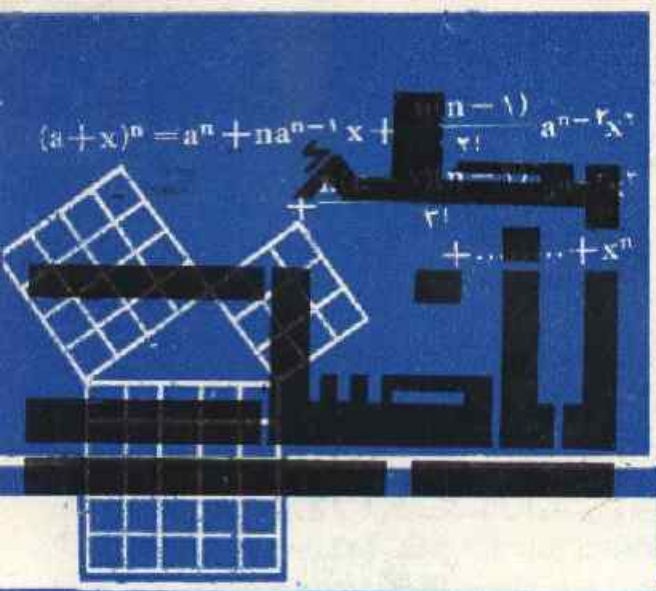


یکان ریاضی

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ :

۱۰

شمارهٔ مسلسل

۳۵

خرداد ۱۳۴۶

در این شماره :

توضیح دربارهٔ سؤالات امتحان ورودی دانشگاه صنعتی آ. یامهر	دکتر منصوری	۱
دترمینان	سید محمد کاظم نائینی	۳
مراحل مهم علم نجوم	ترجمه	۷
درسی از حساب	محمود کمالی	۹
درسی از فیزیك	ح : شریفزاده	۱۳
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۱۴
راهنمای حل مسائل شیمی	ترجمه : بزرگ نیا	۱۵
راهنمای حل مسائل هندسه	ترجمه	۱۸
روشهای تجزیهٔ عبارات جبری	ایرج شهریاری	۲۰
داستانهای تفننی ریاضی	ترجمه	۲۴
سرگرمیهای ریاضی	—	۲۵
حل مسئلهٔ نمونه	ترجمه : یدالله ارضی	۲۶
مسائل برای حل	—	۲۷
بی آنکه عصبانی شوید	ترجمه : داود مصحفی	۲۹
حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۳	—	۳۰
پرسش و پاسخ	—	۴۶
دربارهٔ مندرجات یکان سال	—	۴۷
ازمیان نامه‌های رسیده	—	۴۸
آگهی دانشگاه صنعتی آریامهر	—	۴۹و۲

بها : بیست ریال

آگهی امتحان مسابقهٔ ورودی
دانشگاه صنعتی آریامهر

دانشگاه صنعتی آریامهر برای سال تحصیلی ۱۳۴۶ - ۱۳۴۷ تعداد چهار صد و هشتاد دانشجو از بین دارندگان گواهینامهٔ سال ششم متوسطه (شعبهٔ ریاضی) از طریق امتحان مسابقهٔ ورودی برای دانشکده‌های مهندسی زیر می‌پذیرد :

۱ـ دانشکدهٔ مهندسی برق شامل رشته‌های : الکترونیک الکتروتکنیک .

۲ـ دانشکدهٔ مهندسی مکانیک شامل رشته‌های: ماشین ـ تأسیسات .

۳ـ دانشکدهٔ مهندسی شیمی شامل رشته‌های : پالایش ـ پتروشیمی ـ صنایع غذائی ـ صنایع شیمیائی .

۴ـ دانشکدهٔ مهندسی متالورژی شامل رشته‌های : فلزشناسی ـ تصفیه وترکیب ـ ذوب فلزات .

۵ـ دانشکدهٔ مهندسی علوم (ریاضی ـ فیزیك) .

۶ـ دانشکدهٔ اقتصاد مهندسی و مدیریت صنعتی.

***

بقیه درصفحهٔ ماقبل آخر

آگهی

دانشجویان یا دانش‌آموزانی که در ترجمهٔ مقالات ریاضی (از یکی‌از زبانهای‌خارجی) تسلط کافی‌داشته باشند درصورت تمایل در یکی‌از روزهای دوشنبه یاپنجشنبه بین ساعات۶تا۸ بعد ازظهر به‌ادارهٔ مجلهٔ یکان مراجعه فرمایند.

قابل توجه مشترکان مجله

اگر نشانی پستی شما تغییر می‌کند مراتب را به ادارهٔ مجله اطلاع دهید . درغیر این‌صورت‌ادارهٔ مجله در نرسیدن‌مجله بدست شماهیچگونه مسئولیتی را قبول نمی‌کند

مشترکانی‌که نشانی پستی آنها دبیرستان یا دانشکدهٔ مربوط می‌باشد برای‌تعطیلات‌تابستان‌نشانی جدید خودرا اطلاع دهند وگرنه از ارسال مجله در مدت تابستان برای‌آنها خودداری خواهد شد .

یکان
مجلهٔ ریاضیات

سال چهارم ـ دورهٔ سوم ـ شمارهٔ دهم (شمارهٔ مسلسل: ۳۵)

خرداد ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران،خیابان لاله‌زارنو، نزدیك‌شاهرضا،شماره۸۱۶

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 10 ,May. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

تقریباً عموم دانشکده‌ها (در تمام کشورها) دانشجویان خودرا ازطریق امتحان مسابقه انتخاب می‌کنند دربیشتر کشورها مرسوم است که هردانشکده برنامهٔ تفصیلی موادی راکه ازآنها امتحان مسابقه بعمل می‌آورد تهیه کرده دراختیار داوطلبان قرارمی‌دهد (ریزمبحثهای مختلف مربوط به‌هرمادهٔ‌درسی به تفصیل ذکرمی‌شود) . بعدازانجام امتحان مسابقه‌هم، سؤالات وحل آنها چاپ شده ازطرف دانشکده بین متقاضیان توزیع می‌شود . درایران ، نه‌تنها ریزمواد امتحانی دراختیار داوطلبان قرار نمی‌گیرد بلکه مقامات بعضی ازدانشکده ها حتی ازبروز سؤالهای امتحان مسابقه به‌خارج جلوگیری می‌کنند و اگرشخص یا مؤسسه‌ای این سؤالهارا فراهم آورده چاپ ومنتشرکندموجب‌ناراحتی این مقامات‌می‌شود!

