۲ و ارتفاع ۳ خطی بموازات‌صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم رسم‌کنید که خط معلوم dd' را در نقطه‌ای مانند bb' قطع کنند .

ثانیاً ـ ملخص مثلث ABC را که در رأس A قائمه میباشد و رأس C برخط dd' واقع شده‌رسم کنید .

۲۸۵۴ـ اولا در صفحهٔ $P\alpha Q'$ نقطه‌ای ببعد وارتفاع۳ پیداکنید .

ثانیاً ـ ازاین نقطه و در همین صفحه خطی رسم‌کنیدکه باصفحهٔافق تصویر زاویهٔ $30°$درجه بسازد .

۲۸۵۵ـ تصویر خطمعلوم dd' را برروی صفحهٔنیمساز ناحیهٔ اول و ناحیهٔ دوم بدست آورید .

۲۸۵۶ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ و اثر افقی صفحهٔ دیگری که بر $P\alpha Q'$ عمود میباشد مفروضند اثر قائم صفحه را تعیین‌کنید.

۲۸۵۷ـ از نقطهٔ aa' صفحهٔ قائمی برصفحهٔ معلوم $P\alpha Q'$ عمودکنید سپس‌فصل مشترك این‌صفحهٔ قائم راباصفحات نیمسازها تعیین نمائید .

۲۸۵۸ـ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ $P\alpha Q'$ را پیدا کنیدکه تفاضل بعد و ارتفاعشان برابر ۳ باشد .

دبیرستان نظام‌وفا اهواز (دبیر: گیتی‌زاده)

۲۸۵۹ـ اولاـ ازنقطهٔ aa' ببعد ۱ وارتفاع ۵ نیمرخی رسم کنید که اقصر فاصله‌اش از خط‌الارض برابر ۴ باشد سپس برروی این نیمرخ نقطه bb' را بارتفاع ۲ انتخاب کنید.

ثانیاً ـ افقیه‌ای بارتفاع ۳ بطریقی رسم کنیدکه باصفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ $30°$ درجه بسازد و نیمرخ $aba'b'$ را قطع کند .

ثالثاً ـ آثار صفحه‌ای را پیدا کنیدکه براین خط نیمرخ و افقیه مرور میکند .

۲۸۶۰ـ جبهیه‌ای ببعد ۳رسم کنیدکه برخط معلوم dd' عمود باشد و آنرا قطع‌کند .

۲۸۶۱ـ مکان هندسی نقاطی ازصفحهٔ $P\alpha Q'$ را پیدا کنیدکه نسبت بعد آنها بارتفاعشان برابر $\frac{m}{n}$ باشد .

۲۸۶۲ـ صفحهٔ منتصبی رسم‌کنیدکه باصفحهٔ افقی تصویر زاویه α بسازد ونقطهٔ معلوم aa' بفاصلهٔ l ازآن واقع شود.

۲۸۶۳ـ از نقطه aa' واقع در خارج صفحهٔ $P\alpha Q'$ خطی رسم کنید که با این صفحه و صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم موازی باشد .

۲۸۶۴ـ برروی خط معلوم dd' نقطه‌ای تعیین کنید که بعدش ۳ واحد از ارتفاعش بیشتر باشد سپس از این نقطه صفحه‌ای بموازات ناحیهٔ اول رسم کنید .

دبیرستانهای گروه فرهنگی هدف

۲۸۶۵ـ ۱ـصفحهٔ P رابا معلومات ذیل بسازید:مقیاس شیبش با محور اطول کاغذ موازی باشد و در ۶ سانتیمتری‌سمت راست آن محور رسم شود ، اثر آن بر مرکز کاغذ بگذرد ، باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد ، تنزل رقومش از بالا به پائین باشد .

۲ـ درصفحه خط a_4b_4 را به شیب $\frac{1}{2}$ چنان رسم کنید که a روی محور اطول و b طرف راست آن باشد .

۳ـ برروی AB مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC را در صفحهٔ P بسازیدکه در رأس A زاویهٔ آن‌قائمه باشد و رقوم C از رقوم A بیشتر باشد .

۴ـ مثلث ABC قاعدهٔ منشور قائمی است به ارتفاع ۵ که قاعدهٔ DEF آن بالای صفحه P واقع است منشور را بسازید . (مرئی و مخفی را مراعات کنید) .

۲۸۶۶ـ مقیاس شیب صفحهٔ P در۲ سانتیمتری لبهٔ‌راست کاغذ و موازی باآن رسم شود . شیب آن $\frac{2}{3}$ و ترقی رقومش از بالا به‌پائین است . دونقطهٔ b_4 و c_8 بفاصلهٔ حقیقی $BC=5$ به‌قسمی‌هستندکه bc بالبهٔ اطول‌کاغذ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

تصویر b بفاصلهٔ ۵ ازلبهٔ راست و فاصلهٔ ۱۰ ازلبهٔ بالای کاغذ قرار دارد c طرف راست و بالای b است . BC وتر مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقینی است که میانهٔ AM آن باصفحه P موازی است و رقوم A از ۶کمتر است. مثلث را بسازید .

۲۸۶۷ـ ـ نقطهٔ A(۲و۴) را اختیار کنید ، فاصلهٔ آن را از خط زمین بدست آورید . برآن‌یك خط جبهی بگذرانید که با صفحهٔ تصویر زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و نقاط برخورد آن را باصفحات نیمساز فرجه و تصویر تعیین کنید .

۲۸۶۸ـ خط قائم VV' به‌بعد ۴ و بر روی رابطی به‌فاصلهٔ ۳ طرف چپ آن خط منتصب DD' را به ارتفاع ۲ رسم‌کنید. نقطهٔ M(۲و۴) را چنان تعیین‌کنیدکه ازخط منتصب DD' بفاصلهٔ ۳ باشد . فاصلهٔ M را از خط قائم VV' بدست آورید . (بحث)

۲۸۶۹ـ نقطهٔ A رادر ناحیهٔ اول بفاصلهٔ ۵ ازخط‌زمین و ۴ از صفحهٔ افقی اختیارکنید . برآن صفحهٔ منتصبی‌بگذرانید که باصفحهٔ تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد . فصل مشترك این صفحه را با صفحات نیمساز بدست آورید .

۲۸۷۰ـ از نقطهٔ M(۳و۴) نیمرخی موازی نیمسازاول رسم‌کنید و آثار آن را (بدون تسطیح) بدست آورید . براین نیمرخ صفحه‌ای مرور دهید که افقیه‌هایش با صفحهٔ قائم زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد .

مسائلی که هنگام چاپ مجله واصل شده است

جبر پنجم ریاضی

دبیرستان ایرانشهر یزد
دبیر: امینیان ــ فرستنده : سیدرضا کافی

۲۸۷۱ـ رابطهٔ $x^2+y^2-2y=0$ مفروض است ثابت کنیدکه مشتق دوم یعنی y''_x مکعب کامل است. همچنین‌ضریب زاویهٔ‌خط‌مماس‌برمنحنی‌فوق‌رادر نقطهٔ A(۲و۱ـ) پیداکنید در ضمن مقدار مشتق دوم را دراین نقطه پیداکنید .

۲۸۷۲ـ اگر نقطهٔ M محل تلاقی خط $y=k$ بامحور عرضها باشد از این نقطه خطی بموازات خط $y=2x+3$ رسم شده است . معادلهٔ این خط را بنویسید و تحقیق نمائید به‌ازاء چه‌مقدار از k این خط منحنی $y=\frac{x+5}{-x+3}$ را قطع میکند اگر Q و P نقاط تقاطع این خط و منحنی تابع فوق باشدمختصات H وسط PQ را تعیین کنید در ضمن ثابت‌کنید زمانی‌که‌نقطه M محور عرضها را طی میکند نقطه H بر روی خط مستقیم ثابت حرکت میکند معادلهٔ این خط را حساب کنید .

۲۸۷۳ ـ اگر $y=f(u)$ و $u=\varphi(x)$ باشند y'_x با $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی‌که $\Delta x\to 0$ حساب کنید واگر بدانیم $y=2u$ و $u=x+\frac{3}{\pi}sin\frac{x\pi}{3}$ باشد ثابت‌کنید y'_x مربع کامل است .

۲۸۷۴ـ دو تابع

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{x}-2} \quad و \quad y_2=\frac{\sqrt{x}+6-x}{x-4}$$

مفروضند بدون استفاده از مشتق‌گیری ثابت کنید این دو تابع دارای مشتقهای مساوی هستند.

۲۸۷۵ـ اولاـ ازمبدأ مختصات‌دوممماس میتوان‌برمنحنی $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ رسم کـرد معادلهٔ این دو مماس و مختصات نقاط تماس را پیدا کنید .

شیمی چهارم طبیعی

دبیرستانهای کازرون (دبیر: حسین‌جواهری)

۲۸۷۶ـ آمیزه‌ای است‌از اسید فرمیك ، اسیداگزالیك سولفات دوسود متبلور و سولفات آمونیوم :

۱ـ ۳/۱۳گرم مخلوط را در مجاورت اسیدسولفوریك حرارت میدهیم گـازی متصاعد میشود که حجم آن ۰/۳۳۶ لیتر بوده و چون از اکسید مس سیاه گداخته عبور داده شود بدون تغییر حجم ، وزن مخصوص $\frac{10}{21}$ گرم زیادتر میشود .

۲ـ محلول باقیمانده راکه کاملا اسیدی است‌درمجاورت شناساگرفنل‌فتالین با سود دسی‌نرمال‌ترکیب‌میکنیم برای تولید رنگ ارغوانی باید 200^{cc} سود دسی نرمال مصرف کرد .

۳ـ آنچه را که از دو تجربـه فوق باقی‌میماند با سود کستیك جامد بشدت حرارت داده و گازهای حاصل را بوسیله

بقیه در پائین صفحهٔ ۴۸

مسائل برای حل

به ملاحظهٔ گرفتاری دانش آموزان در امر امتحانات پایان سال تحصیلی ، ازدرج مسائل برای هر کلاس خودداری و به چاپ مسائل متفرقه اکتفامی‌شود .

۲۸۷۷ـ به فرض اینکه یکی از ریشه‌های معادلهٔ

$$ax^۲+bx+c=۰$$

برابر با یك باشد رابطهٔ زیررا بین ضرایب محقق کنید .

$$a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

(جواد فرهودی ـ دبیردبیرستان رازی عجب شیر)

۲۸۷۸ـ ازهریك ازتصاعدهای زیرچند جمله اختیار کنیم تا سه مجموع حاصل یك تصاعد عددی تشکیل دهند.

... و ۵ و ۳ و ۱ و ... و ۳ و ۲ و ۱ و

... و ۶ و ۴ و ۲ و

(علی اکبر ایزدی فر ـ دبیر دبیرستانهای قزوین)

۲۸۷۹ـ اگر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ به ترتیب مجموع n و ۳n و ۴n جملهٔ متوالی ازیك تصاعد عددی باشند ، رابطهٔ زیر را محقق کنید .

$$S_۳=۲(S_۲-S_۱)$$

(علی‌اکبر ایزدی فر)

۲۸۸۰ـ چند جمله‌ای درجهٔ سوم $f(x)$ را چنان پیدا کنیدکه به ازاء $x=۰$ برابر با ۹ـ بوده و به علاوه داشته باشیم :

$$f(x)-f(x-۲)\equiv ۶x^۲+۳۲x-۶$$

(امیدعلی‌کرم زاده ـ مسجد سلیمان)

۲۸۸۱ـ سری زیر مفروض است

$$S_n=\frac{۳}{۵}+\frac{۲۳}{۲۵}+\frac{۱۲۳}{۱۲۵}+\frac{۶۲۳}{۶۲۵}+\dots$$

جملهٔ مرتبهٔ n ام آنرا تعیین کرده ومعلوم کنید حد این جمله وقتی‌که $n\to\infty$ برابر یك است .

(یدالله ارضی ـ ششم ریاضی دبیرستان پهلوی اراك)

۲۸۸۲ـ به فرض اینکه $\log\alpha$ و $\log\beta$ و $\log\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ

$$ax^۳+۳bx^۲+۳cx+d=۰$$

باشند . حاصل عبارت زیررا برحسب a و b و c حساب کنید.

$$\log\frac{\alpha}{\beta}\log\frac{\beta}{\gamma}+\log\frac{\beta}{\gamma}\log\frac{\gamma}{\alpha}+\log\frac{\gamma}{\alpha}\log\frac{\alpha}{\beta}$$

(فرستنده : فرهاد فهیمی ـ دبیرستان علوم)

۲۸۸۳ـ به فرض اینکه M و N به ترتیب تعداد ارقام همهٔ اعدادی باشندکه مفسر لگاریتمی آنها به ترتیب برابر m و n است صحت رابطهٔ زیررا محقق کنید .

$$\log_a(m+۱)N-\log_a(n+۱)M=n-m$$

(سیروس فخر یاسری دانشجوی فنی)

۲۸۸۴ـ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin۳\alpha}{b}=\frac{\sin۵\alpha}{c}$$

چه رابطه بین a و b و c برقراراست .

(نصرت‌الله حسنلو پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی۲)

۲۸۸۵ـ معادلهٔ زیررا حل‌کرده جوابهای‌کلی آنرا بر حسب a و b به دست‌آورید.

$$tg(ax+\frac{۲\pi}{۳})-tg(a+b)x+tg(bx+\frac{\pi}{۳})=۰$$

(رمضا نعلی صفائی ـ پنجم ریاضی دبیرستان خرد)

۲۸۸۶ـ مستطیلی رسم می‌کنیم‌که دو رأسش بر خط به معادلهٔ $x=h$ ودو رأس دیگرش برسهمی $y^۲=۲px$ واقع باشد . ابعاد این مستطیل چگونه انتخاب شود تا مساحتش ماکزیمم باشد .

(فرستنده : یعقوب سلامت ابراهیمی دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم)

۲۸۸۷ـ تابع $z=x+y$ که در آن x و y تابع شرط $x^۲+y^۲=k$ می‌باشند مفروض است مقدار اکسترمم تابع را معلوم کنید .

(حسین نعمتی)

۲۸۸۸ـ عدد $N=\overline{mcdu}$ را چنان تعیین کنید که‌مضرب ۱۸ بوده‌واعداد $\overline{mc}$ و $\overline{du}$ به ترتیب با ۳ و ۲ متناسب باشند .

(محمد جواد غفوری ششم ریاضی دبیرستان ناصرخسرو)

۲۸۸۹ـ عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ را با شرط زیر تعیین کنید .

$$\overline{abcd}=\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{cda}+\overline{dab}$$

(محمد جواد غفوری)

۲۸۹۰ـ دوعدد $A=n^۲+n+۱$ و $B=۳n+۱$ مفروضند وفرض می‌کنیم . $S=A+B$ و $d=A-B$

۱) اعداد S وd را با شرط امکان درمبنای n بنویسید.

۲) اگر S در مبنای $n-۲$ به صورت ۱۹۵ نوشته شده باشد مقدار n را تعیین کنید .

۳) مقدار n را تعیین کنید برای‌آنکه :

الف ـ S به رقم ۵ ختم گردد .

ب ـ d به رقم ۷ ختم گردد .

ج ـ اثبات اینکه مقداری برای n یافت نمی‌شود که دو شرط الف و ب باهم برقرارباشند .

۴) عدد دورقمی n را چنان تعیین کنیدکه B سه رقمی و A چهاررقمی و S پنج رقمی باشد .

۵ـ مقدار n را معلوم کنیدکه یکی از دو عدد A و B بر ۷ ودیگری بر ۹ بخش پذیر باشد .

۶) مقدار n را پیداکنیدکه A بر B بخش‌پذیر باشد.

۷) ثابت کنیدکه اگر B مجذورکامل باشد به ازاء $n>۴$ عدد A غیراول است .

۸) عدد A چهاررقمی باشد و مجموع مقادیر مطلق ارقامش B را عادکند .

(محمودکاشانی دبیردبیرستانهای اراك)

۲۸۹۱ـ ثابت کنیدکه اگرچند جمله‌ای صحیح

$$ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\ldots+kx+l$$

توان n ام کامل باشد مجموع ضرایب آن نیز توان n ام کامل است .

