یکان

مجلهٔ ریاضیات

$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n$

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ :

۸

شمارهٔ مسلسل :

۲۱

دی ماه ۱۳۴۴

در این شماره :

اعداد	ترجمه : مهدی مدغم	۱
هزار و یك اندازهٔ π	ترجمهٔ: عبدالغنی علیم مروستی	۸
تعیین ریشه‌های تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم	ترجمهٔ : علی‌اصغر شیعه بیگی	۱۲
سال صفر	غلامحسین باقرزاده	۱۳
چگونه یك مسئله را حل کنیم	ترجمهٔ: ه. شریفزاده	۱۴
بی‌آنکه عصبانی شوید	—	۱۶
راهنمای حل مسائل هندسه	ترجمهٔ : ع . م	۱۷
دربارهٔ $\sqrt{x^2}$	ع . م	۲۱
حل مسائل نمونه	ترجمهٔ ه. شریفزاده	۲۴
مسائل امتحانات ثلث اول دبیرستانها	—	۲۷
مسائل برای حل	—	۴۷
حل مسائل شمارهٔ گذشته	—	۵۱
اشتباه از چیست	—	۶۶
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها	مهندس ایرج ارشاقی	۶۷
سرگرمی	—	۶۸
از جمله نامه‌های رسیده	—	۶۹

بها : بیست ریال

گفتگو با خوانندگان

بسیاری از دانش‌آموزان گرامی‌مایل هستندکه سؤالات امتحانات داخلی دبیرستانها در مجله چاپ شود. از مسائل امتحانات ثلث اول آنچه‌که تا آخر آذرماه واصل شده بود در این شماره چاپ شده است و با وجود اینکه ۱۲ صفحه بر صفحات مجله افزوده شد بازهم چاپ بعضی مطالب از قبیل «ریاضیات جدید» و «پرسش و پاسخ» میسر نشد. ازاین بابت ازخوانندگان پوزش می‌طلبیم.

تشکیل شورای دبیران ریاضی لیسانسیه اهواز

به منظور شور و بررسی دربارهٔ برنامهٔ ریاضی دورهٔ دوم و همچنین بررسی کتابهای ریاضی دبیرستانها جلسات هفتگی شورای دبیران ریاضی اهواز در اطاق آقای حبیب‌نژاد معاون تعلیماتی ادارهٔ کل آموزش و پرورش خوزستان تشکیل می‌شود در این جلسات بانو صالحی وآقایان: حبیب‌نژاد، طاهریان، نجفی، فلاح، گیتی‌زاده، کریمی، فرهنگی، پراتی و نحوی شرکت می‌کنند.

نظر شورای دبیران مزبورکه به ادارهٔ مجله رسیده است به ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش و پرورش تسلیم گردید.

***

فعالیتهای علمی در دبیرستانها

در سال تحصلی جاری در دبیرستان شاهپور شیرازنشریهٔ ریاضی پیک دانش زیر نظر آقای کرمی معاون دبیرستان تهیه می‌شود. تهیه‌کنندگان آن عبارتند از آقایان: **حسن قربانی حقیقی، عشکین قلم، جاویدی، مقدس، دقندری فیض‌زاده، میرزاده، ویس‌زاده، لك صالح حقیقی، منفرد، جوانمردی، همپائی** دانش‌آموزان چهارم ریاضی

***

نمایندگی فروش یکان در رشت

به عهدهٔ: کتابفروشی طاهری: ابتدای خیابان شاه

می‌باشد. علاقمندان برای خرید مجله مراجعه فرمایند

هزار پرسش علمی
و پاسخ آنها

دانستنیهای عمومی دربارهٔ

مردم ـ حیوانات ـ گیاهان ـ زمین ـ دانش ـ فضا ـ هوا ـ اندازه‌ها

قیمت: ۳۵ ریال

کتابفروشی هاشمی ـ شیراز

از شهرستانها با ادارهٔ مجلهٔ یکان مکاتبه شود

یکان
مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ هشتم (شمارهٔ مسلسل: ۲۱)

دی ۱۳۴۴

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی: داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زار نو، نزدیك شاهرضا، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زار نو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume II, number 8, Jan. 1966

subscription: $3

TEHERAN, P.O.B.: 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

اعـداد

نوشتهٔ : فیلپ دیویس
ترجمهٔ : مهدی مدغم

مجلهٔ : سینتیفیك آمریکن

عموماً ، در نظر مردم ، ریاضیدان شخصی است که در حساب ورزیده باشد . ولی خود ریاضیدانان این تعریف را قبول ندارند . ریاضیدانان می گویند که خودشان بـه اندازهٔ اشخاص دیگر در محاسبات روزانه و در بررسی صورتحسابهای بانکی خویش اشکال دارند و به داستانهایی که دربارهٔ ریاضیدانان معروف گفته می‌شود استنادمی‌جویند. مثلا می گویند که نیوتون به هنگامی که رئیس ضرابخانه بود شخصی را استخدام کرد تـا محاسباتش را انجام دهد . اختراع و تکمیل خطکشهای محاسبه و ماشینهای حساب الکترونیکی نیز به‌منظور کمك به ریاضیدانان انجام گرفته‌است.

بدیهی است که مطالب فوق ، زیاد مستدل نیست . اگـر ریاضیدانان را کنار بگذاریم از کدام شخص حفاظت اعداد فرد و زوج ومربع وسوراست‌را انتظار داشته‌باشیم ؟ برای کسب اطلاع از اعداد **فیبوناچی** (Fibonacci) و اعـداد **لیوویل** (Liouville)واعداد**فوق مختلط**(hypercompelex) واعداد لایتناهی به چه مقامی مراجعه نمائیم ؟ پس پایه دانست که ریاضیات در حد اعلای خود همیشه به بازی بااعداد مربوط می‌شود . **برخف**(Birkhoff) دانشمند معروف آمریکاوقتی خاطرنشان مـی‌ساخت که معماهای ساده‌ای کـه در بارهٔ اعداد صحیح ظاهر شده است در طی قـرون متمادی سرچشمهٔ تجدید حیات ریاضیات بوده است .

اعداد ، ابزاری لازم وضروری برای تمدن بشری است‌و پیوسته فعالیتهای بشر را به سوی نوعی نظم وترتیب سوق داده است . ابتدایی ترین کاربرد اعداد ، مشخص و متمایز کردن چیزهایی مثل شمارهٔ تلفن وشمارهٔ پروانهٔ اتومبیل می‌باشد .در این مرحله ، فقط یك عدد با عدد دیگر مقایسه‌می‌شود وعملیات حساب بر روی آنها انجام نمی گیرد . فی‌المثل جمع شمارهٔ تلفن شما وشمارهٔ تلفن دوست شما چیزی را مشخص نمی‌سازد . در مرحله‌ای بالا تر ، ترتیب طبیعی اعدادصحیح مثبت ، برای نوبت گرفتن وترتیب‌تقدم وتنظیم لیست افرادی‌که در یك مسابقه مقام اول ودوم وسوم را احراز نموده‌اند بکار می‌رود . در این مرحله نیز احتیاجی به‌عمل جمع وتفریق وسایر عملیات حساب برروی اعداد نیست وتنها مطلب مورد نظر این است که یك‌عدد از دیگری بزرگتراست‌یا کوچکتر . حساب به معنای کامل موقعی ظاهر می‌شودکـه با عملیاتی از قبیل جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، جذر وسایر عملیات حساب مواجه شویم .

***

بسط وپیچیدگی تمدن یك جامعه را می‌توان از بسط و پیچیدگی اعدادی کـه در آن جامعه بکار می‌رود در یافت . بیست و پنج قرن پیش **بابلیها** اعداد صحیح ساده را برای شمارش چند گوسفندی کمالك بودندوحساب ساده‌ای برای‌ضبط حرکات سیارات‌استعمال می کردند .اما امروز دراقتصادریاضی، **جبر ماتریسها** برای تشریح بستگی متقابلی که صدها صنایع مختلف با یکدیگر دارند بکار می‌رود . در فیزیك ، تبدیلات‌در **«فضای‌هیلبرت»** را برای‌پیشگوئی پدیده‌های کوانتوم‌استعمال می کنند.اعدادی که‌در این‌تبدیلات بکارمی‌رود دارای‌مفهومی‌است که‌ازمفهوم‌مجرد اعدادصحیح‌مثبت هفت‌مرحله مجردتر می‌باشد.

دستگاههای اعداد که در ریاضیات بکار می رود می تواند به‌پنج‌پایهٔ اصلی تقسیم گردد که‌به‌ترتیب از ساده‌ترین به‌پیچیده‌ترین آنها عبارتند از :

۱ــ دستگاهی که فقط شامل اعداد صحیح مثبت باشد .

۲ــ دستگاهی که شامل‌اعدادصحیح‌مثبت ومنفی‌وصفر باشد.

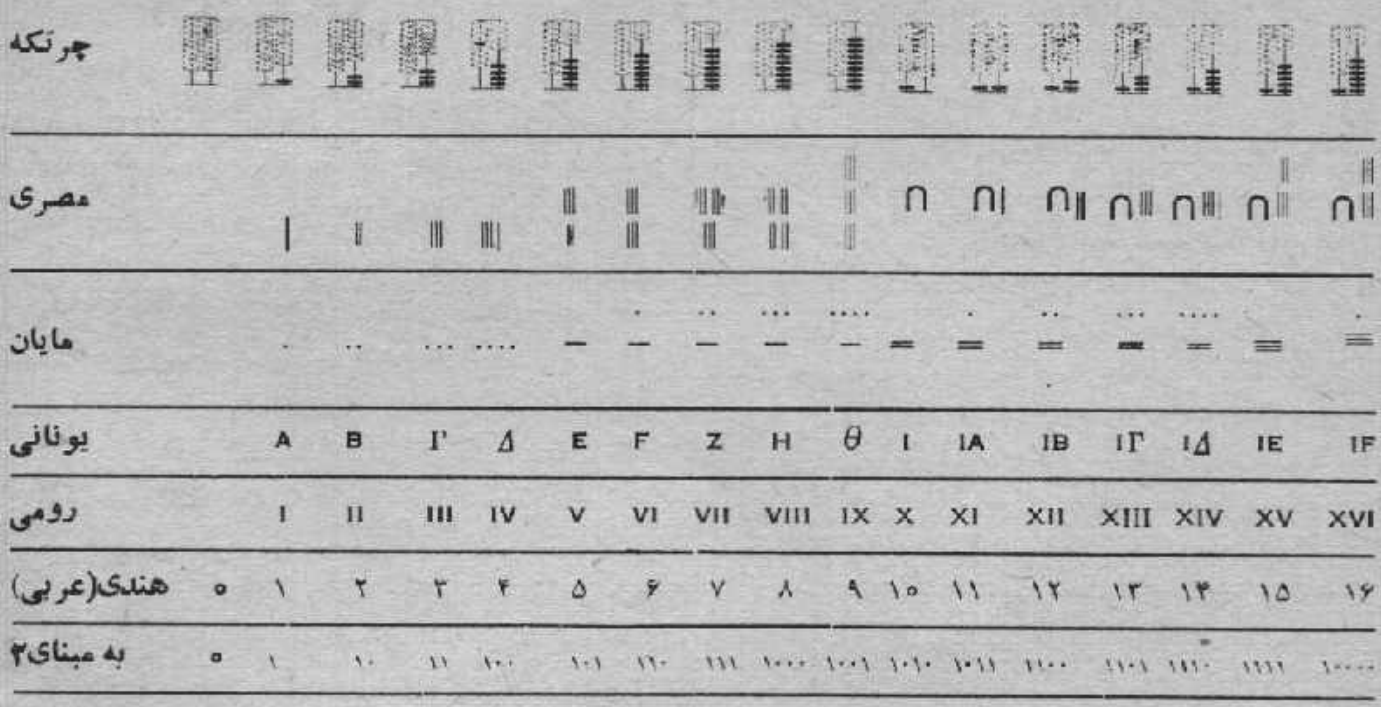
۳ــ دستگاه اعداد گویا که شامل کسرها نیز می‌شود .

۴ــ دستگاه اعداد حقیقی که شامل اعدادی از قبیل $\sqrt{2}$ و π نیز می‌شود .

۵ ــ اعداد مختلط که عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را دخالت می‌دهد .

اعدادمثبت صحیح ، اعـدادی هستند که طفل در هنگام شمارش فرا می‌گیرد و به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... نوشته می‌شود . این اعداد ممکن است بـه طرق مختلف نوشته شوند . رومیها این اعداد را به صورت I و II و III و IV و .... یونانیها به شکل π و γ و η .... می‌نوشتند و در دستگاهی به مبنای ۲ که فقط ارقام۰ و۱ بکار می‌رود این‌اعداد به صورت ۱ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۰۰ و ... نوشته می‌شوند . تمام این علامات یك منظور را مشخص می‌سازند و آن منظور اینکه علامات مختلف برای کمیات مختلف که معنی وترتیب آنها بطور یکنواخت **درك** می‌شود بکار رود (جدول صفحهٔ بعد) .

بشر اولیه ، فقط به چندعدد صحیح‌اولیه احتیاج داشت، اما با بسط‌تمدن مجبور شدکه اعداد بزرگتری اختراع نماید. ایـن پیشرفت یـك مـرتبه انجام نگرفت . چنانکه **برنارشاو** می‌نویسد : «برای انسانی‌که از تمدن بی‌بهره است ونمی‌تواند بیش ازانگشتان‌دست‌خود را بشمارد، عدد یازده‌شمارش نا پذیر

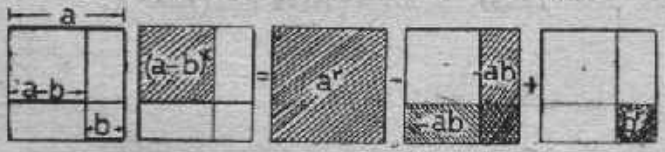


در ردیف اول طرز نشان دادن اعداد با چرتکه، درردیف دوم و سوم و چهارم و پنجم و ششم روش عددنویسی بوسیلهٔ مصریها ، حوایف مایان ، یونانیها، رومیها و هندیها را ملاحظه می‌کنید. (ارقام هندی در اروپا به ارقام عربی معروف است) . ردیف هشتم عدد نویسی در مبنای ۲ را نشان می‌دهد .

است . » بنظر می‌رسد که تا قرن سوم پیش از میلاد ، روشی اساسی برای شمارش اعداد بزرگ وجود نداشته است . **ارشیمدس** روشی خسته کننده برای نامیدن اعداد بزرگ ارائه نمود .

با این وجود در حالی که ریاضیدانان یونان برای نام اعداد بزرگ در تلاش بودند جهشی از اعداد محدود به بینهایت انجام گرفت . این جهش با سه نقطهٔ کوچك که بعد از عدد ۴ از رشتهٔ اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... . واقع می شد مشخص می گردید . آنها می گفتند که بعد از ۴ عددی وجود دارد و پس از عدد بعد از ۴ نیز عدد دیگری وجود دارد وبهمین ترتیب تعداد نا محدودی از اعداد صحیح بدست می آید . برای آنان این مفهوم یك مرحلهٔ عالی تصور بشر بود زیرا مخالف تمام تجارب فیزیکی و مخالف عقیدهٔ فلسفی آنروزی که عالم باید محدود باشد می گردید. قبول مفهوم بینهایت امکانات وسیعی برای ریاضیات فراهم‌ساخت و در مقابل تناقضاتی نیز بوجود آورد که تا به امروز معنی ومفهوم آن بطور کامل درك نگردیده است .

عبور از اعداد صحیح مثبت به اعداد صحیح منفی کاری دشوارتر بود. اکنون استعمال اعداد منفی بسیار معمولی وعادی بنظر می‌رسد. ده درجه زیر صفر کمیتی است که برای عموم قابل درك می‌باشد . اطفال کوچك با شمارش اعداد از بزرگ به کوچك (... پنج، چهار، سه، دو، یك...) آشنایی دارند . اما یونانیان اعداد منفی را فقط بحسب عبارات جبری مساحات مربعات ومستطیلها بکار می‌برده‌اند . برای مثال به شکل زیر که تعبیر هندسی اتحاد



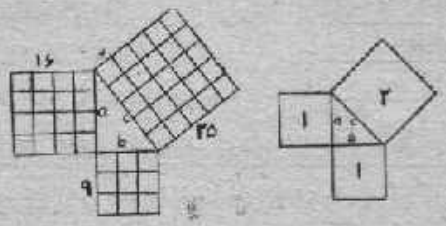
جبری $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ می‌باشد دقت نمائید .

اعداد منفی تا سال ۱۵۴۵ بنحو قابل ملاحظه‌ای بکار برده نشده بود در این سال **ژیرولاموکاردان (Girolamo Cardano)** این اعداد را در کتابی که منتشر کرده بود بکار برد .

کسرها یا اعداد گویا از اعداد منفی ، قدیمی‌تر هستند . دو نوشته‌های ریاضی **پاپیروس رند (Rhind)** که از مصر بدست آمده وبه‌حدود سال ۱۵۵۰ قبل ازمیلاد مربوط می‌شود کسر بکار رفته ومورد بحث قرار گرفته است . روش فعلی نوشتن کسرها به صورت $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{8}{13}$ همچنین روش فعلی عملیات حساب کسرها ازقرون پانزدهم وشانزدهم شروع شده است. محتمل است که بیشتر اشخاص کسرهای $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ را نتوانند بدون غلط با هم جمع نمایند ودر حقیقت هم خیلی کمتر احتیاج به اینگونه عملیات دارند . با اینحال بررسی کسرها وعملیات برروی آنها موضوعی نیست که ازبین رفته باشد . چندی پیش درروزنامه‌های امریکا مشاجره هایی برسر بعضی از عملیات کسری در برنامهٔ جدید ریاضیات مدارس درگرفت . منشأ این مشاجره اختلاف عقیده برسر هدفهای عملی و نظری ریاضیات مدارس بود . گفته

می‌شد ، یك فروشنده که در فروش تخم مرغ وسایر اجناس خود احتیاج بـه عملیات کسری پیدا نمی کند احسان خواهد کرد که آنچه در بارهٔ کسرها آموخته مهمل و بی نتیجه بوده است .

اعداد گنگ نیز داستانی بس دراز دارند . در قرن ششم قبل از میلاد مکتب ریاضی **فیثاغورث** مواجه با عددی شد که نمی‌توانست در مجموعهٔ اعداد صحیح یا اعداد کسری قرار گیرد. این عدد که ازروی قضیهٔ معروف فیثاغورث بدست آمد $\sqrt{2}$ یعنی



طول قطر مربع ویا طول وتر مثلث قائم الزاویه ای بود که هر ضلع آن یك واحد باشد . یونانی‌ها که تا آنروز تصور می کردند که جز اعداد گویا عدد دیگری وجود ندارد از وجود $\sqrt{2}$ بسیار ناراحت شدند. زیرا عدد گویائی مثل کسر $\frac{a}{b}$ با صورت و مخرج صحیح نمی‌توانست برابر $\sqrt{2}$ باشد واین بدان معنی بود که قطر یك مربع طول ریاضی ندارد . یونانیان این تناقض را با تسور اعداد به عنوان طول حل نمودند وبدین ترتیب توسعهٔ حساب و جبر را منوقف ساخته ودرمقابل پیشرفت ریاضیات یونان دیواری محکم قرار دادند .

قرنها گذشت تا تشخیص داده شده که ریشهٔ دوم عدد ۲ را می‌توان با گذاشتن چند نقطه پس از آخـرین رقم محاسبه شدهٔ مقدار آن نشان داد. امروزمی‌توانیم بافشار دادن تکمهٔ مخصوص ریشهٔ دوم ماشین حساب معمولی جواب $\sqrt{2} = 1/41421\ldots$ را بیابیم . ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی ارقـام اعشاری را تا هزارها رقم تعیین کرده‌اند. هر عدد که به این شکل قابل نوشتن باشد (با یك یا چند رقم صحیح درطرف چپ ممیز ویك رشته بینهایت از ارقام در طرف راست آن) یك عدد حقیقی است به این طریق می‌توان اعداد صحیح مثبت (مثلا $17 = 17/000000$) واعداد صحیح منفی (مثلا $-3 = -3/000000\ldots$) و اعداد گویا ($17\frac{1}{5} = 17/200000\ldots$) را نیز نشان داد . بعضی اعداد گویا را نمی‌توان به صورت فوق که سلسله‌ای از صفر در سمت راست خود دارند نوشت مثلا معادل اعشاری $\frac{1}{7}$ بـه صورت :

$\frac{1}{7} = 0/142857\ 142857\ldots$ نوشته می‌شود . آنچه که کسرهایی به این صورت رااز اعداد گنگ متمایز می‌سازد آنست که در نوشتن معادل اعشاری این کسر ها در طرف راست ممیز یك دورهٔ چند رقمی وجود دارد که پیوسته تکرار می گردند و در حقیقت این رشتهٔ بینهایت ارقام اعشاری از تکرار این دوره‌ها تشکیل یافته است . و حال آنکه اعداد گنگ یك رشتهٔ بینهایت رقمی اعشاری دارند که ازدوره‌های تکرار شده تشکیل نمی‌شود. مثالهای مشهور اعداد گنگ عددهای

$\sqrt{2} = 1/41421356237\ldots$ و

$\pi = 3/14159265358\ldots$ است . اعداد گنگ جز و اعداد حقیقی می‌باشند .

در قلمرو اعداد مختلط است که به اعدادی به نام موهومی برمی‌خوریم . اعداد مختلط ، جزئی موهومی به شکل $\sqrt{-1}$ دارند که چون در خود ضرب شود برابر -1 می گردد . از آنجا که قاعدهٔ اساسی در ضرب آنست که حاصلضرب دو عدد مثبت یا دو عدد منفی همواره مثبت است پس قبول $\sqrt{-1}$ به عنوان یك عدد ، مخالف این قاعده می باشد . $\sqrt{-1}$ که با i نشان داده می‌شود یك تا هماهنگی در ریاضیات ایجاد مـی کرد زیرا این عدد را نه می‌توان جزو اعداد منفی قرار داد نه جزو اعداد مثبت چنانچه **لایب نیتز** می‌نویسد. «اعداد موهومی پروازشگفت‌آور روحی الهی هستند . آنها شبیه دوحیاتینی هستند کـه بین وجود وعدم قرار گرفته‌اند»

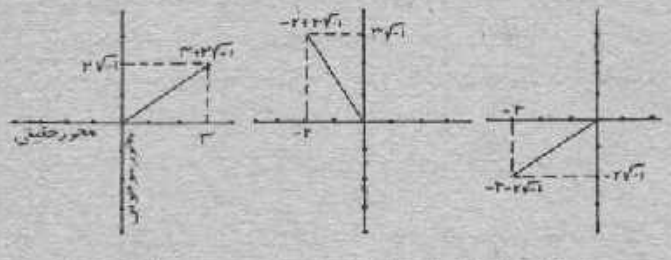
از زمان **رنسانس** تاکنون نتوانسته‌اند حقیقت این اعداد سحر آمیز را بیان دارند . اعداد مختلط را (که به شکل کلی $a+b\sqrt{-1}$ می‌باشد) برای حل معادلات وکشف بسیاری از اتحاد های زیبا بکار برده‌اند . **آبراهام دوموآور** (Abraham de Moivre)

فرمول :

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$$

را پیدا نمود. **اولر** فرمول $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$ را کشف کرد. (e مبنای لگاریتم طبیعی است وبرابر است با ۲/۷۱۸۲۸۰...)

اعداد مختلط تا قرن نوزدهم بطور مجرد مورد مطالعه قرار می گرفت . در این هنگام معنای مفید برای این اعداد پیدا شد . **کاسپار وسل** (Caspar Wessel) از نروژ ،



اعداد مختلط را می‌توان به‌طریق هندسی نمایش داد و عملیات مربوط به‌آنها را به‌طریق هندسی تعبیر کرد. هرواحد روی محور x ها برابر ۱ یا ۱− و هرواحد روی محورyها برابر $\sqrt{-1}$ ویا $-\sqrt{-1}$ (i و i−) است . هر نقطهٔ صفحه به‌صورت یك عدد مختلط $x+iy$ نشان داده می‌شود. هر نقطه را به مبدأ وصل کرده خط حاصل را ۹۰° دوران دهیم نتیجه حـاصل ضرب عـدد مختلط نظیر آن نقطه در $\sqrt{-1}$ می‌باشد . نقطهٔ واقع در شکل وسط به‌اندازهٔ ۹۰° دوران یافته یعنی عدد نظیر آن در $\sqrt{-1}$ ضرب شده‌است. درشکل راست همان نقطه به‌اندازهٔ ۹۰° دیگر دوران یافته‌است .

راهی برای نمایش این اعداد به طریق هندسی پیدا کرد واین خود اساس نظریهٔ توابع متغیر مختلط که دارای زیبائی خاص می‌باشد گردید.

پس از آن **ویلیام هامیلتون** ریاضیدان ایرلندی برای این اعداد تعبیر جبری پیدا کرد به این ترتیب که هر عدد مختلط را با یك زوج عدد معمولی نشان داد. این نظر موجب تهیهٔ پایه‌ای برای وصول به یك **جبر اصولی (Axiomatic Algebra)** گردید.

در همین هنگام فیزیکدانان، اعداد مختلط را برای توضیح پدیده‌های فیزیکی مختلف، مفید تشخیص دادند. اینگونه اعداد در معادلات الکترواستاتیك، هیدرو دینامیك، آئرو دینامیك، جریان الکتریکی متناوب، اشکال مختلف دستگاههای ارتعاشی ومکانیك کوانتوم داخل شدند. امروزه بسیاری از فرآورده‌های فیزیك نظری و مهندسی بـه زبان دستگاه اعداد مختلط بیان می‌شوند.

در قرن ۱۹ ریاضیدانان، چند دستگاه جدید اعـداد اختراع کردند. از این دستگاههای جدید سه دستگاه دارای اهمیت مخصوص می‌باشند: **اعداد چهارگانه، ماتریس‌ها و اعداد لایتناهی.**

اعداد چهارگانه مخلوق عظیم **هامیلتون** می‌باشند. وی مدتهای زیاد در بارهٔ این موضوع فکر می‌کرد که ضرب اعداد مختلط دارای تعمیم ساده‌دوران صفحه است پس شاید بتوان این موضوع را تعمیم داد و شاید بتوان نوع جدیدی از اعداد پیدا کرد ونوع جدیدی ضرب تعریف نمود بقسمی که دوران درفضای سه بعدی بحسب یك ضرب تعبیر شود. هامیلتون چنین عددی را **عدد سه‌گانه (triplet)** نامید و همانطور که **وسل** اعداد مختلط را با نقطه‌ای درصفحهٔ دو بعدی مشخص نمود وی اعداد سه‌گانه را با نقطه‌ای در فضای سه بعدی معرفی کرد.

مسأله مانند هسته‌ای سخت غیر قابل شکستن می‌نمود. حل این مسأله مـدام در مغز **هامیلتون** بود وباعث رنجش خانوادهٔ وی می‌گردید. همانگونه که خود وی اشاره می‌کند در موقع صرف صبحانه یکی از پسرانش می پرسید که بالاخره قاعدهٔ ضرب اعداد سه‌گانه را پیدا کرده است؟ ووی جواب می‌داد نه، فعلا غیر از جمع وتفریق آنها عمل دیگری را نمی‌دانم.

***

یك روز در سال ۱۸۴۳ در حالی که با زن خود در کنار یك کانال در **دوبلن** قدم می‌زد. راهی برای ضرب اعداد سه گانه به نظر **هامیلتون** رسید. یافتن این طریق به اندازه‌ای مهیج بود که وی قلمتراش خـود را بیرون آورد و بـر روی **پل بروهام** کلید حل مسأله یعنی

$$\langle i^2=j^2=k^2=ijk=-1\rangle$$

را نقش کرد که مسلماً هر عابری که آنرا دیده باشد به تعجب و حیرت فرو رفته است.

حروف i،j و k نمایش اعداد **فوق‌مختلط هامیلتون** می‌باشند که **اعداد چهارگانه** نامیده شد (شکل عمومی این اعداد بصورت $a+bi+cj+dk$ می‌باشد که a،b،c و d اعداد حقیقی می‌باشند) همانگونه که مربع $\sqrt{-1}$ عدد -1 می‌باشد $i^2=-1$ و $j^2=-1$ و $k^2=-1$، کلید حل مسأله این بود که درضرب اعداد چهارگانه، **قانون استقلال از ترتیب عوامل** صدق نمی‌کند. یعنی در حالی که درحالت اعداد معمولی $ab=ba$ می‌باشد درضرب اعداد چهارگانه وقتی ترتیب عوامل عوض شود ممکن است درحاصلضرب تغییر حاصل گردد مثلا $ij=k$ ولی $ji=-k$.

جدول اعداد چهارگانه که بوسیلهٔ هامیلتون ترتیب یافت. بـا ملاحظهٔ این جدول درمی‌یابید که قانون استقلال از ترتیب عوامل در این ضرب صدق نمی‌کند. مثلا

$$k\times j=-i \quad و \quad j\times k=i$$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

ازاین جدول نتیجه می‌شود: $i^2=j^2=k^2=-1$

×

مفهوم جدید دیگر، مفهوم **ماتریس** می‌باشد که بوسیلهٔ **هامیلتون** و ریاضیدان انگلیسی **سیلوستر (Sylvester)** و **کیلی (Cayley)** تقریباً همزمان توسعه یافت. ماتریس به عنوان یك عدهٔ اعداد که به شکل مستطیل مرتب شده باشند معرفی می‌شود مانند:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۴ \end{pmatrix}$$

تمام این ترتیب‌ها یعنی ماتریس بجای خود یك وجود تصور می‌شود. تحت شرایط خاصی امکان دارد که عملیات جمع وتفریق وضرب و تقسیم را برای چنین موجودی تعریف کرد. نتیجه دستگاهی ازاشیاء خواهد بود که اعداد معمولی را بخاطر می‌آورد و مورد استفادهٔ بسیاری از قسمتهای ریاضیات محض و عملی قرار می‌گیرد.

سومین مفهوم جدید، مفهوم اعداد نـامحدود است کـه نمایش تصور کاملا متفاوتی است. مفهوم اعداد نامحدود با یك داستان با مزه که به **دیوید هیلبرت (David Hilbert)** نسبت داده می‌شود روشن می‌گردد. این داستان به نام **هتل-هیلبرت** معروف است. داستان ازاین قرار است که مسافری به نیویورك وارد می‌شود ودرهیچ هتل جا برای خود پیدا نمی‌کند زیرا اطاقهای هتلها قبلا توسط سایر مسافرین اشغال شده است اما وقتی به هتل هیلبرت که اطاقهای آنهم قبلا اشغال شده است مراجعه می‌نماید متصدی هتل درجواب می گوید بـا آنکه تمام اطاقهای هتل اشغال شده است مسألهٔ تعیین اطاق برای شمـا غیرقابل حل نیست و من می‌توانم برای شما یك اطاق پیدا کنم سپس تازه وارد را به اطاق شمارهٔ یك و مهمان اطاق شمارهٔ یك را به اطاق شمارهٔ ۲ وساکن اطاق شمارهٔ ۲ را به اطاق شمارهٔ ۳ می‌برد و بهمین ترتیب عمل را ادامه می‌دهد به این ترتیب مهمان هر اطاق به شمارهٔ N به اطاق شمارهٔ $N+1$ می‌رود.

آیا این هتل دارای بینهایت اطاق بوده است!؟

گالیله پارادوکسی مشابه بیان نموده است، هـر عدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_4+b_4 & a_5+b_5 & a_6+b_6 \\ a_7+b_7 & a_8+b_8 & a_9+b_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-8 & 0+0 & 0+1 \\ -3+4 & 1+5 & -6-1 \\ 4+0 & 0+3 & 7+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1b_4+a_2b_5+a_3b_6 & a_1b_8+a_2b_8+a_3b_9 \\ a_4b_1+a_5b_2+a_6b_3 & a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6 & a_4b_7+a_5b_8+a_6b_9 \\ a_7b_1+a_8b_2+a_9b_3 & a_7b_4+a_8b_5+a_9b_6 & a_7b_7+a_8b_8+a_9b_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ -5 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 29 & 13 & 11 \\ -6 & -3 & -1 \\ 2 & 15 & 98 \end{vmatrix}$$

ماتریسها ترتیبی ازاعداد به شکل فوق هستندکه ارزش عددی ندارند اما می‌توانند تحت شرایط خاصی جمع وتفریق وضرب وتقسیم شوند. چنین ترتیبهایی‌برای محاسبهٔ تغییراتی در یك سری متغیرهای به هم مربوط روش ساده‌ای ارائه می‌نمایند . جمع دو ماتریس موقعی امکان داردکه دارای یك عده سطر و ستون باشند . سطر به سطر ، هرعنصر هرستون ماتریس اول با عنصر نظیر در ستون نظیرماتریس دوم جمع می‌شود و ماتریس جدیدی تشکیل می‌شود . در بالا جمع به صورت‌کلی ودر پائین‌آن جمع ماتریسها با مقادیرعددی‌نشان داده شده است .

عمل ضرب ماتریسها پیچیده‌تراست. دراین عمل لزومی نداردکه ماتریسها یك اندازه باشند . مثلا می‌توان یك ماتریس ۲×۳ را در یك ماتریس ۳×۲ ضرب‌کرد؛ هرجمله از سطر بالای ماتریس طرف چپ به ترتیب در جملهٔ نظیرآن از ستون اول‌ماتریس سمت راست ضرب شده ومجموع این حاصل‌ضربها جمله‌ای راکه در ستون اول وسطر اول ماتریس حاصل‌ضرب واقع شده تشکیل‌می‌دهند . سایر جملات به‌همین ترتیب‌بدست خواهندآمد .

صحیح می‌تواند مربع شود بنابراین نتیجه می‌گیریم که به اندازهٔ اعداد صحیح ، مربع اعداد صحیح وجوددارد. اما این مطلب را چگونه می‌توان صحیح دانست ؟ زیرا می‌دانیم اعداد صحیحی وجود دارندکه مربع یك عدد صحیح نیستند .

یکی ازجنبه‌های مثبت ریاضیات این است که هرجا به **تناقضی** برمی‌خوریم‌که راه ما را سد می‌سازد درهمانجا طریقی ظاهر می‌گرددکه نظریه‌های زیبا وبا ارزشی خودنمائی‌می‌کند ریاضیدان‌آلمانی قرن نوزدهم ، **ژرژ کانتور** این تناقض را به یك دستگاه جدید اعداد تبدیل کرد و **حساب‌اعدادنامحدود** را بنیان گذاشت .

کانتور یك مجموعهٔ بینهایت را مجموعه‌ای می‌داند که می‌تواند با جزئی از خودآن مجموعه ، مقابلهٔ یك به یك شود (مقالهٔ بینهایت در ریاضیات مندرج دریکان شمارهٔ۱۲) همانگونه که مجموعهٔ اعداد صحیح را می‌توان با مجموعهٔ مربعهای اعداد صحیح که جزئی‌از اعداد صحیح‌است مقابلهٔ یك به‌یك نمود. وی می‌گویدکه هرمجموعه‌که بتواند درچنین مقابلهٔ بااعداد صحیح قرارگیرد دارای بینهایت عضوخواهد بود. چنین عددی را با $\aleph$ (**الف** ، حرف اول الفبای عبری) نشان می‌دهد. **کانتور** اولین عدد لایتناهی راکه به‌این ترتیب بدست می‌آید با اندیس صفر مشخص‌کرد ($\aleph_0$). وی‌سپس نتیجه گرفت‌که بینهایت‌های دیگری وجود دارد (مثلا مجموعهٔ اعداد حقیقی) که به‌علت بزرگتر بودن نمی‌تواند درمقابلهٔ یك به یك، با اعداد صحیح مثبت قرار گیرد. اندازهٔ این اعداد لایتناهی باعلامات دیگری مانند: ($\aleph_1$ و $\aleph_2$ و ....) مشخص‌می‌گردد. از چنین مواد اولیه‌ای ، **کانتور** حسابی وضع کردکه اعداد معمولی و لایتناهی را دربر می‌گیرد. دراین حساب بعضی‌از قواعد حساب معمولی را به‌دور می‌افکنیم ومثلا تساوی به‌این‌شکل پیدا می‌کنیم $\aleph_0 = 1 + \aleph_0$ که باعلامات ریاضی، داستان هتل‌هیلبرت را نشان می‌دهد.

اعداد لایتناهی هنوز در خارج از **فلسفو** ریاضات مورد استعمالی‌پیدانکرده‌اند. اما درداخل‌ریاضیات‌نفوذ قابل‌ملاحظه‌ای داشته وباعث ایجاد نظریه‌های منطقی وفلسفی گردیده‌اند. نتیجهٔ فرض مشهور **اتصال کانتور**، مسائلی لاینحل بودکه هنوزافکار ریاضیدانان به‌خودمشغول داشته‌است. درسالهای اخیر به‌پاره‌ای ازاین‌مسائل بوسیلهٔ **الفردتارسکی** (Tarsky) **وپال کهن**



علامتی که در سمت چپ هر سطر مشاهده می‌شود حرف الف از الفبای عبری است .

اعداد صحیح مثبت مجموعهٔ بینهایتی را تشکیل می‌دهند که با (الف اندیس صفر) نشان داده می‌شود . مجموعهٔ اعداد حقیقی یا مجموعهٔ نقاط یك خط یا یك صفحه یا یك قسمت از فضا بینهایتی بزرگتر تشکیل می‌دهندکه با (الف اندیس یك) نشان داده می‌شود . تعداد منحنیهای مختلف بینهایت بزرگتری بوجود می‌آوردکه با(الف‌اندیس۲) نشان‌داده شده و بزرگترین بینهایتی است‌که تاکنون شناخته شده‌است .

(Paul Cohen) دانشمندان امریکائی جواب داده شده‌است.

***

تاکنون، برای اجراء نمایشنامهٔ اعداد، دارندگان نقشهای مختلف را معرفی کرده‌ایم. حال برای ما فرض است که قواعد این بازی را بیان نمائیم. برای یك نفر غیرمطلع، مطالب آینده ممکن است توضیح واضحات باشد. چنانکه می‌دانیم **هندسهٔ اقلیدس** بر اصولی بدیهی بنیان گذاشته شد . اما بررسیهای دقیق این اصول درقرن نوزدهم ، نکات ضعفی را نمایان ساخت که برای تحکیم مبانی هندسه می‌بایست این نکات ضعف را از بین‌برد. دراینجاموضوع مطرح‌می‌شود که‌درجبروحساب برخلاف هندسه بایك سلسله قواعد ساده سروکار داریم امابایدد دانست‌که کافی نبودن اصول هندسهٔ اقلیدسی ونتیجهٔ مفاهیم اعداد جدیدی مانند اعداد چهارگانه . ریاضیدانان قرن ۱۹ را بر آن داشت که اصول نظریهٔ اعداد را مورد تجدید مطالعه قرار دهند .

آیا قوانین ریاضیات مستقلند یا یکی از دیگری نتیجه می‌شود ؟ آیا این قوانین ، اساسی هستند یا می‌توان آنها را به‌قوانین‌مقدماتی‌ترخلاصه‌کرد؟ برای‌پاسخ‌به‌این گونه‌سؤالات‌است که هنوز دانشمندان کار می‌کنند . این کوششها نتایجی داده و جوابهای زیبا ومناسبی برای برخی‌ازآنها یافته شده است و در عمل مفاهیم جدیدی از قبیل **«حلقه»** (Ring) و **«هیأت»** (Field) **«گروه»**(Group) **«شبکه»**(Lattice) عرضه گردیده‌است که هرکدم قواعد عملیات ونظریه‌های مشخص مختص به خود دارند .

یکی از اقدامات مهمی که طی سالهای ۱۸۷۰ تا ۱۸۸۰ انجام گرفت معرفی مجموعه‌ای ازاصول برای اعداد حقیقی‌بود و در بیان اینکه دستگاه اعداد حقیقی، **«هیأت کاملا مرتب»** می‌باشد خلاصه شده‌است. هریك ازکلمات دراین‌عبارت، گروهی ازقواعدرامعرفی می‌نمایدکه عمل این اعداد را تعریف می‌کند.

ابتدا کلمهٔ **«هیات»** را در نظر می‌گیریم . این کلمه یعنی‌دستگاهی ریاضی‌که درآن جمع وتفریق امکان‌دارد بطریقی که باقواعد زیر صدق نماید:

۱- قانون استقلال از ترتیب عوامل در جمع:

$$x+y=y+x$$

۲- قانون شرکت پذیر درجمع :

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

۳- قانون استقلال از ترتیب عوامل در ضرب :

$$xy=yx$$

۴- قانون شرکت پذیری در ضرب :

$$x(yz)=(xy)z$$

۵- قانون توزیعی : $x(y+z)=xy+xz$

علاوه براین ، هیأت شامل عنصر (۰) که با خاصیت «$x+0=x$» مشخص می‌شود می‌باشد. هیأت شامل عنصر (۱) می‌باشد بقسمی‌که « $1\times x=x$ ». درمقابل هرعنصر مانند x از یك هیأت ، عددی مانند x ـ وجود دارد بقسمی که «$-x+x=0$» و این اساسی‌است‌که تفریق برروی آن بنا می‌شود . خاصیت دیگر هیأت ، قاعدهٔ حذف می‌باشد که اگر $xy=xz$ باشد داریم $y=z$ $(x\neq 0)$ بالاخره در برابر هر عنصر مانند $x\neq 0$ متعلق به هیأت عنصری مانند $\frac{1}{x}$ وجود دارد بقسمی که $x(\frac{1}{x})=1$ و این خود پایهٔ تقسیم است. بطور خلاصه هیأت دستگاهی‌است که عناصر آنرا می‌توان مطابق‌باقواعد حساب جمع وتفریق‌وضرب وتقسیم کرد. اعدادگویا مثالی‌برای یك هیأت می‌باشد .

اکنون کلمهٔ دوم را در نظر بگیریم. یك هیأت **«مرتب»** است اگر اندازه‌های عناصر آن قابل مقایسه باشد. علامتی که این‌خاصیت‌را مشخص‌می‌کند ($<$) می‌باشدکه معنی «بزرگتر» می‌دهد. این علامت ، از مجموعه‌ای از قواعد مخصوص به خود متابعت می‌نماید.

