یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ :

۱

شمارهٔ مسلسل:

۲۶

خردادماه ۱۳۴۵

در این شماره :

مصاحبه با استاد	پرفسور فاطمی	۱
خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان	دکتر هشترودی	۵
نجوم و کیهانشناسی	ترجمه	۶
معادلات سیال	پرویز شهریاری	۹
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۱۲
اعداد e و E	»	۱۴
در حاشیهٔ تاریخ	»	۱۷
گفتگوی دور میز گرد	—	۱۸
دربارهٔ مندرجات یکان	رضاقلی زاده	۱۹
ازهرجائی یادداشتی	—	۲۰
چگونه مسئله‌ای را حل کنیم	ترجمهٔ : ه . شریفزاده	۲۱
راهنمای حل مسائل هندسه	ترجمه	۲۲
حل مسائل نمونه	ترجمهٔ : شاهورانی	۲۶
مسائل برای حل	—	۲۶
بیان جدید ریاضیات مقدماتی	ترجمه	۲۹
اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها	مهندس ارشاقی	۳۵
داستانهای تفننی ریاضی	ترجمه	۳۶
سرگرمیهای ریاضی		۳۸
حل مسائل شمارهٔ گذشته	—	۳۹
انجمن معلمای ریاضی	—	۵۷

بها : بیست ریال

آغاز دورهٔ سوم انتشار یکان

با انتشار این شماره ، دورهٔ سوم انتشار مجلهٔ یکان آغاز می‌شود . اگر در گذشته موفقیتی برای مجله بدست‌آمده نتیجهٔ علاقمندی خاص خوانندگان آن بوده است . گردانندگان مجله سربلندند که از راه انتخابی خویش منحرف نشده‌اند. ازاین بعدهم چنین خواهد بود . هرتحولی که دروضع مجله بوجودآید درجهت بهبودآن خواهدبود. آنچه بیش‌از هرچیزدیگر درپیشرفت امر مجله مؤثر است نظراتی است که از طرف خوانندگان و علاقمندان دربارهٔ مندرجات آن واصل می‌شود . امید است که از این بابت بیش از پیش مورد لطف خوانندگان قرارداشته باشیم .

کاغذ مجله

سعی بر این بوده است که مجلهٔ یکان با حد اقل قیمت ممکن دراختیارخوانندگان آن که اکثریت آنهارا دانش‌آموزان تشکیل می‌دهند قرار داده شود و از این جهت تاکنون ازکاغذ روزنامه استفاده شده است بسیاری ازخوانندگان خواسته‌اند که کاغذ مجله ازنوع اعلی باشد چون اغلب دوره‌های مجله راجلد کرده ونگاهداری می‌کنند. بهتر کردن کاغذ مجله مستلزم یکی ازدوشرط: اضافه کردن برقیمت مجله یاکم کردن ازتعدادصفحات آن می‌باشد . از این شماره کاغذ مجله از نوع مخصوص آن که بهترین کاغذ ازلحاظ‌چاپ وازلحاظ رعایت بهداشت چشم‌تشخیص داده‌شده استفاده شده است و بهای‌خرید این‌نوع کاغذ دو برابر بهایی است که قبلا بابت‌کاغذ روزنامه پرداخته می‌شده است . با وجود این ، ضررحاصل از این‌کار تحمل شد؛ نه بر بهای مجله افزوده شده ونه ازتعداد صفحات معمول آن‌کاسته شده است . و چنانچه بعدازاین تحمل این‌ضررمقدور نباشد بناچار تعدادصفحات مجله تقلیل داده خواهد شد .

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

امتحانات داخلی ثلث‌اول و ثلث دوم دبیرستانهای مختلف هم زمان باهم انجام نمی‌گیرد بعضی از سؤالات این امتحانات وقتی به ادارهٔ مجله واصل می‌شودکه بیش ازدو ماه ازتاریخ آن گذشته و امتحان ثلث بعد درجریان است.وانگهی چاپ سؤالات امتحانات درمجله بدان جهت است که برای دانش‌آموزان مشغول به تحصیل قابل استفاده باشد . چاپ سؤال امتحانی ثلث دوم در هنگامی‌که محصل مشغول گذراندن امتحان ثلث سوم است چندان فایده‌ای ندارد .

از این به بعد سؤالات امتحانات داخلی دبیرستانها که واصل‌شود نگاهداری می‌شود و برای سال تحصیلی بعد مقارن با ثلث مربوط در مجله چاپ می‌شود. هرسال، درشمارهٔ مخصوص پایان مسائل امتحانات ثلث اول ، در شمارهٔ ماه بهمن مسائل امتحانات ثلث دوم ، درشمارهٔ فروردین مسائل امتحانات ثلث سوم، مربوط به سال تحصیلی قبل چاپ خواهد شد. ازدانش‌آموزان‌گرامی تقاضا می‌شود مسائل امتحانات داخلی ثلثهای ۱ و ۲ و ۳ سال تحصیلی ۴۵-۴۴ دبیرستان مربوط راکه در مجله چاپ نشده است ارسال دارند . به موقع به نام ایشان چاپ خواهد شد .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

سال سوم- دورهٔ‌سوم - شمارهٔ‌یکم (شمارهٔ مسلسل : ۲۶)

خرداد ۱۳۴۵

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا شماره ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 1 , June . 1966

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

تقاضا از مشترکان

چنانچه درمدت تابستان ویاموقع‌دیگر نشانی‌پستی‌شما تغییرمی‌کند مراتب را اطلاع دهید تا مجله به نشانی جدید شما ارسال شود . در غیرآن از ارسال مجدد مجله معذور خواهیم بود .

مصاحبه با استاد

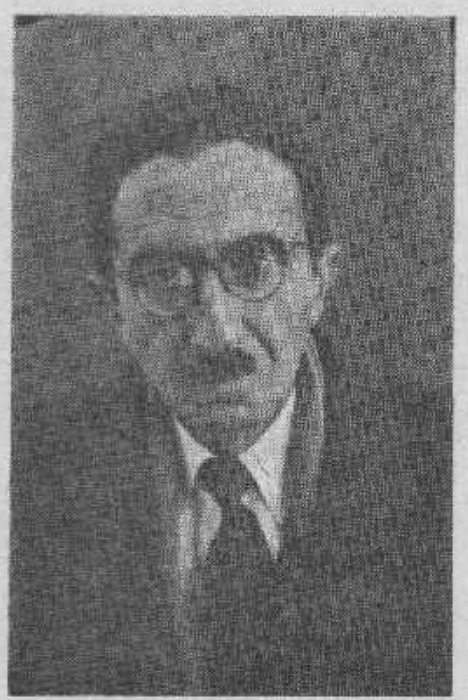
پروفسور تقی فاطمی

تنها ایرانی فارغ‌التحصیل آگرژه از «اکل نرمال سوپریور» فرانسه

شمارهٔ دبیران لیسانسیهٔ ریاضی ایران محضر درس پروفسور فاطمی را درک کرده‌اند و بالاتفاق، ایشان را عالیترین نمونهٔ یک معلم واقعی می‌شناسند. درج بیوگرافی و پیامی از ایشان در مجلهٔ یکان، از همان ابتدای انتشار مجله، مورد تقاضا بوده است. اما پرهیز زیاد از حد استاد از خود نمائی، انجام این تقاضا را به تعویق انداخته است.

فعلا، این تقاضا برآورده شده و دورهٔ جدید مجله با درج مصاحبه‌ای که با ایشان بعمل آمده است آغاز می‌شود.

مدیر مجله



ـ جناب‌استاد، اطلاع بر بیوگرافی جناب عالی آرزوی همهٔ کسانی‌است که محضر درس شما را درک کرده‌اند. بعلاوه، بیوگرافی حضرت عالی گوشه‌ای‌از تاریخ ریاضیات معاصر ایران خواهد بود. تقاضا دارد مختصری از شرح حال خود، سابقهٔ تحصیلات در ایران و در خارج، مقامات علمی که تاکنون عهده دار بوده‌اید بیان فرمائید.

ـ قبل ازتحصیلات عالیه، **در یزد** به عنوان «منشی معارف» خدمت می‌کردم و ضمن آن‌در مدارس آنجا به تدریس اشتغال داشتم.

بعدکه در **اصفهان** مدرسهٔ متوسطه دایر شد به آنجا رفتم و دو سال آخر **تحصیلات متوسطه** را در **مدرسهٔ صارمیه** گذراندم. مدیراین مدرسه آقای **ضیاء الدین جناب** بودند که‌هنوزهم‌مشغول به‌خدمت‌فرهنگ‌می‌باشند و اگردرکارخودتوفیقی‌داشته‌ام آنرامرهون‌تشویقهای ایشان می‌دانم ازجمله معلمان ما **مرحوم‌مهندس‌علی‌ریاضی**، **مرحوم‌غلامحسین‌زیرک‌زاده** بودند ودیگری **استاد جلال‌همائی** که‌نه‌تنها‌حق‌تعلیم‌بر بسیاری‌ازاشخاص‌را داردبلکه با تبحری که‌دربیشتر علوم وفنون دارد و باتحقیقات و تتبعاتی که‌در آثار گذشتگان از علمای ایرانی بعمل آورده است فردی ممتاز می‌باشد.

در **سال ۱۳۰۶** با اولین دستهٔ محصلین که از طرف وزارت جنگ به فرانسه اعزام می‌شد به این‌کشور رفتم. با وجود اینکه در امتحان‌مسابقهٔ اعزام رتبهٔ اول شده بودم و می‌توانستم رشتهٔ پزشکی راکه آن موقع داو طلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت‌انتخاب‌کنم اما به علت شوق باطنی، رشتهٔ معلمی را انتخاب‌کردم و داو طلب ورودبه **«دانشسرای عالی» Ecole Normale Supérieure** پاریس شدم. درفرانسه‌هنوز دیپلم ایران رانمی‌شناختند. مرا درکلاس پایان‌تحصیلات متوسطه

قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند به کلاس تهیهٔ «Mathématiques spéciales» دانشگاه منتقل شدم. بعلاوه همین موضوع باعث شد که از آن تاریخ به بعد در فرانسه، دیپلم ایران را بشناسند. سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقهٔ ورودی **مدارس بزرگ** شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «**اکل نرمال سوپریور**» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دورهٔ لیسانس ریاضی را تهیه کرده و گذراندم و در دو سال آخر دورهٔ مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم و ضمناً یک دیپلم هندسهٔ عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله امتحان **آگرگاسیون** را گذراندم و قبول شدم.

در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد، با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ بعمل آمد به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی به تدریس مشغول شدم، علاوه بر آن، در دانشکدهٔ فنی هم تدریس داشتم در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می‌دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکدهٔ علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیز تدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیر کل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آنرا کنار گذاشتم؛ شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

***

ـ آیا جناب عالی تنها معلم ایرانی هستید که تحصیلات تخصصی خود را در دانشسرای عالی فرانسه گذرانده‌اید؟ و آیا این مدرسه عالی هنوز هم از لحاظ تربیت معلم مقام اول را در دنیا دارد؟ در بارهٔ این مدرسهٔ عالی مختصری بیان فرمائید.

ـ در فرانسه چند مدرسهٔ عالی هست که به آنها **مدارس بزرگ** (LesGrands Ecoles) می‌گویند. از معروفترین این مدارس یکی «**پلی تکنیک**» است که در زمان ناپلئون بزرگ تأسیس شده است. دیگری «**اکل نرمال سوپریور**» است که حدود صد سال از تأسیس آن می‌گذرد. هم امتحان مسابقهٔ ورودی و هم امتحان نهایی این مدرسه بسیار مشکل است برای جواب دادن به بعضی از سؤالات امتحانی هفت یا هشت ساعت وقت می‌دهند. هر کس چه فرانسوی و چه غیر آن می‌تواند در امتحان مسابقهٔ ورودی این مدرسه شرکت کند. در فرانسه بعضی مدارس متوسطه هست که کلاس تهیهٔ مخصوص امتحانات ورودی مدارس بزرگ دارند؛ کسی که به طور منظم در این کلاسها شرکت کند برای امتحانات ورودی مدارس بزرگ شانس بیشتری خواهد داشت. تحصیلات «اکل نرمال سوپریور» شامل سه مرحله است: یک سال اول دورهٔ لیسانس است، مرحلهٔ دوم دورهٔ فوق لیسانس است و آخرین مرحله دورهٔ تخصصی است. هرچند اساس این مدرسهٔ عالی بر تربیت دبیر برای دبیرستانها و کلاسهای تهیهٔ دانشکده‌هاست اما کار آن بدین جا محدود نمی‌شود. دارای آزمایشگاههای مجهزی است که در آنجا می‌توان تحقیق کرد. تاکنون مردان بزرگی از این مدرسه بیرون آمده‌اند مثل **پوانکاره** و رجال سیاسی یا علمی دیگر مانند **ادوارد هریو**، اغلب رؤسای دولتهای فرانسه فارغ‌التحصیلان این مدرسه هستند.

ـ آیا از ایرانیان فقط جنابعالی فارغ‌التحصیل آگرژهٔ این مدرسه هستید؛ یا اشخاص دیگری هم هستند؟

ـ گمان می‌کنم تنها باشم.

***

ـ از زمان تأسیس مدارس به سبک جدید در ایران، چه استادان و معلمانی در تعلیم و اشاعهٔ ریاضیات تأثیر کلی داشته‌اند؛ و نحوهٔ تأثیر آنها چگونه بوده است؟

ـ سیر تکاملی دنیا تعلیم و پیشرفت ریاضیات را در ایران ایجاب کرده است. از معلمان قدیمی **مرحوم غلامحسین رهنما** عشقی وافر به تدریس ریاضیات داشت. و با وجود نداشتن تحصیلات منظم بیش از دیگران در پیشرفت ریاضیات ایران تأثیر داشته است. اشخاص دیگری هم بوده‌اند که بیشتر تأثیر آنها از راه ترجمهٔ کتابهای ریاضی بوده است.

***

ـ از ابتدای تأسیس (مدارس ابتدایی، متوسطه و عالی) در ایران تاکنون چه تحولاتی در نحوهٔ تدریس ریاضیات انجام گرفته است؟ آیا این تحولات در جهت مطلوب آن انجام گرفته است یا در جهت عکس آن؟

ـ هیچ تغییر و تحولی حاصل نشده است. متأسفانه همان سبک قدیمی، بدون تغییر برنامه، محفوظ مانده است. قریب چهل پنجاه سال است که برنامه‌ای از فرانسه ترجمه شده است و این برنامه تاکنون بدون هیچ تغییری اجرا شده است. چند مرتبه‌ای هم که تغییر برنامه عنوان شده است فقط موادی از برنامهٔ سابق یا پیش و پس شده و یا حذف گردیده است، در حالی که در خود فرانسه، کل برنامه‌ها تغییر اساسی کرده است. طرز

تدریس هم ، باکمال تأسف، هیچ تغییر نکرده است.

***

ـ اقداماتی که تاکنون برای تربیت دبیران و معلمان ریاضی مدارس ایران انجام گرفته تا چه حد موفقیت آمیز بوده است ؟ به عقیدهٔ جناب‌عالی ، آیا این اقدامات براساس صحیح استوار بوده است ؟

ـ تربیت معلم ریاضی از واجبات است ، دراین موضوع شکی نیست . آنچه هم که تاکنون دربارهٔ تربیت معلمان‌ریاضی ایران انجام گرفته لازم بوده اما به هیچ وجه‌کافی نبوده است. طرز تربیت ناقص است ؛ از جهت کمیت ، به قدرکافی دبیر و آموزگار تربیت نمی‌شود . از جهت کیفیت ، وجود یك عده معلمان علوم تربیتی‌برای تربیت معلم‌کافی نیست . درگذشته ، هم اولیاء امور بیشتر مصروف به تهیهٔ یك عدهٔ استاد یا معلم علوم تربیتی بوده است که آنها دبیران را تربیت‌کنند. ازنظر فنی ، یعنی از نظر شغل مخصوص هر معلم تقریباً موضوع را نا دیده گرفته‌اند. تاکنون چنین مرسوم بوده‌است که قسمتهایی ازعلوم تربیتی وازریاضیات‌عالی‌را به معلمان‌آینده می‌آموخته‌اند از آنچه که وی باید درس بدهد ابداً صحبت نمی‌شده است . در بارهٔ تربیت معلم باید تجدید نظر اساسی بعمل آید و دقت بیشترشود . استاد متخصص‌برای دانشسرای عالی ودبیر متخصص برای دانشسراهای متعدداتی‌کم داریم . ما در «اکل نرمال» فقط یك سال ریاضیات می‌خواندیم و دوسال دیگر راجع به آنچه که باید در دبیرستان درس بدهیم به تفصیل بحث و گفتگو می‌کردیم .

نکتهٔ مهم ، انتخاب داوطلبان شغل معلمی است . بایدبا آنها مصاحبه شود و دقت شودکه هم‌ذوق معلمی را داشته باشند و هم استعداد آنرا ، تنها به خاطر استخدام یا رتبهٔ دبیری شرکت نکرده باشند . معلم باید دارای شرایط زیادی باشد ، از جمله حاضرالذهن و حاضرالجواب باشد .

***

ـ نسبت به‌کمبود دبیر و آموزگار چه بایدکرد ؛ آیا کشورهای دیگر هم با این مسئله روبرو هستند ؟

ـ درکشورهای دیگرهم این مسئله‌کاملاحل نشده است. اما به نسبت زیادی از ما جلو هستند . حتی در آمریکا هم‌از این لحاظ در مضیقه هستند (اما در آنجاکسری دبیر را از دیپلمه‌ها تأمین نمی‌کنند) . شاید در بعضی ازکشورهای کاملا پیشرفته مثل سوئد این مسئله حل شده باشد .

***

ـ در بارهٔ کتابهای درسی ریاضی‌که تاکنون در مدارس ایران مورد استفاده واقع شده است نظرجناب‌عالی چیست ؛چه اقدام اساسی رابرای بهبودوضع کتابهای درسی‌ضروری‌می‌دانید؛

ـ مؤلف کتاب باید درآنچه که می‌خواهد بنویسد متبحر وبه آن مسلط باشد . در قسمت ریاضی‌اشخاص زیادی نداشته‌ایم که درتعلیم‌ریاضیات متبحر ومتخصص‌باشند، ناچارنمی‌توانسته‌اند مؤلف باشند. اما بعضی وقتها ترجمه‌های خوب شده‌است واینهم حد اکثرکار خوبی بوده‌که انجام گرفته است . بعضی هم‌که مترجم خوب نبوده‌اند وهرمطلبی را ازگوشه‌ای فراهم‌آورده‌اند کتاب آشفته‌ای تهیه‌کرده‌اند . تقریباً در ایران‌کتاب ریاضی خوب تألیف نشده است .آنچه‌که انجام گرفته ترجمه بوده‌است که اگر ازکتابهای خوب ترجمه شده نتیجه خوب بوده است . اکنون هم‌که قرار است برنامه‌ها عوض شود قبلا باید اشخاصی با علوم جدیدآشنا شوندتا بعد بتوانند به‌کارترجمه بپردازند.

***

ـ راجع به تجدید نظری‌که اخیراً در مقاطع تحصیلی انجام‌گرفته وبرنامه‌های‌آن درشرف تنظیم است‌عقیدهٔ جناب‌عالی چیست ؟

ـ اطلاعی ندارم .

***

ـ تدریس ریاضیات براساس نظریهٔ جدید را تا چه حد و از چه مرحله‌ای در مدارس ایران جایز می‌دانید ؟

ـ به طورکلی ما هم باید با سایرکشورها همگام باشیم ، نمی‌توانیم با روش قدیم درس بخوانیم در حالی‌که اساس علوم و فنون تغییرکرده است . اما چگونه ؟ بایدسعی‌کنیم یادبگیریم بسیاری از ایرانیان هستندکه این رشته‌ها را تحصیل می‌کنند ، آنها را بخواهیم ، یا اینکه اشخاصی را برای این‌کار بفرستیم. برای معلمان شاغل هم بایدکلاس‌کار آموزی ترتیب داد .کلاسی که واقعاً برای‌آنها آموزنده و قابل استفاده باشد نه اینکه‌وقت آنها تلف شود وبالنتیجه بعدها هم ازشرکت در چنین‌کلاسهایی خود داری‌کنند . علاوه بر آن ، معلمان باید برای شرکت در کلاسهای‌کارآموزی یك نوع اجباردداشته باشند. قدرت مرکزی لازم است . باید راهنمایان تعلیماتی امین و وارد داشته باشیم تاگزارشهای دقیق و صحیح بدهندو به‌گزارش ایشان هم ترتیب اثر داده شود .

بسیاری از قسمتهای برنامه هست‌که اصلا اجرا نمی‌شود، مثلادرکلاس پنجم ابتدایی طبق‌برنامه، تناسب بایداز راه‌تحویل به واحد انجام‌گیرد اما تاکنون چنین نبوده است با وجودی‌که راهنمایان تعلیماتی و بازرسان فنی هم داشته‌ایم . اصل آنست که معلمان علاقمند باشند .

***

ـ برای پرورش خاص جوانان با استعداد چه روشی را پیشنهاد می‌فرمائید ؛ آیا تشکیل کلاسهای خاص را برای آنها جایز می‌دانید ؟

ـ تشکیل کلاس مخصوصی برای آنها جایز نیست . جاهای دیگر هم چنین کلاسهایی نیست . باید تشویق شوند . درفرانسه به اینگونه جوانان بورسهای تحصیلی می‌دهند و این کار از راه مسابقات انجام می‌گیرد. امتحاناتی به نام **«کنکور ژنرال»** انجام می‌گیرد که همهٔ محصلین هم شرکت نمی‌کنند چون مشکل است ، محصلینی که در این امتحان توفیقهایی بدست آورند از بعضی بورسهای تحصیلی استفاده می‌کنند و وسایل تحصیل آنان فراهم می‌شود . در اینجا هم باید یك چنین کاری صورت گیرد . خوشبختانه هم اکنون از طرف **بنیاد پهلوی** و سازمانهای وابسته اقداماتی برای تشویق مؤلفین و مترجمین بعمل می‌آید وممکن است تشویق جوانان با استعداد هم ازطرف این مؤسسات انجام گیرد.

ـ **آیا** جایز است که به محصلین با استعداد اجازه داده شود که بعضی ازکلاسها را در تابستان **بگذرانند** . یعنی از یك کلاس به کلاس بالاتر جهش داشته باشند ؟

ـ جهش از یك کلاس به کلاس بالاتر از لحاظ اطلاعات عمومی به محصل لطمه می‌زند . بهتر است که هر کس تمام کلاسها را ببیند .

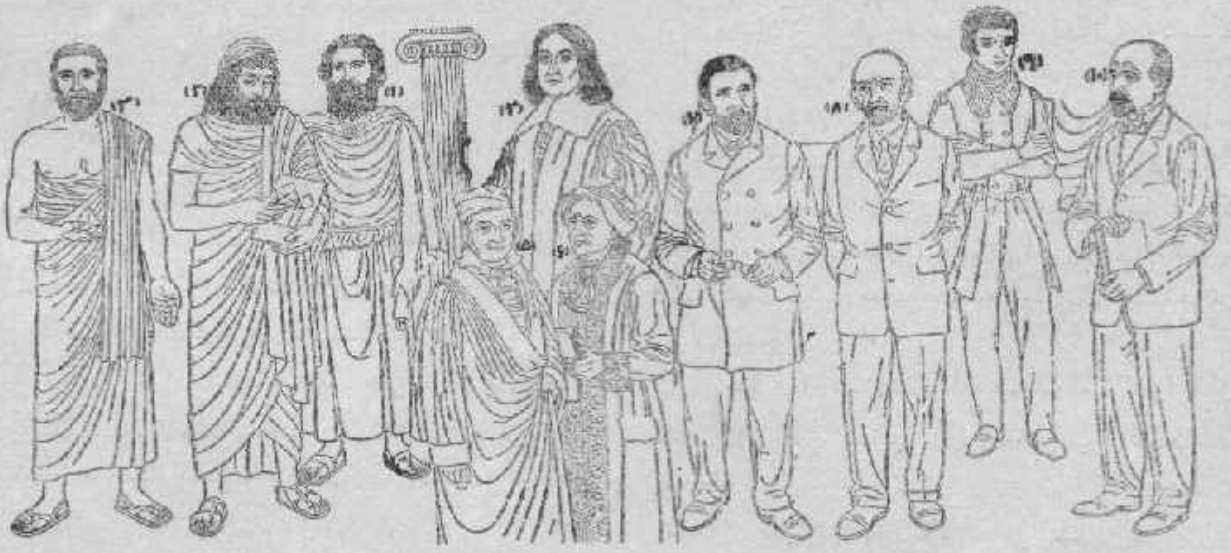
***

ـ برای معلمان و دانش آموزان رشتهٔ ریاضی چه پیامی دارید که وسیلهٔ مجلهٔ یکان به ایشان ابلاغ شود .

ـ معلمان باید به مقتضای شرایط سعی کنند که همواره نسبت به تربیت فرزندان خود و ما ، **علاقهٔ** خاص داشته باشند. موضوع اساسی آنست که مطالبی را که می‌خواهند بگویند سعی داشته باشند برای مستمعین قابل فهم باشد . به عبارت ساده‌تر هیچگاه در صدد اظهارفضل نباشند . **فضل و امتیاز هنر معلم در آن است که مطلبی را که می‌گوید قابل استفاده باشد نه** آنکه مسائلی را مطرح کند که شاید خودش هم برای حل آن احتیاج به مراجعهٔ به کتاب داشته باشد و این خود نکتهٔ مفید و مؤثری است .

غالباً دیده می‌شود که دانش آموزان ازکتابهای علمی و حتی کتابهای درسی خود استفاده نمی‌کنند ، و بیشتر اوقات ، این مطلب بنا بر توصیهٔ ضمنی معلمان انجام می‌گیرد . حال آنکه در مدرسه شاگرد باید طرز جدی خواندن کتاب و مطالعهٔ علمی را مثل یك مطلب درسی یاد بگیرد. **محصل باید محقق بار آید و بتواند شخصاً در بارهٔ مطالب مورد علاقهٔ خویش به تحقیقات و مطالعات بپردازد .** و با معلمین است که آنان را در این راه هدایت نمایند . **خداوند همه را توفیق عنایت فرماید .**

ریاضی آفرینان



۱ـ اقلیدس . ۲ـ فیثا غورس . ۳ـ ارشمیدس . ۴ـ پیرفرما . ۵ـ فردریك گوس . ۶ـ لئوناردداوئر .
۷ ـ هانری پوانکاره . ۸ ـ داوید هیلبرت . ۹ ـ اوریست گالوا . ۱۰ ـ ژرژکانتور .

خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان

ازاستاد دکتر هشترودی خواهش شد وایشان بعضی ازخاطران خودراازکنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان که در حوصلهٔ خوانندگان مجله باشد برای درج در مجله در اختیار گذاشتند

تشکیل کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان که هرچهارسال یك بار ودرکشورهای مختلف تشکیل می‌شود حدود دوقرن قدمت دارد. دراین کنگره‌ها نمایندگان دانشگاههای کشورهای مختلف و ریاضیدانانی که شخصاً مایل باشند شرکت می‌کنند. معمولاعده‌ای ازریاضیدان ممتاز هم به‌دعوت کشور تشکیل دهندهٔ کنگره شرکت می‌کنند. درزمان جنگ بین‌المللی این کنگره‌ها تشکیل نشد، قبل‌ازجنگ، آخرین کنگره‌ای که تشکیل شد **کنگرهٔ ۱۹۳۵ مسکو** بود. کنگرهٔ امسال هم در **مسکو** تشکیل می‌شود.

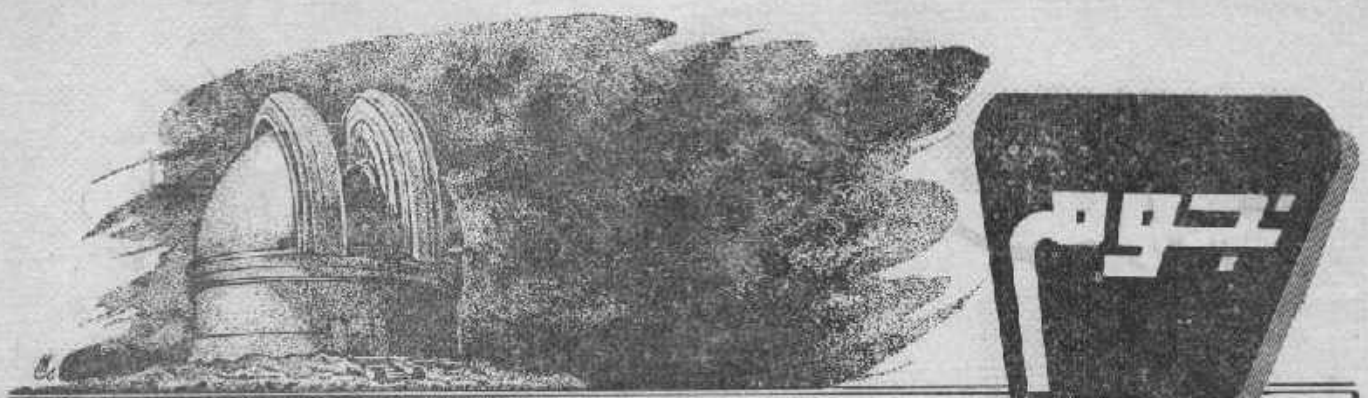
در هر کنگره برای ریاضیدانان طراز اول یك سخنرانی یکساعتی منظور می‌شود که دربارهٔ پیشرفت عمومی ریاضیات صحبت می‌کنند. اعضای دیگر کنگره حق دارند که حداکثر ربع ساعت صحبت کنند و نظرات تازه‌ای که دارند **مطرح** کنند البته ممکن است که بحث دربارهٔ بعضی از این نظرات چندین جلسه وقت کنگره را بگیرد.

من درتمام کنگره‌های بعد از جنگ شرکت کرده‌ام و در بیشتر آنها دعوت داشته‌ام فقط در **کنگرهٔ استکهلم** با وجود اینکه دعوت داشتم نتوانستم شرکت کنم چون در آن موقع در مسکو بودم.

بازگو کردن مذاکرات رسمی **کنگره**‌ها برای خوانندگان مجله ملال آوراست. بعضی خاطرات هست ازپیش آمدهایی که در حاشیهٔ هر کنگره روی داده است:

در **کنگرهٔ نیس**، کنگرهٔ ریاضیدانان زبان‌لاتن، **هارشو** پرزیدان افتخاری کنگره‌بود، درجشن‌شب خدا حافظی عده‌ای از وابستگان به اعضای کنگره به یکی از جلسات رقصهای شبانه رفته بودند. در آنجا بین خانم یکی از ریاضیدانان ویکی از آرتیست‌ها گفتگویی‌شده وبالاخره بین‌برادر خانم مزبور ومدیر مؤسسه مشاجره‌ای درگرفته بود. خبرنگار یکی از روزنامه ها که مترصد چنین فرصتی بوده از واقعه چندین‌عکس گرفته بود و پیش بینی می‌شدکه فردای‌آن روز موضوع با هزاران شاخ و برگ در روزنامه منعکس شده برای کنگره افتضاحی باشد. **پرزیدان هارشو** از من خواست‌که دخالت کنم و به نحوی موضوع را مسکوت بگذارم؛ در نیس بنابر سیاست کلی جلب سیاح به‌خارجیها احترام می گذاشتند ومخصوصاً روزنامه‌نویسها ازدرج مطالبی که باعث رنجش آنان باشد خودداری می کردند. من وهارشو با خبرنگار ملاقات کردیم و با لطایف‌الحیل ویرا نرم کردیم و بالاخره وضعی پیش‌آمدکه من دوربین عکاسی خبرنگاررا قاپیدم و تمام فیلم آنرا سیاه کردم، خبرنگارکه نمی‌خواست‌ازطرف مسؤولان روزنامه بازخواست شودازمن‌شکایت کرد اما فقط درخواست جبران خسارت یك حلقه فیلم راکرد وموضوع به همینجا خاتمه یافت.

درهمین کنگره، **آرنودانژوا** رئیس سنی‌جلسه که یکی ازاستادان بزرگ دانشگاه **سوربن** و استاد خود من بود وقتی خواست صحبت‌کند همه برای او کف زدیم اما همینکه خواست صحبتش را ادامه دهد باز عده‌ای ازجوانان شروع به‌کف زدن کردند ومی‌خواستند مانع صحبت‌کردن وی بشوند من و رفقا به هرترتیب جلسه را ساکت‌کردیم و استاد با صدایی که از شدت خشم می‌لرزید سخنرانی خودرا تمام‌کرد. موضوع این بودکه **آرنودانژوا** در سن پیری بعضی‌کارهایی راجع به‌ریاضیات جدید انجام داده‌بودواین امربرای‌طبقهٔ‌جوان گران‌آمده بود. جوانان تنگ نظری بودندکه خیال می‌کردند برای پیران راه بسته است در صورتی‌که **کارتان** هم درسن هشتاد سالگی تئوری **فضاهای ایزوتروپ** را استدلال‌کرد. به هرجهت، درآن جلسه من و چند نفر دیگرخواستیم ازاستاد دلجوئی‌کرده باشیم واظهارداشتیم اینها جوان هستند، ماهم جوان بوده‌ایم وگاهی ازاین شیطنتها داشته‌ایم. استاد باهمان لحن خشمگین گفت: شما چنین نبودید زیرا **جوانی می‌گذرد اعابدجنسی باقی می‌ماند.**



ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Astronomie moderne» تألیف : TOCQUET

ترجمهٔ : ع. مصحفی

مراحل مهم علم نجوم

۱ = دورهٔ قدیم

الف - زمان قبل ازبطلمیوس

هرچند در عصر ما ، علم نجوم به چنان کشفیات شگفتی دست یافته که راه را برای رفتن انسان به کرهٔ ماه یا به یکی از سیارات منظومهٔ شمسی هموار ساخته است ، معهذا برای کسی که می‌خواهد در این علم به مطالعه بپردازد نه تنها دانستن بعضی مقدمات لازم است بلکه اطلاع برسیر تحولی این علم ازابتدای آن تا به امروز، حتی برای آنها که فقط می‌خواهند نجوم جدید رامطالعه کنند، مفیدفایده خواهد بود .