(حافظی دبیر دبیرستان درخشانی بنیس)

۲۸۹۲ ـ اگر $a_۱$ و $a_۲$ و . . . و a_n $(a_i>۰)$ جمله های یك تصاعد هندسی به قدرنسبت $q>۰$ باشند مجموع زیررا حساب کنید .

$$S=\operatorname{Arctg}\frac{\log_n q}{۱+\log_n a_۱\log_n a_۲}+\operatorname{Arctg}\frac{\log_n q}{۱+\log_n a_۲\log_n a_۳}+\ldots+\operatorname{Arctg}\frac{\log_n q}{۱+\log_n a_{n-۱}\log_n a_n}$$

(سیروس فخر یاسری ـ دانشجوی فنی)

۲۸۹۳ـ حد R_n را وقتی $n\to\infty$ به دست‌آورید .

$$R_n=\frac{۲^۳-۱}{۲^۳+۱}\times\frac{۳^۳-۱}{۳^۳+۱}\times\frac{۴^۳-۱}{۴^۳+۱}\times\ldots\times\frac{n^۳-۱}{n^۳+۱}$$

(فرستنده : ابراهیم طاهری‌آشتیانی ، دبیرستان امیرخیزی تبریز)

۲۸۹۴ـ مکان‌هندسی‌مراکز دوایر محیطی مثلث ABC را تعیین کنید با فرض‌آنکه اندازهٔ زاویه A و نقطهٔ A ثابت بوده وضلع BC روی خط ثابت Δ حرکت کند .

(فرستنده : ابراهیم طاهری آشتیانی)

۲۸۹۵ـ جوابهای معادله های زیر را از راه ترسیم به دست‌آورید .

۱) $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}=\frac{۱}{m^۲}$ ۲) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{n}$

(فرستنده : ابراهیم طاهری‌آشتیانی)

۲۸۹۶ـ مطلوبست رسم مثلثی که ازآن ضلع BC واندازهٔ زاویهٔ A و طول نیمساز خارجی AD معلوم باشد .

(علی‌اکبر ایزدی‌فر ـ دبیردبیرستانهای قزوین)

۲۸۹۷ـ مطلوبست رسم چهار ضلعی محیطی ABCD که ازآن اندازهٔ زاویه‌های A و C وطول قطر AC وتفاضل $|AB-BC|=l$ معلوم باشد .

(ابراهیم صادقی دبیردبیرستانهای‌آباده)

۲۸۹۸ـ ازنقطهٔ P واقع درصفحهٔ دودایرهٔ متحدالمرکز قاطعی چنان رسم کنیدکه وترحادث در دایرهٔ بزرگتر n برابر وتر حادث دردایرهٔ کوچکتر باشد .

(علی اکبر ایزدی‌فر)

۲۸۹۹ـ مثلث ABC مفروض است . M نقطه‌ای از ضلع AB و N نقطه‌ای ازضلع AC وP نقطهٔ تلاقی BN و CM است . ثابت کنیدکه نسبت مساحت مثلث ABC بر مساحت مثلث AMN برابراست بانسبت مساحت مثلث PBC بر مساحت مثلث PMN

(خسرو جهانیار ششم ریاضی دبیرستان شمس‌العلماء)

۲۹۰۰ـ یك قاعدهٔ شبه منشوری عبارتست ازیك دوزنقهٔ متساوی‌الساقین که طول قاعدهٔ بزرگتر آن $2a$ و طول قاعدهٔ کوچکتر وهریك از دوساق برابر a است وقاعدهٔ دیگر شبه منشور، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $3a$ بوده و مساحت مقطع متوسط شبه منشورواسطهٔ هندسی بین مساحات دوقاعده می‌باشد. چنانچه حجم شبه منشور ومجموع مساحتهای دوقاعده بایك عدد بیان شوند طول ارتفاع شبه منشوررا تعیین کنید.

(محمدرضا قسیمی - پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۲)

۲۹۰۱ـ مستطیل R و خط xy که بایکی از اضلاع مستطیل موازی بوده ومستطیل‌را قطع نمی‌کند درداخل صفحهٔ P مفروضند. دو صفحهٔ عمود برهم P' و P'' را برخط xy مرور می‌دهیم وتصاویر مستطیل R را برصفحه های P' و P'' به‌ترتیب R' و R'' می‌نامیم. ثابت کنید وقتی که شکل حول xy دوران کند حجم حادث ازدوران مستطیل R برابر است با مجموع حجمهای حادث ازدوران مستطیلهای R' و R''

(ترجمهٔ محسنی‌زاده پنجم ریاضی دبیرستان هدف ۱)

۲۹۰۲ـ اندازهٔ زاویهٔ xOy برابر 60° است‌روی ضلع Oy دو نقطهٔ P و B را انتخاب می‌کنیم که $OP=a$ و $OB=2a$ باشد.

۱) نقطهٔ M را روی Ox به طریق ترسیم چنان پیدا کنیدکه $\overline{MB}^2+\overline{MP}^2=l^2$ (l طول معین) باشد بحث کنید.

۲) اگر M نقطهٔ متغیری از Ox بوده و $OM=x$ فرض‌شود تغییرات تابع $y=\overline{MB}^2+\overline{MP}^2$ را بررسی کنید و x را تعیین کنیدکه $\overline{MB}^2+\overline{MP}^2=l^2$ باشد (بحث)

(ترجمهٔ : هوشنگ شریف زاده)

۲۹۰۳ـ سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$$f(x)=x^2+2px+q$$

و معادلهٔ زیر مفروض است :

$$(E)\qquad [f(x)]^2-1=0$$

۱) رابطه‌ای بین p و q برقرارکنیدکه معادلهٔ (E) دارای چهار جواب متمایز باشد و ثابت کنیدکه دراین حالت معادلهٔ $f(x)=0$ دوریشهٔ متمایزدارد.

۲) فرض می‌کنیم که هریك از سه جمله‌ای های

$$y_1=x^2+2px+q-1$$

و

$$y_2=x^2+2px+q+1$$

دو ریشه داشته باشند. y_1 دارای ریشه هـای u_1 و v_1 ($u_1<v_1$) و y_2 دارای ریشه های u_2 و v_2 ($u_2<v_2$) باشد. وضع نسبی u_1 و v_1 را نسبت به u_2 و v_2 تعیین کنید.

۳) درحالتی که معادلهٔ (E) دارای چهارریشهٔ متمایز باشد. p و q باید مشمول چه شرطی باشند تا چهارریشهٔ (E) تصاعد حسابی تشکیل دهند و دراین‌حال عبارت کلی $f(x)$ و ریشه های (E) را به دست‌آورید.

(E.P.M.)

فیزیك و شیمی

۲۹۰۴ـ دردو خازن به ظرفیتهای C (نامعلوم) و C' (معلوم) که سلاحهای B و B' به زمین وصل هستند اولی را با فشار الکتریکی u ودومی را بافشارالکتریکی u' پر می‌کنیم اگرسلاحهای A و A' را بایك هادی به هم وصل‌کنیم گالوانمتر G واقع درمدار به محض بستن‌کلید K عبور Q کولن از A به A' را نشان می‌دهد. C را برحسب C' و Q و u و u' به دست‌آورید.

محاسبهٔ عددی : $C'=0{,}5\mu F$ و $Q=40\mu C$ و $u=110v$ و $u'=10v$

(م. ع. س.)

۲۹۰۵ ـ به فرض اینکه در اتم هلیوم بارمثبت هسته $9{,}6\times10^{-10}$ استات‌کولمب و بار منفی الکترون $4{,}8\times10^{-10}$ استات‌کولمب باشد.

۱) نیروی جاذبهٔ بین هسته و الکترون راکه الکترون روی مدار دایره شکلی به شعاع $2{,}65\times10^{-9}$ سانتیمتردوران می‌کند بیابید.

۲) الکترون مزبور به جرم $9{,}12\times10^{-28}$ گرم‌است، درثانیه چند بار به دورهسته می‌چرخد.

۳) سرعت الکترون را تعیین کنید.

۲۹۰۶ـ درظرف A محلولی است از سولفات یك فلز یك ظرفیتی (x) که در هرمولکول گرمش $32{,}4\%$ فلزتمرکز دارد. درظرف B محلول دیگری‌است ازسولفات یك فلز دو ظرفیتی (y) که هر $0{,}160$ گرمش باکلروربا‌ریم رسوب سفیدی به وزن $0{,}233$ گرم تولید می‌نماید. چون این دو محلول را مخلوط کرده بر نصف‌آن نیترات‌باریم وبر نصف دیگر گازهیدرژن سولفوره عبوردهیم وزن رسوبهای سفید وسیاه حاصل به ترتیب $0{,}466$ گرم و $0{,}096$ گرم می‌گردد. پیدا کنید تعداداتم گرمهای فلزهای x و y را درمحلول سولفات اولیه ونسبت‌آنها.

(حسین جواهری دبیردبیرستانهای‌کازرون)

۲۹۰۷ـ a گرم از سولفات یك فلزدوظرفیتی با b گرم ازسولفات فلز دوظرفیتی دیگر $4{,}74$ گرم وزن دارند. نسبت وزنی‌آنها نیزدراین مخلوط برابر $3{,}22$ بر $1{,}52$ است. از طرفی چون این مخلوط را درآب حل‌کرده و برآن نیترات باریم بریزیم رسوبی به وزن $6{,}99$ گرم تولید می‌شود به‌طوری که نسبت وزنی این دورسوب برابرنسبت ۲ بریك‌است. جنس دوفلزمجهول را تشخیص دهید.

(حسین جواهری)

دو مسئله از :

استاد دکتر محسن هشترودی

۲۹۰۸- در کره‌ای استوانه‌ای به ارتفاع $2h$ محاط است . قسمتی از جسم را که در اندرون کره و استوانه محصوراست حذف می کنیم. قسمتی که از بیرون به کره محصور است و سطح داخلی آن ازاستوانه تشکیل شده است باقی می‌ماند. حجم این قسمت را از روی h حساب کنید . **نتیجهٔ عجیب مسئله را از روی خواص مکانیکی یا فیزیکی توضیح کنید .**

قابل توجه علاقمندان به مسابقه های بیست سؤالی

۲۹۰۹- با سؤالهایی که جواب آنها فقط آری یا نه می‌باشد (مانند اینکه پرسیده شود آیا عدد مفروض بر ۷ بخش‌پذیر است ؟ البته جواب آری یا نه می‌باشد) می‌خواهند عددی را که در نظر گرفته شده است معلوم کنند . بزرگترین عددی را که ممکن است با بیست سؤال معین کرد معلوم کنید. آیا در این صورت سؤالها چه خواهند بود ؟

برای حالتی که با چهار سؤال عددی معلوم خواهد شد حداکثر این اعداد و سؤالهایی که اعداد را معلوم می کنند کاملاً تعیین کنید . پس از آن اگر حداکثر این اعداد مثلاً N باشد مسئلهٔ زیررا حل کنید :

شخصی از N شیئی معین (که قبلا تعیین شده است) یکی را در نظر می‌گیرد. با چهار سؤال که از این شخص می کنید معلوم کنید کدام شیئی را در نظر گرفته است؟ و پس از آن در مورد بیست سؤال همین مسئله را تعمیم داده و حل کنید .

بقیه از صفحهٔ ٤٤

اکسیژن منفجر کرده‌ایم ؛ آنچه که حاصل میشود در ۲۷/۳ درجه و ۷۶ سانتیمتر جیوه ۱۲۳۲/. لیتر حجم دارد .

۴- آخرین محصول از تجارب فوق را با کلروربا‌ریم ترکیب میکنیم رسوبی بوزن ۴/۶۶ گرم تولید میشود . پیدا کنید تعداد ذرات آب تبلور سولفات سدیم و اسید اگزالیك و فرمول ملکولی مخلوط را در صورتیکه بدانیم . اولا- تعداد ذرات آب سولفات دوسود۵ برابر تعداد ذرات آب‌اسیداگزالیك بوده و در تجربه ۲ گازی حاصل نمیشود. $\alpha = \frac{1}{273}$

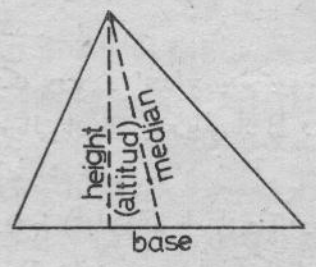
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

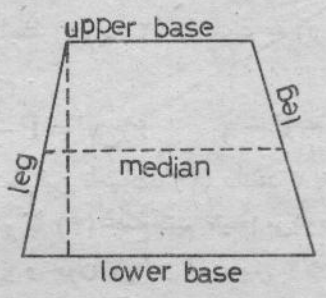
۸- چندضلعی‌ها: Polygons

تنظیم از : ایرج ارشاقی

Perimeter	محیط چند ضلعی
Diagonal	قطر »
Apathem	سهم »
Hypotenuse	وتر مثلث قائم الزاویه
Median	میانه
Incenter of a triangle	مرکز دایره محاطی (داخلی) مثلث
Excenter of a triangle	مرکز دایره محاطی (خارجی) مثلث

Circumcenter of a triangle	مرکز دایرهٔ محیطی مثلث
Orthocenter » » » »	محل برخورد ارتفاعات
Inscribed quadrilateral	چهارضلعی محاطی
Concurrent lines	خطوط متقارب
Collinear Points	نقاط واقع بر یك استقامت
Corresponding	نظیر
Similar Polygons	چند ضلعی‌های متشابه
Congruent » » »	مساوی





●●●

WHICH OF THE FOLLOWING IS CORRECT ?

1- The area of a regular polygon is equal to the product of its apothem and its perimeter.

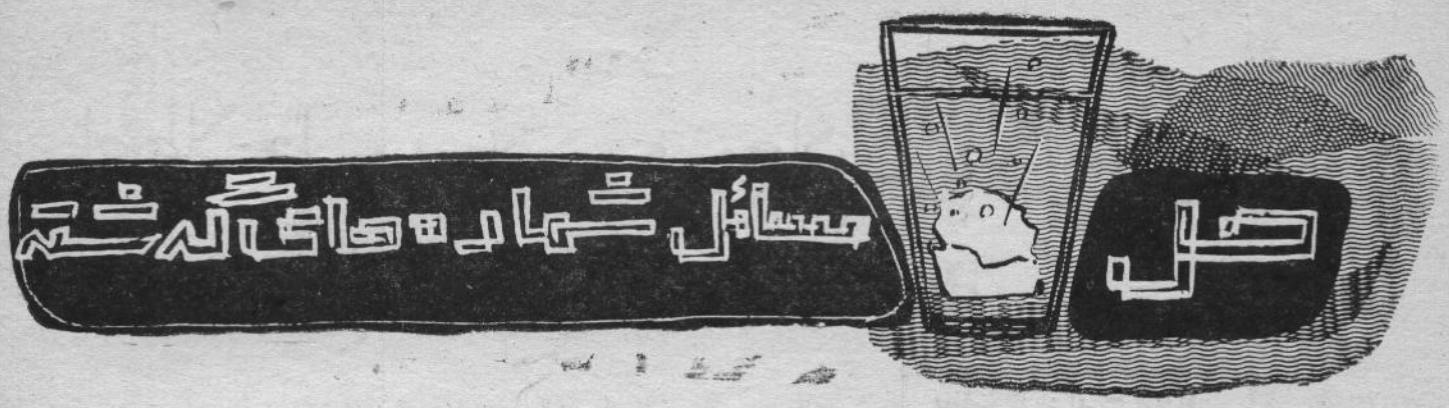
2- Two reqular polygons .of the same number of sides are similar.

3- If two triangles have the three sides of one equal respectively to the three sides of the other, they are Congruent.

اشتباهات چاپی شمارهٔ گذشته :

۱ - در مورد زاویهٔ ظلی، کلمهٔ from قبل از the point از چاپ افتاده است.

۲ - در تعریف شمارهٔ ۱ بجای of کلمهٔ if صحیح است.



حل مسائل متفرقهٔ یکان شمارهٔ ۱۲

۲۲۵۸ـ کارخانه‌ای دونوع شیئی می‌سازد . نوع A و نوع B . وهریك‌ازدونوع ازدوقسم یك‌ریالی ودو ریالی‌تشکیل می‌شودکارخانه‌تصمیم‌داردازاشیاءخودپاکتهایی‌تهیه‌کندکه‌هرپاکت شامل N شیئی بوده و قیمت هرپاکت رویهم P ریال باشد ودر هرپاکت از هرچهار قسم اشیاء به هر ترتیب که میسر باشد ، وجود داشته باشد . به‌علاوه برای هرپاکت نکات زیر مراعات شده باشد .

الف ـ تعداد اشیاء نوع A از تعداد اشیاء نوع B کمتر نباشد .

ب ـ قیمت مجموع اشیاء نوع B از قیمت مجموع اشیاء نوع A بیشتر باشد .

بافرض اینکه y و x و y' و x' به‌ترتیب تعداد اشیاء یك ریالی از A، ۲ریالی از A، یك‌ریالی از B و دوریالی از B موجود درهرپاکت باشد .

۱) تمام روابط (تساویها و نامساویها) موجود بین y و x و y' و x' و N و P را بنویسید برای آنکه شرایط ذکر شده برقرار باشد . y' و x' را برحسب N و P و y و x به‌دست آورید .

۲) به فرض معلوم بودن N حدود P را معلوم کنید و کوچکترین مقـادیری را کـه P و N می‌توانند قبول کنند معلوم نمائید .