اما سال گذشته اولین اقدام اساسی در این باره از طرف دانشگاه صنعتی آریامهر انجام گرفت :

این دانشگاه، بلافاصله بعدازاجرای امتحان مسابقه ، متن سؤالها وحل آنهارا چاپ‌کرد ودر اختیارداوطلبان قرارداد ونسخه‌یی ازآنرا نیزبرای چاپ در مجلهٔ یکان ارسال‌داشت . دراین‌اوراق، آنچه به عنوان حل مسائل چاپ شده بود حداقل عملیاتی بودکه ازهرداوطلب مورد تقاضابوده است. اما برای بعضی ازداوطلبان این تصورپیش آمده بودکه این عملیات حل کامل وجامع مسائل می‌باشد. توضیحاتی که دراین باره دریکان سال ۴۵ چاپ شد برای رفع این شبهه بود . خوشبختانه مقامات دانشگاه مزبور نیز به این موضوع توجه داشته وتوضیحاتی داده‌اند که در زیربه نظر خوانندگان می‌رسد ازداوطلبان امتحانات ورودی دانشکده ها دعوت می‌شودکه به نکات برجسته‌ای‌که ضمن مقاله یادآوری شده است توجه کامل داشته باشند .

عبدالحسین مصحفی

توضیح دانشگاه صنعتی آریامهر

دربارهٔ سؤالات امتحانات مسابقهٔ ورودی

چنانکه مشهود است داوطلبان مسابقات دانشکده‌ها که اکثریت قریب به اتفاق آنها از فارغ التحصیلان دبیرستانها بوده ودر طی دوران تحصیلات خود بطوری که مرسوم است همواره به‌اعتبار معلوماتی که در چهارچوب برنامه‌های‌تعلیماتی کلاسهای مربوط آموخته‌اند مورد آزمایش قرار گرفته‌اند ، متأسفانه از تفاوت اساسی که بین امتحانات داخلی یا نهائی دبیرستانها و امتحانات مسابقات دانشگاهی از لحاظ شکل و محتوی وجود دارد مطلع نیستند .

توضیح اینکه در امتحانات دبیرستانها مقصود آنست که معلومات کلاسیك دانش‌آموزان دربالا یاپائین مرز مشخصی‌که ملاك ارتقاء آنهاست ارزیابی گردد ، بنابراین سؤالات مربوط به این امتحانات باید طوری تنظیم شود که نه فقط همتراز با سطح برنامه‌های تعلیماتی مصوب باشند بلکه‌کیفیت تدریس نیز مورد توجه قرار گیرد تادرنتیجه‌توزیع منطقی از دانش‌آموزان در دو طرف خط‌مرزی مزبور مطابق بانمونه‌های منحنی‌آماری مخصوص اینگونه امتحانات حاصل گردد ، در صورتی‌که هدف امتحانات مسابقه آنست‌که بین عده‌ای از داوطلبان با پایهٔ تحصیلی مشترك بطورنسبی افرادی متمایز گردندکه علاوه بر

احاطهٔ کامل نسبت به‌آنچه که فراگرفته‌اند به اتکاء استعداد ، فراست و بالاخره قوهٔ ابتکار خود قادر باشند معلومات کلاسیك خویش را به آن میزان که ازجهات مختلف در سؤالات‌مطروحه دقیقاً توجیه‌گردند گسترش دهند .

یکی از طرق متداول وصول به این هدف طرح سؤالات امتحانی مسابقات ورودی دانشگاه خارج از سبك متعارف امتحانات دبیرستانهاست که تمایز داوطلبان از یکدیگر در مواجههٔ با آن مشخص گردد. اجرای روش امتحانات به‌صورت «تست» نیز که در سالیان اخیر در کشورهای پیشرفته متداول گردیده ودر آن با عرضه‌کردن جوابهای متضاد یك سؤال ، پاسخ صحیح مورد تقاضاست با کمی تفاوت بخاطر پیروی از اصول مشروحه است .

ولی درصورت رایج امتحانات ، مناسب‌ترین روش آنست که سؤالات حتی‌المقدور طوری طرح شوند که مفروضات‌یا احکام آن قابل بحث وتفسیر باشند تابدین‌وسیله پس از بررسی حالت عمومی و متعارفی امکان توجه به حالتهای خاص نیز موجود باشد ودرنتیجه همانطورکه گفته شد امتحان شوندگان میدانی برای نشان دادن وجه تمایز خویش داشته باشند .

برای این‌منظور به‌خصوص در امتحانات ریاضی می‌توان بارم قراردادی مسئله را فقط به حل در حالت کلی اختصاص‌داد وبرای آن عده از داوطلبان نیز که ممتازیت خود را در توجه به حالات خاص یا احیاناً بررسی تناقضهائی که ممکن است از تبدیل حالت عمومی به حالات خاص بـه وجود آید به ثبوت رسانده‌اند یا حتی راه حلهای جالبی ارائه داده‌اند به تشخیص هیئت ممتحنه بطور مناسب با اطلاعات عرضه شده نمرات اضافی منظور نمود .

باتوجه به‌این‌توضیحات خاطرنشان می‌سازد که درامتحان مسابقهٔ ورودی سال قبل دانشگاه صنعتی آریامهر از این روش پیروی شده و مطمئناً درسال جاری نیز مراعات خواهد گردید.

بنابراین :

الف- در مورد مسئلهٔ هندسه ، حل آن در شرائط مثلث حاده الزوایا «پنج نمره» داشته است و به آن عده از داوطلبان که به حالت منفرجه الزاویه بودن مثلث توجه داشته ودرنتیجه حکم را مورد تفسیر قرارداده‌اند از «یك تا دو و نیم نمره» به تناسب توضیحات عرضه شده نمره اضافی داده شده است.

ب- در مورد مسئلهٔ حساب ، جوابی که بلافاصله پس از پایان امتحانات مسابقه در اختیار داوطلبان قرار داده شده براساس حالت کلی یعنی متمایز بودن پارامترها بوده و «پنج‌نمره» داشته است و جوابهای دیگر آن می‌توانست مشمول نمرهٔ اضافی باشد. تاآنجاکه بخاطر دارم ازمیان ۵۳۲۱ نفرداوطلب فقط یك نفر به این موضوع توجه داشته که به تشخیص هیئت ممتحنه «سه نمره» اضافی برای ایشان منظور گردید و پس از تصحیح اوراق و مکشوف شدن نام داوطلبان معلوم شد کـه نام این داوطلب آقای **«علیرضا صادق نوبری»** بوده است که ضمناً در امتحانات مسابقه رتبهٔ اول را احراز نموده است و خوشبختانه در این مقال فرصتی پیش‌آمد تا یك بار دیگر این جوان با استعداد معرفی گردد.