شواهدی وجوددارد که نشان می‌دهد حتی انسان عصر حجر جدید بعضی اطلاعات نجومی‌داشته است: سنگچینهایی که ازاین عصرباقی مانده نقاطی را معین می‌کندکه در آنها خورشید به هنگام اعتدال یا انقلاب بوده است .

تملك مزارع و گله‌های حیوانات که آغاز تمدن انسانی است توجه بشررا به سوی آسمان معطوف داشت . هنوز زود بود که انسان به مطالعهٔ پدیده های زمینی بپردازد ؛ پیچیدگی و درهم وبرهمی این پدیده‌ها وارتباط زیادی که با یکدیگر دارند چنین اجازه‌ای را نمی‌داد .

اولین مطالعات علمی بشر مربوط به حرکت ساده ومنظم ستارگان است وپدیده‌های آسمانی باسادگی پر ابهت خود اولین تصورات از مظاهر مختلف بوده‌اند که با اعداد و به صورت دستورهایی بیان شده‌اند . چندین قرن قبل‌ازپیدایش‌علوم دیگر علم نجوم به طرز اعجاب‌آوری توسعه یافته بود . در این علم روشی بکارمی‌رفت که همان روش علوم تجربی است ، آنچه که بعدها چهرهٔ جهان را تغییرداد و بعدازنجوم در علوم فیزیك ، شیمی، زیست‌شناسی، طب وبالاخره در جامعه شناسی‌وروانشناسی دستور عمل واقع شد . **هانری‌پوانکاره** علم نجوم را چنین توصیف می‌کند: «آنچه که‌به انسان روح درك طبیعت را ارزانی داشت» .

درتاریخ علم نجوم چهاردوره را می‌توان درنظر گرفت :

دورهٔ قدیم که آغاز آن نامعلوم است و به‌اواسط قرن شانزدهم ختم می‌شود. **دورهٔ جدید** که از اواسط قرن مزبور شروع شده و تا اواسط قرن نوزدهم ادامه می‌یابد، **دورهٔ معاصر نزدیک** که از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم تا اوایل قرن بیستم را در برمی‌گیرد، و **دورهٔ معاصر**. این دوره‌ها را دقیقاً نمی‌توان از هم متمایز کرد و هر دو دورهٔ مجاور مرز مشترک مشخصی ندارند.

دورهٔ قدیم

همچنانکه گفته شد مشخص کردن آغاز این دوره کار مشکلی است. می‌توان قبول کرد که اولین ستاره‌شناسان شبانان بوده‌اند نخستین اسنادی که بعضی یادداشتهای نجومی ازقبیل نقاط اصلی را دربردارد لوحه‌های متعلق به **آسوریها و کلدانیها** می‌باشد که‌حدود ۶۰۰ سال قدمت دارد. **اهرام مصر** که بسه‌هزار سال قبل از عصرما تعلق دارند دقیقاً جهت‌یابی شده‌اند وشامل بعضی خواص هندسی هستند که احتمالا نمی‌تواند تصادفات ساده باشد.

یك سند پرارزش منسوب به کلدانیان در دست است که در آن رصد های مربوط به سه خسوف واقع بین سالهای ۷۱۹ و ۷۲۵ قبل ازمیلاد مسیح مضبوط می‌باشد، همانها که **بطلمیوس** در نظریهٔ خود مربوط به ماه، مورد استفاده قرار داده است. کلدانیان شاخص آفتابی را می‌شناخته‌اند و می‌دانسته‌اند که خورشید و ماه در منطقةالبروج حرکت می‌کنند. آنها سیارات عطارد، زهره، مریخ، مشتری و زحل را تشخیص می‌داده‌اند اما نمی‌دانسته‌اند که سیاره‌ای که گاهی به هنگام مغرب درطرف چپ خورشید دیده می‌شود همان سیارهٔ زهره است که گاهی، صبحها در طرف راست خورشید مشاهده می‌شود. و یك چنین پدیدهٔ مربوط به سیارهٔ عطارد را نیز نمی‌دانسته‌اند.

مصریها تعداد زیادی کسوف و خسوف را رصد کرده و علل آنرا نیز بیان داشته‌اند. **پلوتارك** می‌نویسد که «مصریها می‌دانستند این ماه است که برخورشید سایه می‌افکند» **ودیوجانس** می‌گوید که «بنا بر قول مصریها هنگام خسوف، ماه درسایهٔ زمین واقع می‌شود». بالاخره **دیودر** اهل **سیسیل** روایت می‌کند که «مصریها کسوف و خسوف را بدون اشتباه پیش بینی می‌کردند». آنها واقعاً **دورهٔ ساروس** یعنی دورهٔ تناوب کسوف‌وخسوف رامی‌شناختند. از بین آلاتی آنها که بکار می‌بردند می‌توان ساعت آفتابی را نام برد که نوع بسیار بزرگی ازآن را بکار می‌برده‌اند که دارای صفحهٔ آفتابی و صفحهٔ مدرج بوده است دایرهٔ افقی ثابت باصفحهٔ استوا موازی بوده ودایرهٔ قائم درصفحهٔ نصف‌النهار قرارداشته است. شاخصهای آفتابی درصفحهٔ نصف‌النهار جا داشته و اندازه‌گیری میل خورشیدرا در ظهر واقعی میسر می‌ساخته‌است. آنها همچنین ابزار نصف‌النهاری، سمت یاب، نمونهٔ کرهٔ آسمانی و بالاخره ساعت آبی را بکار می‌برده‌اند.

اولین ستاره شناس یونانی، **تالس** حدود ۶۴۰ قبل از میلاد در **میلت** به دنیاآمد وی نجوم را نزد مصریها آموخت و درمراجعت به‌کشورش **مدرسهٔ ایونی** را بنانهاد که **درآنجا** علل کسوف و خسوف، میل دایرهٔ کسوف و خسوف را می‌آموخت و تجرد وکرویت زمین را بیان می‌داشت. اوتصور می‌کرد که ستارگان از تراکم تدریجی یك مادهٔ بسیار سبکی که ازابتدای زمان فضارا اشغال کرده است بدست می‌آیند.

بدبختانه، **آناکسیماندر** (۶۱۰-۵۴۷ ق م) که بعداز تالس سرپرستی مدرسه را به عهده گرفت نظریهٔ افلاك بلورین را پیش‌آورد. او می‌گفت که ستارگان همچون میخهای نقره‌ای برسطح این فلك بلورین کوبیده شده‌اند و این عقیده تا قرن شانزدهم در افکار بسیاری از منجمین جا داشت. بااینهمه بعضی از تصورات آناکسیماندر متضمن حقایقی است. مثلا می‌گوید: «زمین به چیزی تکیه ندارد، در مرکز جهان واقع است، از هرقسمت فلك آسمانی که‌آنرا احاطه کرده است به یك‌فاصله‌است: دلیلی وجود ندارد که در جهتی بیش از جهت دیگر امتداد داشته باشد»

یکی دیگرازشاگردان تالس به نام **فیثاغورس** (متولد در ساموس حدود ۵۸۳ ق م) بنابرتوصیهٔ استاد خویش به مصر رفت‌وبعدازآنکه به اسرارکاهنان مصری پی‌برد به میهن خویش برگشت و در **کروتن** مکتب فیثاغورسیها را تأسیس کرد. اما دراثر مبارزهٔ شدیدی که بین مردم وطبقهٔ اشراف‌حامی‌مکتب وی درگرفت مجبورشد که ازآنجا فرارکند و به **تارانت** واقع در **ایتالیا** پناهنده شود. وی در این شهر تألیفاتی فراهم‌آورد و تعالیم مکتب خویش‌را ازسر گرفت.

تعالیم فیثاغورس بوسیلهٔ مریدانش بخصوص **فیلولائوس** توسعه یافت و تکمیل شد و تشخیص اینکه کدام‌کارهایی منحصراً توسط استاد انجام گرفته است بسیارمشکل می‌باشد.

فیثاغورسیها عقیده داشتند که زمین وخورشید کروی‌هستند خورشید در سطح کرهٔ آسمانی دایره‌ای می‌پیماید به نام دایرهٔ کسوف و خسوف که سطح آن نسبت به سطح استوا مایل است، ماه کره‌ای است مشابه با زمین، تمام سیارات و حتی ستارگان دنباله دار دورخورشید گردش می‌کنند. حتی یکی ازآنها به‌نام **دموکراتیوس** (۴۷۰ ق م) این حقیقت را اعلام داشت که **راه کهکشان** (مجره) مجموعه‌ای از توده‌های ستارگان‌است که از ما به فاصله‌های بسیاردور قرار دارند.

درهمان مواقع، **متن** و **اکتمن** جهت تنظیم اعیاد یونانی جدولی ترتیب دادند که به خاطر آن به اوج شهرت رسیدند. این جدول که به نام **«جدول متن»** مشهوراست و براساس تناوب نوزده سالهٔ ماههای قمری تنظیم یافته بود درهمهٔ شهرها و کلنی های یونان در لوحه های زرین اینیهٔ عمومی نصب شد. نام **«عدد طلایی»** هم از اینجاماًخوذ است که در این جدول ترتیب سالها را بدست می‌داد.

فیثاغورسیها همچنین مبتکر هندسه‌ای هستند که در آن با بیان یك سلسله قضایا استنباطهای منطقی را نتیجه می گیرند و احتمالاً همهٔ اصولی که در چهارمقالهٔ اول **اقلیدس** بکار رفته است باید مربوط به‌ایشان باشد.

متأسفانه، ایمان به اینکه قوانین ابدی اعداد و اشکال برجهان حکومت‌می کند هم‌چون سایه‌ای ادراکات نجومی فیثاغورسیها را دربر گرفته است. آنان که دایره را یك شکل هندسی کامل می‌دانستند عقیده داشتند که مسیر کواکب دایره است و حرکت سیارات هم بردوایر مسیر خود یکنواخت است. این نظریه اساس هیئتهای بعدازآنها واقع شد و تازمانی که **کپلر** بیضی را جانشین دایره ساخت بقوت خود باقی بود.

افلاطون (۴۲۷ ـ ۳۴۷ ق م) مؤسس **مدرسهٔ آکادمی** که ازنظریونانیان جنبهٔ خدائی داشت نظرات فیثاغورسیها را دربارهٔ نجوم تأیید کرده است. او می گفت که جهان مجموعهٔ منتظمی است که مقادیر هندسی بر آن حکومت می کند. عمل اساسی افلاطون طرد نظریهٔ «پست» و «عالی» برای اجسام است وعقیده داشت آنچه باعث نزدیکی یادوری اجسام به‌مرکز جهان می‌شود یك نوع کشش می‌باشد.

افلاطون، تنها نسبت به‌متجمین بلکه نسبت به‌همهٔ متفکران صاحب حقوقی ابدی است زیرادی باصراحت کامل ارزش معنوی علوم را اعلام داشته است.

تعلیمات افلاطون بوسیلهٔ مریدانش از جمله **ادوکس** (۴۰۹ ـ ۳۶۵ ق م) **وارسطو** (۳۸۴-۳۲۲ ق م) به‌**هیپارك** و **بطلمیوس** منتقل شد.

با تأسیس **مکتب اسکندریه** توسط **اقلیدس** (حدود ۳۰۰ ق م) و در اثر استعمال روزافزون بعضی ابزار نجومی و بالاخره مقایسهٔ رصدها، نجوم یونانی کاملا علمی یافت. مشهورترین ستاره شناسان این مکتب **اریستارك** است که در سومین قرن قبل‌از میلادمی‌زیسته است. اریستارك ازنظردقتی که دررصدهای خودبکار می‌برده وازجنبهٔ اساسی بودن دلایلی که می‌آورده است ازپیشینیان خود ممتازمی‌باشد. وی باروشی ماهرانه نسبت فواصل خورشید و ماه را از زمین تعیین کرد و به نحوی قابل تحسین اعلام داشت که زمین وسیارات دور خورشید می گردند.

اراتستن (۲۷۶ ـ ۱۹۴ ق م) جانشین اریستارك میل دایرةالبروج را نسبت به استوا تعیین کرد و طول کمان نصف‌النهاری از **سن** (آسوان فعلی) تا **اسکندریه** را اندازه گرفت وهمچنین ابزاری به‌نام «ذات‌الحلق» یا «ذات‌الاسطرلاب» ساخت که در رصدهای نجومی بکارمی‌رفت.

هیپارك (متولد ۱۵۰ ق م درنیسه واقع‌در بی‌تی‌نی آسیای صغیر) را می‌توان یکی از پیشقدمان نجوم جدید دانست. وی از نظردقت فوق‌العاده‌ای که دررصدهایش بکاربرده وازنظر کشفیات شگفتی که انجام داده است کاملا ممتازمی‌باشد.

هیپارك، مدت حرکت دورانی ماه را باحداقل تقریب حساب کرد، خروج ازمرکزمسیرماه را روی دایرهٔ کسوف و خسوف تعیین کرد، حرکات عقدتین مسیر ماه را نشان داد، حداکثر فاصلهٔ ماه را از زمین معلوم کرد، دورهٔ حرکت خاصهٔ خورشید را بادقتی که قبل ازوی بیسابقه بود تعیین کرد، بافرض اینکه مسیر خورشید دایره‌ای‌است که زمین درمرکز آن نیست نامساوی بودن فواصل نقاط اعتدالین وانقلابین را بیان کرد. وی‌همچنین اولین جدولهای نجومی را تنظیم کرد که حرکات ماه وخورشید را از پیش معلوم می‌کرد. اواین فهرست ستارگان نیز محققاً مربوط به‌اوست.

عجیب اینجاست که هیپارك اوضاع همهٔ ستارگان، حتی اختر های متناوب (ستاره‌هایی که گاه مرئی و گاه مخفی هستند) را به‌دقت رصدکرده ودرفهرست خودذکر کرده‌است. درفهرست وی اوضاع ۱۰۲۶ ستاره درذیل ۳۶ صورت فلکی ثبت شده‌است که این تقسیم‌بندی حتی تا به‌امروز موردقبول واستفاده‌می‌باشد فهرست هیپارك شامل چهار بخش است. در اولی چگونگی تشخیص ستارگان را معین می‌کند، در دومی سمت ستارگان، درسومی‌ارتفاع آنها در چهارمی قدر آنها را ازلحاظ نورشان تعیین‌کرده است. هیپارك ستارگان را به‌شش قدرتقسیم کرد، قدرششم‌نظیر آخرین‌تقسیم‌بندی است که‌امروزه برای‌ستارگانی که باچشم غیرمسلح دیده می‌شوند بعمل‌آمده است.

هیپارك حرکت قهقهرائی نقطهٔ اعتدال را از راه مقایسهٔ رصدهای دقیق خود با رصدهای دقیق قبل ازخودش کشف کرد. همین یك کشف، که برای‌آن عصرواقعاً شگفت‌انگیزاست، کافی است که نام هیپارك را جاودان بدارد.

به‌یقین می‌توان گفت که پیشرفتهای علم نجوم در زمان هیپارك به‌تنهائی باهمهٔ پیشرفتهای این علم که قبلا انجام گرفته بود معادل می‌باشد. بعلاوه بعد از آن، سه قرن طول کشید تا منجم دیگری که شایستگی چنین عنوانی را داشته باشد ظهور کند. این منجم **بطلمیوس** بود.

- ۱ -

معادلات سیال درجهٔ اول

تهیه و تنظیم از : پرویز شهریاری

۱ - توضیح مقدماتی : می‌دانیم که اگر در مورد معادلات درجهٔ اول ، تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد ، دستگاه دارای بینهایت جواب خواهد بود . چنین معادلات و یا دستگاهها را **سیال** گویند .

در عمل اغلب به مواردی بر می‌خوریم که معادله‌ای با دومجهول در جلو داریم ، صورت کلی این معادلات چنین است:

$$ax+by=c$$

که در آن x و y مجهولات و a ، b و c ضرایب مفروضی هستند .

اغلب شرایط مسئله طوری است که در چنین معادلاتی تنها به جوابهای صحیح و یا تنها جوابهای صحیح و مثبت احتیاج داریم :

مثال ۱ : عدد ۱۱۸ را به دو عدد تبدیل کنید که یکی از آنها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۷ قابل تقسیم باشد .

اگر یکی از دو عدد را $11x$ و دیگری را $17y$ فرض کنیم ، باید داشته باشیم :

$$11x+17y=118$$

و چون در مسئله ذکری از علامت جوابها نشده است ، می‌توانیم جوابهای منفی را هم قبول کنیم . فی‌المثل اعداد ۳۳ و ۸۵ (به ازاء $x=3$ و $y=5$) و یا اعداد ۲۲۰ و ۱۰۲ - (به ازاء $x=20$ و $y=-6$) و یا اعداد ۱۵۴ - و ۲۷۲ (به ازاء $x=-14$ و $y=16$) و غیره در شرایط مسئله صدق می‌کنند .

مثال ۲ : برای بسته بندی یك نوع گلدان بلوری دو نوع جعبه داریم . در جعبهٔ کوچکتر ۴ گلدان و در جعبهٔ بزرگتر ۷ گلدان می‌توان جاداد. اگر بخواهیم یك سفارش ۴۱ گلدانی را بسته بندی کنیم چند جعبه از هر نوع لازم است ؟

اگر تعداد جعبه‌های کوچك را x و تعداد جعبه‌های بزرگ را y فرض کنیم معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$4x+7y=41$$

روشن است که در اینجا تنها جوابهای صحیح و مثبت مورد احتیاج است و این معادله تنها یك جواب $x=5$ و $y=3$ را قبول دارد :

بنابراین بایستی راهی برای پیداکردن جوابهای صحیح و در حالت خاص جوابهای صحیح و مثبت معادلات سیال پیدا کنیم .

در حقیقت از شرط صحیح بودن ریشه‌ها (و یا صحیح و مثبت بودن آنها) بایستی استفاده کرد و راهی برای جستجوی جوابها (ویا رابطه‌ای که معرف صورت کلی جوابها باشد) بدست آورد .

۲ - معادلاتی که ریشهٔ صحیح ندارند :

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax+by=c$$

اگر در بین ضرایب این معادله ، اعدادی کسری وجود داشته باشد ، می‌توان آنها را به یك مخرج تحویل سپس از مخرجها صرف نظر کرد. به این ترتیب می‌توان همیشه ضرایب را اعدادی صحیح در نظر گرفت .

همچنین اگر ضرایب مقسوم علیه مشترکی غیر از واحد داشته باشند ، می‌توان طرفین معادله را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترك ضرایب تقسیم کرده و در نتیجه ضرایب را نسبت به هم اول بحساب آورد.

حالا فرض می‌کنیم که a و b بزرگترین مقسوم علیه مشترکی غیر از واحد داشته باشند ، مثلا داشته باشیم :

$$a=ma_1 \text{ و } b=mb_1$$

در این صورت معادله به صورت زیر در می‌آید :

$$ma_1x+mb_1y=c$$

و اگر طرفین تساوی را بر m تقسیم کنیم :

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}$$

سمت چپ این تساوی به ازاء هر مقدار صحیحی از x و y عددیست صحیح ، درحالی که طبق فرض c بر m قابل قسمت نیست و سمت راست تساوی عددی است غیر صحیح ، یعنی این

تساوی ممکن نیست و بنابراین :

اگر ضرایب مجهولات یك معادلهٔ سیال مقسوم علیه مشترکی (مخالف واحد) داشته باشند (که مقسوم‌علیه عددمعلوم معادله نباشد) ، دراین‌صورت معادله نمی‌تواند دارای جوابهای صحیح باشد :

بهمین مناسبت در تمام مواردی که بعد از این از معادلهٔ $ax+by=c$ صحبت می‌کنیم ، فرض را بر این می‌گیریم که a و b نسبت به هم اول باشند .

۳ ـ معادلاتی که ریشهٔ مثبت ندارند :

اگر در معادلهٔ $ax+by=c$ ، ضرایب a و b مثبت و عدد معلوم c منفی باشد به ازاء تمام مقادیر مثبت x و y سمت چپ تساوی مثبت‌وسمت راست آن منفی می‌شود و معادله جواب ندارد .

و اگر ضرایب a و b منفی و مقدار c مثبت باشد با ضرب طرفین‌معادله‌در ۱ ـ بهمان‌حالت‌قبل می‌رسیم‌وبنابراین:

اگر ضرایب مجهولات‌یك معادلهٔ سیال علامتی مخالف با علامت مقدار معلوم معادله داشته باشند ، معادله نمی‌تواند جواب مثبت داشته باشد .

۴ ـ رابطهٔ کلی ریشه‌های معادلهٔ سیال :

فرض می‌کنیم که به طریقی(و مثلاً با جستجو) یکی از ریشه‌های صحیح معادلهٔ سیال $ax+by=c$ را بدست آورده باشیم . این ریشه را $x=\alpha$ و $y=\beta$ فرض کنید ، اگر بجای x و y مقادیر جواب را در معادله قرار دهیم ، اتحاد زیر بدست می‌آید :

$$a\alpha+b\beta=c$$

اگر این اتحاد را از معادلهٔ مفروض کم کنیم : خواهیم داشت :

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

و از آنجا :

$$ax=a\alpha-b(y-\beta) \text{ و } \Rightarrow x=\alpha-\frac{b(y-\beta)}{a}$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد ، لازم وکافی است که کسر $\frac{b(y-\beta)}{a}$ عددی صحیح‌باشد(زیرا α عددی‌است‌صحیح)

بعبارت دیگر لازم وکافی است که عبارت $b(y-\beta)$ بر aقابل قسمت باشد . ولی b نسبت به a اول است ، بنا براین لازم است (وکافی است) که $y-\beta$ بر a قابل قسمت باشد ، اگر خارج قسمت $y-\beta$ بر a را t فرض کنیم (t می‌تواند مثبت‌یا منفی باشد) بدست می‌آید :

$$\frac{y-\beta}{a}=t \longrightarrow y-\beta+at$$

و اگر در رابطهٔ x بجای $\frac{y-\beta}{a}$ مقدارش t را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$x=\alpha-bt$$

بنا براین برای ریشه‌های معادلهٔ سیال روابط زیر را بدست می‌آوریم :

$$x=\alpha-bt \text{ و } y=\beta+at$$

اگردر این روابط بجای t اعدادصحیح دلخواهی(مثبت یا منفی) قرار دهیم ، جوابهای معادلهٔ سیال (که تعداد آنها بینهایت است) بدست می‌آید. بخصوص‌به ازاء $t=0$ جوابهای $x=\alpha$ و $y=\beta$ بدست می‌آید که‌ازقبل هم‌برای ما معلوم‌بود.

باکمی دقت در روابطی که بدست‌آمده است روشن‌می‌شود که طبق قاعدهٔ زیر تنظیم شده‌اند :

۱ ـ جملهٔ اول رابطه ، جواب خاصی است که برای آن مجهول پیداکرده‌ایم .

۲ ـ جملهٔ دوم رابطه ، عبارتست از حاصل‌ضرب عدد صحیح t در یکی از ضرایب مجهول معادلهٔ مفروض ، منتهی برای x از ضریب y وبرای y ازضریب x استفاده می‌کنیم.

۳ ـ یکی از ضرایب مجهولات را با علامت قرینهٔ آن انتخاب می‌کنیم .

بسادگی می‌توان توجه کرد که انتخاب علامت قرینه‌برای این ویا آن ضریب فرقی ندارد . در حقیقت دودستگاه روابط:

$$\begin{cases} x=\alpha-bt \\ y=\beta+at \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=\alpha+bt \\ y=\beta-at \end{cases}$$

با هم معادل‌اند ، فقط جوابهائی که از دستگاه اول به ازاء مقادیری از t بدست می‌آید ، از دستگاه دوم به ازاء قرینهٔ آن مقادیر بدست خواهد آمد و بر عکس .

مثال: می‌خواهیم جوابهای‌صحیح‌معادلهٔ $3x+5y=26$ را بدست آوریم .

با توجه مختصری دیده می‌شود که $x=2$ و $y=4$ در معادله صدق می‌کند وبنا براین تمام جوابهای معادله ازروابط زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} x=2+5t \\ y=4-3t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=2-5t \\ y=4+3t \end{cases}$$

و اگر در این روابط بجای t اعداد صحیح دلخواهی

قرار دهیم ، جوابهای صحیح معادلهٔ مفروض بدست می‌آید . مثلا با استفاده از روابط اول خواهیم داشت :

t	۰	۱	۲	۳	−۱	−۲	...
x	۲	۷	۱۲	۱۷	−۳	−۸	..
y	۴	۱	−۲	−۵	۷	۱۰	...

واگر از روابط دوم هم استفاده می‌کردیم ، همین جوابها به‌ازاء ۰ ، −۱ ، −۲ ، −۳ ، ۱ و۲ وغیره بدست‌می‌آمد.

به‌این‌ترتیب حل معادلهٔ سیال درجهٔ اول به اینجا منجر می‌شود که بتوانیم یکی از جوابهای صحیح معادله را در دست داشته باشیم .

۵ ـ روش تبدیل :

برای پیداکردن یکی از ریشه‌های صحیح معادلهٔ سیال می‌توان از روش زیر استفاده کرد :

فرض کنید معادلهٔ سیال به صورت زیر باشد ،

$$ax+by=c$$

یکی از مجهولات را بر حسب مجهول دیگر بدست می‌آوریم (و بهتر است مجهولی را محاسبه کنیم که ضریب آن کوچکتر است) ، مثلا فرض کنید $a<b$ باشد ، در این صورت:

$$x=\frac{c-by}{a}$$

به y مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ... را می‌دهیم تا به عددی برسیم که به ازاء آن $c-by$ بر a قابل قسمت باشد . فرض کنید به ازاء $y=n$ عبارت $c-bn$ بر a قابل قسمت و خارج قسمتی مساوی m داشته‌باشد ، در این صورت:

$$x=m \text{ و } y=n$$

که یك جواب صحیح معادله‌است، در حقیقت داریم :

$$\frac{c-bn}{a}=m \Rightarrow c-bn=am \Rightarrow am+bn=c$$

یعنی مقادیر m و n درمعادله صدق می‌کنند .

مثال ـ معادلهٔ $7x-4y=2$ را در نظر می‌گیریم .

y را نسبت به x محاسبه می‌کنیم :

$$4y=7x-2 \Rightarrow y=\frac{7x-2}{4}$$

اگر به x مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ و ... را بدهیم می‌بینیم که به ازاء $x=2$ عبارت $7x-2$ بر ۴ قابل قسمت و خارج قسمتی مساوی ۳ دارد و بنا براین یکی از ریشه‌های معادله چنین است :

$$x=2 \text{ و } y=3$$

و بقیهٔ جوابها هم از روابط کلی بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+7t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=2-4t \\ y=3-7t \end{cases}$$

تبصره ـ در نظریهٔ اعداد ثابت می‌کنند که اگر a و b نسبت به هم اول باشند ، بین اعداد :

$$0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \ldots \text{ و } (a-1)$$

همیشه عددی مانند y وجود دارد که به ازاء آن عبارت $c-by$ بر a قابل قسمت باشد . بهمین مناسبت توصیه کردیم که از بین دو مجهول ، آنرا برحسب دیگری بدست آوریم که ضریب کوچکتری دارد تا تعداد اعداد مورد آزمایش کمتر باشد.

۶ ـ حالت خاص معادلهٔ سیال :

وقتی که یکی از ضرایب مجهولات مساوی واحد باشد ، معادلهٔ سیال رابسادگی می‌توان حل‌کرد. فرض کنید فی‌المثل ضریب x برابر واحد باشد ، خواهیم داشت :

$$x+by=c$$

x را برحسب y محاسبه می‌کنیم :

$$x=c-by$$

و واضح است که هر عدد صحیحی از y متناظر است با عدد صحیحی برای x .

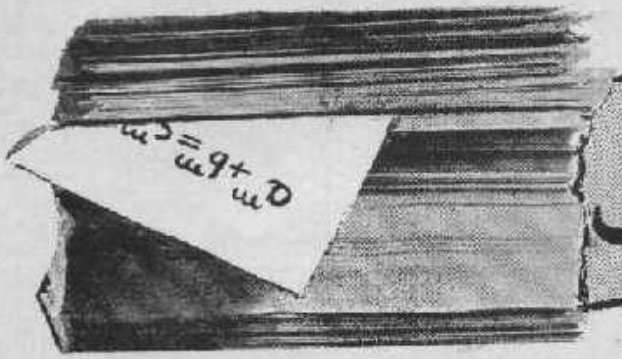
مثال ـ معادلهٔ $5x+y=18$ داده شده است ، داریم:

$$y=18-5x$$

اگر به x مقادیرصحیح دلخواه بدهیم، برای yجوابهای صحیح نظیر آن بدست می‌آید :

x	۰	۱	۲	۳	۴	−۱	−۲	...
y	۱۸	۱۳	۸	۳	−۲	۲۳	۲۸	...

دنباله دارد



مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف :
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ : ع. مصحفی

مسئلهٔ حل نشده یعنی چه ؟

مسئلهٔ ریاضی چیست ؟

برای ریاضیدان ، مسئله غالباً برتر از سؤالی است که فقط یك جـواب را درخواست می‌کند . می‌توان مسئله را به موضوع تحقیقات وی اطلاق کرد ، تحقیقاتی که موضوع آنها مأخوذ از مجموعهٔ آنها است .

چنین برمی‌آید ، مسئله‌ای که وی مطـرح می‌کند وقتی به نظرش «خوب» می‌آیدکه از انشعابها و ظرافتها سرشار بوده قابلیت ارتباط با مسائل دیگری را داشته باشد . شاید صحبت کردن از مسائل ریاضی خوب خطا باشد ، چه باید بدآنها هم وجود داشته باشد ؛ اماآنچه مسلم است بعضی از مسائل ریاضی جالب هستند و برخی دیگر خسته‌کننده . از نظر کلی ، مسائل بسیار جالب آنهـایی هستندکه نسبتاً ساده طرح می‌شـوند ، موضوعات زیادی (ریاضی یا غیره) را دربرمی‌گیرند و درعین حال یك نوع جذابیت را دارا می‌باشند .

اگر مسئله راکمتر ازمعنی بسیار وسیع «موضوع» ریاضی تصورکنیم. ناصحیح خواهد بودکه عقیده داشته باشیم ریاضیدان تمام وقتش را به‌کلنجار رفتن با مسائل حل نشده صرف کند . بعضی ازاین مسائل دوائر یك یا دو خصوصیت چنان جذابیتی پیداکرده‌اندکه برخی‌ازریاضیدانها صرف وقت خودرا در مسائل دیگری‌که با این مسائل مربوط نیست بیهوده تلقی می‌کنند . برخی دیگر کنجکاوی را دوست دارند و دنبال کردن کاری راکه همکارشان شروع کرده ولی‌درانجام رساندن آن به‌اشکال برخورده و با بن‌بست مواجه شده است کوچك نمی‌شمارند . از هر چیز دیگر که بگذریم ، مسائل حل نشده منشأ وانگیزهٔ بسیار مهمی برای کشفیات ریاضی است . همهٔ آنچه دراین کتـاب ـ که یك رسالهٔ تحقیقی نیست . جمع‌آوری شده است از این نوع مسائل نیست . اما امیدواریم که به عنایت خوانندگان جذابیت آنها و تأثیری راکه روی ریاضیدانها داشته‌اند نشان دهیم ، و درعین حال برای شائقی که علاقمند به رور آزمائی با مشکلات علمی است موضوعی برای تحقیق ارائه داده باشیم تا در این‌باره هم استعداد خویش را بیازماید و باشد تا به حل مسئله‌ای از این مسائل نایل آید .

* * *

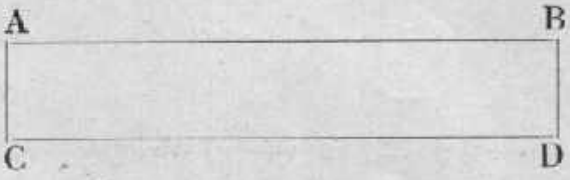
در کتابهای حساب ابتدایی یك رشته تمرینهایی به نام مسائل مشاهده می‌شود : مثلا : اگر درازای مربع مستطیلی ۷ سانتیمتر و پهنای آن ۵ سانتیمتر باشد ، مساحت سطح آن چقدر است ؟» «جواب» عبارتست از ۳۵ سانتیمتر مربع ، محصلی که این جواب را بدست می‌آورد می‌تواند مربع‌مستطیلی به‌بعدهای ۷ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر رسم‌کند و آنرا به مربعهای یك سانتیمتر مربعی تقسیم کرده تعدادآنهارا بشمارد .

برای ریاضیدان یك چنین راه حلی قانع‌کننده نیست ، زیرا از آن‌طریقهٔ تعیین‌مساحت‌سطح‌مستطیل‌دیگر مثلاً به بعدهای ۱۰ سانتیمتر و۶ سانتیمتر ، استخراج نمی‌شود . برای یك ریاضیدان حل مسئله عبارتست از یافتن یك **روش** نه بدست‌آوردن یك

پاسخ دی مسئله را چنین مطرح می‌کند : اندازه‌های اضلاع مربع مستطیلی داده شده است ، مساحت سطح آنرا چگونه باید بدست آورد ؟

وی بالاخره این سؤال را مورد بررسی قرار می‌دهد که آیا نظیر هر مستطیل یك عدد وجود دارد که به عنوان اندازهٔ مساحت سطح آن منظور شود ، مسائل گفته شده حل شده تلقی نمی‌شوند مگر اینکه جواب سؤال اخیر مؤکداً معلوم شده باشد؛ اما در تعلیمات ابتدایی دراین باره اصراری نمی‌شود ! جواب مثبت، که «بدیهی» بنظر می‌رسد ، به خودی خود معتبر شناخته شده است .