۳) به‌فرض اینکه P و N معلوم بوده و P در حدود قابل قبول واقع باشد ، برای آنکه y و x جوابی از مسئله را مشخص کنند باید در نا مساویهایی صدق کنند ، این نامساویها را بنویسید .

۴) بافرض $N=۲۴$ و $P=۳۳$ و y و x مختصات نقطه‌ای مانند M از صفحهٔ محورهای مختصات متعامد باشد ، M درچه ناحیه از صفحه باید واقع شود برای اینکه مسئله دارای جواب باشد. تعداد پاکتهایی را که با ترکیبات مختلف می‌توان تشکیل داد و نوع ترکیب هریك را به‌دست آورید .

حل: ۱) روابط موجود به‌شرح زیر است :

۱) $x+y+x'+y'=N$

۲) $x+۲y+x'+۲y'=P$

$x\geq ۱$ و $y\geq ۱$ و $x'\geq ۱$ و $y'\geq ۱$

۳) $x+y-(x'+y')\geq ۰$

٤) $x'+۲y'-(x+۲y)\geq ۱$

دورابطهٔ (۱) و (۲) را نسبت به دو مجهول x' و y' حل می‌کنیم .

۵) $x'=۲N-P-x$ ۶) $y'=P-N-y$

۲) طرفین نامساوی (۳) را در ۲ ضرب‌کرده حاصل‌را عضو به عضو با (۴) جمع‌کنیم نتیجه می‌شود . $x-x'\geq ۱$ یا $x\geq x'+۱$ و چون $x'\geq ۱$ است پس $x\geq ۲$. وبه‌همین‌ترتیب $y'\geq ۲$ به‌دست می‌آید . و از روابط (۵) و (۶) نتیجه خواهد شد .

$۲N-P-x\geq ۱$ و $P-N-y\geq ۲$

۷) $x<۲N-P-۱$ و ۸) $y<P-N-۲$

وبا توجه به نامساویهای $x\geq ۲$ و $y\geq ۱$ خواهیم داشت :

$۲N-P-۱\geq ۲$ یا $P<۲N-۳$

$P-N-۱\geq ۱$ یا $P\geq N+۳$

وبالاخره حاصل می‌شود :

۹) $N+۳<P<۲N-۳$

از این نامساوی‌مضاعف نتیجه می‌شود :

$N+۳<۲N-۳$ یا $N\geq ۶$ و $P\geq ۹$

۳) روابط زیررا در نظر می‌گیریم

۱۰) $۲<x<۲N-P-۱$ (۱۱ و ۱) $۱<y<P-N-۲$

باتوجه به‌رابطه‌های (۵) و (۶) و نامساویهای

$x>x'+۱$ و $y'>y+۱$ خواهیم داشت :

$$x>\frac{۲N-P+۱}{۲} \quad \text{و} \quad y<\frac{P-N-۱}{۲}$$

و با در نظر گرفتن نامساویهای (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود :

۱۲) $$\frac{۲N-P+۱}{۲}<x<۲N-P-۱$$

۱۳) $$۱<y<\frac{P-N-۱}{۲}$$

باقرار دادن مقادیر x' و y' از روابط (۵) و (۶) در روابط (۳) و (۴) وباتوجه به (۱۲) و (۱۳) می‌شود .

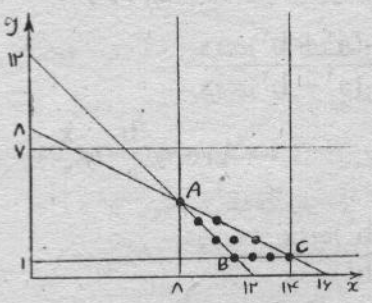
۱۴) $$x+y>\frac{N}{۲}$$

۱۵) $$x+۲y>\frac{P-۱}{۲}$$

۴) به‌فرض $N=۲۴$ و $P=۳۳$ داریم

$$I\begin{cases}۸<x<۱۴\\ ۱<y<۷\\ x+y>۱۲\\ x+۲y>۱۶\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x'=۱۵-x\\ y'=۹-y\end{cases}$$

خطوط با معادلات $x=۸$ و $x=۱۴$ و $y=۱$ و $y=۷$ و $x+y=۱۲$ و $x+۲y=۱۶$ رادریك‌دستگاه محور های مختصات رسم‌می‌کنیم. نامساوی های دستگاه I نشان می‌دهد که نقطهٔ M فقط‌می‌تواندرناحیه‌ای از صفحه که به مثلث ABC با رأسهای



$A(۸و۴)$ و $B(۱۱و۱)$ و $C(۱۴و۱)$

مشخص می‌شود واقع باشد و چون yوx عددهای صحیح هستند نقاطی از صفحه‌که در مثلث ABC محصور بوده وبا مختصات صحیح باشند . مجموعاً ده نقطه می‌باشند بنابراین ده پاکت متمایز باشرایط گفته شده می‌توان تهیه‌کرد .

نوع ترکیب این ده پاکت از جدول زیر معلوم می‌شود:

x	۸	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	۱۴
y	۴	۳	۲	۳	۱	۲	۱	۲	۱	۱
x'	۷	۶	۵	۵	۴	۴	۳	۳	۲	۱
y'	۵	۶	۷	۶	۸	۷	۸	۷	۸	۸

۲۲۵۹ـ تعیین رابطه‌ای مستقل از x و y و z بین u و v و w با فرض

$$u=\frac{x}{y-z} \quad \text{و} \quad v=\frac{y}{z-x} \quad \text{و} \quad w=\frac{z}{x-y}$$

با تعیین مقادیر عبارتهای

$$\frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}+\frac{۱}{w} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{u}\times\frac{۱}{v}\times\frac{۱}{w}$$

رابطهٔ مطلوب به صورت زیر حاصل خواهد شد :

$$\frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}+\frac{۱}{w}+\frac{۱}{uvw}=۰$$

یا

$$uv+vw+wu+۱=۰$$

پاسخهای درست رسیده از : نصرت‌الله آقاجانی ـ محمد همدانی ـ علی‌اصغر ترابی ـ رحیم محمدی ـ لهراسب قشقائی منصور ـ بیژن غیور.

۲۲۶۰ـ به‌فرض $a^۲+b^۲=۴ab$ اثبات اینکه‌عبارت

$$S=۳ab(a+b)(x^۳+x^۲+x+۱)$$

مجموع دومکعب کامل است .

ازرابطهٔ فرض‌نتیجه می‌شودکه $۳ab=a^۲-ab+b^۲$

واز بسط رابطهٔ داده شده و پس از اختصار و تجزیه نتیجه خواهد شد .

$$S=(ax+b)^۳+(bx+a)^۳$$

پاسخ درست رسیده از : نصرت‌الله بابائی.

۲۲۶۱ـ حل این مسئله در بخش «حل مسائل نمونه» همین شماره مذکور است.

پاسخ درست رسیده از : محمد کریم روشن.

۲۲۶۲ـ به‌فرض‌اینکه a و $a_۱$ و $a_۲$ و...و a_n اعداد مثبت و متمایز باشند اثبات نامساوی زیر

$$\frac{۱}{a}(a_۱+a_۲+\ldots+a_n)+a(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\ldots+\frac{۱}{a_n})>۲^n$$

از ضرب عاملهای a و $\frac{۱}{a}$ در پرانتزها عبارت فوق چنین نوشته می‌شود .

$$(\frac{a_۱}{a}+\frac{a}{a_۱})+(\frac{a_۲}{a}+\frac{a}{a_۲})+\cdots+(\frac{a_n}{a}+\frac{a}{a_n})>۲^n$$

هریك از پرانتزهای رابطهٔ اخیر از ۲ بزرگتر است (مجموع هرعدد مخالف اوعکس آن از۲ بزرگتر است)وچون n پرانتز وجود دارد پس نامساوی محقق می‌باشد .

پاسخهای درست‌رسیده‌از : سوسن صفاری- نصرت‌الله بابائی - رحیم خیردوست - رحیم محمدی - علی‌اصغرترابی- نصرت‌الله آقاجانی .

۲۲۶۳- محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S=۲+۶^۲(\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲})+۶^۴(\frac{۴}{۹}+\frac{۹}{۴})+\cdots$$

$$+۶^{۲(n-۱)}(\frac{۲^{n-۱}}{۳^{n-۱}}+\frac{۳^{n-۱}}{۲^{n-۱}})$$

این مجموع برابر است با مجموع دوعبارت زیر:

$$S_۱=۱+(۶^۲\times\frac{۲}{۳})+(۶^۲\times\frac{۲}{۳})^۲+\cdots$$

$$+(۶^۲\times\frac{۲}{۳})^{n-۱}+$$

$$S_۲=۱+(۶^۲\times\frac{۳}{۲})+(۶^۲\times\frac{۳}{۲})^۲+\cdots$$

$$+(۶^۲\times\frac{۳}{۲})^{n-۱}+$$

$$S_۱=۱+۲۴+۲۴^۲+\cdots+۲۴^{n-۱}=\frac{۲۴^n-۱}{۲۳}$$

$$S_۲=۱+۵۴+۵۴^۲+\cdots+۵۴^{n-۱}=\frac{۵۴^n-۱}{۵۳}$$

و از آنجا مقدار S حساب می‌شود .

پاسخهای درست رسیده‌از : سوسن صفاری-نصرت‌الله بابائی - محمود عجمی - نصرت‌الله آقاجانی - رحیم‌محمدی.

۲۲۶۴- حل این مسئله ضمن حل مسائل نمونه ارائه خواهد شد .

۲۲۶۵- به فرض $x+y+z=xyz$ اثبات رابطهٔ زیر :

$$\frac{۲x}{۱-x^۲}+\frac{۲y}{۱-y^۲}+\frac{۲z}{۱-z^۲}=$$

$$\frac{۸xyz}{(۱-x^۲)(۱-y^۲)(۱-z^۲)}$$

اگرفرض کنیم $x=tg\alpha$ و $y=tg\beta$ و $z=tg\gamma$

از رابطهٔ مفروض نتیجه می‌شود که

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi \quad \text{یا} \quad ۲\alpha+۲\beta+۲\gamma=۲k\pi$$

از آنجا

$$tg۲\alpha+۲\beta+tg۲\gamma=tg۲\alpha tg۲\beta tg۲\gamma$$

که چون‌برحسب نصف‌کمان یعنی برحسب x و y و z نوشته شود رابطهٔ مطلوب محقق می‌شود (مسئله مشروط به شرط $xyz\neq۱$ و x و y و z می‌باشد)

پاسخهای درست رسیده از : رحیم خیردوست - بیژن غیور .

پاسخهای رسیده (که با بسط رابطه انجام گرفته است) از : سوسن صفاری - نصرت‌الله بابائی - مجید خرمی- محمد رضا براتی - مرتضی شفائی - حجت‌الله افقهی - رحیم- محمدی - فرامرز پور قلی‌زاده (بااستفاده از خاصیت تقارن)- علی صحرانورد - محمودقنادان .

۲۲۶۶- به فرض $x+y+z=xyz$ اثبات رابطهٔ :

$$(xy+yz+zx-۱)^۲=(۱+x^۲)(۱+y^۲)(۱+z^۲)$$

مانند مسئلهٔ ۲۲۶۵ عمل نموده باتوجه به اینکه اگر $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ باشد $cos(\alpha+\beta+\gamma)=\pm۱$ خواهدبود رابطه محقق می‌شود .

پاسخ درست رسیده است: بیژن غیور.

پاسخهای رسیده (که صحبت رابطه از بسط عبارت انجام گرفته) از:سوسن‌صفاری -محمود قنادان- علی‌صحرانورد حجت‌الله افقهی - محمدرضا براتی - مجید خرمی - نصرت‌الله بابائی - نصرت‌الله‌آقاجانی - حسین امین‌الهی - محمودصابر همیشگی - مرتضی شفائی - رحیم محمدی .

۲۲۶۷- اثبات رابطهٔ زیر:

$$Arc\ cos\frac{a^۲-b^۲+(a^۲+b^۲)cosx}{a^۲+b^۲+(a^۲-b^۲)cosx}=$$

$$۲Arc\ tg(\frac{b}{a}tg\frac{x}{۲})$$

$$\frac{a^۲-b^۲+(a^۲+b^۲)cosx}{a^۲+b^۲+(a^۲-b^۲)cosx}=$$

$$\frac{a^۲(۱+cosx)-b^۲(۱-cosx)}{a^۲(۱+cosx)+b^۲(۱-cosx)}$$

$$=\frac{۱-\frac{b^۲(۱-cosx)}{a^۲(۱+cosx)}}{۱+\frac{b^۲(۱-cosx)}{a^۲(۱+cosx)}}=\frac{۱-(\frac{b}{a}tg\frac{x}{۲})^۲}{۱+(\frac{b}{a}tg\frac{x}{۲})^۲}$$

اگر فرض کنیم $tg\alpha$ مقدار کسر $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\frac{b}{a}\ tg\frac{x}{2}$

برابر با $\cos 2\alpha$ و مقدار هریك از طرفین رابطهٔ مفروض برابر 2α بوده و رابطه محقق است .

پاسخهای درست رسیده از : نصرت‌الله آقاجانی ـ نصرت‌الله بابائی ـ بیژن غیور ـ محمود عجمی ـ فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمدجواد غفوری ـ رحیم خیردوست .

۲۲۶۸ـ به فرض

$$2\cos\alpha = a^m + a^{-m} \quad و \quad 2\cos\beta = a^n + a^{-n}$$

اثبات $2\cos(\alpha+\beta) = a^{m+n} + a^{-m-n}$ و تعمیم مسئله

بامعلوم بودن مقادیر $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ مقادیر $\sin\alpha$ و $\sin\beta$

واز آنجا حاصلضرب آنها حساب می‌شود :

$$2\sin\alpha = (a^m - a^{-m})i \quad و \quad 2\sin\beta = (a^n - a^{-n})i$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = -(a^m - a^{-m})(a^n - a^{-n})$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = (a^m + a^{-m})(a^n + a^{-n})$$

از جمع دو رابطه و بعد از اختصار رابطهٔ مطلوب نتیجه می‌شود .

تعمیم ـ اگر α و β و γ و ... و λ زاویه‌هایی حاده باشند که

$$2\cos\alpha = a^m + a^{-m} \quad و \quad 2\cos\beta = a^n + a^{-n} \quad و \ldots$$

$$2\cos\lambda = a^u + a^{-u}$$

خواهیم داشت :

$$2\cos(\alpha+\beta+\ldots+\lambda) = a^{(m+n+\ldots+u)} + a^{-(m+n+\ldots+u)}$$

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری ـ محمد کاظم جمشیدی ـ مرتضی شفائی ـ محمود قنادان .

۲۲۶۹ـ نقطهٔ $A(0,b)$ در دستگاه محورهای متعامد xoy مفروض است . خطی از A گذشته و محور $x'x$ را در N قطع می‌کند و آنرا به اندازهٔ $MN = a$ امتداد می‌دهیم.

۱) معادلهٔ مکان هندسی M را یافته و منحنی آنرا رسم کنید .

۲) اگر a ثابت و b متغیر باشد ثابتهای منحنیهای مکان را معلوم کنید .

حل ـ ۱) ضریب زاویهٔ خط AN را m فرض می‌کنیم دراین صورت معادلهٔ این خط به‌صورت $y = mx + b$ بوده $N(-\frac{b}{m}, 0)$ می‌باشد و اگر $M(x,y)$ باشد $(y<0)$ داریم .

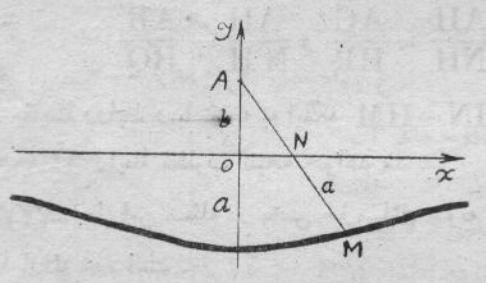
$$\begin{cases} y = mx + b \\ (x + \frac{b}{m})^2 + y^2 = a^2 \\ y < 0 \end{cases}$$

از حذف m بین دومعادلهٔ دستگاه نتیجه می‌شود.

$$x^2y^2 = (y-b)^2(a^2-y^2) \quad و \quad y<0$$

که معادلهٔ مکان M می‌باشد. این تابع وقتی معین است که $-a \leq y < 0$ باشد.

دراین فاصله از y تابع در ازاء جمیع مقادیر x اتصالی است و در ازاء $x=0$ دارای مینیمم $y=-a$ می‌باشد . وقتی‌که $x \to \pm\infty$ حد y برابر صفر بوده و محور xها مجانب منحنی است . محور yها محور تقارن منحنی می‌باشد و شکل منحنی به‌قرار زیر خواهد بود .