۱- **قانون سه دستگی (تثلیث)** (Trichotomy)

برای هردو عنصر x و yیکی از روابط زیر محقق است :

$$x>y \quad \text{یا} \quad x=y \quad \text{یا} \quad y>x$$

۲- **قانون انتقالی بودن** (Transitivity) :

اگر $x>y$ و $y>z$ باشد داریم $x>z$

۳- **قانون‌جمع** : اگر $x>y$ باشد $x+z>y+z$ می‌شود .

۴- **قانون ضرب** : اگر $x>y$ و $z>0$ باشد $xz>yz$ می‌شود.

بالاخره کلمهٔ دیگر یعنی «کامل» را تعریف می‌کنیم . این کلمه موقعی پیش می‌آیدکه عددی مانند $\sqrt{2}$ مورد مطالعه قرارگیرد. $\sqrt{2}$ رامی‌توان‌بایك رشته از اعدادگویا مانند ۱ و ۱/۴ و ۱/۴۱ و ۱/۴۱۴ و .... مشخص نمود که به تدریج آنرا با تقریبهای بهتری بدست می‌دهند . داریم $1^2=1$ و $(1/4)^2=1/96$ و $(1/41)^2=1/9981$ و $1/999396=(1/414)^2$ .... نتیجهٔ مجذور کردن این اعداد یك سلسله اعداد است که به‌تدریج به۲ نزدیکتر می‌شوند. اعداد رشتهٔ اصلی (۱و ۱/۴ و ۱/۴۱ و....) در همین‌حال به‌یکدیگر نزدیك می‌شوند. اکنون‌ما $\sqrt{2}$ را به‌عنوان‌مقدارحد این‌رشته تقریبات، تصور می‌نمائیم. اما برای اینکه چنین عملی ممکن باشد باید

بدانیم منظور از نزدیك شدن اعداد یك سلسله به‌یکدیگر چیست و باید تضمین داشته باشیم که دستگاه اعداد ما برای تشکیل چنین سلسله‌ای به‌اندازهٔ کافی عدد در اختیار دارد.

اکنون در حالی که مسیر پیموده شدهٔ بوسیلهٔ **کانتور** را می‌پیمائیم، سلسله‌ای از اعداد را درهیأت مرتب خوددر نظر می‌گیریم. گوئیم که اعداد این‌سلسله به‌یکدیگر نزدیك می‌شوند هرگاه تفاضل هر دو عدد از این سلسله که به اندازهٔ کافی دورباشد هرقدر بخواهیم کوچك شود. یعنی مثلا تمام جملاتی که از این سلسله به‌اندازهٔ کافی دور باشندحداکثر بایکدیگر ۰/۱ اختلاف داشته‌باشند. ممکن است شخصی بخواهد که پا را از این فراتر نهاده و اختلاف را کوچکتر از ۰/۰۱ نماید الی آخر. چنین سلسله‌ای از اعداد را **« سلسلهٔ منظم »** (Regular Sequence) می‌نامیم. یك‌هیأت مرتب، هیأت کاملامرتب نامیده می‌شود. هرگاه مطابق باهرسلسلهٔ منظم‌عناصر، عنصری ازهیأت وجود داشته باشدکه سلسله به عنوان یك مقدار حد به‌آن نزدیك شود. این‌است قانون «کمال» که شکافهای بین اعداد گویا را پر کرده است. این است آخرین اصل موردنیاز برای دستگاه اعداد حقیقی.

***

تمام این قواعد به اندازه‌ای مقدماتی بنظر می‌رسند که بسیار بعید بنظر می‌رسدکه احتیاج به بیان داشته باشند. با این وجود برنامهٔ مرتب ساختن آنها دارای ارزش‌فراوان بوده‌است. سالها چند اصل مورد مطالعه قرارگرفته تا به شکلهای آسان و ساده خلاصه شده است. قواعدی‌که پیش از این ذکر شد برای تشریح وعملیات دستگاه اعداد حقیقی لازم و کافی تشخیص داده شده‌است. اگر یکی از این قواعد کنارگذاشته شود دستگاه از کار می‌افتد و همانطور که قبلا ذکر شد این برنامه موجب شده است که به‌بسیاری ازسؤالات اساسی در بارهٔ اعداد پاسخ داده شود ومفاهیم جدید تمریختی بوجودآید.

روح اصول پذیری ، تمام ریاضیات جدید را پر نموده است ، این روح حتی در تدریس ریاضیات در دورهٔ متوسطه‌نفوذ نموده است . یك دبیر ریاضی اخیراً می گفت : «درایام گذشته قواعد عملیات در نوشته‌ها دفن می‌شد و هرگز درکلاس مورد بحث قرار نمی‌گرفت . امروزآن نوشته‌ها در قسمت اساسی‌درس واقع گشته ومحصل درخطراین‌قرار گرفته است که قانون‌استقلال از ترتیب عوامل را درمورد ۲+۳=۳+۲ بداند اما نتواند حاصل جمع راکه ۵است پیداکند » بدیهی است‌که در هر کار مبالغه می‌توان کرد . مبالغه در توجه به اصول جبرشبیه به‌دسته افرادی است که‌هرهفته برای رقص حاضر بشوند ولی تمام‌وقت را به بحث دربارهٔ موزیك وارکستر بگذرانند . آنچه در مورد ریاضیات مانند هرچیزدیگرخواسته می‌شود تناسب وتوازن‌جنبه های مختلف‌آن است .

تاکنون عملیات اعداد را مورد مطالعه‌قرارداده‌ایم.حال می‌خواهیم بدانیم خود اعداد چه هستند . امروزه ریاضیدانان تمایل‌دارندکه به این سؤال‌نیزمطابق اصول ریاضی پاسخ گویند نه با عبارات فلسفی وبنابرتئوری وعلم‌وروشهاومبانی دانشها» .

برای بیان این منظور یا به عبارت دیگر برای آفریدن اعداد ، عاقلانه‌تر آنست که روش ترکیب رابجای روش تجزیه بکار بریم . به این‌ترتیب از عنصرهایی با معنی ومقدماتی‌شروع کرده وقدم به قدم پیش می‌رویم تا به‌چیزی‌که با دستگاه اعداد حقیقی مطابقت داشته باشدبرسیم.

به عنوان عناصر مقدماتی می‌توان اعداد صحیح مثبت را اختیارکرد . این اعداد جنبهٔ مفید جهانی را دارندکه به شکل تعداد انگشتان دست آدمی ویا هرچیز دیگری‌که برای شمارش انتخاب گردد ظاهر می‌شوند. ریاضیدان آلمانی **رونکر** (Kronecker) کهدر قرن۱۹می زیست این‌مطلب را اینطور بیان کرد که «اعداد صحیح مثبت» مخلوق خداست ودیگر انواع اعداد ساخته وپرداختهٔ انسان می‌باشد .» در اواخر قرن ۱۹ **پینو** (Pèano) از ایتالیا توضیح مقدماتی‌اعداد صحیح‌مثبت‌را در پنج اصل بیان نمود :

۱ـ عددی صحیح مثبت است

۲ـ به ازاء هر عددصحیح مثبت تنها یك عدد صحیح مثبت وجود داردکه بلافاصله بعدازآن واقع شده‌است .

۳ـ عدد۱ بلافاصله‌پس‌ازهیچ‌عددصحیح‌مثبتی‌واقع نشده‌است

۴ـ اعداد صحیح مثبت متمایز اخلاف متمایز دارند

۵ـ اگر مطلبی دربارهٔ ۱صحیح باشد واگر این مطلب وقتی در مورد یك عدد صحیح مثبت صادق باشد دربارهٔ عددبعد ازآن‌هم صدق‌نماید ،دربارهٔ تمام اعداد صحیح مثبت صادق‌است. (این‌اصل همان‌استقراء ریاضی است) .

به این‌ترتیب، **دستگاه‌پینو** مشخص می‌شود. این‌اصول دستگاه اعداد صحیح مثبت را خلق می‌نماید ؛ زیرا دستگاه‌پینو یا دستگاه اشیائی که در۵اصل فوق صدق نمایند معادل‌یادستگاه اعداد صحیح مثبت می‌باشد. از۵ اصل پینوتمام جزئیات‌مربوط به اعداد صحیح مثبت را می‌توان نتیجه گرفت.

وقتی اعداد صحیح مثبت‌دردسترس ما قرار گرفت‌می‌توانیم برطبق پیشنهادرونکر دامنهٔ اعدادرابسط دهیم. با عملیات‌برروی اعداد صحیح مثبت می‌توان اعداد صحیح منفی وصفررا نتیجه گرفت . یکی از راههای ساده‌آن است‌که یك زوج عدد صحیح مثبت در نظربگیریم . شکل کلی یك جفت عددراکه با (a و b) مشخص می‌شود درنظرمی‌گیریم وازآن با عمل a − b یك عدد صحیح استخراج می‌نمائیم . وقتی a بزرگتراز b باشد باعمل تفریق a − b عدد صحیح مثبت بدست می‌آید وقتی b بزرگتر از a باشد نتیجهٔ a − b یك عدد صحیح منفی است . وقتی a و b مساوی باشند a − b صفر را بوجود می‌آورد. بنابراین‌جفتهای اعداد صحیح مثبت می‌توانند تمام اعداد صحیح ، مثبت، منفی یا صفر را نمایش دهند. البته هرعدد رابه طرق مختلف باجفتهای اعداد می‌توان نشان داد مثلا ۴ با (۲و۶) یا (۳و۷) یا(۴و۸) مشخص‌می‌شود. ما این‌جفتهای‌مختلف اعدادرایکی‌فرض‌می‌کنیم .

***

با استعمال اعداد صحیح مثبت . می‌توان قاعده‌ای برای تشخیص جفتهای مساوی‌پیداکرد. دو جفت (a و b) و(c و d) موقعی برابرندکه داشته باشیم: a+d=b+c (توجه‌نمائید که این‌تساوی، معادل تساوی a − b = c − d می‌باشد بااین

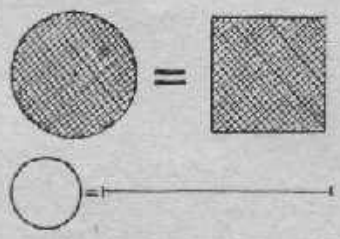
بقیه درصفحه ۶۶

هزارویک اندازهٔ ((π))

ترجمه و تنظیم از : عبدالغنی علیم مروستی

π و بعضی خواص آنرا دانش آموزان عزیز می شناسند و شاید اطلاع داشته باشند که در ابتدا ضمن کوششهای مربوط به حل مسئلهٔ تربیع دایره متوجه عدد اسم π گردیدند .

مسئلهٔ تربیع دایره عبارت است از تبدیل دایره بمربعی معادل با آن، به این ترتیب که با بکار بردن خطکش و پرگار مربعی بسازند که مساحت آن معادل با مساحت دایرهٔ مفروضی باشد (باآنکه مستقیلی بسازند که مساحت آن معادل با دایرهٔ مفروض باشد واضح است که تبدیل مستطیل به مربع معادل با آن بسیار آسان است)



مسأله را می‌توان به این طریق مطرح ساخت : به کمک خطکش و پرگار قطعه خطی رسم کنیم که طول آن مساوی محیط دایرهٔ مفروض باشد

حل این مسائل غیر ممکن است . این موضوع در سال ۱۸۸۲ توسط **لیندمن** ریاضیدان مدلل شد درحالی که قبل از آن، قرنها برای حل آنها تلاشهای بیهوده نموده بودند. لیندمن ثابت کرد که اگر حل این مسأله ممکن باشد باید بتوان معادله‌ای با ضرایب منطق پیدا کرد که ریشهٔ آن عدد π باشد و چنین معادله‌ای وجود ندارد ، π عددی است غیر جبری (تراناندان) بنابراین تربیع دایره غیر ممکن است (اما تربیع سهمی به سادگی انجام پذیر است) .

ریاضیدانان کوشش کرده‌اند که اندازهٔ π را پیدا کنند و گاهی بعضی از آنان تصور کرده‌اند که مقدار واقعی آنرا یافته‌اند و در این باره رساله‌هائی به مؤسسه‌های علمی از قبیل آکادمی علوم تسلیم نموده با جدیت از ادعای خود دفاع می کرده‌اند این رساله‌ها که به یادگار باقی مانده‌است حتی قبل از اثبات غیر جبری بودن π مردود شده‌اند .

عده مقدار از π را که از لحاظ خاطرهٔ تاریخی حائز اهمیت است با شرح مختصری در بارهٔ هر یك ذیلا درج میکنیم، این مقادیر ، به سادگی بصورت هندسی مشخص می‌شوند .

۱) $\pi = ۳$ ، حد اعلای خطا $\frac{۱}{۲۰}$ ، ریشهٔ معادلهٔ :

$\pi - ۳ = ۰$

مقداری است که سابقهٔ تاریخی داشته و اکثر ملل زمانهای گذشته که ریاضیات می‌دانسته‌اند آنرا بکار می‌برده‌اند (مردم **بین‌النهرین ، چین و فلسطین**) در **کتاب مقدس** هم از آن ذکری شده است . **بابلیها** مساحت دایره را بر حسب L اندازهٔ محیط آن طبق دستور $S = \frac{L^۲}{۱۲}$ تعیین کرده‌اند و از این دستور برای π مقدار ۳ بدست می‌آید . همان مردم بعدها بطور اتفاقی مقدار π را برابر با $۳ + \frac{۱}{۸} = ۳/۱۲۵$ اختیار نموده‌اند .

۲) $\pi = ۳/۲$ حد اعلای خطا $\frac{۱}{۵۰}$ ، ریشهٔ معادلهٔ :

$۵\pi - ۱۶ = ۰$

توپچی‌ها و بعضی صنعتگران برای اندازهٔ کمان واحد **میلیم** را بکار می‌برند ، یك میلیم اندازهٔ زاویه‌ای است که تحت آن طول یك متر در فاصلهٔ یك کیلومتر دیده می‌شود اندازهٔ دور افق را برابر با ششهزارو چهار صد میلیم می‌دانند و به این ترتیب برای π مقدار ۳/۲ حساب می‌شود . خطای حاصل در اندازه گیری آنان چندان اهمیتی ندارد .

۳) $\pi = \sqrt{۱۰} \neq ۳/۱۶۲۰۰۰$ حد اعلای خطا $\frac{۱}{۱۵۰}$ ، ریشه معادلهٔ $\pi^۲ - ۱۰ = ۰$

در بعضی از مسائل فیزیك $\pi^۲ = ۱۰$ بکار می‌رود و $g = ۱۰۰\pi^۲$ شناخته می‌شود، از لحاظ هندسی $\pi = \sqrt{۱۰}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طولهای دو ضلع دیگرش ۱ و ۳ باشد ، ساختن چنین مثلثی ساده است .

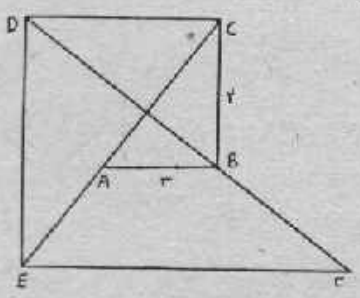
۴) $\pi = (\frac{۴}{۳})^۴ \neq ۳/۱۶۰۵۰۰۰$ حد اعلای خطا $\frac{۱}{۲۰۰}$

معادلهٔ مربوط : $۸۱\pi - ۲۵۶ = ۰$ ،

مصریها مقدار S مساحت دایره را برحسب D طول قطر آن ازدستور زیر حساب می‌کرده‌اند :

$$S=\left(D-\frac{D}{9}\right)^2$$

این دستور بر پایهٔ ساختن مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ قرار گرفته است . چنین مثلثی را برای ساختن زاویهٔ قائمه بکار می‌برده‌اند که هم اکنون نیز در ترسیمهای هندسی مورد استفاده واقع می‌شود ، شرح عمل از این قرار است که از رأس C مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $AB=3$ و $BC=4$ و $AC=5$ است خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا عمود مرسوم از B بر AC را در D قطع کند ، از D موازی با BC رسم می‌کنیم تا امتداد CA را در E تلاقی نماید و از E به موازات AB رسم می‌کنیم که امتداد DB را در F تلاقی می‌کند ، طول قطعه خط EF تقریباً برابر با محیط دایره‌ای است که قطر آن AB باشد .

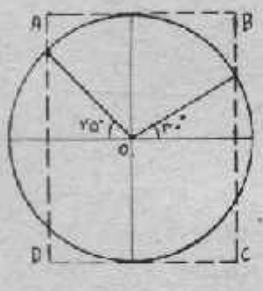


۵) $\pi=\sqrt{3}+\sqrt{2}\approx 3,146\ldots$ ،

حد اعلای خطا $\frac{1}{600}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$\pi^4-10\pi^2+1=0$$

این مقدار از دو نظر قابل اهمیت است : اول اینکه بنابر آن تربیع دایره به سادگی انجام می‌پذیرد و به این ترتیب که مساحت دایرهٔ به مرکز O برابر است با مستطیل ABCD که ضلعهای آن دایره را در دو ترهایی که از O به زاویه‌های ۶۰° و ۹۰° دیده می‌شوند قطع می‌کند ، دیگر اینکه معکوس اندازهٔ π به سادگی نوشته می‌شود :



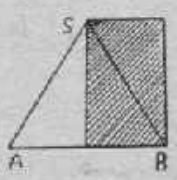
$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

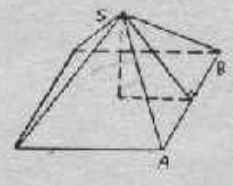
۶) $\pi=\frac{4}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2\sqrt{5}-2}\approx 3,1446\ldots$

حد اعلای خطا : $\frac{1}{1000}$ ، معادله :

$$\pi^4+16\pi^2-256=0$$

(K عدد طلائی است که قبلا در مجلهٔ یکان در بارهٔ آن بحث شده است) . مصریها این عدد را در ساختمان هرم بزرگ خئوپس بکار برده‌اند و شاید هم ندانسته آنرا بکار برده باشند تصور می‌شود آنان عقیده داشته‌اند که وجه‌های جانبی هرم برابر با دو نیمهٔ مستطیل طلائی (مستطیل زیبائی) باشد ، با این ترتیب ارتفاع کامل ساختمان مشخص می‌شود .





یك آرشیتکت پرشور که همه چیز این مقبرهٔ بزرگ مشهور را از نظر علمی می‌نگرد ملاحظه خواهد کرد که محیط قاعدهٔ هرم تقریباً برابر با محیط دایره‌ای است که شعاع آن مساوی ارتفاع هرم باشد ، این تساوی اتفاقی ، عدد π را تقریباً برابر با $\frac{4}{\sqrt{k}}$ تعیین می‌کند ، با این تطبیق ، هرچند که شایسته نیست آنرا تربیع کامل دایره بدانیم ولی وجود آن دلیل بر اطلاعات علمای دربار فراعنه خواهد بود .

۷) $\pi=3,14$ ، حد اعلای خطا $\frac{1}{2000}$ ریشهٔ معادلهٔ

$$50\pi-157=0$$

مقداری است که تا اندازه‌ای دقیق است و در بسیاری اززمانها آنرا می‌شناخته‌اند ، فعلا هم در بیشتر محاسبات عملی مورد استفاده واقع می‌شود .

۸) $\pi=\frac{22}{7}\approx 3,1428$

حد اعلای خطا : $\frac{1}{2500}$ از معادلهٔ $7\pi-22=0$

این مقدار را ارشمیدس می‌شناخته و بکار بردن آن در محاسبات عادی ، اصولی و بسیار سریع است ، حتی ذهنی هم می‌شود عمل کرد و بکار بردن معکوس آن ساده است .

۹) $\pi=20\frac{\sqrt{2}}{9}\approx 3,1426\ldots$ حد اعلای خطا $\frac{1}{3000}$

معادلهٔ مربوط : $81\pi^2-800=0$

از جمله دستورهایی است که مقدار π را بطور دقیق با ارقام کم تعیین می‌کند و بسیار مفید است و هر کسی می‌تواند آنرا بیابد .

۱۰) $\pi=\frac{3^\circ\ 08'\ 30''}{1^\circ}\approx 3,14166\ldots$

حد اعلای خطا : $\frac{۱}{۵۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۱۲۰\pi - ۳۷۷ = ۰$$

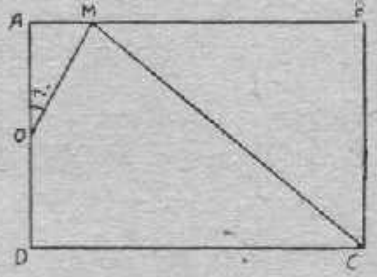
این کمیت عالی که خیلی نزدیك به π است از آن جهت که در دستگاه به مبنای ۶۰ می‌باشد اهمیت بخصوصی دارد و شبیه است به‌آنچه که در بین‌النهرین‌معمول بوده‌است . این عدد،اول دفعه به وسیلهٔ بطلمیوس منجم مشهور بیان شده‌و افتخاری‌برای او است . روشنی و صراحت این عدد‌و حب رصدان و برتری آن از مقادیری است که قبلا برای π بیان شده است .

۱۱) $\pi = \sqrt{\frac{۴۰ - ۶\sqrt{۳}}{۳}} \# ۳/۱۴۱۵۲۰\ldots\ldots$

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۵۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۹\pi^۴ - ۲۴۰\pi^۲ + ۱۴۹۲ = ۰$$

هر چندّ که این دستور خیلی پیچیده است ولی‌درعوض ساختن اندازهٔ هندسی آن خیلی ساده است : در مربع مستطیل ABCD که $AB = ۳$ و $AD = ۲$ از نقطهٔ O وسط AD نیم خطی رسم می‌کنیم که با AD زاویهٔ ۳۰° درجه بسازد و AB را در M قطع کند،طول MC برابر با نصف محیط دایرهٔ‌به قطر AB می‌باشد،خطای این‌برابری ۰/۰۰۲٪ است .



۱۲) $\pi = ۳/۱۴۱۶$ ، حد اعلای خطا $\frac{۱}{۴۰۰۰۰۰}$

معادلهٔ مربوط : $۱۲۵۰\pi - ۳۹۲۷ = ۰$

مهندسینی هستند که دردوران کارشان عدد دیگری را جز این مقدار برای π نمی‌شناسند و این عدد ساده و مشهور را به منظور بهتر کردن کارخانجات خود پذیرفته‌اند، اعتبار صحیح π تا پنج رقم عبارتست از : ۳/۱۴۱۵۹ و ملاحظه می‌شود که عدد بالا با چهار رقم اعشار به اندازهٔ کافی صحیح و اطمینان بخش‌می‌باشد .

هندیها این عدد را در حدود سال ۵۰۰ میلادی می‌شناخته‌اند و آنرا بکارمی‌برده‌اند .

۱۳) $\pi = \frac{۱}{۰/۳۱۸۳۰۹۸} = ۳/۱۴۱۵۹۳۵۰\ldots$

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۴۰۰۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۱۵۹۱۵۴۹\pi - ۵۰۰۰۰۰۰ = ۰$$

هر چند که این عدد برای π صریح نیست ولی برای $\frac{۱}{\pi}$ عدد صریحی است . اگر برای بخاطر سپردن آن وسیله‌ای نبود مقدار چندان جالبی نبود؛ عبارت تاریخی عجیبی برای آن‌بکار می‌برند: «۳روز۱۸۳۰ ، ۸۹ را واژگون ساخته‌اند»

توضیح آنکه در سال ۱۸۳۰ **لوئی فیلیپ** به سلطنت فرانسه رسید و نتیجهٔ این سلطنت آثار انقلاب ۱۷۸۹ را از بین برد . لوئی فیلیپ‌بعد از خلع سلطنت و تبعید مثل یك‌معلم ریاضی کسب معاش می‌کرد .

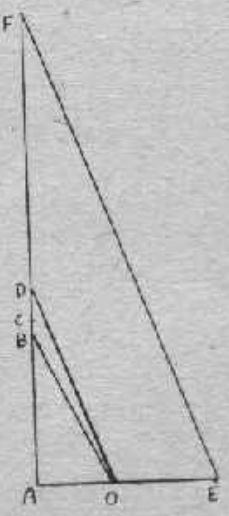
۱۴) $\pi = \frac{۱۳}{۵۰}\sqrt{۱۴۶} \# ۳/۱۴۱۵۹۱۹۵\ldots$ ،

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۴۵۰۰۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۱۲۵۰\pi^۲ - ۱۲۳۳۷ = ۰$$

تا حدی متداول است و ازنظرهندسی قشنگ ولی‌پیچیده می‌باشد : هر چه باشد به ترتیب زیر ساخته می‌شود:

روی یك‌ضلع‌زاویهٔ‌قائمهٔ A ، طول $AO = \frac{۱}{۲}$ طول و روی ضلع دیگرطولهای $AB = ۱$ و $BC = ۰/۱$ و $CD = ۰/۲$ را جدا می‌کنیم ، در امتداد AO طول $AE = OC$ را جدا کرده‌واز E موازی با OD می‌کشیم تا AB رادر F قطع کند . طول AF یاحد اکثر خطای بالا برابر با π است .



۱۵) $\pi = \frac{۵}{۴} + \frac{\sqrt{۲۲۹}}{۸} \# ۳/۱۴۱۵۹۳۲\ldots$

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۵۰۰۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۶۴\pi^۲ - ۱۶۰\pi - ۱۲۹ = ۰$$

ترسیم هندسی آن بسیار آسان‌است زیرا : $۲^۲ + ۱۵^۲ = ۲۲۹$

۱۶) $\pi = \frac{۳۵۵}{۱۱۳} \# ۳/۱۴۱۵۹۲۹\ldots$

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ ، معادلهٔ مربوط :

$$۱۱۳\pi - ۳۵۵ = ۰$$

آدرین متیوس خوش شانس این کسر عجیب را کشف کرد. در یك محاسبهٔ طولانی مربوط به چند ضلعیها دو عدد را بدست آورد که π محصور بین آنها بود، وی واسطهٔ عددی این دو عدد را برای π انتخاب کرد. این نتیجه از دو جهت قابل اهمیت است: اول آنکه می‌توانیم π را با ۶ رقم‌ساده بنویسیم، دیگر آنکه مقدار آن تصادفاً دقیق است. دو جملهٔ کسری که π یا معکوس آنرا مشخص‌می‌کند از عدد ۱۱۳۳۵۵ نتیجه می‌شوند و یادگرفتن این عدد که از اولین سه رقم فرد متوالی ساخته شده است بسیار آسان است.

$\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ مانند $\frac{۲۲}{۷}$ یکی از مقادیر تقریبی π است. نظیر هر عدد x یك رشته اعداد صحیح a و b و c و . . . وجود دارد که به‌صورت کسرهایی که مقادیرشان رفته رفته به x نزدیك‌می‌شود بکار می‌روند. برای بعضی از اعداد مانند $\sqrt{۲}$ k و یا e قاعدهٔ ساده‌ای وجود دارد که بنا بر آن یافتن این رشته اعداد بسادگی انجام می‌گیرد، ولی برای π چنین نیست. با وجود این کاوشهایی که از روی اسلوب صحیح انجام گرفته شانس پیدایش مقدار تقریبی نزدیك به π را بوجود آورده‌است. بالاخره کسر مسلسل به‌صورت زیر:

$$\pi = ۳ + \cfrac{۱}{۷ + \cfrac{۱}{۱۵ + \cfrac{۱}{۲۹۲ + \cdots}}}$$

با در نظر گرفتن عملیات جمع و تقسیم ابتدا از آخر و با توجه به اینکه هر دفعه فقط یك طبقه‌ای را اختیار کنیم رشته اعداد زیر را خواهیم داشت.

$$۳ \cdot \frac{۲۲}{۷} \cdot \frac{۳۳۳}{۱۰۶} \cdot \frac{۳۵۵}{۱۱۳} \cdot \frac{۱۰۳۹۹۳}{۳۳۱۰۲} \cdot \ldots$$

مورد استعمال عدد متیوس در محاسبهٔ اتصال چرخهای دندانه دار است. مثلا در حرکت قلابها احتیاج به شناختن مقداردقیق π امابه‌صورت کسری‌می‌باشدتا بتوان تعداددندانه‌های چرخ را دقیقاً معلوم کرد.

$$\pi = \frac{۱۶۷}{۸۰} + \frac{\sqrt{۱۰}}{۳} \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۵۵۳۴ \ldots \quad (۱۷$$

حد اعلای خطا $\frac{۱}{۳۵۰۰۰۰۰۰۰}$، معادلهٔ مربوط:

$$\pi^۲ - ۲۴۰۴۸۵\pi + ۱۸۷۰۰۱ = ۰ \quad \text{و} \quad ۵۷۶۰$$

این عدد نسبتاً ساده است و از عدد اعشاری هزار رقمی که در زیر چاپ شده است بهتر است. هرگاه عملیات سادهٔ هندسی آن را بشناسیم بسیار قابل توجه خواهد بود اما آنچه که تا کنون امتحان شده است پیچیده می‌باشد.

در جدول زیر مقدار π تا هزار رقم اعشار نوشته شده است این عدد در سال ۱۹۴۹ به کمك ماشین الکترونیك در دستگاه به مبنای ۲ در آمریکا محاسبه گردید. برای‌جلوگیری از اشتباه عین جدول از کتاب اصلی کلیشه شد. موضوع قابل توجه آنکه مقدار π که بوسیلهٔ **شانکس** (Shanks) درقرن هفدهم‌حساب‌شده ودرکتیبهٔ دور ایوان **کاخ اکتشافات پاریس** منقوش است از رقم پانصد وبیست و هشتم به بعد اشتباه‌می‌باشد.

3.14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989

تعیین مقادیر تقریبی ریشه های اصم

معادلهٔ درجهٔ دوم

ترجمهٔ : **علی اصغر شیعه بیگی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی

باطریقه‌ای که دررزیر بیان می‌شود می‌توان مقادیر ریشه‌های حقیقی هرمعادلهٔ درجهٔ دوم به صورت کامل :

(۱) $ax^2+bx+c=0$

را با هر تقریب دلخواه معین کرد . معادلهٔ (۱) معادل بادستگاه زیراست .

$$\begin{cases} axy+by+c=0 \\ x=y \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌شود :

(۲) $y=\dfrac{-c}{ax+b}$

عدد دلخواهی مانند x_1 برای x درنظر گرفته ازمعادلهٔ (۲) مقدار y نظیرآن را بدست می‌آوریم فرض کنیم برابر با y_1 باشد . اکنون x را برابربا y_1 اختیار نموده و از معادلهٔ (۲) مقدارنظیرآن، y_2 را حساب می کنیم وبعد دراداء $x=y_2$ مقدار y_3 را تعیین می‌کنیم و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تادومقداری که برای x و y حاصل می‌شود با یکدیگر برابرباشند (یالااقل با تقریب مناسبی مساوی هم باشند) ، در این‌صورت جوابی ازدستگاه (۲) یا یك جواب 'x ازمعادلهٔ (۱) بدست می‌آید. برای‌تعیین ریشهٔ دیگر معادلهٔ (۱) آنرا بصورت دستگاه زیر نمایش می‌دهیم .

$$\begin{cases} axy+bx+c=0 \\ x=y \end{cases}$$

از معادلهٔ اول این دستگاه نتیجه خواهد شد .

(۳) $y=-\dfrac{bx+c}{ax}$

وهمانطورکه برای‌معادلهٔ (۲) عمل کردیم‌نسبت بمعادلهٔ(۳) عمل کرده ریشهٔ دیگرمعادلهٔ (۱) یعنی "x را تعیین می کنیم

تبصرهٔ ۱ـ مقدار x_1 را که درمعادلهٔ (۲) منظورمی کنیم نباید برابربا $-\dfrac{b}{a}$ باشد و نسبت به معادلهٔ (۳) این مقدار باید مخالف باصفرباشد .

تبصرهٔ ۲ـ ازمعادلهٔ (۲) همیشه ریشه‌ای ازمعادلهٔ (۱) بدست می‌آیدکه ازلحاظ قدر مطلق کوچکتر است ازریشهٔ دیگر که ازمعادلهٔ (۳) حاصل می‌شود.

مثال ـ تعیین ریشه‌های معادلهٔ زیرتا ۰/۰۱ تقریب

(۱) $x^2+6x-14=0$

$$\begin{cases} xy+6y-14=0 \\ x=y \end{cases}$$

(۲) $y=\dfrac{14}{x+6}$ یا

اولین مقدار x یعنی x_1 را برابر با ۴ـ اختیار می کنیم و

$x_1=-4$ و $y_1=7$ ، $x_2=7$ و $y_2=1/08$

$x_3=1/08$ و $y_3=1/98$ ،

$x_4=1/98$ و $y_4=1/75$

$x_5=1/75$ و $y_5=1/806$

$x_6=1/806$ و $y_7=1/794$

$x_7=1/794$ و $y_7=1/796$

پس $1/794<x'<1/796$ ومقدار 'x تا ۰/۰۱ تقریب برابراست با $x'\neq 1/79$

برای تعیین "x چنین عمل می کنیم :

$$\begin{cases} xy+6x-14=0 \\ x=y \end{cases}$$

(۳) $y=\dfrac{14}{x}-6$ یا

$x_1=7$ و $y_1=-4$ ، $x_2=-4$ و $y_2=-9/5$

$x_3=-9/5$ و $y_3=-7/47$

$x_4=-7/47$ و $y_4=-7/87$

$x_5=-7/87$ و $y_5=-7/779$

$x_6=-7/779$ و $y_6=-7/795$

$x_7=-7/795$ و $y_7=-7/796$

$-7/796<x''<-7/795 \Rightarrow x''\#-7/79$

حالات ناقص ـ در حالت $c=0$ یعنی برای معادلهٔ به صورت $ax^2+bx=0$ روش فوق‌الذکر قابل اعمال است اما درحالت $b=0$ یعنی برای معادلهٔ به صورت :

$$ax^2+c=0$$

این روش قابل اعمال نیست .

**
*

(((سال صفر)))

در شمارهٔ ۱۷ آن مجله درمقالهٔ تحت عنوان « صفر » نویسنده درصفحهٔ ۱۱ ضمن استدلال واستشهاد به قول **کیلجوی** متذکر شده‌اند که در تاریخ سال صفر وجود ندارد وبرای تأیید این منظور مقایسه‌ای بین اعداد میزان الحراره و سال تاریخی کرده‌اند . در صورتی که این مقایسه به طرزی که ایشان جدول بسته‌اند صحیح نیست و اشتباهی که در محاسبات جبری بین سال‌های قبل و بعداز میلاد ایجادمی‌شود . ناشی از اصطلاح خاصی است که در مورد ایام و سالها بکار می‌رود که ذیلا توضیح می‌دهد :

اصولا تاریخ که دارای یك مبدأ است عیناً مانند یك میزان‌الحراره یك کمیت متصل و طولی است و اعداد معینهٔ آن نشان دهندهٔ نقاط خاصی از طول آن بشمار می‌رود و فواصل بین این نقاط و اجزاء آن واحدها هستند . به این بیان که مثلا درجهٔ صفر ، هم درمیزان‌الحراره و هم در سال تاریخی نشان دهندهٔ یك فاصله نیست بلکه مبین یك نقطه است و اگر اندکی ازآن نقطه تزاید و یا نقصانی حاصل شود درجهٔ صفر بر آن اطلاق نمی‌شود . این مطلب عیناً درمورد سایر کمیات متصل مثل خط و زاویه وغیره اطلاق نمی‌شود . بنابراین همچنانکه در مورد زاویه نمی‌توان صفر را به عنوان یك درجه یعنی ۳۶۰ دقیقه به حساب آورد درمورد سال هم نبایستی انتظار داشت سالی به طول ۳۶۵ روز به عنوان سال صفر نامگذاری شود ! منتها همانطورکه متذکر شدیم این اشتباه ناشی از اصطلاح خاصی است که درمورد سال (فقط در مورد سال) بکار می‌رود. درسایر کمیات متصل مثلا زاویه ، یك زاویهٔ معین را اینطور نمایش می‌دهیم "۳۸ و '۲۷ و °۴۸ و این مقدار نشان می‌دهد که زاویهٔ مفروض از مبدأ صفر به اندازهٔ ۴۸ درجه و ۲۷ دقیقه و ۳۸ ثانیه فاصله دارد. ولی درمورد سال که می‌نویسیم (یامی گوئیم) ۱۳۴۴/۵/۲۸ مراد این است که از مبدأ سال ۱۳۴۳ سال و و ۴ ماه و ۲۷ روز و اندی گذشته است و اکنون وارد بیست و هشتمین روز آن شده‌ایم . با توجه به این مطلب بایستی در محاسبات جبری این نکته را رعایت کرد و در این صورت هیچ اشکالی در محاسبه ایجاد نخواهد شد . مثلا اگر مسئله را این طور عنوان کنیم که کودکی ۵ سال قبل از میلاد به دنیاآمده و اکنون ۸ سال دارد ، چند سال از میلاد گذشته است؟ مسلماً جواب $8+(-5)=3$ قابل قبول است .

جالب این‌است که مثالی‌راکه نویسنده درمورددوهزارمین سال تولد **ویرجیل** ضمن نقل نظریهٔ کیلجوی متذکر شدند کاملا این موضوع را تأیید می‌کند . زیرا مراد ازدوهزارمین سال یعنی ساعتی که ۱۹۹۹ سال از تولد شاعر گذشته و ازآن بعد دوهزارمین سال آغاز می‌گردد و بنابراین بایستی به روز تولد شاعر ۱۹۹۹ سال افزود یا با رعایت اصطلاح خاص سال وروز وماه عدد ۲۰۰۰ را بیفزائیم روز مطلوب بدست خواهدآمد .

یعنی اگر دوهزارمین سال را بخواهیم (توجه کنید از نوع اصطلاح سال است ومراد نقطهٔ ۲۰۰۰ نیست) کافی است که بارعایت اصطلاح سال ، ۲۰۰۰ رادرعمل بحساب آوریم وبنابر این عملیات جبری عیناً درمورد تاریخ صدق می‌کند .

غلامحسین باقرزاده ـ دانشجوی دانشکدهٔ علوم مشهد
۴۴/۷/۲۴

چگونه مسأله‌ای را حل کنیم؟

تألیف : G. POLYA

ترجمهٔ : ه شریف زاده

-۳-

ـ خوب ، چطور شد ؟ مسألهٔ دومی را حل کردی؟

ـ بد نشد ! همهٔ سؤالات را جواب دادم ، مسألهٔ دومی را حل کردم ولی مطمئن نیستم که درست باشد !

این گفتگویی است بین دو دانش‌آموز ضمن خروج از جلسهٔ امتحان : او به تمام سؤالات پاسخ داده است، مسألهٔ دوم را هم حل کرده است ولی به درستی آن یقین ندارد . چرا ؟ چرا او اطمینان ندارد که راه انتخابی وی برای حل مسأله ، صحیح است یا نه؟

می‌دانید چرا ؟ برای اینکه او به درستی، مفهوم مسأله را درك نکرده است ! می گوئید نه ! ؟ ازوی بپرسید که آیا می‌تواند مسأله را توضیح دهد؟

راستی ، شما که به نام یك دانش آموز در جلسهٔ امتحان شرکت می‌کنید و در حل مسائل درمی‌مانید ، آیا درس را حقیقتاً ، خوب فرا گرفته‌اید؟

وشما که به نام یك معلم برای امتحان دانش‌آموزان مسأله‌ای طرح می‌کنید ، اطمینان دارید که مسألهٔ شما منطبق با واقعیت است ؟

* * *

در پایان مقالهٔ مندرج در یکان شمارهٔ گذشته سه مسأله از مسائل امتحانات نهایی را نقل کردیم؛ اولین مسأله ازاین قرار بود : شعاع قاعدهٔ مخروطی ۱۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۷۵ سانتیمتر و مولدش ۹۰ سانتیمتر می‌باشد . سطح جانبی و حجم آنرا حساب کنید .

ارتفاع ، شعاع قاعده و مولد مخروط ، یك مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند ومی‌دانیم بین اندازه های اضلاع هر مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ فیثاغورث برقرار است،اما در این مسأله داریم :

$$۷۵^۲+۱۰^۲=۵۶۲۵+۱۰۰=۵۷۲۵\neq ۹۰^۲$$

طرح مسأله غلط است؛ یکی‌ازمفروضات آن اضافی‌است وبرخلاف واقع است.آیا شما به این نکته توجه‌کرده بودید ؟

مسألهٔ دوم چنین بود : محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی۲۷ متر و ارتفاعش ۱۲ متر است . مساحت آنرا پیدا کنید .

طول ضلع این مثلث ۹ متر است وبنابررابطهٔ فیثاغورث طول ارتفاع آن عبارت خواهد شد از

$$h^۲=۹^۲-۴/۵^۲=۸۱-۲۰/۲۵=۶۰/۷۵ \quad \text{و} \quad h\neq ۷/۷۹$$

طرح این‌مسأله هم غلط است : نه‌تنها یکی ازمفروضات آن اضافی است بلکه برخلاف واقع هم داده شده است .

درمسألهٔ سوم داشتیم : زمینی است به شکل مثلث ABC به فرض آنکه گوشهٔ $B=۲۵^\circ$ و ضلع روبروی‌آن ۱۲ متر و گوشهٔ $C=۶۵^\circ$ و ضلع روبروی‌آن ۱۶ متر باشد ، مثلث را رسم ومساحت و محیط آنرا حساب کنید .

اندازهٔ زاویهٔ A از مثلث برابر می‌شود با

$$۱۸۰-(۲۵+۶۵)=۱۸۰-۹۰=۹۰^\circ$$

ضلع AB را به اندازهٔ ۱۶ متر رسم می‌کنیم ، در A عمودی برآن اخراج می‌کنیم و در B خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ ۲۵° بسازد این خط ، عمود مرسوم در A را در یك نقطهٔ C قطع می‌کند ، مثلث ABC ساخته شده است

درحالی که به استفادهٔ از مفروض ۱۲ هیچ احتیاجی نشده‌است وانگهی آیادر این مثلث که ساخته شد طول AC برابر ۱۲ متر هست یانه؟ چنین نیست . زیرا داریم

$$AC = AB \cdot tg25^\circ = 16 \times 0{,}4142 = 6{,}6272$$

وبرابر با ۱۲ نیست . اگر شما در کنکوری که این مسأله یکی از سؤالات آن است شرکت داشتید وبه‌این نکته یعنی غلط‌بودن طرح مسأله پی‌می‌بردید چه می‌کردید؟

مقالهٔ زیر دنبالهٔ ترجمهٔ کتاب است اما مقاله‌ای است مستقل و تقریباً به مقالات قبلی یا بعدی ارتباطی ندارد . با وجود این بهتراست که همهٔ مقالات را به طور مرتب مطالعه کنید .