یك قرن است که ریاضیدانها خیلی محتاط شده‌اند و موضوعهای « بدیهی » را به ندرت قبول می‌کنند : زیاد اتفاق افتاده است که با قبول یعنی « بدیهیات » گمراه شده‌اند . فی‌المثل ، واضح است که یك صفحهٔ کاغذ (این صفحهٔ کتاب) دو وجه دارد ، یعنی اینکه مورچه‌ای که روی یك وجه آن در گردش است اگر خواسته باشد به وجه دیگر برود یا باید از لبهٔ آن رد شود ، یا اینکه سوراخی درکاغذ بوجود آورده ازآن بگذرد . این موضوع بدیهی است . اما اشتباه است. لابد **نوار موبیوس** را می‌شناسید؟ یك باریکهٔ کاغذ دراز وکم عرض اختیار کنید ، طرفین آنرا به هم بچسبانید و از آن یك حلقه معمولی درست کنید (شکل ۱) چنانچه A را روی B و C را روی D قرار داده باشید یك حلقهٔ معمولی درست کرده‌اید ، که



یك روی خارجی و یك روی داخلی دارد اما اگر ، با یك پیچ نیم دور ، A را روی D و C را روی B بچسبانید ، یك نوار موبیوس درست کرده‌اید که جز یك روی و یك لبه ندارد ، یك مورچه می‌تواند تمام قسمتهای آنرا بگردد بدون آنکه مجبور باشد کاغذ را سوراخ کند یا اینکه ازلبهٔ آن رد شود . در اینجا یك مسئلهٔ جالب و (ساده) پیش می‌آید ، این سطح مساحتی دارد یا نه ؟ واگر دارد چگونه باید آنرا تعیین کرد ؟

بعید است که تصور این مساحت بدون اهمیت باشد، زیرا خود به تعیین مساحت سطوح منحنی مربوط می‌شود . آیا سطح کروی مساحتی دارد ؟ اگر دارد، چگونه تعیین می‌شود؟ بخشی از ریاضیات به خاطر جواب دادن به این سؤال به صورت شاخهٔ مهمی از ریاضیات عالی گسترش یافته و به عنوان نظریهٔ مقادیر خوانده شده است .

شما تصور می‌کنید و به عقل شما درست می‌آید که هر سطح منحنی (مثلا زمین) دارای مساحتی است

اگر زمین را صاف و صیقلی مانند یك کرهٔ هندسی تصور کنیم مساحت سطح آنرا چگونه باید ارزیابی کرد؟ زیرا نمی‌توان آنرا مسطح کرد و با یك سطح مستوی مورد مقایسه قرار داد . در ریاضیات ثابت می‌شود که سطح کروی قابل گسترش نیست. ممکن است اینطور بیندیشید که سطح را رنگ کرده و مقدار رنگ بکار رفته را دقیقاً اندازه گرفت ؛ اما رنگ بکار رفته ضخامتی دارد و روی سطح مورد نظر پوسته‌ای تشکیل دهد . جز آنکه سطح کرهٔ خود را خراب کرده باشید نتیجهٔ دیگری نخواهید گرفت درست است که فرمولی وجود دارد که بنابر آن می‌توان مساحت سطح کره را برحسب شعاع آن بدست آورد (*) ؛ اما با چه اطمینانی می‌توان یك چنین فرمولی را در موردی بکار برد که هنوز تصور سطح ، به وجه قانع کننده‌ای مشخص نشده است ؟

خیال می‌کنید که من شوخی می‌کنم ، وریاضیات جدید در تعریف مساحت یك سطح منحنی به نتیجه رسیده است . اما با همهٔ تعجبی که خواهید کرد به استحضارتان می‌رسانم که هنوز به جائی نرسیده است : یك تعریف ریاضی ساده وکامل ، که در همهٔ حالات نیز صادق باشد ، هنوز باید انجام گیرد. (این سؤال ضمن یادداشتهای آخر کتاب مجدداً مورد بررسی واقع خواهد شد).

اشکالات دیگری درمورد حجم اجسام صلب خود نمائی می‌کند . اگر یك جسم مادی صلب را اختیار کنید و آنرا به قطعاتی با تعداد محدود تقسیم کنید ، بعد این قطعات را به نحو دیگری چنان پهلوی هم بگذارید که بین آنها هیچ فضای خالی باقی نماند و جسم تازه‌ای تشکیل شود ، می‌توان این موضوع را بدیهی دانست که حجم جسم بدست آمده همان حجم جسم اول است. در ۱۹۲۴ **باناخ وتارسکی** مدلل کردند که این امر درست نیست و قضیهٔ فوق العادهٔ زیررا اثبات کردند : می‌توان یك کرهٔ صلب را به قطعاتی با تعداد محدود چنان تقسیم کرد وقطعات حاصل را با جابجا کردن چنان پهلوی هم قرارداد که دو کرهٔ صلب (پر و کامل) بوجود آید به طوری که ابعاد هر کدام برابر با ابعاد کرهٔ اول باشد .

ممکن است تصور کرد که در این خرد کردن کره ، باید تعداد قطعات را بسیار زیاد اختیار کرد ، اما **رافائل روبنسون** ثابت کرده است که پنج قطعه کافی است. این نتایج باور نکردنی ، ما را وامی‌دارد که تصورات اساسی خود را نسبت به حجم مورد تجدید نظر قرار دهیم . برخلاف آنچه که تاکنون به عنوان **«بدیهی»** قبول می‌کردیم، هیچ تعریفی که مطلقاً عمومیت داشته باشد حجم اجسام را در تغییر مکان ، بدون تغییر شکل ، محفوظ نگاه نمی‌دارد.

دنباله دارد

(*) $S=4\pi R^2$ فرمولی که ارشمیدس آنرا بزرگترین کشف خود بحساب می‌آورد .

اعداد «e» و «E»

هر گاه صحبت از اعداد اسم غیر جبری (ترانساندان) پیش آید به عنوان مثال دو عدد π و e نام برده می‌شوند . عدد π را همهٔ دانش آموزان می‌شناسند و تاکنون مطالب زیادی در بارهٔ آن در یکان درج شده است. در کشورهایی که توابع نمائی و توابع لگاریتمی جزو برنامهٔ تحصیلات متوسطه است محصلین دبیرستانها با عدد e و خواص آن آشنایی دارند . در ایران ، این توابع در دانشکده‌ها تدریس می‌شود و از این جهت بعضی از دانش آموزان دبیرستانها که گاه به گاه نام عدد e را شنیده‌اند یا دیده‌اند خواسته‌اند تا اطلاعاتی دربارهٔ این عدد به نظر آنها برسد . آنچه در زیر درج می‌شود فصلی از کتاب

(Les Nombres et leurs Mysteres)

تألیف : André Warusfel می باشد .

***

مرد میلیونر خوشبختی را تصور کنیم که ثروتش هر سال دو برابر شود . اگر ثروت وی در اولین سال ، یك میلیون ریال باشد . مقدار آن برای سالهای بعد از جدول زیر معلوم می‌شود .

شمارهٔ سال	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ثروت برحسب میلیون	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴

اگر مقصود تعیین شمارهٔ سالی باشد که در آن ، ثروت آقای میلیونر برابر با مقدار معلوم F است باید عددی مانند n چنان تعیین کنیم که حاصل 2^n برابر با F باشد . عدد n را لگاریتم در مبنای ۲ عدد F مـی نامند : $n = \log_2 F$ برای مثال داریم :

$\log_2 64 = 6$ و ... و $\log_2 4 = 2$ و $\log_2 2 = 1$ و $\log_2 1 = 0$

می‌دانیم که : $32 = 2 \times 16$ و ملاحظه می کنیم که بین لگاریتمهای این اعداد رابطهٔ $5 = 4 + 1$ بر قرار است . این خاصیت را می‌توان با نوشتن $n = \log_2 F$ به صورت $F = 2^n$ بنا بر تعریف ضرب توانها نتیجه گرفت :

$$32 = 25 = 21 + 4 = 21 \times 24 = 2 \times 16$$

فرض کنیم که این آقای ثروتمند ، یك میلیون ریال سرمایهٔ اولیهٔ خود را با نرخ ۱۰۰٪ به مرابحهٔ مرکب بگذارد و ربح را ماه به ماه به سرمایه اضافه کند در این صورت سرمایهٔ وی بعد از یك ماه برابر خواهد شد با حاصل ضرب یك میلیون ریال در $(1 + \frac{1}{12})$ و بعد از دو ماه باید آنرا در $(1 + \frac{1}{12})^2$ ضرب کرد . وی در پایان یك سال ، به جای ۲ میلیون ریال، سرمایه‌ای برابر با مقدار زیر خواهد داشت :

$$1000000 \times (1 + \frac{1}{12})^{12} = 2620000 \text{ ریال}$$

اگر آقای میلیونر ربح سرمایه‌اش را روز به روز به سرمایه اضافه کند در این صورت سرمایهٔ وی بعد از یك سال برابر خواهد شد با :

$$1000000 \times (1 + \frac{1}{365})^{365}$$

فرض کنیم که جناب میلیونر ربح را لحظه به لحظه به سرمایه بیفزاید در این صورت باید حاصل $(1 + \frac{1}{n})^n$ را وقتی که n یك عدد بسیار بزرگ باشد حساب کرده در سرمایهٔ اولیه ضرب کنیم :

ثابت می‌شود که $(1 + \frac{1}{n})$ وقتی کـه n بزرگ شود دارای حدی است ، این حد را با e نمایش می‌دهند ،

$$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e =$$

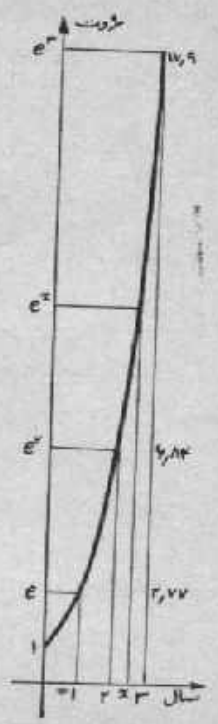
۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶۰۲۸۷.....

(e از کلمهٔ «exponentielle» اخذ شده است) .

سرمایهٔ آقای میلیونـر در پایان سال اول تقریباً بـرابـر با ۲۷۱۸۲۸۲ ریال خواهد بود و بطور کلی می‌توانیم جدول زیر را برای سالهای مختلف تشکیل دهیم :

سال	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ثروت برحسب میلیون ریال	۱	e	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6

می‌توانیم نمودار ازدیاد ثروت میلیونر را در صفحهٔ دو محور عمود برهم رسم کنیم . نقاط نظیر جدول بالا را بدست آورده به هم وصل می کنیم یك منحنی متصل بدست می‌آید که در حقیقت نمایش هندسی تابع $y = e^x$ می‌باشد زیرا در سال x ثروت میلیونر برابر است با e^x این تـابع و منحنی آن به



نام **تابع نمائی نپر** نامیده می‌شوند درحالی که مقدار y معلوم باشد می‌توان از روی آن مقدار x را بدست آورد که به صورت زیر یاد داشت می‌شود:

$$x = \log_e y = \text{Log}\, y$$

x را **لگاریتم نپری** یا **لگاریتم طبیعی** y می‌نامند. مبنای این لگاریتم عدد e است که قبلا تعریف شد و از این جهت نپری نامیده می‌شود که لرد نپر (Lord Napier یا Neper) واضع آن می‌باشد.

مقدار e را می‌توان از روی فرمول

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \cdots$$

بدست آورد. مقصود از $n!$ (فاکتوریل n) یعنی حاصل ضرب n اولین عدد طبیعی:

$$۲! = ۲ \times ۱ \text{ و } ۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ \text{ و } ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \text{ و } \ldots$$

از فرمول زیرهم می‌توان مقدار e^x را حساب کرد:

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$$

این فرمول برای مقادیر منفی x نیز صادق است.

تبصره ـ اگر از طرفین فرمول اخیر نسبت به x مشتق بگیریم نتیجه خواهیم گرفت که مشتق تابع $y = e^x$ برابر است با $y' = e^x$، مشتق تابع با خود تابع برابر است.

***

اقسام مختلف لگاریتم

مختلف نظیر هر عددی مانند a که به‌عنوان مبنا انتخاب شود یک قسم لگاریتم خواهیم داشت:

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$

لگاریتم دارای خواصی است که در هر مبنا صادق است.

خاصیت اساسی عبارتست از:

$$\log uv = \log u + \log v$$

که از آن نتیجه می‌شود:

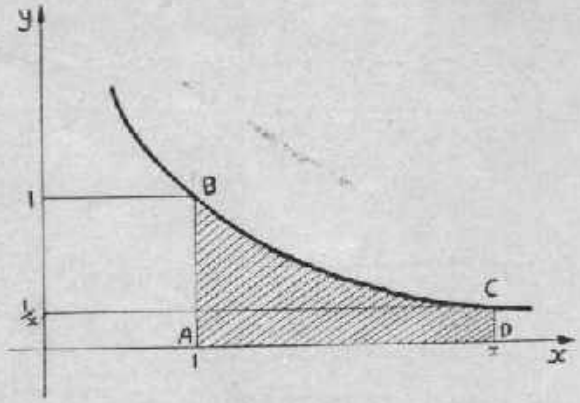
$$\log ۱ = ۰ \text{ و } \log \frac{۱}{u} = -\log u$$

$$\log \frac{u}{v} = \log u - \log v \text{ و } \log u^n = u \log u \text{ و } \ldots$$

استفاده از خواص لگاریتم اجرای اعمال حسابی را ساده می‌سازد، مثلا برای محاسبهٔ حاصل ضرب $u \times v$ می‌توان حاصل جمع لگاریتمهای آنها را تعیین کرد تا لگاریتم حاصل ضرب بدست آید و از روی آن حاصل ضرب را تعیین کرد.

لگاریتم در مبنای ۱۰ را **لگاریتم اعشاری** می‌نامند. لگاریتم اعشاری اعداد را حساب کرده در جدولهای مخصوص ثبت کرده‌اند که محاسبات لگاریتمی با استفادهٔ از آنها انجام می‌گیرد. محاسبات مربوط به لگاریتمهای اعشاری بیشتر توسط مهندسین وفیزیکدانان انجام می‌گیرد. استفادهٔ ازجدول لگاریتم استعمال قلم وکاغذ را ایجاب می‌کند. برای اینکه در انجام محاسبات به قلم وکاغذ احتیاجی نباشد **خطکش محاسبه** و **دایرهٔ محاسبه** را ساخته‌اند که فعلا بیشتر مورد استفاده واقع می‌شود.

ریاضیدانانی که در ریاضیات محض مطالعه می‌کنند با لگاریتم نپری بیشتر سروکار دارند؛ مربع مستطیلی به مساحت یک واحد سطح در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم یک رأس آن ثابت و دو رأس مجاور به آن بر دو خط ثابت عمود برهم (مثلا محورهای مختصات) حرکت کنند. رأس دیگری مستطیل یک منحنی رسم می‌کند که هذلولی متساوی‌القطرین به معادلهٔ



$xy = ۱$ یا $y = \frac{۱}{x}$ می‌باشد. براین منحنی نقطهٔ B به مختصات $x = y = ۱$ و یک نقطهٔ C به مختصات x و $y = \frac{۱}{x}$ در نظر می‌گیریم و خطوط BA و CD را برمحور x ها عمود می‌کنیم مساحت سطح محصور بین منحنی و خطوط BA و AD و DC برابر خواهد بود با $\log_e x$ بوسیلهٔ این منحنی می‌توان خواص اساسی لگاریتم را به آسانی محقق ساخت.

***

لگاریتم و معکوسات اعداد

بین لگاریتم و معکوسات اعداد صحیح روابط جالبی برقرار است که در این روابط لگاریتم نپری دخالت

دارد ، اما بین لگاریتم نپری و لگاریتم غیر آن نیز رابطه‌ای به شرح زیر موجود است .

$$(\log_e x)=(\log_e a)\times(\log_a x)$$

بوسیلهٔ همین رابطه می‌توان لگاریتم طبیعی هر عدد را بر حسب لگاریتم اعشاری آن بدست آورد . برای این کار از یکی از دو فرمول زیر استفاده می‌شود .

$\log_e x = ۲/۳۰۲۶ \log_{۱۰} x$ یا $\log_{۱۰} x = ۰/۴۳۴۳ \log_e x$

لگاریتم نپری یك عدد را می‌توان از فرمول زیر بدست آورد :

$$\log_e(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۵}{۴}-\dots$$

در حقیقت ، مجموع :

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\dots$$

دارای حدی است که برابر با $\log_e ۲$ بوده و تقریباً ۰/۶۹۳۱ می‌باشد . در حالی که مجموع

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\dots$$

دارای حدی نیست اما عبارت :

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{n}-\log_e n$$

وقتی که n به سمت بینهایت میل کند دارای حدی است که به E نموده‌شده ومقدار **ثابت اولر** نامیده می‌شود. مقدار تقریبی E برابر است با ۰/۵۷۷۲۱۴۶۶۴۹۰

***

آیا اعداد e و E غیر جبری هستند؟

عددی که نتواند ریشهٔ معادله‌ای به‌صورت چند جمله‌ای صحیح با ضرایب منطق واقع شود عدد غیر جبری (Transcendant) نامیده می‌شود.

برای اولین‌بار **لیندمن** ثابت کرد که π عدد غیر جبری است . غیر جبری بودن عدد e نیز بوسیلهٔ **هرمیت** ثابت شده است . تصور می‌رود که E نیز عدد غیر جبری باشد اما این مسئله‌هنوز حل نشده‌است و فعلا بایددر انتظار هرمیت دیگری بود تا این موضوع را ثابت کند .

***

مثلثات هذلولی

اگر طرفین یك قطعه نخ را گرفته آنرا در حال کاملا کشیده نگاه‌داریم یك خط مستقیم را نمایش می‌دهد. اما اگر طرفین قطعه‌نخ را گرفته وآنرا درحالت غیر کشیده آزاد بگذاریم ، یك منحنی را نمایش می‌دهد که شنت (chainette) یا منحنی زنجیر نامیده می‌شود .

معادلهٔ این منحنی باتابع‌زیر مشخص می‌شود :

$$y=\operatorname{ch} x=\frac{۱}{۲}(e^x+e^{-x})$$

این تابع یعنی **chx** کسینوس هیپر بولیك (هذلولی) x نامیده می‌شود . می‌توان دو تابع زیر را نیز تعریف کرد

$\operatorname{shx}=\frac{۱}{۲}(e^x-e^{-x})$: سینوس‌هیپربولیك x

$\operatorname{thx}=\frac{\operatorname{shx}}{\operatorname{chx}}$: تانژانت هیپربولیك x

این سه تابع ازیکدیگرمستقل نیستند وبین آنهاروابطی بر قرار است و می‌توان عباراتی مانند $\operatorname{ch}(a+b)$ یا chp+chq و غیره را نظیرروابطی که برای توابع مثلثاتی معمولی $\cos a$ ، $\sin a$ و $\operatorname{tg} a$ وجود دارد حساب کرد .

اگر فرض کنیم :

$M(x=\cos a, y=\sin a)$

با توجه به رابطهٔ $\cos^۲ a+\sin^۲ a=۱$ مکان M دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ خواهد بود. بین sha و cha رابطهٔ $\operatorname{ch}^۲ a-\operatorname{sh}^۲ a=۱$

برقرار است و مکان نقطهٔ

$M(x=\operatorname{cha}, y=\operatorname{sha})$

هذلولی به معادلهٔ $x^۲-y^۲=۱$ می‌باشد .

***

فرمول استیرلینگ

بین دوعدداصم π و e رابطه‌ای موجود است که در آن سومین عدد مهم یعنی i نیزدخالت دارد. غیراز آن ، رابطه‌ای که فقط شامل π و e باشدبه نام فرمول استیرلینگ معروف‌است که در آن n! و n^n نیز دخالت دارند از این قرار :

$$۱\times۲\times۳\times\dots\times(n-۱)\times n=$$

$$=n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{۲\pi n}\ (۱+u)$$

که در آن u عددی است که به ازاء مقادیر بزرگ n به صفر میل می‌کند . این فرمول برای محاسبهٔ فاکتوریل اعداد مورد استفاده واقع می‌شود، آنچه که درحساب احتمالات و در علم آمار مورد استعمال زیاد دارد .

روش خوارزمی در حل معادلات درجهٔ دوم

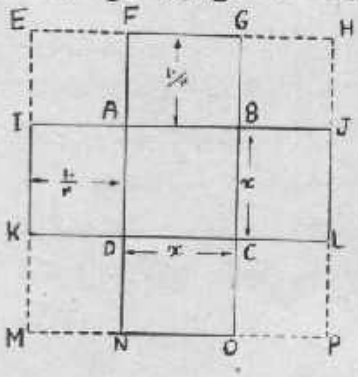
اقتباس از کتاب : Curiosités Géométriques par E . FOURREY

محمدبن موسی خوارزمی ریاضیدان ایرانی، همان کسی که اولین کتاب را در بارهٔ «**جبر و مقابله**» تنظیم کرد ، برای حل مسائلی که منجر به حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شده است از اشکال هندسی استفاده کرده و روش زیر را بکار می‌برده است. وی مسائل خاصی راکه شامل اعداد مثبت بوده مطرح کرده و از حل آنها هم فقط جوابهای مثبت را منظور داشته است . اما میتوان روش وی را در حل مسائل از یك نوع عمومیت داد .

مسئلهٔ اول ـ عددی تعیین کنیدکه چون مجذور آنرا با ده برابرش جمع کنیم ۳۹ حاصل شود . این مسئله را ما امروز به صورت زیر بیان می کنیم : مطلوبست حل معادلهٔ :

$$x^2+10x=39$$

راه حل اول ـ خوارزمی x^2 را بصورت مربع ABCD نمایش می‌دهد . هر یك از اضلاع این مربع را به اندازهٔ $\frac{10}{4}$ امتداد



می‌دهد تا چهارمستطیل ABGF و BCLJ و CDNO و DAIK به ابعاد x و $\frac{10}{4}$ بدست آید مساحت شکل حاصل برابر است با:

x^2+10x آنگاه مربعهای :

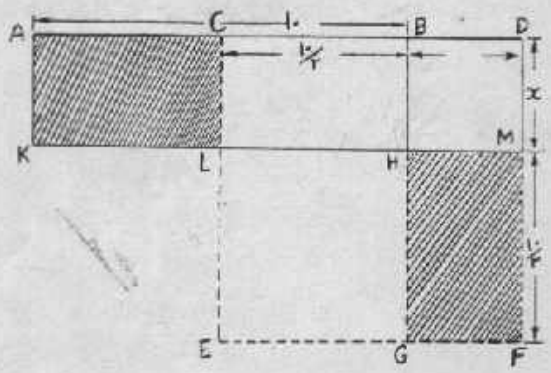
DKMN و CLPO و BGHJ و AIEF

راکه مجموع مساحتهای آنها $4\times(\frac{10}{4})^2=25$ است می‌سازد مساحت مربع EHPM برابر خواهد بود با $39+25=64$ پس طول هرضلع آن ۸ واحد بوده و نتیجه خواهدشدکه AB یا x برابر باشد با :

$$x=IJ-2BJ=8-2\times\frac{10}{4}=3$$

عدد مطلوب برابر ۳ است .

راه حل دوم ـ مربع‌مستطیل ABHK به اضلاع ۱۰ و x و مربع BOMH به ضلع x فرض می‌شود . مساحت



مستطیل ADMK برابر است با x^2+10x یا ۳۹ نقطهٔ C وسط AB را در نظر گرفته به ضلع :

$$CD=x+\frac{10}{2}$$

مربع CDFE را می‌سازیم ، داریم ؟

مستطیل CM + مستطیل HF + مربع LG = مربع CF

مستطیل AM + مربع LF =

زیرا دو مربع مستطیل AL و HF معادل هستند . درنتیجه:

$$\text{مربع DF}=(\frac{10}{2})^2+39=64\Rightarrow CD=8$$

$$BD\text{یا}x=8-\frac{10}{2}=3$$

***

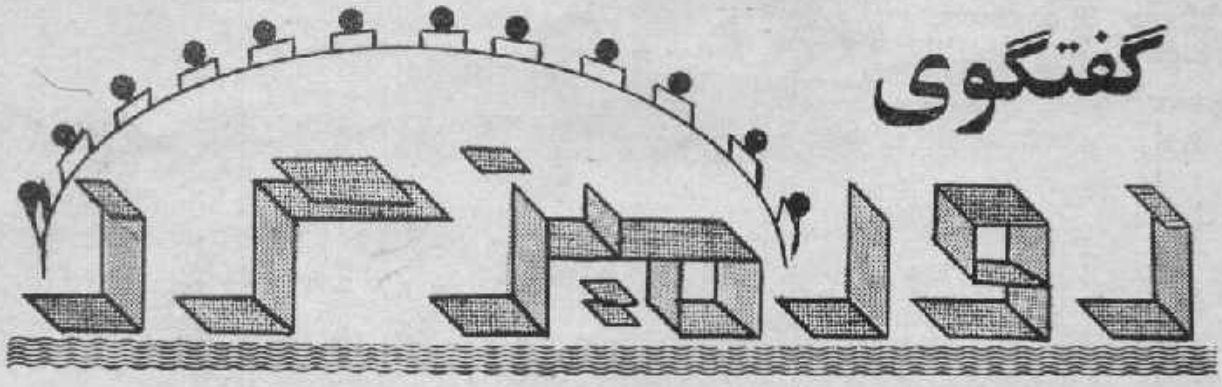
معادله‌ای‌که در مسئلهٔ بالا حل شده است از نوع کلی :

$$x^2+px=q$$

می‌باشد . مساحت مربع EHPM (شکل اول) یا مساحت مربع CDEF (شکل دوم) برابر است با

$$(x+\frac{p}{2})^2=\frac{p^2}{6}+q$$

برای تعیین x کافی است از اندازهٔ ضلع این مربع مقدار $\frac{p}{2}$ راکم کنیم .



آنچه درزیر می‌خوانید گفتگویی است که درمحفلی ازدبیران ریاضی درجریان بوده است . ازذکر اسامی دبیران خودداری می‌شود وبه جای آن بعضی علامات بکار می‌رود .

* ـ درمجلهٔ یکان در پاسخ به‌یك پرسش تأکید شده بود که صحت یك اتحاد مثلثاتی وقتی محقق است که منحصراً یك طرف را عمل کرده وطرف دیگر را نتیجه بگیریم. این‌موضوع صحیح نیست.

● ـ درمجلهٔ یکان چنین صراحتی بکار نرفته بود. نوشته شده بود که در دبیرستانها مرسوم چنین است که فقط وقتی عمل محصلی را دراثبات صحت یك اتحاد قبول می‌کنند که منحصراً یك‌طرف را ازطرف دیگر نتیجه گرفته باشد .

★ ـ من درتمام‌مدت‌سی‌وچند سالی که‌درس‌داده‌ام‌همیشه مصر بوده‌ام‌که محصل یك طرف را عمل کرده طرف دیگررا بدست آورد و غیر از آن راقبول نداشته اند . حالاهم عقیده‌ام برهمین است .

* ـ متأسفانه شما سئوالی را مطرح ساخته‌اید و پاسخی غیر مربوط به‌آن‌را خواسته‌اید . وقتی‌شما ازمحصل‌میخواهید که صحت یك اتحادرا اثبات کند؛ محصل می‌تواندثابت کندکه‌عبارات طرفین‌تساوی‌بایك‌عبارت‌ثالث‌متحدهستند ، می‌تواندثابت کندکه تفاضل عبارات طرفین تساوی متحدباصفر است، اگرخواسته‌اید که اتحاد دوکسر را ثابت‌کند می‌تواندثابت کنید که‌حاصل‌ضرب طرفین باحاصل ضرب وسطین متحد است وراههای دیگر ، در هرحال درست‌عمل‌کرده است .

★ ـ تمرینهای ریاضی مخصوصاً اثبات صحت اتحادهای مثلثاتی را برای این مطرح می‌کنیم که دریابیم محصل طریقهٔ کار برد فرمولها را درموارد مختلف ازعهده برمی‌آیدیانه؟ آیا می‌تواند ابتکارات لازم را داشته باشد ؛ وانگهی دوعبارت را وقتی متحد می‌گوئیم که یکی ازدیگری بدست آید .

* ـ شما اگرعمل خاصی را ازمحصل انتظار دارید باید سؤال خود را مطابق باآن طرح‌کنید .

● ـ آیا ما برای محصل اتحادرا تعریف می‌کنیم‌یانه؟ مسلماً باید قبلاً اتحاد را تعریف کرده باشیم تا اینکه اثبات صحت یك اتحاد راتقاضا کنیم . هرتعریف‌ریاضی مبتنی‌براصول وخواصی است‌که درهرمورد می‌توان ازآن استفاده کرد.

* ـ مادر اولی‌که هندسهٔ استدلالی را به شاگرد درس می‌دهیم این اصل راکه « اگر دوچیز باچیز سوم‌مساوی باشند خود متساویند» بارها بکار می‌بریم . اما وقتی‌که شاگرد همین اصل را درمورد اتحاد یعنی نوعی تساوی دوعبارت بکار می‌برد ازوی قبول نمی‌کنیم ! !

● ـ متأسفانه اکثریت محصلین مطالب را ازروی‌فهم نمی‌آموزند ، خود ماآنها را اینگونه بار آورده‌ایم ، اگر هم تناقضاتی درگفته‌ها وکارهای ما وخودداشته باشدکمتر آنرادرك می‌کنند .

● ـ بهرحال ، مااتحاد رانوعی تساوی تعریف‌می‌کنیم بنابراین همهٔ‌اصول‌وخواصی‌راکه برای تساوی قبول کرده‌باشیم برای اتحادهم بایدقبول داشته باشیم . ماقبول‌کرده‌ایم‌که‌تساوی $A=B$ و $A-B=0$ هم‌ارز هستند . قبول کرده‌ایم که تساویهای $A=C$ و $B=C$ تساوی $A=B$ را ایجاب می‌کندوبرعکس،ازتساوی $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ تساوی $AD=BC$ رانتیجه گرفته‌ایم وبرعکس،وهمهٔ این اصول وخواص برای یك اتحاد هم مرعی است . بنابراین وقتی که از محصل خواستیم تاصحت اتحاد $A\equiv B$ راثابت کند می‌تواندبجای‌آن‌اتحاده $A-B\equiv$

یا اتحادهای [A=C و B=C] را ثابت کنید. برای اثبات اتحاد $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ می‌باید اتحاد A.D = B.C را ثابت کند.

● ـ باید تکلیف محصلین روشن باشد. چه بسا که محصل در امتحان به‌جای اتحاد A=B اتحادهای: [A=C و B=C] را ثابت کرده اما مورد قبول صحیح واقع نشده است و شاید همین موضوع لطمهٔ جبران ناپذیری به جریان تحصیل محصل وارد آورده باشد. موضوع منحصر به اثبات یك اتحاد نیست. در موارد دیگرهم این قبیل کج سلیقگیها وجود دارد. باید فکر اساسی کرد.

* ـ سؤال امتحانی باید صریح و قاطع باشد. در این صورت محصل و مصحح تکلیف خود را می‌دانند. وقتی سؤال امتحانی را چنین مطرح کردیم: «یکی از عبارات طرفین تساوی A=B را عمل کرده طرف دیگر را بدست آورید» دیگر اشکالی پیش نخواهد آمد.

✱ به‌دنبال این سؤال هم می‌شود اضافه کرد، و نتیجه بگیرید که این تساوی یك اتحاد است»

● ـ فرض کنیم که از محصلین خواسته‌ایم صحت یك اتحاد را ثابت کنند. محصلی عبارت اتحاد را به‌صورت کثیرالجمله‌ای مثلا درجهٔ n از یك متغیر مانند x درآورده آنگاه ثابت کرده است که n+۱ مقدار از x در تساوی صدق می‌کند و نتیجه گرفته است که تساوی معادله نیست بلکه اتحاد است. تکلیف این محصل چیست؟ آیا طریقهٔ وی قابل قبول است یا نه؟

✱ ـ در تحصیلات متوسطه اثبات این قضیه که «هر معادلهٔ درجهٔ n حداکثر دارای n ریشه است» بعمل نمی‌آید.

● ـ محصل مطالعات و تحقیقات شخصی داشته است و این برای وی گناهی نیست.

* اصولا بعضی موانع محصلین راههای کوتاه و مفیدی برای پاسخ به‌بعضی سؤالات امتحانی انتخاب می‌کنند که متأسفانه از طرف بعضی مصححین مورد قبول واقع نمی‌شود. در امتحان نهایی ششم ریاضی سؤال شده است که «منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=1\pm\sqrt{-x^2+2x+1}$$

را رسم کنید.» محصلی این تابع را به‌صورت:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

درآورده ونتیجه گرفته بود که نمایش هندسی آن دایره‌ای است بمرکز (۱ و ۱) و به‌شعاع $\sqrt{2}$ اما مصحح ورقهٔ امتحانی در نمره دادن به‌آن شك داشت.

● ـ در کلاس ششم ریاضی «معادلات منحنیهای مقاطع» مخروطی خوانده می‌شود؟

* ـ در قسمت مخروطات می‌خوانند.

✱ ـ اگر سؤال شده باشد که جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع را رسم کنید در این‌صورت مسلماً راه انتخابی این محصل قابل قبول نیست.

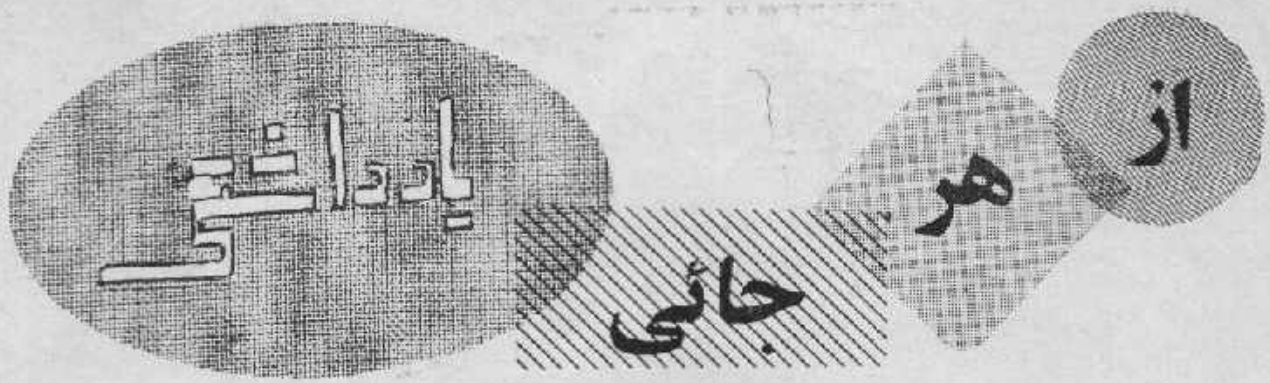
● ـ این موضوع را مطرح کنیم که اگر محصل یك کلاس برای پاسخ دادن به‌سؤالی از معلومات مربوط به کلاسهای بالاتر یا معلوماتی خارج از برنامهٔ مصوب استفاده کرده باشد تکلیف وی چیست.