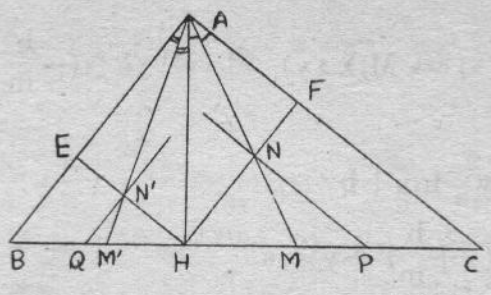
۲) وقتی a ثابت بوده و b متغییر باشد اولا نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها ثابت خواهد بود و ثانیاً مجانب منحنی همواره خط $y=0$ می‌باشد (اگر $b=0$ شود منحنی عبارت ازدایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ خواهد بود).

۲۲۷۰ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (A قائمه) نقاط نقاط E و F روی اضلاع AB و AC چنان‌قراردارند که

$$\frac{BE}{AE} = \frac{AF}{CF} = \frac{c^2}{b^2}$$

نقطهٔ H پای ارتفاع AH را به نقاط E و F وصل می‌کنیم . نیمسازهای زاویه‌های CAH و BAH خطوط HC و HF و BH و HE را به ترتیب در M و N و M′ و N′ قطع می‌کنند و از N و N′ خطوطی به‌موازات AC و AB رسم می‌کنیم تا HC و HB را در P و Q قطع کنند صحت رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$PC + HM' = BQ + HM$$



از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود :

$$\frac{BE}{AE}=\frac{\overline{BH}^2}{\overline{AH}^2}$$

$$\frac{AF}{CF}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}^2}$$

ونتیجه می‌شودکه HF و HE به ترتیب بر AC و AB عمودانند . بنابر خاصیت نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث داریم :

$$\frac{MC}{MH}=\frac{AC}{AH}\text{ و }\frac{BM'}{HM'}=\frac{AB}{AH}$$

و از تشابه دومثلث AHC و NHP و همچنین ABH و N'HQ نتیجه می‌شود .

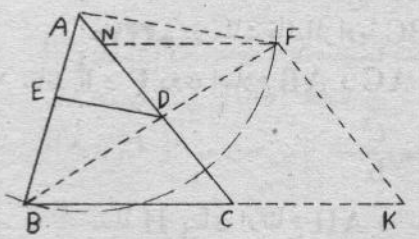
$$\frac{AH}{NH}=\frac{AC}{HP}\text{ و }\frac{AH}{N'H}=\frac{AB}{HQ}$$

از مقایسهٔ روابط و با توجه به اینکه $HN=HM$ و $HN'=HM'$ رابطهٔ مطلوب نتیجه خواهد شد .

۲۲۷۱ـ حل این مسئله در بخش حل‌مسائل نمونه یکان شمارهٔ ۱۴ ارائه شده است .

پاسخهای درست رسیده از: فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمود قنادان .

۲۲۷۲ـ در مثلث ABC نقطهٔ D را بر AC و نقطهٔ E را بر AB تعیین کنیدکه $BE=ED=DC$ باشد .



مسئله راحل‌شده فرض می‌کنیم ، AF را موازی با DE وFK را موازی با DC رسم می‌کنیم از تشابه دو چهار ضلعی BEDC و BAFK نتیجه می‌شود که

$$BA=AF=FK$$

اگر FN را موازی KC رسم کنیم $CN=KF=AB$ بوده راه رسم زیر بدست می‌آید :

$CN=AB$ را بر AC جدا کرده از N موازی با BC رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AB را در F قطع کند . از تلاقی BF با AC نقطهٔ D به دست می‌آید و از D که به موازات FN رسم شود نقطهٔ E حاصل می‌شود .

پاسخهای درست رسیده از : کیوان پـور قاسمی ـ محمود قنـادان ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ فرامرز ـ پور قلی زاده .

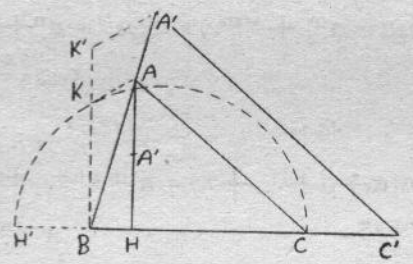
۲۲۷۳ـ رسم‌مثلثی که‌از آن زاویهٔA وb+a و c+a معلوم باشد .

مثلث $AB'C'$ را با معلومات زاویهٔ A و دوضلع $AB'=a+c$ و $AC'=a+b$ ساخته مانند مسئلهٔ ۲۲۷۲ نقاط B و C راچنان تعیین‌می‌کنیم که $B'B=BC=CC'$ باشد .

پاسخهای درست رسیده از : فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمود قنادان ـ بیژن غیور ـ کیوان پورقـاسمی ـ ابراهیم ـ طاهری آشتیانی .

۲۲۷۴ـ رسم مثلثی که با مثلث مفروض متشابه بوده و ضمناً با مربع مفروض معادل باشد .

مثلث مفروض ABC را در نظر می‌گیریم اگر A' وسطارتفاع AH باشد واسطهٔ‌هندسی بین $A'H$ و BC‌را تعیین



می‌کنیم بدین‌ترتیب که $BH'=BH$ جدا کرده و به قطر H'C دایره‌ای رسم می‌کنیم BK عمود مرسوم بر BC و محصور بین B ودایره ضلع‌مربعی است معادل با مثلث ABC و اگر BK' برابر با ضلع مربع مفروض باشد کافی است مثلثی متشابه با مثلث ABC چنان رسم کنیم کـه نسبت تشابه آنها برابربانسبت BK' بر BK باشد. مثلث $A'BC'$ مثلث مطلوب می‌باشد .

پاسخهای رسیده از : بیژن غیور ـ ابراهیم طاهری‌ـ آشتیانی .

حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۳

کلاس چهارم طبیعی

۲۲۷۵ـ به فرض $A=\sqrt{2}x^2+4x\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۱) مقدار A رادرازاء $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ تعیین کرده حاصل رابه‌صورت حاصل‌ضرب عوامل درآورید .

۲) ریشه‌های معادلهٔ $A=0$ را پیداکنید .

مقدار x را در را رابطه قرار داده حاصل را ساده می‌کنیم می‌شود .

$$4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3+\sqrt{6})=4[\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$
$$+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})]=4(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه های $A=0$ به‌دست می‌آید :

$$x'=-\sqrt{6}+\sqrt{7} \quad و \quad x''=-\sqrt{6}-\sqrt{7}$$

پاسخهای درست رسیده از: ملك دشتبان دبیرستان عبرت ـ طلعت مشکین دبیرستان‌دکتر فاطمه سیاح ـ عبدالعلی کوچك‌پور دبیرستان قطب‌دزفول ـ محمود تویسرکانی‌دبیرستان شاهپور تجریش ـ حسین امیر حسینی دبیرستان دارالفنون ـ فریدون امین‌زاده دبیرستان فردوسی رضائیه ـ محمود امجدی دبیرستان صفائی‌سمنان ـ حسین جعفری گلپایگانی ـ محمدرضا رستم نتاج ـ محمد مهدی بخارائی دبیرستان علوی ـعلی‌اکبر قولیج ـ حسین تبریزی دبیرستان ناصر خسرو ـ حسن‌مشتاقی دبیرستان محمدرضاشاه ـ حسین اسماعیلی‌ازساوه ـ عبدالرحمن چگنی زاده .

۲۲۷۶ـ به فرض

$$A=(4x^2-9)^2 \quad و \quad B=4(2x-3)^2$$

مقایسهٔ مقادیر A و B در ازاء

$$x=\sqrt{5}+3\sqrt{21+17\sqrt{37}}$$

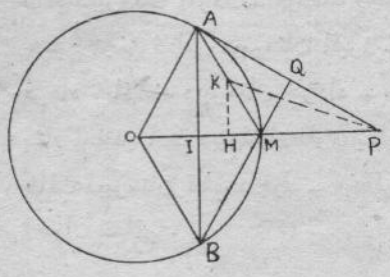
علامت عبارت $A-B$ را در ازاء مقادیر مختلف x تعیین می‌کنیم .

$$A-B=(4x^2-9)^2-4(2x-3)^2$$
$$A-B=(4x^2-4x-3)(4x^2+4x-15)$$

هرعامل را مساوی باصفر قرارمی‌دهیم مقادیر $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{5}{2}$ به دست می‌آید و با تشکیل جدول معلوم خواهد شد که اگر $x>-\frac{1}{2}$ باشد علامت $A-B$ مثبت خواهد بود یعنی $A>B$ است و چون مقدار داده شده نیز از $-\frac{1}{2}$ بیشتر است پس در ازاء این مقدار حاصل عبارت A ازحاصل عبارت B بیشتر خواهد بود .

۲۲۷۷ـ دایرهٔ به مرکز O وبه‌شعاع R مفروض است. شعاع OM و عمود منصف آنرا رسم کرده دایره را در A وB قطع می‌کند .

۱) نوع چهارضلعی AMBO و تعیین اندازهٔ هریك از زاویه های آن



۲) در نقطهٔ A مماسی بردایره رسم می‌شودو امتداد BM آنرا در Q و امتداد OM آنرادر Pقطع می‌کند .

الف‌ـ مثلث AMQ قائم‌الزاویه است و محاسبهٔ طول اضلاع آن برحسب R

ب‌ـ نوع مثلث AMP و محاسبهٔ طول اضلاع آن

ج‌ـ I وسط OM و H وسط IM و K وسط AM است محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $\alpha=KPH$

حل: ۱) شعاع عمود بروتر منصف آن است بنابراین چهار ضلعی AMBO لوزی است واندازهٔ زاویه‌های آن ۶۰° و ۱۲۰° حساب می‌شود .

۲) الف‌ـ BM که با OA موازی است بر AP عمود است و چون زاویهٔ QAM برابر ۳۰° است

$$QM=\frac{AM}{2}=\frac{R}{2} \quad و \quad AQ=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

از رابطهٔ فیثاغورث حساب می‌شود .

ب- از روی تعیین زوایا معلوم خواهد شد که مثلث AMP متساوی‌الساقین است و در نتیجه

$$AP=2AQ=R\sqrt{3} \quad و \quad MP=AM=R$$

ج- داریم.

$$KH=\frac{AI}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{4}$$

و

$$HP=\frac{R}{4}+R=\frac{5R}{4}$$

$$tg\alpha=\frac{KH}{HP}=\frac{\sqrt{3}}{5} \quad و \quad cotg\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\ldots=\frac{\sqrt{21}}{14}$$

$$cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\ldots=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

پاسخهای درست رسیده از : ملك دشتبان - محمود تویسرکانی - محمد مهدی بخارائی - فریدون امین زاده - محمود امجدی - حسین جعفری گلپایگانی - محمد رضا - رستم نتاج - حسین تبریزی - رحمت‌الله صالحی دبیرستان امیر کبیر - علی اکبر قولیج - ناصر نهاوندی پور دبیرستان مروی - منصور نهاوندی‌پور دبیرستان مروی - منوچهرحاجی‌زاده دبیرستان امروز - هوشمند وجدانی دبیرستان رضاپهلوی حسین نجفی ثانی دبیرستان البرز - حسن یزدانی نژاد - فرهاد سعادتمند دبیرستان خرداد - حسین مظفریان ازرضائیه- ستار اسفندیاری دبیرستان علوی‌نیا - عبدالرحیم حاجی - طالب دبیرستان قطب دزفول - عبدالرحمن چگنی‌زاده - هاشم اخوان مشائی .

کلاس چهارم ریاضی

۲۲۷۸- تعین سه عدد متناسب بااعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ که مجموع مربعات آنها ۲۴۰ باشد .

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{y}{\sqrt{4}}=\frac{z}{\sqrt{5}}\\ x^2+y^2+z^2=240\end{cases} \quad یا \quad \begin{cases}\frac{x^2}{3}=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{5}\\ x^2+y^2+z^2=240\end{cases}$$

وازحل دستگاه نتیجه خواهد شد $x=\pm 2\sqrt{15}$

و $y=\pm 4\sqrt{5}$ و $z=\pm 10$

پاسخهای درست رسیده از : آفری تاج‌الدینی دبیرستان فرح - ستار اسفندیاری - هوشمند وجدانی - منصور نهاوندی‌پور - ناصر نهاوندی‌پور- علی‌اکبر قولیج - محمدرضا رستم‌نتاج- حسین جعفری گلپایگانی-فریدون امین‌زاده - محمد مهدی‌بخارائی- محمودتویسرکانی - فرهادغفاری دبیرستان قریب علیرضا ملکی دبیرستان‌آزمون - حسن‌شهنازی دبیرستان قریب رحمت‌الله صالحی- نصرالله حقیقت دبیرستان قنادبابل- مرتضی صدیقین دبیرستان صارمیه اصفهان- سعید شریعتمداری دبیرستان هدف ۱- علی‌سلطانی کلاس دوم دبیرستان رضاپهلوی تجریش عبدالرحمن چگنی‌زاده- حسن‌یزدانی‌نژاد - هاشم اخوان‌مشائی حسین مظفریان - سیدمحمدکاظم عابدینی لنگرودی - سیدجعفر قبادپوردبیرستان بایندرخرمشهر-

۲۲۷۹- تعیین‌مقداری ازm که‌عبارت $1+2m-m^2$ ماکزیمم باشد .

$$1+2m-m^2=2-(1-2m+m^2)$$

$$=2-(1-m)^2$$

وعبارت وقتی ماکزیمم‌است‌که $(1-m)$ می‌نیم یعنی برابر صفرباشد بنابراین $m=1$

۲۲۸۰- تعیین مقادیرp و q برای اینکه خارج قسمت تقسیم x^3+px^2+qx+2 بر $x-1$ برابر با x^2+2x+3 باشد وتعیین باقیماندهٔ تقسیم .

حاصل‌ضرب مقسوم علیه درخارج قسمت برابر می‌شود با x^3+x^2+x-3 که اگر ازمقسوم‌کم شود مقدار باقیمانده برابربا ۵ حاصل‌شده وخواهیم داشت .

$$x^3+px^2+qx-3\equiv x^3+x^2+x-3$$

وازآنجا $p=1$ و $q=1$ به‌دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از: آفری‌تاج‌الدینی- هاشم اخوان‌مشائی- علی‌صحرانورد دبیرستان محمد قزوینی- فریدون امین‌زاده - علیرضاملکی- سیدمحمدکاظم عابدینی- حسن شهنازی فرهاد غفاری - محمودتویسرکانی - علی‌سلطانی- ناصرنهاوندی‌پور- محمد رضا رستم‌نتاج - نصرالله حقیقت - مرتضی صدیقین عبدالرحمن چگنی‌زاده - حسن یزدانی‌نژاد- محمود امجدی حسین تبریزی - حسین‌نجفی ثانی - حسین مظفریان - کبیر شهیدی ازمراغه .

۲۲۸۱- ازمردی پرسیدند چند سال‌داری ؟ جواب داد مجموع سن‌من وزنم بادوبچهٔ ۲ ساله و۳ساله‌ام رویهم‌پنج برابر سن ۲۰سال‌گذشته‌ام می‌باشد. اززنش پرسیدند، گفت ازشوهرم کوچکترم ودر۲۱ سالگی ازدواج کرده‌ام. سن زن و مرداراکه اعداد صحیح‌اند حساب کنید .

سن فعلی مرد را با x و سن فعلی زن را با y نمایش می‌دهیم داریم .

$$x+y+2+3=5(x-20) \quad یا \quad y=4x-105$$

چون زن در ۲۱ سالگی ازدواج کرده وفرزند شش ساله دارد

پس $y\geq ۲۵$ و از آنجا $x\geq\frac{۱۳۰}{۴}$ و چون $x<y$ باید باشد جوابهای قابل قبول ($x=۳۳$ و $y=۲۷$) و ($x=۳۴$ و $y=۳۱$) به دست می‌آید.

پاسخهای درست رسیده از: علیرضا ملکی- حسین امیرحسینی محمدرضا رستم‌نتاج- حسین‌جعفر گلپایگانی- محمد مهدی بخارائی- سیدجعفر قبادپور.