در اینجا لازم است تذکر داده شود کـه در امتحانات مسابقهٔ سال قبل دانشگاه ده مسئله داده شده کـه حل هرمسئله دارای پنج نمره بوده است و چون تعیین شمارهٔ ردیف انتخاب شدگان بوسیلهٔ مجموع نمرات ملاك عمل قرار گرفته است طبیعتاً نمرات اضافی برخی از مسائل به همان میزان مجموع نمرات را افزایش داده و بنابراین می‌توانست درتعیین شمارهٔ ردیف داوطلب هنگام اعلام نتایج مسابقه کاملا مؤثر باشد .

بااین توضیحات‌امید است نه فقط‌آن چندنفرازداوطلبان محترم که ایراد به عدم جامعیت راه‌حل دومسئلهٔ مزبورداشتند کاملا قانع شده باشند بلکه این بحث راهنمای کلیهٔ داوطلبان مسابقات دانشگاهی یالااقل در مورد داوطلبان مسابقات‌دانشگاه آریامهر واقع گردد . فقط در خاتمه به‌علت علاقه وافری که به توفیق خدمت اداره‌کنندگان مجلهٔ یکان که باتلاش قابل ستایشی توانسته‌اند چنین مجلهٔ ارزنده‌ای را به جامعهٔ فرهنگیان ونوجوانان کشور عرضه نمایند داشته و دارم متذکر می گردد که از این پس چنانچه ایجاب کند کـه مسائل طرح شده توسط همکاران گرامی مورد ایراد یاانتقاد یاحتی بررسی واقع گردد از لحاظ رعایت اصول حرفهٔ شریف معلمی که همهٔ ما مفتخر به کسب عنوان‌آن هستیم شاید صحیحتر باشد برای رفع‌هرگونه سوء تفاهم ، قبل از طرح موضوع در مجله توأم با درج اظهار نظر افرادی که بـا وجود صلاحیت غیرقابل انکار ، محتمل است که ملاحظات خاص‌طراح مورد توجه‌آنها واقع نشده‌باشد، از اظهارنظر خود طراح سؤالات اطلاع حاصل نمایند .

هوشنگ منتصری

دترمینان

تنظیم از : سید محمد کاظم نائینی — با استفاده از منابع خارجی

مقدمه :

تئوری دترمینان یکی ازبحثهای جالب و در عین حال مفیدی است که در بسیاری از شاخه های مختلف ریاضی بویژه ریاضیات جدید ظاهرشده ومفاهیم سودمندی را توجیه‌می‌نماید.

در مبحث ماتریس آنجا که تبدیلات خطی را به عنوان مثال برای تعریف ماتریس بکار بردیم به‌کلمه ونوعی خاص از دترمینان نیز اشاره شدکه تلویحاً تأثیر آن درتعیین مبدل‌خط مستقیم در تبدیل ماتریسی مشخص گردید اینك می‌خواهیم از دترمینان‌مستقلا یادکرده‌وتعریف وموارداستعمال آنرا بیان کنیم تاادزش واقعی ومعانی وهمچنین‌سهولت درك وسادگی آنروشن گردد .

دترمینان که **مبین** یا **مفسر** ترجمه‌شده است‌اندازهٔ‌جبری ومقادیر عددی کمیاتی است که به‌شکلی‌خاص شبیه ماتریس‌مربع نموده می‌شود . بااین تفاوت‌که اطراف‌آن را با دوخط مستقیم عمودی محدود می‌کنند $|\Delta|$ درحالی‌که ماتریس را بادوهلال محدود می‌ساختیم : (M) وازطرفی دترمینان ، ماتریس نیست بلکه عدد است وشکلی است قراردادی‌برای‌نمایش اعداد .

اشکال $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7- & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3- & 4 \end{vmatrix}$

هریك دترمینان‌اندو به‌ترتیب‌معرف ومشخص اعداد جبری۷ـ و ۱۰ و ۳۵ می‌باشند

ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یك نوع تبدیل است درصورتی که‌دترمینان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یك عدد جبری است به اندازهٔ قراردادی : $ad-cb$

فرق بین ماتریس و دترمینان نظیر فرقی است که بین نقطه ومختصات نقطه وفرقی است‌که بین آمار واحتمال وجود دارد . درهندسه تحلیلی به نقطه اعدادی نسبت می‌دهند وآنها را مختصات نقطه می‌نامند . در علم آمار به آمار عددی نسبت داده وآنرا احتمال می‌نامند . در مبحث ماتریس‌ها هم به یك ماتریس مربع شکل عددی نسبت داده وآنرا دترمینان می‌نامند

قبل از تعریف دترمینان به‌چند نکته وقراردادکه دراین قسمت مورد استفاده قرارمی‌گیرد اشاره می‌کنیم تا ضمن بحث ناگزیراز بیان جملات معترضه نباشیم .

شماره‌گذاری جدید ـ در مشخص‌کردن جملات یا اجزاء یك دترمینان از یك طریق شماره‌گذاری قراردادی و جدید استفاده می‌کنیم که‌دربسیاری از قسمتهای مختلف مشاغل وعلوم وصنعت متداول شده است وروشی است سهل وآسان برای شناسائی اشیاء واجزاء یك مجموعه‌ولواینکه این مجموعه خود عضوی ازاعضای مجموعهٔ دیگر باشد بدین ترتیب‌که به‌جزئیات یك مکان‌که مشخص‌ومعرف وضع آنند هریك شماره‌ای‌قراردادی داده واین شماره‌هارا بدون‌جداکردن ارقام‌دنبال هم‌می‌نویسند؛ دریك شهر خانهٔ شمارهٔ ۵ کوچهٔ شمارهٔ ۷ از خیابان یابخش۳ باعدد سه رقمی (۳۷۵)کاملا مشخص می‌شود . دریك آپارتمان چند طبقه اطاق شمارهٔ ۷۳ یعنی طبقهٔ هفتم اطاق سوم . در شهر بزرگ نیویورك هرکس آدرس خانهٔ خودش را بایك عددچهار رقمی معرفی می‌کند مثلا (۸۴۵۳) یعنی خانهٔ پلاك ۳ ازکوچهٔ پنجم خیابان شمارهٔ ۴ بخش ۸

درشماره‌ گذاری خطوط اتوبوسرانی جدید نیز ظاهراً خواسته‌اند ازاین روش استفاده‌کنند ولی شماره‌ها گویا نیست و ومنطقه وحدود را مشخص نمی‌کنند شاید تقسیم بندی مناطق به نحو صحیح امکان نداشته ویا اینکه ترتیبی نظیر شماره‌گذاری خطوط دریکی از شهرهای بزرگ جهان به‌صورت تقلید اتخاذ شده است‌که قابل انطباق باوضع شهرسازی تهران نیست .