* * *
* *
*

مسألهٔ ترسیمی - می‌خواهیم دریك مثلث معلوم مربعی چنان محاط کنیم که دو رأس آن منطبق بر قاعدهٔ مثلث وهریك از دورأس‌دیگرش بریکی ازدو ضلع مثلث قرارگیرد .

«مجهول چیست»

یك مربع

معلومات کدامند؟

ـ یك مثلث ، فقط همین

چه شرطی وجود دارد ؟

ـ چهاگوشهٔ مربع باید روی‌محیط مثلث قرارگیرد: دو گوشه ، روی قاعده ودو گوشهٔ دیگر که مجاور یکدیگرند روی دو ضلع دیگر .

آیا ممکن است به همین شرط قناعت کرد ؟

ـ فکر می‌کنم که این‌طور باشد ، ولی مطمئن نیستم .

با این‌وضع، شما نمی‌توانید راه حل مسأله را به‌سادگی پیدا کنید . اگر نمی‌توانید مسأله‌ای را که برای شما طرح کرده‌اند ، حل کنید ، ابتدا سعی کنید مسأله‌ای از همین نوع حل کنید. آیا می‌توانید به یك قسمت ازشرط قناعت کنید ؟

ـ منظورتان از یك قسمت از شرط چیست؟

ـ ببینید ، شرط برای تمام رؤس مربع بیان شده‌است . یك مربع چند رأس دارد؟

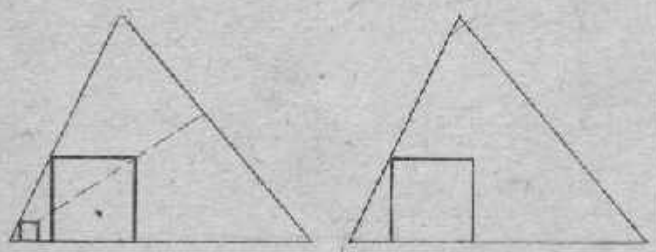
ـ چهارتا .

یك قسمت ازشرط برای کمتر ازچهار رأس بیان‌می‌شود. بیش از یك قسمت از شرط را حفظ نکنید ودرعین حال قسمت دیگررا فراموش نکنید. به‌کدام قسمت ازشرط اگر قناعت کنیم ساده‌تر خواهد بود ؟

ـ رسم مربعی که دو رأس آن برمحیط مثلث است خیلی ساده است. حتی مربعی که سه رأس آن بر محیط مثلث واقع است ساده می‌باشد.

«شکلی‌مناسب رسم کنید».

دانش‌آموز شکل (۱) را رسم می‌کند



(شکل ۱) (شکل ۲)

« شما بیش از یك قسمت از شرط را حفظ نکردید ، ولی قسمت دیگر را فراموش کردید . بالاخره مجهول در حدود چه اندازه‌ای تعیین می‌شود ؟ »

ـ اگر سه رأس مربع برمحیط مثلث منطبق نباشد ، مربع مشخص نخواهد شد.

بسیار خوب . یك شکل دیگر رسم کنید .

دانش آموز در شکل (۱) مربع دیگری رسم می‌کند (شکل ۲)

« همانطوری که گفتید ، با قسمتی از شرط ، که آن را حفظ کرده‌اید، مربع مشخص نخواهد شد. چگونه می‌توان آن را تغییرداد؟

ـ . . . . .

سه‌رأس ازمربع‌شماروی محیط‌مثلث است، ولی‌رأس‌چهارم هنوز بر محیط‌مثلث‌منطبق نشده‌است‌همانطور که گفتیدمربع‌مطلوب هنوزمشخص نشده‌است برای‌اینکه‌رأس‌چهارم‌را پیدا کنیم، مربعهای دیگری‌رسم‌می‌کنیم. رأس‌چهارم این‌مربعها چگونه‌تغییرمی‌کند ؟

ـ . . . . .

اگر مایل باشید ، سعی کنید بطور تجربی آن را بدست آورید . درهمین شکلی که تاکنون دو مربع درآن کشیده‌اید ، یك مربع دیگر هم به همان طریق رسم کنید . همینطور چند مربع دیگر چه کوچك وچه‌بزرگ، رسم کنید. مکان رأس‌چهارم این مربعها چگونه بنظر می‌رسد ؟ و این مکان چگونه ممکن

است تغییر کند؟»

معلم درطرح ریزی یك نقشه ، چندان کمکی به شاگرد نمی‌کند. اگر شاگرد موفق شود که مکان رأس چهارم مربع را که بریك خط راست واقع است ، پیدا کند ، مسأله حل شده است .

* * *

ممکن است بعضی از خوانندگان نکته سنج مجلهٔ یکان ایراد کنند که روش تجربی دور از شأن هندسه است . در واقع همینطور است ؛ هندسه علم استدلال است . ماهم درمثال بالا ، مسأله را به طریق تجربی حل نکردیم، بلکه به طریق تجربی راه استدلال را پیدا کردیم

رسم شکل دقیق و تمیز است که ما را به سرعت به راه حل نزدیك می‌کند .

سؤال وجوابی نظیر آنچه دربالا ذکر کردیم، دانش‌آموز را موفق می‌سازد که مسألهٔ ممتاز زیر را حل یا لااقل به حل آن نزدیك کند :

در یك چهار ضلعی غیرمشخص ، متوازی‌الاضلاعی چنان محاط کنید که رؤس آن بر اضلاع یا امتداد اضلاع چهار ضلعی واقع باشند .

در شمارهٔ بعد طرح و حل مسألهٔ دیگری را بررسی خواهیم کرد .

***

بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

در یك گردش پیشاهنگی ، رسدبان یك رسد شش نفر از پیشاهنگان رسد را مأمور کرد تا شاخه هیزمهایی به طول ۵۰ سانتیمتر را فراهم‌آورند . او این پیشاهنگان را به سه دستهٔ دو نفری تقسیم کرد و یکی از افراد هر دسته را مسئول آن دسته معرفی کرد . مسئولین عبارت بودند از : پرویز ، هوشنگ و فرهاد.

پرویز و کامبیز چوبهای با ضخامت متوسط و به طول ۲ متر را جمع‌آوری کردند، هوشنك و منوچهر چوبهایی با ضخامت بیشتر و به طول ۱/۵ متر ، فرهاد و فریدون چوبهای ضخیمتر و به طول یك متر .

درپایان‌کار ، رسدبان، این شش نفر : آرامش خواه ، بت ساز ،کیهان‌پیما و سه نفر مسئولین آنهارا ، در حضور تمام افراد رسد تشویق کرد و اعلام نمود که : زرپرور و آرامش خواه روبهم ۲۶ قطعه ،کوچك نیا و بت ساز ۲۷ قطعه ، کامرانی وکیهان پیما ۲۸ قطعه چوبهای ۵۰ سانتیمتری را فراهم‌آورده‌اند .

بی‌آنکه عصبانی شوید نام و نام فامیل هریك از شش پیشاهنك را مشخص‌کنید .

پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مندرج در شمارهٔ قبل

مأمور پست در ساعت معمول از ادارهٔ پست حرکت کرده است و به علت اینکه تمام مسافت بین ادارهٔ پست و فرودگاه را نپیموده است ۲۰ دقیقه زودتر از معمول به ادارهٔ پست مراجعت کرده است . بنابراین این ۲۰ دقیقه زمانی است که مأمور فاصلهٔ رفت و برگشت از محل ملاقات با موتورسیکلت سوار تا فرودگاه را می‌پیموده است پس فاصلهٔ از محل‌ملاقات تا فرودگاه را فقط در ۱۰ دقیقه طی‌می کرده است وچون موتورسیکلت سوارهم این‌فاصله را در ۳۰ دقیقه پیموده است بنابراین ، هواپیما ۴۰ دقیقه (۳۰+۱۰) زودتر ازوقت مقرر به فرودگاه رسیده است .

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des problèmes élémentaires de géométrie

تألیف : E. J. Honnet چاپ هفتم . پاریس : ۱۹۶۳ - ترجمهٔ : ع. م.

-۲-

بخش یکم

چگونگی تعیین راه حل یك مسئله

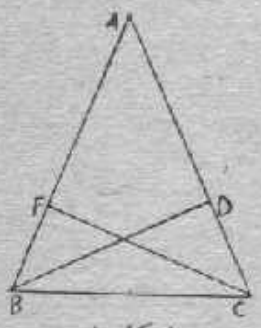
جستجو برای راه حل یك مسئله وقتی مفید فایده خواهد بود که با نظم و شیوهٔ صحیح همراه باشد . ملاحظهٔ دستورات و نمایحی که ذیلا گفته خواهد شد ترتیب و نظمی را که برای یك چنین جستجویی لازم است آشکار خواهد ساخت : این ترتیب و نظم وقتی که با تسلط کامل بر متن درس توأم باشد به نحو بارزی کوشش برای جستجوی راه حل مسئله را آسان ساخته و به ثمر رساندن آنرا سهل الوصول می‌سازد .

تهیهٔ راه حل

۱ ـ شناسائی فرض وحکم ـ قبل ازشروع به هر نوع جستجویی ، صورت مسئله را به دقت بخوانید ، تا کاملا بفهمید که چه مفروضاتی وجود دارد وچه چیز باید بدست آید ؛ می‌کنید تشخیص دهید آیا فرض وحکم به‌خواص توصیفی اشکال مربوط می‌شود یا به خواص متری آنها ، آیا معلومات و بدست آوردن جواب ، یك مسئلهٔ محاسبه‌ای را ایجاب می‌کند ؟

فرض و حکم که شناخته شدند مناسبتر آن خواهد بود تا بصورت کاملا واضحی بیان شوند؛ برای این کار روشهای مختلف می‌توان بکاربرد به‌قسمی که فرض وحکم مربوط به‌موضوع مجزا از یکدیگر نشان داده شوند . مثلا به وسیلهٔ خطوط قائم ، یا خط کشیدن زیر آنها درصورت مسئله ، یك خط برای فرض ودوخط برای حکم ؛ اما گاهی ناگزیر خواهیم بود که فرض وحکم را بصورت کاملا مفید و مختصر چنان بنویسیم که به‌صورت مسئله یك شکل ریاضی بدهد .

راه حل اخیر ، برای مواقعی که امکان داشته باشد ، به بیان ریاضی مفروضات وجواب ، معمولا به صورت بعضی تساویها ، منجر خواهد شد. آنچه که ازلحاظ ایجاز ، ساده‌تر ازیك عبارت ، قابل استفاده می‌باشد .



(شکل۷)

مثال۱ـ در مثلث متساوی‌ـ الساقین ، ارتفاعات وارد بردوساق با یکدیگر برابرند.اولین فرض : ABC متساوی الساقین است به‌جای اینکه بنویسیم : «مثلث ABC متساوی الساقین است » ، چنین می‌ـ نویسیم .

$AB=AC$ و $ABC=ACB$ز

دومین فرض : BD و CF ارتفاعات مثلث هستند که چنین می‌نویسیم :

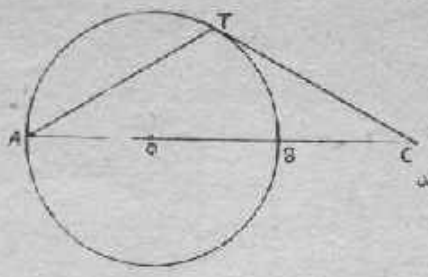
$D=۹۰^\circ$ز و $F=۹۰^\circ$ز

حکم : $BD=CF$

مثال۲ ـ قطر AB ازدایرهٔ O رابه‌اندازهٔ طول BC مساوی باشعاع امتداد می‌دهیم ؛ ازنقطهٔ C مماس CT را بر دایره رسم کرده‌و T رابه A وصل می‌کنیم . ثابت کنید که مثلث ATC متساوی الساقین است .

ابتدا چنین می‌نویسیم :

$BC=R$



(شکل ۸)

وبااینکه :

$AB = OC = 2R$

به‌جای نوشتن : CT، مماس است، بهتر خواهد بود که بنویسیم :

$OTC = 90°$ ز

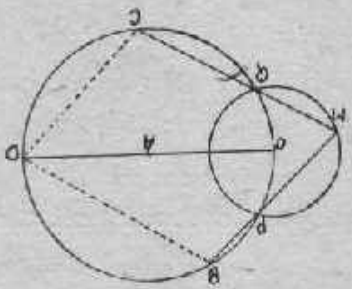
وحکم را چنین می‌نویسیم :

$AT = TC$ یا $A = C$ ز

II ـ رسم شکل دقیق ـ شکل باید به اندازهٔ کافی با دقت رسم شود . اگر در صورت مسئله گفته شده است « مثلث متساوی الساقین » باید مثلثی رسم کرد که در آن دوضلع دقیقاً باهم برابر باشند ، اگر مثلث قائم‌الزاویه است ، دوضلع آن به طور دقیق بریکدیگر عمود باشند . روی یك شکل دقیق آسانتر می‌شود استدلال کرد تا روی یك شکل غیردقیق ، زیرا فکر از اشتغال به تصحیح نادرستی های شکل بر کنار است . ترجیح خواهد داشت اگر رسم شکل ، به‌جای دست با کمك خط‌کش و پرکار انجام گیرد .

علاوه بر آن ، شکل‌دقیق، روابط بین اجزاء ، اوضاع نسبی خطوط وزوایا راآشکار می‌سازد : راهنمایی خواهد بود برای استدلالی که باید انجام گیرد ؛ حتی برای هر نقطه‌ای ، معلوم می‌شود که چه چیزرا می‌توان وباید ثابت کرد .

مثال ـ دایرهٔ O ویك نقطهٔ A داده شده است بمرکز A وبه‌شعاع AO دایره‌ای رسم می کنیم که امتداد OA رادر D قطع می‌کند . ازیك نقطهٔ M واقع بردایرهٔ O به P و Q نقاط تلاقی دودایره وصل می کنیم که این خطوط دایرهٔ A رادر B وC تلاقی می کنند. ثابت کنید که $MB = DC$.



(شکل ۹)

با رسم یك شکل دقیق بلافاصله معلوم خواهدشد که خطوط MB و CD متوازی هستند و MC و BD. نیز همین وضع را خواهند داشت . ازآنجا راهنمایی خواهیم شد که ثابت کنیم چهار ضلعی MCDB متوازی‌الاضلاع است .

بعداً . هنگام گفتگو ازمسائل مکان هندسی اهمیت این توصیه را (رسم شکل دقیق) بیشتردرك خواهیم کرد .

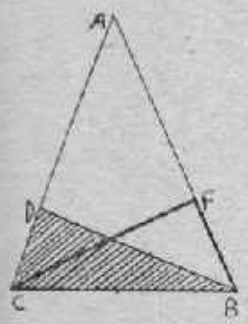
درپایان اضافه می کنیم مناسبتر آن است که تاآنجا که امکان داشته باشد شکل بزرگ رسم شود :روی یك شکل خیلی کوچك ، خطوط در هم و برهم بوده و شکل وضوح و صراحت لازم راندارد .

III ـ نمایش فرض روی شکل ـ فرض و حکم مشخص شده وهریك را به شکلی کاملاساده وقابل استفاده نوشته و شکل دقیق را رسم کرده‌ایم : اکنون مناسب است که روابط فرض را روی شکل پیاده کنیم . مخصوصاً روابطی راکه حاکی از بعضی از تساویها است . همچنانکه درمتن درس هندسه هم معمول است، اجزاء متساوی از اضلاع یا زوایا را با یك‌علامت نشان می کنیم . به همان نسبت که استدلال ادامه دارد روابط جدیدی ظاهر می‌شود که آنها را نیز روی شکل پیاده می کنیم

توجه داشته باشیم که این موضوع مارا ازنوشتن فرض معاف نمی کند، زیرا همهٔ روابط را نمی‌توان روی شکل نشان داد، مثلا روابط مربوط به بعضی تساویها، روابط مربوط به ـ متوازی بودن یا متعامد بودن خطوط وغیره .

برای ظاهرساختن بعضی روابط مثلا تساوی ، تعادل ، تشابه ویا محاسبهٔ مساحت ویا برقراری بعضی روابط روی‌شکل بعضی خطوط را پررنگتررسم می کنیم یااینکه ازخطوط هاشور استفاده کنیم و یا در صورت لزوم رنگهای مختلف را به‌کار می‌بریم .

مثال ۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین ، ارتفاعات واردبر دو ساق‌متساویند. برای حل این مسئله باید ثابت کنیم که مثلثهای BCF و BCD

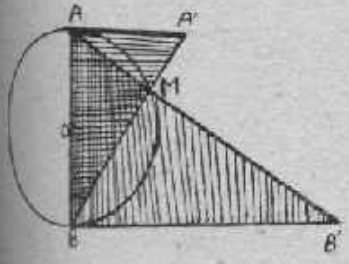


(شکل ۱۰)

متساوی هستند. برای اینکه این دو مثلث را که‌قسمتی ازآنهامشترك است روی شکل مشخص کنیم محیط یکی را با خطوط سیاهتر وسطح دیگررا با خطوط هاشور می‌پوشانیم .

مثال ۲ـ دردایرهٔ O قطر AB ومماسهای نقاط A و B را رسم می کنیم . یك نقطهٔ M واقع بر دایره درنظر گرفته خطوط AM و BM را رسم می کنیم که مماسها را به ترتیب در A' و B' قطع می کنند . ثابت کنید که :

$AA' \cdot BB' = \overline{AB}^2$



(شکل ۱۱)

برای حل این‌مسئله باید ثابت کرد که مثلثهای ABA' و ABB' متشابه هستند برای‌اینکه این‌موضوع را روی شکل نشان دهیم سطح یکی از

مثلثهارا با خطوط‌هاشور افقی واز دیگری رابا خطوط هاشور قائم می‌پوشانیم .

بعداً به هنگام گفتگو از مسائل مربوط به محاسبهٔ مساحات ؛ مثالهای مفصلتری از استعمال موضوع فوق‌الذکر بیان خواهیم کرد .

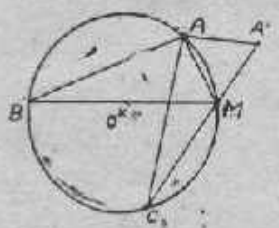
فراهم شدن راه حل

I- جلوی شکل بیکار ننشینید

اغلب ، شکل، آنچنانکه درصورت مسأله بیان شده است برای نتیجه گرفتن جواب غیرکافی است : لازم است که خطوط جدیدی رسم کرد که روابط جدیدی را ظاهر بسازند .

این خطوط جدید باید چنان رسم شوند که اجزاء معلوم شکل را به هم نزدیکتر سازند؛ مثلا خطوط موازی یا عمود بر خطوط مفروض رسم می‌کنیم ، یا اینکه بعضی خطوط را به اندازهٔ مفروضی امتداد می‌دهیم به قسمی که مجموع معلوم یا محتوی درصورت مسأله درشکل داخل شود .

مثال ۱ـ دایرهٔ مفروض O را به وسیلهٔ نقاط A و B و C به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و بر آن و بین A و C نقطه‌ای مانند M انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که طول وتر AB برابر است با مجموع طولهای دو وتر MA و MC

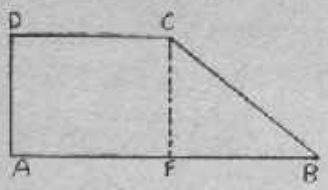


(شکل ۱۲)

با قراردادن دووتر MA و MC درامتداد یکدیگر آنها را بهم نزدیک می‌سازیم بی‌مجموع این دووتر را (که درصورت مسأله ذکر شده است) درشکل وارد می‌کنیم . آن وقت با رسم AC و AA' و BM مثلث A'AC به وجود می‌آید وکافی است که ثابت کنیم این مثلث باشکل BAM برابر است

مثال ۲ـ در یک ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ بزرگتر $AB=۸۰^{cm}$ و قاعدهٔ کوچکتر $CD=۴۰^{cm}$ و ساقها $BC=۵۰^{cm}$ و $DA=۳۰^{cm}$ است . ثابت کنید که این ذوزنقه درزاویه‌های A و D قائمه است .

با رسم خط CF متوازی با AD اضلاع AD و BC را به یکدیگر نزدیک می‌سازیم (در رسم شکل دقت لازم را بکار خواهیم برد) وکافی است ثابت کنیم که بین طولهای اضلاع



مثلث BCF رابطهٔ فیثاغورث برقرار است یعنی اینکه :

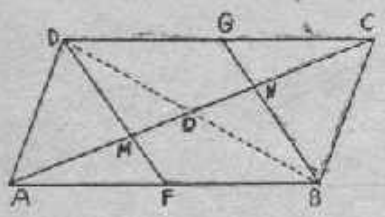
$$\overline{BC}^{۲}=\overline{BF}^{۲}+\overline{FC}^{۲}$$

(شکل ۱۳)

بعداً که مسائل ترسیمی مورد بررسی واقع خواهند شد خواهیم دید که «نزدیک ساختن مفروضات به یکدیگر» که درفوق به آن اشاره شد چه مورد استعمال زیادی دارد .

خطوطی که روی شکل رسم می‌شود ممکن است خطوط مهم شکل باشند (میانه‌ها، ارتفاعات مثلثها، قطرهای چندضلعیها، شعاعهای نقاط تماس و غیره) ، یا خطوطی باشند که نقاط مهم شکل را به یکدیگر وصل کنند (خطوطی که اوساط اضلاع مثلث را به یکدیگر وصل می‌کنند ، خطی که اوساط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند وغیره) .

مثال ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD رأس D را به نقطهٔ F وسط ضلع AB و رأس B را به نقطهٔ G وسط ضلع CD وصل می‌کنیم . ثابت کنید که خطوط DF و BG قطر AC را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کند .



(شکل۱۴)

قطر BD را رسم می‌کنیم (خط مهم متوازی‌الاضلاع) که AC را در نقطهٔ O قطع می‌کند (نقطهٔ مهم متوازی‌الاضلاع) با استفادهٔ از خاصیت نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث های ABD و BCD و خاصیت نقطهٔ O مرکز متوازی‌الاضلاع BFDG حل مسأله به سادگی انجام می‌پذیرد .

II- الحاق روابط جدید به فرض با رسم خطوط

ـ قبلا متذکر شدیم که رسم خطوط جدید در شکل به روابط جدیدی بین اجزاء منتهی می‌شود؛ درحقیقت این روابط جدید مانند مفروضات مسئله می‌باشند ومی‌توان با توجه به آنها یا با جانشین ساختن آنها به جای فرض حکم را از آنها استخراج کرد .

راه حل ها را به همان طور که به تدریج مورد استفاده واقع می‌شوند یادداشت می‌کنیم وتاسرحد امکان ،آنها را روی شکل نشان می‌کنیم .

مثلا ، درمثال فوق‌الذکر ابتدا داریم :

فرض $\begin{cases} \text{متوازی‌الاضلاع } ABCD \\ DG = GC \text{ و } AF = FB \end{cases}$

حکم : $AM = MN = NC$

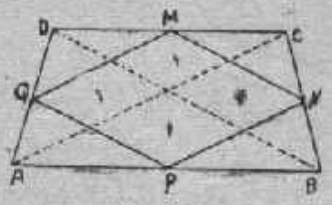
با رسم خط DB خواهیم داشت :

$$AO = OC \text{ و } OD = OB$$

که می‌توانیم این روابط را جزو مفروضات منظوردادیم

III- بکار بردن کامل فرض . در مسئله‌ای که به‌طور صحیح طرح شده باشد ، هیچیك از مفروضات غیرمفید نیست و برای بدست‌آوردن نتیجه باید ازتمام مفروضات استفاده کرد ؛ بعضی ازآنها چندین بار مورد استفاده خواهند بود. بنابراین باید اطمینان حاصل کرد که از همهٔ قسمتهای فرض استفاده شده و تمام مفروضات بکار رفته است و چنانچه مفروضی هنوز بکار نرفته است باید سعی کرد مورد استعمال آنرا یافت .

مثال ۱ـ اگر اوساط یك دوزنقهٔ متساوی‌الساقین را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی‌حاصل لوزی است.ابتدا فرض را مشخص می‌کنیم M وسط CD ، N وسط BC ...



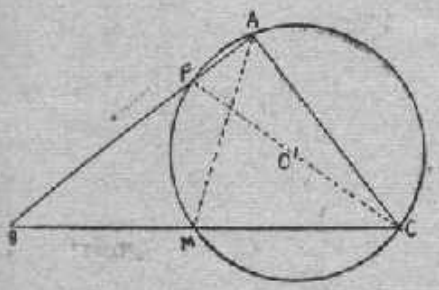
(شکل ۱۵)

برای‌اثبات اینکه چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است ؛ اما متوازی‌الاضلاعی که لوزی می‌باشد ، باید تساوی MQ و MN مجرز گردد آنچه که تساوی AC و BD را ایجاب می‌کند واین یکی‌مجرز نخواهد بود مگراینکه ازفرض «متساوی‌الساقین بودن دوزنقه» استفاده کنیم .

مثال ۲ـ مثال مربوط به درسم شکل دقیق، را درنظر می‌گیریم . گفتیم که بعد از آنکه ازروی شکل راهنمایی شدیم که CD و MB و همچنین BD و MC متوازی هستند پی بردیم به اینکه باید ثابت کنیم چهارضلعی MBDC متوازی‌الاضلاع است . ابتدا باید تساوی زاویه‌های B و C را محقق کنیم که به این قسمت ازفرض«دایرهٔ A برO می‌گذرد» مربوط نمی‌شود ، اما بعدکه باید ثابت کنیم دو زاویهٔ C و M مکمل یکدیگرند استفادهٔ ازاین قسمت فرض مورد احتیاج می‌باشد (شکل ۹) .

IV- به‌آنچه که گفته شد این را اضافه می‌کنیم که غالباً مفید است : آنچه را که می‌دانیم یا بدست‌آورده‌ایم با آنچه راکه باید بدست‌آوریم مقایسه می‌کنیم ، این موضوع مخصوصاً در مسائل مربوط به روابط متری مورد پیدا می‌کند : اغلب می‌توان پاك آگاهی قبلی برای خط مشی بعدی راه حل بدست‌آورد .

مثال ـ در مثلث ABC که در زاویهٔ A قائمه است بر



(شکل ۱۶)

رأسهای A و C وبرنقطهٔ M وسط BC دایره‌ای می‌گذرانیم که ضلع AB را در F قطع می‌کند ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است .

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

با استفادهٔ ازخواص قاطع دایره به‌آسانی نتیجه خواهیم گرفت که ،

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BM}{AB}$$

برای اینکه رابطهٔ حکم را نتیجه بگیریم باید ثابت کنیم که

$$AM = BM$$

وبرای اثبات این تساوی باید ازفرض اینکه زاویهٔ A قائمه و M وسط BC است استفاده کنیم .

بالاخره درجریان اثبات باید متوجه بودکه حکم یعنی آنچه را باید ثابت کرد مورداستفاده قرارنداد؛ استفادهٔ مستقیم یا غیرمستقیم از حکم اشتباه مسلم است

در بخشهای بعدی، درمسائل متعددی که به عنوان نمونه ذکر خواهیم کرد دستورات و نتایج گفته شده را به جای خود مورد استفاده قرار خواهیم داد .

* * *

راهنمای ریاضیات متوسطه

دربارهٔ $\sqrt{x^2}$ (دنبالهٔ شمارهٔ قبل)

در شمارهٔ گذشته گفتیم که

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

و به عبارت دیگر

۱) $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=x$

۲) $x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=-x$

تعمیم – اگر p و r هر کدام عدد فرد و k عددی زوج باشد با توجه به‌اینکه $\sqrt[kp]{x^{kr}}$ نمایش یك عدد مثبت است اما $\sqrt[p]{x^r}$ ممکن است مثبت باشد یا منفی چنین می‌نویسیم

$$\sqrt[kp]{x^{kr}}=\left|\sqrt[p]{x^r}\right|$$

به این معنی که اگر p و r هردوفرد باشند و k زوج باشد داریم :

۱) $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt[kp]{y^{kr}}=\sqrt[p]{x^r}$

۲) $x<0 \Rightarrow \sqrt[kp]{x^{kr}}=-\sqrt[p]{x^r}$

حالت خاص:

$$\sqrt[2p]{x^{2p}}=|x|=\begin{cases} x & \text{اگر } x\geq 0 \\ -x & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی به هنگام ساده کردن رادیکالها یا خارج کردن عاملی از زیر رادیکال باید به موضوع بالا توجه کامل داشته باشند

چند مثال ـ ساده کردن رادیکالهای زیر

۱) $\sqrt[10]{x^6}=\left|\sqrt[5]{x^3}\right|=\begin{cases} \sqrt[5]{x^3} & \text{اگر } x\geq 0 \\ -\sqrt[5]{x^3} & \text{اگر } x<0 \end{cases}$

۲) $x>0 \Rightarrow \sqrt[4]{x^6}=\sqrt{x^3}=\sqrt{x^2\,x}=$

$=|x|\sqrt{x}=x\sqrt{x}$

(اگر $x<0$ باشد تساوی

$\sqrt[4]{x^6}=\sqrt{x^3}$

غلط است)

۳) $\sqrt[6]{x^8}=\sqrt[3]{x^4}=x\sqrt[3]{x}$

(زیرا دو عامل x و $\sqrt[3]{x}$ هم‌علامت هستند و حاصل ضرب آنها چه در حالت $x>0$ و چه در حالت $x<0$ مثبت است)

۴) $\sqrt[6]{a^6b^4}=\sqrt{a^4b^2}=|ab|\sqrt{b}$

به‌فرض $b>0$ داریم

$$\sqrt{a^4b^2}=|a|b\sqrt{b}=\begin{cases} ab\sqrt{b} & \text{اگر } a\geq 0 \\ -ab\sqrt{b} & \text{اگر } a<0 \end{cases}$$

توجه ـ اگر $x<0$، r فرد، k و p زوج باشند

$$\sqrt[kp]{x^{kr}} \neq \sqrt[p]{x}$$

مثلا:

$$x<0 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2} \neq \sqrt{x}$$

نوشتن x به صورت $\sqrt{x^2}$

گفتیم که $\sqrt{x^2}$ نمایش یك عدد مثبت است. حال اگر خواسته باشیم x را (که ممکن‌است‌مثبت باشد یا منفی) به‌صورت $\sqrt{x^2}$ بنویسیم دوحالت زیررا باید درنظر بگیریم:

۱) $x\geq 0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2}$

۲) $x<0 \Rightarrow x=-\sqrt{x^2}$

چند مثال:

۱) $\sqrt{2}-\sqrt{3}=-\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

$$=-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

۲) $a\geq b \Rightarrow a-b=\sqrt{(a-b)^2}$

۳) $a<b \Rightarrow a-b=-\sqrt{(a-b)^2}$

ضرب فرجه و نمای عامل زیر رادیکال در یك عدد زوج

فرض کنیم p و r نمایش دوعدد فرد باشند در این‌صورت $\sqrt[p]{x^r}$ با x هم‌علامت است، ممکن است مثبت باشد یا منفی چنانچه p و r را در عدد زوجی مانند k ضرب کنیم در این صورت $\sqrt[kp]{x^{kr}}$ نمایش یك عدد مثبت می‌باشد بنابراین:

زوج: k ، فرد: r ، فرد: p

۱) $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt[p]{x^r}=\sqrt[kp]{x^{kr}}$

۲) $x<0 \Rightarrow \sqrt[p]{x^r}=-\sqrt[kp]{x^{kr}}$

چند مثال:

۱) $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[6]{(-2)^2}=-\sqrt[6]{4}$

یا اینکه:

$$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}=-\sqrt[6]{4}$$

۲) $\sqrt[5]{x^2}=\begin{cases}\sqrt[10]{x^4} & \text{اگر } x\geq 0\\ -\sqrt[10]{x^4} & \text{اگر } x<0\end{cases}$

توجه ـ در تحویل چند رادیکال به فرجهٔ مشترك (مثلا به هنگام ضرب رادیکالها) در نظر گرفتن موارد بالا شایان اهمیت کامل است.

مثال ـ برای ضرب $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[4]{x^2}$ دوحالت در نظر می‌گیریم.

۱) $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}\times\sqrt[2]{x^1}=\sqrt[12]{x^4}\times\sqrt[12]{x^6}$

$$=\sqrt[12]{x^{10}}=\sqrt[6]{x^5}$$

۲) $x<0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}\times\sqrt[4]{x^2}=-\sqrt[12]{x^4}\times\sqrt[12]{x^6}$

$$=-\sqrt[12]{x^{10}}\neq-\sqrt[6]{x^5}$$

چرا در آخرین مرحله علامت $\neq$ بکاررفته است؟

داخل کردن یك عامل در رادیکال

فرض می‌کنیم داشته باشیم $S=a\sqrt[p]{x}$ و p زوج‌باشد، در این صورت علامت S همان علامت a خواهد بود. حال‌می‌خواهیم عامل a را داخل رادیکال کنیم، دو حالت باید در نظر بگیریم.

۱) $a>0 \Rightarrow S=\sqrt[p]{a^p x}$

۲) $a<0 \Rightarrow S=-\sqrt[p]{a^p x}$

زیرا درحقیقت ، a را به صورت $\sqrt[p]{a^p}$ نوشته‌ایم

مثال ـ

$$S=(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{و} \quad x\neq -1$$

۱) $x\geq 1 \Rightarrow x>-1 \Longrightarrow$

$$S=\sqrt{\frac{(x+1)^2(x-1)}{x+1}}=\sqrt{(x+1)(x-1)}$$

۲) $x<-1 \Longrightarrow S=-\sqrt{\frac{(x+1)^2(x-1)}{x+1}}$

$$=-\sqrt{(x+1)(x-1)}$$

۳) $1>x>-1 \Longrightarrow$ S بی معنی است

مثال ۲ـ

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} & \text{اگر } x>0\\ -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} & \text{اگر } x<0\end{cases}$$

مثال ۳ـ

$$a\sqrt{\frac{a^2+1}{a}}=\begin{cases}\sqrt{a(a^2+1)} & \text{اگر } a>0\\ -\sqrt{a(a^2+1)} & \text{اگر } a<0\end{cases}$$

تعیین حدبعضی توابع وقتی که $x\to\mp\infty$

می‌دانیم که اگر در کسر $\frac{A}{x}$ مقدار A ثابت مانده اما مقدار x از لحاظ قدر مطلق بزرگ شود یعنی $x\to\pm\infty$ حد کسر برابر یا صفر خواهد بود.

تابع زیررا درنظرمی گیریم:

$$y=\frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}+fx}$$

می‌خواهیم حداین تابع را وقتی که $x\to\pm\infty$ تعیین کنیم (فرض داریم که تابع در فاصله‌های $x<N<M$ و $x>M$ معین است.)

صورت ومخرج کسر تابع را بر x تقسیم می کنیم:

$$y=\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\sqrt{\frac{cx^2+dx+e}{x}}+\frac{fx}{x}}$$

اکنون دوحالت‌درنظرمی گیریم

۱) $x>0 \Rightarrow y=\dfrac{a+\frac{b}{x}}{\sqrt{c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}}+f}$

۲) $x<0 \Rightarrow y=\dfrac{a+\frac{b}{x}}{-\sqrt{c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}}+f}$

وقتی که $x\to+\infty$ مسلماً $x>0$ است وبنابر حالت اول حد y برابر خواهدشد:

$$x\to+\infty : \lim y=\frac{a}{\sqrt{c}+f}$$

وقتی که $x\to-\infty$ داریم $x<0$ و بنابر حالت دوم داریم

$$x\to-\infty : \lim y=\frac{a}{-\sqrt{c}+f}$$

مثال : تعیین حدتابع زیروقتی $x\to\pm\infty$

$$y=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}$$

(تابع درفاصله‌های $x\geq 0$ و $x\leq -2$ معین است.

وقتی که $x\to\mp\infty$ تابع به‌صورت مبهم $\infty-\infty$ در می‌آید ، برای رفع ابهام آنرا یک‌بار درمزدوج خودضرب ویک باربرآن تقسیم می کنیم پس از اختصار خواهیم داشت .

$$y=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+2}}$$

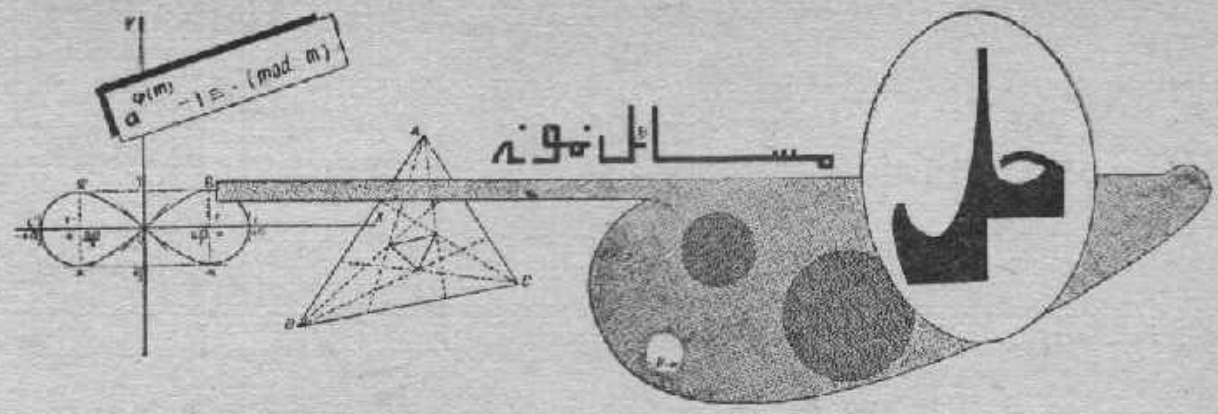
صورت ومخرج کسر تابع را بر x تقسیم می کنیم

۱) $x>0 \Rightarrow y=\dfrac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$$x\to-\infty : \lim y=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

۲) $x<0 \Rightarrow =\dfrac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$$x\to-\infty : \lim y=\frac{2}{-\sqrt{1}-\sqrt{1}}=-1$$



یکی از مسائل امتحانی رم

رسم منحنی تغییرات زاویهٔ انحراف یك دسته اشعه که برمنشوری می‌تابد

ترجمهٔ : ه ـ شریف زاده ازکتاب مسائلی ازعلوم فیزیك

۳۵۸۰ ـ زاویه رأس منشوری ۳۰° وضریب شکست آن $n=1/5$ است .

حالات زیر را بررسی کنید: تابش بطور مماس؛ تابش بطور عمود بروجه ؛ مینیمم انحراف ؛ زاویهٔ خروجی بطورمماس ؛ زاویهٔ خروجی بطور عمودبروجه .

شکلی احمالی رسم کنید که شامل هریك از حالتهای بالا باشد . با استفاده از برریهایی که انجام می‌دهید شرط خروج اشعه را بیان کنید .

منحنی تغییرات زاویهٔ انحراف یك دسته اشعه را که برمنشور می‌تابد رسم کنید .

حل ـ اگر یك دسته اشعه از منشوری عبور کند ، چهار فرمول کلاسیك زیر را در بارهٔ آن می‌توان نوشت :

$$\sin i = n \sin r \qquad (1)$$

$$\sin i' = n \sin r' \qquad (2)$$

$$A = r + r' \qquad (3)$$

$$D = i + i' - A. \qquad (4)$$

این فرمولها در تمام حالات قابل پذیرش می باشند ، مشروط بر آنکه قرارداد زیررا برای علامت زوایا بپذیریم:

اگر شعاع تابش SI وشعاع خروجی I'R ، نسبت به خطوط عمودی که درنقاط I و I' بروجوه منشور رسم می‌شوند، به سوی قاعدهٔ منشور متمایل باشند، i و i' را مثبت می گیریم واگر این دوشعاع دربالای خط عمود وبه سوی رأس منشور متمایل باشند، i و i' را منفی محسوب می کنیم .

دربارهٔ r و r' قراردادی معکوس باقرارداد فوق قبول می کنیم.

در مسألهٔ بالا، زاویهٔ A رأس منشور وضریب شکست آن را می‌دانیم .

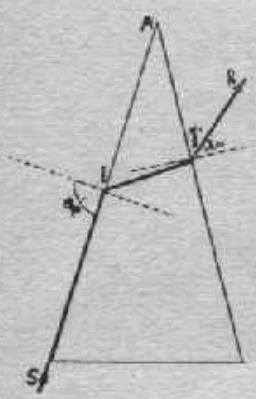
۱ـ تابش مماسی وتابش عمودی

در هر دوحالت ، زاویهٔ i معلوم است . چهار فرمول منشور ، دستگاه چهار معادلهٔ چهار مجهولی تشکیل می دهد که آن را بطور عددی حل می کنیم.

تابش مماسی: شعاع تابش SI بطور مماس بروجه AB منشور می‌تابد :(شکل۱)

$$i = 90°$$

از معادلهٔ (۱) زاویهٔ r را، که برحسب تعریف، زاویهٔ حدشکست بین دومحیط هوا ـ شیشه می‌نامند، بدست می‌آوریم .



(شکل۱)

از معادلهٔ(۳) زاویه r' بدست می‌آید:

$$r' = A - r = A - 8$$

زاویهٔ خروجی i' برابر مقدار i_0 است که از معادلهٔ(۲) بدست می‌آید :

$$\sin i_0 = n \sin(A - 8). \qquad (5)$$

زاویهٔ انحراف D برابرمقدار D_0 است که ازمعادلهٔ(۴) بدست‌می‌آید :

$$D_0 = 90 + i_0 - A \qquad (6)$$

مورداستفادهٔ عددی‌ـچون $A=30^\circ$ و $n=1/5$ با $r=\lambda$ خواهیم داشت

$$\sin\lambda=\frac{1}{n}=\frac{2}{3}=0/667$$

با استفاده از جدول خطوط مثلثاتی :

$$\lambda=41^\circ 50'$$

$$r'=30^\circ-41\ 50'=-11^\circ 50'$$

زاویهٔ r' منفی است ؛ شعاع II' درزیر خط عمود بر وجه خروجی ، یعنی در طرف قاعدهٔ منشور است .