● ـ اجازه فرمائید که طرح این موضوع به‌جلسه‌ای دیگر موکول شود.

دربارهٔ مندرجات مجله

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها بدون هیچگونه تغییر در مجله چاپ می‌شود واز بابت مطالب آن هیچگونه مسئولیتی متوجه مسؤولان مجله نیست باوجود این هر اظهار نظری که دربارهٔ این مسائل واصل شود مخصوصاً اگر متضمن نکاتی باشد در مجله درج خواهد شد. یادداشت زیر توسط آقای رضاقلی زاده واصل شده است که عیناً چاپ می‌شود:

در خصوص صورت مسئلهٔ شیمی صفحه ۲۳ از شمارهٔ ۲۵، لازم است دانش‌آموزان و خوانندگان دیگر مجله بدانید که آب آهك نمی‌تواند بیش از ۲ گرم در لیتر در آب حل شود و بنابراین حداکثر فاکتور آن $\frac{2}{37}$ نمی‌تواند باشد زیرا $F=\frac{C}{E}$ و E برای $Ca(OH)_2$ برابر $\frac{74}{2}$ می‌شود.



«محاسبهٔ مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ به کمك کسرهای مسلسل»

عدد گنگ $\sqrt{2}$ واقع است بین ۱ و ۲ می‌توان نوشت :

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{y}$$

اگر y را ازاین رابطه حساب کنیم می‌شود:

$$\sqrt{2}y=y+1 \quad \text{یا} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}=2+\frac{1}{y}$$

ومقدار $\sqrt{2}$ می‌شود :

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{y}}$$

و به همین‌ترتیب مجدداً y را حساب‌کرده و عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم خواهیم داشت :

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+}}}}.$$

اگر کسرهای ترکیب‌کنندهٔ این کسر مسلسل را حساب‌کنیم برای $\sqrt{2}$ به ترتیب مقادیرزیر بدست می‌آید .

$$1\frac{169}{480} \text{ و } 1\frac{70}{169} \text{ و } 1\frac{29}{70} \text{ و } 1\frac{12}{29} \text{ و } 1\frac{5}{12} \text{ و } 1\frac{2}{5} \text{ و } 1\frac{1}{2} \text{ و } 1$$

که صورت هر کسر بامخرج کسرقبلی مساوی است وما بدین وسیله می‌توانیم باهر تقریب مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را حساب کنیم .

«ترجمهٔ قوام نحوی ازاهواز»

اوقات نزد اهل ختا

(ازکتاب شرح بیست باب ملامظفر)

حکمای ختا شبانه روزی را به دوازده « جاغ » قسمت‌کرده‌اند یعنی همچنانکه منجمان ولایت ما شبانه روزی را به بیست و چهار قسم متساوی کرده‌اند وهرقسمی را ساعتی نامیده‌اند همچنین حکمای ختا و ترکستان شبانه روزی‌را به دوازده قسم متساوی کرده‌اند وهرقسمی‌را جاغ نام نهاده‌اند و اسامی جاغها به ختائی به این ترتیب است ۱ـ ژه ۲ـ جبو. ۳ـیم. ۴ماو ۵ـ جن. ۶ـضر. ۷ـوو. ۸ـوی ۹ـ شن. ۱۰ـ یود. ۱۱ـ شیو. ۱۲ـحایی و این نامها به فارسی موش، گاو، پلنگ ، خرگوش، مار، اسب ،گوسفند ، بوزینه، مرغ، سگ وخوك است. حکمای‌ختا هرجاغی را به هشت «که» وهر شبانه روزی را به ده‌هزار «فنك» قسمت‌کرده‌اند وابتدای شبانه روز ازنیم‌شب گیرند ودرآن وقت ازجاغ ژه یك نیمه‌گذشته باشد ویك نیمه مانده ....

تعریف نقطه

۱) آنچه‌که دزهیچ جهتی قابل تقسیم نیست ، اما دارای موقعیتی است .
(ارسطو، قرن چهارم قبل ازمیلاد)

۲) نقطهٔ چیزی است که دارای هیچ جزئی نیست . حد خط نقطه است .
(اقلیدس، قرن سوم قبل ازمیلاد)

۳) نقطه آن چیزی را می‌رساند که ازلحاظ انبساط کاملا محدود است‌بعبارت دیگر مکان مطلق.
(لایب نیز، ۱۶۷۹)

۴) حدود یك خط ، نقـاط نامیده می‌شوند . (لژاندر، ۱۷۹۴)

۵) وجود یك اتم‌برای تحقیق یافتن یك نقطهٔ ریاضی کفایت می کند .
(کوشی ، ۱۸۳۲)

۶) نقطهٔ ریاضی شکلی بدون‌اندازه است . نقطه آن چیزی است که بوسیلهٔ خودش معین می‌شود .
(دلبوف ، ۱۸۶۰)

۷) به حـد خط یا منتهی الیه خط همچنین به فصل مشترك‌دوخط نام نقطه اطلاق می‌شود .
(روشه وکومبروس ، ۹۱-۱۸۶۶)

۸) یك نقطهٔ تطابق فکر مجرد است باپیکر فوق‌العاده کوچکی که‌جز موقعیت آنرا در فضا ملاحظه نمی کنیم ، ناحیهٔ بدون وسعتی که تعیین کنندهٔ حد قطعی هرشکل دلخواه است .
(ش، مری ، ۱۹۰۳)

۹) نقطه : مفهوم تعریف نشدنی.

چگونه مسأله‌ای را حل کنم؟

تألیف : G. POLYA

ترجمهٔ : ه شریف‌زاده

آیا تاکنون با آن بر خورد کرده‌اید؟

مسأله‌ای برای ما طرح شده است که ممکن است قبلا آن را حل کرده باشیم یا لااقل سخنی در بارهٔ آن شنیده باشیم یا مسأله‌ای کاملا مشابه با آن را بررسی کرده باشیم. اینها امکاناتی هستند که نمی‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم . بنابر این سعی خواهیم کرد که خاطرات گذشته را تجدید کنیم .

آیا تاکنون با آن برخورد کرده‌ایم ؟ یا آیا تا کنون با مسأله‌ای مواجه شده‌ایم که با مختصری تفاوت شبیه همین مسأله باشد؟ جواب به این سؤالات ، حتی اگر منفی باشد ، قادر است که «تحرکی» درمعلومات مفید ما ایجاد کند .

سؤالی که در بالا عنوان کردیم مفهومی کلی دارد . برای اینکه به این سؤال جواب بدهیم باید از خاطرهٔ خود جزئیات مناسبی را بیرون بکشیم و از میان معلومات قبلی آن را که در مسأله مؤثر است انتخاب می‌کنیم . واضح است که نمی‌توانیم از پیش بدانیم که به‌کدام جزء معلومات خود احتیاج داریم ، ولی امکاناتی هست که نباید از بررسی آنها چشم پوشید . مثلا کدام خصوصیت مسألهٔ فعلی نقشی را بازی می‌کند که در حل مسأله‌ای دیگر بازی کرده‌است. پس اگر یکی از خصوصیات مسأله توجه ما را جلب کرد ، سعی خواهیم کرد که آن را بهتر بشناسیم .

این خصوصیت دربارهٔ چیست ؟ آیا به نظرمان آشنامی‌آید؟

آیا تاکنون با آن برخورد کرده‌ایم ؟

شرط

قسمت اصلی «مسألهٔ حل کردنی» است .

شرط هنگامی بیهوده است که اجزای آن مفید نباشد . هنگامی متضاد گفته می‌شود که اجزای آن با یکدیگر وفق ندهند و قابل مقایسه نباشند بطوری که هیچ موضوعی نتواند شرط را اقناع کند.

مثلا برای تعیین عده‌ای مجهول تعدادی معادلهٔ خطی داریم . ممکن است تعداد این گونه معادلات ، که شرط نامیده می‌شوند ، بیشتر از تعداد مجهولها باشد ، معادلات زیادی ممکن است بیهوده ، یا متضاد باشند .

اگر بر عکس تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولها باشد، شرط کافی نیست و نمی‌توان مجهول را تعیین کرد . ولی اگر تعداد معادلات با تعداد مجهولها برابر باشد عموماً برای تعیین مجهول کافی است گرچه ممکن است در بعضی حالات استثنائی این معادلات متضاد یا ناقص باشند .

آیا مسأله‌ای که شما را به آن نزدیک کند می‌شناسید؟

عملا تصور مسأله‌ای که از هرجهت جدید باشد و شباهت به هیچ مسألهٔ دیگر یا هیچ وجه اشتراکی با مسألهٔ حل شدهٔ قبلی نداشته باشد ممکن نیست . در حقیقت اگر چنین مسأله‌ای وجود داشته باشد لاینحل است . عملا وقتی که مسأله‌ای را حل می‌کنیم بایستی از مسائلی که قبلا حل کرده‌ایم یا از نتایج آنها یا از روش آنها یا از تجربه‌ای که منجر به حل آنها شده است استفاده کنیم . واضح است که موضوع عبارت از وصلت خاطرات گذشته است با حال .

برای بخاطر آوردن چنین مسائلی عموماً هیچ اشکالی وجود ندارد . مسائل متعددی را بخاطر می‌آوریم و در میان آنها آن را انتخاب می‌کنیم که حقیقتاً مفید باشد. باید مسأله‌ای را جستجو کرد که حس کنیم به مسألهٔ ما شباهت نزدیک دارد . باید خوب به مجهول نگاه کرد . مسأله‌ای را که قبلا حل شده است در نظر گرفت و ارتباط آن را با مسألهٔ فعلی از جنبهٔ تعمیم ، تمائل ، ... پیدا کرد .

هدف سؤالی که در بالا طرح شد تحرک و در نتیجه توسعهٔ معلوماتی است که قبلا بدست آمده است. در مسائل «ثابت کردنی» وقتی که باید درستی یا نادرستی قضیه‌ای را ثابت کرد باید سؤالی به این طریق طرح شود . «آیا قضیهٔ مفیدی که بکار شما بخورد بخاطر می‌آورید ؟» .

در این هنگام باید در خاطرهٔ خود قضایایی را جستجو کرد که با این مسأله ارتباط داشته باشد .

راهنمائی حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géomtrie

تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم . پاریس: ۱۹۶۳ ــ ترجمهٔ : ع . م

-٦-

فصل یکم - چگونگی اثبات تساوی دو پاره خط

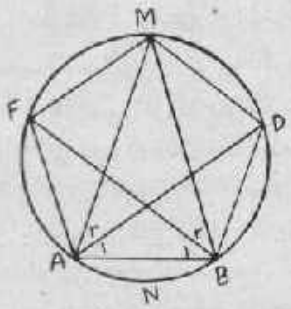
روش پنجم-استفادهٔ از خواص وترهای یك دایره یا دودایرهٔ متساوی

در یك دایره ، یا دو دایرهٔ متساوی : وترهای نظیر دوکمان متساوی ، با یکدیگر مساویند .

مسئلهٔ ۱۰ــ در یك دایرهٔ O وتر AB را رسم می‌کنیم وازنقطهٔ M وسط کمان بزرگتر AB به نقاط A و B وصل می‌کنیم و بالاخره نیمسازهای زاویه های MAB و MBA را رسم می‌کنیم که دایره را به ترتیب در D و F قطع می‌کنند ثابت کنید که اگر اندازهٔ کمان کوچکتر AB برابر ۷۲° باشد چند ضلعی AFMDB دارای اضلاع متساوی است .

فرض:
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}\\ \text{ز}B_1=\text{ز}B_2 \text{ و } \text{ز}A_1=\text{ز}A_2\\ A\hat{N}B=72^\circ\end{array}\right\}$$

حکم:
$$AB=BD=DM=MF=FA$$



اثبات ــ ازتساوی دو زاویهٔ محاطی A_1 و A_2 نتیجه می‌شود که:
$$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$$

و همچنین از تساوی زاویه‌های B_1 و B_2 نتیجه خواهیم گرفت که :
$$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MA}$$

بنا به فرض دوکمان MA و BM باهم برابرند بنابراین :
$$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{MF}=\overset{\frown}{FA}$$

اگر اندازهٔ کمان ANB برابر ۷۲° باشد اندازهٔ کمان AMA برابر $288^\circ=72^\circ-360^\circ$ بوده وخواهیم داشت:
$$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{MF}=\overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{AB}=72^\circ$$

ازتساوی این کمانها نتیجه می‌شود که :
$$BD=DM=MF=FA=AB$$

تبصره ــ به سادگی ثابت خواهد شد که زاویه های پنج ضلعی AFMDB نیز متساوی بوده و این ضلعی منتظم است

تمرینات

۲۷ــ ثابت کنید که هر دوزنقهٔ محاط در دایره متساوی‌الساقین است .

۲۸ــ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است . AD نیمساز زاویهٔ قائمه را رسم کرده ودر D عمودی بروتر

اخراج می‌کنیم که ضلع AC را در F تلاقی می‌کند . ثابت کنید که $BD=DF$

۲۹ـ تمرین ۲۲ را درنظر بگیرید وثابت کنید که هریك از دوقطعه خط MM' و NN' با یك وتر مساوی است و این راه تساوی دو قطعه خط مزبوررا نتیجه بگیرید .

۳۰ـ در مثلث ABC که زاویهٔ A قائمه واندازهٔ زاویهٔ B برابر 30° است ارتفاع AH و میانهٔ AM و عمود BE را بر AM رسم کرده E را به H وصل می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$BE=EH=AH$$

راهنمائی ـ دایرهٔ به قطر AB را رسم کنید .

۳۱ـ از یك نقطهٔ P واقع بر امتداد قطر AB ازدایرهٔ مفروض O مماس PM را برداپره و نیمساز زاویهٔ MPA را رسم می‌کنیم . ازO بر این نیمساز عمود کرده پای آنرا F می‌نامیم . ثابت کنید که مثلث OFM متساوی‌الساقین است .

راهنمائی ـ دایرهٔ به قطر OP را رسم کنید .

***

تبصره ـ برای تساوی دو وتر از یك دایره می‌توان ثابت کرد که از مرکز دایره به یك فاصله‌اند .

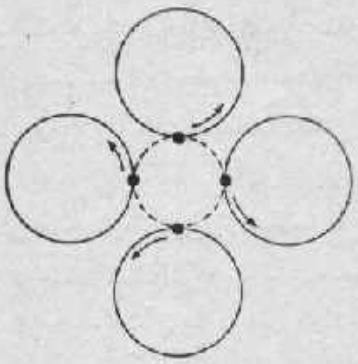
تمرینات

۳۲ـ دو دایرهٔ متحدالمرکز مفروض‌اند . ثابت کنید وترهائی ازدایرهٔ بزرگتر که بردایرهٔ کوچکتر مماس هستند با یکدیگر برابرند .

۳۳ـ دردایرهٔ O به قطر AB وتر BC را چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد ؛ وازM وسط BO وتر PN را عمود بر AB رسم می‌کنیم . ثابت کنید که :

$$PN=BC$$

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید



روی یك زمین مسطح چهاردایرهٔ متساوی مطابق شکل رسم شده است.چهار نفر دوچرخه‌سوار ، هریك روی یکی از این دایره ها دور می‌زنند . در ابتدای حرکت ، هر چهار نفر در نزدیکترین نقطهٔ به مرکز میدان قرار می‌گیرند ودر یك لحظه شروع به حرکت می‌کنند . سرعت آنها برحسب واحد قراردادی به ترتیب عبارت است از :

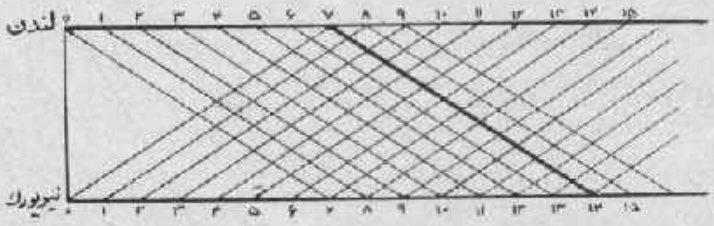
$v_1=6\frac{\text{واحد}}{\text{ساعت}}$ و $v_2=9\frac{\text{واحد}}{\text{ساعت}}$ و $v_3=12\frac{\text{واحد}}{\text{ساعت}}$ و $v_4=15\frac{\text{واحد}}{\text{ساعت}}$

محیط هریك ازدایره‌ها ثلث واحد قراردادی طول است .

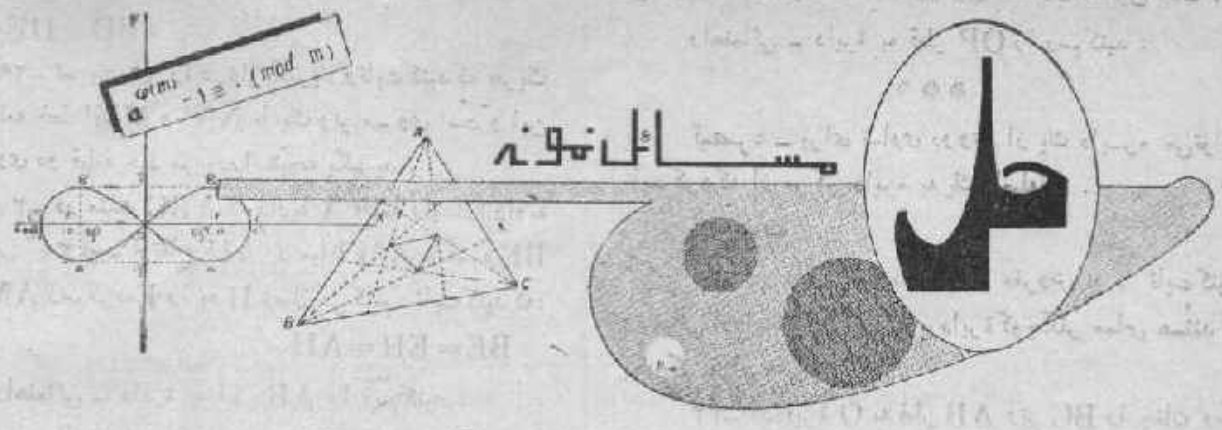
درمدت ۲۰ دقیقه‌که از ابتدای حرکت آنها گذشته باشد چند دفعه بالاتفاق درچهار نقطهٔ عزیمت واقع خواهند شد ؟

پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مندرج در شمارهٔ قبل

برای حل این مسئله ازنمودار استفاده می‌کنیم (شکل پائین)



اگر AB نمودارمسیر کشتی مورد نظر باشد ، ملاحظه می‌کنیم که ۱۳ کشتی را درراه و دو کشتی را هنگام عزیمت و هنگام رسیدن به مقصد ملاقات می‌کند ؛ درلحظه‌ای که وی ازلندن حرکت می‌کند یك کشتی ازنیویورك به‌آنجا می‌رسد ودر لحظه‌ای که وی به نیویورك می‌رسدیك کشتی از آنجا به قصد لندن حرکت‌می‌کند . بنابراین جمعاً ۱۵ کشتی را ملاقات می‌کند .



مسئلهٔ شبیه به مسئلهٔ مورلی

نوشتهٔ : HUSEYIN DEMIR

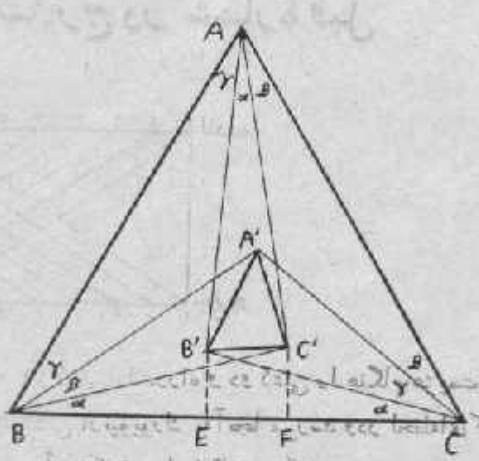
ترجمهٔ : حسینعلی شاهورانی دانشجوی دانشکدهٔ علوم

نخست مسئلهٔ مورلی یادآوری می‌شود :

مسئلهٔ مورلی- اگر هریك از زاویه‌های مثلث مفروضی را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم از تقاطع دو به دوی خطوط حاصل (مجاور به هرضلع) یك مثلث متساوی‌الاضلاع پدید می‌آید .

حل مسئلهٔ مورلی در مجموعهٔ علمی یکان سال صفحهٔ ۱۰۷ ارائه شده است و فعلا ترجمهٔ حل مسئله‌ای که تقریباً شبیه به مسئلهٔ مورلی است به نقل از مجلهٔ ریاضیات آمریکا به نظر خوانندگان محترم می‌رسد .

۳۷۵۶ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم هریك از زاویه‌های A و B و C را مطابق شکل زیر به سه زاویهٔ α و β و γ تقسیم می‌کنیم . از تقاطع دو به دوی خطوط حاصل ، (دوخطی که از ضلع نظیر دورترند) مثلث



$A'B'C'$ تشکیل می‌شود . ثابت کنید که اندازه‌های زاویه‌های A' و B' و C' از این مثلث به ترتیب برابر با 3α و 3β و 3γ می‌باشد .

حل : فرض می‌کنیم که :

$$AB=BC=CA=1$$

$$B'C'=a' \quad C'A'=b' \quad A'B'=C'$$

درهریك ازمثلثهای ABC' و $AB'C$ بنا بر دستگاه روابط سینوسها داریم :

$$BC'=\frac{\sin(60^\circ-\beta)}{\sin(60^\circ+\gamma)}=\frac{\cos(30^\circ+\beta)}{\cos(30^\circ-\gamma)} \qquad (1)$$

$$CB'=\frac{\sin(60^\circ-\gamma)}{\sin(60^\circ+\beta)}=\frac{\cos(30^\circ+\gamma)}{\cos(30^\circ-\beta)}$$

تصویرهای قائم نقاط B' و C' را بر ضلع BC به ترتیب E و F می‌نامیم ، خواهیم داشت :

$$a'^2=(FC'-EB')^2+EF^2$$

$$a'^2=(BC'\sin\alpha-CB'\sin\alpha)^2+(BF+EC-BC)^2$$

$$(2) \quad a'^2=[(BC'-CB')\sin\alpha]^2+[(BC'+CB')\cos\alpha-1]^2$$

با قرارداد :

$$(3) \quad 2u=2\cos(30^\circ-\beta)\cos(30^\circ-\gamma)=\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)$$

و با توجه به روابط (۱) خواهیم داشت :

$$BC'+CB'=\frac{\cos(30^\circ+\beta)}{\cos(30^\circ-\gamma)}+\frac{\cos(30^\circ+\gamma)}{\cos(30^\circ-\beta)}$$

$$=\frac{1}{2u}[2\cos(30^\circ+\beta)\cos(30^\circ-\beta)+2\cos(30^\circ+\gamma)\cos(30^\circ-\gamma)]$$

$$=\frac{1}{2u}[(\cos 60^\circ+\cos 2\beta)+(\cos 60^\circ+\cos 2\gamma)]$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$(4)\quad \begin{cases} BC'+CB'=\frac{1}{2u}(1+\cos 2\beta+\cos 2\gamma) \\ BC'-CB'=\frac{1}{2u}(\cos 2\beta-\cos 2\gamma) \end{cases}$$

چون روابط اخیر را دررابطهٔ (۳) منظور کنیم نتیجه می‌شود :

$$4u'a'^2=[(\cos 2\beta-\cos 2\gamma)\sin\alpha]^2+[\cos\alpha+\cos\alpha(\cos 2\beta+\cos 2\gamma)-2u]^2$$

$$=[-2\cos(30^\circ+\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha]^2$$

$$+[\cos\alpha+2\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)]^2$$

$$=4\cos^2(30^\circ+\alpha)\sin^2\alpha[1-\cos^2(\beta-\gamma)]+\cos^2(\beta-\gamma)[2\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)-1]^2$$

$$\cdots=4\cos^2(30^\circ+\alpha)\sin^2\alpha$$

و در نتیجه :

$$2ua'=2\cos(30^\circ+\alpha)\sin\alpha$$

$$a'=\frac{\cos(30^\circ+\alpha)\sin\alpha}{\cos(30^\circ-\beta)\cos(30^\circ-\gamma)}$$

فرض می‌کنیم :

$$v=\cos(30^\circ-\alpha)\cos(30^\circ-\beta)\cos(30^\circ-\gamma)$$

خواهیم داشت :

$$va'=\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)\sin\alpha$$

$$2va'=(\cos 60^\circ+\cos 2\alpha)\sin\alpha$$

$$4va'=(1+2\cos 2\alpha)\sin\alpha=\sin 3\alpha$$

با عملیات نظیر، خواهیم داشت :

$$4vb'=\sin 3\beta \quad و \quad 4vc'=\sin 3\gamma$$

چون $v\neq 0$ است بنابراین داریم :

$$\frac{a'}{\sin 3\alpha}=\frac{b'}{\sin 3\beta}=\frac{c'}{\sin 3\gamma}=\frac{1}{4v}$$

یعنی در مثلث $A'B'C'$ داریم :

$$A'=3\alpha \quad و \quad B'=3\beta \quad و \quad C'=2\gamma$$

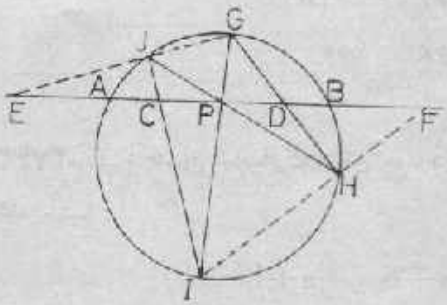
مسئلهٔ پروانه و تعمیم آن

مسئلهٔ پروانه و حل آن در صفحهٔ ۱۰۹ مجموعهٔ علمی یکان سال ودرصفحهٔ ۲۱ یکان شماره ۱۷ ارائه شده است . در اینجا فقط به درج صورت مسئله اکتفا می‌شود و در انتظار هستیم که حل دوتعمیم آن‌را ازطرف خوانندگان دریافت داریم .

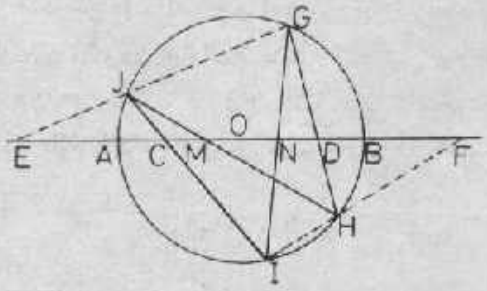
مسئلهٔ پروانه در دایرهٔ مفروضی وتر AB و نقطهٔ P وسط آنرا درنظر می‌گیریم .

ازنقطهٔ P دو وتر GI و HJ را در دایره رسم می‌کنیم خطوط HG و IJ وتر AB را در D و C و خطوط GJ HI امتداد AB را در E و F قطع می‌کنند ثابت کنید که :

$$PE=PF \quad و \quad PC=PD$$



تعمیم اول مسئلهٔ پروانه . اگر AB قطردایره و M و N دونقطهٔ ازآن به یک فاصله از O باشند و GI و HJ دو وتر اختیاری ماربر M و N باشند (مطابق شکل زیر)

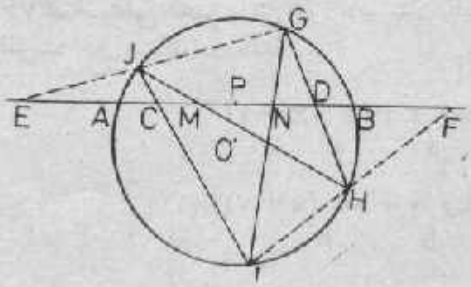


ثابت کنید که : $OE=OF$ و $OC=OD$

تعمیم دوم مسئلهٔ پروانه - بروتر AB ازدایره دو نقطهٔ M و N را به یک فاصله از P وسط آن اختیارمی‌کنیم و مطابق تعمیم اول عمل می‌کنیم ثابت کنید که :

$$PE=PF \quad و \quad PC=PD$$

(ترجمهٔ : شاهورانی)



مسائل برای حل

مسائل متفرقه

قابل استفادهٔ داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

۳۷۵۷ـ ترجمهٔ: **قوام‌نحوی** دبیر دبیرستانهای اهواز

پنج عدد a و b و c و d و e مفروضند . می‌دانیم که عدد b واسطهٔ عددی است بین a و c ، عدد e واسطهٔ هندسی است بین b و d ، عدد d واسطهٔ توافقی است بین c و e . ثابت کنید که عدد c واسطهٔ هندسی است بین a و e

۳۷۵۸ـ ترجمهٔ : **غلامرضا حلی** دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم با فرض $|x|>1$ مجموع زیر را حساب کنید .

$$S_n=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\cdots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}$$

۳۷۵۹ـ از : **باهمت** دبیر دبیرستانهای شبستر معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\log_{2x}x\times\log_{2}7x=\log_{2}x\times\log_{0/5\log x}7x$$

۳۷۶۹ـ از **علی نصر** دانش‌آموز دبیرستان البرز

مطلوبست حل دستگاه دومعادلهٔ زیر :

$$\begin{cases}\log_{a}x+\log_{a^2}(x+y)=1\\ \log_{b}y+\log_{b^2}(x+y)=1\end{cases}$$

۳۷۶۱ـ از : **باهمت**

دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}x^{\log x}+y^{\log y}=10001\\ x^{\log y}+y^{\log x}=2\end{cases}$$

۳۷۶۲ ـ ترجمهٔ : **گلستان زاده** دبیر دبیرستانهای کازرون .

دستگاه دو معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}(ax)^{\log a}=(by)^{\log b}\\ b^{\log x}=a^{\log y}\end{cases}$$

۳۷۶۳ـ از : **حسن شهنازی** دانش‌آموز دبیرستان ؟

اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=a+b\\ \cos 2x+\cos 2y=a^2+b^2\\ \cos 3x+\cos 3y=a^3+b^3\end{cases}$$

ثابت کنید رابطهٔ $ab=1$ برقرار است

۳۷۶۴ـ ترجمهٔ : **هراچ کاراپتیان** دانش آموز دبیرستان آذر .

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید .

$$\sec x+1=\sin(\pi-x)-\cos x\,tg\frac{\pi+x}{2}$$

۳۷۶۵ـ از: **محمدهاشم شفیعی** دانش آموز دبیرستان مروی .

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید .

$$tg^3x+tg^2 2x-tg^2 3x+tg^3x\,tg^2 2x\,tg^2 3x=0$$

۳۷۶۶ـ از: **محمد هاشم شفیعی**

از معادلهٔ زیر مقادیر کلی کمانهای φ و θ را بدست آورید :

$$(tg^2 3\varphi+1)(\cos^2 4\theta-1)+$$

$$tg^2 3\varphi(\cos^2 4\theta-5)=0$$

۳۷۶۷ـ ترجمهٔ **بهزاد سوفر** دانش آموز دبیرستان هدایت سنندج .

اگر درمثلثی رابطهٔ :

$$\cot gA+\cot gB+\cot gC=2$$

برقرار باشد ثابت کنید که بین طولهای اضلاع ومساحت رابطهٔ

$$a^2+b^2+c^2=8S$$

برقرار است .

۳۷۶۸ـ ترجمهٔ **قوام نحوی**

اولاً ـ باقیماندهٔ تقسیم a^2 را بر a^2+a+1 بدست آورید .

ثانیاً ـ ثابت کنید که عبارت :

$$S=a^{3p+2}+a^{3q+1}+a^{3r}$$

بر a^2+a+1 بخش‌پذیر است (p و q و r اعداد صحیح و مثبت هستند) .

۳۷۶۹ـ ترجمهٔ **بهزاد سوفر**

عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\overline{abc}=a^2+b^2+c^2+36$$

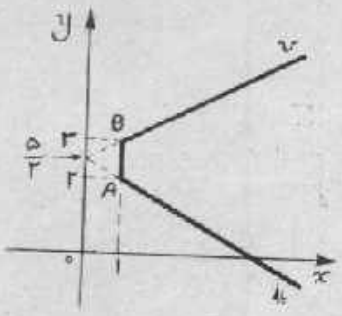
۳۷۷۰ـ از **محمد سعید دانشمند** دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم .

عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ را که ارقام آن دو به‌دو متفاوت هستند با شرط زیر تعیین کنید .

$$\overline{abcde}=(\overline{aab})^2-(\overline{ad})^2-c$$

۳۷۷۴ـ از: **رمضانعلی صفائی** دانش‌آموز دبیرستان ناصرخسرو .

معادلهٔ خط شکستهٔ uABv را که در شکل مقابل رسم شده است بدست‌آورید :



۳۷۷۲ـ ترجمهٔ: **غلامرضا حلی**

آیا می‌توان مقادیر صحیحی بجز :

$$a=b=c=0$$

برای a و b و c پیدا کرد که رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$(c-a-b)^2=24abc$$

۳۷۷۳ـ ترجمهٔ **هراچ کاراپتیان** .

ثابت کنید که منحنیهای به معادلات :

$$2x^2+3y^2=a^2 \quad \text{و} \quad ky^2=x^3$$

به ازاء جمیع مقادیر a و k ($a\neq 0$ و $k\neq 0$) یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند .

۳۷۷۴ـ ترجمهٔ **هراچ کاراپتیان** .

دو خط AB و CD درنقطهٔ O بر یکدیگر عمودند . خط ثابت EF با خط AB زاویهٔ $\alpha<45^\circ$ ساخته OB را در M و OD را در N قطع می‌کند . مطلوبست رسم تمام مربعهای ممکن که یك رأس آنها بر EF واقع بوده ویك زاویهٔ آنها بریکی از زاویه‌های قائمهٔ حول نقطهٔ O منطبق باشد.

۳۷۷۵ـ از **هدایت یاسائی** ،آمریکا .

مثلث BDT مفروض است . ازرأس B دو خط مرور می‌دهیم که ضلع DT را در R و S قطع کنند . خطی موازی با BD رسم می‌کنیم که BT را در G و DT را در P قطع کند . اگر PG خطوط BS و BR را به ترتیب در L و K قطع کند ثابت کنید که .

$$LG\cdot TD+KL\cdot RD=KG\cdot TD-RD\cdot SD$$

۳۷۷۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

در یك ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ بزرگتر $AB=a$ از لحاظ اندازه‌وازلحاظ وضعیت ثابت می‌باشد. قاعدهٔ کوچکتر $CD=b$ وساق $AD=m$ ازلحاظ اندازه ثابت بوده اما از نظروضعیت متغیر می‌باشند .