۲۲۸۳- حل‌دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر.

$$\begin{cases}\frac{۱}{x}+y+z=۳\\ x+\frac{۱}{y}+z=۳\\ x+y+\frac{۱}{z}=۳\end{cases}$$

درهرمعادله مخرج مشترک گرفته طرفین اولین معادلهٔ حاصل‌راازطرفین‌معادلهٔ دوم حاصل و دومی را ازسومی کم کرده حاصل را تجزیه می‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases}(x-y)(z-۳)=۰\\ (y-z)(x-۳)=۰\\ ۱+z(x+y)=۳z\end{cases}$$

وازآنجا دستگاههای زیر نتیجه می‌شود .

$$\begin{cases}x-y=۰\\ x-۳=۰\\ ۱+z(x+y)=۳z\end{cases}\qquad\begin{cases}z-۳=۰\\ y-z=۰\\ ۱+z(x+y)=۳z\end{cases}$$

$$\begin{cases}z-۳=۰\\ x-۳=۰\\ ۱+z(x+y)=۳z\end{cases}\qquad\begin{cases}x-y=۰\\ y-z=۰\\ ۱+z(x+y)=۳z\end{cases}$$

ازحل دستگاههای فوق جوابهای زیربه‌دست خواهدآمد

$$(x=y=z=۳)\text{ و }(x=-\frac{۱}{۳}y=z=۳)\text{ و }(x=y=۳\quad z=-\frac{۱}{۳})$$

$$(x=y=z=۱)\text{ و }(x=z=۳\quad y=-\frac{۱}{۳})$$

$$(x=y=z=\frac{۱}{۲})$$

پاسخهای رسیده از: طلعت مشکین- حسین مظفریان عباسعلی فروغی‌دبیرستان پهلوی ساری- احمدسیاحیان دبیرستان فردوسی تبریز - علی‌سلطانی - احمد میرنژاد دبیرستان رازی شاهی - سیدابراهیم مدنی دبیرستان تربیت - داود مطلوب دبیرستان کورش- حسن شهنازی- محمد تقی‌معیر دبیرستان ادیب داودپرویزی ازساوه - فرهاد غفاری- مرتضی‌الهیار دبیرستان هدف۳- محمود امجدی- ناصر نهاوندی‌پور - منصور نهاوندی‌پور رحمت‌الله صالحی- عبدالرحیم حاجی‌طالب دبیرستان قطب دزفول علی‌صحرانورد- هاشم اخوان‌مشائی - علی‌اکبر قولیج - محمود تویسرکانی- محمدرضا رستم نتاج - مرتضی‌صدیقین- حسن‌یزدانی- نژاد - حسین اسماعیلی - حسین تبریزی - حسین نجفی‌ثانی فریدون امین‌زاده - علیرضا ملکی - حسین امیرحسینی - محمد مهدی بخارائی - سید جعفرقبادپور .

۲۲۸۴- محاسبهٔ حد مجموع رشته جمل زیر :

$$S=(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+\cdots)+(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots+\cdots$$

$$+(\frac{۱}{۲^n+۱}+\frac{۱}{(۲^n+۱)^۲}+\cdots)$$

حد پرانتزهارا به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ و ... S_n مینامیم، داریم

$$S_۱=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}\quad\text{و}\quad S_۲=\frac{\frac{۱}{۵}}{۱-\frac{۱}{۵}}=\frac{۱}{۴}$$

$$S_۳=\frac{\frac{۱}{۹}}{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۱}{۸}\quad\text{و}\quad\cdots$$

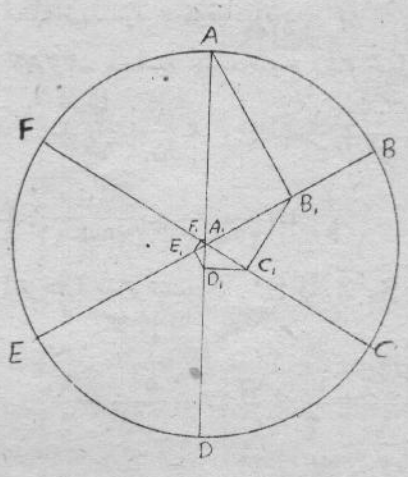
$$S_n=\frac{\frac{۱}{۲^n+۱}}{۱-\frac{۱}{۲^n+۱}}=\frac{۱}{۲^n}$$

$$S=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}$$

$$\lim S=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱$$

پاسخهای درست رسیده از : آفری تاج‌الدینی نصرت‌الله حقیقت - سید جعفر قبادپور - محمد مهدی بخارائی حسین‌امیرحسینی-علیرضاملکی-فریدون امین‌زاده-حسین‌تبریزی حسین‌اسماعیلی-حسن یزدانی نژاد- محمدرضا رستم‌نتاج-محمود تویسرکانی- ناصر نهاوندی‌پور- منصورنهاوندی‌پور- سیدابراهیم مدنی-عبدالعلی کوچك‌پور-فرهادغفاری- احمدمیرنژاد - همایون مهاجری دبیرستان هدف۳ - حسین‌نجفی‌ثانی - محمود امجدی حسن‌مشتاقی- علی‌اکبرقولیج - عباسعلی فروغی دبیرستان‌پهلوی ساده - هاشم اخوان مشائی - ستاراسفندیاری - علی کهنموئی.

۲۲۸۴ـ نقاط A و B و . . . F رأسهای شش ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ به مرکز O و به شعاع R هستند. عمود AB_1 رابر OB و B_1C_1 رابر OC و... و F_1A_1 را بر OA رسم می‌کنیم مجموع طولهای این عمود برحسب R حساب شود . چنانچه عمل مجدداً و متوالیاً تکرار شود حد مجموع طولهای عمودها چقدراست .



$$OB_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} \quad \text{و}$$

$$AB_1 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$B_1C_1 = \frac{R\sqrt{3}}{4} \quad \text{و} \quad C_1D_1 = \frac{R\sqrt{3}}{8}$$

$$S = \frac{R\sqrt{3}}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63R\sqrt{3}}{64}$$

$$\text{Lim } S_n = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = R\sqrt{3}$$

پاسخهای درست رسیده از : طلعت مشکین- مهناز جعفری پور دبیرستان فرح - آفری تاج الدینی - ملك دشتبان حسن شهنازی ـ محمود تویسرکانی ـ مجید فرنادی دبیرستان تربیت تبریز - احمد میرنژاد ـ حسین مظفریان - مرتضی صدیقین- علی‌اکبرقولیج ـ هاشم اخوان مشائی-محمودامجدی حسین نجفی ثانی- ستار اسفندیاری - هم .ایون مهاجری ـ سید ابراهیم مدنی- میضورنهاوندی‌پور ـ ناصرنهاوندی پور- محمد رضا رستم نتاج - حسین تبریزی ـ فریدون امین‌زاده - علیرضا ملکی - محمد مهدی بخارائی ـ سید جعفر قبادپور ـ نصرالله حقیقت حسین‌آبله‌کوب - عباسعلی فروغی ـ محمدرضا بلورانی ازمرند - پرویز برادران شکوهی دبیرستان فردوسی‌تبریز-فرهاد غفاری ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده .

۲۲۸۵ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A = 90^\circ$) طولهای اضلاع جمله‌های یك تصاعدحسابی‌هستند. AH ارتفاع وتراست. اثبات‌اینکه اولا اضلاع هریك از دومثلث AHB و AHC تصاعد حسابی‌تشکیل‌می‌دهند. ثانیاً شعاعهای دایره‌های محیطی، محاطی داخلی ، ارتفاعها ونیمسازهای زاویه های قائمه از مثلثهای ABC و ABH و ACH نیز تصاعد حسابی می‌سازند .

بنا به فرض داریم $2c = a + b$ ومی‌دانیم که

$$AH = \frac{bc}{a} \quad \text{و} \quad CH = \frac{b^2}{a} \quad \text{و} \quad BH = \frac{c^2}{a}$$

ونتیجه خواهد شدکه $AC + CH = 2AH$

و $AB + AH = 2BH$

$$R = \frac{a}{2} \quad \text{و} \quad R_1 = \frac{c}{2} \quad \text{و} \quad R_2 = \frac{b}{2}$$

و $2R_1 = R + R_2$

ازفرمول $r = p - a$ اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محاطی حساب شده و معلوم خواهد شدکه تصاعد حسابی می‌سازند و همچنین بااستفاده ازفرمولهای مربوط طولهای نیمسازها و ارتفاعهای مذکورحساب شده حکم محقق می‌شود .

پاسخهای درست رسیده از : محمدمهدی بخارائی هاشم اخوان مشائی ـ حسین تبریزی ـ سید جعفر قبادپور محمدرضا رستم نتاج .

۲۲۸۶ـ به فرض $2^a = 10$ و $\log_2 x = \frac{2a+10}{3}$

تعیین مقدار x

$$x = 2^{\frac{2a+10}{3}} \quad \text{یا} \quad x^3 = 2^{2a+10} = 2^{10} \times (2^a)^2$$

$$x^3 = 2^{10} \times 10^2 = 2^{10} \times 2^2 \times 5^2 = 2^{12} \times 25$$

$$x = 2^4\sqrt[3]{25} \quad \text{یا} \quad x = 16\sqrt[3]{25}$$

پاسخهای درست رسیده از : علی سلطانی ـ حسن شهنازی - هاشم اخوان مشائی .

پاسخهای رسیده از: سید محمدکاظم عابدینی- حسین جعفری‌گلپایگانی- همایون مهاجری ـ حسین نجفی ثانی محمود تویسرکانی ـ پرویز برادران شکوهی ـ حسن مشتاقی حسین امیرحسینی ـ محمدرضا رستم نتاج .

۲۲۸۷ - به فرض $x = \log abcd$ و $y = \log bacd$

و $z=\log_c abd$ و $u=\log_d abc$

اثبات رابطهٔ زیر :

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{u+1}=1$$

$d_u=abc$ و $c^z=abd$ و $b^y=acd$ و $a^x=bcd$

$c^{z+1}=abcd$ و $b^{y+1}=abcd$ و $a^{x+1}=abcd$

و $d^{u+1}=abcd$

$$a=(abcd)^{\frac{1}{x+1}} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad d=(abcd)^{\frac{1}{u+1}}$$

$$abcd=(abcd)^{\frac{1}{x+1}+\dots+\frac{1}{u+1}}$$

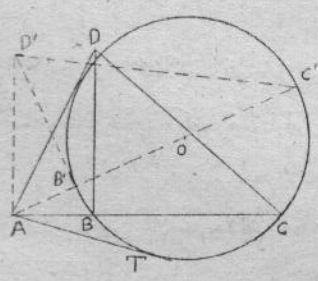
ورابطه محقق می‌شود .

پاسخهای درست رسیده از : محمدرضا رستم نتاج همایون مهاجری ـ سیدمحمدکاظم عابدینی ـ هاشم اخوان مشائی حسن شهنازی ـ فرهاد غفاری .

۲۲۸۸ـ از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ (O) قاطع ABC ومماس AT را بردایره رسم‌کرده وروی خطی‌که در نقطهٔ B بر AB عمود می‌شود نقطهٔ D چنان انتخاب می‌شود که مساحت مثلث ADC برابر با $\overline{AT}^2$ باشد.

۱) تعیین نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $\alpha=DAB$

۲) به فرض اینکه A ثابت وقاطع ABC حول نقطهٔ A حرکت‌کند تعیین وضعی ازقاطع‌که مساحت مثلث ABD می‌نیمم باشد وتعیین این‌مقدارمی‌نیمم برحسب R به فرض $AT=R\sqrt{3}$



$\frac{1}{2}AC\cdot DB=\overline{AT}^2$

و $AB\cdot AC=\overline{AT}^2$

پس $DB=2AB$

و از آنجا $tg\alpha=2$ و

$$cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{و} \quad sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \text{و} \quad cotg\alpha=\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot DB=\overline{AB}^2$$

مساحت مثلث ABD وقتی می‌نیمم است‌که طول AB می‌نیمم‌باشد واین درموقعی‌است‌که قاطع ازمرکزدایره بگذرد .

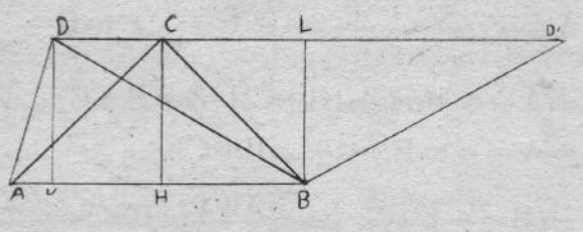
$AB\cdot AC=\overline{AT}^2$ یا $AB(AB+2R)=3R^2$

$\overline{AB}^2+2R\cdot AB-3R^2=0$ و $AB=R$

و $S=R^2$

پاسخ رسیده از : هاشم اخوان مشائی .

۲۲۸۹ـ مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویهٔ ABC ($C=90^\circ$) مفروض است . برخطی‌که ازنقطهٔ C موازی با AB رسم می‌شود نقطهٔ D را چنان تعیین‌کنیدکه $BD=BA$ باشد درازاء دوجواب‌که به دست می‌آید اندازهٔ زاویهٔ DBC را معلوم‌کنید .



به مرکزB وبه شعاع BA دایره‌ای رسم می‌کنیم ونقاط D و D′ به دست می‌آید . ارتفاع CH از مثلث ABC در ضمن میانه بوده وبرابربا نصف AB است ودرمثلث قائم‌الزاویهٔ BDK چون ضلع $DK=CH$ نصف ضلع BD است پس اندازهٔ زاویهٔ DBA برابر با 30° و از آنجا اندازهٔ زاویهٔ DBC برابر با 15° به دست می‌آید. اندازهٔ زاویهٔ D′BC برابربا 105° حساب خواهد شد .

پاسخهای درست رسیده از : حسن‌شهنازی ـ منوچهر حاجی‌زاده ـ فرهاد غفاری

کلاس پنجم طبیعی

۲۲۹۰ـ منحنی (C) نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x}$

و منحنی (C′) نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x^2}$ یکدیگر را در نقطهٔ (۱ و۱)A قطع می‌کنند. T مماس بر(C) در A و T′ مماس بر (C′) در A می‌باشد. تعیین‌معادلات T و′T. تعیین نقطهٔ B بر (C) که مماس درآن باT موازی باشد. تعیین‌نقطهٔ C بر (C′)که مماس درآن برT′ عمود باشد .

$y=\frac{1}{x}$ و $y'=\frac{-1}{x^2}$ و $m=-1$

$y=\frac{1}{x^2}$ و $y=\frac{-2}{x^3}$ و $m=-2$

$(T): y=-x+2$ و $(T'): y=-2x+3$

$-\frac{1}{x^2}=-1$ و $x=\pm 1$ و $B(-1$ و $-1)$

$$-\frac{۲}{x^۳}=\frac{۱}{۲} \text{ و } x^۳=-۴ \text{ و } x=\sqrt[۳]{-۴}$$

$$\text{و } C\left(\sqrt[۳]{-۴} \text{ و } \frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}\right)$$

پاسخهای درست رسیده از: حسین تبریزی ـ حمید نادری شعار دبیرستان رضاشاه‌کبیر همدان .

۲۲۹۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه بوده و $\sin B=\frac{۱}{۳}$ و $\sin C=\frac{۲}{۳}$ است مطلوبست تعیین مقدار $\sin A$

$$\sin A=\sin[۱۸۰^\circ-(B+C)]=\sin(B+C)$$

$$\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$$

$$\cos B=-\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \text{ و } \cos C=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\sin A=\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{\sqrt{۵}-۴\sqrt{۲}}{۹}$$

پاسخهای درست رسیده از : محمدکاظم جمشیدی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان . حبیب‌الله سلیم زاده دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ حسین عظیمی دبیرستان اقبال آشتیانی رمضانعلی صفائی دبیرستان خرد ـ احمد سیاحیان ـ علی‌اکبر قولیج ـ محمدرضا رستم نتاج ـ مجید خرمی .

پاسخهای رسیده از : حسین تبریزی ـ حمید نادری شعار .

۲۲۹۲ـ تعیین مقدار عددی عبارت زیر :

$$\frac{\sin ۳۰'\text{ و }\sin ۲۲^\circ ۳۰'+\sin ۳۷^\circ ۳۰'\text{ و }\cos ۲۲^\circ ۳۰'\text{ و }\cos ۳۷^\circ}{\sin ۴^\circ ۴۵\text{ و }\cos ۳^\circ ۴۵^\circ\text{ و }\sin ۳^\circ ۳۰'\text{ و }\sin ۷^\circ ۳۰}$$

مقدار صورت بسط

$$\cos(۳۷^\circ ۳۰'\text{ و }۲۲^\circ ۳۰'-\text{ و })=\cos ۱۵^\circ$$

است و $\sin ۷^\circ ۳۰\text{ و }\cos ۳ ۴۵=۴۵$ و $\sin ۳ ۴۵\cos ۳ ۲$ بوده مقدار عبارت‌مخرج برابر با $\sin ۲ ۷^\circ ۳۰'$ و ۲ و در نتیجه برابر با $\cos ۱۵^\circ-۱$ شده کسر به صورت $\frac{\cos ۱۵}{۱-\cos ۱۵}$ درآمده با محاسبهٔ مقدار $\cos ۱۵^\circ$ کسر برابر با :

$$۳\sqrt{۶}+۴\sqrt{۳}+۵\sqrt{۲}+۷$$ حساب می‌شود .

پاسخهای درست رسیده از: علی‌اکبر قولیج ـ محمد رضا رستم نتاج ـ حسین تبریزی .

پاسخهای درست رسیده از : محمدکاظم جمشیدی ـ حبیب‌الله سلیم زاده ـ مجید خرمی ـ حمید نادری شعار ـ رمضانعلی صفائی ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ علی صحرانورد ـ حسین عظیمی مطلق .