درسیستم جدیدکتابداری روش‌شماره‌گذاری جدیدبه‌روش **دیوئی** معروف است به موجب این روش تمام معارف بشری را به‌ده طبقهٔ بزرگ وکلی بخش می‌کنند که‌این ده‌طبقه‌دردهشماره به‌صورت۰۰۰ و ۱۰۰ و۲۰۰ و..... و۹۰۰ شماره‌گذاری می‌شود :

(۰۰۰) ـ کلیات یا آثار عمومی و کارهای کلی
(۱۰۰) ـ فلسفه
(۲۰۰) ـ دین
(۳۰۰) ـ علوم اجتماعی
(۴۰۰) ـ زبان یا فقه‌اللغه
(۵۰۰) ـ علوم خالص
(۶۰۰) ـ فنون و صناعات
(۷۰۰) ـ هنرهای زیبا
(۸۰۰) ـ تفریح و سرگرمی
(۹۰۰) ـ تاریخ و جغرافی ـ سرگذشت

هر کدام از این طبقات نیز به ده قسمت و هر قسمت به ده بخش تقسیم شده و سرانجام هر شماره‌ای به موضوعی اختصاص می‌یابد. هر کتاب دارای یك شمارهٔ سه رقمی (موضوعی) است که این شماره طبقه و بخش و موضوع آنرا تعیین می‌کند. یك نفر کتابدار مطلع از روش دهدهی دیوئی می‌داند که کتاب شمارهٔ ۵۹۱ مثلا تاریخ علوم است و شمارهٔ ۸۹۱ تاریخ ادبیات است زیرا عدد ۱ نماینده کلیات یك بخش و عدد ۹ نمایندهٔ تاریخ و ۵ در شمارهٔ اول نمایندهٔ علوم خالص و ۸ در شمارهٔ دوم نمایندهٔ ادبیات است در سیستم (کد) شماره گذاری بودجهٔ برنامه ای وزارت‌خانه‌ها و همچنین شمارهٔ اقلام کالاهای مختلف در شرکتهای بزرگ نیز از همین روش استفاده می‌شود.

در شماره گذاری اجزاء دترمینان هم از همین روش جدید شماره گذاری پیروی می‌کنیم: جملهٔ $(a_{۴۷})$ یعنی جمله‌ای که متعلق به سطر (افقی) پنجم و ستون (عمودی) هفتم است. جملهٔ $(a_{۳۵})$ جمله‌ای است متعلق به سطر سوم و ستون پنجم و بطور کلی جملهٔ (a_{ij}) یعنی جمله‌ای متعلق به سطر j ام و ستون i ام

طریقهٔ شماره گذاری نوین در تئوری مجموعه‌ها که مبحث جالبی از ریاضیات جدید است وضع گردیده و سپس در سایر قسمتها تعمیم داده شده است.

انعکاس (Lnversions) ـ هرگاه دو رقم از یك عدد چندرقمی صحیح طوری قرار گرفته باشند که عدد بزرگتر درست چپ عدد کوچکتر باشد می‌گویند این دو عدد یك انعکاس تشکیل داده‌اند. مثلا تعداد انعکاس در عدد ۳۲ یك است تعداد انعکاس در عدد ۱۲ صفر است تعداد انعکاس در عدد ۵۲۳ دو است.

در عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ تعداد انعکاس صفر است
در عدد ۲۱۳۴۵۶۷۸۹ تعداد انعکاس یك است
در عدد ۳۲۱۴۵۶۷۸۹ تعداد انعکاس سه است
در عدد ۴۳۲۱۵۶۷۸۹ تعداد انعکاس شش است
در عدد ۹۸۷۶۵۴۳۲۱ تعداد انعکاس سی‌وشش است
$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸=۳۶$

برای تعیین تعداد انعکاس در یك عدد، انعکاس در یك از ارقام آنرا بدست آورده همه را با هم جمع می‌کنیم و برای تعیین انعکاس هر رقم تعداد ارقام کوچکتر از آن رقم را که در دست راستش قرار گرفته‌اند می‌شماریم. در عدد ۷۴۲ تعداد انعکاس سه است زیرا اگر از دست راست شروع کنیم انعکاس عدد ۲ صفر است و انعکاس عدد ۴ یك است زیرا سمت راستش یك عدد (۲) قرارداردکه کوچکتر از اوست و انعکاس عدد ۷ دو است زیرا در سمت راستش دو عدد کوچکتر از ۷ قرارداردپس تعداد انعکاسها $۳=۲+۱+۰$ است

برای تعمیم تعریف انعکاس و ثبات بعضی از قضایای آن اغلب حروف را جایگزین اعداد می‌کنند به عنوان جانگهدار عدد و گاهی این حروف سمبل و علامت عضوی از یك مجموعه یا گروه نیز می‌توانند باشند.

به فرض $a<b<c<\dots$ تعداد انعکاس در گروه abcd صفر است و تعداد انعکاس در گروه bca ، ۲ است.

در سلسلهٔ اعداد طبیعی (صحیح و مثبت) که با علامت $|N$ نموده می‌شود:

$|N=۱۲۳۴۵\dots\dots n$

هرگاه عدد n ام را از جایش برداشته قبل از یك در سمت چپ قراردهیم تعداد انعکاس در گروه حاصل برابر:

$۱+۲+۳+۴+\dots+n$

خواهد بود و این سری یك تصاعد حسابی به قدر نسبت $d=۱$ است مجموع آن به موجب فرمول $S=\frac{n(a+l)}{۲}$ تعیین می‌شود ($a=۱$ و $l=n-۱$ و تعداد جمل $n-۱$)

$$S=\frac{n-۱}{۲}(۱+n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثلا اگر عدد ۲۵ را در سلسلهٔ اعداد طبیعی قبل از یك قراردهیم

۲۵۱۲۳۴....۲۴

تعداد انعکاس برابر است با:

$$S=\frac{۲۵\times۲۴}{۲}=۳۰۰$$

اگر در یك گروه تعداد انعکاس زوج باشد آنرا گروه نوع اول و هرگاه تعداد انعکاس فرد باشد آنرا گروه نوع دوم گویند

فاکتوریل (Factorele) ـ حاصل‌ضرب اعداد متوالی از سلسلهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا .... N را N فاکتوریل گویند و به علامت $N!$ یا $|N$ نمایش می‌دهند.