زاویهٔ i_0 طبق فرمول (۵) :

$$\sin i_0=-\frac{3}{2}\sin(-11^\circ 50')=-\frac{3}{2}\sin 11^\circ 50'$$

طبق جدول خطوط مثلثاتی :

$$\sin i_0=-\frac{3}{2}\times 0/205=-0/307$$

یا

$$\sin(-i_0)=0/307$$

$$i_0=-17^\circ 53'$$

زاویهٔ i_0 منفی است: شعاع خروجی $I'R$ دربالای خط عمود قرار گرفته است ، یعنی به طرف رأس منشور است. انحراف $D=D_0$ طبق فرمول (۶) :

$$D_0=90-17^\circ 53'-30^\circ$$

$$D_0=42^\circ 7'$$

تبصره ـ حالتی که شعاع تابش ازطرف دیگر خط عمود مماس بر منشور بتابد ($i=-90^\circ$) نداریم .

زیرا در این حالت :

$$r=-\lambda \quad \text{و} \quad r'=A-r=A+\lambda$$

زاویهٔ رأس A هرقدر باشد ، زاویه r' بزرگتر از زاویهٔ حد λ است . در این حالت همیشه پدیدهٔ انعکاس کلی رخ می‌دهد (شکل ۲)

تابش عمودی ـ شعاع تابش SI عمود بروجه AB می‌تابد : $i=0$ (شکل ۳)

نتیجه می گیریم که $r=0$ یعنی‌شعاع تابش ضمن عبور از وجه اول منشور منحرف نمی‌شود .

از معادلهٔ (۳) مقدار r' را بدست می‌آوریم :

$$r'=A-r=A$$

زاویهٔ i' چنین است :

$$\sin i'=n\sin r'=n\sin A \qquad (7)$$

و زاویهٔ انحراف برابر است با

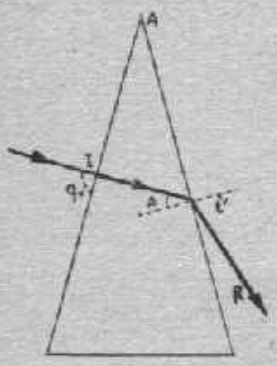
$$D=i'-A \qquad (8)$$

مورد استفادهٔ عددی :

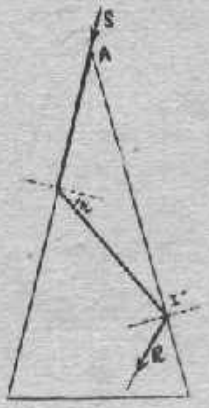
$$\sin r'=\sin A=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$r'=30^\circ$$

$$\sin i'=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0/75$$



(شکل ۳)



(شکل ۲)

طبق جدل خطوط مثلثاتی

$$i'=48^\circ 35'$$

$$D=48\ 35'-30''$$

$$D=18^\circ 35'$$

۲ـ خروج بطور مماس وخروج بطور عمودی

در این دو حالت ، زاویهٔ خروجی i' معلوم است : این زاویه همان مقداری را دارد که درقسمت قبل‌زاویهٔ تابش داشت.

در دستگاه معادلات ، i و i' متقارن هستند یعنی‌هنگامی که زاویهٔ خروجی i' برابر مقدار i شود ، زاویهٔ تابش i نیز برابر مقدار i' خواهد بود .

این نتیجه را از اصل برگشت نور نیز می‌توان بدست آورد . برطبق این‌اصل اگربه‌جای شعاع تابش، شعاع خروجی بگذاریم ، شعاع خروجی جانشین شعاع تابش می‌شود . اگر جای i و i' باهم عوض شود، تغییری در زاویهٔ انحراف پدید نمی‌آید یعنی زاویهٔ انحراف برای هر دو سوی تابش نور یکسان است .

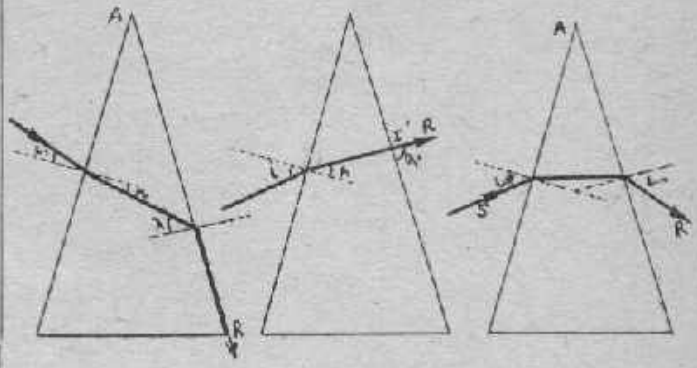
تذکر فوق را دردوحالت مورد نظر بکار می‌بریم .

خروج بطور مماس (شکل ۴): زاویهٔ تابش i برابر مقدار i_0 می‌شود که از فرمول (۵) بدست می‌آید :

$$i_0=-17^\circ 53'$$

زاویهٔ انحراف D دارای مقدار D_0 است که از فرمول (۶) بدست می‌آید :

$$D = ۴۲°۷'$$



(شکل۶) (شکل۵) (شکل۴)

خروج بطور عمود (شکل۵)- زاویهٔ تابش i برابر مقدار i' است که از فرمول (۷) بدست می‌آید :

$$i = ۴۸°۳۵'$$

مقدار زاویهٔ انحراف از فرمول (۸) بدست می‌آید

$$D = ۱۸°۳۵'$$

۳ - مینیمم انحراف - در این حالت نه مقدار i را می‌دانیم و نه مقدار i' را . می‌دانیم که برای یك مقدار D ، همیشه دو زاویهٔ تابش وجود دارد ، یعنی یك زاویهٔ تابش i ویك زاویهٔ خروجی i' . اگر جهت تابش نور را عوض کنیم ، زاویهٔ تابش برابر i' و زاویهٔ خروجی برابر i می‌شود و در این دو حالت زاویهٔ انحراف مساوی است . بطور تجربی مشاهده کرده‌اند که درحالت مینیمم انحراف ، فقط یك مقدار برای زاویهٔ تابش وجود دارد . یعنی اگر جهت نور را عوض کنیم i و i' مساوی هستند پس در این حالت $i = i'$ و $r = r'$ (شکل۶) از فرمول سوم منشور نتیجه می‌گیریم $A = ۲r$ و از آنجا

$$r = \frac{A}{۲}$$

زاویهٔ تابش i برابر مقدار i_m است که طبق معادلهٔ (۱) :

$$(۹) \quad \sin i_m = n \sin \frac{A}{۲}$$

بالاخره زاویهٔ انحراف D برابر مقدار D_m است که طبق معادلهٔ (۴) :

$$(۱۰) \quad D_m = ۲i_m - A$$

مورد استفادهٔ عددی :

$$\sin \frac{A}{۲} = \sin \frac{۳۰}{۲} = \sin ۱۵° = ۰/۲۵۹$$

$$\sin i_m = \frac{۳}{۲} \sin ۱۵° = \frac{۳}{۲} \times ۰/۲۵۹ = ۰/۳۸۹$$

طبق جدول خطوط مثلثاتی ،

$$i_m = ۲۲°۵۱'$$

$$D_m = ۲i_m - A = ۲ \times ۲۲°۵۱' - ۳۰°$$

$$D_m = ۱۵°۴۲'$$

شرط خروج اشعه - نتایج حاصل را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم :

i	$۹۰°$	$۴۸°و۳۵'$	$i_m (۲۲و۵۱)$	$۰°$	$i_0 (-۱۷و۵۳)$
D	$D°(۴۲°۷')$	$۱۸°و۳۵'$	$D_m (۱۵°و۴۲')$	$۱۸°و۳۵$	$D_0 (۴۲°و۷')$

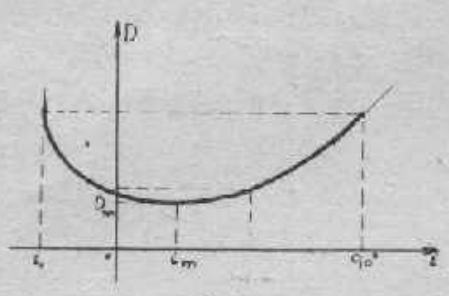
می‌بینیم که تنها اشعه‌ای که می‌توانند ازمنشور خارج شوند ، آنهایی هستند که زاویهٔ تابش آنها بین $۹۰°$ و i_0 است بطوری که :

$$\sin i_0 = n \sin (A - \lambda)$$

یا

$$i_0 = -۱۷°۵۳'$$

شکل ۷ منحنی نمایش تغییرات تابع $D = f(i)$ نیز شرایط خروج نوررا ازمنشور بیان می‌کند



(شکل ۷)

تبصره - a) رسم دقیق این منحنی نشان می‌دهد که این منحنی درنقطهٔ $i = i_0$ مماس برخط قائم ودرنقطهٔ $i = ۹۰$ مماس برخطی است که بامحور i زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

b) مستقیماً نیز می‌توان زاویهٔ D_m را به کمك رابطهٔ

$$\sin \frac{D_m + A}{۲} = n \sin \frac{A}{۲}$$

که از معادلات (۹) و (۱۰) بدست می‌آید ، محاسبه کرد.

***
***

مسائل امتحانات ثلث اول دبیرستانها

مسائلی که تا آخر آذرماه ۱۳۴۴ به ادارهٔ مجله واصل شده است به ترتیب موضوع و به ترتیب حروف الفباء نام دبیرستان قسمت به هر کلاس دورهٔ دوم درج می‌شود.
عبارات وصورت مسائل به همان‌نحوکه در اوراق مربوط نوشته شده بدون هیچگونه تغییری چاپ شده‌است.

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان البرز(دبیر: دکتر رناطی ، فرستنده: نادر فامیل)

۱ـ مطلوبست محاسبهٔ a و b و c بقسمیکه عبارت:

$$P(x)=bx^4+(2a+b+c)x^3+(3c-2b-a)x^2-(2c+a)x-6$$

برعبارت $Q(x)=x^3+2x^2-x-2$ قابل قسمت باشد.

۲ـ اولا اتحاد زیررا ثابت کنید:

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(b-c)c-a)$$

ثانیاً: معادلهٔ زیررا با استفاده ازاتحاد فوق حل کنید:

$$[3(y+1)-2(y+3)]^3+[2(y+3)-(y-5)]^2+[(y-5)-3(y+1)]^3=0$$

۳ـ مخرج کسر زیررا گویا کنید:

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{36})}$$

۴ـ معادلهٔ اصم زیررا حل کنید:

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$$

۵ـ کسر زیررا ساده کنید:

$$\frac{a^2\sqrt{d}-b^2c\sqrt{d}-2bd\sqrt{c}-d\sqrt{d}}{a+b\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

دبیرستان شاهپور شیراز(دبیر: موسوی ـ فرستنده: مجوب)

۱ـ عبارت زیررا تجزیه کنید.

$$x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$$

۲ـ m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر برابر $\frac{1}{2}$ باشد وسپس ریشه‌های دیگر آنرا حساب کنید.

$$2x^3-7x^2+mx+4=0$$

۳ـ معادله اصم زیررا حل کنید.

$$\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=2$$

۴ـ کسرهای زیررا گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \quad و \quad \frac{1}{5-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$$

۵ـ معادلهٔ زیررا حل وبحث کنید.

$$\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2-a^2}}=a-x$$

۶ـ نامعادله زیررا حل کنید.

$$\frac{x^2-3x+2}{a(x-2)^3}<0$$

دبیرستان قطب دزفول (دبیر ـ فخرعطار)

مسأله اول ـ درتقسیمی مقسوم:

$$M=px^4+qx^2+1$$

ومقسوم علیه $B=x^2-8x+1$ تعیین کنید.

p و q را بقسمی که M بر B بخش پذیر باشد. سپس بازاء $p=1$ و $q=2$ باقیمانده و خارج قسمت را بیابید.

مسأله‌دوم ـ معادلات زیررا حل کنید.

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{5-x}{4x^2-1}=4$$

$$\sqrt[3]{2+2x}-\sqrt[3]{2x+21}+1=0$$

مساله سوم ـ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴-۲\sqrt{۳}}} \quad و \quad \frac{۵}{\sqrt[۴]{۸}-\sqrt[۴]{۳}}$$

دبیرستان قطب دزفول چهارم ریاضی (ب) دبیر فخرعطار

مسئله اول ـ در تقسیمی مقسوم:

$$A=x^۴+ax^۳+bx+۱$$

ومقسوم علیه :

$$B=x^۲+x-۳$$

تعیین کنید . a و b را طوریکه A بر B بخش پذیر باشد.
سپس بازاء a = ۲ و b = ۳ خارج قسمت و باقیمنده تقسیم را بدست آورید .

مسئله دوم ـ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۲}} \quad و \quad \frac{۴}{\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}$$

مسئله سوم ـ معادلات زیر را حل کنید .

$$\sqrt{۶-x}+\sqrt{۷+x}-۵=۰$$

$$\frac{\frac{x+۴}{x-۴}-\frac{x-۴}{x+۴}}{۲+\frac{۱-۲x^۲}{x^۲-۱۶}}=\frac{-۸۰}{۳۱}$$

متمم حساب

دبیرستان شاهپور شیراز (دبیر: دست غیب ـ فرستنده : محجوب

۱ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\log(x-۵)=\log ۸۱-۲\log ۳-\operatorname{colog} ۲۷+۲+\log\frac{۳}{۲۵}$$

۲ـ در صورتیکه $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$ باشد مطلوبست محاسبه $\sqrt[۵]{۲۵۰۰}\log$ وتعیین کننده $\log\sqrt[۵]{۲۵۰۰}$ چندرقمی است.

۳ـ با استفاده از جدول لگاریتم ثابت کنید :

$\left(\frac{۹۳}{۹۲}\right)^{۱۰۰۰}$ از ۱۰۰۰۰ بزرگتر است.

۴ـ با استفاده از جدول لگاریتم مقدار کسرزیر را بدست آورید .

$$A=\frac{(۲/۳۶۵)(۰/۰۰۷۴۳)}{۵۳۷/۷}^{\frac{۱}{۵}}$$

۵ـ تحقیق کنید:

$$(\sqrt{۵})^{۲\log_۵^۲}+(\sqrt{۲})^{-۴\log_۲ ۳}=۱۱$$

است .

۶ـ مقدار عددی z را بدست آورید.

$$Z=\frac{۱}{\log_x\sqrt{xy}}+\frac{۱}{\log_y\sqrt{xy}}$$

۷ ـ مطلوبست محاسبه لگاریتم T برحسب لگاریتمهای a و b و c

$$T=\left(\frac{\frac{\sqrt{ab}\times c}{۲}}{\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c^۲}}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۸ـ معادلات زیررا حل کنید.

$$\log_۲\left\{۲+\log_۲[۱+\log_۲(۲x-۳)]\right\}=۱$$

$$\log_۲(x+۱۴)+\log_۴(x+۱۴)+\log_{۱۶}(x+۱۴)=۷$$

$$\sqrt{x}^{\log_۵ x-۱}=۵$$

دبیرستان قطب دزفول، چهارم ب ـ دبیر: فخرعطار

مسأله اول ـ معادله زیررا حل کنید.

$$۴\times۹+۵\times۳^{x-۱}=۹^{x-۱}$$

مسأله دوم ـ از رابطه زیر x را تعیین کنید.

$$\log\log x^{۲}=۲$$

مسأله سوم ـ اگر

$\log ۳=۰/۴۷۷۱۲$ و $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$

باشد . لگاریتم x را تعیین کنید :

$$x=\sqrt[۵]{\frac{۱۲}{۱۲۵}}$$

دبیرستان قطب دزفول . چهارم الف ـ دبیر: فخرعطار

مسأله اول ـ اگر

$\log ۳=۰/۴۷۷۱۲$ $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$

باشد تعیین کنیدلگاریتم x را

$$x=\sqrt[۲]{\frac{۱۸}{۲۵}}$$

مسألهٔ دوم ـ معادلهٔ زیررا حل کنید .

$$\frac{x-1}{3\times 4}+\frac{x+1}{5\times 2}=23$$

مسألهٔ سوم ـ ازرابطه زیر x را تعیین کنید .

$$\log_x \log_2 3=2$$

کلاس پنجم طبیعی

جبر

دبیرستان البرز ـ فرستنده :کامران لحمی

مسألهٔ اول ـ از نقطه $A(2\ و\ -2)$ دو خط D و D' را به ترتیب با ضریب زاویهٔ $-\frac{2}{5}$ و $-\frac{5}{2}$ عبور می‌دهیم .

اولاـمعادلات این دو خط را بنویسید .

ثانیاً ـ اگر نقطهٔ B محل تلاقی D با محور xها ونقطهٔ C محل تلاقی D' با محور yها باشند مختصات نقاط B و C را تعیین کنید .

ثالثاًـ ثابت کنید که سه نقطهٔ $A(2\ و\ -2)$ و $B(-3\ و\ 0)$ و $C(0\ و\ 3)$ رؤس یك مثلث متساوی‌الساقین می‌باشند مثلث را رسم نموده و مساحت آنرا محاسبه کنید .

رابعاً ـ فاصلهٔ نقطهٔ O مبدأ مختصات را تا دو خط D و D' حساب کرده و استنباط کنید این نقطه روی نیمساز زاویه A می‌باشد .

مسألهٔ دوم ـ سه نقطهٔ $M(0\ و\ -4)$ و $N(1\ و\ 1)$ و $P\left(\frac{5\alpha-2}{3}\ و\ \frac{\alpha}{2}\right)$ مفروض‌اند :

اولا α را طوری تعیین کنید که سه نقطهٔ M و N و P بریك استقامت باشند .

ثانیاً ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی α تغییر کند پیدا کرده وآنرا رسم کنید .

مسألهٔ سوم ـ معادلهٔ خطی پارامتری :

$$(m^2+m+3)x+(m^2-m+2)y-2(2m+1)=0$$

مفروض است ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر پارامتر m خطوط حاصله از نقطهٔ ثابتی که مختصات آنرا پیدا خواهید کرد میگذرند .

دبیرستان ایرانشهر دزفول ـ دبیر فخر عطار

۱ـ نقاط A بطول۸ـ وB بطول۱۶ محور ox واقعند. تعیین کنید :

اولا ـ طول جبری AB را

ثانیاً ـ روی محور ox نقطه‌ای پیدا کنید . که : $2\overline{AC}=3\overline{BC}$ باشد .

۲ـ دو نقطهٔ $A(5\ و\ a+1)$ و $B(2\ و\ 1)$ معلومند تعیین کنید :

اولا ـ a را برای‌آنکه $\overline{AB}$ ۵ گردد .

ثانیاً ـ a راکه ضریب زاویهٔ خطی‌که از AB میگذرد برابر ۲ گردد .

۳ـ معادله عمود منصف BA را پیدا کنید ـ درصورتیکه $A(2\ و\ 1)$ و $B(-3\ و\ 5)$

۴ـ مختصات سه رأس مثلثی عبارتند از A بطول ۳ روی محور طولها و B بعرض ۵ روی محور عرضها ـ و نقطه C بطول ۲ ـ واقع بر نیمساز ربع سوم

اولا معادلهٔ AC وطول AC را حساب کنید .

ثانیاً معادلهٔ ارتفاع AH ومیانه AM را پیدا کنید .

دبیرستان پهلوی دزفول ـ دبیر:فخر عطار

۱ـ نقطهٔ $(3+2m\ و\ -2-m)$ مفروض است .

اولا ـ m را قسمی تعیین کنیدکه نقطهٔ M روی محور طولها قرار گیرد .

ثانیاً ـ روی محور عرضها قرار گیرد .

ثالثاً ـ ازدومحور بیك فاصله باشد .

رابعاً ـ $\overline{OM}=5$ گردد .

۲ـ دونقطه $A(2\ و\ -4)$ و $B(4\ و\ -3)$ مفروضند .

اولا ـ قرینهٔ این دو نقطه را نسبت بمحورهای مختصات ومبدأ را پیدا کنید .

ثانیاً ـ معادلهٔ عمود منصف AB را بنویسید .

ثالثاً ـ عمود منصف محور عرضها را در نقطهٔ C قطع میکند ـ معادله AC را پیدا کنید. وطل AC را حساب کنید.

۳ـ اندازه جبری برداری ۱۵ و طول وسط این بردار ۸ میباشد . تعیین کنید طولهای دوسر پرداررا .

۴ـ دوخط به معادلات :

$$y=ax+2\ \text{و}\ 3x+2y-6$$

مفروضند .

اولا ـ a را قسمی تعیین کنیدکه این دو خط برهم عمود یا موازی باشند .

ثانیاً ـ به‌ازاء $a=1$ دو خط را رسم کنید و مختصات نقطه تلاقی آندورا بیابید .

دبیرستان قطب دزفول ـ دبیر فخرعطار

۱ـ اندازهٔ جبری بردار $\overline{AB}$ برابر ۱۵ وطول انتهای آن برابر ۸ تعیین کنید .

اولا ـ طول ابتدای بردار را .

ثانیاً ـ روی محور ox نقطهٔ D را قسمی اختیار کنید که $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$ باشد .

۲ـ سه نقطه $A(-1\text{ و }3)$ و $(5\text{ و }1)B(a+1)$ و $C(a-2\text{ و }4)$ مفروضند .

اولا a را قسمی تعیین کنید که $\overline{AB}=\overline{AC}$ باشد .

ثانیاً به ازاء $a=3$ مثلث را رسم کنید و معادلهٔ ضلع AB وطول میانه AM را حساب کنید .

۳ ـ معادلهٔ عمود منصف قطعه خط AB را تعیین کنید درصورتیکه $A(2\text{ و }3)$ و $B(7\text{ و }1)$ باشد .

۴ـ دو خط به معادلات :

$$(2m+1)x-3y=2 \quad ,\quad 3x+4y=5$$

مفروضند .

اولا ـ m را قسمی اختیار کنید که دو خط موازی یا بر هم عمود باشند .

ثانیاً ـ به ازاء $m=1$ مختصات نقطهٔ تلاقی این دو خط را پیدا کرده آنهارا رسم کنید .

مثلثات

دبیرستان ایرانشهر دزفول ـ دبیر : فخر عطار

۱ـ خطوط مثلثاتی 2115° را حساب کنید .

۲ـ اگر $\sin x=-\frac{6}{7}$ باشد سایرخطوط مثلثاتی قوس x را حساب کنید . (انتهای کمان x در ربع چهارم است)

۳ ـ از روابط زیر قوس x و y را برحسب رادیان تعیین کنید .

$$\begin{cases} x+y=90^\circ \\ 4x+y=200^g \end{cases}$$

۴ـ صحت اتحاد زیررا ثابت کنید .

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x+\tg^2 x=\frac{1}{1-\sin^2 x}$$

دبیرستان پهلوی دزفول دبیر : فخرعطار

۱ـ خطوط مثلثاتی قوس 9750° گراد را حساب کنید .

۲ـ صحت اتحاد را ثابت کنید .

$$\sin^2 x\tg^2 x+\cos^2 x\cotg^2 x+2=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

۳ـ اگر $\tg x=\frac{3}{5}$ باشد سایر خطوط مثلثاتی قوس x را تعیین کنید . (انتهای کمان x در ربع سوم است) .

۴ـ ازروابط زیر α و β را برحسب گراد حساب کنید .

$$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3} \quad ,\quad 2\alpha+\beta=105^\circ$$

دبیرستان قطب دزفول ـ دبیر: فخرعطار

۱ـ خطوط مثلثاتی قوس $\frac{29\pi}{4}$ را حساب کنید .

۲ـ اگر $\sin x=\frac{3}{4}$ باشد سایر خطوط مثلثاتی قوس x را حساب کنید . (انتهای کمان x در ربع دوم است)

۳ـ صحت اتحاد زیررا ثابت کنید .

$$\sin^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=\sin x-\cos x$$

۴ـ از روابط زیر قوس x و y را برحسب درجه تعیین کنید .

$$x+y=\frac{5\pi}{12} \quad ,\quad 2x+y=105^\circ$$

فیزیك

دبیرستان البرز ـ فرستنده : کامران نخعی

۱ـ واحدهای شدت نور و شدت روشنائی وهمگرائی را نام برده تعریف کنید .

۲ـ جسمی درجلو دو آئینه متقاطع عمود برهم واقع است تصاویر آنرا بوسیلهٔ رسم نشان دهید .

۳ـ بحث در فرمول دکارت موقعیکه نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ می‌شود .

۴ـ اثبات فرمولهای عدسی واگرا .

۵ـ شدت نور یك منبع ۲۵ شمع وشدت نورمنبع دیگر ۸۱ شمع و فاصله این دومنبع ازهم برابر ۵۶ سانتیمتر می‌باشد صفحهٔ آلوده به روغن را درچه فاصله بین این دو قرار دهیم که روشنائی حاصلهٔ هردوطرف آن برابر باشد .

۶ـ دو آینه مقعر و محدب روبروی هم و به فاصلهٔ ۳۵

سانتیمتر ازهم طوری قرار گرفته‌اند که محوراصلی آنها برهم منطبق می‌باشد و شعاع هرکدام ۲۰ سانتیمتر است جسمی به طول ۳ سانتیمتر و به فاصلهٔ ۱۵ سانتیمتر از آینهٔ مقعر بین دوآینه واقع است اگر فرض کنیم که نور ابتداء به‌آینهٔ مقعر و پس از انعکاس به‌آینهٔ محدب می‌تابد محل و بزرگی تصویر حاصله درآینهٔ محدب را به وسیله محاسبه ورسم پیدا کنید .

۷ـ زاویهٔ رأس منشوری ۴۵ درجه و نور عمود بر یك سطح منشور تابیده و مماس برسطح دیگر آن خارج می‌شود ضریب انکسار و زاویهٔ انحراف منشوررا حساب کنید .

شیمی

دبیرستان دختران بهبهانی کاروان ـ دبیرجواهری

مسألهٔ ۱ـ ۰/۷۷۵ گرم ازهیدروکربنات یك فلز دو ظرفیتی را به شدت کلسینه می‌نمائیم تولید ۰/۵۸۸ گرم $CO^{۲}$، ۰/۵۱۸ گرم آب شده و جسم جامدی به وزن ۰/۶۶۹ گرم برجای می‌ماند که چون در اسید نیتریك حل شود می‌تواند باین $S\bar{O}_{۴}$ رسوب سفیدی به وزن ۰/۹۵۹ تولید نماید . پیدا کنید فرمول این هیدروکربنات را . در ضمن نام تجارتی و اصطلاحی آنرا ذکر کنید .

مسألهٔ ۲ـ درجهٔ یونیزاسیون یك محلول دسی نرمال آمونیاك ۱۳٪ است . پیدا کنید : PH و POH این محلول را .

مسألهٔ ۳ـ محلولی است با PH = ۱۳ ثابت کنید که محلول فوق‌الذکر دسی‌نرمال است .

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان البرز ـ فرستنده : میروس امیرسالاری

مسألهٔ اول ـ در دستگاه مختصات قائم xoy نقطهٔ A(۹ و ۵ـ) مفروض است .

۱ـ از نقطهٔ A خطی با ضریب زاویهٔ $\frac{۳}{۴}$ رسم شده است این خط محور طولهارا در نقطهٔ B تلاقی می‌کند وهمچنین از نقطهٔ A خطی با ضریب زاویهٔ ۲ رسم شده است این خط محور عرضها را در نقطهٔ C تلاقی می‌کند . مختصات نقاط B و C را تعیین کنید .

۲ـ ازنقطهٔ A خطی بر AB عمود کرده و از نقطهٔ C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم این دوخط یکدیگر را در نقطهٔ D تلاقی می‌کنند مختصات این نقطه را تعیین کنید .

۳ـ زاویه بین اقطار چهارضلعی ABCD را محاسبه کنید .

۴ـ مساحت این چهارضلعی را محاسبه کنید .

مسألهٔ دوم ـ مشتق تابع تابع y را نسبت به متغیر x محاسبه کنید درصورتی که :

$$y=\sqrt{U+\frac{۱}{U}} \quad , \quad U=(x+۱)\sqrt{x+۱}$$

مسألهٔ سوم ـ دسته خطوط (F) بمعادلهٔ :

$$۸x+y=۲۸+۲$$

و خط (D) به معادلهٔ $\frac{x}{۶}+\frac{x}{۸}=-۱$ مفروض می‌باشند :

مطلوبست تعیین پارامتر λ مربوط به معادله خط AB ازدسته خطوط (F) به قسمی که زاویه AOB یك قائمه باشد (A نقطه تقارب دسته خطوط (F) است Bروی خط (D) قراردارد

دبیرستان ادیب ـ دبیر طاهری ، فرستنده

۱ـ دستگاه دو معادله دو مجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x^{۲}+۴y^{۲}-۷xy=۳ \\ ۲x^{۲}-y^{۲}+۳xy=۴ \end{cases}$$

۲ـ نقاط A(۲ و ۱) و B(۲ـ و ۳ـ) و C(۳ و ۴ـ) سه رأس مثلث ABC هستند معادله ارتفاع AH را بنویسید و مساحت مثلث را حساب کنید .

۳ـ نقطهٔ روی خط (D) به معادلهٔ $y=۲x+۵$ تعیین کنید که فاصله‌اش از خط : $۳x-۴y+۵=۰$ برابر ۴ باشد

۴ـ نقاط A(۱ و ۲) و B(۲ و ۴ـ) و C مختصات دوسر قطر مربع ABCD می‌باشد مختصات رؤس دیگر مربع را تعیین کنید .

۵ـ مکان هندسی نقاط تلاقی دو خط (D) و (D') معادلات زیررا تعیین کنید .

$$\begin{cases} mx+۲y=m-۲ \\ my-۲x=m-۳ \end{cases}$$

۶ـ معادله درجه دوم

$$(m-۲)x^{۲}-۲mx+۲m-۱=۰$$

مفروض است .

اولا ـ تعیین کنید به ازاء چه مقدار از m معادله دارای جواب است .

ثانیاً ـ رابطه مستقل از m بین ریشه های معادله تعیین کنید .

ثالثاً ـ روی خط (D) به معادله :

$$y=(m-3)x+m$$

دو نقطه N و M بطولهای x' و x'' ریشه‌های معادله فوق را تعیین می کنیم وقتی m تغییر کند مکان هندسی نقطهٔ K وسط قطعه خطهایی MN را تعیین کنید .

دبیرستان بایکان ـ دبیر چاوشیان ـ فرستنده ثابتی

۱ـ حدود m را چنان معلوم کنید تا سه جمله‌ای:

$$(3m+1)x^2-2(m+3)x+m-1$$

همواره مثبت باشد .

۲ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{y}+\dfrac{\sqrt{y}}{x}=\dfrac{9}{4}\\[2ex]\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{17}{4}\end{cases}$$

را حل کنید .

۳ـ ثابت کنید خطوط

$$(m+1)x-(2m-3)y+3m-2=0$$

به ازاء جمیع مقادیر m از نقطه ثابتی می گذرد مختصات نقطهٔ ثابت را معلوم کنید .

۴ـ نقاط $A(5\ و\ 2)$ و $B(1\ و\ -1)$ و $C(-2\ و\ 4)$ سه رأس مثلث ABC است مساحت مثلث را محاسبه کنید .

۵ـ نقاط $A(5\ و\ 2)$ و $B(1\ و\ -1)$ مفروض است معادلهٔ خطی بنویسید که عرض ازمبدأ آن -1 بوده و تانژانت زاویهٔ آن با خط AB برابر $\frac{1}{2}$ شود .

۶ـ نقاط $A(5\ و\ 2)$ و $B(1\ و\ -1)$ معلوم است روی خط $x-2y=2$ نقطه‌ای بدست آورید که فاصلهٔ آن نقطه تا AB برابر ۲ شود.

۷ـ نقاط $A(5\ و\ 2)$ و $B(1\ و\ -1)$ و $C(-2\ و\ 4)$ معلوم است نقطه‌ای مانند D بدست آورید تا چهارضلعی $ABCD$ ذوذنقه قائم‌الزاویه‌ای به قاعده های BC و AD شود .

دبیرستان رهنما ـ دبیر : حسن مولائی فرستنده : درخشان نو

مسألهٔ اول درمعادلهٔ درجه دوم نسبت به (λ)

$$\lambda^2-2y\lambda+2-x+y^2+y=0$$

بفرض آنکه x و y مختصات نقطه‌ای مانند P باشد مکان نقطهٔ P را طوری تعیین کنید که :

اولا معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشه‌های حقیقی نباشد .

ثانیاً دارای دو ریشه مساوی باشد .

ثالثاً مجذور نصف مجموع ریشه‌ها برابر حاصلضرب دو ریشه گردد .

مسألهٔ دوم ـ دو خط

$$(D)\quad 3y+4x-3=0 \text{ و } -3x+4y-8=0$$

و نقطه $M(\alpha-1\ و\ \alpha)$ مفروضند مقدار α را طوری تعیین کنید که نقطه M روی یکی از نیمساز های دو خط مفروض واقع باشد .

ثانیاً به ازاء $\alpha=-1$ نقطهٔ M را به نقطهٔ P واقع روی (D) وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا PM محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند اگر نقطهٔ C وسط AB باشد مکان هندسی نقطه C را وقتی P روی D حرکت کند بدست آورید .

مسألهٔ سوم ـ نقاط $A(4\ و\ 0)$ و $B(-1\ و\ 3)$ و $C(m\ و\ 8)$ مفروضند مقدار m را طوری تعیین کنید که $ABC=90^\circ$ باشد .

ثانیاً ـ به ازاء چه مقدار از m این سه نقطه در یك استقامت هستند .

مسألهٔ چهارم ـ مطلوبست تعیین مقدار m به قسمی که نقطهٔ تقاطع خطوط $y=mx-3$ و $2x+5y=2$ روی نیمسازربع اول متقاطع باشند .

ثانیاً ـ اگر به ازاء $m=\frac{2}{5}$ دو خط مفروض را دوضلع مجاور متوازی‌الاضلاعی فرض کنیم که نقطه $A(3\ و\ 2)$ یکی از رؤس این متوازی‌الاضلاع باشد مختصات سه رأس دیگرمتوازی‌الاضلاع را بدست آورید .

دبیرستان قطب مذفول : دبیر فخرعطار

مسألهٔ اول ـ نقاط $x=12$ و $x=36$ واقع برمحور ox است تعیین کنید :

اولا ـ طول جبری AB را .

ثانیاً ـ دونقطهٔ C و D را روی محور ox قسمی اختیار کنید که $3\overline{AC}=2\overline{AD}=4\overline{CD}$ باشد تعیین کنید طول نقاط C و D را .

مسألهٔ دوم ـ نقاط $A(2\ و\ 2)$ و $B(-1\ و\ 5)$ و $C(a\ و\ b)$ معلومند ـ a و b طوری بیابید که این مثلث متساوی‌الاضلاع باشد .

مسأله سوم ـ روی Ox نقطهٔ متغیر A وروی محور Oy نقطهٔ ثابت B بعرض ۴ مفروضند.

از مبداء عمودی بر خط AB رسم میکنیم مکان هندسی پای عمود را وقتی که نقطهٔ A روی محور Ox حرکت میکند تعیین کنید.

مسئله چهارمـ نقاط $A(۳و۵)$ و $B(-۴و۲)$ و $C(۰و۷)$ مفروضندتعیین کنید.

اولا ـ طول ضلع AB را

ثانیاً ـ معادلهٔ ضلع AC را

ثالثاً ـ مساحت مثلث را بیابید.

رابعاً ـ معادلات اضلاع BC ومیانه AM وارتفاع BH ونیمساز داخلی CD را

خامساً ـ مختصات نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث را.

مثلثات

دبیرستان ادیب

۱ـ در روابط زیر α راحذف کنید

$$۲x\sin\alpha - ۲x = ۱$$

$$۴y - ۳\cot g^۲\alpha = ۵$$

۲ـ معادله زیر را حل کرده جوابهای بین صفر و π را بنویسید

$$۳\sin(۷x - \frac{\pi}{۶}) + ۳\cos(\frac{\pi}{۶} - ۷x) = ۰$$

۳ـ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید

$$\frac{\sin^۲x\,tg^۲x}{۱+tg^۲x} + \frac{\cos^۲x\cot g^۲x}{۱+\cot g^۲x} = ۱ - ۲\sin^۲x\cos^۲x$$

۴ـ ریشه‌های معادله زیر را بدست آورده ساده کنید

$$۶y^۲ - ۷y\sin\alpha - ۲\cos^۲\alpha + ۲ = ۰$$

۵ـ خطوط مثلثاتی ۱۸ درجه را حساب کنید.

دبیرستان تقوی ـ فرستنده: آشفته

ثابت کنید دورابطه زیر برقراراست

$$۲a\sin\frac{\pi}{۶} - \sqrt{۳}a\,tg\frac{\pi}{۶} + (a+b)^۲\cos^۲x$$

$$-(a-b)^۲\sin^۲\frac{۳\pi}{۲} = ۴ab$$

$$\frac{\cot g^۲x(۱+tg^۲x)-۱}{\cot gx(۱+tg^۲x)} = \cos^۲x$$

ثابت کنید رابطه زیر به x بستگی ندارد

$$\frac{۲\sin^۷x + ۲\cos^۶x - ۶\sin^۴x + ۶\sin^۲x}{\sin^۴x + \cos^۴x + \frac{۲}{tg^۲x + \cot g^۲x + ۲}}$$

معادلات زیررا حل وجواب صفر و ۲π را محاسبه کنید

$$tgx - ۳\cot gx = ۲ \quad (۱)$$

$$\cos^۲۲x - \sin^۲۲x = ۱ \quad (۲)$$

دبیرستان قلب وزفول ـ دبیر: اخوعطار

مسئله اولـ خطوط مثلثاتی کمان $\frac{۳۴۳\pi}{۳}$ راحساب کنید.

مسئله دوم ـ درستی اتحاد زیررا ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۳}(\sin^۸x + \cos^۸x - ۱) = \sin^۲x\cos^۲x(\sin^۲x\cos^۲x - ۲)$$

مسئله سوم ـ ازروابط زیر کمانهای x و y و z راحساب کنید.

$$۲x + ۳y - ۲z = \frac{۵\pi}{۱۲} \quad ۶x + ۲y + z = ۱۸۰^\circ$$

یا

$$۵x - y + ۳z = \frac{۹۵۰^g}{۳}$$

مسئله چهارم ـ معادلهٔ زیررا حل کرده جوابهای کلی وخصوصی رابدست آورید.

$$(tg^۲۲x - ۳)(\sin^۲۲x - \cos۲x + \frac{۱}{۴}) = ۰$$

هندسه

دبیرستان ادیب ـ دبیر: نوری

۱ـ خط راست D ودونقطه A و B که با خط D دریك صفحه نیستند مفروض است نقطه C را روی خط D چنان‌معین کنیدکه مثلث ABC در رأس C قائم الزاویه گردد (بحث نشود)

۲ـ دودایره C و C' در دوصفحه موازی P و P' مفروضند خطی بموازات امتداد معین Δ رسم کنیدکه دودایره مزبور را روی محیطشان قطع کند (بحث شود)

۳ـ از نقطه O محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC عمودی برصفحه مثلث اخراج میکنیم و نقطه M را بدلخواه روی این عمود انتخاب میکنیم.

اولا ثابت کنید :

$$\overline{MB}^۲ + \overline{AC}^۲ = \overline{MC}^۲ + \overline{AB}^۲$$

ثانیاً اگر A' محل تلاقی AO با BC باشد و نقطه K روی OM طوری باشد که رابطه $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OK}\cdot\overline{OM}$ برقرار باشد ثابت کنید K محل تلاقی ارتفاعات مثلث MAA' است و AK برصفحه BCM عمود است .

دبیرستان البرز ـ فرستنده : سیروس امیر سالاری

مسئله ۱ـ دوصفحه متقاطع P و Q مفروض است خطوط L_1 و L_2 را بترتیب درصفحات P و Q موازی فصل مشترک آنها رسم میکنیم ثابت کنید صفحه L_1 و L_2 مکان هندسی خطوطی است که بادوصفحه زاویه متساوی میسازد .

مسئله ۲ـ سه خط متقاطع ox و oy و oz که هر یك بر صفحهٔ دوتای دیگر عمودند مفروضند سه نقطه A و B و C را به ترتیب بر ox و oy و oz درنظر میگیریم و

$$OA=OB=OC=t$$

الف ـ مطلوبست مکان هندسی مرکز دایره محیطی مثلث ABC وقتیکه t تغییر نماید.

ب ـ مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که ازدوخط oy و ox متساوی‌الفاصله ودر ضمن بفاصله h از صفحه ABC باشد (در اینحال t را ثابت بگیرید)

مسئله ۳ـ دوصفحه P و Q متقاطع اندوزاویه مسطحه فرجه حاصل ۶۰ درجه است لوزی $ABCD$ را درصفحه P در نظر میگیریم بطوریکه $AB=a$ منطبق بریال فرجه وزاویه رأس A برابر ۶۰ میباشد از نقاط C و D دو عمود برصفحه P اخراج میکنیم تا صفحه Q را درنقاط C' و D' قطع نماید :

الف ـ شکل $ABC'D'$ را تعیین کنید.

ب ـ مساحت $ABC'D'$ راحساب کنید .

ج ـ طول اضلاع $ABC'D'$ را حساب کنید.

دبیرستان بابکان ـ دبیر : ا. کمی ، فرستنده : نابی

مسئله اول ـ ازنقطه O صفحه‌ای بگذرانید که با خط راست D موازی بوده وخط P ازآن بفاصله I باشد.

مسئله دوم ـ مربع $ABCD$ بضلع a در صفحهٔ P مفروض است :

از A عمود AM را برصفحهٔ P بطول a اخراج میکنیم و M را به رؤس مربع وصل میکنیم .

اولا ثابت کنید مسطحه فرجه‌هائی که یال آنها BC و CD است ۴۵ بود ومسطحه فرجه‌هائی که یال آنها MB و MD است ۹۰ است .

ثانیاً مساحت مثلث‌های MCB و MCD را برحسب a حساب نموده و ثابت کنید BD با MC متعامد است .

ثالثاً ـ از BD صفحه‌ای عمود بر MC مرور میدهیم که MC را در L قطع میکند ثابت کنید .

$$LD=LB$$

مسطحهٔ فرجه‌ای که یال آن MC است ۱۲۰° است.

دبیرستان قلب. درقول دبیر: فخرخطار

مسأله اول ـ خط D ودونقطه M و N دریکطرف خط قرار دارند . از خط D صفحه‌ای مروردهید که ازاین دونقطه بیك فاصله باشد . (بحث کنید)

مسأله دوم ـ دوصفحه P و Q ونقطه A خارج آندو مفروضند . قطعه خطی رسم کنید که‌محدود بین نقطه A و P باشد وموازی صفحه Q وطولش برابر l باشد. (بحث کنید)

مسئله سوم ـ خط ثابت D ودونقطه ثابت A و B در یکطرف آن قرار دارند. نقطه متغیر M روی xy را طوری انتخاب کنید که‌مجموع $MA+MB$ می‌نیم گردد.