کلاس پنجم ریاضی

۲۲۹۳ـ محیط مستطیلی مقدار ثابت $۲p$ می‌باشد. ضلع مستطیل چقدر باشد تا حجم استوانهٔ حادث از دوران مستطیل حول یکی ازاضلاع ماکزیمم باشد .

یك‌ضلع‌مستطیل‌را x می‌نامیم. ضلع‌دیگرش $p-x$ بوده حجم استوانهٔ حادث $v=\pi x^۲(p-x)$ می‌شود .

$$v'=\pi(-۳x^۲+۲px)$$

از روی علامت مشتق معلوم می‌شود که v در ازاء $x=\frac{۲p}{۳}$ دارای ماکزیمی برابر با $\frac{۴p^۳}{۲۷}$ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از : محمدکاظم جمشیدی حسین تبریزی ـ خسرو موحد دبیرستان ادیب ـ رمضانعلی‌صفائی

۲۲۹۴ـ درکره‌ای به شعاع R مکعب مستطیل با قاعدهٔ مربع محاط شده است . تعیین ابعاد این مستطیل برای آنکه حجم‌آن ماکزیمم باشد .

O مرکز مکعب مستطیل برمرکز کره منطبق‌است. اگر H مرکز مربع $ABCD$ قاعدهٔ مکعب مستطیل و x طول ضلع این مربع باشد طول $HA=\frac{x\sqrt{۲}}{۲}$ بوده ودرمثلث قائم‌الزاویهٔ OHA طول OH برابر با

$$\sqrt{R^۲-\overline{HA}^۲}=\frac{\sqrt{۴R^۲-۲x^۲}}{۲}$$

وازآنجا ارتفاع مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{۴R^۲-۲x^۲}$ حساب شده حجم مکعب مستطیل برابر با

$$v=x^۲\sqrt{۴R^۲-۲x^۲}$$

بوده وبا تعیین علامت مشتق معلوم خواهد شدکه این حجم در ازاء $x=\frac{۲R\sqrt{۳}}{۳}$ ماکزیمی برابر با $\frac{۸R^۳\sqrt{۳}}{۹}$ خواهد داشت .

پاسخهای درست رسیده از: خسروموحد رمضانعلی صفائی ـ حسین تبریزی .

۲۲۹۵ـ تابع $y=x^۲-۴x\cos\varphi+۴\cos ۲\varphi$ مفروض است‌که در آن φ زاویهٔ واقع بین ۰ و π است .

۱) تعیین جدول تغییرات تابع .

۲) تعیین φ برای‌آنکه مماس درنقطهٔ به طول $x=۱+\sin\varphi$ با محور Ox زاویهٔ φ بسازد .

۳) تعیین دومقدار از φ که منحنی نظیر ازمبدأ مختصات بگذرد ورسم دومنحنی دریك دستگاه .

۴) تعیین معادلهٔ مکان هندسی رأسهای منحنیهای نمایش تابع ورسم مکان درهمان شکل سابق .

حل : ۱) مشتق تابع $y'=2x-4\cos\varphi$ در ازاء $x=2\cos\varphi$ صفر شده ودرنتیجه تابع درازاء این مقدار از x دارای می‌نیمم است و مقدار این می‌نیمم برابر $-4\sin^2\varphi$ حساب خواهد شد . منحنی نمایش تابع در نقطهٔ ($y=4\cos 2\varphi$ و $x=0$) محور عرضها و در دو نقطهٔ

$$x=2(\cos\varphi\pm\sin\varphi) \quad \text{و} \quad y=0$$

محور طولهارا قطع می‌کند .

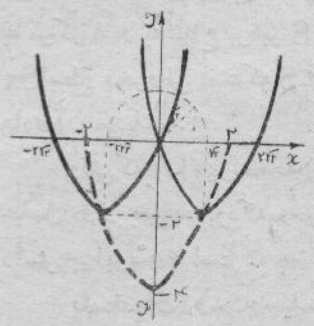
۲) مشتق تابع در ازاء $x=1+\sin\varphi$ به صورت $2+2\sin\varphi-4\cos\varphi$ بوده و چون ضریب زاویهٔ مماس برابر با $tg\varphi$ است پس

$$2+2\sin\varphi-4\cos\varphi=tg\varphi \quad \text{یا}$$

$$(1-2\cos\varphi)(2\cos\varphi-\sin\varphi)=0$$

و جوابهای $\varphi=\frac{\pi}{3}$ و $\varphi=\mathrm{Arc}tg2$ به دست می‌آید .

۳) در ازاء ($x=0$ و $y=0$) داریم $\cos 2\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و در ازاء این دو مقدار φ دو تابع



$y_1=x^2-2x\sqrt{2}$
و $y_2=x^2+2x\sqrt{2}$
به دست آمده و نمایش هندسی آنهامطابق شکل خواهد بود . با تبدیل x به $-x$ تابع y_1 به تابع y_2 تبدیل می‌شود بنابراین منحنیهای دو تابع نسبت به محور عرضها قرینه‌اند .

۴) مختصات رأس منحنی تابع عبارتست از :

$$S(x=2\cos\varphi \text{ و } y=-4\sin^2\varphi=-4+4\cos^2\varphi)$$

با حذف $\cos\varphi$ بین x و y مختصات S معادلهٔ مکان عبارت می‌شود از $y=x^2-4 \quad (-2<x<2)$ که منحنی نمایش آن در شکل منحنیهای قبلی رسم شده است (مکان قسمتی از یك سهمی است) .

پاسخ درست رسیده از : خسرو موحد

۲۲۹۶ـ به فرض

$$A=1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c$$

اولا اگر $A=0$ باشد تعیین $\cos a$ برحسب b و c و ثانیا تجزیهٔ A به حاصل ضرب چهارسینوس . معادله را نسبت به $\cos a$ مرتب می‌کنیم .

$$\cos^2 a-2\cos a\cos b\cos c+\cos^2 b+\cos^2 c-1=0$$

$$\Delta'=\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 b-\cos^2 c+1$$

$$=(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)=\sin^2 b\sin^2 c$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c=\cos(b-c)$$

$$\cos a=\cos b\cos c-\sin b\sin c=\cos(b+c)$$

$$A=-[\cos a-\cos(b-c)][\cos a-\cos(b+c)]$$

با تبدیل عبارت داخل هر کروشه به حاصل ضرب نتیجه خواهد شد .

$$A=-4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\times$$

$$\sin\frac{c+a-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}$$

پاسخ درست رسیده از : خسرو موحد .

۲۲۹۷ـ حل معادلهٔ زیر و تعیین جوابهای بین صفر و 2π از آن .

$$\frac{tg(\frac{\pi}{4}-x)}{tg(\frac{\pi}{4}+x)}=1-\sin 2x$$

با بسط صورت و مخرج کسر طرف اول و تبدیل آن خواهیم‌داشت

$$\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\sin x}\right)^2=1-\sin 2x \quad \text{یا}$$

$$\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=1-\sin 2x$$

$$\sin 2x(1-\sin 2x)=0 \quad \text{و} \quad x=\frac{k\pi}{2} \text{ و } k\pi+\frac{\pi}{4}$$

پاسخهای درست رسیده از : خسرو موحد ـ علی اکبر قولیج ـ حسین‌عظیمی مطلق‌ـرمضانعلی صفائی ـ حجت‌الله افقهی‌ـ بهروز ساسانی دبیرستان کاظم زاده ایرانشهر ـ خسرو ستوده دبیرستان شاهپور شیراز ـ مجید خرمی .

پاسخهای رسیده از شکرالله مسیبی دبیرستان دکتر نصیری ـ محمد فغانی ـ علی صحرانورد ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ حمید نادری شعار ـ حبیب‌الله سلیم زاده ـ حسین تبریزی ـ محمدکاظم جمشیدی ـ جعفرداوری .

۲۲۹۸ـ به فرض $\sin 2a=x$ و $\sin 3a=y$ تعیین رابطهٔ بین x و y مستقل از a

$$\sin 6a = \sin 2(3a) = \sin 3(2a)$$

$$2\sin 3a\cos 3a = 3\sin 2a - 4\sin^3 2a$$

$$2y\cos 3a = 3x - 4x^3$$

$$4y^2(1-y^2) = (3x-4x^3)^2$$

پاسخهای رسیده از : بهروز ساسانی ـ حسین عظیمی مطلق . خسرو موحد ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده ـ محمدکاظم جمشیدی

۲۲۹۹ـ کنج سه قائمهٔ $Oxyz$ مفروض است . نقاط A وB وC به ترتیب بریالهای Ox و Oy و Oz چنان قرار دارند که $OA=a$ و $OB=b$ و $OC=c$ است .

۱) اگر α و β و γ اندازه‌های زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های با یالهای BC و CA و AB از چهار وجهی OABC باشد اثبات رابطهٔ :

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

۲) اگر (P) یك چند ضلعی واقع در صفحهٔ ABC باشد و مساحت آن S باشد و مساحت تصویر آن بر وجوه دیگر S_1 و S_2 و S_3 باشد اثبات رابطهٔ

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$$

اگر H تصویر O بر AB باشد زاویهٔ OHC برابر با γ مسطحهٔ فرجهٔ AB بوده وداریم :

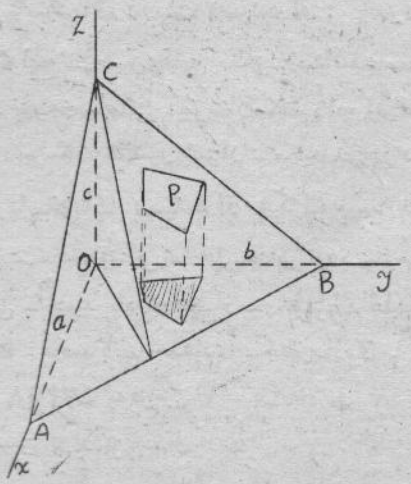
$$\cos\gamma=\frac{OH}{CH} \quad و \quad \cos^2\gamma=\frac{\overline{OH}^2}{\overline{CH}^2}$$

$$\frac{1}{\overline{OH}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

$$\overline{OH}^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\overline{CH}^2=\overline{OH}^2+\overline{OC}^2=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}$$

$$\cos^2\gamma=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$



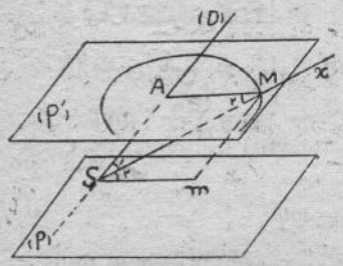
و به همین ترتیب مقادیر $\cos^2\alpha$ و $\cos^2\beta$ حساب شده رابطهٔ مفروض محقق می‌شود .

۲) $S_1=S\cos\alpha$ و $S_2=S\cos\beta$ و $S_3=S\cos\gamma$

واز روی رابطهٔ قسمت اول مسئله رابطهٔ مطلوب به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از : جعفر داوری خسرو موحد .

۲۳۰۰ـ صفحهٔ (P) وخط (D) متقاطع در S مفروض است. مکان هندسی خطوطی مانند Sx را تعیین کنید که قرینهٔ (D) نسبت به هریك از خطوط Sx برصفحهٔ (P) واقع باشد.



حالت خاصی که (D) بر (P) عمود است بررسی شود .

اگر A نقطه‌ای از (D) و (P') صفحه‌ای باشد که بر A گذشته و با (P) موازی و Sx یکی از خطوط مکان و M نقطهٔ تلاقی (P') با Sx باشد . از M موازی با (D) رسم می‌کنیم تا در m صفحهٔ (P) را قطع کند . ازتساوی زاویه‌های S_2 با S_1 و M_2 با S_2 تساوی دو زاویهٔ M_2 و S_1 نتیجه شده و از آنجا $AM=AS$ و برابر طول ثابت بوده مکان M دایره‌ای است به مرکز A و به شعاع برابر AS واقع در صفحهٔ (P') ومکان Sx سطح مخروطی است که S رأس آن ودایرهٔ مکان M دایرهٔ هادی آن می‌باشد .

وقتی که (D) بر صفحهٔ (P) عمود باشد سطح مخروطی حاصل دوار خواهد بود که محور آن همان (D) و نصف‌زاویهٔ رأسش برابر 45° است .

پاسخهای درست رسیده از : خسرو موحد ـ جعفر داوری

کلاس ششم طبیعی

۲۳۰۱ـ محور کانونی هذلولی H محور $y'y$ را در I به عرض ۱ ومحور غیر کانونی آن $x'x$ را در J به طول ۱ قطع میکند معادلهٔ خطی که رأس A از هذلولی را به J وصل می‌کند $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ وفاصلهٔ کانونی هذلولی برابر با $2\sqrt{5}$ است.

تعیین معادلهٔ هذلولی و مجانبهای آن و رسم آن

($\alpha=1$ و $\beta=1$) C بوده واز حل معادلهٔ $y=1$ با معادلهٔ خط AJ مختصات A به صورت (۱ و ۳) A به دست آمده و از آنجا

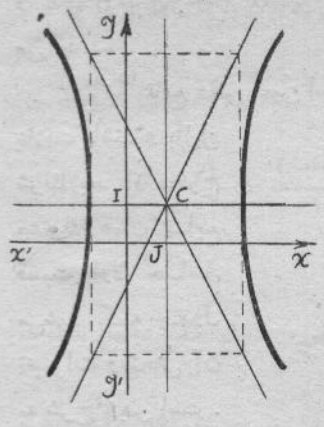
$a=CA=2$ حساب شده و

$b=\sqrt{c^2-a^2}=4$

به دست می‌آید .

معادلهٔ هذلولی به صورت :

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$$



و معادلهٔ مجانبهای آن به صورت :

$$\frac{x-1}{2}\pm\frac{y-1}{4}=0$$

بوده و رسم می‌شود .

۲۳۰۲ـ اولا در تابع $y=a\cos nx$ مقادیر a و n را معلوم کنید که منحنی نمایش تابع محور عرضها را به عرض ۱ قطع کرده و یکی از نقاط تلاقیش با محور طولها به طول $\frac{\pi}{3}$ باشد .

ثانیاً رسم منحنی تابع $y=\cos\frac{3x}{2}$ در فاصلهٔ

$$[-\frac{2\pi}{3}\ \text{و}\ \frac{2\pi}{3}]$$

ثالثاً محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی ومحور طولها که بالای این محوراست .

$a=1$ پس $(y=1$ و $x=0)$

و $\cos\frac{n\pi}{3}=0$ پس $(y=0$ و $x=\frac{\pi}{3})$

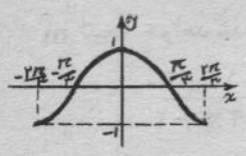
$n=6k$ و $\frac{n\pi}{3}=2k\pi$

ثانیاً محور y'y محور تقارن منحنی تابع $y=\cos\frac{3x}{2}$ است بنابراین جدول تغییرات را فقط در فاصلهٔ 0 و $\frac{2\pi}{3}$ رسم می‌کنیم $y'=-\frac{3}{2}\sin\frac{3x}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
y'	0	−	0
y	1 ↘	0 ↘	−1

$$Y=\frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2}+C$$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{3}$$



کلاس ششم ریاضی

۲۳۰۳ـ اولا تعیین ضرایب a و b و c در تابع $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ که نمایش هندسی آن در ازاء $x=\frac{3}{2}$ ماکزیمی برابر ۴ − داشته و $x=1$ یکی ازمجانبهای آن باشد.

ثانیاً رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

ثالثاً مقایسهٔ ریشه‌های معادلهٔ زیر با ۱ − و ۲ از روی منحنی

$$mx^2-3mx+2m-1$$

رابعاً بحث درتعداد وعلامت ریشه‌های معادلهٔ

$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\lambda$ واثبات اینکه بین x' و x'' رابطه‌ای مستقل از λ وجود دارد .

خامساً بحث در تعداد نقاط تقاطع منحنی تابع :

$y=\frac{a}{x^2-3x+2}$ با نیمساز ربع اول وسوم .

حل : اولا :

$y'=\frac{-2ax-b}{y^2}$ و $-3a-b=0$

$x=\frac{3}{2}$ و $y=-4$ پس $-4=\frac{4}{9a+6b+4c}$

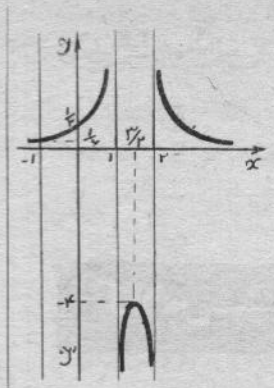
$x=1$ و $y=\pm\infty$ پس $a+b+c=0$

ونتیجه خواهد شد : $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

ثانیاً جدول تغییرات وشکل منحنی به شرح زیر است .