۱) مکان هندسی نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی دو قطر ذوزنقه را تعیین کنید .

۲ـ بافرض آنکه دوقطر برهم عمود باشند ذوزنقه را رسم کنید و بازای مقادیر مختلف m بحث کنید .

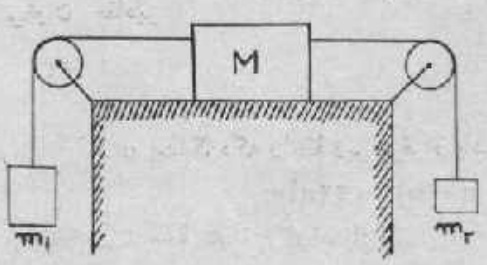
۳۷۷۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

فرض می‌کنیم که در مثلث ABC خط اولربعنی OGH با ضلع BC موازی باشد . حاصل $tgB\,tgC$ را بدست‌آورده و ازروی‌آن وقتی که B و C ثابت باشند مکان A را تعیین کنید .

مسائل فیزیک (زیر نظر : هوشنگ شریفزاده)

۳۷۷۸ـ فرستنده : **رسول آژیری** دبیر دبیرستانهای گچساران .

جسم M به جرم ۲۰ کیلوگرم روی سطحی افقی که ضریب اصطکاک آن $k = ۰/۲۵$ است قرار گرفته است . این جسم



بوسیلهٔ ریسمانی که از شیار دو قرقره عبور کرده به جرمهای $m_1 = ۱۵kg$ و $m_2 = ۵kg$ بسته شده است (طبق شکل) .

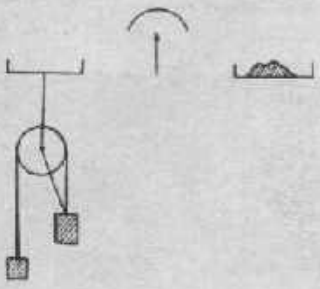
اولا ، شتاب حرکت دستگاه را پیدا کنید .

ثانیاً کشش طناب را در نقاط A و B حساب کنید.

$g = ۹/۸ m/s^2$

۳۷۷۹ـ ترجمه از کتاب «تمرین فیزیک»

قرقرهٔ شیاردار سبکی را توسط نخ بیوزنی به زیر کفهٔ ترازویی آویزان می‌کنیم. از شیار این قرقره نخی عبور می‌دهیم (از جرم نخ صرف نظر می‌شود) و به طرفین آن وزنه هایی به جرم m_1 و m_2 می‌آویزیم . وزنه m_1 را توسط نخ دیگری به محور قرقره می‌بندیم تا دستگاه قرقره و وزنه‌ها بحرکت باشد . در کفهٔ دیگر ترازو به اندازهٔ کافی وزنه می‌گذاریم تا تعادل ترازو برقرار شود . نخی که وزنهٔ m_1 را به محور قرقره



بسته است بسرعت می‌سوزانیم تا وزنه‌ها شروع به حرکت کنند ثابت کنید که تعادل ترازو به هم می‌خورد جرمی را که باید به یکی از دو کفه افزود تا تعادل مجدداً برقرار شود بدست آورید .

مقادیر عددی : $m_1 = ۰/۳kg$ و $m_2 = ۰/۲kg$

۳۷۸۰ـ ترجمه از کتاب «تمرین فیزیک»

ماه مدار خود را به دور زمین تقریباً در ۶۵۶ ساعت طی می‌کند . مدت زمان یک دور گردش قمر مصنوعی را پیدا کنید. که در ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین است فاصلهٔ زمین تا ماه $۶۰R$ و $R = ۶۴۰۰km$ و R شعاع زمین است .

مدار ماه و قمر مصنوعی را به دور زمین دایره فرض می‌کنیم و از نیروهای جاذبهٔ سایر کرات آسمانی صرف نظر می‌کنیم .

مسائل شیمی (از عطاء الله بزرگ نیا)

۳۷۸۱ـ ئیدروکربور A به فرمول $C_nH_{۲n-۲}$ بدون اتصال سه گانه مفروض است .

مقدار آبی که از احتراق m گرم این ئیدروکربور حاصل می‌شود برابر با مقدار کربنی است که درهمین مقدار از آن وجود دارد .

از گرم کردن این ئیدروکربور در مجاورت سدیم ایزومر دیگری از آن بدست می‌آید که یک کربور استیلی (B) است .

از پولیمریزاسیون سه مولکول ئیدروکربور (B) ، ئیدروکربور C حاصل می‌شود .

تعیین کنید اولا وزن جسم C را در صورتی که بدانیم ئیدرولیز جسم B تولید ۰/۹۱۴ گرم سئون می‌کند .

ثانیاً چه جرمی از بنزن لازمست تا این مقدار کربور C را تولید نماید .

۳۷۸۲ـ ۰/۷۸۵ گرم از یک ماده آلی مشتمل بر کربن ئیدروژن ویک عنصر هالوژن را تجزیه می‌نمائیم. ۰/۲۲۵ گرم آب ۱/۳۲ گرم گاز کربنیک بدست می‌آید .

عنصر هالوژن به نسبت یک اتم در ملکول جسم آلی است.

ازطرف دیگر ۱۹/۶۲۵ گرم از این جسم با بدوراتیل در مجاورت سدیم بارا ندمان ۸۴ درصد ۱۱/۳۰ گرم از یک ئیدروکربور تولید می‌نماید که ترکیب درصد آن از اینقرار است :

$H = ۹/۴۴\%$ — کربن $۹۰/۵۶\%$

تعیین کنید :

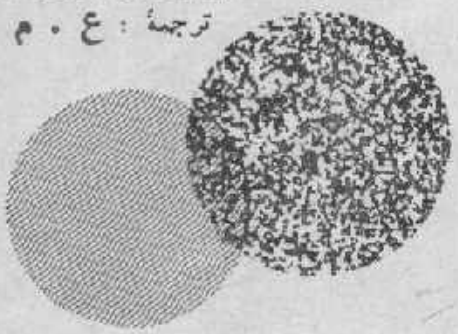
۱ـ جنس جسم مورد تجزیه و ئیدروکربور حاصل را

۲ـ طریقه‌های دیگری که ئیدروکربور نامبرده از جسم مورد تجزیه بدست می‌آید .

بیان جدید

ریاضیات مقدماتی

تالیف : Lucienne FELIX
ترجمهٔ : ع . م



خلاصهٔ بخش دوم ، اعداد (مندرج درشماره‌های ۱۹ ، ۲۰ ، ۲۲ ، ۲۳)

§۱ـ مجموعهٔ N اعداد طبیعی

الف ـ آنچه که به‌عنوان اصل قبول می کنیم

۱ـ جمع : نظیر هرزوج (a و b) از عنصرهای N عنصر دیگری ازآن به صورت $S=a+b$ وجود دارد، عمل داخلی با نشانهٔ (+) را که به این ترتیب روی N تعریف می‌شود **جمع** و S یعنی $a+b$ را مجموع دو عنصر a و b می‌نامیم .

عمل جمع دارای خواص زیراست :

اصل جانشینی :

$$[a=a' \text{ و } b=b'] \Longrightarrow [a+b=a'+b']$$

اصل اختصار :

$$\begin{cases}[a+b=a'+b] \Longrightarrow [a=a'] \\ [a+b=a+b'] \Longrightarrow [b=d'] \end{cases}$$

اصل شرکت پذیری عوامل :

$$a+b+c=a+(b+c)$$

اصل استقلال ازترتیب عوامل :

$$a+b=b+a$$

۲ـ بین هردو عنصر a و b ازمجموعهٔ N یك و فقط یك حالت از سه حالت زیر وجود دارد :

$a=b$ یا

$\exists d : a+d=b$ یا

$\exists d : b+d=a$ یا

رابطهٔ $a+d=b$ را به صورت $a<b$ نوشته و می‌خوانیم: a کوچکتر است از b . بنابراین ، بین هر دو عنصر a و b از N یکی و فقط یکی از سه حالت زیر وجود دارد (این اصل، **اصل تثلیث** نامیده می‌شود) :

$b<a$ یا $a<b$ یا $a=b$ یا

نامساوی $a<b$ را می‌توانیم به صورت $b>a$ بنویسیم .

۳ـ هر زیر مجموعه‌ای از N که تهی نباشد شامل یك کوچکترین عنصر می‌باشد .

۳' ـ اصل موضوع اولین عنصر : مجموعهٔ N دارای کوچکترین عنصری است که « **یك** » نامیده شده به صورت «۱» نشان داده می‌شود .

۴ ـ ضرب : نظیر هرزوج (a و b) از عناصر N عنصر دیگری ازآن وجود داردکه حاصل ضرب a و b نامیده شده به یکی از صورتهای $a \times b$ یا $a.b$ ویا ab نشان داده می‌شود .

عمل ضرب ، دومین عمل داخلی که روی N تعریف می‌شود دارای خواص زیر است :

اصل جانشینی :

$$[a=a' \text{ و } b=b'] \Longrightarrow [ab=a'b']$$

اصل اختصار :

$$\begin{cases}[ab=ab'] \Longrightarrow [b=b'] \\ [ab=a'b] \Longrightarrow [a=a'] \end{cases}$$

اصل شرکت پذیری عوامل :

$$adc=a(bc)$$

اصل استقلال از ترتیب عوامل :

$$ab=ba$$

اصل توزیعی :

$$a(b+b')=(ab)+(ab')$$

تعمیم اصل توزیعی :

$$a(b+c+\cdots+k)=ab+ac+\cdots+ak$$

عدد ۱، **عنصر بی‌اثر** عمل ضرب می‌باشد :

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

ب ـ آنچه از اصول فوق نتیجه می گیریم :

۱ـ تفریق :

فرض می‌کنیم $a<b$ یعنی اینکه داشته باشیم :

$$\exists d : b=a+d$$

این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\exists d : b-a=d$$

عملی که نظیر هر زوج عنصر های (a و b) به شرط $a<b$ عنصر d را بدست می‌دهد تفریق وعنصر d **تفاضل** b بر a نامیده می‌شود .

۲ـ خواص تفاضل :

$$\left.\begin{matrix}[b-a=d]\iff[b=a+d]\\ [b-a=d']\iff[b=a+d']\end{matrix}\right\}\Longrightarrow d=d'$$

$$b-a=(b+m)-(a+m)\quad \text{و}\quad \forall m\in N$$

$$[p<a<b]\Longrightarrow[b-a=(b-p)-(a-p)]$$

$$a+(b-c)=a+b-c$$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

$$a-(b-c)=a+c-b\quad (b<a \text{ به شرط})$$

$$-a-b+c$$

$$(b-a)+(b'-a')=(b+b')-(a+a')$$

۳ـ خواص نامساویها :

$$[a<b]\Longrightarrow[a+m<b+m]\quad \text{و}\quad \forall m\in N$$

$$[p<a<b]\Longrightarrow[a-p<b-p]$$

$$[a<b \text{ و } a'<b']\Longrightarrow[a+a'<b+b']$$

$$b\neq 1\Longrightarrow a<ab$$

$$[a<b]\Longrightarrow[am<bm\ ,\ \forall m\in N]$$

$$[a<b \text{ و } a'<b']\Longrightarrow[aa'<bb']$$

۴ـ هرزیرمجموعه‌ای از N شامل عناصری مانند x که $x>a$ در صدق می کنند دارای کوچکترین عنصری است که عبارتست از :

$$a+1$$

۵ ـ رشتهٔ اعداد طبیعی

از آنچه گفته شد رشتهٔ اعداد طبیعی به صورت زیر نتیجه می‌شود :

$$\ldots \text{ و } 1+1+1+1+1 \text{ و } 1+1+1+1 \text{ و } 1+1+1 \text{ و } 1+1 \text{ و } 1$$

۶ ـ قضیهٔ استدلال به وسیلهٔ استقراء ریاضی ـ اگر بدانیم :

۱) که خاصیتی به ازاء $a=1$ صادق است .

۲) که هر گاه این خاصیت به ازاء $a=p$ هرچه باشد مقدارصحیح p وبخصوص $p=1$ صدق کند به ازاء $a=p+1$ نیزصدق خواهد کرد .

۳) نتیجه خواهیم گرفت که خاصیت مزبور به ازاء هر عددی از N صادق است .

۷ـ رشته ـ مجموعهٔ عناصری راکه بین آنها و اعداد طبیعی تناظر دوسویی برقرار باشد رشته گفته به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3 \text{ و } \ldots \text{ و } u_n \text{ و } \ldots$$

۸ـ زیر مجموعه‌ای از N **محدود** گفته می‌شود هر گاه دارای بزرگترین عنصری باشد .

۹ـ عدد اصلی یك زیرمجموعه از N .

بین عناصر یك زیر مجموعهٔ ناتهی از N و رشتهٔ اعداد طبیعی تناظر دوسویی برقرار است . اگر n بزرگترین عددی از اعداد طبیعی باشدکه دراین تناظردوسویی بکار می‌آید . این عدد n را **عدد اصلی** یا **شمارهٔ عناصر** زیرمجموعهٔ مزبور می‌نامیم دو مجموعه که دارای یك عدد اصلی باشند **هم‌توان** نامیده می‌شوند .

۱۰ـ اجتماع و اشتراك دومجموعهٔ محدود ـ اگر A و B دوزیرمجموعهٔ محدود از مجموعهٔ E بوده و m و n و r و j به ترتیب شمارهٔ عناصر A و B و اجتماع و اشتراك آنها باشد خواهیم داشت :

$$\left.\begin{matrix}A\subset E\\ B\subset E\end{matrix}\right\}\Longrightarrow[n+m=r+j]$$

$$[A\cap B=\emptyset]\iff[n+m=r]$$

$$[B\subset A]\iff[j=m \text{ و } n=r \text{ و } b=n-m]$$

۱۱ ـ توجیه عمل ضرب ـ اگر b عددی از N باشد داریم :

$$b=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{(b \text{ جمله})}$$

نتیجه خواهیم گرفت که :

$$ab=a(1+1+\cdots+1)=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{(b\text{ جمله})}\quad\quad\underbrace{\qquad}_{(b\text{ جمله})}$$

۱۲ـ خاصیت ارشمیدسی اعداد طبیعی .

اگر a عددی باشد بزرگتر از b یا مساوی با b ، عددی مانند q وجود دارد به قسمی که :

$$bq<a<b(q+1)\quad \text{یا}\quad a=bp$$

این خاصیت را خاصیت ارشمیدسی اعداد طبیعی گفت وچنین بیان می‌کنیم : هرعدد طبیعی a توسط مضارب عدد طبیعی دیگر b رد می‌شود .

۱۳ ـ **تقسیم** ـ عدد q راکه در شرط

$$bq\leq a<b(q+1)$$

صدق می‌کند خارج قسمت تقسیم a بر b وعدد :

$$r=a-bq\geq 0$$

را باقیماندهٔ این تقسیم می‌نامیم . تقسیم عملی است که خارج‌ـ قسمت و باقیماندهٔ تقسیم a بر b را معلوم می‌کند .

§۲ـ مجموعهٔ Z اعداد نسبی

در مجموعهٔ N اعداد طبیعی تفریق $a-b=d$ فقط وقتی امکان پذیر است که $a\geq b$ باشد . برای اینکه تفریق $a-b$ در همه حال ممکن باشد اعداد منفی وضع می‌شود . مجموعهٔ اعداد مثبت ، اعداد منفی وصفررا مجموعهٔ اعداد نسبی گفته با Z می‌نمائیم. اصول موضوع معرف یك چنین‌مجموعه‌ای ونتایج حاصل ازآنها درزیر بیان می‌شود :

الف ـ آنچه که به عنوان اصل موضوع قبول می کنیم :

۱ـ عنصر بی‌اثر ـ صفر

در مجموعهٔ Z یك عنصر که نسبت به عمل جمع بی‌اثر است به نام «صفر» و با نشانهٔ «۰» وجود دارد .

$$\forall a\in Z\ ,\ a+0=0+a=a\ \text{و}\ 0\in Z$$

۲ـ عنصرهای قرینه

درمجموعهٔ Z نظیر هرعنصر a عنصر دیگری مانند a' وجود دارد به قسمی که داشته باشیم :

$$a+a'=0$$

a' را قرینهٔ a می‌گوئیم . قرینهٔ a' نیز a خواهد بود زیرا :

$$[a'=b]\Longleftrightarrow[b'=a]\Longrightarrow(a')'=a$$

۳ـ اختصار بوسیلهٔ عنصر غیرصفر :

$$a\neq 0\ :\begin{cases}[ab=ab']\Longrightarrow[b=b']\\ [ba=ba']\Longrightarrow[b=b']\end{cases}$$

۴ـ عنصر بی‌اثر نسبت به عمل ضرب

در مجموعهٔ Z عنصر بی‌اثری نسبت به عمل ضرب وجود دارد که همان ۱ کوچکترین عدد طبیعی می‌باشد .

$$\forall a\in Z\ :\ a.1=1.a=a$$

۵ـ طبقات Z

مجموعهٔ Z شامل سه طبقه است :

۱) طبقه‌ای که بجز **صفر** شامل عنصر دیگری نیست.

۲) طبقهٔ P که نسبت به عمل جمع و نسبت به عمل ضرب بسته است وعناصر آنرا **اعداد مثبت** می‌نامیم .

۳) طبقهٔ P' که شامل همهٔ عنصرهای قرینهٔ عنصرهای P می‌باشد . عنصرهای P' را **اعداد منفی** می‌نامیم .

۶ـ اصل تثلیث

هرعنصر متعلق به Z یا صفر است یا مثبت است یا منفی است . از دو عنصر قرینه ، غیر از صفر ، یکی مثبت است و دیگری منفی است .

۷ـ اصل مثبت در مثبت

مجموع و حاصلضرب دوعدد مثبت ، عددی است مثبت .

ب ـ آنچه که از اصول فوق نتیجه می گیریم :

۱ـ تفریق

نظیر هرزوج (a و b) از Z عددی وجود دارد که داشته باشیم : $a=b+x$ که این رابطه چنین نوشته می‌شود:

$$x=a+b'$$

و همچنین می‌توانیم بنویسیم : $x=a-b$

و قضیهٔ زیررا خواهیم داشت :

$$[x=b-a] \Longrightarrow [a-b=x']$$

۲ـ قضایای مربوط به ضرب

۱) حاصل ضرب هر عنصری از Z در صفر برابر با صفر است .

۲) اگر حاصلضرب دو عامل برابر با صفر باشد لااقل یکی ازآن دوعامل برابر با صفر است .

۳) حاصل ضرب دوعدد مختلف .

$$ab+ab'=0$$

$$(ab)'=ab' \text{ و } (ab)'=a'b \text{ و } (ab')'=a'b'=ab$$

$$ab=a'b' \text{ و } a'b=ab'=(ab)'$$

۴) خاصیت توزیعی ضرب نسبت به عمل تفریق :

$$c(a-b)=ca-cb$$

۳ـ قضیهٔ ترتیبـاز تعریف:

$$a<b \iff [b-a \text{ مثبت است}]$$

نتیجه می‌گیریم که :

$$0<a \iff a \text{ مثبت است}$$

$$a<0 \iff a \text{ منفی است}$$

۴ـ تعریف قدر مطلق

قدرمطلق یك عدد a از Z که به‌صورت $|a|$ نوشته می‌شود چنین تعریف می‌شود :

$$|a|=0 \iff a=0$$

$$|a|=a \iff a \text{ مثبت است}$$

$$|a|=a' \iff a \text{ منفی است}$$

۵ـ قضایای مربوط به قدر مطلق :

۱) $|ab|=|a|.|b|$

۲) $(|a|+|b|)'<a+b<|a|+|b|$

ج - قرارداد

زیرمجموعهٔ P از Z را همان مجموعهٔ N اعدادطبیعی اختیار می‌کنیم . به هرعدد طبیعی a (که عدد مثبت نامیده می‌شود) قرینهٔ‌آن a' را درنظر گرفته‌آنرا به صورت «$-a$» نمایش می‌دهیم ، یعنی خواهیم داشت :

$$a'=-a \text{ و } (a')'=-a'=a$$

$$m+a'=m-a$$

$$m+(-a)=m-a \text{ و } m+(+a)=m+a$$

و مجموعهٔ Z اعداد نسبی عبارت خواهد شد از :

$$\ldots \text{ و } -3 \text{ و } -2 \text{ و } -1 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \ldots$$

۲ـ مجموعهٔ Q کسرها ، اعداد منطق

برای اینکه معادلهٔ $b+d=a$ همیشه دارای جواب باشد مجموعهٔ Z اعداد نسبی را وضع کردیم. برای‌اینکه معادلهٔ $bq=a$ نیز همواره دارای جواب باشد باید مجموعهٔ کسرها را وضع کنیم .

الف آنچه به عنوان اصل قبول می کنیم :

۱ـ عدد ۱ را نسبت به عمل ضرب عنصر بی‌اثر دانسته نظیر هر عنصر b از مجموعهٔ Q عنصری دیگری ازآن مانند β وجود دارد به قسمی‌که داریم : $b\beta=1$ ، عنصر β معکوس b نامیده می‌شود . نتیجه خواهیم‌گرفت که جواب معادلهٔ : $bq=a$ عبارتست از $q=a\beta$.

معکوس هرعنصرمانند b یعنی β را به صورت $\frac{1}{b}$ نمایش می‌دهیم . وازاینجا کسرهای «یك چندم» یا « کسرهای مصری» نتیجه می‌شود . و جواب معادلهٔ $bq=a$ عبارت خواهد شداز

$$q=a \cdot \frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

عنصر $\frac{a}{b}$ راکسر می‌نامیم .

۲ـ از رابطهٔ : $bq=a$ رابطهٔ :

$$mbq=ma$$

نتیجه می‌شود وخواهیم داشت :

$$q=\frac{a}{b} \iff q=\frac{ma}{mb} \text{ و } m\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} q=\frac{a}{b} \\ q=\frac{a'}{b'} \end{array}\right\} \Longrightarrow q=\frac{a'b}{bb'}=\frac{ab'}{bb'}$$

۳ـ جمع دو کسر با مخرجهای متساوی :

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}=\frac{a+a'}{b}$$

۴ـ جمع دو کسر با مخرجهای غیرمتساوی :

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'+a'b}{bb'}$$

۵ ـ کسرهای به صورت $\frac{0}{q}$ نسبت به عمل جمع عنصرهای بی‌اثرهستند .

۶ـ ضرب دو کسر :

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'}$$

۷ـ اگر یکی از عاملهای ضرب ، کسرصفر باشد حاصل ضرب نیز کسر صفر است وبرعکس :

$$(\frac{a}{b})(\frac{0}{q})=\frac{0}{p}$$

$$[a\neq 0 \text{ و } (\frac{a}{b})(\frac{p}{q})=\frac{0}{n}] \Longrightarrow [p=0]$$

۸ـ اعداد منطق :

در مجموعهٔ Q . کسرهای معادل طبقه‌ای را تشکیل می‌دهند که هر یك از این کسرهای معادل ، معرف آن طبقه می‌باشد .

هریك از طبقات مجموعهٔ Q را یك عدد منطق می‌نامیم.

طبقهٔ کسرهای صفر ، عدد منطق $\frac{0}{1}$ است . طبقهٔ کسرهایی که برای عمل ضرب عنصربی‌اثر هستند عدد منطق $\frac{1}{1}$ است .

یك عدد طبیعی مثل a به صورت عدد منطق $\frac{a}{1}$ نمایش داده می‌شود که معرف طبقهٔ $\frac{2a}{2}$ و $\frac{3a}{3}$ و... می‌باشد .

۹ ـ اعداد منطق مثبت و منفی ـ یك عدد منطق مثبت نامیده می‌شود هرگاه کسرهائی که آنرا نشان می‌دهند دارای دو جملهٔ هم‌علامت باشند ، در این حالت این کسرها نیز مثبت نامیده می‌شوند . کسرهایی که دارای دو جملهٔ مختلف العلامت هستند و اعداد منطق تظیر آنها ، منفی نامیده می‌شوند :

$$[\frac{a}{b}<\frac{c}{d}] \leftrightarrow [(\frac{c}{d})-(\frac{a}{b}) \text{ مثبت است}]$$

و اگر p و o دو عدد منطق باشند

$$[p<o] \Longleftrightarrow [o-p \text{ مثبت است}]$$

ب ـ آنچه که نتیجه می گیریم :

۱ ـ تفریق کسرها :

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=(\frac{a}{b})+(\frac{-a'}{b'})=\frac{ab'-a'b}{bb'}$$

۲ ـ **تقسیم کسرها** ـ داریم :

$$a\neq 0 ,\ (\frac{a}{b})(\frac{b}{a})=\frac{n}{n}=1$$

نتیجه می‌گیریم که :

$$[a'\neq 0 , (\frac{a'}{b'})(\frac{u}{v})=\frac{a}{b}] \Longrightarrow [\frac{u}{v}=(\frac{a}{b})(\frac{b'}{a'})]$$

۳ ـ قضیه ـ مجموعهٔ اعداد منطق ارشمیدسی‌است .

۴ ـ قضیه ـ بین دوعدد منطق دلخواه ، اعداد منطقی وجود دارند : اگر r عدد منطق مفروضی باشد ، در ازاء هر مقدار مثبت و دلخواه ε ، بین $r-\varepsilon$ و $r+\varepsilon$ اعداد منطقی وجود خواهند داشت .

۴ ـ مجموعه R ، اعداد حقیقی

اگر اندازهٔ هریك از ضلعهای مربعی یك واحد باشد اندازهٔ قطر آن عددی است مانند x به قسمی که $x^2=2$ ، هیچ عددصحیح وهمچنین هیچ عددمنطقی دراین‌معادله صدق‌نمی‌کند.

اگر a عددی طبیعی باشد برای اینکه معادلهٔ $x^2=a$ همواره دارای جواب باشد مجموعهٔ R اعداد حقیقی را وضع می‌کنیم :

۱ ـ تعریف فراگیریك مجموعه ـ اگر m بزرگتر یامساوی باهرعنصری‌ازیك‌مجموعهٔ‌مرتب‌باشد، m را یك‌فراگیر

این مجموعه می نامیم و می گوئیم مجموعه توسط m فراگرفته شده است. چنانچه یك فراگیر مجموعه به آن تعلق داشته باشد بزرگترین عنصر آن خواهد بود .

۲ ـ **اصل** ـ هر زیرمجموعهٔ فراگرفته شده یك کوچکترین فراگیر دارد؛

هر زیرمجموعهٔ فراگرفته شده‌ای از Q یك کوچکترین فراگیر دارد که به R تعلق داشته از Q مستثنی است .

هر زیر مجموعهٔ فراگرفته شده‌ای از R یك کوچکترین فراگیر دارد که به R تعلق دارد.

این کوچکترین فراگیر را **کنارهٔ بالایی** این زیرمجموعه می نامیم .

۳ ـ اگر در مجموعهٔ Q اعداد منطق ، معادلهٔ $x^2=a$ ، a عدد صحیح مثبت ، دارای جواب نباشد . مجموعهٔ Q به دو طبقهٔ Q' و Q'' تقسیم می‌شود : Q' شامل اعداد q' است که $q'^2<a$ ، Q'' شامل اعداد q'' است که $q''^2>a$.

مجموعهٔ Q' بزرگترین عنصر ندارد . مجموعهٔ Q'' هم کوچکترین عنصر ندارد .

نظیر هر عنصر q' از Q' یك عنصر q'' از Q'' وجود دارد به قسمی که در ازاء هر مقدار از عدد منطق مثبت ودلخواه ε داشته باشیم : $q''-q'<\varepsilon$ یعنی زوج q' و q'' را می‌توان چنان انتخاب کرد که $q''-q'$ به سمت صفر میل کند .

بنابر اصل فوق الذکر . Q' دارای کوچکترین فراگیری مانند r است که به R تعلق دارد (ویه Q تعلق ندارد) وچون هر عدد q'' فراگیر Q' است بنا براین از r بزرگتر است و نتیجه خواهیم گرفت که : $q'<r<q''$. عدد r منحصر به فرد است ، یعنی در R یك عدد وجود دارد که :

$$\forall q'\in Q' \text{ و } \forall q''\in Q'' : q'^2<r^2<q''^2$$

و چون $q'^2<a<q''^2$ پس :

$$\forall\varepsilon ,\ 0<|a-r^2|<q''^2-q'^2<\varepsilon .$$

و نتیجه خواهیم گرفت که $r^2=a$ یعنی اینکه r ریشهٔ معادلهٔ $x^2=a$ بوده و تنها ریشهٔ مثبت آن می‌باشد که به صورت $r=\sqrt{a}$ نوشته می‌شود . معادله یك ریشهٔ منفی نیز دارد که به صورت $-\sqrt{a}$ نوشته می‌شود .

۴ ـ ثابت می‌شود که برای هر عدد حقیقی مثبتی ریشهٔ سوم ، ریشهٔ چهارم و ... وریشهٔ n ام وجود دارد .

۵ ـ **قضیه** ـ مجموعهٔ اعداد حقیقی ارشمیدسی است .

۶ ـ **فاصله** ـ اگر a و b دو عدد متعلق به مجموعهٔ R باشند مجموعهٔ اعداد حقیقی بین a و b را فاصلهٔ a و b گفته به صورت (a و b) می‌نویسیم و دقیقتر چنین می گوئیم :

فاصلهٔ بسته : $a\leq x\leq b\Leftrightarrow x\in[a \text{ و } b]$

فاصلهٔ باز : $a<x<b\Leftrightarrow x\in]a \text{ و } b[$

فاصلهٔ از چپ بسته وازراست باز، $[a \text{ و } b[$ یعنی مجموعهٔ x هایی که $a\leq x<b$ و فاصلهٔ از چپ باز و ازراست بسته یعنی مجموعهٔ x هائی که $a<x\leq b$ باشد .

۷ ـ رشته‌ای از فاصله‌های

$(a_1 \text{ و } b_1)$ و $(a_2 \text{ و } b_2)$ و ... و $(a_n \text{ و } b_n)$

را با شرط :

$$a_1<a_2<\dots<a_n<\dots<b_n<\dots<b_2<b_1$$

را رشته فاصله‌های متمارك می‌نامیم .

۸ ـ **قضیه** ـ یك رشته فاصله‌های متمارك که طول آن به سمت صفر میل می کند مفروض است . یك وفقط یك عدد حقیقی وجود دارد که داخل همهٔ این فواصل می‌باشد .

۹ ـ **قضیه** ـ اگر r عددی حقیقی باشد در ازاء هر مقدار مثبت ودلخواه ε درفاصلهٔ $(r-\varepsilon \text{ و } r+\varepsilon)$ اعداد منطقی وجود دارند .

اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

۱۷ـ هندسهٔ ترسیمی Descriptive Geometry

Projection	تصویر
Plane of Projection	صفحهٔ تصویر
Orthographic Projection (orthogonal)	تصویر قائم
Projector	مصور
Ground Line (Reference line)	خطالارض
Horizontal Plane	صفحهٔ افقی
Frontal Plane (vertical)	صفحهٔ قائم
Profile Plane	صفحهٔ نیمرخ
Frontal line	خط جبهی
Trace	اثر
Level line	افقیه
Line of maximum inclination	خط بزرگترین شیب
Axial Plane	صفحهٔ ماربر خطالارض
Bisecting Plane	صفحهٔ نیمساز
Visible	مرئی
Hidden	مخفی
Opaque	کدر
Revolution	دوران
Transformation of Projections	تغییرصفحه
Intersection	فصل مشترك
Auxiliary Plane	صفحهٔ کمکی

«EXERCISES»

1- Construct a plane β , parallel to a given plane α and situated 20 mm from it .

2- Determine the angle formed by the plane of triangle ABC with plane α given by traces .

3- When can the shortest distance between two non - intersecting lines can be determined by introducing only one new plane of projection ?



داستانی از کاربرد

منحنی گوس

اثر : ژرژگامو

ترجمهٔ ازفرانسه

آنچه درزیرمی‌خوانیدداستان واقعه‌یی است که‌پس‌ازجنگ جهانی‌دوم‌درهامبورگ‌روی‌داده‌و آقای **ك.ل.** آنرا روایت کرده است . جنگ به پایان رسیده بود اما بحران اقتصادی دربیشتر کشورها ادامه داشت .آلمان که جنگ را باخته‌بود دارای وضع اقتصادی خرابتری بود ومقررات جیره بندی مواد غذائی درآن کشور به شدت اجرا می‌شد . نان ، مایحتاج اولیهٔ آدمی نیز جزء مواد جیره بندی بود . برای هرآلمانی۲۰۰ گرم نان‌در روز تعیین شده بود . نانواها موظف بودند قالبهای مخصوصی تهیه‌کرده و با آنها قرص‌های نان به وزن دقیق ۲۰۰ گرم را را فراهم‌آورند و به هریك از مصرف‌کنندگان ، در روز فقط یك قرص بفروشند .

دکتر کارل- خ . استاد سالخوردهٔ فیزیك، هرروزصبح درراه رفتن به دانشگاه ، به نانوائی مراجعه می‌کرد وجیرهٔ روزانهٔ نان خودرا دریافت می‌داشت . روزی استاد ، نانوارا به دغلکاری متهم ساخته اعلام داشت که وی نسبت به مشتریان خود خیانت روا می‌دارد . استاد مدعی شد که قالبهای نانوا به نسبت پنج درصد از اندازه‌ای که باید نانهای دویست گرمی را تهیه کند کوچکتر است و از این راه مقداری آرد ذخیره می‌شود که نانوا آنرا دربازار سیاه به فروش می‌رساند .

نانوا با عصبانیت اتهام استاد را ردکرد واظهارداشت که هیچ نانوائی قادر نیست نانهایی را ازیك قالب بیرون بیاورد که همه دقیقاً هموزن باشند ؛ عوامل مختلف در پخت نان مؤثرند،در نتیجه ، بعضی ازقرصهای نان کمی بیش از ۲۰۰ گرم و بعضی کمتر ازآن وزن دارند .