فیزیك

دبیرستان البرز ـ فرستنده : سیروس امیرسالاری

۱ـ واحد شدت نور واحد شدت روشنائی را تعریف نموده طرز اندازه گیری شدت نور یك منبع نورانی را شرح دهید .

۲ـ تصویر جسم واقع در بینهایت دور را درآینه مقعر با رسم شکل شرح داده طول تصویر را حساب کنید .

۳ـ ساختمان اسپکترسکوپ رابطور خلاصه وطیف‌اجسام واقسام طیف را شرح دهید

۴ـ یك صفحهٔ تیره که‌سوراخ کوچکی روی‌آن قراردارد موازی بایك‌آینه مسطح وبفاصلهٔ ۴۰ سانتیمتر ازآن واقع‌است وازاین سوراخ‌نوربطور عمودی به‌آینه مسطح میتابد. اگر آینه مسطح را در نقطهٔ تابش باندازهٔ ۳۰ درجه بچرخانیم که‌دیگر

موازی با صفحه تیره نباشد تعیین کنید فاصله لکه روشنی که از انعکاس نور برروی صفحه تیره حاصل میشود تا سوراخ چقدر است .

۵ ـ در دوظرف یکی آب ودیگری سولفور کربن بارتفاع مساوی ۳۲ سانتیمتر میریزیم تعیین کنید وقتی ازبالای ظرفها نگاه کنیم عمق ظاهری کدامیك راکمتر می بینیم واگر بخواهیم عمق ظاهری هردوبرابرشود ارتفاع مایع کدام ظرف را وچه اندازه زیادکنیم ضریب انکسارآب نسبت بهوا $\frac{۴}{۳}$ و ضریب انکسار سولفور دوکربن نسبت برهوا ۱٫۶ میباشد .

۶ ـ فاصله جسمی از تصویرمجازیش دریك عدسی محدب ۳۲ سانتیمتروبزرگ نمائی عدسی در اینحال برابر۵ میباشد . اگر عدسی مقعری بهمگرائی (۴ ـ) دیوپتری با این عدسی ترکیب کنیم (به آن بچسبانیم) وفاصله جسم تا عدسی تغییرنکند فاصله جسم تا تصویرشیئی دراین حالت چه اندازه میشود.

دبیرستان بابکان ـ دبیر:مسعودی ، فرستنده: ثابتی

مسئله اول ـ دو چراغ بشدتهای $\frac{۱}{۲}$ و یول و۸۰ شمع در طرفین خط کشی بطول۳ مترقراردارند یك صفحه نیم‌شفاف را در چه فاصله ازاین دومنبع قرار دهیم تا از طرفین یکسان دیده نشود .

مسئله دوم ـ زاویه رأس منشوری ۴۵ وضریب شکست آن $\sqrt{۲}$ میباشد یك دسته شعاع باریك یکرنگ بطور عمودبر یکی از سطوح منشور برخورد میکند زاویه انحراف رابدست آورید .

ثانیاً ـ اگر زاویه تابش را زیاد کنیم آیا انعکاس کلی صورت میگیرد چرا ؟

مسئله سوم ـ یك عدسی محدب بهمگرائی ۵دیوپتری از جسمی که‌در فاصله۲۵سانتیمتری آن واقع شده تصویری‌میدهد محل تصویر را پیداکنید واگردر فاصله ۹۰ سانتیمتری این عدسی در طرفی‌که تصویر تشکیل شده است یك آینه محدب بفاصله‌کانونی ۲۰ سانتیمتر قرار دهیم محل آخرین تصویر را نسبت بعدسی تعیین نموده بزرگنمائی دستگاه را محاسبه‌کنید (بارسم شکل)

مسئله چهارم ـ یکعدسی‌بشکل هلال که شعاع انحنا طرفین آن $R_۱=۱۰^{cm}$ و $R_۲=-۲۰^{cm}$ مفروض‌است‌اگر همگرائی‌آن ۲٫۵ دیوپتری باشدضریب‌شکست آن چقدراست ودرصورتیکه این عدسی را بایکعدسی‌بهمگرائی ۵ـ دیوپتر بیکدیگر بچسبانیم همگرائی منتجه وفاصله کانونی دستگاه دوعدسی را تعیین کنید .

داوطلبان متفرقه ـ کاردون دبیر: ج . جواهری

۱ـ ۱٫۸۴ گرم‌از مخلوط کربنات‌کلسیم و کربنات‌منیزیم را به شدت حرارت میدهیم بطوریکه دیگر کاهش وزنی صورت نگیرد باآنچه باقی میماند۹۶٪ گرم وزن داردپیداکنید نسبت درصد مخلوط را.

۲ـ ۲۵cc ازیك اسید دسی‌نرمال توسط ۱۲٫۵cc ازیك باز۸ گرم در لیتر خنثی شده پیداکنید والاس گرم باز را

$C=۱۲$ و $Ca=۴۰$ و $P=۱۶$ و $My=۲۴$

کلاس ششم طبیعی

جبر ومثلثات

دبیرستان ایراندخت وزفول ـ دبیر:فخرعطار

مسأله اول ـ تابع (C) بمعادلهٔ

$$y=ax^۳+bx^۲+Cx+d$$

مفروض است.

اولا ـ a و b و c و d راقسمی تعیین کنید. که منحنی‌تابع (C) مینیمی بطول یك واقع برمحورطولها داشته باشدونقطه $A(-۱$ و $۴)$ ماکزیمم تابع باشد .

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع (C) بمعادله $y=x^۳-۳x+۲$ را رسم کنید.

ثالثاً ـ معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ عطف منحنی(C)رسم شده را نوشته‌آنرا رسم کنید .

مسأله دوم ـ معادلات خطوط مماس برمنحنی تابع $y=x^۲+۳x+۸$ را در نقطه$A(۴$ و $۵)$ نوشته مختصات‌نقاط تماس را پیداکنید . وتانژانت زاویه بین دومماس را بدست آورید .

مثلثات

مسأله سوم ـ معادله مثلثاتی زیرمفروض است.

$$(m+۱)\sin ۳x+(m-۱)\cos ۳x=m\sqrt{۲}+۱۰$$

اولا ـ m را قسمی تعیین کنید که یکی ازریشه‌های‌معادله برابر $\frac{\pi}{۶}$ گردد.

ثانیاً ـ بازاء جمیع مقادیر m در وجود ریشه‌های‌معادله بحث کنید.

ثالثاً بازاء $m=-۲(۱+\sqrt{۲})$ معادله راحل کنید.

دبیرستان پهلوی دزفول ـ دبیر فخر عطار

۱ـ تابع $y=x^2-4x+1$ ونقطه $A(0\ و\ -8)$ مفروضند .

اولا ـ معادلات خطوط مماس براین تابع را در نقطه A بنویسید .

ثانیاً ـ تانژانت زاویه بین دومماس ومختصات نقاط تماس را بیابید. همچنین مساحت مثلثی راکه از نقطهٔ A ونقاط تماس بدست می‌آید پیدا کنید .

۲ـ تابع (C) به معادلهٔ

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

مفروض است

اولا ـ ضرایب را قسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع دارای مینیمی برابر (-5) روی محور عرضها داشته باشد و نقطه ماکزیم آن $M(2\ و\ -1)$ باشد.

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=-x^3+3x^2-5$$

را رسم کنید و معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه عطف بنویسید .

۳ـ معادله مثلثاتی زیر مفروض است :

$$a\sin x-a\cos x+2\sin 2x=\sqrt{6}+1$$

اولا ـ a را قسمی تعیین کنید . که یکی از ریشه های معادله برابر ۷۵ درجه باشد .

ثانیاً به ازاء $a=2\sqrt{3}$ معادله را حل کنید جوابهای کلی و خصوصی بین صفر و2π را تعیین کنید .

دبیرستان قطب دزفول ـ دبیر : فخرعطار

۱ـ معادلات خطوط مماس بر تابع :

$$x^2+y-4x=0$$

را در نقطه $A(4\ و\ 0)$ نوشته ومختصات نقاط تماس را بیابید. تانژانت زاویه بین دو مماس و مساحت مثلثی راکه از نقاط تماس ونقطه A درست می‌شود پیدا کنید .

۲ـ معادله خط مماس بر تابع :

$$y=\sin 2x+\cos 2x$$

را در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ بنویسید .

۳ـ تابع $y=ax^2+bx^2+c$ مفروض است .

اولا ـ ضرایب را قسمی تعیین کنید که منحنی این تابع ازنقطه $A(1\ و\ -3)$ گذشته ونقطه مینیمم آن روی‌محورعرضها به عرض ۵ ـ باشد .

ثانیا ـ جدول ومنحنی نمایش تابع :

$$y=-x^3+3x^2-5$$

را رسم کنید .

۴ـ معادله مثلثاتی زیر مفروض است :

$$a\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\sqrt{2}+2$$

اولا ـ a را قسمی تعیین کنید که یکی ازجوابهای معادله $x=\frac{\pi}{6}$ باشد .

ثانیاً ـ معادله را به ازاء $a=5+2\sqrt{3}$ حل کرده جوابهای کلی وخصوصی بین صفر و π را تعیین کنید .

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان بابکان ـ دبیر جاوشیان ـ فرستنده ثابتی

۱ـ مختصات نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع :

$$y=\frac{4x^2-4x-2}{2x+1}$$

را بدست‌آورده بدون جدول تغییرات نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم را تشخیص دهید (به‌کمك مشتق دوم)

۲ـ مختصات مرکز تقارن منحنی تابع :

$$y=\frac{4x^2-4x-2}{2x+1}$$

را معین نموده و تحقیق کنید مرکز تقارن منحنی محل تلاقی خطوط مجانب منحنی تابع است .

۳ـ ثابت کنید خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد همواره منحنی :

$$y=\frac{4x^2-4x-2}{2x+1}$$

را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله مکان هندسی وسط دونقطهٔ تقاطع را بدست‌آورید .

۴ـ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم:

$$4x^2-2(m+2)x-m-2=0$$

را بااعداد ۲ ـ و۱ مقایسه‌کنید .

۵ـ معادلات خطوط مجانب منحنی توابع :

$$y=1-x\pm\sqrt{x^2-4x+3}$$

را بدست‌آورید .

۶ـ ازعبارتهای زیر تابع اولیه بگیرید .

$$x\sqrt{x^2-1} \quad و \quad \frac{4x^2-4x-1}{(2x-1)^2}$$

$$x^2\sqrt{x-1} \quad و \quad \frac{\sqrt[3]{2-5x}-x^3}{x^3\sqrt[3]{2-5x}}$$

دبیرستانهای عوارضی- دبیر پرویز شهریاری، فرستنده : حسین محملی

۱ـ تابع $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ مفروض است .

اولا ـ مشتقات $f'(x)$ و $f''(x)$ را بدون بازکردن پرانتزها حساب کنید .

ثانیاً ـ بدون تشکیل Δ ثابت کنید معادلهٔ $f'(x)=0$ دارای دوجواب است وحدود ریشه‌هارا معلوم کنید .

ثالثاً مقدارتوابع $F(x)$ و $\varphi(x)$ را برحسب $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ پیدا کنید .

$$F(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{(x-a)(x-b)}+\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(x-c)(x-a)}$$

II ـ تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$ مفروض است .

اولا ـ مرکز تقارن این منحنی را پیدا کنید .

ثانیاً ـ ازنقطهٔ $P(-\frac{5}{2}$ و $-\frac{3}{2})$ قائم بر منحنی تابع y رسم می‌کنیم معادلات این قائم ها را ومختصات پای آنها را پیدا کنید .

III ـ تابع اولیه‌ای از تابع :

$$y=\frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}}$$

را پیدا کنید که به ازاء $x=2$ برابر صفر گردد .

دبیرستان نظام وفا اهواز ـ دبیر : قوام نحوی

۱ـ عبارتهای زیررا حساب کنید :

$$x=\frac{\pi}{2} \quad \text{به‌ازاء} \quad y=tgx(1-tg\frac{x}{2})$$

$$y=\sqrt{x^2+2x^2-5}-\sqrt{x^3-4x^2+11} \qquad x=+\infty$$

۲ـ تابع زیررا حساب کنید :

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

ضرایب را طوری تعیین کنید که منحنی این تابع در نقطهٔ A به طول (۱ ـ) وروی محور طولها ماکزیمم بوده و ضریب زاویه مماس برمنحنی درنقطه‌ای به طول ۲ مساوی۳ باشد وطول نقطه عطف آن $\frac{1}{3}$ گردد .

ثانیاً ـ مطلوبست رسم منحنی تابع :

$$y=(x+1)^2(x-3)$$

وتعیین مختصات مرکز تقارن آن .

۳ـ مشتق تابع ضمنی زیررا پیدا کنید :

$$y^2\cdot tg^2x+y\cdot\cos x+8=0$$

۴ـ مشتق تابع زیررا پیدا کنید :

$$y=\cos^2\sqrt{x+1}+tg^2\frac{1}{x}$$

۵ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$2x^2+(m-3)x+3-m=0$$

به ازاء چه مقدار m هر دو ریشهٔ این معادله بین ۱ و ۱ ـ قراردارد .

۶ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$(m-4)x^2+6x+m+5=0$$

m را طوری پیدا کنید که ریشهٔ کوچکتر این معادله از صفر و یك کوچکتر وریشهٔ بزرگتر معادله ازصفر ویك بزرگتر باشد .

دبیرستان وفا اهواز ـ دبیر : قوام نحوی

۱ـ کسر زیر رابازاء $x=+\infty$ و $x=1$ حساب کنید

$$\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[4]{5x-4}}{x^2+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{5x+22}}$$

۲ـ تابع

$$y=-x^3+4x^2-4x+m^2+2m-3$$

مفروض است m را طوری پیدا کنید که عرض نقطهٔ ماکزیمم منحنی تابع صفرباشد .

ثانیاً ـ مطلوب است رسم منحنی تابع :

$$y=-x^3+4x^2-4x$$

وتعیین مختصات نقطه عطف آن .

۳ـ تابع $y = x \cdot \sin ax$ مفروض است a را طوری بگیرید که رابطهٔ زیر محقق باشد .

$$y + y'' = 2\cos x$$

۴ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$x^2 - (m+2)x + m^2 - 4 = 0$$

بدون تشکیل $\frac{c}{a}$ مقدار m را طوری بگیرید که معادله دارای دوریشهٔ مختلف‌العلامه یادوریشه متحدالعلامه باشد .

ثانیاً m را طوری بگیرید که یکی از ریشه‌های معادله بین ۰ و ۱ باشد .

ثالثاً ـ m را طوری بگیرید که عدد m بین ریشه ها باشد .

۵ ـ اولا منحنی تغییرات تابع :

$$y = (x^2 - 1)^2$$

را رسم کنید .

ثانیاً ـ اگر $x = tg^2 \frac{t}{3}$ باشد مشتق y را نسبت به ـ متغیر t بدست آورید .

۶ ـ از تابع زیر مشتق بگیرید در صورتی که y تابع x باشد .

$$y^5 x^2 + y^2 x^5 + x - y + 12 = 0$$

مثلثات

دبیرستان شمارهٔ ۲ آذر

۱ـ عبارت :

$$S = 2(\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x) - 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$$

را قابل محاسبه با لگاریتم نمائید .

۲ـ اولا معادله مثلثاتی :

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = m$$

را به فرض اینکه $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد حل و بحث کنید و قسمتهائی ازدایرهٔ مثلثاتی راکه معادله دارای یك جواب قابل قبول ویادوجواب قابل‌قبول است ازروی شکل نشان دهید (عاشور بزنید) .

ثانیاً ـ m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$2\cos(x' - x'') = \sin(x' + x'')$$

x' و x'' ریشه‌های معادله است .

۳ـ زاویه قائمه xoy و نقطه A در داخل آن مفروض است $OA = a$ از نقطه A عمودی بر OA اخراج نموده امتداد میدهیم تا ox و oy را به ترتیب در B و C تلاقی نماید به فرض اینکه $BOA = x$ باشد x را طوری تعیین کنید که محیط مثلث BOC برابر ma باشد (بحث بر حسب m) .

۴ـ معادلهٔ $2\cos x + \cos x + \cos 3x = 0$ را به یك معادلهٔ درجه اول و یك معادله درجه دوم بر حسب یکی از خطوط مثلثاتی x تبدیل کنید .

سپس ریشه هـای معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را به فرض اینکه $tg\varphi = 4$ باشد قابل محاسبه با لگاریتم نمائید .

دبیرستان بایکان ـ دبیر : بهنیا ، فرستنده ثابتی

۱ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع .

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 - 2\sin x}$$

را از $\frac{\pi}{6}$ تا یك دورهٔ تناوب رسم کنید :

۲ـ معـادلهٔ

$$\begin{cases} (m-2)\cos 2x - 2\sin^2 x = m \\ -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

را حل وبحث کنید سپس به ازاء $m = -3$ ریشه های معادله را بدست آورید .

۳ـ مطلوبست حل معادلهٔ :

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$$

۴ـ اولا عبارت :

$$y = \sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$$

را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید .

ثانیاً ـ به ازاء :

$$\sin 18 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

تحقیق کنید که مقدار y برابر $\cos 7^\circ$ میشود .

۵ـ اگر $\sin x + \sin y = \sqrt{3}(\cos x - \cos y)$ باشد ثابت کنید : $\sin 3x + \sin 3y = 0$

۶ـ اگر α و β زوایای حاده باشند وداشته باشیم :

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } tg\alpha = \frac{1}{7}$$

ثابت کنید: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$ است .

دبیرستانهای خوارزمی ـ دبیر : قیصری ، فرستنده : مخملی

۱ـ اولاً کسر $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}$ را قابل‌محاسبه لگاریتمی نموده وازروی‌آن نتیجه بگیرید .

$$tg\frac{\pi}{۸}=cotg\frac{۳\pi}{۸}=\sqrt{۲}-۱$$

ثانیاً عبارت زیررا قابل محاسبه لگاریتمی کنید .

$$sin\frac{۳\pi}{۸}+(\sqrt{۲}-۱)\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}+۱$$

۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x-y \\ \cos x-\cos y+۲\sin x\sin y=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۳ـ معادلهٔ

$$m(\cos x+\sin x)+m\sin ۲x+۱=۰$$

مفروض است .

اولا معادله رابحث کنید درصورتی که :

$\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۷\pi}{۱۲}$ باشد .

ثانیاً ـ به ازاء $m=۱$ معادله را حل کنید .

۴ـ معادلهٔ

$$(m+۱)\sin x+(۱-m)\cos x=m+۱$$

مفروض است .

اولاً ـ ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر m معادله دوجواب می‌باشد .

ثانیاً ـ اگر x' و x'' جوابهای معادله در فاصله صفر و ۲π باشد m را طوری معلوم کنید تا رابطه :

$$x'-x''=\frac{\pi}{۶}$$

برقرار باشد .

***

حساب استدلالی

دبیرستان البرز ـ فرستنده . وریری

۱ ـ مطلوبست تعیین a و b و عدد N درصورتی که داشته باشیم :

$$(N)_{۱۰}=(۲۱۳)_a=(b۲b)_۸$$

۲ـ مطلوبست تعیین عدد : $N=\overline{mcdu}$ درصورتی که

$$\overline{medn}-(m+c+d+u)=۱۳۳۲$$

۳ـ مطلوبست تعیین عدد $N=\overline{abab}$ در صورتی که مضرب ۹ بوده و باقیماندهٔ تقسیم‌آن بر ۱۱ برابر ۲ باشد .

۴ ـ مطلوبست تعیین اعدادی‌که چون‌آنها را در ۴۳ ضرب نموده و بر ۲۳ تقسیم‌کنیم باقیمانده تقسیم همواره برابر ۲۲ گردد .

۵ ـ ثابت کنید عدد :

$$A=n(n^۴-۵n^۲+۴)$$

به ازاء $n>۱$ همواره بر ۴ و ۵و۸ قابل قسمت است .

۶ـ به شرط‌آنکه a عددی فرد باشد ثابت‌کنید عدد

$$A=a^{n+۲}-a^n$$

مضرب ده می‌باشد .

دبیرستان بابکان ـ دبیر ارگمی : فرستنده ثابتی

۱ـ عدد دورقمی پیداکنید که اگر درمجموع ارقام خود ضرب شود با مجموع مکعبات ارقام خود برابرشود .

۲ ـ دو عدد a و b را در مبنای ۸ برهم تقسیم کرده‌ایم خارج قسمت $(۵۴)_۸$ و باقیمانده $(۶۲)_۸$ است اگر به عدد a عدد $(۲۴۲)_۸$ را اضافه‌کنیم خارج قسمت‌آن بر b عدد $(۶۰)_۸$ بوده و باقیمانده صفر است a و b را معین نموده وآنهارا در مبنای ۱۰ حساب‌کنید .

۳ـ اگر $x>۳$ باشد از رابط :

$$(abc)_x=(cba)_۲$$

a و b و c و x را حساب‌کنید .

۴ـ درضرب عدد a در عدد ۵۴۳ در نتیجهٔ عدم توجه حاصل ضرب های جزئی‌دوم‌وسوم‌را یکمرتبه بیشتر به‌سمت چپ برده‌ایم و اشتباه حاصل ۱۵۷۹۵۰۰ است . a را حساب‌کنید.

۵ـ عدد $\overline{mcdu}$ را با شرایط زیر پیداکنید .

$$\begin{cases} ۴\overline{mc}-\overline{du}=۸ \\ \overline{cd}=\overline{mu}+۲۰ \\ \overline{cu}=\overline{md}+۲۰ \end{cases}$$

دبیرستان قطب دزفول دبیر : فخر عطار

مسألهٔاول ـ ازرابطهٔ زیر α را تعیین کنید .

$$(۲۱)_\alpha\times(۱۲)_\alpha=(۱۰۲۲)_\alpha$$

مسألهٔ دوم ـ مطلوبست تعیین اعدادی بین ۱۰۰ و ۳۰۰ که باقیمانده تقسیم هریك برعدد ۴۷ مساوی ۵ گردد .

مسألهٔ سوم ـ عددی دو رقمی تعیین کنید که اختلافش با عدد متلوبش ۳۶ بوده و رقم یکانش ۵ برابر رقم دهگانش باشد .

مسألهٔ چهارم ـ دوعدد صحیح تعیین کنید که تفاضلشان ۱۰ بوده واگر ازهریك ۴ واحد کم کنیم حاصلضرب به اندازهٔ ۲۱۶ واحد کم می گردد .

مسألهٔ پنجم ـ در تقسیم A بر B خارج قسمت ۵ و باقیمانده (۱۷) است مطلوبست تعیین مقسوم و مقسوم علیه بنا بر آنکه اگر از هر یك دو واحد کم کنیم خارج قسمت تغییر نکرده وباقیماندهٔ جدید $\frac{5B}{7}$ گردد .

رقومی و ترسیمی

دبیرستان البرز ـ فرستنده : وزیری

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید واحد سانتیمتر مقیاس $\frac{1}{1}$.

صفحهٔ P به شیب $\frac{2}{3}$ مفروض است مقیاس شیب آنرا سمت چپ کاغذ رسم کنید به طوری که افقیه رقوم صفر آن برمحور اقصر واقع شده وترقی رقوم آن از پائین به بالا باشد نقطه a_5 روی محور اطول به فاصله ۶ بالای مرکز کاغذ واقع است :

۱ـ از نقطه a_5 خطی رسم کنید که افقیه رقوم ۲ صفحه P را درنقطهٔ O سمت چپ مرکز کاغذ قطع کند وزاویه حقیقی این خط با H_2 برابر ۶۰° باشد .

۲ـ عمود مشترك خطوط AO و H_0 را رسم کنید (H_0 افقیه رقوم صفر P باشد) .

۳ـ a_5 یك رأس و O مرکز مربع ABCD است درصورتی که رقوم B برابر ۳ باشد ملخص مربع را رسم کنید (b را سمت چپ O اختیار کنید)

۴ـ مربع ABCD قاعده مکعب مستطیل : ABCDEFGH است به طوری که AE = ۴ و رقوم E بیشتر ازرقوم A است ملخص آنرا رسم کرده وخطوط مرئی و مخفی را مشخص نمائید .

دبیرستان انوشیروان دادگر ـ دبیر ـ مهندس محمود خوئی

مسألهٔ هندسه رقومی : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱

محور اقصر کاغذ را افقی و محور قائم را محور اطول انتخاب کرده محل تلاقی آنها مرکز انتخاب شود .

۱ـ افقیه رقوم ۲ صفحه P را برمحور اقصر کاغذ منطبق اختیار نموده ویك بزرگترین شیب صفحه را درکنار چپ کاغذ بقسمی رسم کنید که با صفحه افق تصویر زاویه ۴۵ درجه ساخته وجهت ترقی رقوم آن از پائین به بالا باشد .

۲ـ نقطه a_4 را در صفحه P به قسمی انتخاب نمائید که تصویرش به فاصله ۳ سمت چپ محور قائم کاغذ قرار گیرد از این نقطه خط a_4b_1 را با شیب $p=\frac{1}{2}$ رسم نمائید به فرض آنکه نقطه b سمت راست a واقع شود .

۳ـ برروی AB در صفحه P متوازی الاضلاعی بنا کنید که زاویهٔ $DAB=60^\circ$ و $DA=\frac{2}{3}AB$ بوده و خط cd سمت راست ab واقع و رقوم D بیش از C باشد .

۴ـ متوازی الاضلاع فوق قاعده متوازی السطوح مایلی است که وجه ABFE مستطیل و وجه BCGF لوزی بوده ویالهای جانبی متوازی السطوح افقی می باشند. ملخص متوازی السطوح را که قاعده دیگرش در سمت پائین کاغذ تصویر میشود رسم نموده و خطوط مرئی و مخفی آن را تمیز دهید.

۵ـ مقطع متوازی السطوح را با صفحه افقی رقوم ۳ یافته وآن را مرئی ومخفی نمایند .

۶ ـ فاصلهٔ رأس E از متوازی السطوح را از صفحه P مشخص نموده واندازه حقیقی آن را نشان دهید .

۷ـ عمود مشترك خط BF و GH را روی شکل رسم نمائید .

هندسه ترسیمی ـ

مسألهٔ اول: برروی خط جبهیه d d' نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت بعد به ارتفاع آن برابر $\frac{2}{3}$ باشد .

مسألهٔ دوم : قطعه خط مفروض bcb'c' ضلع مربعی است که ضلع دیگر آن aba'b' افقی است ملخص تصاویر مربع را رسم کنید .

دبیرستان بایکان ـ دبیر ارگهی : فرستنده ناجی

محورهای کاغذ را رسم کنید واحد سانتیمتر ومقیاس $\frac{1}{1}$ است.

۱ـ نقطه a_0 ، برمرکز کاغذ و به فاصله ۶ وسمت چپ a روی محور اقصر نقطهٔ c_0 و به فاصله ۳ و سمت راست a نقطهٔ b_0 روی‌همین‌محورواقع‌است . باتسطیح ساده تحقیق کنید زاویه BAC ، ۱۳۵° است ($ba=3$) .

۲ـ صفحهٔ قائم V عمود منصف a_0c_0 را رسم ومقیاس شیب صفحهٔ P عمود منصف b_0a_0 را در بالای‌کاغذ معین نموده فصل مشترك‌دوصفحهٔ P و V را تعیین کنید وتحقیق کنید که این فصل مشترك افقیه رقوم ۶ از صفحه P است .

۳ـ از c_0 و فصل مشترك مزبور صفحه‌ای تشکیل می‌شود c_0 را حـول فصل مشترك تسطیح نموده و تحقیق کنید که شیب صفحه مزبور ۲ است .

۴ـ مثلث متساوی‌الساقین Dac را به قاعده ac و در بالای‌آن چنان رسم کنید که $D=30°$ باشد و طول ساق CD را محاسبه کنید .

۵ـ نقطهٔ d_6 را روی فصل مشترك دو صفحهٔ P و V ، در بالای محور افقی چنان اختیارکنید که اندازه حقیقی c_0d_6 با CD برابر شود و بیان کنید که $DC=DB=DA$ می‌باشد . ملخص ارتفاع هرم $d_6a_0c_0b_6$ را ازرأس d_6 رسم کنید .

۶ـ ملخص منشوری را رسم کنید که قاعده آن $a_0b_6d_6$ بوده و یك یال جانبی آن d_6c_0 باشد خطوط مرئی و مخفی را تمیز دهید .

۷ـ ملخص مرکز ثقل منشور را معین کنید .

۸ـ از مرکز ثقل منشور صفحه‌ای به موازات دو قاعده رسم نموده یك مقیاس شیب آنرا درسمت راست‌کاغذ رسم کنید و مقطع آنرا با منشور معین‌کرده خطوط مرئی و مخفی مقطع‌را مشخص‌کرده ومقدار حقیقی‌آنرا درشکل نشان دهید .

دبیرستانهای خوارزمی ـ دبیر : مهندس محمود حوئی

هندسه رقومی

مسألهٔ : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصرکاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیارکرده محل تلاقی آنهـا را مرکز کاغذ انتخاب نمائید .

۱ـ صفحه P با صفحه افق تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و افقیه رقوم ۲ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق است . بزرگترین شیب این صفحه را درسمت چپ کنارکاغذ به نحوی رسم نمائیدکه جهت ترقی رقوم‌آن از بالا به پائین باشد .

۲ـ نقطه b_6 راکه تصویرش به فاصلهٔ ۵ سمت چپ مرکز کاغذ واقع است در صفحه P انتخاب نموده از این نقطه خطی

به شیب $p=\frac{1}{2}$ در صفحه P به قسمی رسم کنیدکه تصویرش از چپ به راست و از بالا به پائین بوده و برروی‌آن نقطه a_5 را انتخاب نمائید .

۳ـ نقطه m را به فاصلهٔ ۵ سمت راست مرکز کاغذ برروی محور اقصر انتخاب نموده و خط MA را به قسمی مدرج و مشخص نمائیدکه درفضا بر AB عمود گردد .

۴ـ قطعه خط AB ضلع مستطیل $ABCD$ می‌باشدکه AD برروی AM واقع بوده وقطر BD خط افقی می‌باشد ملخص مستطیل راکه cd سمت راست ba می‌باشد رسم نمائید.

۵ـ از نقطه O مرکز مستطیل فوق خطی بر صفحه P عمود نموده و نقاط E و F را بـر روی آن بـه قسمی اختیارکنیدکه $OE=OF=10$ بوده و رقـوم E بیش از F باشد .

۶ـ هشت وجهی $EABCDF$ را رسم نموده وبه فرض آنکه صفحه افق تصویر حاکی ماوراء باشد آن را مـرئی و مخفی نمائید .

۷ـ مقطع هشت وجهی فوق را با صفحه افـق تصویر تعیین نمائید .

۸ـ اندازه حقیقی زاویهٔ BED را روی شکل درست بالای‌کاغذ مشخص کنید .

هندسه ترسیمی :

مسأله اول : برروی خط dd' نقطه‌ای تعیین کنیدکه نسبت بعد به ارتفاعش برابر $\frac{2}{3}$ باشد .

مسأله دوم : قطعه خط مفروض $aba'b'$ یکی از ساقهای مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین BAC است که زاویه A قائمه بوده و ساق دیگرش AC افقیه است ملخص مثلث مزبوررا رسم نمائید .

دبیرستان رهنما ـ دبیر : مهندس محمود حوئی

هندسه رقومی :

مسأله : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱محور اقصر را بر محور افقی ومحور اطول را برمحور قائم‌کاغذ منطبق اختیار نموده مرکز کاغذ محل تلاقی دومحور باشد .

۱ـ قطعه خط a_2d_6 که اساس آن $i=2$ و تصویرش بر محور اقصر منطبق است به قسمی رسم کنیدکه a به فاصله۳ سمت چپ مرکز کاغذ واقع و d سمت راست‌آن قرارگیرد .

۲ ـ از نقطه a_2 صفحه‌ای بر خط AD عمود کرده و یك مقیاس شیب این صفحه را در سمت پائین کاغذ رسم کنید .

۳ ـ از نقطه a_2 در صفحه فوق خطی رسم کنید که تصویرش با محور اقصر کاغذ زاویه ۶۰ درجه بسازد و نقطه b_2 این خط در سمت چپ و پائین a قرار گیرد. اساس این خط را محاسبه نمائید .

۴ ـ بر سه‌نقطه a و b و d متوازی‌الاضلاعی بنا کنید که BD قطرش باشد. و صفحه این شکل‌را با رسم مقیاس شیب آن مشخص کنید .

۵ ـ از نقطه O مرکز شکل ABCD افقیه‌ای رسم نمائید که تصویرش بر محور اقصر کاغذ عمود باشد و بر روی آن SO = ۱۲ را بقسمی جدا کنید که s در بالای صفحه کاغذ واقع شود .

۶ ـ هرم SABCD را رسم و رقوم رأس آنرا کامل نموده و مقطع آنرا با صفحه‌ای که از اواسط خطالراسهای جانبی SA و SB و SC و SD میگذردیافته و قسمتی ازهرم را که بین صفحه قاطع و صفحه قاعده قرار دارد مرئی ومخفی نمائید .

۷ ـ عمود مشترك دو خط AD و SO را روی شکل رسم نمائید .

۸ ـ اندازه و شکل حقیقی ABCD رابا تسطیح آن حول افقیه رقوم هشت صفحه آن‌درسمت پائین کاغذمشخص نمائید.

هندسه ترسیمی :

مسأله اول : بر روی‌نیمرخ مفروض $b'c'$ نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت فواصلش از دو اثر نیمرخ $\frac{1}{2}$ باشد .

مسأله دوم : قطعه‌خط $bdb'd'$ قطرمربع ABCD است که ضلع AB آن افقی میباشدنقطه aa' رامشخص کرده تصاویر مربع را کامل کنید .

دبیرستان قطب وزفول دبیر: فخر مختار

الف ـ رقومی ـ محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید (واحد سانتیمتر مقیاس است)

۱ ـ صفحه P به شیب $\frac{2}{3}$ راقسمی مشخص کنید که‌افقیه‌سفر آن‌زیر محور اقصر کاغذبوده و فاصله‌اش‌ازآن ۳ سانتیمتر باشد. یك مقیاس شیب صفحه را کنار چپ کاغذ به فاصله ۱ رسم کنید (ترقی رقوم بطرف بالا)

۲ ـ نقطه b_2 واقع در صفحه P روی نیمسازربع دوم قرار دارد (محورهای مختصات بر محورهای اطول و اقصر منطبق است)

۳ ـ خط a_2b_2 را در صفحه P قسمی اختیار کنید که شیب آن برابر $\frac{1}{3}$ باشد. (a سمت چپ b است)

۴ ـ نقطه C_1 را بر روی این صفحه قسمی بگیرید که‌طول‌حقیقی شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر ۴/۵ گردد.(c سمت راست b واقع است)

۵ ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را کامل کنید.

۶ ـ متوازی‌السطوحی روی این متوازی‌الاضلاع بنا کنید که یالهای آن افقیه بطول ۹ باشد. این یالها موازی محور اطول کاغذ بوده و قاعدهٔ دوم آن بالای صفحه P میباشد، خطوط‌مرئی‌و مخفی را مشخص کنید.

ب ـ ترسیمی ـ روی خط dd' نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع‌بعد و ارتفاعش برابر ۵ گردد.

۲ ـ قرینه نقطهٔ aa' بعد ۴ و ارتفاع ۲ و طول ۳ ـ را نسبت به صفحات تصویر و منصف‌الزجه بیابید.

۳ ـ آثار نیمرخی را پیدا کنید که ازنقاط A بطول ۲ و بعد ۳ و ارتفاع ۵ و B بعد ۶ و ارتفاع ۲ بگذرد. روی این نیمرخ نقطه‌ای بیابید که بعدش ۴ برابر ارتفاعش باشد.

دبیرستان مروی (کلاسهای ۱ و ۲) دبیر مهندس محمودخونی

مساله رقومی ـ محور اقصر کاغذ واافقی‌ـمحوراطول را قائم محل تلاقی مرکز کاغذ واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است.

۱ ـ صفحه P را به قسمی رسم کنید که افقیه رقوم ۱ آن بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده و با صفحه افق تصویر زاویه ۴۵ درجه بسازد جهت ترقی رقوم آن‌از پائین ببالاباشد یك مقیاس شیب صفحه را در سمت چپ کنار کاغذ رسم کنید

۲ ـ نقطه a_2 را در این صفحه بقسمی رسم کنید که‌به فاصله ۴ سمت چپ محور قائم کاغذ قرار گیرد از این نقطه در صفحه P خطی رسم کنید که شیب آن $p=\frac{1}{2}$ بوده و برروی آن نقطه c_2 را بقسمی اختیار کنید که c سمت راست a واقع شود.

۳ ـ قطعه خط AC قطر لوزی است که قطر دیگرش BD افقی‌بوده و $BD=\frac{2}{3}AC$ باشد و حروف لوزی‌در جهت مثلثاتی تصویر میشود .

۴ ـ لوزی فوق قاعده تحتانی متوازی‌السطوحی است که یالهای جانبی آن بر صفحه P عمودبوده و اندازه حقیقی هر یك برابر ۱۵ میباشد، متوازی‌السطوح را رسم و مرئی و مخفی نمائید .

۵ ـ عمود مشترك دو خط BD و EG را روی شکل رسم کنید .

۶ ـ مقطع متوازی‌السطوح ABCDEFGH فوق را با صفحه افقی رقوم ۱۰ تعیین نمائید .

۷ ـ زاویهٔ بین صفحه P را با صفحه‌لوزی ABCD بیابید و اندازه حقیقی آنرا مشخص کنید.

هندسه ترسیمی :

مسأله اول : فاصله نقطه A از خط‌الارض برابر ۵ و فاصله‌اش از نیمساز ربع اول برابر یك واحد میباشد با رسم هندسی ملخص نقطه A را که در بالای صفحه نیمساز اول واقع است رسم نمائید .

مسأله دوم : از نقطه مفروض 'aa قطعه خط AB را بقسمی‌رسم کنید که تصویر افقی آن ab داده‌شده و AB=1 نیز مقدار معلوم باشد .

دبیرستان مروی (کلاسهای۳ و۴) ـ دبیر مهندس محمود خوئی

مسأله‌هندسه رقومی : واحد سانتیمتر ـ مقیاس۱:۱ محوراقصر کاغذافقی‌ومحور اطول‌را قائم انتخاب‌نموده‌محل تلاقی آنها را مرکز بنامید.

۱ ـ نقطه a_4 بر روی محوراقصر کاغذ بفاصله ۶ سمت چپ مرکز و نقطه b_4 بر روی محور اقصر بفاصله ۱/۵سمت راست مرکز کاغذ مفروض است بر افقیه a_4b_4 صفحه‌ای مرور دهید که شیب آن $p=\frac{2}{3}$ بوده ترقی رقوم بزرگترین شیبش از بالا به پائین باشد . یك مقیاس شیب این صفحه را در سمت چپ بفاصله حد اقل ۹ از مرکز کاغذ رسم نمائید .

۲ ـ نقطه C_5 را درصفحه فوق بقسمی تعیین نمائیدکه نسبت شیب‌های دو خط CA وCB برابر $\frac{1}{2}$ باشد .

۳ ـ سه نقطه A و B و C رؤس یك متوازی‌الاضلاع هستند که رأس چهارم آن سمت چپ a تصویر میشود ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم نمائید

۴ ـ متوازی‌الاضلاع‌فوق‌قاعده‌تحتانی‌متوازی‌السطوحی است که تصویر یالهای جانبی موازی‌محور قائم و با صفحه افق زاویه ۳۶ درجه میسازند و طول حقیقی هر یك از آنها برابر ۱۰/۵باشد ملخص متوازی‌السطوح را که رقوم‌رأس با ۰/۱ تقریب اعداد صحیح میباشند، رسم و آنرا مرئی ومخفی‌نمائید

۵ ـ اندازه حقیقی زاویه CAD را با تسطیح آن در سمت‌پائین‌کاغذ نشان دهید .

۶ ـ از نقطه O مرکز قاعده فوقانی ارتفاع متوازی‌السطوح را رسم و اندازه حقیقی آنرا مشخص کنید .

۷ ـ عمود مشترك دو خط AB و CG را روی شکل رسم نمائید .

هندسه ترسیمی :

مسأله اول ـ بر روی نیمرخ‌مفروض 'bcb'c نقطه‌ای پیدا کنید که نسبت فواصلش از اثر افقی و قائم نیمرخ برابر $\frac{2}{3}$ باشد .

مسأله دوم : قطعه خط مفروض 'bcb'c قطر مربعی است که قطر دیگرش افقی است ملخص مربع را رسم کنید .

دبیرستان‌شماره ۱ و ۲شمایون‌ـدبیر مهندس محمود خوئی

هندسه رقومی :

مسأله ـ واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیار کرده محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید .

۱ ـ نقطه a_4 را بفاصله ۵/۲ سمت چپ محور قائم و بفاصله۲ زیرمحور اقصرکاغذ انتخاب نموده از این‌نقطه خطی رسم کنید کـه شیب‌آن $p=\frac{1}{2}$ و محور قائم کاغذ را در نقطه d_6 که تصویرش سمت پائین مرکز کاغذ است قطع نماید .

۲ ـ بر خط a_4d_6 صفحه‌ای مرور دهید که با صفحه افق‌تصویرزاویه $\alpha=45$ درجه‌بسازدو افقیه‌های‌آن کوچکترین زاویه ممکنه را با محور اقصر کاغذ بسازد یك بزرگترین شیب این صفحه را در سمت چپ کاغذ رسم نمائید .

۳ ـ از نقطه D در صفحه فوق خطی رسم کنید که با امتداد افقیه‌های صفحه مربور در فضا زاویه ۴۵ درجه بسازد و اثرافقی این‌خط سمت‌راست محور قائم کاغذ واقع‌باشد و برروی آن نقطه c_4 را انتخاب کنید .

۴ ـ بر سه نقطه A و D و C متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که AC قطرش باشد .