$|N=N!=۱\times۲\times۳\times۴\times\dots\times N$

مثلا: $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

و $|۳=۳!=۱\times۲\times۳=۶$

به موجب قرارداد، فاکتوریل صفر برابر یك است

$|۰=۰!=۱$

تبدیل = پرموتاسیون (Permutation) ـ اگر چند عدد یا چند حرف و یا بطور کلی چند عضواز یك مجموعه دریك ردیف (افقی یاعمودی) یادریك سیکل (دایره یا منحنی مسدود) قرار گیرند یك گروه نامیده می‌شود (۵۳۷۴۳ یا abede)

اگر دریك گروه جای دو جزء را عوض کنیم گروه از نظر تعداد فرق نمی‌کند ولی از نظر شکل تغییر می‌نماید همچنانکه اگر درعمل ضرب جای عوامل را عوض کنیم مقدار حاصل ضرب تغییر نمی کند (اصل) ولی شکل گروه تغییر می کند (شکل ۳ گروه ۷ تائی با هفت گروه سه تائی فرق دارد ولی ۳×۷=۷×۳) عمل تغییر گروه بوسیلهٔ تعویض جای اجزاء تبدیل نامیده می‌شود .

گروه دوتائی ، یك تبدیل بیشتر ندارد (ab و ba، ۳۲ و ۲۳ ، ۳×۵ و ۵×۳) گروهی که فقط شامل یك عضو است تبدیل ندارد (a)

گروهی که شامل سه عضو است ۶ تبدیل دارد

a b c	c b a
a c b	b c a
c a b	b a c

یعنی سه نفر درپشت یك میز گرد به شش وضع می‌توانند بنشینند .

این شش تبدیل به این صورت حاصل می‌شود که نخست گروههای دوگانه متشکل ازدوعضورا تشکیل داده (ab و ba) سپس عضو سوم (c) را یك باردراول ویك‌بار در وسط ویك بار در آخرهردو گروه قرار دهیم.

صورتهای تبدیل دورقم ۵ و ۳ اعداد ۵۳ و ۳۵ اند صورتهای تبدیل سه‌رقم ۵و۳و۷ اعدادزیراند.

۷۵۳ ۵۷۳ ۵۳۷ ۷۳۵ ۳۷۵ ۳۵۷

یکی از تبدیلات گروه سه‌تائی فوق مثلا عدد ۷۵۳ است. اگر رقمی مانند ۶اختیار کنیم واین‌عدد را دراول وبین‌هریك از ارقام وآخر عدد۷۵۳ قرار دهیم چهار گروه ۴ تائی‌حاصل می شود :

۶۷۵۳ ، ۷۶۵۳ ، ۷۵۶۳ ، ۷۵۳۶

وهریك‌از گروههای سه‌تائی بالا را می‌توان باعدد ۶ به۴ گروه چهارتائی تبدیل کرد پس تبدیلات چهار عدد یاچهار عضو برابر ۲۴ = ۴×۶ عدد است

بطورکلی هرگروه n رقمی بوسیلهٔ یك رقم که دراول و بین ارقام وآخر آن قرار گیرد به(n+۱) گروه n+۱رقمی تبدیل می‌شود

n حرف ازیك‌گروه را درنظرمی گیریم : abcd....l

یکی ازاین حروف را اختیار می‌کنیم ، مثلا a ، آنرا کنار می گذاریم ، n−۱ حرف باقی می‌ماند . اگر تعدادتبدیلات این n−۱ حرف را p' بنامیم باقراردادن عدد a در اول ، بین ارقام وآخر هریك ازاین n−۱ گروه ، n تبدیل دیگر حاصل می‌شود . اگرتعدادتبدیلات n حرف را p بنامیم خواهیم داشت:

$$p = np'$$

پس :

تعداد تبدیلات یك حرف	$p_1 = 1$
تعداد تبدیلات دو حرف	$p_2 = 2p_1 = 2 \times 1$
تعداد تبدیلات سه حرف	$p_3 = 3p_2 = 3 \times 2 \times 1$
.....	$p_4 = 4p_3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
.....	. . . . .

تعداد تبدیلات n حرف :

$$P_n = np_{n-1} = n(n-1)\ldots\times 4\times 3\times 2\times 1$$

پس تعداد تبدیلات n عددیا n حرف یا n جزء ازیك‌مجموعه برابر فاکتوریل n است

$$p_n = n!$$

پس اگر دریك‌کنگره یاکنفرانس ده نماینده بخواهند درهرجلسه به یك وضع یا یك‌شکل بنشینندکه با جلسهٔ قبل فرق داشته باشد باید تعداد جلسات برابر باشد با :

$$10! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10 = 3628800$$

با ۵ رقم می‌توان ۱۲۰ عدد مختلف ساخت .سه نفر می‌توانند به شش وضع کنار هم بایستند ۴ عدد ورق از چهار نوع را به ۲۴ شکل می‌توان مرتب کرد .

اگر اعضای یك گروه را به ترتیب سلسله اعداد طبیعی شماره گذاری کنیم گروه حاصل گروه طبیعی نامیده می‌شود :

$$a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n$$

ترتیب (Arrangement) ـ اگر n حرف داشته باشیم و p حرف ازآنرا اختیارکنیم وگروههای تبدیل این p حرف را بنویسیم این عمل را تنظیم یا ترتیب n حرف p به p گویند و به علامت A_n^p نمایش می‌دهند

مثلا ترتیب سه حرف (abc) دوبه دوچنین است :

ab، ba، ac، ca، bc، cb

وترتیب گروهها بدین نحو صورت می گیرد که ابتدا سه حرف را تك تك می‌نویسیم ، سه گروه تك‌حرفی خواهیم داشت‌سپس هریك از حروف را به‌ترتیب درسمت راست گروههای فوق‌قرار می‌دهیم سه گروه دوحرفی درسمت راستش تك‌

تك می‌نشیند واین عمل ۶ بار صورت می گیرد پس ترتیب سه حرف دو به دو ۶ = ۳ × ۲ صورت دارد

مثال ۲ـ۵ نفر بصف ایستاده‌اند . این ۵ نفر می‌توانند به ۵ گروه یکنفری تقسیم‌شوند.