استاد گفتهٔ نانوارا تصدیق کرد و اضافه نمودکه وی با ترازوی‌آزمایشگاهی همهٔ نانهایی‌راکه دراین دو سه‌ماه دریافت داشته وزن کرده ونمودارآنرا رسم کرده است . وزن نانها بین ۱۸۵ تا ۲۰۵ گرم در تغییر بوده است و منحنی حاصل نشان می‌دهدکه میانگین وزن نانها ۱۹۵ گرم می‌باشد نه۲۰۰ گرم. استاد درپایان اظهارات خود به نانوا توصیه کردکه قالبهای خودرا طبق اندازهٔ مقرر تهیه‌کند والا گزارش تقلب وی را به ادارهٔ جیره‌بندی تسلیم خواهدکرد .

نانوا قول دادکه فردای‌آن روز این‌کاررا انجام دهد و به پروفسور اطمینان دادکه دیگر این تقلب را ادامه‌نخواهد داد .

چند ماه بعدازآن ، پرفسور به نانوا اطلاع دادکه وی را به عنوان یك فرد متقلب کم‌فروش به ادارهٔ جیره‌بندی معرفی کرده است ؛ زیرا وی برخلاف قول خود قالبهای نان راعوض نکرده و به‌کارکم فروشی خود ادامه داده است .

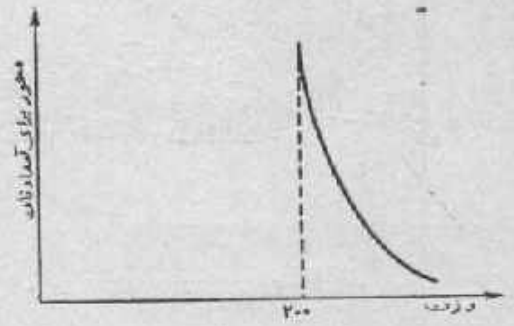
نانوا درحالی که متحیر شده بود اظهار داشت که پرفسور

نمی‌تواند ادعای خودرا ثابت‌کند ، برای این‌کار دلیلی‌دردست ندارد ودر ضمن تأکیدکردکه هیچیک از قرصهای نانی‌که در ماههای اخیر به پرفسور داده از۲۰۰ گرم‌سبکتر نبوده‌است

پروفسور گفت : «درست‌است‌که همهٔ قرصهای نانی‌که در این دوسه ماه دریافت داشته‌ام هر یك بیش از ۲۰۰ گرم وزن داشته است اما این دلیل برآن نیست‌که شما قالبهای خود را عوض‌کرده‌اید . شما قرصهای سنگین نان را سواکرده به من فروخته‌اید و به‌مشتریان دیگر خود قرصهای سبکتر را تحویل داده‌اید .»

نانوا گفت‌که این ادعای پروفسور را باور نخواهدکرد زیرا دلیلی براثبات آن وجود ندارد .

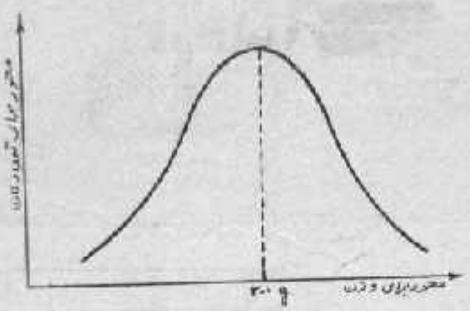
پروفسور ازکیف خود صفحهٔ کاغذی راکه روی آن یك نمودار رسم شده بود «شکل۱» بیرون آورده‌چنین توضیح داد:



(ش۱)

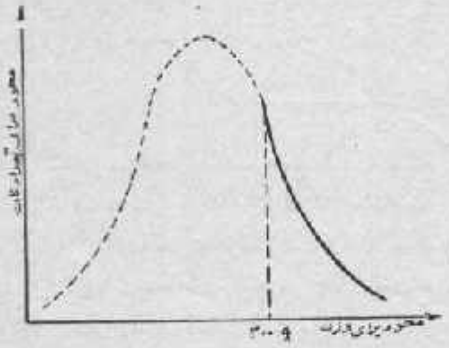
«نگاه‌کنید ، این نمودار تغییرات وزن نانهایی است‌که من در ماههای اخیر ازشمادریافت‌داشته‌ام .»

بنابر آنچه‌که **گوس** ریاضیدان بزرك ثابت‌کرده است اگر قرصهای معمولی نان‌که شما تهیه می‌کنید ۲۰۰ گرم وزن داشت و قرصهای نانی‌که به من فروخته‌اید تصادفی انتخاب‌شده بود در این صورت یك چنین منحنی (شکل۲) رسم می شدکه به نام **منحنی گوس** معروف است .



(ش۲)

اما منحنی شکل (۱) که‌ازچپ محدود است و از طرف راست تصاعدی نزول می‌کند نه تنها نیمهٔ راست منحنی‌گوس نیست بلکه قسمتی از دنبالهٔ انتهایی این منحنی می‌باشد و از روی آن می‌توان تمام منحنی‌گوس را برای وزن نانهایی‌که شما می فروشید رسم‌کرد (شکل۳) این منحنی نشان می‌دهدکه



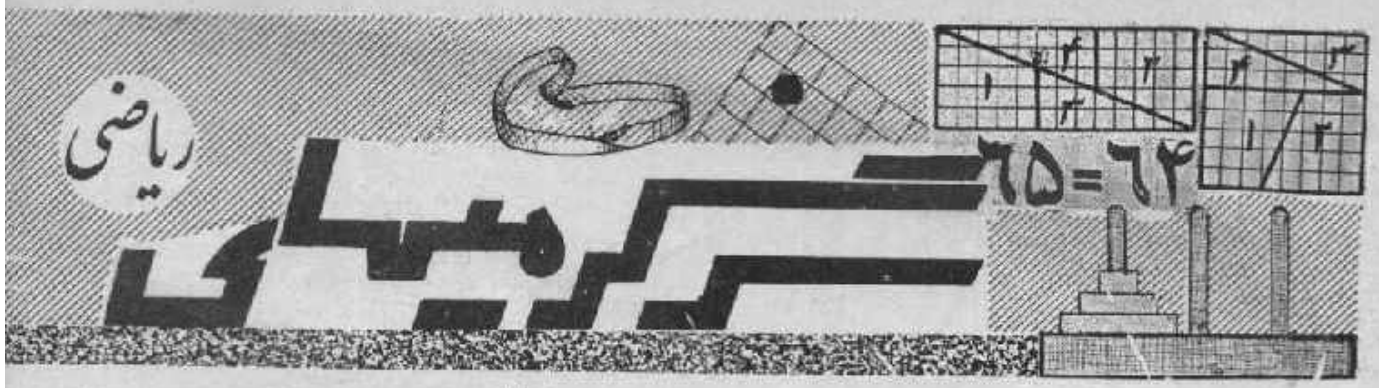
(ش۳)

میانگین وزن نانهایی که شما می‌فروشید کمتر از ۲۰۰ گرم می باشد. کم‌فروشی‌شما محقق‌می‌شود و مسلماً به‌مجازات‌خواهید رسید . خداحافظ ،دوست من !»

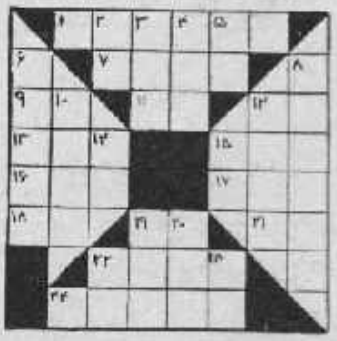
چرا چنین است ؟

$$\frac{\log_{۱۳}۱۲+\log_{۱۴}۱۳+\log_{۱۵}۱۴-\log_{۱۳}۲۱-\log_{۱۴}۳۱-\log_{۱۵}۴۱}{\log_{۱۳}۲۴+\log_{۱۴}۲۶+\log_{۱۵}۲۸-\log_{۱۳}۴۲-\log_{۱۴}۶۲-\log_{۱۵}۸۲}=۱$$

(اصغر بنائی)



جدول اعداد



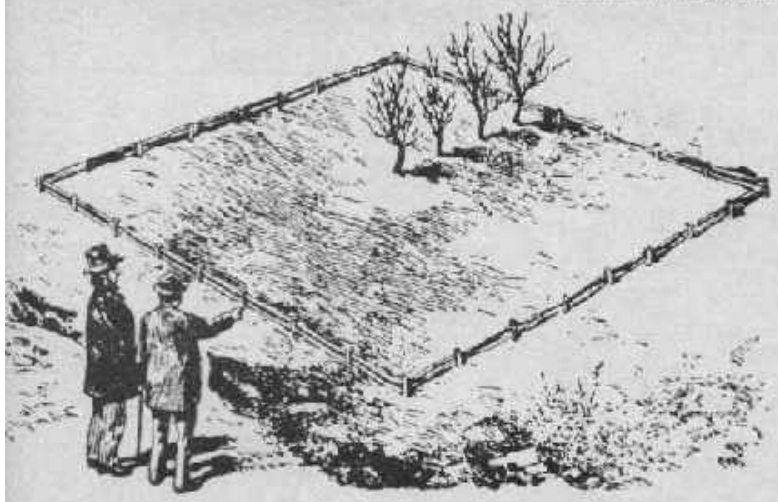
طرح از: سیدجمال آشفته دانش آموز دبیرستان تقوی

افقی : ـ حاصل ضرب ۲۰ درسه عدد اول دو رقمی مختوم به سه . ۷ ـ ارقام آن در رابطهٔ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}<1$$

صدق می کنند ۹ ـ حجم مکعب مستطیلی که سطح کل آن ۸۲ و ابعادش با ۲ و ۳ و ۷ متناسبند ۱۱ ـ اگر جای ارقامش عوض شود نه واحد اضافه گردد . ۱۲ ـ یکان به حساب ابجد . ۱۳ ـ مجموع ارقامش ۱۶ و بر ۵ قابل قسمت است . ۱۵ ـ حاصل ضرب دو عدد اول . ۱۶ ـ رویهم ۲۰ مقسوم علیه دارد و نصفش مکعب کامل بوده در تجزیهٔ آن فقط دو عامل وجود دارد . ۱۷ ـ عددی که از دو رقم سمت چپ آن تشکیل می‌شود دو برابر رقم یکانش است . ۱۸ ـ از نه برابر مجموع ارقامش یک واحد بیشتر است . به هر توانی که برسد سمت راست حاصل قرار می گیرد . ۲۱ ـ عددی اول . ۲۲ ـ مربع کامل است و بر توان ششم یک عدد و بر توان چهارم عدد دیگر قابل قسمت است . ۲۴ ـ توان ششم رقم یکان خود می‌باشد .

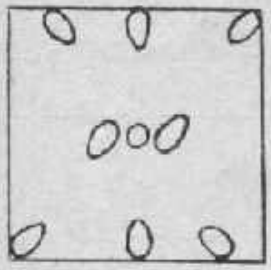
قائم ۲ ـ : مقلوب ۱۲ افقی . ۳ ـ بر توان ششم عددی قابل قسمت است و مقلوبش دو رقمی است. ۴ ـ مجذور اولین عدد اول دو رقمی . ۵ ـ عدد ۹ افقی . ۶ ـ عددی است متقارن ۸ ـ مکعب بزرگترین عدد اول دو رقمی . ۱۰ ـ توان سوم جذر عدد ۴ قائم . ۱۲ ـ عدد ۷ افقی . ۱۴ ـ چهار برابر یک عدد اول ۱۵ ـ تکرار یک رقم . ۱۹ ـ مکعب کامل . ۲۰ ـ شش برابر مکعب عدد ۸ قائم . ۲۲ ـ تکرار یک رقم . ۲۳ ـ نه برابر جذر ۱۹ افقی .



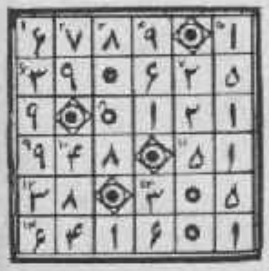
تقسیم مزرعه

چهار برادر مزرعهٔ مربع شکلی را به ارث برده‌اند که در آن چهار درخت مطابق شکل بالا وجود دارد . این مزرعه را چگونه بین خود تقسیم کنند که قسمتهای آنها هم از لحاظ شکل و هم از لحاظ سطح با یکدیگر مساوی بوده و در هر قسمت یکی از درختها وجود داشته باشد .

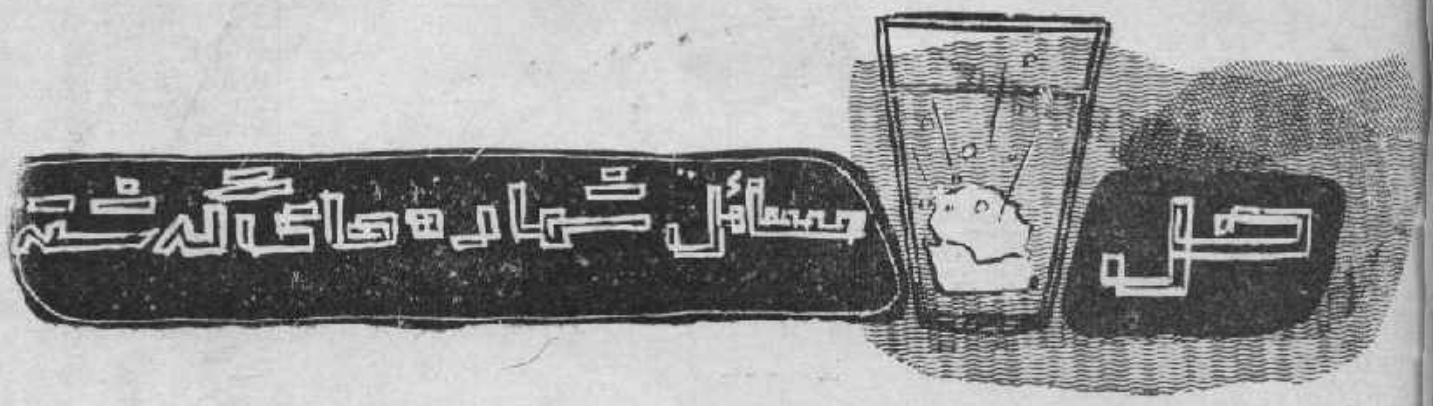
پاسخ مسئلهٔ «تخم مرغ کریستف کلمب»



بازیکن اول ، اولین تخم ـ مرغ را برمرکز سفره چنان قرار می‌دهد که تقارن شکل سفره محفوظ بماند (برای اینکار مجبور است که تخم مرغ را به‌طور قائم مستقر کند. چگونه ؟) و بعد نفر دوم هر تخم مرغ را در هر کجای سفره گذاشت، نفر اول تخم مرغ خود را چنان قرار می‌دهد که درست قرینهٔ تخم مرغ رقیب نسبت به مرکز سفره باشد و به‌این ترتیب آخرین نفری خواهد بود که تخم مرغ خود را روی سفره جا می‌دهد .



حل جدول شماره قبل



اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل آن در این شماره درج نشده است به‌یکی ازعلل زیرمی‌باشد :
راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است ، روی ورقه‌ای‌که حل مسئله‌را نوشته‌اید نام‌وکلاس‌خود را یاد داشت نکرده‌اید ، مسئله مربوط به‌کلاس‌پائین‌تر ازکلاس خود راحل‌کرده‌اید ، نامهٔ شما دیرتر ازمهلت مقرر به دست‌ما رسیده است .

حل مسائل یکان شمارهٔ ۲۴

کلاس چهارم طبیعی

۳۶۹۰ در صورتی‌که مقادیر m و $m+1$ و $m-1$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی ازیک تصاعد هندسی باشندثابت کنید که معادله :

$$mx^2-2(m+1)x+m-1=0$$

ریشهٔ مضاعف دارد . مقدار این ریشهٔ مضاعف راتعیین‌کنید .

حل ـ داریم :

$$\Delta=(m+1)^2-m(m-1)$$

$$(m+1)^2=m(m-1)\Rightarrow\Delta=0$$

پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف است :

$$x'=x''=\frac{-b'}{a}=\frac{m+1}{m}$$

از رابطهٔ $\Delta=0$ نتیجه می‌شود : $m=\frac{-1}{3}$ واگراین مقدار m را در رابطهٔ بالابگذاریم !

$$x'=x''=-2$$

پاسخهای درست رسیده :
اعظم آشفته‌ـ محمد مهدی عابدی‌نژاد ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی دبیرستان بهمن قلهک ـ عبدالمجید فراز دل دبیرستان بامداد تهران ـ محمد تقی طیب دبیرستان هدف ۱ ـ جمشید پرویزی‌دبیرستان البرز ـ تورج شفیق نوبری دبیرستان‌هدف۱ ایرج گلچهره دبیرستان قروغی ـ نصرالله صائبی دبیرستان هدف ۳جواد حساس دبیرستان ۱۵ بهمن رودسر ـ علی‌فیروزی دبیرستان ۱۵ بهمن بهشهر ـ حجت عادلی دبیرستان مهرگان لاهیجان ـ حسن جعفری ـ محمد مقدسی ـ جلال‌اشجعی‌ـژوزف صالح ـ محمد گرمه‌ای دبیرستان‌کورش دامغان ـ م. زوار زاده دبیرستان هدف ۱ .

۳۶۹۱ ـ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A و به‌اضلاع $AB=36$ و $AC=48$ مفروض است عمود منصف BC را رسم می‌کنیم‌که ضلع AC را در D و امتداد ضلع AB را در E قطع‌می‌کند .

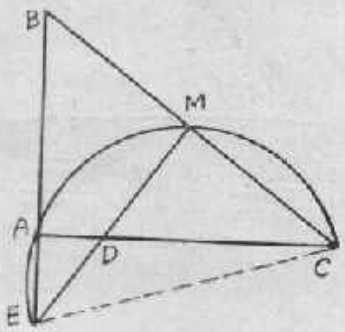
۱) ثابت‌کنید مثلثهای ABC و EAD متشابهند .

۲) ثابت‌کنید دایرهٔ محیطی مثلث AEC برنقطهٔ M وسط BC می‌گذرد وطول شعاع این دایره را حساب‌کنید.

۳) نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $\alpha=ACE$ را پیدا کنید .

حل ۱ـ) دو زاویهٔ ACB وAED که‌هردومتمم زاویهٔ

ABC هستند مساویند



پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مزبور متشابه می‌شوند

۲) چون زاویهٔ A قائمه است پس دایرهٔ محیطی مثلث AEC به قطر EC بوده و چون زاویهٔ EMC نیز قائمه است پس این دایره از نقطهٔ M نیز می‌گذرد و شعاع آن برابر است با نصف EC . طولهای EC و BE برابرند و در مثلث AEC می‌توانیم بنویسیم :

$$EC^2=(EC-36)^2+48^2\Longrightarrow EC=50$$

یعنی اندازهٔ شعاع دایره برابر ۲۵ است .

۳) $AE=50-36=14$

$$\sin\alpha=\frac{AE}{EC}=\frac{7}{25}\ ,\ \cos\alpha=\frac{24}{25}\ ,\ tg\alpha=\frac{7}{24}$$

پاسخهای درست رسیده :

رضا اصلانی دبیرستان هدف ۱ . منوچهر سلوکی دبیرستان خوارزمی ۲ . هوشنگ عدلی دبیرستان آزمون . محمدعلی عبائیان دبیرستان پهلوی بهبهان . حمید انصاری دبیرستان الهی . پرویز مرادی جنگرو دبیرستان هدف ۱ . حجت عادلی محمد مهدی عابدی نژاد . محمدتقی طیب . جمشید پرویزی ـ ایرج گلچهره . علی‌فیروزی . حسن جعفری . محمد مقدسی جلال اشجعی . محمد گرمه‌ای .

کلاس چهارم ریاضی

۳۶۹۲ـ ۱) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ضرایب آن تصاعد حسابی تشکیل دهند و به فرض اینکه این معادله دارای ریشهٔ مضاعف باشد مقدار این ریشهٔ مضاعف را حساب کنید .

۲) مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که در آن طول وتر برابر با مقدار معلوم a بوده و تانژانت یکی از زاویه‌های حاده برابر با قدر مطلق ریشهٔ مضاعف مزبور باشد . طول ارتفاع وارد بروتر این مثلث را بر حسب a محاسبه کرده واز روی آن اندازهٔ هریك اززاویه‌های حادهٔ مثلث را پیداکنید.

حل ـ ۱) معادله را به‌صورت زیر اختیار می‌کنیم .

$$(m-d)x^2+mx+m+d=0$$

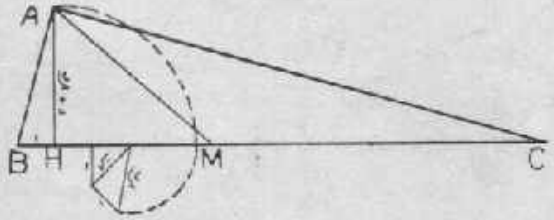
$$\Delta=m^2-4(m^2-d^2)=0\Longrightarrow d=\pm\frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$x'-x''=\frac{-m}{2(m-d)}-\frac{-m}{2m-m\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-1}{2-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

۲) چون $|-2-\sqrt{3}|\ ,\ |2+\sqrt{3}|=1$ است پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ مطلوب اگر تانژانت یك‌زاویه برابر با $|-2+\sqrt{3}|$ باشد تانژانت زاویهٔ حادهٔ دیگر برابر با $|-2-\sqrt{3}|$ خواهد بود .

ترسیم این مثلث مطابق شکل زیر است . برای محاسبهٔ



AH چنین می‌نویسیم :

$$\frac{AH}{AB}=\frac{HC}{AC}\Longrightarrow AH=(2+\sqrt{3})HC$$

از طرفی داریم:

$$AH^2=HC\cdot(a-HC)$$

از این دو تساوی نتیجه میشود $AH=\frac{a}{2}$ اگرمیانهٔ AM ضلع BC را رسم کنیم $AM=\frac{a}{2}$ بوده و $AH=\frac{AM}{2}$ می‌شود و در نتیجه $AMH=30^\circ$ و $ABC=15^\circ$ و $BCA=75^\circ$

پاسخهای درست رسیده :

بیژن آرام دبیرستان البرز . محمد نمازی . علی‌فیروزی محمد مهدی عابدی‌نژاد . جلال اشجعی . محمد مقدسی .

۳۶۹۳ـ جملهٔ pام یك تصاعد هندسی برابر با q وجملهٔ qام همین تصاعد برابر با p است . جملهٔ $p+q$ام این تصاعد را برحسب p و q بنویسید .

$$\begin{cases} ar^{p-1}=q \\ ar^{q-1}=p \end{cases}\qquad \begin{cases} r=(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p-q}} \\ a=\sqrt{pq}(\frac{p}{q})^{\frac{p+q-2}{2(p-q)}} \end{cases}$$

جملهٔ $(p+q)$ام به صورت :

$$ar^{p+q-1}=N$$

است پس :

$$N=\sqrt[p-q]{\frac{q^p}{p^q}}$$

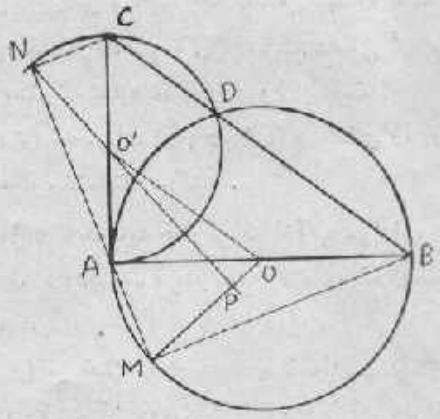
پاسخهای درست رسیده :

عبدالمجید فرازدل ـ حمید انصاری ـ محمود نمـازی ـ محمد ایکاء ـ حسن جعفری ـ جلال اشجعی .

۳۶۹۴ـ مثلث ABC که در آن زاویهٔ A قائمه و طول اضلاع $AB=2R$ و $AC=2R'$ می‌باشد مفروض است . دایرهٔ O را به قطر AB و دایرهٔ O' را به قطر AC رسم کرده و دومین نقطهٔ تلاقی آنها را D می‌نامیم . از A قاطعی چنان رسم می‌کنیم که در خارج مثلث ABC واقع باشد . و دایرهٔ O را در M و دایرهٔ O' را در N قطع کند و خطوط OM و O'N را رسم می‌کنیم که یکدیگر را در P تلاقی می‌کنند .

۱) مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی که قاطع حول A دوران کند تعیین کنید .

۲) قاطع چه وضعی داشته باشد تا مساحت چهار ضلعی BCNM حد اکثر مقدار خودرا داشته باشد و در این حال مساحت این چهارضلعی را برحسب R و R' حساب کنید .



حل ـ ۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ANC میانهٔ NO' با نصف وتر AC مساوی بوده ونتیجه خواهیم گرفت که دو زاویهٔ ANO' و NAO' مساوی باشند . دو زاویهٔ AMO و MAO نیز با یکدیگر مساویند و چون دو زاویهٔ NAO' و MAO متمم یکدیگرند پس دو زاویهٔ ANO' و AMO نیز متمم یکدیگر بوده نتیجه می‌شود که مثلث MNP درزاویهٔ P قائمه باشد و از آنجا مکان نقطهٔ P دایره‌ای خواهد بود به قطر OO' .

۲) مساحت چهارضلعی MBCN برابراست با :

$$\frac{NC+MB}{2}\times MN$$

اگر $MN=NA+AM$ و :

$$NC=\sqrt{4R'^2-NA^2}$$

قرار داده ومقادیر مزبوررا برحسب MA و MB و R و R' حساب کنیم مساحت چهارضلعی مساوی می‌شود با :

$$S=2RR'+\left(\frac{R'+R''}{2R'}\right)\cdot MB\cdot MA$$

برای آنکه S ماکزیمم شود باید مقدار MB·MA ماکزیمم باشد یعنی مساحت مثلث AMB ماکزیمم شود یعنی M بر وسط نیمدایرهٔ AB واقع باشد ودر این‌صورت به سهولت معلوم می‌شود که P بروسط خط BC منطبق است و مقدار S مساوی می‌شود با $S_M=(R+R')^2$

پاسخهای درست رسیده :

جلال اشجعی ـ عباس کشاورز دبیرستان کورش دامغان جمشید پرویزی ـ حمید انصاری ـ محمود نمازی ـ محمد ایکاء

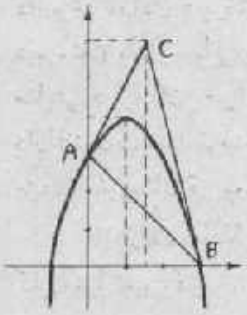
کلاس پنجم طبیعی

۳۶۹۵ـ مختصات سه رأس مثلثی عبارتست از $A(3,3)$ و $B(3,0)$ و $C(\frac{3}{2},6)$.

۱) این مثلث را رسم کرده و معادلات اضلاع آنرا بدست آورید .

۲) تابعی نسبت به x از درجهٔ دوم چنان تعیین کنید که منحنی (C) نمایش هندسی آن از B گذشته و در نقطهٔ A بر ضلع AC مماس باشد و محقق کنید که این منحنی بر BC نیز مماس است.

۳) منحنی (C) را در شکل مثلث ABC رسم کنید .



حل ـ ۱) معادلات اضلاع مثلث چنین‌خواهد شد :

ضلع AB : $y=-x+3$

ضلع AC : $y=2x+3$

ضلع BC : $y=-4x+12$

۲) فرض می‌کنیم این تابع به صورت

$$y=ax^2+bx+c$$

باشد باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} 9a+3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

و مشتق تابع عبارتست از $y'=2ax+b$ و چون منحنی بر خط AC در A مماس است مقدار مشتق درازاء طول نقطهٔ A برابر با b بوده و مساوی می‌شود با ضریب زاویهٔ خط AC یعنی $b=2$ وازآنجا خواهیم داشت :

$$a=-1 \text{ و } b=2 \text{ و } C=3$$

$$y=-x^2+2x+3$$

مختصات نقطهٔ B در منحنی بالا صدق می‌کند از طرفی مقدار مشتق تابع در ازاء $x=3$ برابر خواهد شد با -4 پس منحنی برخط BC درنقطهٔ B مماس است .

۳) جدول تغییرات تابع به شرح زیر است .

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

پاسخهای درست رسیده :

پروین سرآمد دبیرستان ولی‌الله نصر- پریچهر جمشیدی آرمن یوسفی دبیرستان کورش - ناصر و منصور نهاوندی پور غلامحسین باغانی دبیرستان نظام- فریدون امین‌زاده- محمدرضا بلورانی دبیرستان نظام - مجید فرنادی دبیرستان تربیت تبریز - غلامرضا رحیمی درآبادی دبیرستان کسری اردبیل - روح‌الله صادقلو دبیرستان کسری اردبیل - احمد میرتوانا دبیرستان هدف ۴ داریوش آزادی دبیرستان نمازی شیراز - ناصر حسینی پناه دبیرستان دکترحسابی اهواز - سید جمال‌آشنه - محمدرضا ستایشی دبیرستان بحرالعلوم بروجرد - صفرعلی لشکر بلسوکی دارالفنون - صمد فرهنج - عبدالکریم لیثی اصل - محمدرضا یزدان دبیرستان قریب - یعقوب توسلی .

۳۶۹۶ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کرده و جوابهای کلی آنرا تعیین کنید .

$$\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\sin(x+\frac{5\pi}{3})=2$$

حل ـ ۱) داریم :

$$\sin(x+\frac{5\pi}{3})=\cos(-x-\frac{7\pi}{6})=-\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

ومعادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6})-2=0$$

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6})-3=0$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1 \text{ و } \frac{3}{2}$$

جواب (۱/۵) غیرقابل قبول است و از جواب :

$$\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1$$

نتیجه می‌شود :

$$x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

پاسخهای درست رسیده :

غلامحسین باغانی - مجید فرنادی - عبدالکریم لیثی‌اصل

کلاس پنجم ریاضی

۳۶۹۷ـ۱) تابعی درجهٔ دوم چنان تعیین کنید که منحنی (C) نمایش هندسی آن ازمبدأ مختصات گذشته وبرخط Δ به معادلهٔ $y=2x+4$ در نقطهٔ تلاقی‌آن بامحور طولها مماس باشد .

۲) تابعی‌هموگرافیك چنان‌مشخص کنید که نقطهٔ $I(2-و1)$ مرکز تقارن منحنی (C') نمایش هندسی آن بوده و خط Δ مماس مشترك منحنیهای (C) و (C') باشد .

۳) منحنیهای (C) و (C') و خط Δ را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

(۴ ثابت کنید خطوطی که ازI به موازات نیمسازهای ربع اول و دوم رسم می‌شوند محور های تقارن منحنی (C') می‌باشند .

۵) بر خط $y=-x-1$ نقطه‌ای مانند P چنان‌تعیین کنید که اگر ازآن دومماس PT و PT' را برمنحنی (C') رسم کنیم زاویهٔ بین دومماس برابر با $\text{Arc}\cot g\frac{3}{4}$ باشد .

حل ـ ۱) فرض می‌کنیم تابع به صورت

$$y=ax^2+bx+c$$

باشد داریم : $c=0$ و نقطهٔ تلاقی خط : $y=2x+4$ با محور x ها نقطهٔ $M(-2 \text{ و } 0)$ است مختصات این نقطه در تابع درجهٔ ۲ باید صدق کند برابر $y'_M=2$ شود یعنی :

$$\begin{cases} ۴a-۲b=۰ \\ -۴a+b=۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۲ \end{cases} \text{ و } y=-x^۲-۲x$$

۲) چون $I(۱ \text{ و } -۲)$ مرکز تقارن منحنی است پس خطوط $y=-۲$ و $x=۱$ مجانبهای منحنی (C') هستند و تابع به صورت : $y=\dfrac{-۲x+m}{x-۱}$ است که باید m را پیدا کرد .

چون خط Δ بر منحنی (C') مماس است پس دو معادلهٔ خط و منحنی را باهم حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} y=\dfrac{-۲x+m}{x-۱} \\ y=۲x+۴ \end{cases} \Longrightarrow ۲x^۲+۴x-m-۴=۰$$

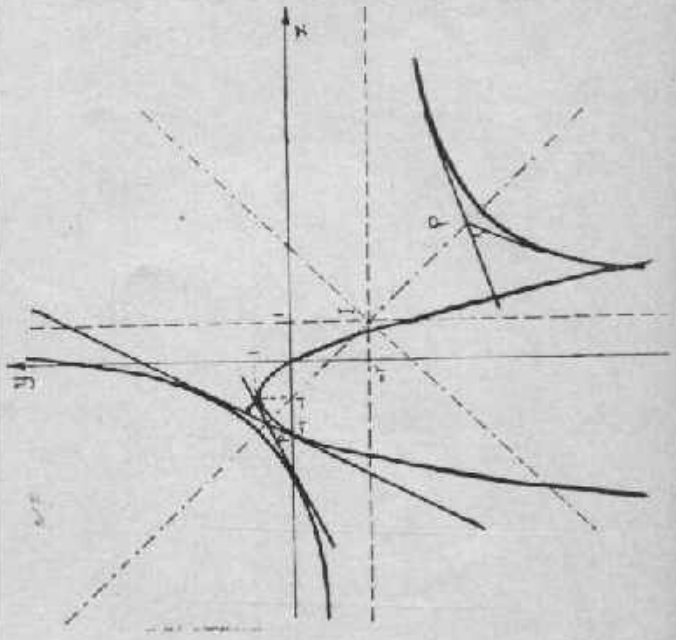
$$\Delta'=۰ \Longrightarrow m=-۶$$

پس داریم : $y=\dfrac{-۲x-۶}{x-۱}$

۳) جدول تغییرات دو تابع به شرح زیر است :

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
y'		$+$		۰		$-$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۱	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'	$+$		$+$		
y	-۲	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ -۲	



۴) ـ می‌خواهیم محور تقارن موازی با نیمساز اول را پیدا کنیم معادلهٔ کلی این خط به صورت $y=x+b$ است حال یك نقطهٔ M به مختصات $(x_۱+b \text{ و } x_۱)$ درروی این خط در نظر گرفته از آن عمودی بر $y=x+b$ رسم می‌کنیم معادلهٔ این خط به صورت :

$$y-x_۱-b=-۱(x-x_۱)$$

است برای یافتن نقطهٔ تلاقی این خط با منحنی (C') معادلات آنهارا باهم حل می‌کنیم :

$$\frac{-۲x-۶}{x-۱}-x_۱-b=-(x-x_۱)$$

معادلهٔ اخیر پس از ساده کردن به صورت

$$-x^۲+x(۳+۲x_۱+b)+۶-۲x_۱-b=۰$$

درمی‌آید شرط آنکه خط $y=x+b$ محور تقارن منحنی (C') باشد آنست که نصف مجموع ریشه های معادلهٔ اخیر مساوی با طول نقطهٔ M باشد یعنی :

$$\frac{۳+۲x_۱+b}{۲}=x_۱$$

و یا $b=-۳$ پس معادلهٔ خط به صورت $y=x-۳$ درمی‌آید .