۵ ـ متوازی‌الاضلاع ABCD قاعده تحتانی منشور ناقص قائمی است که یالهایCG و BF هر یك برابر ۱۰ و یالهای AE و DH هر یك‌برابر ۵ میباشند منشور ناقص ABCDEFGH را رسم و مرئی و مخفی نمائید .

۶ ـ مقطع منشور ناقص فوق را با صفحه افقی رقوم عشت یافته و نسبت بجسم مرئی و مخفی کنید .

۷ ـ عمود مشترك یال BF وخط AC را روی شکل رسم کنید .

هندسه ترسیمی :

مسأله اول : بر روی‌نیمرخ‌مفروض 'aba'b نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از اثر قائم نیمرخ ۳ باشد .

مسأله دوم : خطی رسم کنید که تصویر افقی آن معلوم بوده و با صفحه افق تصویر زاویه ۴۰ درجه بسازد و صفحه نیمساز اول را در نقطه‌ای ببعد ۳ قطع کند .

مکانیك

دبیرستان البرز ـ فرستنده : محمد وزیری

۱ ـ اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰ کیلوگرم با سرعت ثابت ۹۰ کیلومتر در ساعت درجاده‌ای افقی حرکت می‌کند. در یك لحظه راننده موتوررا خاموش و ترمزمی‌کند و اتومبیل پس‌از طی‌مسافت ۲۵ متر می‌ایستد. معین کنید ۱ـ نیروی ترمز برحسب Kg و نیوتن و زمان این‌حرکت. ۲ـ اگر اتومبیل از جاده شیب‌داری به شیب ۰/۰۵ بالا رود که اصطکاك سطح معادل ۵۰ کیلوگرم ومقاومت هوا براتومبیل ازرابطه $R=0/2v^2$ که درآن v برحسب متر برثانیه و R کیلوگرم است حساب‌شود و موتورنیروئی معادل ۱۴۵ کیلوگرم نیرو بر اتومبیل وارد کند سرعت حد اتومبیل را دراین جاده حساب کنید. $g=10$

۲ ـ پاندول ساده‌ای تشکیل‌شده از گلوله‌آهنی به وزن ۱۰ کیلوگرم که بوسیله نخ نازکی‌آویزان شده است درزیراین پاندول یك‌آهنربای‌الکتریکی قرارمی‌دهیم که نیرویی ازپالا به پائین درامتداد قائم بر پاندول وارد می‌کند و بالنتیجه زمان انطباق این پاندول با پاندول ساعتی که درست ثانیه را می‌زند ۳دقیقه و۱۸ثانیه می‌شود. معین کنید نیروی وارد برپاندول را ازآهن‌ربا . $g=980$

۳ ـ گلوله A به‌جرم m روی یك‌سطح افقی که‌ضریب اصطکاك‌آن ۰/۵ است قرارگرفته است وبدان نخی متصل‌است که ازروی قرقره O گذشته وبه انتهای دیگرنخ گلوله B که جرمش معادل گلوله A است متصل است وروی سطح شیب‌داری قرارگرفته‌که با افق زاویه α تشکیل می‌دهد واصطکاك‌آن‌قابل اغماض است. دستگاه بدون سرعت اولیه رهاشده است درصورتی که سرعت دستگاه پس از۲۰ثانیه به ۱۰متر درثانیه برسدمعین کنید شیب سطح‌را ثانیا درصورتیکه جرم هریك از دوگلوله ۵۰۰ گرم باشد نیروی کشش نخ‌را دریك‌نقطه ازنخ تعیین کنید. $g=10$

۴ ـ گلوله‌ای از نقطه O ابتدای سطح شیب‌داری به شیب ۰/۶ بطرف بالاباسرعت اولیه ۲۰متردرثانیه پرتاب می‌شود درصورتیکه ازاصطکاك سطح صرف‌نظر شود پس‌از طی چه مسافت گلوله‌می‌ایستد. ثانیا اگرضریب اصطکاك سطح ۰/۵ باشد پس‌ازچه‌مدت وطی چه مسافتی سرعت گلوله به ۱۰ متر درثانیه می‌رسد ثالثا دراین موقع گلوله سطح‌را ترك می‌کند معادلات پارامتری (مختصات‌زمانی) حرکت گلوله را بنویسید ومعادله مسیررا تعیین کنید رابطا مؤلفه‌های سرعت گلوله را پس‌از یك‌ثانیه تعیین وهمچنین سرعت گلوله راهنگام رسیدن به‌افق OH حساب کنید، $g=10$

دبیرستان بابکان ـ دبیر: رادمنش ـ فرستنده . ثابتی

۱ ـ اصل برنولی باذکرآزمایش

۲ ـ گشت‌آوریك بردارنسبت بیك‌نقطه و یك محور را تعریف کنید (بارسم‌شکل)

۳ ـ تعریف شتاب‌های ظلی و قائم ومقدارآنها و رابطه آنها .

۴ ـ دوگلوله A و B در یك‌لحظه اولی بدون سرعت اولیه از ارتفاع ۴۹متری بسمت زمین رها میشود گلوله دوم با سرعت اولیه $V_0=10\sqrt{10}$ سانتیمتر برثانیه ازیکنقطه دیگر به سمت‌زمین ودرامتداد قائم پرتاب میشود اگرهردوگلوله‌در یك لحظه بزمین برسند تعیین کنید فاصله قائم دوگلوله را در لحظه شروع حرکت. همچنین سرعت‌نسبی آنهادرموقع‌برخورد بزمین پیداکنید. $g=980$

۵ ـ دوجسم بجرمهای M و M′ اولی‌بطورقائم‌ودومی روی سطح شیب‌داری بزاویه شیب 45° قرارگرفته‌اند وبوسیله نخی‌که ازقرقره بالای سطح عبورمیکند بهم متصلند.

a ـ اگرجرم دوگلوله برابر وازکلیه اصطکاکهاصرف‌نظرشود شتاب حرکت دستگاه را پیداکنید.

b ـ اگرازکلیه اصطکاکها صرفنظرنسبت $\frac{M}{M'}$ را طوری تعیین کنید که دستگاه درحال تعادل باشد.

c ـ اگرجرمهای M و M′ ۲ و ۱۰ کیلوگرم‌وضریب اصطکاك سطح ۰/۲ باشد سرعت دستگاه را پس از طی مسافت نیم‌متر تعیین کنید. $g=10$ و $\sqrt{2}=1/4$

۶ ـ گلولهٔ بجرم مخصوص ۳/۴ از ارتفاع h بالای ظرفی پرازمایع بدون سرعت اولیه رهاشده وبسطح مایع‌میرسد وپس ازطی مسافت $\frac{1}{3}h$ داخل مایع متوقف میشود.

۱ ـ جرم مخصوص مایع را تعیین کنید.

۲ ـ نسبت زمانهای حرکت درهوا و آب‌را پیداکنید.

فیزیك

دبیرستان بابکان ـ رادمنش ، فرستنده : ثابتی

۱ ـ در آزمایش لوله کنت که محتوی هوای صفردرجه

است فاصله تودهٔ اول از پنجمین توده Cm ۶۶ است فرکانس ارتعاشات‌هوای داخل لوله‌را تعیین کنید (سرعت صوت‌درهوای داخل لوله m/s ۳۳۰ است.ثانیا اگر لوله را ازیك گاز دو اتمی بچگالی ۱/۲۲۸ و درجه حرارت ۵۴/۶ درجه سانتی‌گراد پر کنیم فاصله دوتوده متوالی چقدرمیشود.

۲ ـ فرکانس نت $fa_{\sharp}$ را پیدا کرده نام ۵هارمونیك بعدی $fa_{\sharp}$ را بنویسید $la_{\sharp}=۴۴۰$

۳ ـ دومنبع موج همفاز وهم‌امتداد امواجی بادامنه‌های ۲Cm و ۶Cm وفرکانس $N=۱۰۰$ تولید میکنند این‌امواج باسرعت۲۰۰متربرثانیه منتشرمیشوند نقطهM بفاصله ۵۰Cm از O و Cm $\frac{۵۰}{۳}$ از O' قراردارد

۱ ـ معادلات ارتعاشات نقاط O و O' رابنویسید.

۲ ـ معادلات ارتعاشاتی راکه از O و O' بنقطه M می‌رسند بنویسید واختلاف فازهریك را نسبت به O و O' مشخص کنید.

۳ ـ معادله حرکت کلی نقطه M رابنویسید :

($\frac{۵\sqrt{۳}}{۹}$ تقریبا برابر تانژانت $\frac{\pi}{۳}$ است)

۴ ـ ذرهٔ دارای حرکتی است نوسانی بدامنه ۵ میلی‌متروفرکانس $N=۱۰۰$

ماکزیمموم سرعت و ماکزیموم شتاب این ذره را پیدا کنید.

۵ ـ پریود ـ فرکانس ـ ساوار و طول موج را تعریف کنید .

۶ ـ محاسبه معادله حرکت ارتعاشی یکنقطه غیرمشخص با بحث‌کامل

۷ ـ قوانین سرعت صوت در گازها را بکمك فرمول لاپلاس تعیین کنید

دبیرستان صفائی سمنان ـ دبیر: حسین فرمان، فرستنده: اکرم

مسأله ۱ ـ دومتحرك روی خطی باشتابهای ثابت ۳۰۰ و ۲۷۲ حرکت می‌کنند در ساعت ۳^{h} و ۵۶^{m} و ۱^{h} از مبداء مختصات با سرعتهای ۱۳۱۸ ـ و ۲۰۰۰ + عبورمی‌کنند‌زمان دومین برخوردرا پیدا کنید (مقادیرفوق دردستگاه CGS داده شده‌اند)

مسأله ۲ ـ نقطه مادی M باسرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع ۱ متردرهرثانیه ۳ دورمیزند اولاسرعت وشتاب آنرا بدست‌آورید ثانیا نقطه مادی دیگر M' همین دایره رابا سرعت ۱ دور در ۴ ثانیه طی می‌کند در لحظه $t=۰$ این دومتحرك هردوبر نقطه A منطبق می‌باشنددرچه زمان دیگری این‌انطباق عملی می‌شود ودراین زمان چندمرتبه ملاقات رخ می‌دهد.

مسأله ۳ ـ جسمی بجرم ۵۰ گرم را با سرعت اولیه ۳۰ متربرثانیه بطورقائم پرتاب می‌کنیم ۲ثانیه پس‌از پرتاب بنقطه اوج خود می‌رسد معلوم‌کنید مقاومت متوسط هوا. وطول نقطه اوج را.

مسأله ۴ ـ روی میزافقی جسمی‌بجرم M گذاشته شده است‌این‌جسم‌بوسیله‌نخ بی‌وزنی‌که ازدورقرقره O عبورمی‌نماید بجسم دیگری بجرم M' بسته شده است . جسم M' شروع به حرکت‌کرده وپس‌ازطی مسافت ۱۴۰متر‌سرعت‌آن ۲۰ متر بر ثانیه می‌رسد اگر $\frac{M}{M'}=۰/۴$ باشد ضریب‌اصطکاك‌میزراحساب کنید .

g درهمه‌جا ۱۰فرض شود.

شیمی

دبیرستان بابکان ـ دبیر: دکتر آذر ، فرستنده، ثابتی

مسأله ۱ ـ ۲۰cc آب اکسیژنه را با چند قطره آسید سولفوریك مخلوط می‌کنیم پس از محلول‌پرمنگناتی‌که فاکتور آن $\frac{۱}{۳}$ است قطره قطره روی آن اضافه میکنیم پس ازافزودن ۱۲۰cc از محلول پرمنگنات دیگر رنك آن زایل نگردید حساب‌کنید ارزش آب اکسیژنه‌مزبور را .

مسئله ۲ ـ درصورتیکه بدانیم وزن یك‌لیترجسم‌آلی به حالت گازی در شرایط معمولی ۲/۶۳۹ گرم میباشد وزن مولکولی‌آنرا حساب‌کنید.

مسئله ۳ ـ ازسوزاندن ۰/۱۵۷ گرم‌ازجسم‌آلی کلردار ۸۹/۶cc گازکربنیك و۰/۰۵۴ گرم‌آب تولید میشود ازطرف دیگر برای تعیین وزن‌کلرجسم همین مقدار ازجسم‌را برداشته مطابق دستورعمل می‌کنیم مشاهده مینمائیم‌که ۲۰cc ازمحلول نیترات نقره (دسی‌نرمال) لازم است تاتمام‌کلررا رسوب دهد فرمول جسم‌آلی‌را تعیین کنید درصورتیکه‌میدانیم درهرمولکول یك‌آتم کلر بیشتروجود ندارد.

دبیرستان شاهپورکازرون ـ دبیر، حسین جواهری

مسأله ۱ ـ ۱/۶ گرم متان را در سایه با کلر ترکیب مینمائیم. چگالی بحالت بخارجسم‌آلی حاصل نسبت به‌هیدروژن ۷۷میباشد . پیدا کنید فرمول ومقدار آنرا.

مسأله ۲ ـ ازاکسیداسیون کامل ۰/۷۲ گرم از هیدرو‌کربورمحدودی تولید ۲/۲ گوم جسم قابل جذب بوسیله پتاس شده است. تعیین کنید : اولا ـ فرمول اجمالی ثانیا ـ فرمول

گسترده وتفسیری ایزومرهای آن. ثالثا کلیه «هم‌نماها» را بر طبق دستورژنو نامگزاری کنید.

مسأله ۳ ـ اسیدی است بفرمول $C_n H_{2n} O_n$ که ۰/۶۰ گرم آن توسط ۲۰cc از یك باز $\frac{N}{2}$ خنثی شده است. پیدا کنید فرمول اسید را درصورتیکه میدانیم هر ملکول اسید با یك ملکول سود خنثی میشود.

مسأله ۴ ـ ۰/۶۰ گرم ازیك جسم آلی را سوزانده‌ایم درنتیجه تولید ۲۲۴cc انیدرید کربنیك و ۰/۳۶ گرم آب شده است. ازطرفی چون ۰/۳۰ گرم ازهمان جسم‌را باپتاس حرارت داده وگازقلیائی حاصل‌را وارد ۲۰cc اسید سولفوریك نرمال نمائیم برای تغییررنك‌اندیکاربایـد ۱۰۰cc سود به فاکتور ۰/۱ نرمال مصرف کرد. پیداکنید فرمول جمع (Brute) را در صورتیکه بدانیم : اولا ـ محلول ۰/۶ درصد این جسم در آب نقطه انجماد (کریوسکپی) را به ۰/۱۸۵ ـ درجه سانتیگراد میرساند.

ثانیا ـ اگر ۰/۵۸ گرم ازجسمی را که چگالی بحالت بخارآن نسبت بهوا ۲ میباشد در ۵۰ گرم آب حل کنیم نزول نقطه انجمادی برابر ۰/۳۷ ژنه تولید مینماید.

دبیرستان بهبهانی‌کازون ـ دبیر : حسین جواهری

۱ـ مخلوطی ازکاربیت وکربورآلومینیم خالص را درآب حل کرده وگازهای حاصل را با ۲لیتراکسیژن مخلوط کرده و در ادیومتری منفجر کرده‌ایم . پس از سرد شـدن دستگاه ، ۱۲۱۶cc گاز باقی می‌ماندکه ۳۶cc آن جـذب فسفر و بقیه جذب محلول پتاس می گردد . مطلوبست :

اولا ـ فرمول ملکولی مخلوط دوکربور فلزی .

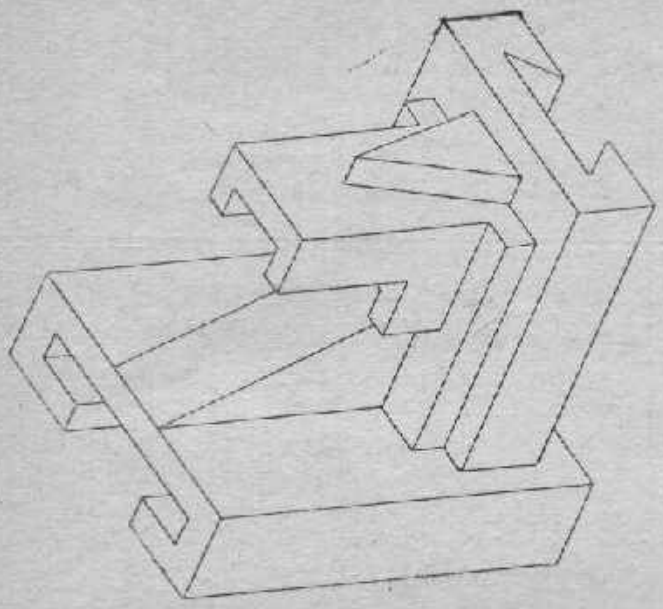
ثانیاً ـ چگالی تئوری گاز نسبت به هیدرژن .

ثالثاً ـ اگر گازها را از محلول کلـرور دوکـوئیورو آمونیاکی عبوربدهیم کاهش حجم چقدر خواهد شد ؟

۲ـ ۲۲۴cc ازهیدروکربوری توسط ۵۶۰cc اکسیژن سوخته شده ودر ضمن ، افزایش ظروف پتاس نیز ۰/۸۸ گرم گردیده است . فرمول هیدروکربوررا به طریقه « آب سنجی» پیداکنید .

۳ـ تکاثف نسبی هیدروکربوری نسبت به انیدرید کربنیك یك می‌باشد . ازطرفی چون $\frac{2}{3}$ کربن ملکولی این جسم را تبدیل به CO^2 کنیم . این گاز می‌تواند ۲۰۰۰cc آهك ۲ نرمال را خنثی کند . فرمول این هیدروکربوررا پیداکنید .

رسم فنی امتحان ثلث اول سال سوم هنرستان‌کاشان
فرستنده حسین محلوج چی



توضیح ـ درامتحان، تصویرهای‌قائم وافقی جسم‌فوق‌داده شده وازهنرجویان خواسته شده‌است تاتصویر جانبی وپرسپکتیو ۳۰ درجهٔ آنرارسم کنند. پرسپکتیو بالا توسط حسین‌محلوج‌چی رسم شده است .

مربوط به

آیا شما هم می‌توانید ؟

(مندرج دریکان شمارهٔ ۱۹)

هر گاه ارقام a و b و c و d چنان باشند که داشته باشیم : $(1)\ \overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$

نتیجه خواهیم گرفت که : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

و روبهم ۱۴ قالب از از نوع (۱) بدست می‌آید که ۸ قالب آن در یکان شمارهٔ ۱۹ صفحهٔ ۶ درج شده است وبقیه به شرح زیر است :

$$۱۲ \times ۸۴ = ۲۱ \times ۴۸$$
$$۱۳ \times ۹۳ = ۳۱ \times ۳۹$$
$$۱۴ \times ۸۲ = ۴۱ \times ۲۸$$
$$۲۳ \times ۶۴ = ۳۲ \times ۴۶$$
$$۳۴ \times ۸۶ = ۴۳ \times ۶۸$$
$$۲۶ \times ۹۳ = ۶۲ \times ۳۹$$

مصطفی گودرزی طائمه ـ هادی خرقانی

مسائل برای حل

مهلت قبول پاسخ تا آخر بهمن ۴۴ ـ از پاسخهای رسیده فقط آنهایی مورد بررسی واقع می‌شود که روی ورقه مربوط نام و کلاس فرستنده نوشته شده باشد . پاسخهایی که مربوط به کلاس پائین‌تر فرستنده باشد پذیرفته نخواهد شد .

از مسائلی که در زیر به نام اشخاص چاپ شده است اگر در کتاب یا نشریه به زبان فارسی ملاحظه نموده‌اید مراتب را اطلاع دهید .

کلاس چهارم طبیعی

۳۵۸۱ـ به فرض آنکه داشته باشیم : $x>0$ و :

$$a=x^2-x \quad b=x^2 \quad c=x^2+x$$

۱) حدود x را تعیین کنید برای آنکه a و b و c بتوانند اندازه‌های اضلاع یك مثلث باشند .

۲) به ازاء چه مقدار x این مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود .

۳۵۸۲ـ مربع مستطیل $ABCD$ مفروض است . بر ضلع AB نقطهٔ M را چنان انتخاب کرده‌ایم که داریم :

$$\overline{AM}^2=AB\cdot BM$$

و از M به C و D وصل می‌کنیم ثابت کنید :

$$MB\cdot MA=|\overline{MC}^2-\overline{MD}^2|$$

(عبدالحسین قانع ششم ریاضی دبیرستان ایرانشهر یزد)

کلاس چهارم ریاضی

۳۵۸۳ـ به فرض آنکه داشته باشیم :

$$a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{x-1}{2(x+1)} \quad c=\frac{x}{x^2-1}$$

۱) حدود x را تعیین کنید برای آنکه a و b و c بتوانند اندازه‌های اضلاع یك مثلث باشند .

۲) به ازاء چه مقادیر از x ضلع a بزرگترین ضلع مثلث است و در این حالت مقدار x را چنان تعیین کنید که مثلث قائم‌الزاویه باشد .

۳۵۸۴ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2+x(y+z)=a^2 \\ y^2+y(z+x)=b^2 \\ z^2+z(x+y)=2ab \end{cases}$$

(بهروز آسائی ـ ششم ریاضی دبیرستان خسروی مشهد)

۳۵۸۵ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x(px+qy+rz)=a \\ y(px+qy+rz)=b \\ z(px+qy+rz)=c \end{cases}$$

(فرستنده: اسمعیل علی‌پور ـ دانشجوی دانشسرایعالی)

۳۵۸۶ـ تعداد n خط در یك نقطه متقاربند . تعداد نیمسازهای زاویه‌هایی را که این خطوط دو به دو با یکدیگر می‌سازند بدست آورید .

(عباس اسدی ـ پنجم ریاضی دبیرستان دارالفنون)

۳۵۸۷ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$\log_a x+\log_a x^2+\log_a x^3+\cdots+\log_a x^n=k$$

اولاً ـ مقدار $\log x$ را برحسب a و n و k بدست آورید .

ثانیاً ـ به ازاء $a=5$ و $n=10$ و $k=50$ مقدار واقعی x و مقدار تقریبی آنرا با استفاده از جدول حساب کنید.

(باهمت ، دبیر دبیرستان گلشن رازشبستر)

۳۵۸۸ـ مثلث ABC مفروض است، برضلع AB یك نقطهٔ D انتخاب می‌کنیم . از D موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند ، بعد EF را موازی با AB و محدود به BC ، FG را موازی با AC و محدود به AB ، GH را موازی با BC و محدود به AC ، HI را موازی با AB ومحدود به BC و بالاخره IJ را موازی با AC و محدود به AB رسم می‌کنیم .

۱) ثابت کنید J بر D منطبق است .

۲) نقطهٔ D چگونه انتخاب شود تا خطوط EF وHG و ID متقارب باشند .

۳۵۸۹ـ درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ C برابر با ۳۰° است . به ضلع AB ودر خارج مثلث ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABD را می‌سازیم . ثابت کنید که بین طولهای CA و CB و CD رابطهٔ فیثاغورث برقرار است .

(مجلهٔ ریاضیات دانش‌آموز آمریکا)

کلاس پنجم طبیعی

۳۵۹۰ـ دو نقطهٔ :

$M(2t+1$ و $t^2-1)$ و $N(1$ و $-4)$

مفروض است . با استفادهٔ ازمشتق مقدار t را چنان تعیین کنید که طول MN مینیمم باشد .

۳۵۹۱ـ صحت اتحاد زیررا محقق کنید :

$$\frac{\cos 230^\circ}{\cos 10^\circ}+\frac{\sin 150^\circ}{\sin 10^\circ}-\frac{tg 60^\circ}{\sin 80^\circ}=2$$

(زهرا معینی ، دبیرستان عبرت)

کلاس پنجم ریاضی

۳۵۹۲ـ اندازهٔ شعاع دایره‌ای $x+1$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ دیگر $2x-1$ و طول خطالمرکزین‌آنها y فرض می‌شود.معلوم کنید نقطهٔ $M(x$ و $y)$ در چه ناحیه از صفحهٔ محورهای مختصات واقع باشد تا این دو دایره متقاطع باشند .

۳۵۹۳ـ P و A دو نقطهٔ ساحلی واقع در طرفین یك رودخانه می‌باشند . نقطهٔ B نیز یك نقطهٔ ساحلی رودخانه بوده و درهمان طرفی واقع است که A قرار دارد به طوری که AB بر PA عمود بوده فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر۶ میل وعرض رودخانه یعنی فاصلهٔ دو نقطهٔ P و A برابر با ۵ میل است . شخصی از نقطهٔ P باقایق با سرعت ۲ میل در ساعت حرکت کرده دریك نقطهٔ C درساحل AB پیاده شده و فاصلهٔ BC را با سرعت ۴ میل درساعت می‌پیماید . محل نقطهٔ C را تعیین کنید برای آنکه این شخص فاصلهٔ P تا B را در کوتاهترین مدت طی کرده باشد .

(فرستنده : پدالله ارضی وپرویز امیرجورانی) .

۳۵۹۴ـ درصورتی که داشته باشیم :

$$\cos 4x=-2a^4+4a^2-1$$

مقدار عبارت زیررا برحسب a حساب کنید :

$$S=\sin^6 x+\cos^6 x$$

(ترجمه ازفرانسه: بهزادسوفرششم ریاضی دبیرستان‌هدایت‌سنندج)

۳۵۹۵ بین روابط زیر کمان φ را حذف کنید :

$$a\sin(\varphi-\alpha)=b\sin(\varphi-\beta)$$

$$c\cos(\varphi-\alpha)=d\cos(\varphi-\beta)$$

و نتیجه بگیرید :

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

(حسن تاهباز صالحی ـ ششم ریاضی دبیرستان هدف۱)

۳۵۹۶ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{\cos 5x}{\cos^2 2x}=1-tg^2 2x$$

(فرهاد مجیدی‌آهی ـ ششم ریاضی دبیرستان بابکان)

۳۵۹۷ ـ کنج سه قائمهٔ Oxyz مفروض است . A نقطه‌ای از Ox و B نقطه‌ای از Oy بوده وطولهای $OA=a$ و $OB=b$ ثابت‌می‌باشند. بر OZ نقطهٔ M را چنان‌تعیین کنید که مجموع وجوه کنج M.OAB برابر با دوقائمه باشد .

(ترجمهٔ ازفرانسه)

کلاس ششم طبیعی

۳۵۹۸ـ M نقطه‌ای از بیضی باکانونهای F و F' می‌باشد . معادلات خطوط MF و MF' و FF' به ترتیب عبارتند از :

$$y=1 \quad و \quad 4y-3x=4 \quad و \quad 8y+15x=68$$

مطلوبست تعیین معادله ورسم این بیضی .

۳۵۹۹ـ در چه نقاطی از منحنی نمایش هندسی تابع :

$$y=\sin x-\cos x-\cos 2x$$

مماس‌برمنحنی با نیمساز ربع اول و سوم موازی است .

کلاس ششم ریاضی

۳۶۰۵ـ با استفاده ازرسم منحنی نمایش تابع :

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

دروجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$\sqrt{1-x^2}-mx+2m=1$$

به ازاء مقادیر مختلف m بحث کنید .

۳۶۰۱ـ نقطهٔ $A(-a\ و\ 0)$ مفروض است . از A خطی‌رسم می‌کنیم که‌محور y'y را درB قطع کند و بر خط AB دونقطهٔ M و N را چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$BM=BN=BO$$

باشد . معادلهٔ مکان نقاط M و N را وقتی‌که B محور y'y را پیمایند یافته و به فرض $a=1$ منحنی نمایش هندسی آنرا رسم کنید . محورهای مختصات متعامد هستند .

۳۶۰۲ـ اندازهٔ کمانهای حادهٔ x و y را از دستگاه روابط زیر بدست‌آورید :

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin^2 x=\cos x\sin y\\ \sqrt{2}\cos^2 x=\sin x\cos y\end{cases}$$

۳۶۰۳ـ ثابت کنید که اگرعدد صحیح ومثبت n مضرب ۳ نباشد ، $A=a^{2n}+a^n+1$ به ازاء جمیع مقادیر n بر $B=a^2+a+1$ بخش پذیر است :

موارد استعمال : ثابت کنید که اگر n مضرب ۳ نباشد : $2^{2n}+2^n+1$ بر ۷ و $3^{2n}+3^n+1$ بر ۱۳ و . . . بخش‌پذیر است وبا انتخاب $n=a^3$ موارد دیگری ازاستعمال این مسئله را بدست‌آورید .

(ابراهیم صادقی ، دبیردبیرستانهای شیراز)

۳۶۰۴ـ عددی در مبنای مجهولی به فرم $\overline{aaaa}$ می‌باشد . اگر مبنا را مجهول‌کنیم وعدد را به مبنای جدید ببریم به فرم $\overline{bb}$ نوشته خواهد شد . $a<10$ و $b<10$ و مبنا را پیداکنید .

(قوام نحوی ، دبیردبیرستانهای اهواز)

۳۶۰۵ـ مثلث ABC مفروض است نقطهٔ M را بر AB و نقطهٔ N را بر AC چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\frac{BM}{m}=\frac{MN}{n}=\frac{NC}{p}$$

m و n و p مقادیر مفروضی می‌باشند .

(سید جلال آشفته)

۳۶۰۶ـ مثلث ABC که در آن $|B-C|=\frac{\pi}{2}$ مفروض است (مثلث شبه قائم‌الزاویه)

۱) رأسهای B و C ثابت هستند ، دراین صورت مکان رأس A چیست .

۲) اگر H تصویر A برامتداد BC باشد ثابت کنید که دوایر به مرکز H و به شعاع HA بردوایر محیطی مثلثهای ABC عمود می‌باشند .

۳۶۰۷ـ مقیاس شیب صفحهٔ P به موازات لبهٔ چپ‌کاغذ مفروض است . شیب صفحه برابر با یك است و اقعیهٔ رقوم ۲ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق بوده ترقی رقوم نقاط آن ازپائین به بالا است . ملخص چهار ضلعی محاطی ABCD واقع در صفحهٔ P را با معلومات زیررسم کنید .

رأس a_2 به فاصلهٔ ۲ سمت راست مقیاس شیب واقع است شیب ضلع AB برابر با $\frac{1}{2}$ بوده b_1 سمت راست A قرار دارد . رقوم رأس C برابر با ۱/۵ بوده واین نقطه نیز سمت راست A واقع است . شیب ضلع AD برابر با $\frac{1}{3}$ وترقی‌رقوم نقاط آن از چپ به راست است . دو ضلع CB وCD متساوی می‌باشند .

(ع . م)

مسائل متفرقه

برای فارغ‌التحصیلان ششم ریاضی ، داوطلبان کنکور

۳۶۰۸ـ به فرض $x\neq y\neq z$ صحت اتحاد زیر را محقق کنید .

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)^2$$

(ترجمهٔ : گلستان‌زاده دبیردبیرستانهای کازرون)

۳۶۰۹ـ مجموع زیررا تعیین کنید :

$$S=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}+\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}+\dots+\frac{1}{(1+x^{n-1})(1+x^n)}$$

(ترجمهٔ :گلستان زاده)

۳۶۱۰ـ صحت نامساوی زیررا تحقیق کنید به‌فرض آنکه n عدد صحیح و مثبت باشد .

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}>\frac{2n+1}{n(3n+1)}$$

(فریبرز امیری)

۳۶۱۱ـ مجموع زیررا حساب کنید :

$$S=2\times 3^2+5\times 4^2+\dots+(3n-1)(n+2)^2$$

(مسعود درخشان‌نو پنجم ریاضی دبیرستان رهنما)

۳۶۱۲ـ به فرض آنکه داشته باشیم :

$\log_{27}1/125=b$ و $\log_{0/625}98=a$

ثابت کنید که :

$$\log_3 7\,\frac{(4a+1)(3b-2)}{6}$$

(حسن شهنازی پنجم ریاضی)

۳۶۱۳ـ ثابت کنید که :

$$A=1^{88}+2^{88}+3^{88}+\dots+88^{88}+1$$

بر ۸۹ بخش‌پذیر است .

(یدالله شفیعی ششم ریاضی دبیرستان صمصامی اراک)

۳۶۱۴ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$(3x^2+2x-3)^2-(2x^2+3x^2-2x)=0$$

(ترجمهٔ عباسعلی شکری ۵ ریاضی)

۳۶۱۵ـ دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید .

$$\begin{cases}31x^2y^2-8x^2-56xy=32y^2-7y^4=0\\ x^2-7xy+4y^2+8=0\end{cases}$$

(هدایت یاسائی ،آمریکا)

۳۶۱۶ـ مثلث ABC که در آن $A<135^\circ$ مفروض است درنقطهٔ C ودر خارج مثلث CF را به اندازهٔ CA بر AC و CE را به اندازهٔ BC بر BC عمود می‌کنیم. خطوط AE وBF را رسم می‌کنیم که یکدیگررا درP تلاقی‌می‌کنند. ثابت کنید که PC نیمساززاویهٔ EPF است .

(علی‌بیات مختاری ۴ ریاضی دبیرستان خیام نیشابور)

۳۶۱۷ـ چهارضلعی محدب ومحاطیABCD مفروض است . مراکز دایره‌های محاطی داخل مثلثهای BCD و CDA و DAB و ABC را به ترتیب I و J و K و H می‌نامیم . ثابت کنید چهارضلعی IJKH مربع مستطیل است .

(E.P.M.)

مسائل فیزیك و شیمی

برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستان و داوطلبان کنکور

۳۶۱۸ـ یك نمونهٔ ۵۰ گرمی ازروی ناخالص با ۱۲۹ میلی‌لیتر جوهر نمك به جرم ویژهٔ ۱/۱۸ گرم ودر صدوزنی ۳۵٪ وارد فعل وانفعال می‌گردد . هرگاه اسیدکلرئیدریك بر ناخالصی‌های روی بی‌اثر باشد درجهٔ خلوص روی را حساب کنید .

(ترجمهٔ: محمد رسولزاده دبیر شیمی دبیرستانهای تبریز)

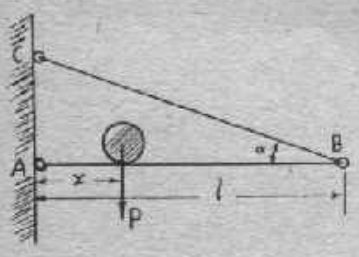
۳۶۱۹ـ ۱۰۰ گرم سولفات یك فلز دو ظرفیتی متبلور راکه با سولفات نیکل متبلور همشکل‌می‌باشد مورد تجزیه قرار داده‌ایم ، در اثر این تجزیه ۲۲/۶۴ گرم فلز بدست آمده است . مطلوبست محاسبهٔ وزن اتمی فلز مجهول در صورتی‌که بدانیم فرمول سولفات نیکل متبلور SO^4Ni و $7H^2O$است.

(حسین جواهری دبیر دبیرستانهای کازرون)

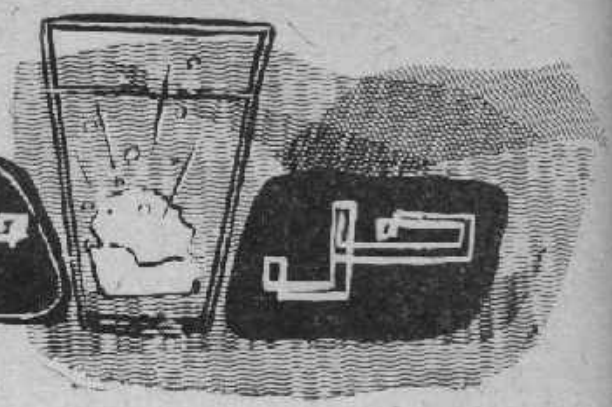
۳۶۲۰ـ ۲/۷۲۱ گرم از یك اسید را در ۱۲۵ گرم بنزن حل می‌کنیم . فشار محلول حاصل ۱۱/۳ میلیمتر کمتر از فشار بنزن است . فشار بنزن درهمان درجهٔ حرارت ۷۵۵ میلیمتر است . جرم ملکولی اسیدرا محاسبه کنید. جرم ملکولی بنزن ۷۸ است .

(ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا)

۳۶۲۱ـ یك میلهٔ افقی AB به طول l از طرف A مستقیماً و از طرف B به وسیلهٔ نخ BC در نقطهٔ C به دیوار وصل شده‌است . زاویهٔ‌امتداد نخ‌با افق α است. وزنهٔ P به میله متکی بوده و روی‌آن حرکت می‌کند . چنانکه فاصلهٔ نقطهٔ اتکاء وزنه تا نقطهٔ A با x نموده شود کشش نخ را به صورت معادله‌ای بر حسب x بیان‌کنید . ازوزن میله صرف نظر شود .



(ترجمهٔ : جمشید عمیقیان دانشجوی علوم اصفهان)



حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۹

اگر حل مسئله‌ای‌را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل حل آن در این مجله ذکر نشده است به یکی از علل زیر می‌باشد :

راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است ، روی ورقه‌ای‌که حل مسئله را نوشته‌اید نام و مشخصات کلاس خودرا ذکر نکرده‌اید ، مسئله مربوط به‌کلاس پائین تر از کلاس شما بوده است ، نامهٔ شما دیرتر از مهلت مقرر به دست ما رسیده است .

کلاس چهارم طبیعی

۳۴۹۷ـ به فرض $x=\sqrt{۵۳}$ و $y=\sqrt{۴۷}+۱$ مقدارعددی عبارت زیررا حساب کنید .

$$(x+y-۱)^۲+(x-y+۱)^۲$$

ابتدا هریك از پرانتزها را به توان رسانده حاصل را ساده می‌کنیم ، می‌شود :

$$۲x^۲+۲y^۲+۲-۴y$$

چنین نوشته می‌شود :

$$۲x^۲+۲(y^۲+۱-۲y)=۲x^۲+۲(y-۱)^۲$$

$$۲\times۵۳+۲(\sqrt{۴۱}+۱-۱)^۲=۱۰۶+۹۴=۲۰۰$$

پاسخهای درست رسیده : ناهید شجاعی دبیرستان آذرمیدخت‌ـمرتضی میاندهی دبیرستان ۱۵ بهمن رودسر‌ـسید ابراهیم مدنی دبیرستان نمازی شیراز ـ محمد مقدسی دبیرستان پهلوی ساری ـ سید مهدی تقیری دبیرستان کوشش کبیر تبریز .

۳۴۹۸ـ مقدارعددی عبارت زیررا به ازای مقادیر داده شده حساب کنید .

$$P=۲(x^۶+y^۶)+۳(x^۴+y^۴)$$

$$x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳}+۱) \text{ و } y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$$

$$P=۲[(x^۲+y^۲)^۳-۳x^۲y^۲(x^۲+y^۲)]+۳[(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲]$$

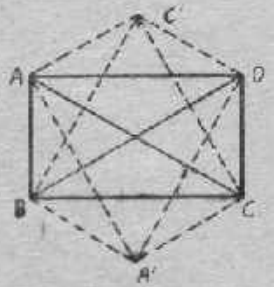
$$x^۲+y^۲=\frac{۲}{۴}(۳+۱+۲\sqrt{۳})+\frac{۲}{۴}(۳+۱-۲\sqrt{۳})=۴$$

$$x^۲y^۲=\frac{۲}{۴}(۳-۱)=۱$$

$$P=۲[۴^۳-۳\times۱(۴)]+۳[۴^۲-۲\times۱]=۱۴۶$$

پاسخهای درست رسیده : ناهید شجاعی ـ محمد مقدسی .

۳۴۹۹ـ دو قطر مربع مستطیلی با یکدیگر زاویه ۶۰° می‌سازند . قرینهٔ مربع مستطیل را نسبت به هر یك از دو قطرش تعیین می‌کنیم . ثابت کنید رویهم یك شش ضلعی منتظم حاصل می‌شود .



فرض می‌کنیم در

مربع مستطیل ABCD زاویهٔ AOB برابر با ۶۰ درجه باشد قرینهٔ A را نسبت به BC تعیین کرده 'A می‌نامیم و قرینهٔ C را نیز نیز نسبت به BD تعیین کرده 'C می‌نامیم. مربع مستطیل 'BA'DC حاصل می‌شود که قرینهٔ مستطیل اول نسبت به BD است.

مثلث متساوی‌الساقین OCD که یك زاویهٔ آن برابر ۶۰ درجه است متساوی‌الاضلاع است و اگر از O مرکز مستطیل به نقاط 'C و 'A وصل کنیم شش مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می‌شود که همه باهم مساویند بنابراین یك شش ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند. می‌توانیم مستطیل 'AC'CA را در نظر بگیریم که قرینهٔ مستطیل مفروض نسبت به قطر AC است

پاسخهای درست رسیده : مرتضی میساندی ـ محمد مقدسی.

کلاس چهارم ریاضی

۳۵۰۰ـ به فرض آنکه داشته باشیم :

$$x=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \quad ، \quad f(x)=۲x^۲-۱$$

مقدار عددی هر یك از عبارتهای $f(x)$ و $ff(x)$ را بدست آورید.

$$f(x)=۲(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴})^۲-۱=۲\times\frac{۸+۲\sqrt{۱۲}}{۱۶}$$

$$-۱=\frac{۸+۴\sqrt{۳}}{۸}-۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$ff(x)=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲-۱=۲\times\frac{۳}{۴}-۱=\frac{۱}{۲}$$

پاسخهای درست رسیده : ناهید شجاعی ـ حسین علوی دبیرستان پهلوی ساری ـ جلال اشجعی دبیرستان دین و دانش قم ـ توما خسروآبادی دبیرستان اندیشه ـ محمد مقدسی جهانگیرچراغچی دبیرستان ابن‌سینا شهر ری

۳۵۰۱ـ ازروابط :

$$\begin{cases} ax^n=by^n=cz^n \\ \frac{۱}{x^n}+\frac{۱}{y^n}+\frac{۱}{z^n}=۱ \end{cases}$$

نتیجه بگیرید که :

$$(۱) \quad \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{a+b+c}}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}$$

فرض می‌کنیم :

$$ax^n=by^n=cz^n=k \Rightarrow a=\frac{k}{x^n} \quad ، \quad b=\frac{k}{y^n}$$

$$c=\frac{k}{z^n} \quad ، \quad a+b+c=k(\frac{۱}{x^n}+\frac{۱}{y^n}+\frac{۱}{z^n})=k$$

$$(۲) \quad \sqrt[n]{a+b+c}=\sqrt[n]{k}$$

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{k}(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z})$$

وبا توجه به رابطهٔ (۲) رابطهٔ (۱) نتیجه خواهد شد.