حال اگر یکی از۵نفر مرتباً در سمت راست هریك از نفرات قرار گیرد عمل به تعداد ۴ × ۵ بار تکرار خواهد شد یعنی به این ترتیب ۲۰ گروه دونفری ایجاد خواهدشد .سپس اگر مجدداً هریك ازاین۵نفردرسمت راست هریك‌از گروههای دونفری قرار گیرد این عمل ۴ × ۵ بار برای هرسه نفر باقی تکرار می گردد یعنی ترتیب گروههای ۵ نفر سه به سه به تعداد ۴ × ۵ × ۳ = ۶۰ خواهد بود

مثال ۳ـ ۵۲ ورق داریم . یك‌ورق را زمین می گذاریم ۵۱ ورق در دست باقیست این عمل را ۵۲ بار می‌توان تکرار کرد که درهر باریك ورق زمین باشدکه با ورق قبلی متفاوت باشد پس ترتیب ۵۲ ورق یك به یك ۵۲ است .

حال اگر از ۵۱ ورق باقی یك ورق برداشته در طرف راست تك ورق زمین قرار دهیم این عمل را می‌توان ۵۱ بار برای ۵۲ گروه‌نخست تکرار کرد یعنی ترتیب ۵۲ ورق دوبه‌دو برابر ۵۱ × ۵۲ است

حال از ۵۰ ورق باقی یك ورق اختیار کرده وآنراسمت راست هریك از گروههای‌دوتائی قراردهیم ، عمل ۵۰بار برای ۵۱ × ۵۲ گروه تکرار می‌شود وتعداد ترتیبهای ۵۲ ورق سه به سه برابر ۵۰ × ۵۱ × ۵۲ خواهد بود وبهمین ترتیب‌معلوم می‌شودکه تعداد ترتیبهای ۵۲ ورق

۵ به ۵ برابر ۴۸ × ۴۹ × ۵۰ × ۵۱ × ۵۲

یا ۵۲ × ۵۱ × ۵۰ × ۴۹ (۵۲ − ۵ + ۱)

است .

و اگر عمل را برای n ورق با n گروه انجام دهیم و ترتیب آنرا p به p تعیین کنیم‌خواهیم دیدکه تعدادترتیبهای n حرف p به p برابر است با :

$$(۱)\quad A_n^p = n(n-۱)(n-۲)\cdots\cdots(n-p+۱)$$

اگر طرف دوم رابطهٔ فوق را در $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ ضرب کنیم‌خواهیم داشت .

$$A_n^p = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots}{(n-p)!}$$

$$\frac{(n-p+۱)\times ۱\times ۲\times ۳\times ۴\times\cdots(n-p)}{(n-p)!}$$

$$(۲)\quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$ یا

مثلا تعداد گروههای ۷ حرف ۴ به ۴ برابر است با :

$$A_۷^۴ = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = ۸۴۰$$

تعدادگروههای ۱۰ حرف ۴ به ۴ برابر است با :

$$A_{۱۰}^۴ = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!}$$

تعداد ترتیب n حرف n به n به موجب فرمول (۱) چنین است :

$$A_n^n = n(n-۱)(n-۲)\cdots\cdots(n-n+۱) = n!$$

وبه موجب فرمول (۲) خواهیم داشت :

$$A_n^n = \frac{n!}{۰!}$$ یا $$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!}$$

وچنانکه ملاحظه می‌شود از تساوی

$$n! = \frac{n!}{۰!}$$ نتیجه می‌شودکه : $۰! = ۱$

دنباله دارد

تألیف : س.ای.نووسلو ، ترجمهٔ ، پرویز شهریاری

از انتشارات : گروه فرهنگی خوارزمی

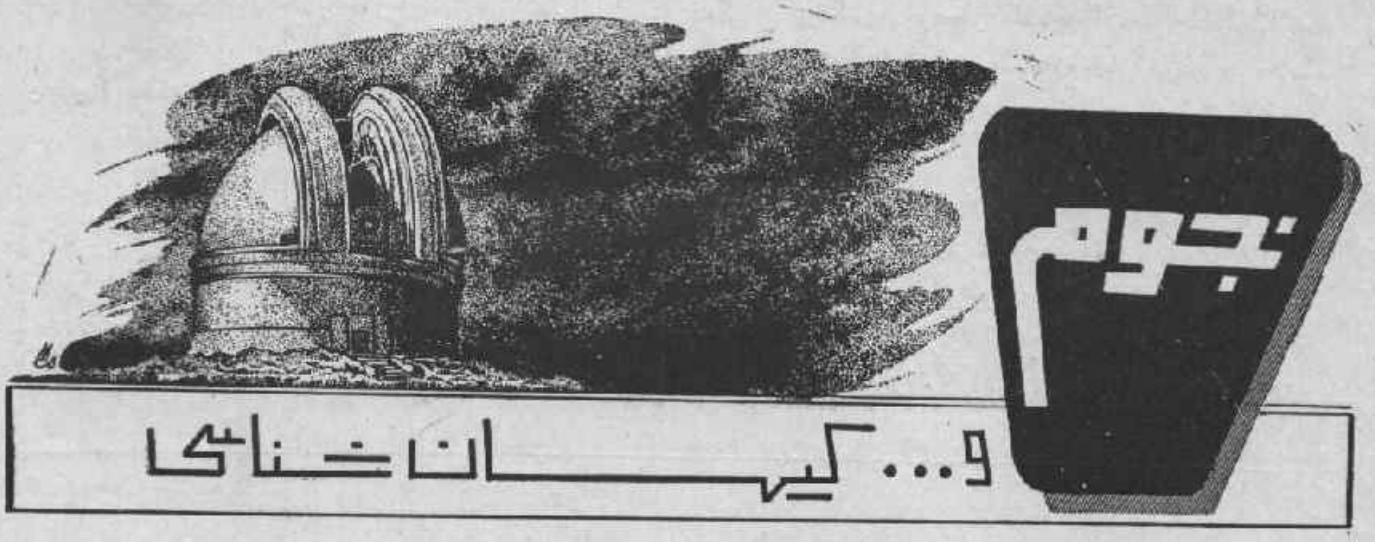
مرکز پخش: مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