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
y'	+		+	0	−	
y	0 ↗	$+\infty$	↗ $+\infty$	↗ −4 ↘	$-\infty$	$+\infty$ 0 ↗
		$\frac{1}{2}$ ↗	$-\infty$	$-\infty$		

ثالثاً ازحل معادله نسبت به m نتیجه خواهد شد :



$$m=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

$(x=-1 \quad y=\frac{1}{6})$

$(x=2 \quad y=\pm\infty)$

و از روی شکل منحنی نتیجه خواهد شد .

m	بحث
$-\infty$	$-1<x'<x''<2$
-4	$-1<x'=x''<2$
	ریشه ندارد
0	ریشهٔ بینهایت
$\frac{1}{6}$	$x'<-1<2<x''$
	$x'=-1<2<x''$
$+\infty$	$-1<x'<2<x''$

رابعاً از روی منحنی ویا مستقیماً تعداد وعلامت ریشه‌ها معلوم خواهدشد وخواهیم داشت. $x'+x''=3$

خامساً از حل معادلهٔ منحنی بامعادلهٔ $y=x$ معادلهٔزیر نتیجه خواهد شد .

$$x^3-3x^2+2x-a=0$$

باانتخاب $x=X+1$ نتیجه می‌شود

$X^3-X-a=0$ وباتعیین علامت $4p^3+27q^2$ بحث‌لازم انجام می‌گیرد .

پاسخهای درست رسیده از : کیوان پورقاسمی‌مقدم یوسف مصری دبیرستان کورش ـ اسماعیل برین‌خو دبیرستان محسن هنربخش ـ فرامرز محیطمانی دبیرستان رازی ابراهیم طاهری‌آشتیانی ـ احمدپیوندی دبیرستان فارابی‌کرج ـ حبیب‌الله سلیمانی دبیرستان کورش ـ اصغر شکراللهی دبیرستان شاهپور شیراز .

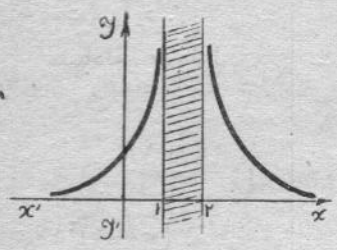
۲۳۰۴ـ اولا تعیین ضرایب a و b که خطوط $x=1$ و $x=2$ مجانبهای منحنی تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ باشند.

ثانیاً ـ رسم منحنی تابع

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

حل ـ اولا از حل دستگاه دو معادلهٔ $1+a+b=0$ و $4+2a+b=0$ مقادیر $a=-3$ و $b=2$ بدست می‌آید .

ثانیاً تابع وقتی معین است که $x-2$ و $x-1$ هم‌علامت باشند و بااین شرط بعد از مخرج مشترك همان تابع قسمت اولا حاصل می‌شود که جدول تغییرات ومنحنی آن به شرح زیر است .



x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	‖		‖	−	
y	0	↗	$+\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	0

پاسخهای درست رسیده از : ابراهیم کرباسی دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی کرمانشاه ـ فرامرز محیطمانی یوسف مصری ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ حبیب‌الله سلیمانی ـ احمد پیوندی ـ رحیم خیردوست ـ کیوان پورقاسمی ـ رحیم محمدی .

پاسخهای رسیده از : علی‌اکبر پرویزی نژاد دبیرستان خوارزمی۲ ـ اصغر شکراللهی (تابع را فقطوقتی معین دانسته است که $x-2>0$ باشد) .

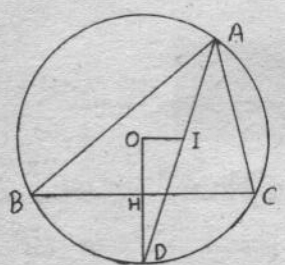
۲۳۰۵ـ اگر O و R مرکز و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و I و r مرکز و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد .

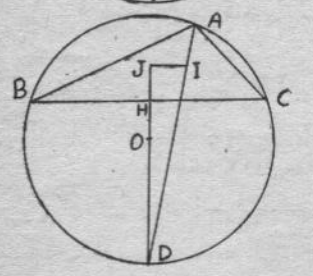
۱) اثبات اینکه اگر OI با BC موازی باشد.

$\cos B+\cos C=1$

۲) اگر O و I از BC به‌یك فاصله بوده اما OI با BC موازی نباشد

$\cos B+\cos C=1+\frac{2r}{R}$





حل ۱) فرض می‌کنیم $C>B$ (اگر $B=C$ باشد مثلث متساوی‌الساقین بوده و رابطه محقق است) و D نقطهٔ تلاقی AI بادایرهٔ محیطی مثلث باشد، داریم

$$R=OD=DI\cos ODI=DI\cos\frac{C-B}{2}$$

$$DI=DB=2R\sin\frac{A}{2}$$

$$R=2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=2R\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

و بعد از اختصار و تبدیل به‌حاصل جمع رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید .

۲) در این‌حالت زاویهٔ A منفرجه خواهد بود و اگر J تصویر I برعمودمنصف BC (که همان OD است) باشدداریم:

$$DJ=DO+OJ=R+2r$$

$$DJ=DI\cos\frac{C-B}{2}\text{ و }DI=DB=2R\sin\frac{A}{2}$$

$$R+2r=2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=2R\cos\frac{C+B}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

واز آنجا رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

تبصرهـ ممکن است قبلا ثابت نمود که‌در هر مثلث :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}\qquad(1)$$

در حالت اول داریم :

$$OH=r=R\cos A$$

در حالت دوم

$$OH=r=-R\cos A$$

واز این‌رابطه مقدار $\cos A$ را تعیین کرده در رابطهٔ (۱) قرار داد.

۲۳۰۶ـ اولا تعیین تغییرات و رسم منحنی تابع

$$y=2\sin(2x-\frac{5\pi}{3})-1$$

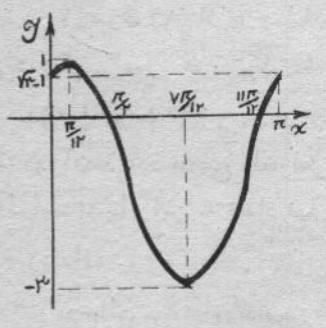
ثانیاً ـ تعیین طولهای نقاط تقاطع منحنی بامحور طول وتعیین ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی در این‌نقاط

ثالثاً ـ تعیین مرکزها و محورهای تقارن منحنی

رابعاً ـ بیان y و مشتق آن y' برحسب $tgx=t$ و تعیین مقادیری از t که $y=0$ باشد و تعیین مقادیر y' نظیر آن .

حلـ اولا $y'=4\cos(2x-\frac{5\pi}{3})$ بوده و جدول تغییرات ورسم منحنی تابع در فاصلهٔ (π و ۰) برابر با یك دورهٔ تناوب تابع به‌شرح زیراست.

x	۰		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$\sqrt{3}-1$	↗	۱	↘	-3	↗	$\sqrt{3}-1$



ثانیاً ـ از معادلهٔ $y=0$ مقادیر

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

و

$$K'\pi+\frac{11\pi}{12}$$

به‌دست‌آمده ونظیر این‌نقاط

$m=2\sqrt{3}$ و $m=-2\sqrt{3}$

حساب می‌شود .

ثانیاً ـ خطوط $x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$ محورهای تقارن و نقطه های $I(k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ و $-1)$ مرکزهای تقارن منحنی هستند .

رابعاً ـ بعد از محاسبات لازم خواهیم داشت :

$$y=-\frac{(\sqrt{3}+1)t^2-2t+1-\sqrt{3}}{1+t^2}$$

$$y'=-2\frac{t^2+2t\sqrt{3}-1}{1+t^2}$$

در ازاء مقادیر $t=\sqrt{3}-2$ و $t=1$ مقداره $y=$ بوده و مقدار y' به‌ترتیب برابر با $2\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{3}$ حساب خواهد شد .

پاسخهای‌درست رسیده از : ابراهیم‌طاهری‌آشتیانی کیوان پورقاسمی مقدم ـ رحیم خیردوست .

۲۳۰۷ـ به‌فرض $n\geq 2$ عدد صحیح‌دلخواه و p_1وp_2و... و p_h عددهای اول کوچکتر یا مساوی با $n+1$ باشد و به فرض $P=p_1p_2\cdots p_h$

۱) اثبات اینکه هیچیك از n جملهٔ رشتهٔ

$$P+2\text{ و }P+3\text{ و }\ldots\text{ و }P+(n+1)\qquad(1)$$

اول نیست .

۲) اثبات اینکه از رشته‌های متشکل از n عدد متوالی که هیچیك از جمله های آن عدد اول نباشد به‌تعداد نامحدود وجود دارد . درحالت $n=10$ تعیین اولین و آخرین جمله

های دورشتهٔ اول ودوم از این دسته‌ها

حل-۱) جملهٔ $kP+k$ $(۲<k<n+۱)$ از سری (۱) را در نظر می‌گیریم . اگر k اول باشد این جمله بر k قابل قسمت است (زیرا P دارای عاملی برابر با k است) و چنانچه k اول نباشد این جمله برتمام مقسوم علیه‌های k قابل قسمت بوده و درهرحال اول نیست .

۲) سری (۱) از n جملهٔ غیراول تشکیل است و نتیجه می‌شود که سری

$$\lambda P+(n+۱) \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad \lambda P+۳ \quad \text{و} \quad \lambda P+۲ \qquad (۲)$$

که در آن λ عدد صحیح دلخواهی است نیز شامل n جملهٔ غیر اول است . بنابراین به تعداد نا محدود از این نوع سریها وجود دارد .

درحالت $n=۱۰$ داریم

$$P=۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱=۲۳۱۰$$

و رشتهٔ

$$۲۳۱۰\lambda+۱۱ \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad ۲۳۱۰\lambda+۳ \quad \text{و} \quad ۲۳۱۰\lambda+۲$$

که در آن λ عدد صحیح دلخواه است رشتهٔ نظیر بوده ودرحالت $\lambda=۱$ و $\lambda=۲$ اولین و آخرین جمله‌های هررشتهٔ مربوط عبارتند از (۲۳۲۱ و ۲۳۱۲) و (۴۶۳۱ و ۴۶۲۲).

پاسخ درست رسیده از : رحیم خیردوست.

۲۳۰۸- اثبات اینکه هر کسر غیرممکن التحویل کوچکتر از واحد $\frac{a}{b}$ به شکل $\frac{a}{b}=\frac{۱}{q}-\frac{a_۱}{b_۱}$ (۱) تبدیل می‌شود که $\frac{a_۱}{b_۱}$ نیز غیرممکن التحویل کوچکتر از واحد و $a_۱<a$ است و نتیجه آنکه هر کسررا می‌توان به‌صورت مجموع جبری n کسر باصورتهای یك بسط داد .

$$b=aq+r \quad \text{و} \quad q\geq ۱ \quad \text{و} \quad r<a \quad \text{پس} \quad aq=b-r$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{q}-\frac{r}{bq}$$

از نامساویهای $r<a$ و $a<b$ و $q\geq ۱$ نتیجه می‌شود که $r<bq$ یعنی کسر $\frac{r}{bq}$ کوچکتر از واحد است و اگر $\frac{a_۱}{b_۱}$ کسر غیر ممکن التحویل معادل با این کسر باشد خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{q}-\frac{a_۱}{b_۱} \quad (a_۱<a)$$

وبه‌همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{۱}{q_۱}-\frac{a_۲}{b_۲} \quad \text{و} \quad \frac{a_۲}{b_۲}=\frac{۱}{q_۲}-\frac{a_۳}{b_۳} \quad \text{و} \quad \ldots$$

وچون a_i مرتباً کوچك می‌شود بالاخره برابر با یك شده وتعداد کسرها محدودبوده وداریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{q}-\frac{۱}{q_۱}+\frac{۱}{q_۲}+\ldots+(-۱)^n\frac{۱}{q_n}$$

تبصره . این بسط کسر به **«بسط ارشمیدس»** معروف است .

حالت خاص : داریم

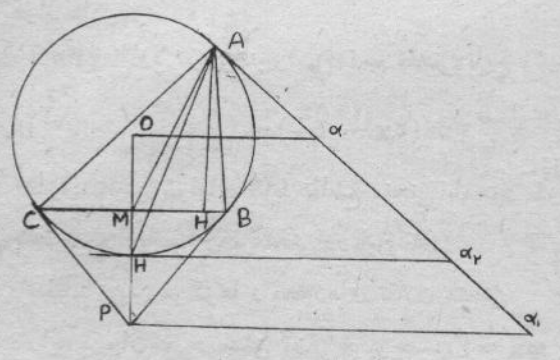
$$\frac{۹}{۲۶}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷۸}$$

۲۳۰۹- مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن (Γ) را در نظر می‌گیریم .

۱) از مرکز دایره خطی موازی با یك ضلع مثلث رسم می‌کنیم تامماس دررأس مقابل این ضلع بردایرهٔ (Γ) راقطع کند . سه‌نقطهٔ α و β و γ پدید می‌آید که باید ثابت کرد بریك استقامتند.

۲) ازنقطهٔ تقاطع مماسهای مرسوم ازدورأس مثلث بر (Γ) خطی موازی باضلع واصل این دورأس رسم می‌کنیم تا مماس دررأس دیگر مثلث را قطع کند. سه‌نقطهٔ $\alpha_۱$ و $\beta_۱$ و $\gamma_۱$ پدید می‌آید که باید ثابت‌شود بریك استقامتند .

۳) خطی موازی باهرضلع مثلث بر (Γ) مماس می‌کنیم (نقطهٔ تماس و رأس دیگر طرفین این ضلع واقع‌اند) این مماس، مماس دررأس مقابل را قطع می‌کند. سه‌نقطهٔ $\alpha_۲$ و $\beta_۲$ و $\gamma_۲$ حاصل می‌شود که باید ثابت کرد بریك استقامتند .



حل۱) قطبی α نسبت به دایرهٔ (Γ) از A گذشته و بر $O\alpha$ و موازی آن BC عمود است پس ارتفاع AH می‌باشد .

سه نقطهٔ α و β و γ قطب های سه ارتفاع مثلث نسبت به دایرهٔ (Γ) بوده و بر یك استقامت واقعند (زیرا سه ارتفاع

مثلث متقاربند) .

۲) اگر P نقطهٔ تلاقی مماسهای در رأسهای B و C باشد. قطبی P نسبت به (Γ) خط BC است و قطب هرخط که از P بگذرد بر BC قرار داشته قطب $P\alpha_1$ که با BC موازی است نقطهٔ M وسط ضلع BC است بنابراین میانهٔ AM از مثلث قطبی α_1 است. سه‌نقطهٔ α_1 و β_1 و γ_1 قطب های سه‌میانهٔ مثلث ABC بوده در نتیجه بریك استقامتند.

۳) اگر H وسط کمان BC باشد قطبی α_2 خطی‌است که بر A وبر H می‌گذرد یعنی خط نیمساز زاویهٔ A ازمثلث می‌باشد . سه‌نقطهٔ α_2 و β_2 و γ_2 قطب هـای سه‌نیمساز داخلی مثلث بوده در نتیجه بریك استقامت واقع‌اند .

پاسخهـای درست رسیده از : رحیم خیردوست ـ ابراهیم طاهری آشتیانی .

۲۳۱۰ـ دریك صفحهٔ کاغذ یك‌خط Δ رسم کرده و یك نقطهٔ P در خارج آن انتخاب می‌کنیم. به‌ترتیب‌هـای مختلف کاغذ را چنان تا می‌کنیم که P بر Δ واقع شود. مقصود تعیین پوش خطوطی است که دراثر تا کردن کاغذ ایجاد می‌شود.

خطوط مزبور خطوطی هستند که قرینهٔ P نسبت به‌هر- یك آنها بر Δ واقع است بنابراین همهٔ این خطوط برسهمی‌به کانون P و بـه‌خط هادی Δ مماس می‌بـاشند (پوش آنها این سهمی است) .

پاسخهای درست‌رسیده از: ابراهیم‌طاهری‌آشتیانی- خسرو موحدپنجم‌ریاضی دبیرستان ادیب .

پاسخهای رسیده (که‌ازراه تحلیلی معادلهٔ پوش تعیین شده است): رحیم خیردوست ـ کیوان‌پور قاسمی‌مقدم .

۲۳۱۱ـ دونقطهٔ m_8 و n_2 روی محور اقصر بـه‌فاصله های ۱۱ و ۵ ازلبهٔ چپ کاغذ انتخاب شده برآنها دوخط رسم می‌شودکه بامحور اقصرزاویه‌های ۱۳۰° و ۴۰° بسازند و این دوخط را تصویرهای D و Δ می‌نامیم .

۱) به‌فرض‌اینکه MN عمود مشترك D و Δ است‌مدرج نمودن D و Δ

۲) رسم صفحهٔ P بـر Δ کـه با صفحهٔ مقایسه زاویـهٔ ۴۵° بسازد .