به همین ترتیب برای محور تقارن موازی با نیمساز دوم جواب $y=-x-۱$ بدست می‌آید وهمانطور که معادلهٔ این خطوط نشان می‌دهد از I به موازات نیمساز های محور های مختصات رسم شده‌اند .

۵) چون خط $y=-x-۱$ محورتقارن منحنی است پس دو مماس PT و PT' نسبت به این خط قرینه بوده و زاویهٔ هریك ازآنها با این خط برابر است با :

$$\alpha=\frac{۱}{۲}\,\mathrm{Arc}tg\,\frac{۳}{۴} \quad \text{یا} \quad tg۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha}=\frac{۳}{۴} \Longrightarrow tg\alpha=-۳ \text{ یا } \frac{۱}{۳}$$

$$tg(D \text{ و } \Delta)=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}$$ یا -۳ و

$$\frac{۱}{۳}=\pm\frac{-۱-m'}{۱-m'}$$

برای m' مقادیر -۲ و $\frac{۱}{۲}$ بدست می‌آید .

$$y'=\frac{۸}{(x-۱)^۲}=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow x=-۳ \text{ و } ۵$$

(معادلهٔ $y'=-۲$ غیر ممکن است)

$(x=5$ و $y=-4)$ و $(x=-3$ و $y=0)$

معادلات مماسهای هرمنحنی در نقاط مزبور :

$$y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad y=\frac{x}{3}-\frac{13}{2}$$

می‌شوند که محل تلاقی آنها با خط $y=-x-1$ به ترتیب نقاط :

$$P_1(\frac{11}{3} \text{ و } \frac{-14}{3})$$

$$P_2(\frac{-5}{3} \text{ و } \frac{2}{3})$$

همان نقاط می‌باشند .

پاسخهای درست رسیده : عبدالکریم لیثی اصل.

۳۶۹۸ـ اولاً هریك ازعبارتهای زیررا ساده کنید :

$$S_1=tgx+tg(x+\frac{\pi}{3})+tg(x+\frac{2\pi}{3})$$

$$S_2=tgx\,tg(x+\frac{\pi}{3})\,tg(x+\frac{2\pi}{3})$$

$$S_3=tgx\,tg(x+\frac{\pi}{3})+tg(x+\frac{\pi}{3})\,tg(x+\frac{2\pi}{3})+tgx\,tg(x+\frac{2\pi}{3})$$

ثانیاً ـ جوابهای کلی معادلهٔ زیررا بدست آورید :

$$S_1+S_2=S_3+1$$

حل ـ اولاً پس از ساده کردن عبارات مزبور داریم :

$$S_1=\frac{3tgx(3-tg^2x)}{1-3tg^2x}=3tg3x$$

$$S_2=\frac{tgx(tg^2x-3)}{1-3tg^2x}=-tg3x \text{ و } S_3=-3$$

ثانیاً معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$2tg3x=-2 \Longrightarrow tg3x=-1$$

که ازآن جواب : $x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$ بدست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده :

داود حسینی ـ مرتضی حسینی خرمی ـ غلامرضا آدخ دبیرستان دکتر داورپناه ـ داریوش آزادی ـ محمدرضا سنایشی دبیرستان بحرالعلوم بروجرد ـ همایون مهاجری دبیرستان هدف ۳ـ احمدعیرنژاد ـ محمدرضا بلورانی ـ غلامرضا رحیمی محمد رضوانی دبیرستان مجیدی اراك ـ ناصر ومنصور تهاوندی. پور ـ صمد فرهنج دبیرستان رهنما ـ شاهین شهیدی دبیرستان هدف ۴ .

۳۶۹۹ـ از رأسهای مثلث ABC سه نیم خط متوازی Ax و By و Cz را در یك طرف صفحهٔ مثلث رسم نموده نقاط A' و B' و C' را به ترتیب روی آنها چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\alpha\cdot AA'+\beta\cdot BB'+\gamma\cdot CC'=1$$

(α و β و γ اعداد مثبت ثابت و 1 طول معلوم است) .

۱) ثابت کنید وقتی که A' و B' و C' چنان تغییر کنند که 1 ثابت بماند صفحهٔ A'B'C' ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۲) وقتی که 1 تغییر کند مکان نقطهٔ مزبوررا تعیین کنید.

۳) خط Δ را درخارج صفحهٔ مثلث ABC درنظر گرفته برآن صفحهٔ P را چنان مروردهید که اگر عمودهای AA' و BB' و CC' را برآن رسم کنیم داشته باشیم :

$$\alpha\cdot AA'+\beta\cdot BB'+\gamma\cdot CC'=1$$

حل ـ ابتدا مسئلهٔ زیررا حل می‌کنیم : روی ساق BC ازذوزنقهٔ ABCD نقطهٔ E را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{BE}{EC}=\frac{\alpha}{\beta}$$

باشد . ازE خطی به موازات قاعدهٔ ذوزنقه رسم می‌کنیم تاساق AD را در F تلاقی نماید ثابت کنید که

$$(\alpha+\beta)EF=\alpha\cdot DC+\beta\cdot AB$$

ازE خطی به موازات AD رسم می‌نمائیم تا DC و AB را در M و N قطع کند داریم :

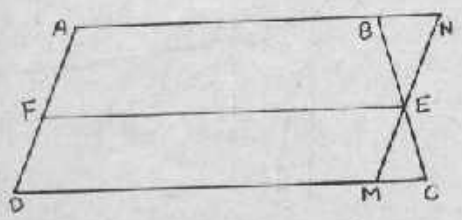
$$\frac{BN}{MC}=\frac{BE}{EC}=\frac{\alpha}{\beta}$$

و از آنجا :

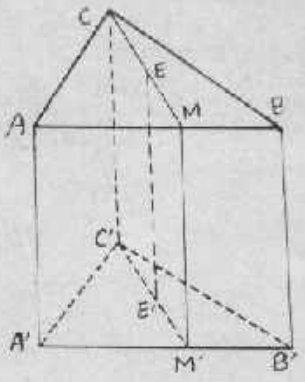
$$\frac{EF-AB}{DC-EF}=\frac{\alpha}{\beta}$$

در نتیجه :

$$(\alpha+\beta)EF=\alpha\cdot DC+\beta\cdot AB$$



حل مسئلهٔ ۱ـ)



نقطهٔ M را روی AB طوری اختیار می‌کنیم که :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{\beta}{\alpha}$$

باشد از M خطی به موازات Ax رسم می‌نمائیم تا A'B' را در M' قطع کند بموجب مسئلهٔ فوق داریم :

$$(1)\quad (\alpha+\beta)MM'=\alpha.AA'+\beta.BB'$$

حال نقطهٔ E را روی CM طوری تعیین می‌کنیم که :

$$\frac{CE}{EM}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

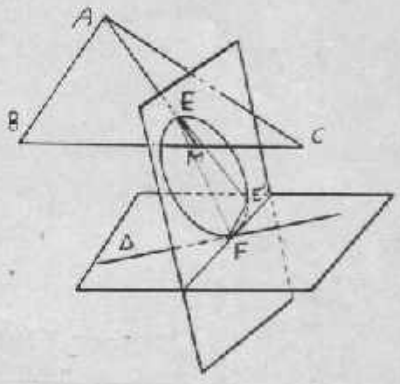
باشد و از E خطی موازی Ax رسم می‌نمائیم تا C'M' را در E' قطع کند داریم :

$$(2)\quad (\alpha+\beta+\gamma)EE'=\gamma.CC'+(\alpha+\beta).MM'$$

ازرابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که :

$$EE'=\frac{\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

و چون امتداد و طول EE' ثابت است پس E' نقطهٔ ثابتی است .



۲) وقتی 1 تغییر کند مکان E' نیم خطی است که از E به موازات Ax رسم می‌شود .

۳) بر خط Δ صفحه‌ای مرور می‌دهیم که از E به فاصلهٔ $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ باشد . این صفحه جواب مسئله است و برای رسم آن باید از E صفحهٔ R را بر Δ عمود نمائیم تا آنرا در F قطع کند در صفحهٔ R دایره‌ای به قطر EF رسم نموده وقوسی به مرکز E و به شعاع $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ می‌زنیم تا دایره را در E' قطع کند صفحه‌ای که بر Δ و E' بگذرد جواب مسئله است .

پاسخهای درست رسیده :

فقط دو پاسخ ناقص رسیده است .

کلاس ششم طبیعی

۳۷۰۰ـ اولاً سهمی (p) به‌معادلهٔ زیر را رسم کنید .

$$y^2-2y+4x+9=0$$

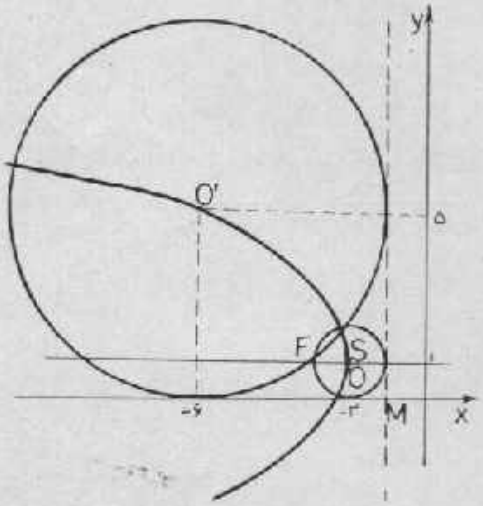
ثانیاً معادلهٔ دایره‌ای را تعیین کنید که مرکزش بر سهمی (p) واقع بوده بر خط هادی سهمی و برمحور x'x مماس باشد. دوجواب بدست خواهید آورد . دایره‌های نظیررا درشکل‌سهمی رسم کنید .

حل ـ معادلهٔ سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$(y-1)^2=-4(x+2)$$

پس نقطهٔ به مختصات (۱ و ۲ −) رأس سهمی بوده و کانون سهمی نقطهٔ (۱ و ۳ −)F و معادلهٔ خط هادی آن به صورت $x=-1$ است .

ثانیاً ـ محل تقاطع خط هادی را با محور x'x نقطهٔ M می‌نامیم چون دایرهٔ مطلوب باید برخط هادی ومحورx'x مماس باشد پس مرکزش روی نیمساز زاویهٔ این دو خط یعنی روی خطی است که ازM به موازات‌نیمسازربع دوم رسم می‌شود ومعادلهٔ این خط چنین است : $y=-x-1$



$$\begin{cases} y=-x-1 \\ (y-1)^2+2x+8=0 \end{cases} \Longrightarrow O\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right. \text{ و } O'\left|\begin{matrix}-6\\5\end{matrix}\right.$$

چون هردایره برمحور طولها مماس باشد شعاع آن برابر است با قدر مطلق عرض مرکز دایره بنابراین $R=1$ و $R'=5$ بوده معادلات دایره‌ها چنین می‌شود :

$$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \quad \text{و} \quad (x+6)^2+(y-5)^2=25$$

پاسخهای درست رسیده :

وحید ضیاطباطبا وکیلی - م. ر. آملی - جمال آشفته .

۳۷۰۱ـ منحنی تابع $y=tg^2x$ را در فاصلهٔ :

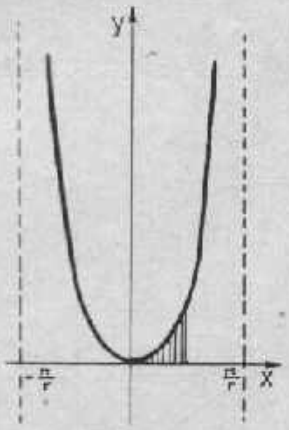
$$(\frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2})$$

رسم کنید و سطح محصور بین منحنی ومحور طولها و عرضهای نقاط به طول صفر و $\frac{\pi}{4}$ را حساب کنید.

حل -

$$y=tg^2x \quad \text{و} \quad y'=2tgx(1+tg^2x)$$

x	$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



برای تعیین سطح محصوربین محورxها وعرضهای نقاط به طول صفر و $\frac{\pi}{4}$ باید تابع اولیهٔ $y=tg^2x$ را بین‌دوحد نامبرده حساب کرد داریم :

$$y=tg^2x+1-1$$

و از آنجا :

$$Y=tgx-x+C$$

$$S_0^{\frac{\pi}{4}}=\left|(tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})-(0)\right|=1-\frac{\pi}{4}$$

پاسخهای درست رسیده :

جمال آشفته - وحید طباطبا وکیلی - م.ر. آملی - حسن نوریان دبیرستان پهلوی همدان.

کلاس ششم ریاضی

۳۷۰۲ـ در صفحهٔ محور های مختصات متعامد ، یك نقطهٔ M و خط به معادلهٔ $y=x-2$ را درنظر می‌گیریم . عمود MH را بر $x'x$ رسم می‌کنیم که Δ را در P قطع می‌کند اگر O مبدأ مختصات باشد به فرض اینکه :

$$MP=\sqrt{2}MO$$

باشد .

۱) معادلهٔ مکان M را بدست‌آورید .

۲) منحنی (C) مکان نقطهٔ M را رسم کنید .

۳) نزدیکترین نقطهٔ منحنی (C) را تا خط Δ پیدا کنید .

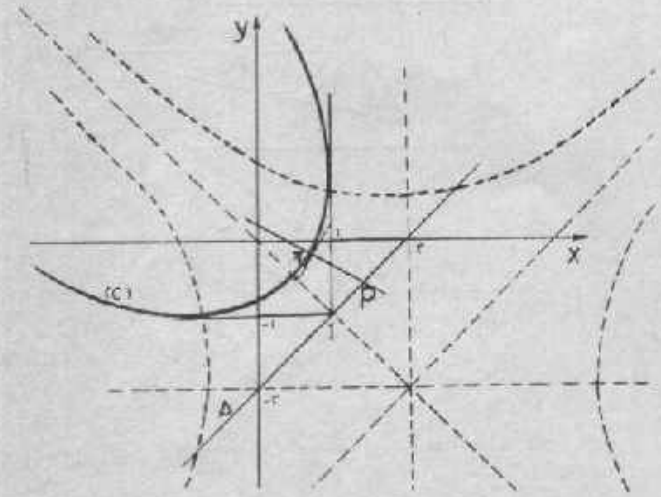
۴) ثابت کنید که نیمساز ربع دوم محورها، محورتقارن منحنی (C) است .

۵) معادلات مماسهای مرسوم از نقطهٔ $I(1 \text{ و } -1)$ را برمنحنی (C) بدست آورید .

۶) از نقطهٔ اختیاری P واقع بر Δ خطی قائم بر منحنی (C) رسم می‌کنیم به فرض اینکه این قائم درنقطهٔ $T(x \text{ و } y)$ منحنی (C) را قطع کند رابطهٔ بین x و y را بدست آورید و با استفاده ازنمودار معلوم کنید که ازهر نقطهٔ خط Δ فقطیك قائم می‌توان برمنحنی (C) رسم کرد .

حل۱ـ طول و عرض M را x و y می‌گیریم در این صورت داریم :

$$P(x \text{ و } x-2) \text{ و } MP=|y_M-y_P|=|y-x+2|$$



و $MO=\sqrt{x^2+y^2}$

پس معادلهٔ مکان M خواهد بود .

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}=|y-x+2|$$

وپس از اختصار می‌شود :

$$y=-x+2\pm 2\sqrt{2-2x}$$

۲) تابع هنگامی معین است که $x<1$ باشد .

رسم منحنی (C) منجر به رسم دو منحنی به معادلات زیر می‌شود :

$$\begin{cases} y_1=-x+2+2\sqrt{2-2x} \\ y_2=-x+2-2\sqrt{2-2x} \end{cases}$$

$$y_1'=-1-\frac{2}{\sqrt{2-2x}}<0$$

$$y_2'=-1+\frac{2}{\sqrt{2-2x}} \quad \text{و} \quad y_2'=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$		-1		0		1
y_1'		$-$		$-$		$-$	∞
y_1	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y_2'		$-$		0	$+$	$+$	∞
y_2	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	0

منحنی درشکل بالا رسم شده است .

۳) باید نقطه‌ای ازمنحنی‌را تعیین کرد که مماس برمنحنی درآن نقطه موازی با خط Δ باشد یعنی $y'=1$ باید قرار دهیم چون y_1' همیشه کوچکتر از صفر است پس $y_2'=1$ و از آنجا جواب $x=\frac{1}{2}$ و درنتیجه $y=\frac{-1}{2}$ به دست می‌آید یعنی:

$$M\left(\frac{1}{2} \text{ و } \frac{-1}{2}\right)$$

نزدیکترین نقطهٔ منحنی به خط Δ است .

۴) نقطه‌ای مانند $A(x \text{ و } y)$ برروی منحنی درنظر گرفته و مختصات قرینهٔ آنرا نسبت به نیمساز ربع دوم تعیین می‌کنیم طول و عرض نقطهٔ مزبور بترتیب $X=-y$ و $Y=-x$ می‌شوند حال می‌بینیم که مقادیر X و Y نیز در معادلهٔ منحنی (C) صدق می‌کنند پس نیمساز دوم محور تقارن منحنی است

۵ـ ازنقطهٔ $I(-1 \text{ و } 1)$ خط غیرمشخصی باضریب زاویهٔ m رسم می‌کنیم معادلهٔ این خط می‌شود :

$$y=mx-m-1$$

برای آنکه خط مزبور برمنحنی (C) مماس باشد باید معادله‌ای که ازحل دو معادلهٔ خط ومنحنی به دست می‌آید دارای ریشهٔ مضاعف باشد .

$$\begin{cases} y=mx-m-1 \\ y^2+x^2+2xy+4x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$(m^2+2m+1)x^2-2(m^2+4m-1)x+m^2+6m+1=0$$

وشرط مزبور به صورت زیر است :

$$\Delta=2m^2=0 \Longrightarrow m=0$$

و معادلهٔ یکی از خطوط مماس به صورت $y=-1$ و معادلهٔ مماس دیگر به‌صورت $x=1$ است دومماس نسبت به محورتقارن منحنی قرینه هستند .

۶ـ اگر مختصات نقطهٔ اختیاری P واقع بر خط Δ را $(\alpha \text{ و } \alpha-2)$ بگیریم معادلهٔ خط‌قائم چنین می‌شود:

$$Y-y=\frac{y-\alpha+2}{x-\alpha}(X-x)$$

وچون ضریب زاویهٔ این خط مساوی‌با $\frac{-1}{y'}$ است پس

$$\frac{y-\alpha+2}{x-\alpha}=\frac{-1}{y'}=\frac{x+y-2}{x+y+2}$$

این معادله بعد از اختصار چنین خواهد شد .

$$(x-2)^2-(y+2)^2=4-4\alpha$$

مختصات پای قائم جواب دستگاه زیر است .

$$\begin{cases} (x-2)^2-(y+2)^2=4-4\alpha \\ x^2+y^2+2xy+4x-4y-4=0 \end{cases}$$

نمایش هندسی تابع اول‌درحالت $\alpha<1$ یك هذلولی است به مرکز (۲ − و۲) که محورآن با محور $x'x$ موازی است و درحالت $\alpha>1$ هذلولی است باهمان مرکز که محورآن‌موازی با محور $y'y$ است ودرحالت $\alpha=1$ عبارت از دوخط :

$$x-2=\pm(y+2)$$

خواهد بود این نمایش هندسی را درشکل منحنی رسم می‌کنیم .

مشاهده می‌شود که در حال منحنی (C) را فقط دریك نقطه قطع می‌کند یعنی درهرحال از نقطهٔ P فقط یك قائم بر منحنی (C) رسم می‌شود .

پاسخ درست رسیده از : م. رآملی

۳۷۰۳ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کرده

جوابهای کلی کمانهای x و y را تعیین کنید .

$$\begin{cases} tg^2x = \sin^2x + \cos^2y \\ tg^2y = \sin^2y + \cos^2x \end{cases}$$

حل ـ با فرض $\sin^2x = a$ و $\sin^2y = b$ دستگاه دو معادلهٔ فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} a^2 + a + b - ab - 1 = 0 \\ b^2 + b + a - ab - 1 = 0 \end{cases}$$

و چون a و b هردو مثبت‌اند پس از دو معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود : $a = b$

و یا $a = b = \frac{1}{2}$ و ازآنجا :

$$\sin x = \pm \sin y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

از معادلهٔ اخیر با مختصر تغییراتی جوابهای :

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad و \quad y = k'\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

بدست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده :

حمیدرضا مهدوی دبیرستان البرز ـ احمد جلیلی تنها صادق‌آقا محمدی پنجم ریاضی دبیرستان وحید ـ احمد حاج‌عظیم دبیرستان هدف ۱ ـ سعید فرشاد پنجم ریاضی دبیرستان گلشن‌ازشبستر ـ جانسان بدل ـ حسن نوریان ـ پرویز خواجه خلیلی ـ م.ر. آملی ـ محمدرضا بلوردانی .

۳۷۰۴ـ عددی چهارقمی به شکل :

$$N = \overline{abcd}$$

با ارقام مختلف و مخالف صفر چنان پیداکنیدکه داشته باشیم :

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

از جوابهای حاصل دسته‌ای را انتخاب کنیدکه در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\overline{ab} + \overline{cd} = a^2 + c^2 + d^2$$

حل ـ اگر به طرفین رابطهٔ اول دوبرابر طرف اول را بیفزائیم رابطه به صورت :

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = (a + b + c + d)^2$$

درمی‌آید. ازاین رابطه پیداست‌که مجموع ارقام عدد مضرب ۳ بوده‌ومجموع‌حاصلضربهای‌دوبه دوی‌آنهانیز مضرب ۳ است اما هرچهاررقم نمی‌توانند مضرب ۳ باشند .

زیرا بین اعداد یك رقمی فقط سه عدد مضرب ۳ می‌باشد پس یکی از ارقام مضرب ۳ نخواهد بود و اگر فرض‌کنیم‌که سه رقم از چهاررقم مضرب۳ باشند مجموع آنهامضرب۳ نخواهد بود و اگر دورقم را مضرب۳ فرض‌کنیم دورقم دیگر به‌صورت $3k+1$ و $3k-1$خواهد بودودر حاصل جمع حاصلضربهای دو به دوی ارقام یك عامل $(3k-1)(3k+1)$ خواهیم‌داشت که مضرب ۳ نیست . پس تنها موردی‌که قابل قبول است آنست که فقط یك رقم مضرب ۳ باشد وسه رقم دیگر مضرب ۳نباشند درضمن نمی‌توان گفت‌که همهٔ ارقام مضرب ۳ نیستند زیرادراین صورت باید دوتا مضرب ۳ بعلاوه یك و دوتا مضرب ۳ منهای یك داشته باشیم‌که بامختصر تحقیقی معلوم می‌شودکه حاصل‌جمع حاصل ضربهای دو به دوی آنها مضرب ۳ نیست پس فقط یکی از ارقام‌مضرب۳ استواین رقم ۳ یا ۶ یا ۹ خواهدبود وسه رقم دیگر یاهرسه مضرب ۳ بعلاوهٔ یك ویا هرسه مضرب ۳ منهای یك خواهند بود یعنی سه‌رقم‌دیگر یا او ۷و۴ هستند ویا۲و۵و۸

به سهولت معلوم می‌شودکه ارقام ۹ و(۲ و ۵ و ۸) قابل قبول‌نیستند پس‌برای‌ارقام عددتنها دودسته جواب (۷و۴و۳و۱) و (۹ و ۷ و ۴ و ۱) بدست می‌آید و صحت رابطه را بوسیلهٔ این ارقام می‌توان تحقیق‌کرد . برای هریك از دودسته جواب فوق می‌توان ۲۴ عدد مختلف نوشت پس جمعاً ۴۸ عدد داریم‌که باید مابین آنها اعدادی را پیداکنیم‌که در رابطهٔ زیر صدق‌کنند :

$$\overline{ab} + \overline{cd} = a^2 + c^2 + d^2$$

ویا :

$$\overline{ab} + \overline{cd} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - b^2$$

دربارهٔ جواب (۷ و ۴ و ۳ و ۱) گوئیم مجموع مربعات ارقام برابر با ۷۵ است پس :

$$\overline{ab} + \overline{cd} = 75 - b^2$$

و b یکی از ارقام ۱ و ۳ و ۴ و ۷ است با فرض $b=1$ باید $d=3$ وهم c مساوی ۴ و۷ می‌شوند اما هیچیك ازمجموعهای $73+41$ و $43+71$ مساوی $75-1$ یعنی ۷۴ نمی‌شود پس $b=1$ غیرممکن است .

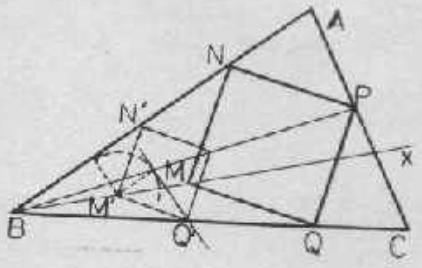
اگر $b=3$ باشد $75-9=66$ برای d نیز جواب ۳ بدست می‌آیدکه غیرممکن است . برای $b=4$ و $b=7$ نیز بهمین ترتیب استدلال می‌کنیم و معلوم می‌شودکه هیچیك از ۲۴ عددی‌که از جواب (۷ و ۴ و ۳ و ۱) بدست می‌آیندر رابطهٔ دومی صدق نمی‌کنند .

اگرجواب (۹ و۷ و۴ و ۱) را در نظر بگیریم مجموع مربعات ارقام‌مساوی ۱۴۷ بوده وبا استدلالی‌که در حالت پیش کردیم دو جواب : $N_1 = 1947$ و $N_2 = 4917$ پیدامی‌شود

که در رابطهٔ دومی نیز صدق می‌کنند .

پاسخ درست رسیده از : جمال آشتنه .

۳۷۰۴ـ مثلث ABC و خط Δ ماربر رأس B و واقع درداخل زاویهٔ B از مثلث مفروض است مربعی چنان رسم کنید



که سه رأسش بر سه ضلع مثلث و رأس دیگرش بر Δ واقع باشد .

حل ـ نقطهٔ اختیاری 'M واقع برخط Bx را در نظر می‌گیریم که و خط BA را حول نقطهٔ 'M به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران داده و محل تقاطع خط حاصل را با ضلع BC نقطهٔ 'Q می‌نامیم از 'M خطی بر 'M'Q عمود کرده ومحل تقاطعش را با BA نقطهٔ 'N می‌نامیم مربعی می‌سازیم که دو ضلعش 'M'Q و 'M'N باشند و رأس چهارم را 'P می‌نامیم خط 'BP را امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در P قطع کند در تجانس به مرکز B و به نسبت 'BP:BP مربع MNPQ بدست می‌آید که مربع مطلوب می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده :

احمد جلیلی تنها ـ جمال آشتنه ـ حسن نوریان ـ م. د. آملی.

۳۷۰۵ ـ مقیاس شیب صفحهٔ P را به موازات لبهٔ جیب کاغذ رسم کنید بطوری که شیب صفحه برابر با یك واحد واقعیهٔ رقوم ۱ آن برمحور کاغذ منطبق بوده ترقی رقوم نقاط آن ازبالا به پائین باشد .

۱) ـ ملخص مربع ABCD واقع در صفحهٔ P راچنان رسم کنید که مرکز آن O_4 به فاصلهٔ ۷ از مقیاس شیب مرسوم تصویر شود ورقوم رأس A برابر با ۱ ورقوم رأس B برابر با ۳ بوده تصویر B سمت راست تصویر A واقع شود .

۲) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABMN در صفحهٔ قائم V واقع است بنا برآنکه رقوم رأس M برابر با ۶ و رقوم رأس N برابر با ۵ باشد ملخص این ذوزنقه را رسم کنید .

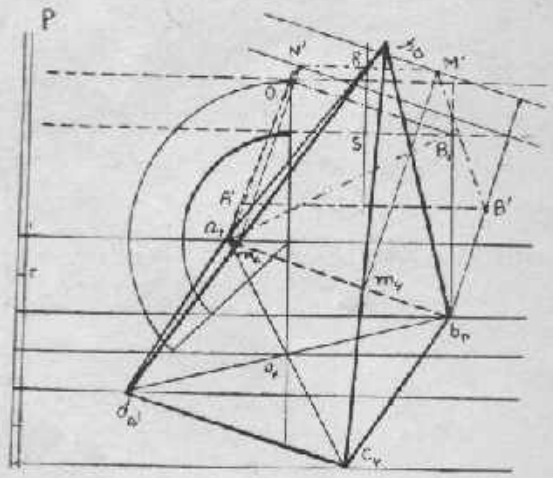
۳) ملخص هرم SABCD را رسم کنید بنابرآنکه مقطع آن با صفحهٔ V ذوزنقهٔ ABMN باشد .

(توضیح : درصورت مسئله یك قسمت که اضافی چاپ شده بود حذف شد)

حل ـ ۱) صفحهٔ P را حول افقیهٔ رقوم ۱ تسطیح می‌کنیم. به کمك دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی چنان می‌سازیم که رأس زاویهٔ قائمه‌اش نقطهٔ a_1 بوده رأس B_1 از آن برتسطیح افقیهٔ رقوم ۳ و رأس A یا a_1 ازآن برافقیهٔ رقوم ۱ واقع باشد . صفحه را ترفیع کرده شکل را کامل می‌کنیم .

۲) صفحهٔ قائم V را حول اثرش تسطیح می‌کنیم وتسطیح a_1b_2 را در 'A'B و همچنین تسطیح افقیه‌های رقم ۵ و ۶ صفحه را بدست می‌آوریم . عمود منصف 'A'B را رسم می‌کنیم تا تسطیح دو افقیهٔ مزبوررا به ترتیب در R و S قطع کند واز وسط RS سوازی 'A'B رسم می‌کنیم تا نقاط 'M و 'N بدست آمده وآنهارا ترفیع می‌کنیم

۳) خطوط d_5n_5 و c_7m_6 یکدیگر را در e_5 قطع می‌کنند و شکل راکامل می‌کنیم .



پاسخهای درست رسیده :

فرخ کیان ارثی ـ جواد محمد زاده . حسین روانی‌زاده پرویز خواجه خلیلی ـ جمال آشتنه . حجت‌الله افقهی ـ وحید طباطبا وکیلی ـ احمد حاج عظیم ـ احمد جلیلی تنها ـ رودگری آملی .

مسائل متفرقه

۳۷۰۶ ـ مطلوبست محاسبهٔ طولهای اضلاع مثلث

قائم‌الزاویه‌ای که محیط آن برابر بامقدارمعلوم $2p$ و مساحت آن برابر با مقدار معلوم q^2 باشد .

حل ـ داریم :

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ a+b+c=2p \\ bc=2q^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a^2=(b+c)^2-2bc \\ a=2p-(b+c) \\ bc=2q^2 \end{cases}$$

از تساویهای دوم وسوم مقادیر $(b+c)$ و bc را برحسب p و a و q محاسبه کرده در رابطهٔ اول قرار می‌دهیم و پس از اختصار جواب $a=\dfrac{p^2-q^2}{p}$ بدست می‌آید .

سپس از دو رابطهٔ :

$$bc=2q^2 \quad و \quad b+c=\frac{p^2+q^2}{p}$$

می‌توان b و c را حساب کرد b و c ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر اند :

$$x^2-\frac{p^2+q^2}{p}x+2q^2=0$$

این معادله اگر جواب داشته باشد هردوجواب آن مثبت خواهند بود پس شرط وجود جواب آنست که مبین معادلهٔ اخیر مثبت باشد . از این رابطه پس از اختصار نتیجهٔ :

$$p\geq\sqrt{2}(q+1)$$

بدست می‌آید . به ازای $p=\sqrt{2}(q+1)$ مثلث متساوی‌الساقین است .

پاسخهای درست رسیده :

فریبرز جمشیدی . عبدالله سعیدی . حسین علوی . احمد سالك . احمدقاضی‌زاده . نصرالله صائبی . سیدمهدی حمیدی . صادق آقا محمدی . مجیدجم . تورج شفیق نوبری . صمد حیاتی . غلامحسین باغانی . بیژن آرام . محمدتقی طیب . منوچهرسلوکی . عبدالمجید فرازدل . حجت‌الله افقهی . غلامحسین اسداللهی . احمد جلیلی تنها . عباس کشاورز . حسن نوریان . حمید رضا مهدوی . همایون مهاجری . پرویز مرادی حقگو . ابوالفضل آتشرو . محمدعلی عبائیان . حسن جعفری . جلال‌اشجعی . جمشید پرویزی . حمید انصاری . محمدابکاء . آرمن یوسفی . محمدرضا یزدان . عبدالکریم لیثی‌اصل . داود حسینی . ناصر نهاوندی پور منصور نهاوندی‌پور . شاهین‌شهیدی . محمدقلی‌قلیان . مجیدفرنادی علی‌اصغرراستکار . جابراعدائی . غلامرضا رحیمی . علی‌اصغرشاملی حسن خرمی . احمد میرنژاد . احمدماشین‌چی . مهدی راسخ عابدی‌نژاد . حسن‌عادی . جانسان بدل . رضاآلانی . نادرپهلوان نمازی . نادرمحمدی . محمدابراهیم بلتقیان . محمدرضاخمسه‌پور جمال‌آشفته . فریدون امین‌زاده .