۷۵۱ صفحه قطع وزیری ـ چاپ‌روی‌کاغذ سفید باجلد زرکوب

بها : ۴۲۰ ریال

مثلثات

مستقیم الخط وکروی



ترجمهٔ فصلی از کتاب : «L' Astronomie moderne» تألیف : TOCQUET

مراحل مهم علم نجوم

۲- دورهٔ جدید

پایان دورهٔ جدید

کشف سیارات کوچك به دورهٔ جدید مربوط می‌باشد. این سیارات در مداری واقع بین مریخ و مشتری دور خورشید گردش می‌کنند. **پیاری** (۱۸۲۶-۱۷۴۶ - PIAZZI.) استاد ریاضیات در **پالرم** درتاریخ اول ژانویهٔ ۱۸۰۱ اولین سیاره از این سیارات زیررا کشف کرد و آنرا **سرس**(Cérés) نامید. سرس نام یکی از خدایان افسانه‌ای **سیسیل** می‌باشد. بعدازآن نوبت به**البرس**(Olbers) منجم **برم** (Brême)رسید که در۲۸ مارس ۱۸۰۲ پالاس(Pallas) را کشف کند. **هاردینگ** (Harding) عضو رصدخانهٔ **لی‌لیانتال**نزدیك**برم** دراول‌سپتامبر۱۸۰۴**ژونن**(Junon) را کشف کرد. بالاخره در ۲۹ مارس ۱۸۰۷ سیارهٔ کوچك **وستا** (Vesta) توسط **البرس** کشف شد.

کشف‌این‌سیارات سروصدای قابل‌ملاحظه‌ای به‌راه‌انداخت زیرا علاوه بر اینکه جای خالی بین مریخ و مشتری پر شده بود برای صحت قانون **بد**(Titius Bode) هم دلیل‌قانع‌کننده‌ای ارائه شده بود.

کشف مهم دیگری که در این دوره انجام گرفت و متأسفانه آنطور که لازم بود از آن بهره‌برداری بعمل نیامد خطوط طیفی بود که توسط **فرنهوفر** (Fraunhofer) انجام گرفت.

ژوزف‌فرنهوفر(۱۸۲۶-۱۷۸۷)در**استروبنیگ(باویر)** به دنیا آمد. ابتدا به‌تراشکاری سنگهای قیمتی مشغول‌شد وبعد به عینك سازی اشتغال ورزیدوبه‌مشاهدات طیف خورشیدسر گرم شد. وی پس از آنکه ۳۵۴ خط سیاه را در طیف خورشید مشخص‌کرد، روشهای بررسی‌آنها را بدست داد، آنهارا رسم کرد، اوساع آنها را معین‌کرد. ووجوه عمدهٔ امتیاز بین‌آنها را بوسیلهٔ نمایش با حروف معلوم ساخت که هنوز هم متداول است، چنانکه می‌گوئیم خط D از سدیم یا خطوط H و K از کلسیم یونیزه.

فرانهوفر در رساله‌ای‌که در۱۸۱۷ منتشر ساخت توضیح داد که طیف ماه و سیارات درست همانند طیف خورشید است و نتیجه گرفت که نور این اجسام به تمامی از خورشید کسب می‌شود.

دوره‌ای که‌آنرا «جدید» نامیدیم بااولین اندازه گیری‌های فواصل‌آسمانی‌پایان می‌پذیرد؛در۱۸۳۸ **بسل**(Bessel) فاصلهٔ ستاره ای از صورت فلکی Cygne را تا زمین اندازه گرفت، در۱۸۳۹**ویلهلم استروو** (Wilhelm Struve) فاصلهٔ ستارهٔ نسر واقع **وهندرسن** (Henderson) فاصلهٔ مربوط به ستارهٔ α از صورت فلکی Centaure را تعیین کرد که

یکی از نزدیکترین ستارگان به منظومهٔ شمسی می‌باشد.

در همین دوره. بین سالهای ۱۸۴۵ و ۱۸۵۰، لرد **رس** (Rosse) به کشف اولین کهکشانهای مارپیچی نائل آمد.

توجه طبقهٔ تحصیل کرده بیش‌ازپیش به‌علم نجوم معطوف می‌شد. **آراگو** (۱۷۸۶-۱۸۵۳، Arago) مدیر رصدخانهٔ پاریس ازسال ۱۸۴۱ تا سال ۱۸۴۶ یك دوره درس نجوم داد.

مستمعین زیادی در محضر درس او حاضر می‌شدند و عدهٔ آنها روز به روز بیشتر می‌شد. وی علاوه برآن کتابی به نام «نجوم برای همه» منتشر ساخت و از این جهت است که وی یکی از بزرگترین مروجین علم نجوم آن عصر بحساب می‌آید.

در اینجا دورهٔ جدید علم نجوم پایان می‌پذیرد. خلاصهٔ تحولات علم نجوم در این دوره عبارتست از: اعلام و قبول فرضیهٔ کپرنیك، کشف و بیان قوانین کپلر، فعالیتهای گالیله، کشف قانون جاذبهٔ عمومی توسط نیوتن، فرضیهٔ لاپلاس وتکمیل روز افزون وسایل نجومی که فرصت کشف اورانوس را برای هرشل فراهم آورد. فعلا علم نجوم به اندازهٔ کافی پا برجاشده است و آمادهٔ جهش به دورهٔ معاصر نزدیك است که با کشف سیارهٔ نپتون توسط **لوریه** (Le Verrier) شروع می‌شود.

قمرهای سیارات

(استخراج از فرهنگ نجومی لاروس)

نام هر قمر، طول قطر آن برحسب کیلومتر و تاریخ کشف آن ذکر می‌شود:

زمین:

ماه	۳۴۷۰	-

مریخ:

۱- فوبوس،	۱۵	۱۸۷۷
۲- دیموس،	۸	۱۸۷۷

مشتری:

۱- یو،	۳۷۳۵	۱۸۹۲
۲- اروپ،	۳۱۵۰	۱۶۱۰
۳- گانیمد،	۵۱۵۰	۱۶۱۰
۴- کالیستو،	۵۱۸۰	۱۶۱۰
۵- آمالته،	۱۹۰	۱۸۹۲
۶-	۱۴۰	۱۷۰۴
۷-	۴۰	۱۹۰۵
۸-	۳۰	۱۹۰۸
۹-	۳۰	۱۹۱۴
۱۰-	۲۰	۱۹۳۸
۱۱-	۲۰	۱۹۳۸
۱۲-	۲۵	۱۹۵۱

زحل:

۱- میماس،	۶۰۰	۱۷۸۹
۲- آنسلاد،	۶۰۰	۱۷۸۹
۳- تتیس،	۱۲۰۰	۱۶۸۴
۴- دیونه،	۱۲۰۰	۱۶۸۴
۵- رآ	۱۸۰۰	۱۶۷۲
۶- تیتان،	۴۲۰۰	۱۶۵۵
۷- هیپریون	۵۰۰	۱۸۴۸
۸- ژاپت	۸۰۰	۱۶۷۱
۹- فوئبه	۲۰۰	۱۸۹۸