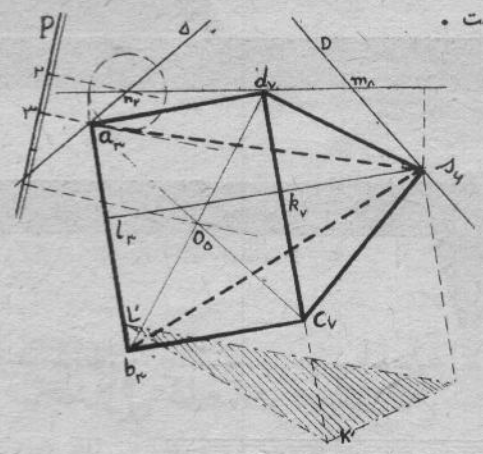
۳) رسم خط a_{20} با فراز ۲ درصفحهٔ P که a بر Δ باشد .

۴) رسم مربعی که O مرکز و A یك رأس آن بوده و ضلع AB از آن افقیه باشد .

۵) تعیین s_6 بر D ورسم ملخص هرم SABCD

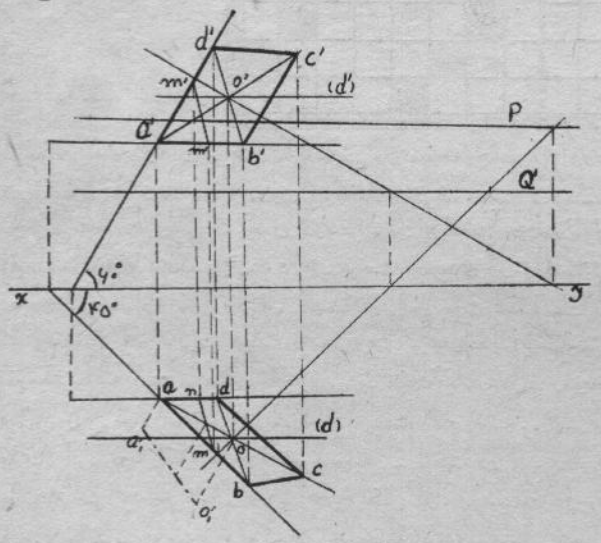
۶) تعیین مقطع هرم باصفحهٔ قائم مار بر ارتفاع SH از هرم ونمایش اندازهٔ حقیقی آن

حل- بر نقاط m_8 و n_2 صفحاتی می‌گذرانیم که‌بر MN عمود باشند این صفحات به ترتیب شامل D و Δ بوده و بدین وسیله ایـن خطوط مدرج می‌شوند . اپور مطابق شکل زیر است .



پاسخهای درست رسیده از : خسروموحد ـ پرویز صادقی ـ رحیم خیردوست .

۲۳۱۲ـ تعیین 'aa به‌بعد ۳ و ارتفاع ۴، رسم‌افقیه‌ای براین نقطه‌که با صفحهٔ‌تصویر زاویهٔ ۴۵° بسازد جبهیه‌ای‌براین نقطه که باصفحهٔ تصویر زاویهٔ ۶۰° بسازد . رسم ملخص لوزی ABCD که AB برافقیه و AD برجبهیهٔ‌مرسوم واقع‌بوده



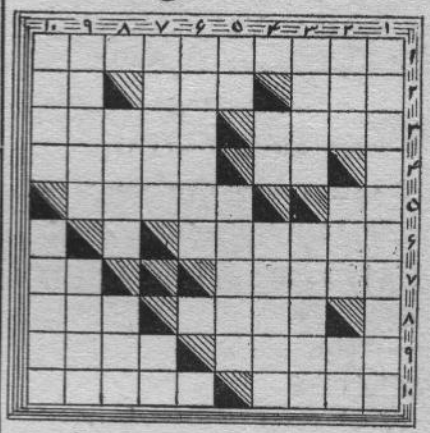
طول قطر AC = ۵ باشد. رسم آثارصفحهٔ مواجهی که‌برمرکز لوزی گذشته وبرصفحهٔ لوزی عمود باشد و تعیین مقطع آن با لوزی. بعد از رسم افقیه‌و جبهیه، برافقیه‌نقطهٔ 'mm وبرجبهیه نقطهٔ 'nn را چنان تعیین می‌کنیم که 'am = a'n یعنی AM = AN باشد در مثلث متساوی‌الساقین AMN میانـهٔ نظیر ضلع MN که رسم شود نیمساز زاویهٔ A نیز می‌باشد و این نیمساز تصویر قطر AC ازلوزی را مشخص می‌کند. بـا تغییر صفحه نقطهٔ 'cc و از روی آن رأسهای دیگر لوزی‌تعیین می‌شود .

پاسخ درست رسیده از: علی‌اکبر پرویزی‌نژاد

حل مسائل متفرقهٔ شمارهٔ ۱۳
در شمارهٔ بعدی چـاپ خواهد شد

سرگرمی

جدول کلمات متقاطع



افقی و قائم :

۱ـ نشریهٔ فوق‌العادهٔ یکان که آخرین تحولات هر علمی را بیان‌میدارد. ۲ـ عمل اصلی حساب ـ اولین برج ازدایرةالبروج ـ کمیت با واحدسال . ۳ ـ واسطهٔ حسابی نمره‌های امتحانی ـ هرخط یا منحنی در صفحه پدید می‌آورد ۴ـ قضیهٔ کمکی ـ معادل ۵ـ حرف هفتاد وحرف هشت ازحساب ابجد ـ عدد سه رقمی که چون دوصفر سمت راستش حذف شود باقیمانده زوج ومکعب است . ۶ـ مبحث جدیدی در ریاضیات که در این شمارهٔ یکان دربارهٔ درجهٔ اول آن بحث شده است . ۷ـ استعمال آن در ریاضیات توسط ویت ریاضیدان انگلیسی عمومیت یافته است ـ ماهی ازسال. ۸ـ نتیجهٔ یك عمل ـ راجع به این نوع عبارات هم دراین شماره بحث شده است . ۹ ـ با حذف آخر آنچه نقطهٔ متحرك می‌پیماید ـ شصت در مبنای سی اینگونه خوانده می‌شود. ۱۰ـ آخرش قبل از اول بیاید درجه را می‌رساند ـ واحد زاویه که در توپخانهٔ ارتش معمول است .

پاسخ مسئلهٔ صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۱۴

یا $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ و۱

. . . و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$

به صورت کلی:

$\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n+1}$

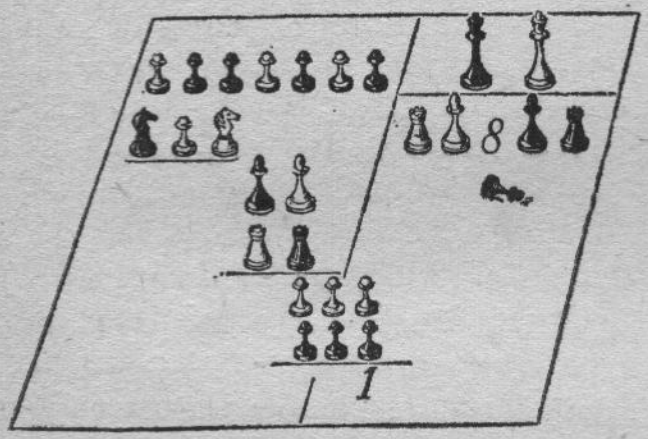
و به‌صورت کلی‌تر:

$\frac{x}{x+1}$ و x

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
ک	ی	ف	ا	ر	گ	و	م	ه	۱
س	■	ر	م	ق	■	ا	■	ر	۲
ر	ا	ر	ب	ر	و	س	ر	م	۳
ا	م	ر	ف	■	ی	ط	س	و	۴
ع	■	ی	■	م	و	ه	د	م	۵
ش	■	ک	■	ض	ر	ح	■	خ	۶
ا	■	گ	■	ر	■	د	■	ر	۷
ر	ت	و	■	ب	■	د	■	و	۸
ی	ر	س	ک	■	ل	ی	و	ط	۹

حل جدول شمارهٔ ۱۴

سرگرمی فکری



شطرنج بازی که درعین حال ریاضیدان بوده است به جای ارقامی که در یك عمل کامل تقسیم بکاررفته است مهره های مختلف شطرنج را قرارداده است ، به استثنای دورقم که درشکل ملاحظه می‌شود . با وصف اینکه رقمهای متشابه با مهره‌های مختلف و بالعکس یك نوع مهره به جای ارقام متفاوت به‌کار رفته است ، همهٔ اجزاء این تقسیم را می‌توان مشخص کرد . چگونه ؟

پاسخ سرگرمی فکری شمارهٔ قبل

۳	×	۲۵	=	۷۵
×		+		+
۵۰	−	۱۳	=	۳۷
۱۵۰	−	۳۸	=	۱۱۲

پاسخ نوشتن اعداد شمارهٔ قبل

۱) $\frac{1}{1}$ یا $\frac{2}{2}$ یا . . . یا $\frac{9}{9}$

۲) $۳۷=\frac{۳۳۳}{۳\times۳}$ ۳) $۱۰۰=۹۹\frac{9}{9}$

۴) $۵۵=۴۴+\frac{۴۴}{۴}$ ۵) $۲۰=۹+\frac{۹۹}{۹}$

۶) $۲۰=۱+۳+۵+۷+\frac{۷۵}{۷۵}+\frac{۳۳}{۱۱}$

از جمله نامه‌های رسیده

دوشماره است که علی‌رغم تمایل شورای نویسندگان وبا وجود اینکه ده صفحه به تعداد معمولی صفحات یکان اضافه شده است ، چاپ بخشهایی ازقبیل ، پرسش و پاسخ ، ازجمله‌نامه‌ها وغیره میسر نگردیده است . امید است در شماره‌های بعد که تعداد صفحات مخصوص درج مسائل کمترمی‌شود نسبت به‌چاپ این‌بخشها جبران‌مافات بشود. بسیاری‌ازخوانندگان پرسشهایی‌نموده‌اند که طرح آن و پاسخ مربوط برای دیگر خوانندگان نیز قابل استفاده است و در شماره‌های بعدی چاپ خواهد شد .

دربارهٔ مندرجات یکان و مطالب دیگری که به‌کار یکان مربوط می‌شود نامه‌های زیادی از خوانندگان گرامی واصل‌شده است . در این صفحه به‌اندازه‌ای‌که میسر باشد خلاصهٔ بعضی ازاین نامه‌ها چاپ‌می‌شود.

● آقای **محمدخالقی** درنامهٔ مشروح‌خود نحوهٔ انجام کنکور سال قبل دانشگاه را مورد انتقـاد قرار داده و اظهار داشته‌اند که این‌نوع کنکور به‌زیان دانش‌آموزان فعال‌می‌باشد، چه اشکال دارد سؤالهای کنکور دانشکده‌های ایران هم مانند کشورهای مترقی باطرح مسائل کلی و ابتکاری انجام پذیرد .

● آقای **سیدحسین‌رستگاری** دانش‌آموز کلاس‌پنجم ریاضی دبیرستان ایرانشهریزد باالهام از تعاریف و اصطلاحات ریاضی ابیاتی دروصف معشوقه سروده‌اند. چندبیتی از آن‌بدین قرار است :

گر ز خودگیرم خبر، گوید وجود من‌نخست
غمر ابهـامم نگارا تـابعی از مهر تو است
چونکه من فاکتور بگیرم آن جفاهـای ترا
بازهم حاصل‌جفا . آخرچرا ، آخرچرا ؟
خندهٔ تو گریـهٔ من چون تصاعـد شد بسی
اولـی بـاشد حسابـی لیك دوم هنـدسی

● آقای **آ. ن. ربکاله** پیشنهاد نموده‌اند کـه برای پرورش استعداد ریاضی جوانان ، مسابقه‌هـایی درچند مرحله توسط مجلهٔ یکان انجام پذیرد و جزئیات مراحل این مسابقه را تشریح نموده‌اند .

● محصلی ازششم‌ریاضی شرحی در پاسخ انتقاد برکتب درسی مذکور در شمارهٔ ۱۴ یکان نوشته و خواسته‌اند که نامهٔ ایشان را به آقای افشار تبریزی نویسندهٔ این مقاله برسانیم .

● آقای **مرتضی واعظ‌پور** روش مجله را در چاپ فرمولهای مربوط به‌اعداد فیثاغورثی به‌عنوان فرمولهای‌ابتکاری وبعد رداین فرمولها را مورد انتقاد قرار داده و نوشته‌اند که این امر برای ایشان دردناك وغیرقابل انتظار بوده است.

● خواننده‌ای تذکر داده است‌که مسئلهٔ شمارهٔ ۲۲۸۳ که‌به‌نام... چاپ شده است درکتاب مسائل جبر و راهنمای‌حل آنها مذکور می‌باشد .

***

راجع به یکان سال (امتحانات نهایی)

● دانشجوی محترمی ازدانشکدهٔ فنی چاپ این شماره از یکان سال را امری زائد دانسته‌اند و نوشته‌اند کـه با درج بدون حل‌مسائل امتحانات نهایی‌کشورهای دیگر، برای‌محصل ایرانی فایده‌ای مترتب نخواهد بود . مسئلهٔ مهم برای‌محصلین داشتن راهنمای خوب است.

● دانش‌آموز عزیزی از ششم ریاضی به‌تبع‌ازاحساسات پاك‌جوانی یکی از مقاله‌های مندرج در یکان سال راسخت‌مورد انتقاد قرار داده‌اند وضمن اینکه از آنچه‌گفته‌اند اظهار تأسف نموده‌اند اظهار داشته‌اند که‌اگر مقامی داشتند و مختار بودند خیلی ازدبیران را بااحترام کامل به‌دریا می‌ریختند!؟ درپایان هم اظهارنگرانی نموده‌اند که مبادا ارسال نامه به‌مجلهٔ یکان باعث‌کم وکسرشدن نمرات ایشان بشود!

● دانش‌آموز محترمی‌که نام خود را ننوشته امانشانی کامل منزل خودرا مرقوم داشته‌اند نسبت به‌اپور هندسهٔ رقومی امتحان ششم‌ریاضی اردیبهشت ۱۳۴۳ که در یکان‌سال چاپ‌شده است دوایراد گرفته‌اندکه‌کاملا حق باایشان است (یال c_0e_{-3} مرئی ویال a_0f_{-6} مخفی می‌باشد).

● دبیر گرامی ریاضیات آقای **قوام نحوی** پیشنهاد فرموده‌اندکه در مجلهٔ یکان مسائلی هم برای دانش‌آموزان‌دورهٔ اول دبیرستان درج‌گردد، و اضافه نموده‌اند که علاوه‌برمسائل و مطالبی‌که از استاد دکتر هشترودی چاپ می‌شود ، مطالبی ازاستادان دیگر ریاضی‌از قبیل آقای پرفسور فاطمی ودیگران نیزچاپ بشود .

آقای نحوی دربارهٔ حل مسئلهٔ حساب استدلالی امتحان ششم ریاضی متفرقهٔ آبـان ۴۳ تذکراتی داده‌اند که در شمارهٔ بعدی مجلهٔ مذکور خواهد شد.

مجموعهٔ علمی «یکان سال»

حاوی جامعترین مقاله‌هایی دربارهٔ علوم ریاضی، نجوم، فیزیك و شیمی که خواننده را در جریان آخرین تحولات تکاملی این علوم قرار می‌دهد.

مقالهٔ کامل «بنیان ریاضیات نوین» ومسائل فکری ممتاز بامقالات دیگر

از استاد دکتر محسن هشترودی

نوبل، جوایز نوبل ـ فهرست کامل برندگان جوایز پنجگانهٔ نوبل از ۱۹۰۱ تا ۱۹۶۴

حل مسائل ممتاز و معروف هندسه جدید برای حل‌مسائل ـ ارائهٔ جالبترین سر گرمیها و معماهای ریاضی ـ داستانهای تفننی ریاضی

بها: ۶۰ ریال

یکان سال مخصوص امتحانات نهایی

حل مسائل ریاضی، مکانیک، فیزیك و شیمی امتحانات نهایی سالهای ششم متفرقه و دبیرستانها در نوبتهای: اردیبهشت، خرداد، شهریور و آبان ۱۳۴۳

کشورهای و فرانسه، انگلستان کشورهای‌نها ی امتحانات‌مسائل دیگر

این مجموعه نه تنها بهترین‌راهنما برای داوطلبان ومحصلین کلاسهای ششم می‌باشد بلکه باارائهٔ مسائل جدید مطروحهٔ در امتحانات کشورهای خارج بهترین راهنمای کنکور دانشگاه نیز محسوب می‌شود

بها: ۴۰ ریال

مشترکین مجلهٔ یکان می توانند این دو مجموعه را با تخفیف ۲۰٪ از ادارهٔ مجلهٔ یکان‌تهیه نمایند.