پاسخهای درست رسیده : اعظم آشفته دبیرستان حکمت ـ محسن وزیری و طهمورث تقی‌زاده از دبیرستان دکتر هوشیار ـ احمد درفش دار دبیرستان بحرالعلوم بروجرد ـ جلال اشجعی ـ حسین علوی.

۳۵۰۲ـ چند جمله‌ای درجهٔ سوم $f(x)$ را چنان تعیین کنید که بر $x-۳$ بخش پذیر بوده و چون آنرا بر هریك از دو جمله‌ای‌های $x+۱$ و $x-۱$ و $x-۲$ تقسیم کنیم باقیماندهٔ تقسیم برابر ۵ شود.

$f(x)$ بر $x-۳$ بخش پذیر است و $f(x)-۵$ که بر عاملهای $x+۱$ و $x-۱$ و $x-۲$ بخش‌پذیر است برحاصلضرب آنها قابل قسمت است وداریم :

$$f(x)-۵=(x+۱)(x-۱)(x-۲)\varphi(x)$$

$$f(x)=(x+۱)(x-۱)(x-۲)\varphi(x)+۵$$

وچون $f(۳)=۰$ بنابراین

$$۰=۴\times۲\times۱\times\varphi(۳)+۵ \Rightarrow \varphi(۳)=-\frac{۵}{۸}$$

یعنی باقیماندهٔ تقسیم $\varphi(x)$ بر $x-۳$ برابر است با $-\frac{۵}{۸}$ بنابراین

$$f(x)=(x+۱)(x-۱)(x-۲)[(x-۳)\varphi_۱(x)-\frac{۵}{۸}]+۵$$

اما چون $f(x)$ نسبت به x از درجهٔ سوم است بنابراین : $\varphi_۱(x)=۰$ و :

$$f(x)=-\frac{۵}{۸}(x+۱)(x-۱)(x-۲)+۵=$$

$$-\frac{۵}{۸}(x-۳)(x^۲+x+۲)$$

تبصره ـ می‌توانیم فرض کنیم :

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\begin{cases} f(3)=27a+9b+3c+d=0 \\ f(-1)=-a+b-c+d=5 \\ f(1)=a+b+c+d=5 \\ f(2)=8a+4b+2c+d=5 \end{cases}$$

واز این دستگاه ضرایب a و b و c و d را حساب کنیم :

پاسخهای درست رسیده : محمد مقدسی ـ حسین علوی ـ جلال اشجعی ـ سید ابراهیم مدنی ـ جهانگیر چراغچی .

۳۵۰۳ـ می‌دانیم که $\log 2=\alpha$ و $\log 3=\beta$ و با فرض

$$x=24/3 \quad \text{و} \quad y=\frac{\sqrt[6]{800}}{7/29} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\frac{36/45}{\sqrt{2}}}$$

۱) مقادیر $\log x$ و $\log y$ را برحسب α و β تعیین کنید .

۲) مقادیر عددی x و y را با فرض $\alpha=0/301029$ و $\beta=0/477121$ بدست آورید .

۱) $24/3=\frac{243}{10}=\frac{3^5}{10}$ و

$$36/45=\frac{3645}{100}=\frac{729}{20}=\frac{3^6}{20}$$

$$\log x=\log 24/3+\frac{1}{3}(\log 36/45-\frac{1}{2}\log 2)$$

$$\log x=\log\frac{3^5}{10}+\frac{1}{3}(\log\frac{3^6}{20}-\frac{1}{2}\log 2)$$

$$\log x=5\log 3-\log 10+2\log 3-\frac{1}{3}\log 2$$

$$-\frac{1}{3}\log 10-\frac{1}{6}\log 2$$

$$\log x=7\log 3-\frac{1}{2}\log 2-\frac{4}{3}=7\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{4}{3}$$

$800=2^3\times 100$ و $7/29=0/01\times 3^6$

$$\log y=\frac{1}{6}\log(2^3\times 100)-\log(0/01\times 3^6)$$

$$=\frac{1}{2}\log 2-6\log 3+\frac{7}{3}=\frac{\alpha}{2}-6\beta+\frac{7}{3}$$

۲) $\log x=0/477121\times 7-\frac{0/301029}{2}$

$$=1/856600-1/333333$$

واز روی جدول لگاریتم با پنج رقم اعشار نتیجه خواهیم گرفت

$$x=71/78$$

$$\log y=\frac{0/301029}{2}-0/477121\times 6+2/333333$$

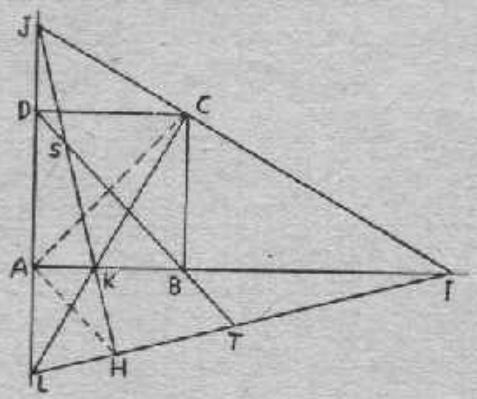
$$=-0/444888=-1+0/555112=1/555112$$

ازروی جدول بعد ازتعیین اختلاف وحل تناسب مربوط خواهیم داشت $y=0/359052$.

پاسخهای درست رسیده: ناهید شجاعی ـ حسین علوی

۳۵۰۴ـ مربع ABCD مفروض است . از راس C و در خارج مربع خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در I و امتداد AD را در J قطع می‌کند . در نقطهٔ C عمودی بر IJ اخراج می‌کنیم تا AB و AD یا امتدادآنها را به ترتیب در K و L قطع کند .

۱) ثابت کنید که هر یك از مثلثهای CKJ و CLI



متساوی‌الساقین می‌باشند .

۲) اگر S وسط JK و T وسط IL باشد ثابت کنید نقاط S و T بر خط BD واقع بوده و اندازهٔ زاویهٔ SCT را حساب کنید .

۴) ثابت کنید که JK بر L۱ در یك نقطهٔ H عمود است و AI نیمساز زاویهٔ CAH است .

حل ـ دو زاویهٔ KCB و JCD که هردو با زاویهٔ DCK متمم هستند متساویند واز آنجا دومثلث CKB و CJD درحالت وتر و یك زاویهٔ حاده متساوی بوده نتیجه می‌شود که $CJ=CK$. از تساوی دو مثلث CLI و CDL نتیجه خواهد شد $CL=CI$.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه KCJ میانهٔ CS برابر است با نصف وتر KJ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AJK میانهٔ AS برابر است با نصف وتر JK بنابراین $SA=SC$ و S بر

عمود منصف AC یعنی بر BD واقع است .

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CLI و ALI نتیجه خواهد شد که AT = CT پس T بر BD عمود منصف AC قرار دارد .

۳) در مثلث IJL دو ارتفاع IA و LC یکدیگر را در K قطع کرده‌اند بنابراین JK نیز ارتفاع مثلث بوده در H بر IL عمود است . درچهارضلعی محاطی AKHL داریم :

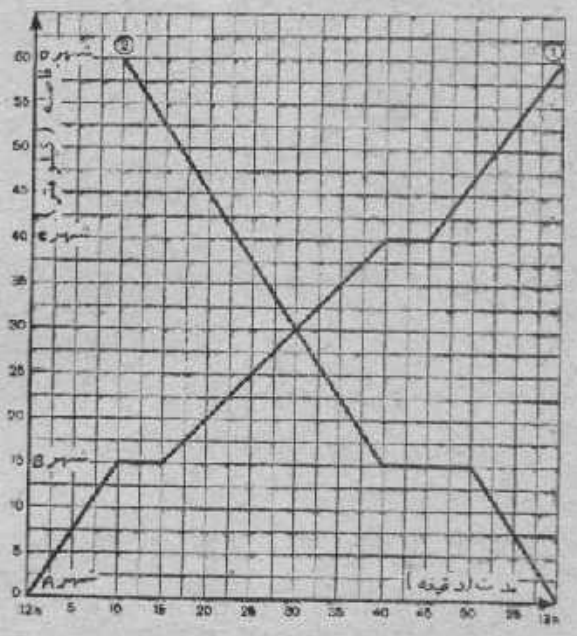
$$\widehat{KAH} = \widehat{KLH} = \widehat{CIL} = 45^\circ$$

$$\widehat{CAK} = \widehat{KAH} \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$$

پاسخ درست رسیده از : حسین علوی .

کلاس پنجم طبیعی

۳۵۰۵ـ با توجه به شکل زیر که در آن نمودار حرکت دو قطار (۱) و (۲) رسم شده است ، محل و ساعت عزیمت هر ترن ، مدت توقف آنها در ایستگاه ، ساعت ملاقات آنها ومقصد هریك را معلوم کنید .



۱) ترن (۱) ازشهر A در ساعت ۱۲ حرکت‌می کند ودر ساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه به شهر B می‌رسد . سرعت آن در این مدت برابر با ۱۵ کیلومتر در ۱۵ دقیقه یا ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده‌است درشهر B ، ۵ دقیقه توقف کرده درساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه از آنجا به سمت شهر C حرکت می‌کند . در ساعت ۱۲ و ۴۰ دقیقه به این شهر می‌رسد . مسافت ۲۵ = ۱۵ − ۴۰ کیلومتر را در مدت ۲۵ = ۱۵ − ۴۰ دقیقه طی کرده است پس سرعت آن ۶۰ کیلو متر درساعت بوده است . بعد از ۵ دقیقه توقف در شهر C ، ساعت ۴۵ دقیقه بعد از ۱۲ ازآنجا حرکت کرده ودر ساعت ۱۳ به مقصد خود شهر D می‌رسد . فاصلهٔ C تا D یعنی ۲۰ = ۴۰ − ۶۰ کیلومتر را در مدت ۱۵ = ۴۵ − ۶۰ دقیقه طی کرده است و سرعت آن ۸۰ کیلومتر در ساعت بوده است .

۲) ترن (۲) درساعت ۱۲و۱۰ دقیقه ازشهر D به‌طرف شهر B حرکت‌می کند که درساعت ۱۲ و ۴۰ دقیقه به آنجا می‌رسد، این فاصلهٔ ۴۵ کیلو متری را در مدت ۳۰ دقیقه پیموده است پس سرعتش ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده است . ۱۰ دقیقه در B توقف کرده درساعت ۵۰ دقیقه بعداز ۱۲ ازآنجا حرکت کرده ودر ساعت ۱۳ به شهر A رسیده است . دراین فاصله سرعتش ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده است .

۳) دو ترن در فاصلهٔ ۳۰ کیلومتری شهر A و درساعت ۳۰ دقیقه بعد از ۱۲ یکدیگر را ملاقات کرده‌اند .

پاسخهای درست رسیده از : فریدون امین‌زاده دبیرستان فردوسی رضائیه ـ سید مرتضی حسینی خرمی ـ حسین جعفری دبیرستان پهلوی گلپایگان .

۳۵۰۶ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$tg\alpha \sin\alpha = \frac{24}{5}$$

خطوط مثلثاتی کمان حادهٔ α را حساب کنید

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{24}{5}$$

$$5\cos^2\alpha + 24\cos\alpha - 5 = 0 \longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{و} \quad tg\alpha = 2\sqrt{6}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

پاسخهای درست رسیده: حسین امیر حسینی دبیرستان دارالفنون ـ ناصر چیت سازان دبیرستان قطب دزفول ـ سعید رستگار دبیرستان قطب دزفول ـ مسعود نجفی از لاهیجان ـ محمد مقدسی ـ حسین مظفریان دبیرستان ابن سینا رضائیه ـ محسن تاج‌الدینی دبیرستان قناد بابل ـ اسماعیل گل‌جاریان دبیرستان قناد بابل ـ سید مرتضی حسینی خرمی دبیرستان داورپناه ـ محمود تویسرکانی دبیرستان شاهپور تجریش ـ مجید حقگو دبیرستان ابن سینا رضائیه ـ علی مقیمی اسکوئی دبیرستان جعفری ـ محمدرضا یزدان دبیرستان قریب ـ محمد

حسن‌سامانی‌پور دبیرستان هدف۱ـ عبدالرحیم حاجی طالب ـ محمدرضا کمالی دبیرستان فردوسی رضائیه ـ فریدون امین‌زاده ناصر و منصور نهاوندی پور ازدبیرستان مروی

کلاس پنجم ریاضی

۳۵۰۷ـ برمحور $x'x$ سه نقطهٔ A و B و C باطولهای ۱ و ۴ و ۱ − مفروض‌اند .

۱) براین محور نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که :

$$MA+MB+MC=k$$

باشد حدود تغییرات k را تعیین کرده وبه ازاء مقادیر مختلف kدرمواضع M بحث کنید .

۲) بر نیم محور Oy نقطهٔ P را چنـان تعیین کنید که PA نیمساز زاویهٔ CPB باشد . این قسمت را ازراه هندسی نیز حل ورسم کنید (محورها متعامد هستند)

توجه ـ قبل از حل این مسئله لازم است یك نکته را یادآوری نماید ؛ اندازهٔ جبری یك حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ واقع بریك محور $x'x$ راکه به صورت AB نمایش می‌دهیم برابر است با $\overline{AB}=x_B-x_A$ اما اگر مقصود تعیین طول قطعه خط AB باشدکه به صورت AB نوشته می‌شود در این صورت مقدار آن عددی است مثبت وباید چنین بنویسیم :

$$AB=|\overline{AB}|=|x_B-x_A|$$

و باید دو حالت درنظر بگیریم :

۱) $x_B\geq x_A \Rightarrow AB=x_B-x_A$

۲) $x_B<x_A \Rightarrow AB=x_A-x_B$

جای تأسف است‌که اکثردانش آموزان به یك چنین نکات مهمی توجه نداشته و حتی با نگاهی سرسری به صورت مسئله ، آنرا ساده دانسته از حل آن می‌گذرند . برای این مسئله ۱۴ پاسخ واصل‌شده است‌که متأسفانه همه نادرست می‌باشند . مسئلهٔ۳۵۰۹ نیز وضعی نظیر این مسئله دارد .

حل‌مسئله. طول نقطهٔ M را x فرض می‌کنیم داریم:

$$MA+MB+MC=k$$

$$|\overline{MA}|+|\overline{MB}|+\overline{MC}|=k$$

$$|1-x|+|4-x|+|-1-x|=k$$

حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم :

۱) $x<-1 \Rightarrow -1-x\geq 0$ و $1-x>0$ و $4-x>0$

$$1-x+4-x-1-x=k \text{ یا } x=\frac{4-k}{3}$$

لازم است‌که :

$$\frac{4-k}{3}<-1 \text{ یا } k>7$$

۲) $1\geq x\geq -1 \Rightarrow -1-x\leq 0$ و $1-x\geq 0$ و $4-x>0$

$$|-1-x|=1+x \text{ و } 1+x+1-x+4-x=k$$

$$x=6-k$$

شرط : $1\geq 6-k\geq -1 \Rightarrow 5\leq k\leq 8$

۳) $4\geq x\geq 1 \Rightarrow |-1-x|=1+x$ و $|1-x|=x-1$

$$|4-x|=4-x \text{ و } 1+x+x-1+4-x=k \text{ و } x=k-4$$

$$4\geq k-4\geq 1 \Rightarrow 8\geq k\geq 5$$

۴) $x\geq 4 \Rightarrow |-1-x|=1+x$ و $|1-x|=x-1$ و $|4-x|=x-4$

$$1+x+x-1+x-4=k \text{ و } x=\frac{k+4}{3}$$

$$\frac{k+4}{3}\geq 4 \text{ و } k\geq 8$$

مواضع M ـ باتوجه به‌حالتهای بالاو باشرایطی‌که برای k بدست آمد در ازای مقادیر قابل قبول k به سادگی وضع نقطهٔ M مشخص می‌شود . مثلا اگر $k\geq 8$ باشد نقطهٔ M یا در فاصلهٔ $[x \text{ و } B]$ و یا در فاصلهٔ $[C \text{ و } x']$ قرار خواهد داشت . ضمناً مینیمم مقدار k برابر با ۵ است :

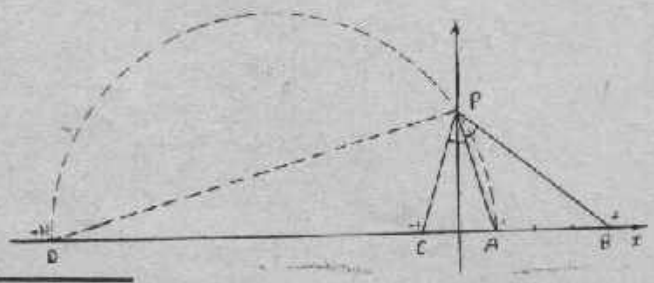
۲) باید داشته باشیم :

$$P(x=0 \text{ و } y>0)$$

$$\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$$

$$AB=|x_B-x_A|=3 \text{ و } AC=|x_C-x_A|=2$$

$$\frac{PB}{PC}=\frac{3}{2} \text{ یا } \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PB}^2}=\frac{9}{4}$$



$$\frac{16+y^2}{1+y^2}=\frac{9}{4} \Rightarrow y=\sqrt{11}$$

ترسیم هندسی : بر $x'x$ نقطهٔ D را چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{3} \Rightarrow x_D=-11$$

A پای نیمساز داخلی و D پای نیمساز خارجی زاویهٔ P از مثلث PBC بوده به قطر DA دایره‌ای رسم می‌کنیم که Oy را قطع می‌کند و P به دست می‌آید .

۳۵۰۸ـ α کمانی است حاده، از رابطهٔ :

$$3\sin\alpha+4\cos\alpha=5$$

خطوط مثلثاتی α را تعیین کنید :

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ و } 3\sqrt{1-\cos^2\alpha}+4\cos\alpha=5$$

یا $3\sqrt{1-\cos^2\alpha}=5-4\cos\alpha$

$$9-9\cos^2\alpha=25-40\cos\alpha+16\cos^2\alpha$$

$$25\cos^2\alpha-40\cos\alpha+16=0 \text{ یا } (5\cos\alpha-4)^2=0$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5} \text{ و } \sin\alpha=\frac{3}{5} \text{ و } tg\alpha=\frac{3}{4} \text{ و } cotg\alpha=\frac{4}{3}$$

پاسخهای درست رسیده : حسین جعفری ـ غلامرضا مستجاب الدعوه دبیرستان بحرالعلوم ـ محمد رضا یزدان دبیرستان قریب ـ محمود تویسرکانی ـ صمد راستی‌کردار دبیرستان حکمت فسا ـ کامبیز علوی دبیرستان هدف ۱ـ فریدون امین زاده ـ چنگیز آزادی دبیرستان رضاشاه کبیر همدان ـ حسین مظفریان ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ اسماعیل گل‌جاریان ـ صمد حیاتی دبیرستان خوارزمی ۲ ـ محمد حاج سلیمانی دبیرستان رهنما ـ جمال آشفته ـ داود حسینی دبیرستان دکتر داورپناه ـ مسعود نجفی ـ حسین امیرحسینی ـ محمد مقدسی ـ محسن تاج‌الدینی ـ سید مرتضی حسین خرمی ـ مجید حقگو ـ علی مقیمی اسکوئی ـ محمدحسن سامانی‌پور ـ عبدالرحمن حاجی‌طالبـ محمدرضا کمالی ـ منصور ونامرنهاوندی‌پور.

۳۵۰۹ـ اگر $x=\sin^2\alpha$ و α کمانی ازدایرهٔ مثلثاتی باشد درازاء مقادیر مختلف α حاصل عبارت :

$$y=\sqrt{1+2\sqrt{x(1-x)}}$$

را برحسب α تعیین کنید .

$$\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=|\sin\alpha\cos\alpha|$$

حالت اول ـ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت باشند یعنی انتهای کمان α یا دربخش اول ویا دربخش سوم ازدایرهٔ مثلثاتی واقع باشد دراین صورت داریم :

$$\sqrt{x(1-x)}=\sin\alpha\cos\alpha \text{ و}$$

$$y=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos}$$

$$y=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha+\cos\alpha|$$

۱) اگر انتهای α در بخش اول باشد .

$$y=|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sin\alpha+\cos\alpha$$

۲) اگر انتهای α در بخش سوم باشد داریم :

$$y=|\sin\alpha+\cos\alpha|=-\sin\alpha-\cos\alpha$$

حالت دوم ـ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف‌العلامه باشند یعنی انتهای کمان α یا در بخش دوم ویا دربخش چهارم واقع باشد در این صورت :

$$|\sin\alpha\cos\alpha|=-\sin\alpha\cos\alpha$$

$$y=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

۳) اگر انتهای α در بخش دوم باشد :

$$\sin\alpha>0>\cos\alpha$$

بوده و خواهیم داشت : $y=\sin\alpha-\cos\alpha$

۴) اگر انتهای α در بخش چهارم باشد :

$$\sin\alpha<0<\cos\alpha$$

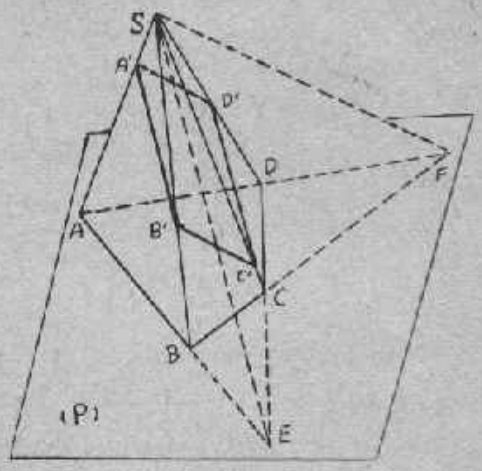
بوده و داریم : $y=\cos\alpha-\sin\alpha$

متأسفانه همهٔ پاسخهایی که برای این مسئله رسیده است نادرست می‌باشد. فقط دو پاسخ ازآقایان **منوچهر بنی‌اسدی** دبیرستان صمصامی اراک و **فریدون امین‌زاده** صرف نظر از بحث آن درست می‌باشد .

۳۵۱۰ـ چهارضلعی $ABCD$ درصفحهٔ P ونقطهٔ S در خارج این صفحه مفروض است . از نقطهٔ A' واقع بر قطعه خط SA صفحهٔ Q را چنان بگذرانید که اگر فصل‌مشترکهای آن با صفحات SAB و SBC و SCD و SDA به ترتیب خطوط $A'B'$ و $B'C'$ و $C'D'$ و $D'A'$ باشد چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع باشد .

اگر $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد سه صفحهٔ SAB و SCD و Q دو به دو متقاطعند و چون از فصل ـ مشترکهای دو به دوی آنها $A'B'$ و $C'D'$ متوازیند لازم می‌آید که هر سه فصل‌مشترک متوازی باشند واگر E نقطهٔ تلاقی AB و CD باشد ، SE فصل مشترک صفحات SAB و SCD بوده و با $A'B'$ و $C'D'$ موازی است. همچنین اگر F نقطهٔ

تلاقی AD و BC باشد خط SF با خطوط A'D' و B'C'



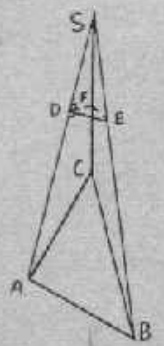
موازی است و راه حل مسئله چنین می‌شود : ابتدا خطوط SE و SF را تعیین نموده آنگاه صفحهٔ Q را از A' به موازات SE و SF رسم می‌کنیم .

در حالتی که چهارضلعی ABCD دوزنده باشد مثلا AB ∥ CD در این صورت E وجود نداشته و SE و در نتیجه صفحهٔ Q وهمچنین A'B' و C'D' با AB و CD موازی می‌شوند .

و چنانچه ABCD متوازی‌الاضلاع باشد صفحهٔ Q باصفحهٔ P موازی بوده وهریك ازاضلاع A'B'C'D' باضلع نظیر خود از ABCD موازی می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از : غلامرضا مستجاب ـ الدعوه ـ سعید شریعتمداری دبیرستان هدف ۱ـ

۳۵۱۱ـ مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC که درآن $A=90^\circ$ و $AC=AB=6cm$ می‌باشد درصفحهٔ P واقع است عمود CS را برابر با ۸ سانتیمتر برصفحهٔ P اخراج می‌کنیم و از S به A و B وصل کرده بر SA نقطهٔ D را چنان تعیین می‌کنیم که $SD=4cm$ باشد . در صفحات SAC و SAB در نقطهٔ D عمودهایی بر SA اخراج می‌کنیم که خطوط SC و SB را به ترتیب در F و E قطع می‌کنند و EF را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلث DEF قائم‌الزاویه بوده واندازه‌های اضلاع آنرا حساب کنید .



بنابرقضیهٔ سه عمودمثلث SAB قائم‌الزاویه است و نتیجه می‌شود که خط AB بر صفحهٔ SAC عمود بوده و دو صفحهٔ SAB و SAC بریکدیگر عمود باشند وچون EDF زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ این دو صفحه است قائمه خواهد بود .

$$SA=\sqrt{SC^2+AC^2}=\sqrt{100}=10$$

$$\frac{SF}{SA}=\frac{SD}{SC}=\frac{DF}{AC}$$

$$SF=5 \text{ و } DF=3$$

$$\frac{SD}{SA}=\frac{DE}{AB}\Longrightarrow DE=2/4$$

$$EF=\sqrt{9+5/76}-\sqrt{14/76}=0/2\sqrt{369}$$

پاسخهای درست رسیده : صمد حیاتی ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ غلامرضا مستجاب‌الدعوه ـ ناصر ومنصور نهاوندی‌پور

کلاس ششم طبیعی

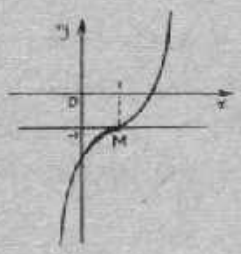
۳۵۱۲ـ رسم منحنی نمایش تابع :

$$y=(x-1)^2-1$$

تعیین معادلهٔ مماس برآن درنقطهٔ M به طول ۱ ، تعیین نقاطی ازمنحنی که مماس برآنها با $y=3x$ موازی باشند .

$$y'=3(x-1)^2\geq 0$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+		+	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	−2	↗	−1	↗	0	↗	$+\infty$



نقطهٔ $M(1\ و\ -1)$ نقطهٔ عطف منحنی بوده و مماس در این نقطه با محور x'x موازی است که معادلهٔ آن $y=-1$ می‌باشد .

$$3(x-1)^2=3\Longrightarrow x=0 \text{ و } 2$$

$$A(0\ و\ -2) \text{ و } B(2\ و\ 0)$$

پاسخهای درست رسیده : سیمین سمندری دبیرستان شاهدخت ـ صمد راستی‌کردار ـ علی صحرانورد دبیرستان دارالفنون ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده دبیرستان امیرکبیر نویسرکان جواد هاشمی‌نژاد دبیرستان ابن سینا رضائیه ـ حسین محسنی افشار دبیرستان خوارزمی .

۳۵۱۳ـ حل معادلهٔ زیر :

$$\sin^2 x+\cos^2 x=\sin x+\cos x$$

$$\sin x(1-\sin^2 x)+\cos(1-\cos^2 x)=0$$
$$\sin x\cos^2 x+\cos x\sin^2 x=0$$
$$\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=0$$

$\sin x=0$ و $x=k\pi$ و $\cos x=0$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sin x+\cos x=0$ یا $tgx+1=0$ و $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$x\in[0\ و\ 2\pi]: x=0$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ و 2π و $\frac{7\pi}{4}$

پاسخهای درست رسیده : سیمین سمندری ـ حسین حاجی‌رحیم‌دبیرستان حلوم‌ـ جواد هاشمی‌نژادـمهدی‌خواجوی دبیرستان علم‌پیرجند ـ حسین محسنی افشار ـ محمدرضایزدان فریدون امین زاده ـ صمد فرهنج ـ عبدالرحمن چگنی زاده محمد حسن سامانی‌پور حبیب‌الله سلیم زاده علی صحرا نورد ـ صمد راستی‌کردار .

کلاس ششم ریاضی

۱/۵ **۳۵۱۴ـ** معادلهٔ یك منحنی نسبت به x و y از درجهٔ دوم است . مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است ، منحنی از نقطهٔ $M(۲-\ و\ ۶)$ می‌گذرد ودر نقطهٔ به عرض صفر بر خط $x=۲$ مماس است . معادلهٔ منحنی را تعیین کنید . مسئله را درحالتی حل کنیدکه منحنی در نقطهٔ به عرض ۱ بر خط $x=۲$ مماس باشد .

معادلهٔ کلی منحنی را به صورت زیر فرض می‌کنیم.

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

طرفین را بر A تقسیم می‌کنیم ، معادله‌ای به صورت زیرحاصل می‌شود :

$$x^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

چون مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است پس :

$$d=e=0$$

و داریم : $x^2+by^2+cxy+f=0$

مختصات $(x=۲\ و\ y=-۲)$ و $(x=۶\ و\ y=0)$

در معادله صدق می‌کنند و مشتق تابع :

$$y'=\frac{-2x-cy}{2by+cx}$$

درازاء $(x=۲\ و\ y=0)$ برابربا ∞ است یعنی داریم :

$$\begin{cases}۳۶+۴b-۱۲c+f=0\\ ۴+f=0\\ ۲c=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b=-۸\\ c=0\\ f=-۴\end{cases}$$

و معادلهٔ منحنی می‌شود :

$$x^2-۸y^2-۴=0$$

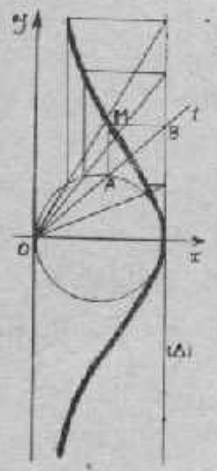
در حالتی که نقطهٔ تماس با خط $x=۲$ به عرض ۱ باشد دستگاه بالا چنین خواهد شد .

$$\begin{cases}۳۶+۴b-۱۲c+f=0\\ ۴+b+۲c+f=0\\ ۲b+۲c=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b=-\frac{۳۲}{۱۷}\\ c=\frac{۳۲}{۱۷}\\ f=-\frac{۱۰۰}{۱۷}\end{cases}$$

$$۱۷x^2-۳۲y^2+۳۲xy-۱۰۰=0$$

پاسخهای درست رسیده : حسین شاهمیری ـ احمد حاج ـ علیم دبیرستان هدف ۱ ـ داود تراکمه دبیرستان دارالفنون .

۱/۶ **۳۵۱۵ـ** در صفحهٔ محور های مختصات متعامد خط Δ به معادلهٔ $x=a$ را درنظر می‌گیریم دایره‌ای به قطر a بر O مبدأ مختصات می‌گذرد و بر Δ مماس است . نیم خط متغیر Ot دایره را در A و Δ را در B قطع می‌کند.از A و B خطوطی به‌موازات‌محورها رسم می‌کنیم تا در M متلاقی شوند . معادلهٔ مکان M را بدست آورید.



فرض می‌کنیم $M(x\ و\ y)$ و $A(x\ و\ Y)$ خواهیم داشت: $B(a\ و\ y)$ چون سه نقطهٔ A و B و O بر یك استقامتند پس:

$$\frac{Y}{x}=\frac{y}{a}\Longrightarrow Y=\frac{xy}{a}$$

چون A بردایره واقع است بنابراین .

$$(x-\frac{a}{۲})^2+Y^2=\frac{a^2}{۴}$$

$$(x-\frac{a}{۲})^2+\frac{x^2y^2}{a^2}=\frac{a^2}{۴}$$

پس از اختصار نتیجه خواهد شد :

$$x(a^2+y^2)=a^2\ \text{یا}\ y=\pm a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

پاسخهای درست رسیده : بهروز سامانی دبیرستان رهنما ـ وحید طباطبا وکیلی ـ احمد جلیلی تنها دبیرستان دکتر نصیری .

۳۵۱۶ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$tgx+tg2x+tg3x+tg4x=0$$

$$tgx+tg4x=-(tg2x+tg3x)$$

$$\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}=\frac{-\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$$

$$\sin 5x=0 \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{5}$$

$$\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x=0$$

$$\cos x(2\cos^2 2x-1)+\cos 2x(4\cos^3 x-3\cos x)=0$$

$$\cos x\neq 0$$

$$2\cos^2 2x-1+\cos 2x(4\cos^2 x-3)=0$$

$$2\cos^2 2x-1+\cos 2x(2+2\cos 2x-3)=0$$

$$4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0 \quad و \quad \cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

$$x=k\pi\pm\frac{1}{2}Arccos\left(\frac{1\mp\sqrt{17}}{8}\right)$$

$$x=k\pi\pm Arccos\pm\frac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{4}$$

باسخهای درست رسیده: محمد هاشم شفیعی دبیرستان مروی ـ داود تراکمه ـ حسین شاهمیری ـ حبیب‌الله ریاضی ازکازرون ـ شاهرخ زنجانی‌زاده دبیرستان نادرشاه مشهد ـ احمد حاج عظیم‌ـ غلامرضا نخعی‌زاده دبیرستان نادرشاه مشهد ـ حسین حاجی رحیم .

۳۵۱۷ـ عبارت:

$$x=\cos 3t+2\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$$

به صورت :

$$x=A\cos(3t+\alpha)$$

درمی‌آید با استفادهٔ از جدول لگاریتم مقادیر A و α وبه فرض $t=20^\circ$ و $8'$ و $24''$ مقدار x را تا ۵ رقم اعشار حساب کنید .

$$x=\cos 3t+2\left(\cos 2t\cos\frac{\pi}{3}-\sin 3t\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos 3t-\sqrt{3}\sin 3t=2\left(\cos 3t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3t\right)$$

با فرض $tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ خواهیم داشت :

$$x=\frac{2}{\cos\alpha}(\cos 3t\cos\alpha-\sin 3t\sin\alpha)$$

$$x=\frac{2}{\cos\alpha}\cos(3t+\alpha)$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{یا} \quad A=\sqrt{7} \quad و$$

$$x=\sqrt{7}\cos(3t+\alpha)\alpha=Arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\log\sqrt{7}=\frac{1}{2}\log 7=0/422455 \quad و \quad A=2/645575$$

$$\log tg\alpha=\frac{1}{2}\log 3+colog 2=\bar{1}/93753$$

$$\alpha=40^\circ 53'26''$$

$$x=\sqrt{7}\cos(101^\circ 18'48'')$$

$$=-\sqrt{7}\cos(21^\circ 18'48'')$$

$$\log(-x)=\frac{1}{2}\log 7+\log\cos 11^\circ \quad و \quad 18' \quad و \quad 48''$$

$$=0/422455+1/99148=0/41403$$

$$-x=2/59435 \quad و \quad x=-2/59435$$

۳۵۱۸ـ اولا باقیماندهٔ تقسیم هفت توان اولیهٔ ۵ (5 و 5^2 و ... و 5^7) را بر ۷ تعیین کنید .

ثانیاـ اعداد صحیح n را چنان تعیین کنید که باقیماندهٔ تقسیم 19^n بر ۷ برابر ۲ باشد .

ثالثاً ـ به ازاء چه مقادیر از x عدد :

$$A=19^{2x}+19^x+1$$

بر ۷ بخش پذیر است .

یادآوری‌ـ برای‌اینکه‌نشان‌دهیم باقیماندهٔ‌تقسیم‌دوعدد a و b برعدد p برابر است چنین می‌نویسیم :

$$a\equiv b(\mathrm{mod}.\ p)$$

۱) نسبت به تقسیم بر۷ داریم :

$$5\equiv 5 \quad و \quad 5^2=5\times 5\equiv 4$$

$$5^3=5^2\times 5=4\times 5\equiv 6$$

$$5^4=5^3\times 5\equiv 6\times 5\equiv 2 \quad و \quad 5^5=5^4\times 5$$

$$\equiv 2\times 5\equiv 3 \quad و \quad 5^6\equiv 3\times 5\equiv 1$$

$$5^7\equiv 1\times 5\equiv 5$$

نتیجه ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد n بر۶ برابر p باشد یعنی $n=6k+p$ خواهیم داشت :

$$5^n\equiv 5^p \ (\mathrm{mod}.7)$$

۲) باقیماندهٔ تقسیم ۱۹ بر ۷ برابر است با ۵ :

$$۱۹\equiv ۵ \pmod{۷}$$

$$۱۹^n ۵^n \equiv ۵^n \pmod{۷}$$

داشتیم $۵^۴\equiv ۲ \pmod{۷}$ واگر فرض کنیم: $n=۶k+۴$ خواهیم داشت :

$$۵^n \equiv ۵^۴ \equiv ۲ \pmod{۷}$$

بنابراین به‌ازاء مقادیر $n=۶k+۴$ (kعددصحیح) باقیماندهٔ تقسیم اعداد ۱۹^n بر ۷ برابر با ۲ می‌باشد .

۳) چنین می‌نویسیم :

$$۱۹^{۲x}+۱۹^x+۱\equiv ۵^{۲x}+۵^x+۱ \pmod{۷}$$

با توجه به قسمت اول مسئله نتیجه خواهیم گرفت :

$$x=۶k+۲$$

۳۵۱۹ـ مطلوبست تعیین مقادیر a و b که داشته باشیم

$$\overline{aabb}=\overline{bb}\,(\overline{ab}+\overline{ba})$$

بعد از بسط طرفین خواهیم داشت :

$$۱۰۰a+b=۱۱b(a+b)$$

$$۹۹a+(a+b)=۱۱b(a+b)$$

نتیجه می‌شود که $a+b=۱۱$ و در نتیجه :

$$۹a+۱=۱۱b$$

و خواهیم داشت : $a=۶$ و $b=۵$

پاسخهای درست رسیده : علی کهنموئی از تبریز وحید طباطبا وکیلی ـ بهروز ساسانی ـ حسین شاهمیری محمد رضا داورپناه ـ منصور عابدی ـ حسین حاجی رحیم پرویز خواجه خلیلی دبیرستان رازی‌آبادان ـ داود تراکمه مراد متحده ـ اصغر شیبانی دبیرستان کسری ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده علی صحرانورد ـ احمد حاج عظیم ـ شاهرخ زنجانی‌زاده غلامرضا نخعی‌زاده ـ فریدون امین .

۳۵۲۰ـ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ F واقع درداخل آن مفروض است وفرض می‌کنیم $OF=C<R$ اضلاع زاویهٔ قائمهٔ به رأس F دایرهٔ مفروض را در A و B قطع می‌کنند ووسط AB را I می‌نامیم .

۱) ثابت کنید: $\overline{IO}^۲+\overline{IF}^۲=\overline{R}^۲$ ومکان هندسی نقطهٔ I را وقتی که زاویهٔ قائمه حول F بچرخد تعیین کنید .

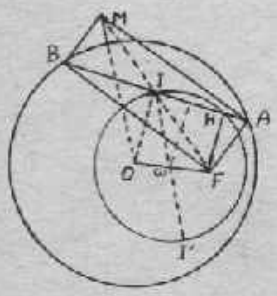
۲) اگر M رأس چهارم مستطیل AFBM باشد مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید .

۳) اگر H تصویر F بر AB باشد مکان نقطهٔ H چیست :

۴) ثابت کنید حاصل ضرب $\overline{OI}\cdot\overline{FH}$ مقدار ثابت است وپوش AB را تعیین کنید

حل ـ ۱) میانهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر با نصف وتر پس $IF=IB$ وچون OI بر AB عمود است پس :

$$\overline{IO}^۲+\overline{IF}^۲=\overline{IO}^۲+\overline{IB}^۲=\overline{OB}^۲=R^۲$$



بنا بر قضیهٔ ۱مندرج در یکان شمارهٔ ۱۵ مکان نقطهٔ I دایره‌ای است به مرکز ω وسط OF و به شعاع :

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲-C^۲}$$

۲) نقطهٔ I وسط FM واقع است بنابراین در تجانس (F و ۲) نقطهٔ M مجانس نقطهٔ I است و مکان M دایره‌ای خواهد بود به مرکز O و به شعاع ۲r

۳) چهارضلعی OFHI ذوزنقهٔ قائم است ونتیجه می‌شود که خطی که از وسط ساق OF بر ساق IH عمود شود این‌ساق را نصف می‌کند پس $\omega H=\omega I$ و مکان H عمان دایرهٔ (ω) می‌باشد .

۴) چون زاویه قائمه H در دایرهٔ (ω) محاط است بنابراین روتروی قطر II' از این دایره بوده و داریم :

$$\overline{OI}=-\overline{FI'} \text{ و } \overline{OI}\cdot\overline{FH}=-\overline{FI'}\cdot\overline{FH}$$

$$=r^۲-c^۲=\frac{R^۲-c^۲}{۲}$$

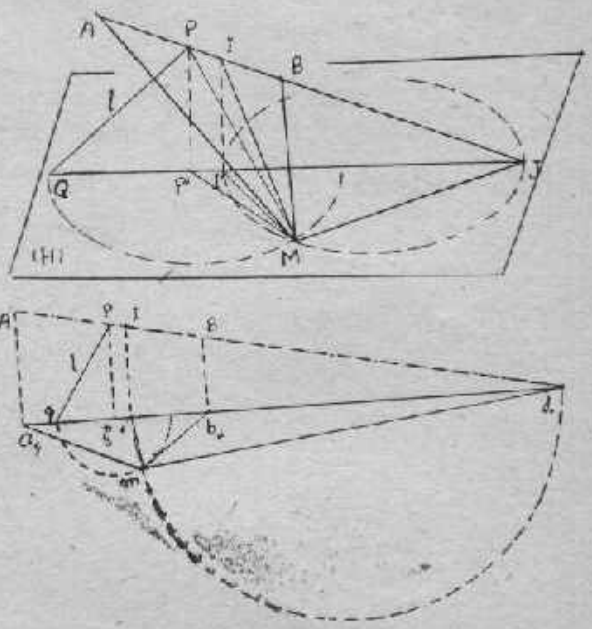
چون تصویر های F و O برخط AB بردایرهٔ (ω) واقع شده‌اند بنابراین خط AB بریضی که F و O کانونها و (ω) دایرهٔ اصلی آن باشد مماس می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده : بهروز ساسانی .

۳۵۲۱ـ دو نقطهٔ $a_۱$ و $b_۱$ به فاصلهٔ $AB=۱۰^{cm}$ مفروض‌اند . درصفحهٔ مقایسه نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که نیمساز زاویهٔ خارجی AMB بر صفحهٔ مقایسه منطبق بوده و فاصلهٔ M از نقطهٔ P وسط AB برابر با مقدار I باشد .