۳۷۰۷ـ به فرض آنکه داشته باشیم

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad و \quad f(\alpha)=\beta, f(\beta)=\alpha$$

ثابت کنید که α و β در معادلهٔ زیرصدق می‌کنند :

$$a^2z^2+a(b+1)z+ac+b+1=0$$

حل ـ داریم .

$$a\alpha^2+b\alpha+c=\beta \quad و \quad a\beta^2+b\beta+c=\alpha$$

طرفین دورابطه را ازهم کم می‌کنیم :

$$a(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$$

و یا :

$$a(\alpha+\beta)+b=-1 \longrightarrow \alpha+\beta=-\frac{b+1}{a}$$

حال اگر دو رابطه را باهم جمع کنیم و بجای $\alpha+\beta$ مقدارش را از تساوی اخیر قراردهیم خواهیم داشت :

$$\alpha\beta=\frac{ac+b+1}{a^2}$$

معادلهٔ درجهٔ دومی که جوابهای آن α و β باشند به صورت زیراست :

$$z^2+\frac{b+1}{a}z+\frac{ac+b+1}{a^2}=0$$

که پس ازضرب طرفین در a^2 همان معادلهٔ داده شده در مسئله به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده :

وحید طباطبا وکیلی . احمد حاج‌عظیم . محمدعلی عبائیان محمدابکاء . غلامرضا رحیمی . محمدرضا یزدان . عبدالکریم ـ لیثی‌اصل . ناصر نهاوندی‌پور . منصور نهاوندی‌پور . علی‌اصغر شاملی . رودگری‌آملی . نمازی . فریدون امین زاده . سیدمهدی حمیدی مجید جم . غلامحسین باغانی . نادر پهلوان . جانسان بدل . رضاآلانی . مهدی راسخ . اسحق عبدالله‌پور . پرویزخواجه‌خلیلی محمد متولیان . جمال‌آشفته . محمدحسن باقری . احمد سالك احمدقاضی‌زاده . صادق آقامحمدی . صمد حیاتی . حمیدرضا مهدوی . عبدالمجید فرازدل .

۳۷۰۸ـ اگر a و b ریشه های معادلهٔ

$$x^2+px+1=0$$

و c و d ریشه های معادلهٔ :

$$x^2+qx+1=0$$

باشند صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید .

$$(a-c)(b-c)(b+d)(a+d)=q^2-p^2$$

حل ـ از رابطه

$ab=1$ و $a+b=-p$ و $cd=1$ و $c+d=-q$

استفاده کرده و طرف اول تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$[ab-c(a+b)+c^2][ab+d(a+b)+d^2]$$
$$=(c^2+pc+1)(d^2-pd+1)$$

و حاصلضرب اخیر نیز بسادگی خلاصه شده و به صورت

q^2-p^2

درمی‌آید .

پاسخهای درست رسیده :

مهناز جعفری پور . اعظم سمد نوری . علی فیروزی . وحید طباطبا وکیلی . محمد مقدسی. بهنام محسنی. حمیدرضا مهدوی ، حبیب موسی‌زاده . شاهین شهیدی . صفرعلی بارین رضا آلانی .محمدمهدی‌عابدی‌نژاد. نادرپهلوان.حسن جعفری . همایون مهاجری. احمد جلیلی تنها . پرویز مرادی حقگو . ابوالفضل آتشرو.محمدعلی‌عبائیان.مهدی راسخ .عباس کشاورز محمود نمازی . محمد ابراهیم یلقیان . فریبرز جمشیدی . محمدحسن‌باقری. پرویز بریری. عبدالله‌سعیدی. احمدقاضی‌زاده منوچهرسلوکی .جمشیدپرویزی. بختیارسلطانی. داود حسینی . آرمن یوسفی . محمدرضا یزدان . غلامحسین باغانی. لیئی‌اصل جابر اهدائی . غلامرضارحیمی. علی‌اصغر شاملی. نادرمحمدی احمد سالك . سیدی مهدی حمیدی . مجیدجم . حجت‌الله افقهی احمد حاج عظیم. غلامرضا آدخ. صادق‌آقا محمدی . صمدحیاتی غلامحسین اسداللهی . اسحق عبدالله‌پور. احمد میرنژاد. حسن خرمی . روح‌الله صادقلو. محمدرضاارباپی.مرتضی‌حسینی‌خرمی محمدتقی طیب. ناصرنهاوندی‌پور. حسین‌اسکندری. عبدالمجید فرازدل. حجت عادلی.

۳۷۰۹ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادلهٔ

$x^3+px^2+qx+r=0$

باشند مطلوبست محاسبهٔ حاصل عبارت زیر برحسب p و q و r

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

حل ـ داریم .

$a+b+c=-p$ و $ab+ac+bc=q$

و $abc=-r$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

و یا :

$$\frac{(bc+ac+ab)^2-2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}$$

و سرانجام : صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$\frac{q^2-2rp}{r^2}$$

پاسخهای درست رسیده :

وحید طباطبا وکیلی. ابوالفضل آتشرو. محمدعلی‌عبائیان محمد مقدسی. بختیارسلطانی. احمد جلیلی‌تنها. جابر اهدائی. غلامرضا رحیمی . علی‌اصغر شاملی . نادر محمدی . محمدرضا خمسه‌پور . فریدون امین‌زاده . مجیدجم . غلامحسین باغانی . بهنام محسنی . احمدسالك حبیب‌موسی‌زاده.صفرعلی‌بارین‌دهش. رضا آلانی . نادر پهلوان . حسن جعفری . محمود نمازی فریبرز جمشیدی . عبدالله سعیدی . احمدحاج عظیم . روح‌الله صادقلو. ناصرنهاوندی‌پور. حسین اسکندری. شاهین شهیدی . حانسان بدل. عابدی‌نژاد . حسن خرمی. مصطفی سرگلرائی. احمد میرنژاد. اسحق عبدالله‌پور. منوچهرسلوکی . جمال آشفته محمدحسن‌باقری. احمد قاضی‌زاده. صادق‌آقا محمدی حمیدرضا مهدوی .

۳۷۱۰ـ هرگاه x_1 و x_2 و ... و x_n جملات متوالی یك تصاعد هندسی باشند مجموع زیررا برحسب $a=x_1$ و

$$q=\frac{x_2}{x_1}$$

حساب کنید .

$$S=x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots$$
$$+x_1x_2\cdots x_{n-1}$$

حل ـ داریم :

$$S=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_1}+\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_2}+\cdots+$$
$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_n}$$

$$S=x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$x_1x_2\cdots x_n=a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

مجموع داخل پرانتز مجموع جملات تصاعدی است هندسی که جملهٔ اولش $\frac{1}{x_1}$ وقدر نسبتش $\frac{1}{q}$ وجملهٔ آخرش $\frac{1}{x_n}$ است .

مجموع جملات این تصاعد برابر است با :

$$\frac{1}{a}\times\frac{(\frac{1}{q})^{n}-1}{\frac{1}{q}-1}$$

و در نتیجه :

$$S=\frac{a^{n-1}\,q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(1-q^{n})}{1-q}$$

پاسخهای درست رسیده :

محمد مقدسی. وحید طباطبا وکیلی. علی اصغر شاملی . محمد رضا خمسه‌پور . مجید جم . احمد حاج عظیم . حسین اسکندری . حبیب موسی‌زاده . شاهرخ فاطمی . پرویز خواجه خلیلی. صمدحیاتی. صفرعلی بارین‌دهش .

۳۷۱۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\log\cos x+\log\cos 2x+\ldots\log\cos 2^{n}x=(n+1)\operatorname{colog}2$$

حل ـ طرف اول معادله به صورت :

$$\log(\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n}x)$$

نوشته می‌شود که مقدار داخل پرانتزرا به صورت زیر حساب می کنیم :

$$\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n}x=\frac{1}{2\sin x}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cdots\cos 2^{n}x$$

$$=\frac{1}{4\sin x}\sin 4x\cos 4x\cdots\cos 2^{n}x$$

به همین ترتیب خطوط مثلثاتی قوسهارا به خطوط مثلثاتی قوس دوبرابر تبدیل می کنیم تا بالاخره مقدارزیر بدست آید :

$$\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n}x=\frac{1}{2^{n+1}\sin x}\sin 2^{n+1}x$$

و معادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\log\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}=\log(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\sin 2^{n+1}x=\sin x\Longrightarrow x=\frac{2K\pi}{2^{n+1}-1}\quad\text{یا}$$

$$x=\frac{2K\pi+\pi}{2^{n+1}+1}$$

پاسخهای درست رسیده :

وحید طباطباوکیلی. نبی‌الله روحی . احمد جلیلی تنها . عباس کشاورز. محمدرضا یزدان. فریدون امین‌زاده . علی اصغر شاملی. رودگری آملی. محمدرضا خمسه‌پور. مجید جم . محمد متولیان. غلامحسین‌اسداللهی. حمیدرضا مهدوی. شاهرخ فاطمی پرویز خواجه خلیلی . احمد میرنژاد . صفرعلی باربزدهش . حانسان‌بدل. جمال آشفته . فریبرز جمشیدی . عبدالله سیودی . صادق‌آقا محمدی . صمد حیاتی . حسین اسکندری . حجت‌الله افقهی .

۳۷۱۲ـ اولا ثابت کنید که بیضی (E) وهذلولی (H) به معادلات زیر :

$$(E):\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\quad\text{و}\quad(H):2xy=ab$$

در نقطهٔ $P(\frac{a}{\sqrt{2}}\ \text{و}\ \frac{b}{\sqrt{2}})$ بریکدیگر مماس هستند .

ثانیاً خطی ازمرکز بیضی گذشته برمماس‌مشترك دومنحنی در P عمود بوده هذلولی را در Q قطع می کند. چنانچه مماس نقطهٔ Q برهذلولی بریکی ازکانونهای بیضی بگذرد ثابت کنید:

$$a^{2}=2b^{2}$$

حل ـ اولا : تحقیق می کنیم که مختصات نقطهٔ P درهردو معادله صدق کرده و بعلاوه مشتق هردو تابع به ازای مختصات نقطهٔ P متساوی می‌باشند به‌سهولت می‌شودکه P روی‌منحنیهای (E) و (H) است ونیز :

$$(E):\frac{2x}{a^{2}}+\frac{2yy'}{b^{2}}=0\Longrightarrow y'=\frac{-b^{2}x}{a^{2}y}$$

$$(H):2y+2xy'=0\Longrightarrow y'=\frac{-y}{x}$$

به ازای مختصات P مقدار مشتق برای هر دومنحنی یکی بوده و مساوی $\frac{-b}{a}$ است .

ثانیاً : خطی که ازمرکز بیضی گذشته و بر مماس در P عمود باشد دارای ضریب زاویه‌ای مساوی با $\frac{a}{b}$ است و چون مرکز بیضی برمبدأ مختصات منطبق است پس معادلهٔ این خط به صورت $y=\frac{a}{b}x$ است که هذلولی را درنقطهٔ :

$$Q(\frac{b}{\sqrt{2}}\ \text{و}\ \frac{a}{\sqrt{2}})$$

قطع می کند ومعادلهٔ مماس برهذلولی در Q به صورت :

$$y-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{-a}{b}(x-\frac{b}{\sqrt{2}})$$

است که با فرض صادق بودن مختصات یکی از کانونها را

$F(\sqrt{a^2-b^2}\ \ و\ \ 0)$

در این معادله داریم :

$$\frac{-a}{\sqrt{2}}=\frac{-a}{b}(\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b}{\sqrt{2}}) \Longrightarrow a^2=3b^2$$

پاسخهای درست رسیده :

وحید طباطبا وکیلی. مجید جم. حسین اسکندری. جمال آشفته. حسن خرمی. رودگری آملی. عبدالله سعیدی .

۳۷۱۳ـ به فرض آنکه بین b و c اندازه های دو ضلع و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی روابط:

$$b-c=R \text{ و } bc=R^2$$

برقرار باشد با استفاده از ترسیمات هندسی اندازهٔ زوایای مثلث را حساب کنید .

حل ـ حالت اول (زاویهٔ B منفرجه است): روی AC قطعه خط AD را مساوی با AB جدا می کنیم داریم:

$$CD=b-c=R$$

وازرابطهٔ $bc=R^2$ نتیجه می‌شود :

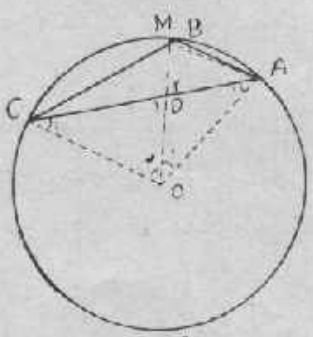
$$\frac{b}{R}=\frac{R}{c}$$

و یا :

$$\frac{AC}{OC}=\frac{OA}{AD}$$

و چون

$$\overset{\wedge}{OAD}=\overset{\wedge}{OCD}$$



پس دو مثلث OAD و CAO متشابهند و چون مثلث OCA متساوی‌الساقین است پس ODA نیز باید متساوی‌الساقین باشد پس :

$$D_1-2A_1=2O_1$$

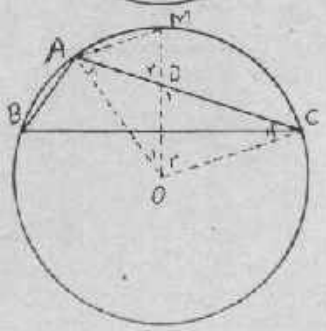
$$2A_1+O_1+O_2=\pi$$

و چون :

$$D_1-O_2=2A_1$$

$$=2O_1$$

و در نتیجه



$5A_1=\pi$ و یا $A_1=36^\circ$ و زCOA $=108^\circ$

زB $=126^\circ$ خط OD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند مثلث OMA متساوی‌الساقین و زO$_1=36^\circ$ است پس :

$$D_2=D_1=2A_1=72^\circ \text{ و زM}=72^\circ$$

پس مثلث AMD متساوی‌الساقین بوده یعنی :

$$AB=AM=AD$$

پس M بر B منطبق است وازاینجا نتیجه می‌شود :

$$\text{زA}=36^\circ \text{ و زC}=18^\circ$$

حالت دوم (زاویهٔ B حاده است)

در این حالت نیز محاسباتی نظیر حالت قبل خواهیم داشت حل مسئله با کمی اختلاف شبیه حالت قبل است وجوابهای زیر را بدست خواهیم آورد :

$$\text{زA}=108^\circ \text{ و زC}=18^\circ \text{ و زB}=54^\circ$$

پاسخهای درست رسیده :

م رودگری آملی

۳۷۱۴ـ مطلوبست حل معادلهٔ مثلثاتی زیر:

$$\sin(\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{8}\sin(\frac{\pi}{4}-x)+3\sin 7x$$

حل ـ معادله را به صورت زیرساده می کنیم :

$$\sin(\frac{\pi}{4}+x)-\sqrt{8}\cos(\frac{\pi}{4}+x)=3\sin 7x$$

با فرض $\sqrt{8}=tg\alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin(\frac{\pi}{4}+x-\alpha)=3\sin 7x\cos\alpha$$

وچون داریم $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ پس معادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sin(\frac{\pi}{4}+x-\alpha)=\sin 7x$$

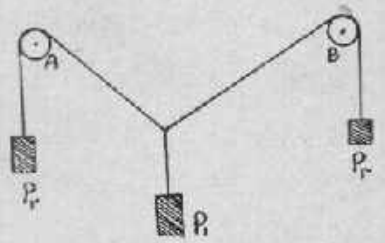
و نتیجه خواهیم گرفت

$$x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{24}-\frac{\alpha}{6} \text{ و } x=\frac{2k\pi+\pi}{8}-\frac{\pi}{32}+\frac{\alpha}{8}$$

پاسخهای درست رسیده :

رودگری آملی . شاهرخ فاطمی . پرویز خواجه خلیلی وحید طباطبا وکیلی . سید مهدی حمیدی . حمیدرضا مهدوی فریبرز جمشیدی.

۳۷۱۶ـ از روی دو قرقره A و B نخی را عبور



می‌دهیم وزنه های P_1 و P_2 و P_3 را مطابق شکل به نخ می‌بندیم داریم .

$$AB=2m \quad P_3=250gf \quad P_2=450gf$$
$$P_1=500gf$$

مکان تعادل دستگاه را پیدا کنید. طول AM و MB را بدست‌آورید .

قرقره‌های A و B را در یک سطح قرار گرفته‌اند بین نخ و قرقره‌ها اصطکاکی نیست.

حل ـ نقطهٔ M هنگامی در حال تعادل است که برآیند نیروهای متقاطعی که بر آن وارد می‌شوند برابر صفر باشد. این نیروها عبارتند از :

$$\vec{P_3} \text{ و } \vec{P_2} \text{ و } \vec{P_1}$$

بس
$$\vec{P_1}+\vec{P_2}+\vec{P_3}=0$$

یا
$$P_2+P_3=-P_1$$

یعنی برآیند دو نیروی $\vec{P_2}$ و $\vec{P_3}$ نیروئی است در امتداد قائم وبطرف بالا ومقدارآن برابر است با مقدار نیروی $\vec{P_1}$ طبق شکل می‌توان نوشت :

(۱) $P_2\cos\alpha=P_3\cos\beta$

(۲) $P_2\sin\alpha+P_3\sin\beta=P_1$

با بکار بردن اعداد

(۳) $9\cos\alpha=5\cos\beta$

(۴) $9\sin\alpha+5\sin\beta=10$

معادلهٔ (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

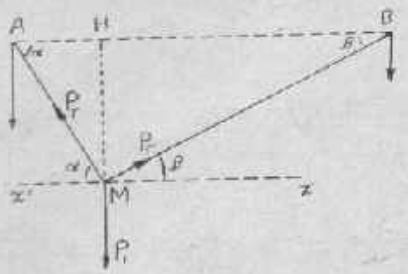
(۵) $9\sin\alpha=10-5\sin\beta$

طرفین روابط (۳) و (۵) را به توان (۲) می‌رسانیم و عضو به عضو جمع می‌کنیم

$$81=25+100-100\sin\beta$$
$$\sin\beta=0/44 \Longrightarrow \beta\#26^\circ$$

و از معادلهٔ (۵)

$$\sin\alpha=0/866 \Longrightarrow \alpha=60^\circ$$



برای تعیین طولهای AM و BM می‌توان نوشت :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\frac{HM}{AM}}{\frac{HM}{BM}}=\frac{BM}{AM}$$

ضمناً طبق شکل :

$$HB=BM\cos\beta \quad و \quad AH=AM\cos\alpha$$

پس :

$$AM\cos\alpha+BM\cos\beta=AB$$

با بکاربردن مقادیر عددی

$$\frac{BM}{AM}=\frac{0/866}{0/44} \quad و \quad AM\times\frac{1}{2}+BM\times 0/898=1$$

از حل این معادله طولهای AM و BM یعنی مکان تعادل دستگاه بدست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده :م. رودکی آملی

۳۷۱۷ـ قطرداخلی مارپیچی 60mm و بلندی آن ۱۵۰ میلیمتر . قطرسیم مس بکاررفته بدون عایق ۱/۱ میلیمتر و با عایق ۱/۵ میلیمتر است . پس از سیم پیچی قطر خارجی 140mm می‌شود . مقاومت الکتریکی مارپیچ را درصفردرجه و ۵۰ درجه پیدا کنید . درصورتی که مقاومت مخصوص در صفر درجه $\rho=1/6$ میکرواهم سانتیمتر و ضریب حرارتی آن $\alpha=0/0043$ است .

حل : طریقهٔ عمل در این قبیل مسائل پیداکردن محیط دایرهٔ متوسط وتعدادحلقه‌هامی‌باشدکه نتیجهٔ آن محاسبهٔ طول سیم می‌باشد .

تعداد حلقه‌ها در یک ردیف برابراست با:

$$150:1/5=100$$

تعداد لایه ها برابر است با : (برای دو طرف)

$$140-60=80mm$$

وبرای یک طرف مقطع

$$80:2=40mm$$

پس تعداد لایه برابر است با : $۴۰ : ۱/۵ = ۲۷$

تعداد حلقه‌های دور استوانه برابر است با :

$$n = ۲۷ \times ۱۰۰ = ۲۷۰۰$$

قطر متوسط یك حلقه :

$$\frac{۱۴۰ + ۶۰}{۲} = ۱۰۰ mm$$

پس طول سیم پیچك برابر می‌شود با :

$$l = ۲۷\pi \times ۱۰۰۰۰ mm = ۲۷\pi \times ۱۰^{۲} cm$$

ومقاومت پیچك در صفردرجه :

$$R = \rho \frac{l}{s} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۶} \frac{۲۷\pi \times ۱۰^{۲}}{\frac{\pi (۰/۱۱)^{۲}}{۴}} = ۱۴/۳\Omega$$

و در ۵۰ درجه

$$R_۵ = R_۰(۱ + \alpha t) \quad R_۵ = ۱۷/۳۵\Omega$$

پاسخ درست رسیده از : رودگری آملی

۳۷۱۸ـ آینه های فرنل بین هم زاویهٔ یك درجه درست کرده‌اند فصل مشترك آنها تا منبع یك متراست اگر طول موج نور ۶۰۰۰ انگستروم باشد فاصلهٔ نوارهارا که به فاصلهٔ یك متر از فصل مشترك آئینه‌ها روی صفحه حاصل می‌شود بدست آورید.

حل : داریم

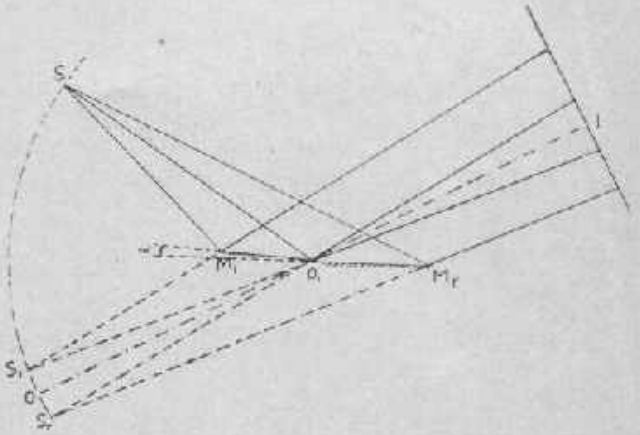
$$O_۱I = ۱m \text{ و } SO_۱ = ۱m \text{ و } \lambda = ۶۰۰۰A^{\circ}$$

و $\alpha = ۱^{\circ}$

i فاصلهٔ دو نوارمتوالی مجهول است . می‌توان نوشت :

$$\lambda = \frac{ax}{KD}$$

$$\lambda = \frac{a \cdot i}{D} \Longrightarrow i = \frac{\lambda \cdot D}{a} \text{ یا}$$



$$a = S_۱S_۲ = ۲\alpha \cdot R \text{ و } D = OI = OO_۱ + O_۱I$$
$$= SO_۱ + O_۱I$$

طبق مفروضات :

$$D = ۱ + ۱ = ۲m \text{ و } a = ۲ \times \frac{۲\pi}{۳۶۰} \times ۱m$$
$$= ۰/۰۳۴۹m$$

پس :

$$i = \frac{۶۰۰۰ \times ۱۰^{-۱۰} \times ۲}{۰/۰۳۴۹} = ۳۴ \times ۱۰^{-۶} m = ۳۴\mu$$

یعنی فاصلهٔ دونوار متوالی خیلی کم ومشاهدهٔ مستقیم آنها مشکل است . برای عریض شدن نوارها لازم است که زاویهٔ بین دوآینه خیلی کوچك و پرده ومنبع نورهم ازفصل مشترك دوآینه نسبتاً دورباشند .

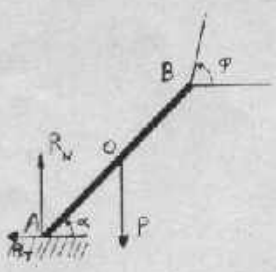
پاسخ درست رسیده از رودگری آملی .

۳۷۱۹ـ میلهٔ یکنواختی که یك انتهای آن نقطهٔ A بر زمین تکیه کرده است انتهای دیگر میله نقطهٔ B توسط نخی گرفته شده است ضریب اصطکاك زمین و میله برابر f است زاویهٔ بین میله و امتداد افقی ۴۵° است مطلوبست تعیین مقدار زاویهٔ φ که بین امتداد افقی و امتداد طناب هنگامی که میله می‌خواهد روی زمین بلغزد .

حل : نیروهای وارد برمیله عبارتند از ، T کشش نخ ؛

P نیروی وزن میله؛

R_N و R_T مؤلفه‌های قائم و افقی نیروی اصطکاك :



$$(۱) \quad \frac{R_T}{R_N} = f$$

از تصویر این نیروها برامتداد افق نتیجه می‌شود :

$$(۲) \quad -R_T + T\cos\varphi = ۰$$

چون میله در حال تعادل است گشتاور این نیروها نسبت به O صفر است یعنی :

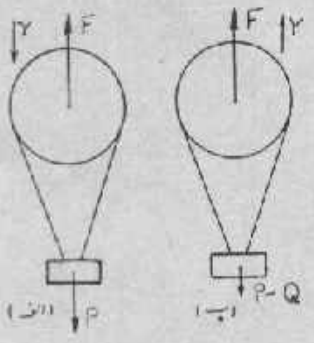
$$(۳) \quad T\sin(\varphi - \alpha) \times \frac{l}{۲} - (R_T + R_N)\frac{l}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

که درآن $AB = l$ طول میله است . از سه رابطهٔ (۱) و(۲) و (۳) و اینکه $\alpha = ۴۵^{\circ}$ است نتیجه می گیریم :

$$tg\varphi = ۲ + \frac{۱}{f}$$

پاسخ درست رسیده از: رودگری آملی

۳۷۲۰ - بالنی به وزن P و با شتاب γ پائین می‌آید. از داخل آن چه مقدار اثاث به‌خارج بریزیم تا بالن با همین شتاب به طرف بالا برگردد



حل: ازاصل اساسی دینامیك استفاده می‌کنیم. باتوجه‌به شکل برای دوحالت(الف) و(ب) می‌توان نوشت:

$$P-F=\frac{P}{g}\gamma$$

$$F-(P-Q)=\frac{P-Q}{g}\gamma$$

درآن Q وزن مقدار اثاثی است که به خارج باید ریخت. با حذف F از دو معادله حاصل می‌شود:

$$Q=\frac{2P}{1+\frac{g}{\gamma}}$$

پاسخ درست رسیده از رودگری آملی.

۳۷۲۱- حل‌این مسئله‌زیرعنوان‌حل‌مسائل نمونه‌درشمارهٔ بعدچاپ می‌شود.

۳۷۲۳ x گرم‌ازمخلوط مس، اکسیدمس‌ومقداری‌شن‌را تحت تأثیر جوهر گوگرد گرم وغلیظ قرار می‌دهیم. ضمن‌اینکه ۰/۲۸ گرم از آن حل نمیشود گازی متصاعد می‌گردد که در فشار ثابت حرارت و ۲۷/۳ درجه سانتیگراد ۰/۲۴۶۴ لیتر حجم دارد.

محلول را صاف‌کرده و زیر صافی را به ملایمت تبخیر می‌کنیم جسم آبی رنگ متبلوری به وزن ۲/۷۵ گرم بدست می‌آید. ازاینجا ترکیب‌درصدمخلوط را حساب کنید. درصورتی که سولفات مس با ۵ ملکول آب متبلور می‌شود.

حل و توضیح وآنمقداری‌که در اسید سولفوریك حل‌نشد همان شن است.

$$Cu+2H_2SO_4\rightarrow CuSO_4+SO_2\uparrow+2H_2O$$
$$CuO+H_2SO_4\rightarrow CuSO_4+H_2O$$

حاصل‌ازمس $CuSO_4+5H_2O\rightarrow CuSO_4.5H_2O$

حاصل ازاکسید مس $CuSO_4+5H_2O$
$\rightarrow CuSO_4.5H_2O$

ابتدا حجم گاز در شرائط متعارفی (V_0) حساب می‌کنیم.

$$V_t=V_0(1+\alpha t)$$

$$0/2464=V_0(1+\frac{27/3}{273})=V_0\times 1/1$$

$$V_0=0/224\ lit$$

حجم گاز در شرائط متعارفی

$Cu\rightarrow SO_2\rightarrow SOCu$ و $5H_2O$

۶۴	۲۲/۴	۲۵۰
x=۰/۶۴ گرم مس	۰/۲۲۴	y=۲/۵

گرم وزن‌کات کبود حاصل از مس

$2/75-2/5=0/25$

گرم وزن‌کات کبود حاصل از اکسید مس

$CuO\rightarrow SO_4Cu$ و $5H_2O$

۸۰	۲۵۰
x=۰/۰۸ گرم اکسید مس	۰/۲۵

گرم۱=۰/۰۸+۰/۶۴+۰/۲۷

شن	مس	CuO	گرم‌مخلوط
۰/۲۸	۰/۶۴	۰/۰۸	۱
z=٪۲۸	y=٪۶۴	x=٪۸	۱۰۰

پاسخهای درست رسیده: محمد حسن‌باقری. صادق آقامحمدی. رودگری‌آملی. جلال اشجعی. محمدقلی‌قلیان. پرویز مرادی حقگو. غلامحسین باغانی. عباس‌کشاورز

۳۷۲۴- از احتراق ۰/۳ گرم از یك جسم‌آلی مرکب از C و H و O وزن گاز کربنیك حاصل ۰/۶۶ گرم و حجم اکسیژن مصرفی برای احتراق جسم فوق در شرایط متعارفی ۵۰۴ سانتیمتر مکعب می‌گردد از طرفی‌اگر $\frac{1}{3}$ کربن‌مولکولی جسم‌را به CO_2 تبدیل کنیم ۲۵۰۰cc آب‌آهك N/۰۸ را خنثی می‌کند مطلوبست الف. فرمول بستهٔ این جسم ب - CO_2 حاصل ازسوختن همان مقدار از مادهٔ آلی فوقرا وارد ۵۰۰cc آب باریت ۰/۸ نمال می‌نمائیم تقلیل فاکتور محلول را حساب کنید.

حل:

$$C+O_2\rightarrow CO_2 \qquad CO_2+Ca(OH)_2\rightarrow$$
$$\rightarrow CO_3Ca+H_2O$$

گرم‌کربن	۱ کربن‌مولکولی	معادل	$\frac{C}{12}$	$\frac{Ca(OH)_2}{2000}$
۱۲	۳			
x=۱۲ گرم	۲۵۰۰×۰/۸	۱	x=۳۶	

وزن‌کربن دریك مولکول‌گرم

$$m_c=\frac{3}{11}m\,CO_2=\frac{3}{11}\times 0/66=0/18$$

وزن‌کربن در ۰/۳ گرم

ماده‌آلی	کربن	
۰/۳	۰/۱۸	M=۶۰ وزن مولکولی جسم آلی
M	۳۶	

$\frac{M}{m}=\frac{12x}{mc}$	$\frac{60}{0/3}=\frac{12x}{0/18}$	x=C=۳ اتم کربن

انجمن معلمان ریاضی

جلسات هیئت مجریان انجمن معلمان ریاضی هرهفته روزهای یکشنبه از ساعت ۵ تا ۷ بعدازظهر (فعلا درمحل دبیرستان ضمیمهٔ شمارهٔ ۱ هدف ، کوچهٔ مریخ ، خیابان سپه) تشکیل می‌شود . اعضای دیگر انجمن و دبیران ریاضی که مایل باشند می‌توانند در این جلسات شرکت کنند و با اعلام نظرات خود در پیشرفت انجمن شریك و سهیم باشند .

قرار است که یکی دو جلسهٔ معارفه از معلمان ریاضی ، مخصوصاً معلمان ریاضی شهرستانها که در تعطیلات تابستان به تهران می‌آیند ، تشکیل شود. معلمان گرامی ریاضی که نشانی خودرا به اطلاع انجمن برسانند به انجام این مقصود کمك خواهند کرد .

درمرداد ماه سال جاری دو کلاس کارآموزی مخصوص معلمان ریاضی جدیدالاستخدام شهرستانها از طرف ادارهٔ کل تعلیمات متوسطه تشکیل می‌شود. انجمن معلمان ریاضی برنامهٔ کار این کلاسها را تنظیم کرده واستادان مربوط را نیز انتخاب کرده است .

به پیشنهاد چند گروه فرهنگی از طرف انجمن یك سمینار از دبیران سیکل اول برای بحث در چگونگی روش تدریس هندسه تشکیل می‌شود. این سمینار احتمالا در شهریورماه تشکیل خواهد شد. داوطلبان شرکت در سمینار مراتب را به اطلاع انجمن برسانند .

آموزشگاه علمی

تدین

وابسته به سازمان فرهنگی

آرتا

سلسبیل چهارراه مرتضوی

تلفن : ۹۵۳۹۲۱

کلاسهای (تجدیدی و تقویتی)

کلاسهای متفرقه

دورهٔ اول و دورهٔ دوم

رشته های (ریاضی ، طبیعی ، ادبی)

کلاسهای کنکور

رشته های ادبی وحقوق

همه روزه صبح و عصر

$$C_xHyOz + (۶+\frac{y}{۲}-z)O \rightarrow ۳CN_۲ + \frac{y}{۲}H_۲O$$

$$\frac{C_xHyOz}{۶۰} \qquad \frac{(۶+\frac{y}{۲}-z)۱۱۲۰۰}{}$$

$$۰/۳ \qquad ۵۰۴ \qquad \text{یا } y-۲z=۶$$

$$C_xHyOz=۶۰ \qquad \text{یا} \qquad y+۱۶z=۲۴$$

دومعادلهٔ دومجهولی $\begin{cases} y-۲z=۶ \\ y+۱۶z=۲۵ \end{cases}$ $y=۸$ $z=۱$

فرمول خام جسم آلی $C_۸H_۸O$

$$\underset{۲۲۴۰۰}{CO_۲} + \underset{۲۰۰۰}{Ba(OH)_۲} \rightarrow CO_۳Ba + H_۲O$$

$$۳۳۶ \qquad x=۳۰cc)$$

$$V_N = F_۱V_۱ = F_۱ \times ۵۰۰$$

$$V'_N = F_۲V_۲ = E_۲ \times ۵۰۰$$

$$V_N - V'_N = ۵۰۰(F_۱ - F_۲)$$

$$۳۰ = ۵۰۰(۰/۸ - F_۲)$$

تقلیل فاکتور محلول آب باریت $F_۲ = ۰/۷۴$

پاسخ درست رسیده از رودگری آملی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف

استاد دکتر محسن هشترودی

شامل حل مسائلی که ازاستاد در مجلات یکان چاپ شده ومسائل دیگر

زیرچاپ است و در سلسلهٔ

انتشارات یکان

بزودی تقدیم دوستداران خواهد شد

انتشارات یکان

آنچه تاکنون منتشر شده است :

مجموعهٔ علمی یکان سال

۶۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

۱۵ ریال (نایاب)

مسائلی از :

حساب استدلالی

۱۵ ریال

یکان سال مخصوص

امتحانات نهایی ۱۳۴۳

۴۰ ریال

معماهای ریاضی

۴۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴

۵۰ ریال (نایاب)