اگر J نقطهٔ تلاقی AB با صفحهٔ مقایسه (H) و M نقطهٔ مطلوب باشد خط MJ نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است و بر MI نیمساز این زاویه عمود خواهد بود. تصویرزاویهٔ قائمهٔ IMJ که یک ضلعش بر صفحهٔ H منطبق است براین‌صفحه زاویهٔ قائمهٔ I'MJ خواهد بود . پس اگر I' تصویر I را بر (H) بدست‌آوریم دایرهٔ به قطر I'J مکان M می‌باشد . اگر Q نقطه‌ای از خط JI' باشدکه $PQ=I$ فاصلهٔ M از I' برابر با I'Q بوده یعنی M بر دایرهٔ به مرکز I' و به

شعاع I'Q واقع است . با رسم دو دایرهٔ فوق‌الذکر نقطهٔ M مشخص می‌شود .



با استفادهٔ از آنچه که گفته شد ملخص را رسم می‌کنیم .

بحث ـ برای اینکه نقطهٔ M وجود داشته باشد لازم است که

$$PI'<PM<PJ$$

$$0/2\sqrt{6491}<l<25$$

پاسخهای درست رسیده : داود تراکمه ـ محمد هاشم شفیعی .

مسائل متفرقه

۳۵۲۲ـ با فرض $y=(x+1)^6$ صحت رابطهٔ :

$$6y=(x+1)y'$$

را تحقیق کنید واز این راه بسط $(x+1)^6$ را بدست آورید .

$$y'=6(x+1)^5 \Longrightarrow$$

$$y'(x+1)=6(x+1)^6=6y$$

فرض می‌کنیم :

$$(1)\quad y=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+1$$

$$(2)\quad y'=6x^5+5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$$

عبارت رابطهٔ (۲) را در $x+1$ ضرب کرده حاصل را با شش برابر عبارت (۱) متحد قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} 5a+6=6a \\ 5a+4b=6b \\ 4b+3c=6c \\ 3c+2d=6d \\ 2d+e=6e \\ e=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=15 \\ c=20 \\ d=15 \\ e=6 \end{cases}$$

$$(x+1)^6=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$$

۳۵۲۳ـ به فرض آنکه a_1 و a_2 و .... و a_n اعداد صحیح و مثبت باشند ثابت کنید :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\geq n^2$$

حاصل عمل ضرب طرف اول چنین می‌شود .

$$1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_1}+1+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

و به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$n+(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1})+\cdots(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i})+\cdots+(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n})$$

تعداد پرانتزها برابر با $\frac{n^2-n}{2}$ است وچون عبارت داخل هر پرانتز بزرگتر یا مساوی با ۲ است (زیرا مجموع هر عدد صحیح با عکس‌آن از ۲ کوچکتر نیست) بنابراین طرف‌اول از

$$n+\frac{n^2-n}{2}\times 2=n^2$$

یا بزرگتر است ویا باآن مساوی است . (تساوی وقتی برقرار است که همهٔ حمل باهم مساوی ومساوی با یك باشند)

پاسخهای درست رسیده: جواد هاشمی‌نژاد ـ حبیب‌الله ریاضی ـ پشوتن بهین‌آئین ازکازرون ـ بهروزساسانی ـ صادق منتظمی ـ منصور عابدی ازملایر ـ یدالله شفیعی ـ داود روحانی احمد عبادی از رضائیه .

۳۵۲۴ـ بفرض اینکه اعداد a_i و b_i $(i=1,2,\ldots,n)$

صحیح و مثبت باشند ثابت کنید :

$$(\Sigma log_{b_i} a_i)(\Sigma log_{a_i} b_i) \geq n^2$$

با توجه به اینکه $log_b a = \frac{1}{log_a b}$ بنابر مسئلهٔ قبل ، صحت نامساوی محقق می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده: پشوتن بهین آئین- حبیب‌الله ریاضی - بهروز ساسانی - یدالله شفیعی - داود روحانی- احمد عبادی .

۳۵۲۵- اگر A و B و C زاویه‌های مثلثی باشند ثابت کنید :

$$cotg^2\frac{A}{2} + cotg^2\frac{B}{2} + cotg^2\frac{C}{2} \geq 9$$

می‌دانیم که اگر α و β و γ مثبت باشند .

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \text{ و } \beta^2+\gamma^2 \geq 2\beta\gamma \text{ و } \gamma^2+\alpha^2 \geq 2\gamma\alpha$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین این نامساویها نتیجه خواهیم گرفت .

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

بنابر مسئلهٔ (۳۵۲۳) داریم :

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}) \geq 9$$

حال اگر فرض کنیم :

$$\alpha = cotg\frac{A}{2} \text{ و } \beta = cotg\frac{B}{2} \text{ و } \gamma = cotg\frac{C}{2}$$

و با توجه به اینکه در هر مثلث :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$$

صحت نامساوی مفروض محقق می‌باشد .

۳۵۲۶ - عبارت زیررا به صورت مجموع سه مربع درآورید و معادلهٔ $P = 0$ را حل کنید :

$$P = cos2x + cos2y + cos2z + 2(1-sinz)(sinx-siny-1) - 2$$

مقادیر $cos2x$ و $cos2y$ و $cos2z$ رابرحسب‌سینوس نصف کمان نوشته وپرانتزهارا ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$P = (sin^2x + sin^2y + 2sinxsiny) + (sin^2x + sin^2y + sin^2z - 2sinxsiny + 2sinxsinz - 2sinx - 2sinysinz + 2siny - 2sinz) + sin^2z$$

$$P = (sinx+siny)^2 + (sinx-siny+sinz-1)^2 + sin^2z$$

$P = 0$ وقتی است که :

$$\begin{cases} sinx + siny = 0 \\ sinx - siny + sinz - 1 = 0 \\ sinz = 0 \end{cases}$$

و مقادیر کمانهای x و y و z حساب می‌شود

پاسخ درست رسیده از : حسین شاهمیری .

۳۵۲۷- مطلوبست تعیین مقادیر x و y ازروابط زیر

$$\begin{cases} Arctg(x-y) + Arccotg(x+y) = \frac{\pi}{2} \\ Arccotg3x^2 - Arctg2y^2 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود :

$$x-y = x+y \longrightarrow y = 0$$

و از رابطهٔ دوم خواهیم داشت :

$$Arccotg3x^2 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow 3x^2 = 1 \text{ و } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پاسخهای درست رسیده: احمدجلیلی‌تنها- محمدهاشم شفیعی- داود روحانی - حسین شاهمیری - احمد عبادی - محمد حسن سامانی‌پور- جوادهاشمی‌نژاد- حسین‌حاجی‌رحیم- غلامرضا نخعی‌زاده - شاهرخ زنجانی‌زاده محمد متولیان .

۳۵۲۸- ثابت کنید که اگر رابطهٔ زیر به ازاء $n = 1$ برقرار باشد به ازاء جمیع مقادیر n برقرار خواهد بود (A و A و B زوایای حاده هستند)

$$(tg^nA + tg^nB + tg^nC)(cotg^nA + cotg^nB + cotg^nC) = 9$$

در ازاء $n = 1$ داریم

$$(tgA + tgB + tgC)(cotgA + cotgB + cotgC) = 9$$

بنا بر مسئلهٔ (۳۵۲۳) نتیجه خواهیم گرفت :

$$tgA = tgB = tgC = 1$$

و در نتیجه رابطهٔ مفروض همواره برقرار است .

پاسخهای درست رسیده : محمد هاشم شفیعی و وحید طباطبا وکیلی .

۳۵۲۹- مطلوبست تعیین حد عبارت زیر وقتی :

$$n \to \pm\infty$$

$$S_n = \frac{2^{n+a} + 3^{n+a} + \ldots + p^{n+a}}{2^n + 3^n + \ldots + p^n}$$

$$S_n=\frac{2^{n+a}[1+(\frac{3}{2})^{n+a}+\dots+p(\frac{p}{2})^{n+a}]}{2^n[1+(\frac{3}{2})^n+\dots+(\frac{p}{2})^n]}$$

وقتی که $n\to-\infty$ هریك از پرانتزهای کروشه‌های سورت و مخرج به سمت صفر میل کرده ودارایم :

$$\lim S_n=\lim\frac{2^{n+a}}{2^n}=\lim\frac{2^a\times 2^n}{2^n}=2^a$$

$$S_n=\frac{p^{n+a}[(\frac{2}{p})^{n+a}+(\frac{3}{p})^{n+a}+\dots+1]}{p^n[(\frac{2}{p})^n+(\frac{3}{p})^n+\dots+1]}$$

$$n\to+\infty \text{ و } \lim S_n=\lim=\frac{p^{n+a}}{p^{n^*}}=p^a$$

پاسخهای درست رسیده: احمد عبادی. داودروحانی

۳۵۳۰ـ اگر داشته باشیم :

$\log a+\log b=m$ و $\log a-\log b=m-4$

حدود m را تعیین کنید که داشته باشیم :

(۱) $ba^{\sin x}=ab^{\cos x}$

از روابط مفروض نتیجه می‌گیریم :

$\log a=m-2$ و $\log b=2$

از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$\sin x\log a+\log b=\cos x\log b+\log a$

$(m-2)\sin x-2\cos x=m-4$

این معادلهٔ کلاسیك نوع اول وقتی دارای جواب است که :

$(m-2)^2+4\geqslant(m-4)^2\Rightarrow m\geqslant 2$

پاسخهای درست رسیده : احمد عبادی ـ حبیب‌الله ریاضی ـ بهروز ساسانی ـ بدالله شفیعی ـ محمد هاشم شفیعی منصور عابدی ـ داود روحانی ـ حسین شاهمیری ـ حسین حاجی رحیم ـ وحید طباطبا وکیلی ـ شاهرخ زنجانی‌زاده غلامرضا تخمی‌زاده .

۳۵۳۱ـ صحت نامساوی زیررا به ازاء جمیع مقادیر k و x محقق کنید :

$|\sin kx|<k|\sin x|$

$|\sin kx|=|\sin(k-1)x+x|$

$=|\sin(k-1)x\cos x+\cos(k-1)x\sin x|$

با توجه به $-1<\sin x<1$ و $-1<\cos x<1$ داریم :

$|\sin(k-1)x\cos x|<|\sin(k-1)x|$

$|\cos(k-1)x\sin x|<|\sin x|$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

$|\sin kx|<|\sin(k-1)x|+|\sin x|$

$|\sin(k-1)x|<|\sin(k-2)x|+|\sin x|$

. . . . . .

$|\sin 2x|<|\sin x|+|\sin x|$

از جمع نظیر به نظیر نامساویها رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید .

پاسخ درست رسیده از : محمود متولیان .

۳۵۳۲ـ اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases}x_1=a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n\\ x_2=a_1x_1+a_3x_3+\dots+a_nx_n\\ \dots\dots\dots\\ x_n=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_{n-1}x_{n-1}\end{cases}$$

ثابت کنید :

۱) $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\dots+\frac{a_n}{a_n+1}=1$

۲) $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\dots+\frac{1}{a_n+1}=n-1$

فرض می‌کنیم :

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=y$

با توجه به روابط داده شده خواهیم داشت :

۳) $y=x_1(1+a_1)=x_2(1+a_2)=\dots$

$=x_n(1+a_n)$

ازطرف دیگر ، از جمع روابط داده شده داریم :

۴) $x_1+x_2+\dots+x_n=$

$(n-1)(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n)=(n-1)y$

ازروابط (۳) مقادیر a_1 و a_2 و . . . a_n را بدست آورده در روابط (۲) و (۱) قرار می‌دهیم . با توجه به رابطهٔ (۴) این روابط محقق خواهند شد .

پاسخهای درست رسیده: منصور عابدی ـ احمدعبادی بهروز ساسانی ـ داود روحانی ـ پشوتن بهین‌آئین ـ حواد هاشمی‌نژاد .

۳۵۳۳ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید .

$$\begin{cases}(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\\ 3x-2y=13\end{cases}$$

طرفین معادلهٔ اول را جمله به جمله بر

$$(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}} = (x+y)^{\frac{1}{3}}\,(x-y)^{\frac{1}{3}}$$

تقسیم کرده با انتخاب مجهول معین $z=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}$ داریم

$$z+\frac{2}{z}=3 \longrightarrow z=1 \text{ یا } 2$$

$$z=1 \Longrightarrow y=0$$

$$z=2 \Longrightarrow 7x-9y=0$$

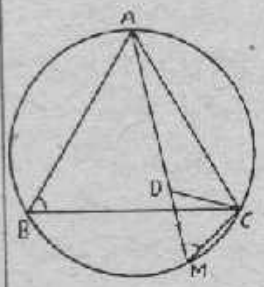
و با توجه به معادلهٔ دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$(x=9 \text{ و } y=7) \text{ یا } (y=0 \text{ و } x=\frac{13}{3})$$

پاسخهای درست رسیده : احمد عبادی. مجیدحقگو صادق منتظمی ـ مسعودنجفی ـ بهروز ساسانی ـ محمد متولیان کامبیز علوی ـ پشوتن بهین‌آئین ـ حسین شاهمیری ـ احمد جلیلی تنها ـ جمال آشفته‌داود روحانی ـ حبیب‌الله ریاضی ـ محمد هاشم شفیعی ـ جواد هاشمی نژاد ـ رضا آهنگری ـ غلامرضا خمی‌زاده ـ شاهرخ زنجانی‌زاده ـ وحید طباطبا وکیلی ـ نریدون‌امین‌زاده ـ علی‌اکبر صنعتی‌دبیرستان‌محمدرضاشاه‌رشت .

۳۵۳۴ـ اولا ثابت کنید که اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد یکی از قطعه خطهای MA و MB و MC برابر است با مجموع دو تای دیگر.

ثانیاً به مراکز A و B و C سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC سه دایرهٔ متساوی و دو به دو مماس رسم می‌کنیم ودایرهٔ (Γ) را مماس براین سه دایره و محیط بر آنها رسم می‌کنیم . از یک نقطهٔ M' واقع بر (Γ) مماسهای M'A' و M'B' و M'C' را بر سه دایرهٔ مرسوم رسم می‌کنیم . ثابت کنید که یکی از این قطعه مماسها برابر است بامجموع دوتای دیگر.



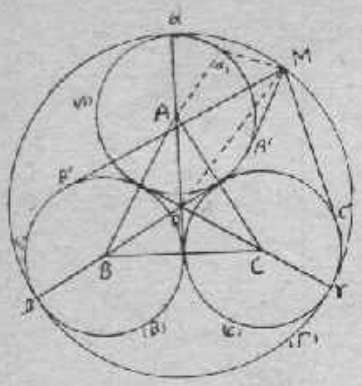
حل اولا ـ بر MA طول MD را مساوی با MC جدا می‌کنیم. زاویهٔ CMA برابر ۶۰° بوده ومثلث MCD متساوی‌الاضلاع است . در دوران به مرکز C و به زاویهٔ ۶۰° نقطهٔ A بر B و نقطهٔ D بر M واقع می‌شود بنابراین : AD=BM و داریم :

$$MA=MB+MC$$

ثانیاً : مطابق شکل زیر داریم :

$$\overline{MA'^2}=M\alpha\cdot M\alpha_1$$

$$\frac{MA'}{M\alpha}=\sqrt{\frac{M\alpha'}{M\alpha}}$$



از تشابه دومثلث αOM و $\alpha A\alpha_1$ داریم :

$$\frac{M\alpha'}{M\alpha}=\frac{OA}{O\alpha} \longrightarrow \frac{MA'}{M\alpha}=\sqrt{\frac{OA}{O\alpha}}$$

وبه‌ترتیب مشابه نتیجه خواهد شد که :

$$\frac{MB'}{M\beta}=\sqrt{\frac{OB}{O\beta}}\ ,\ \frac{MC'}{M\gamma}=\sqrt{\frac{OC}{O\gamma}}$$

وچون $O\alpha=O\beta=O\gamma$ و $OA=OB=OC$ بنابراین:

$$\frac{MA'}{M\alpha}=\frac{MB'}{M\beta}=\frac{MC'}{M\gamma}=\frac{MB'+MC'}{M\beta+M\gamma}$$

مثلث $\alpha\beta\gamma$ متساوی‌الاضلاع است و بنابراولا داریم :

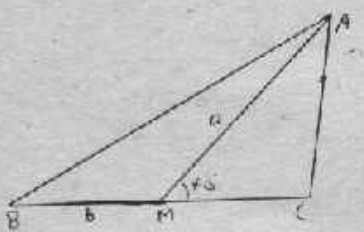
$$M\beta=M\alpha+M\gamma$$

بنابراین $MB'=MA'+MC'$

برای دایرهٔ (Γ') مماس خارجی سه دایرهٔ (A) و (B) و(C) اثبات نظیر حالت قبل است .

پاسخ درست رسیده از : محمود تویسرکانی .

۳۵۳۵ـ در مثلث ABC میانهٔ AM با ضلع BC زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد . فرض می‌کنیم $AM=a$ و $BC=2b$



۱) حاصل ضرب $AB\cdot AC$ را برحسب a و b حساب کنید.

۲) با معلوم بودن دوقطعه خط به‌طولهای a و b قطعه خط به‌طول x را چنان رسم کنید که داشته باشیم :

$$x^4=a^4+b^4$$

حل ـ در مثلثهای ABM ACM داریم :

$$\overline{AB'}=a^2+b^2-2ab\cos 135^\circ$$

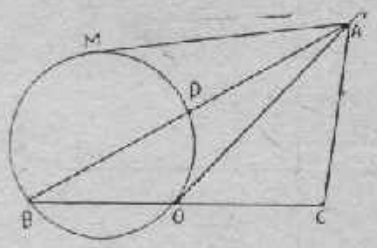
$$\overline{AB'}=a^2+b^2+ab\sqrt{2}$$

$$\overline{AC'}=a^2+b^2-ab\sqrt{2}$$

و $AB'\cdot AC'=\ldots=a^4+b^4$

$$AB\cdot AC=\sqrt{a^4+b^4}$$

۲) بر ضلع AB طول AD را برابر با AC جدا می‌کنیم داریم :



$$AB\cdot AD=\sqrt{a^2+b^2}$$

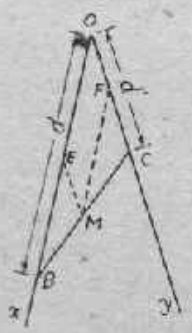
اگر O وسط ضلع BC باشد و دایرهٔ محیطی مثلث BOD را رسم کرده مماس AM را بر آن رسم کنیم داریم :

$$\overline{AM}^2=AB\cdot AD$$

و راه ترسیم طول x چنین شود . از نقطهٔ O وسط قطعه خط BC به‌طول b خطی مانند Ox رسم می‌کنیم که با BC زاویهٔ ۴۵° بسازد و بر آن طول OM را برابر با a جدا می‌کنیم بعد AD را به اندازهٔ AC جدا کرده دایرهٔ محیطی مثلث BOD را رسم کرده مماس AM را بر آن می‌کشیم برابر با طول x است .

پاسخهای درست رسیده : رضا آهنگری ـ داود روحانی احمد عبادی ـ احمد جلیلی تنها ـ حبیب‌الله ریاضی .

۳۵۳۶ـ از نقطهٔ M واقع در داخل زاویهٔ xOy خطی چنان رسم کنید که Ox و Oy را در A و B قطع کرده مساحت مثلث OAB مینیمم باشد .



خط BC را که از M گذشته است در نظر می‌گیریم خطوط ME و MF را موازی با Oy و Ox رسم می‌کنیم و طولهای آنها را به‌ترتیب α و β می‌نامیم .

$$\frac{BE}{BO}=\frac{ME}{CO}\Longrightarrow\frac{d-\alpha}{d}=\frac{\beta}{d'}$$

$$\Longrightarrow\frac{\alpha}{d}+\frac{\beta}{d'}=1$$

مساحت مثلث OBC را با S نمایش می‌دهیم :

$$S=\frac{1}{2}dd'\sin O=\frac{1}{2}\alpha\beta\left(\frac{dd'}{\alpha\beta}\right)\sin O$$

S وقتی مینیمم است که: $\frac{dd'}{\alpha\beta}=\frac{d}{\alpha}\cdot\frac{d'}{\beta}$ مینیمم و یا :

$$\left(\frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta}{d'}\right)$$

ماکزیمم باشد و چون حاصل جمع این دو عامل مثبت مقدار ثابت است حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که باهم برابر باشند یعنی داشته باشیم :

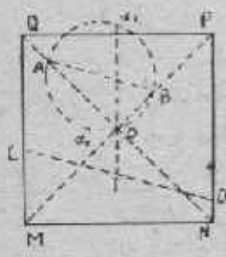
$$\frac{\alpha}{d}=\frac{\beta}{d'}\Longrightarrow\frac{\alpha}{d}=\frac{\beta}{d'}=\frac{1}{2}$$

یعنی جواب مسئله خطی است که از M موازی با EF رسم شود. در این حال M وسط BC خواهد بود .

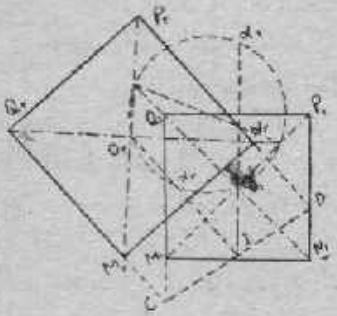
پاسخهای درست رسیده : داود روحانی ـ بهروز ساسانی ـ محمد رضا خمسه پور ـ محمود تویسرکانی .

۳۵۳۷ـ چهار نقطهٔ ثابت A و B و C و D مفروض است . مربعی رسم کنید که یك قطرش بر A و قطر دیگرش بر B و دو ضلع آن به ترتیب بر C و D بگذرند . مسئله را برای دو حالت حل کنید: وقتی که C و D دو نقطه از دو ضلع مقابل مربع باشند وقتی که C و D دو نقطه از دو ضلع مجاور آن باشند .

حل۱) اگر MNPQ مربع مطلوب باشد ، O مرکز مربع بر دایرهٔ به قطر AB واقع بوده و خطی که از O به α_1 وسط کمان AB رسم شود نیمساز زاویهٔ AOB بوده عمود منصف PQ می‌باشد و از I وسط CD می‌گذرد .



پس برای رسم مربع مطلوب چنین عمل می‌کنیم : دایرهٔ به قطر AB را رسم کرده نقاط α_1 و α_2 اوساط دو کمان AB را تعیین می‌کنیم . خطوط $I\alpha_1$ و $I\alpha_2$ را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر AB را در O_1 و O_2 قطع کنند. خطوط O_1A و O_1B را رسم می‌کنیم تا خطوطی را که از C و D موازی با $I\alpha_1$ رسم می‌شوند در P_1 و Q_1 و M_1 و N_1 قطع کنند وهمچنین نسبت به $I\alpha_2$ عمل می‌کنیم . دو مربع $P_1QM_1N_1$ و $P_2Q_2M_2N_2$ جوابهای مسئله‌اند .



۲) وقتی که C و D بردو ضلع مجاور از مربع مثلا بر MQ و MN واقع باشند . دایرهٔ به قطر CD بر M و دایرهٔ به قطر AB بر O مرکز مربع گذشته علاوه بر آن خط MO از نقطهٔ β_1 یا β_2 وسط یکی از دو کمان CD خواهد گذشت . و از این راه نتیجه گرفته مربع مطلوب را رسم می‌کنیم . دو جواب بدست خواهد آمد .

پاسخهای درست رسیده : احمد جلیلی تنها ـ محمد هاشم شفیعی .

تفاوت که طرفین تساوی اول مثبت‌اند درحالی که امکان دارد که طرفین تساوی دوم منفی گردند) . به‌آسانی ملاحظه می‌شود که قاعدهٔ تشخیص تساوی دو جفت عدد صحیح مثبت در سه قانون حساب راجع به تساویها صدق می‌کند : ۱ـ قانون انعکاسی $(a,b)=(a,b)$ ۲ـ قانون تعدی اگر $(a,b)=(b,c)$ داریم $(a,b)=(c,d)$ ۳ـ قانون انتقالی اگر $(a,b)=(c,d)$ و $(c,d)=(e,f)$ داریم $(a,b)=(e,f)$

اکنون می‌توان قرار دادهایی که‌عمل جمع وضرب جفتهای اعدادرا تعریف نماید. بابکاربردن‌اعداد صحیح مثبت بیان‌نمود. در مورد جمع داریم

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

زیرا (a,b)و(c,d)نمایش $a-b$و$c-d$نمایش می‌باشد پس‌حاصل جمع به‌صورت $(a-b)+(c-d)$ خواهد بودکه برابر است با $(a+c)-(b+d)$ واین‌عبارت به‌شکل $(a+c,b+d)$درطرف‌دوم‌تساوی نوشته‌می‌شود. بهمین طریق ضرب جفتهای‌اعداد مثبت با فرمول

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$$

تعریف می‌شود. دراینجا (a,b) (c,d) یا $(a-b)(c-d)$ به‌صورت $(ac+bd)-(ad+bc)$ درمی‌آید که این‌حاصل با $(ac+bd,ad+bc)$ که طرف دوم تساوی است مشخص می‌گردد.

می‌توان‌نشان داد که تمام عملیاتی که برروی اعداد صحیح (مثبت یا منفی یاصفر) انجام می‌گیرد می‌تواند برروی جفتهای اعداد صحیح مثبت انجام گرفته وهمان نتیجه را حاصل نماید.

***

حال که تمام اعداد صحیح را با جفتهای اعداد مثبت بنا کردیم می‌توانیم قدم فراترنهادهسایر اعداد حقیقی وحتی‌اعداد مختلط راخلق کنیم . اعداد گویایا کسرها که جفتهای‌اعدادصحیح معمولی می‌باشند می‌توانند به‌عنوان جفتهای اعداد صحیح مثبت نمایش داده شوند . درموردداعداد حقیقی که ازرشته‌های‌بینهایت اعداد صحیح ساخته شده‌اند باید رشته‌های بینهایت اعداد گویا را بکار برد . اماوقتی که‌به‌اعداد مختلط می‌رسیم دوباره‌جفتهای اعداد را استعمال می‌کنیم . در حقیقت به‌علت پیدایش اعداد مختلط بود که **هامیلتون** ابتدا جفتهای اعـداد را بکاربرد . می‌توان یك عدد مختلط $a+b\sqrt{-1}$ را یك جفت عددحقیقی (a,b) تصور نمودکـه اولین عدد نمایندهٔ عدد حقیقی و دومی نمایندهٔ عنصر موهومی عدد مختلط باشد . اکنون جفتها موقعی برابر گفته می‌شوندکه شامل اعداد برابر وبه یك ترتیب باشند یعنی موقعی $(a,b)=(c,d)$ خواهـد بود کـه داشته باشیم $a=c$ و $b=d$. قاعدهٔ جمع‌این اعداد همان خواهد بودکه در بارهٔ اعداد حقیقی ذکرشده بود

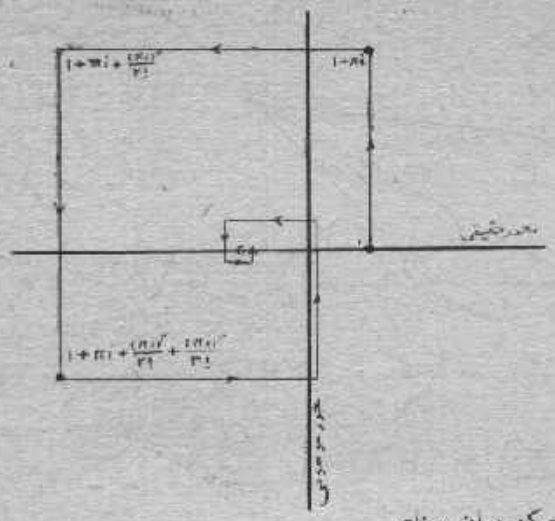
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

درمورد اعداد مختلط این جمع به صورت

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

درمی‌آید . فرمول ضرب برای اعداد مختلط به‌صورت

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$



هست که همان معنای

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

را داراست . جفتهای اعداد حقیقی که بر طبق این قاعده عمل شوند تمام خواص اعداد مختلطرا که باآن‌آشنا هستیم داراست. در این میان عدد سحرآمیز $\sqrt{-1}$ که ذوحیاتینی بین وجود وعدم بـود از دریای اصول حساب به عنوان جفت عدد $(0,1)$ ظاهر می‌گردد .

***

بنابراین باچهارپلهسازمان‌دادن ومجردساختن، ازاعداد صحیح مثبت مقدماتی به اعداد مختلط رسیدیم . جفتهای اعداد صحیحح مثبت که بطریق‌معینی ترکیب شوند مجموعهٔ کلیهٔ‌اعداد صحیح رانمایش می‌دهند . جفتهای تمام اعداد صحیح (یاجفتهای جفتهای اعداد صحیح مثبت) که بطریق دیگـری ترکیب شوند اعداد گویا را نشان می‌دهند . رشته‌های نامحدود اعداد گویا به اعداد حقیقی منتهی می‌شود . و بالاخره جفتهای اعداد حقیقی نشان‌دهندهٔ اعداد مختلط می‌گردد .

باملاحظهٔ ۲۵۰۰ سالی که مارا ازفیثاغورث جدامی‌سازد می‌توانیم دوطرز اعداد داشته باشیم . یکی فکر ترکیبی که از اعداد مشخص‌تر ومقدماتی شروع کرده برروی‌آن مفاهیم اعداد پیچیده‌تر را بیان کنیم . دیگری فکر تجزیه‌ای که ریاضیدانان جستجو کرده‌اند تا به‌عصارهٔ اعداد رسیده سپس با شکستن و از بین‌بردن پیچیدگی ها به عناصر مقدماتی‌تر برسند . هردوطرز تفکر دارای اهمیت خاص‌می‌باشند . ریاضیدانان حرفه‌ای‌تمایل دارند که اعدادرا بااهمیت کمتری‌مورد توجه‌قرارداده‌وحتیه‌های کیفی دانش وسازمان منطقی وامکانات علامتی ریاضیات‌رااهمیت دهند . بااینحال نظریات جدیددربارهٔ اعداد در مجلات ریاضی راه یافته ونظریه‌های جدید حساب در دستگاه‌آموزشی حتی در مـدارس ابتدائی نفوذ می‌کند . برنامه‌هـا و کمیته‌هایی برای تدریس‌مفاهیم‌اعداددرمرحلهٔ‌عالی‌ازنظریهٔ مجموعه‌ها تاماتریس‌ها برای محصلین دبیرستان وجود دارد . بعید نیست که نسل‌آینده با علاقهٔ خارق العاده‌ای در موارد استعمال و شگفتیهای اعداد غوطه‌ور باشد .

اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

۱۳- توابع Functions

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

Continuous Function	تابع پیوسته	Variable	متغیر
Discontinuous Function	تابع ناپیوسته	Function	تابع
Increasing Function	تابع صعودی	Independent Variable	متغیر مستقل
Decreasing Function	تابع نزولی	Explicit Function	تابع صریح
Increment	نمو	Implicit Function	تابع ضمنی
Derivative	مشتق	Inverse Function	تابع معکوس
Partial derivative	مشتق نسبی	Exponential Function	تابع نمائی
Point of inflection	نقطهٔ عطف	Imaginary Function	تابع موهومی
Direction of bending	جهت تحدب و تقعر	Function of Fuuction	تابع تابع

***

Exercises

1- If $f(x)=\log_a x$ and $F(z)=a^z$, show that $F\{f(x)\}=f\{F(x)\}$

2- Find y' and y'', given $x^3-2x^2y+4xy^2-8xy+6x=3$ and $y=2$

Ans: $y'=-\frac{1}{6}$ $\quad y''=\frac{14}{27}$

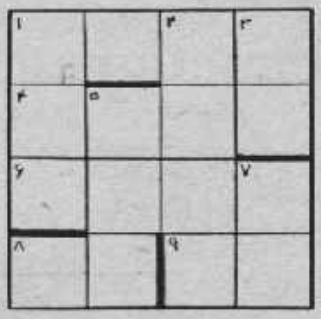
3- Locate the maximum and minimum values of $f(x)=2+x^{2/3}$ and the-Intervals on which the function is increasing and decreasing.

4- Examine $y=3x+(x+2)^{3/3}$ for directions of bending and points of Inflection

***

سرگرمی

جدول اعداد



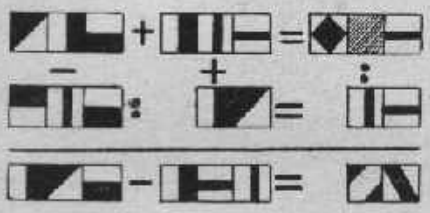
برای اینکه خوانندگان ، باحل جدول اعداد آشنا شوند ، حل‌این جدول درصفحهٔمقابل همین شمارهٔ مجله مندرج است .

خانه های جدول را با اعدادی پر کنید که شرایط زیر برقرار باشد (در هرخانه یك رقم نوشته می‌شود) .

افقی : ۱ـ اختلاف یك عدد چهار رقمی مفروض با مقلوب آن‌که چهار رقم عدد مفروض چهار عدد متوالی می‌باشند . ۴ـ عدد متشکل ازارقام متوالی صعودی . ۶ـ حاصل‌ضرب عدد شمارهٔ ۳ قائم در عدد شمارهٔ ۸ افقی. ۸ـ یك عدد اول . ۹ـ مضربی از عدد ۱۳ .

قائم : ۱ـ مکعب یکی‌از ارقام عدد شمارهٔ ۱ افقی. ۲ـ سه رقم‌آخر آن برابر است با سه رقم‌آخر حاصل‌ضرب عدد شمارهٔ ۱ افقی درعددشمارهٔ ۷ قائم . ۳ـ خارج قسمت تقسیم عدد شمارهٔ ۶ افقی برعدد شمارهٔ ۸ افقی . ۵ـ عدد متشکل از سه رقم متوالی . ۷ـ حاصل ضرب مقسوم علیهی از عدد شمارهٔ ۳ قائم در مقسوم علیهی از عدد شمارهٔ ۱ افقی

سرگرمی‌فکری



هر مربع نشانهٔ یك رقم ومربعهای متشابه نشانهٔ رقمهای متساویند . باتوجه به علامات بین اعداد ، اعداد بالا را تعیین کنید .

مسئلهٔ صف بندی

۱۰ نفررا در۵ صف چنان قراردهیدکه هر صف شامل ۳ نفر باشد .

مصطفی گودرزی طائمه

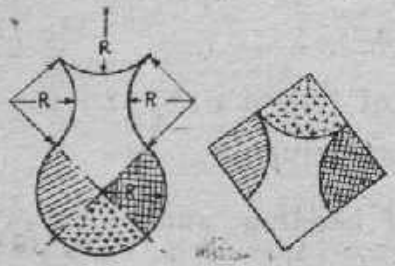
نوشتن اعداد

اعداد از ۱ تا ۹ را با بکار بردن ۵ بار رقم ۲ نشان دهید .

مصطفی گودرزی طائمه

حل مسئلهٔ برش

مربوط به شمارهٔ گذشته



حل جدول یکان شمارهٔ قبل

متاسفانه در چاپ مطالب مربوط به‌این جدول چند اشتباه‌رخ داده‌بوده عبارت افقی ۱ بایستی چنین باشد ، کوچکترین عددی‌که آنرا می‌توان به دوصورت به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت .

۱	۹	۳	۷		۷
۶	۴	۶		۱	۵
	۴	۱	۷	۳	۷
۲	۹		۱	۲	۷
۳		۴	۲	۲	۵
۱	۴	۳	۸	۵	۷

حل «اعداد وکلمات»

از روابط داده شده نتیجه می گیریم که :

$$a^2 = b^2 c$$

عدد c بایدمکعب کامل باشد وداریم $c = ۸$ وازآنجا :

$$a = ۲b \Rightarrow d = ۴b$$

وجوابهای‌قابل قبول عبارت خواهد شد از :

$$a = ۶ \text{ و } b = ۳ \text{ و } d = ۱۲$$

و داریم :

سرگرمی‌های‌مجلهٔ یکان آموزنده‌هستند .

از جمله نامه های رسیده

آقای **مسعود مبصری** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان خرد توضیح داده‌اند که مسئلهٔ شمارهٔ ۳۵۶۸ مندرج در یکان شمارهٔ ۲۰ قبلا با راه حل کامل در نشریهٔ تیر ماه ۴۲ مهرگان درج شده است .

یکان ـ این مسئله توسط فرستندهٔ آن از یک کتاب ریاضی چاپ ۱۳۰۱ شیراز انتخاب شده است .

***

آقای **ابراهیم پورضا** دبیر دبیرستانهای تبریز و آقای **علی بیات‌مختاری** دانش‌آموز سال چهارم ریاضی دبیرستان خیام نیشابور راه حل دیگری از مسئلهٔ ۳۴۹۶ را که به عنوان نمونه در شماره‌های ۱۹ و ۲۰ چاپ شد ارسال داشته‌اند . چون این راه حل در یکی از کتابهای حل‌المسائل (چاپ ده دوازده سال قبل) مندرج است از چاپ آن در مجله معذور هستیم .

***

دبیر محترم ریاضیات دبیرستانهای اهواز آقای **قوام نحوی** دربارهٔ شیخ بهائی وکارهای وی مقاله‌ای در تکمیل مقالهٔ مندرج در شمارهٔ ۲۰ ارسال داشته‌اند و اطلاعات تازه‌ای از شرح حال و آثار این دانشمند مهدی صفوی مرقوم داشته‌اند؛ از جمله اینکه وی بیست جلد کتاب و رساله در ریاضیات و نجوم نوشته است که معروفترین آنها عبارتند از: بحر الحساب. تشریح الافلاک ـ جبر ومقابله. حاشیه خلاصة الحساب ـ خلاصة الحساب والهندسه ـ رسالهٔ اعمال اسطرلاب ـ رساله تضاریس الارض. رساله فی نسبة اعظم الجبال الی قطر الارض ـ بیست باب در تقویم و..

شیخ بهائی در کتاب خلاصة الحساب علم حساب را اینطور تعریف می‌کند : علم حساب کلیهٔ قواعدی است که بوسیلهٔ آن از روی معلومات مخصوصی می‌توان مجهولات را بدست آورد ..

موضوع علم حساب را عدد می‌داند که حاصل باشد در ماده مانند ۵ اسب ، ۴ ریال ومی گوید علم حساب واعمال آن ظاهر نمی‌شود مگر درعدد حاصل در ماده ، برای ضرب تعریف جالب زیررا دارد ، مقصود از ضرب تحصیل عددی است که نسبت یکی از دو عدد به‌آن مثل نسبت یك باشد به عدد دیگر ..

در قسمت هندسهٔ کتاب خلاصة الحساب اشکال هندسی جالب و متعددی را تعریف می‌کند مثلا: حلالی ، نعلی، اهلیلجی ، شلجمی ، مطبل ، قناه ، ذوالشرف ، مدرج .

مادهٔ تاریخ وفات شیخ دبی‌سروپا گشت شرع و افسر فضل اوفتاد، که به حساب ابجد و با توجه به بعضی نکات برابر با ۱۰۳۰ می‌شود .

یکان: مقالهٔ آقای نحوی که دریکان شمارهٔ ۲۰ چاپ شد در زمستان ۱۳۴۳ به ادارهٔ مجله رسیده بود .

***

آقای **مسعود درخشان‌نو** دانش‌آموز سال پنجم ریاضی دبیرستان رهنما نامه‌ای مفصل در پیش از سه صفحهٔ قطع بزرك دربارهٔ مقالهٔ « شیخ بهائی » مندرج در یکان شمارهٔ ۲۰ ارسال داشته‌اند. از جمله متذکر شده‌اند که چه در نسخه‌های خلاصة الحساب و چه در ترجمهٔ آن «کنزالحساب» ابتدا ازتعریف علم حساب و موضوع این علم آغاز شده است . دیگر اینکه تقسیماتی که برای عدد در مقاله ذکر شده است با آنچه در اصل کتاب مذکور است از نظر کیفیت مغایر است .آقای درخشان‌نو شواهد متعددی از اصل کتاب واز ترجمهٔ آن نقل نموده‌اند.

حل جدول اعداد (مندرج در صفحهٔ سرگرمی)

عدد ۱ افقی را به صورت $\overline{a(a-1)(a-2)(a-3)}$ فرض می‌کنیم معکوب آن می‌شود $\overline{(a-3)(a-2)(a-1)a}$ که اولی برابر با $1111a-123$ و دومی برابر با $1111a-3210$ بوده واختلاف آنها می‌شود ۳۰۸۷ و آنرا در سطر اول جدول می‌نویسیم و ازروی آن عدد ۱ قائم به سادگی معلوم می‌شود که ۳۴۳ بوده و مکعب ۷ است . چون ارقام عدد ۴ افقی متوالی صعودی هستند بنابراین در ردیف ۲ داریم: ۴۵۶۷ . عدد ۳ قائم برابر ۷۷ شده است چون در عددی دو رقمی و اول ضرب شود حاصل ضرب باید با ۳ شروع شود و در نتیجه ۶ افقی برابر با ۳۶۱۹ و ۸ افقی برابر با ۴۷ بدست می‌آید. عدد ۳ قائم مضرب ۷ ومضرب ۱۱ است و عدد ۱ افقی مضرب ۱۱ نبوده اما مضرب ۷ است پس عدد ۷ قائم باید مضرب ۱۱ باشد وچون رقم اولش ۹ است پس این عدد ۹۹ بوده عدد ۹ افقی که باید مضرب ۱۳ باشد برابر ۳۹ است و جدول کامل می‌شود .

۳	۵	۸	۷
۴	۵	۶	۷
۳	۶	۱	۹
۴	۷	۳	۹

انتشارات یکان

مجموعهٔ علمی یکان سال

۶۰ ریال

یکان سال

مخصوص امتحانات نهایی ۱۳۴۳

۴۰ ریال

معماهای ریاضی

۴۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

۱۵ ریال

مسائلی نمونه از حساب استدلالی

۱۵ ریال

تألیف : جواد هریرچی

دبیر علوم ریاضی دبیرستانهای تهران

نمونه های جدید و آموزنده

مسائل حساب استدلالی

جهت استفاده داوطلبان کنکور و سال ششم ریاضی

از انتشارات

کتابفروشی تهران

تهران ـ ناصرخسرو

پاساژ مجیدی ـ کوچهٔ حاج نایب

تبریز بازار شیشه گرخانه

تلفن ۲۷۳۲