اورانوس:

۱- آریل،	۹۰۰	۱۸۵۱
۲- امبریل،	۷۰۰	۱۸۵۱
۳- تیتانیا،	۱۷۰۰	۱۷۸۷
۴- ابرون،	۱۶۰۰	۱۷۸۷
۵- میراندا،	۲۰۰	۱۹۴۸

نپتون:

۱- تریتون،	۵۰۰۰	۱۸۴۶
۲- نرئید،	۳۲۰؟	۱۹۴۹

دربارهٔ رشته مقالاتی که درچند شمارهٔ اخیر یکان زیرعنوان درسی از حساب به چاپ رسید اشاره به یك نکته را لازم می‌داند: با وجودی که برای تهیهٔ مقالات مزبور از کتابهای خارجی استفاده شده ولی قسمتهائی از آن بخصوص آنچه‌که دراین شماره درج می‌شود با استفاده ازجزوه‌ای فراهم آمده است که آقای علی‌اصغراردشیری با روش تندنویسی از بیانات استاد هشترودی تهیه کرده و در اختیار دانشجویان دانشسرای عالی همدورهٔ خود قرار داده بود.

درسی از حساب | تعیین جوابهای معادلهٔ پل

تنظیم از: محمود کاشانی

خلاصهٔ مطالب پیش:

۱)ـ معادلهٔ (۱) $x^2 - Dy^2 = 1$ که درآن عددصحیح و مثبت D مجذور کامل نیست به معادلهٔ پل معروف است.

۲)ـ این معادله بینهایت جواب صحیح و مثبت دارد.

۳)ـ اگر کوچکترین این جوابها را x_0 و y_0 بنامیم سایر جوابها را می‌توان از رابطهٔ (۲)

$$x + \sqrt{D}y = (x_0 + \sqrt{D}y_0)^n$$

بدست آورد.

۴)ـ برای تعیین سایر جوابها طرفین (۲) را در ازاء مقادیر صحیح و مثبت r و نسبت به $\overline{D}$ متحد می‌کنیم.

۵)ـ هیچ جواب صحیح و مثبتی نیست که در (۱) صدق کند و از (۲) بدست نیاید.

پس تعیین x_0 و y_0 برای حل کامل معادلهٔ پل کافی‌است که آنهم مستلزم مطالعاتی نسبتاً مفصل‌است ودراینجا فقط دستور تعیین x_0 و y_0 بدون‌اثبات ارائه می‌شود.

مقدمه:

اگر D مجذور کامل نباشد $\sqrt{D}$ عددی است اسم و می‌توان آنرا به‌کسر مسلسل تبدیل کرد.

مثال: D را برابر ۱۵ گرفته می‌بینیم که $3 < \sqrt{15} < 4$

پس:

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{t_1} \qquad (\alpha)$$

که در آن $t_1 > 1$ است و داریم $t_1 = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$ اینك چون ملاحظه شود که $0 < t_1 < 2$ است می‌توان نوشت:

$$t_1 = 1 + \frac{1}{t_2} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$

که درآن $t_2 > 1$ فرض‌شده وازرابطهٔ $t_2 = \frac{\sqrt{15}+3}{1}$ مقدارش‌بدست می‌آید ضمناً اگر مقدار t_1 را در (α) منظور کنیم خواهیم داشت:

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{t_2}} \qquad (\beta)$$

حال مجدداً با t_2 همانگونه عمل می‌کنیم‌که با t_1 کردیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{t_3}}}$$

این عمل هرگز تمام نمی‌شود فقط می‌توان آنرا در هر جا که لازم است متوقف کرد و با ادامهٔ آن $\sqrt{15}$ به کسر مسلسل متناوبی تبدیل می‌شود که در آن اعداد ۱ و ۶ متناوباً در مخرج کسرها ظاهر می‌شوند یعنی:

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}$$

دو قضیهٔ مهم زیر را ثابت می‌کنند:

۱ـ وقتی عدد صحیح و مثبت D مجذور کامل‌نباشد $\sqrt{D}$ قابل تبدیل به‌کسر مسلسل متناوب است و طریقهٔ عمل همانست که ذکر شد.

۲ـ اگر در تجزیهٔ D هیچ عاملی از درجهٔ ۲ به بالا نباشد (یعنی D بر هیچ مجذور کاملی جز یك بخش پذیر نباشد)

و اگر دورهٔ تناوب شامل k عدد و به صورت زیر باشد.

$$\sqrt{D}-b+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_k+\ddots}}}$$

در این صورت

اولا از حذف a_k به بعد (a_k آخرین مخرج از اولین دورهٔ تناوب است) کسر مسلسلی بدست می‌آید که به a_k-1 منتهی بوده و حاصل آنرا به صورت $\frac{p}{q}$ نشان می دهند.

ثانیاً- p بجای x_0 و q بجای y_0 در یکی ازمعادلات

$$x^2-Dy^2=\pm 1$$

صدق می کند.

مثال ۱-

$$\sqrt{10}=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}$$

دورهٔ تناوب شامل عدد ۶ است و $\frac{P}{q}=\frac{3}{1}$ بوده که چون $x_0=3$ و $y_0=1$ اختیار شوند در معادلهٔ

$$x^2-10y^2=-1$$

صدق می کنند.

مثال ۲-

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ddots}}$$

دورهٔ تناوب شامل اعداد ۳ و ۶ است و $\frac{p}{q}=\frac{10}{3}$ بوده که اگر $x_0=10$ و $y_0=3$ اختیار شوند درمعادلهٔ

$$x^2-11y^2=1$$

صدق می کنند.

مثال ۳-

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}}$$

دورهٔ تناوب شامل اعداد ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۶ است که چون $\frac{p}{q}$ محاسبه شود حاصل $\frac{18}{5}$ شده و $x_0-p=18$ و $y_0=q=5$ در معادلهٔ $x^2-13y^2=-1$ صدق می کنند

جمع آوری نتایجی که تاکنون بدست آمده است :

اگر منظور حل معادلهٔ $x^2-Dy^2=1$ باشد ابتدا D را به کسر مسلسل تبدیل می کنیم تا دورهٔ تناوب پیدا شود. از آخرین مخرج منتهی بوط به اولین دورهٔ تناوب به بعد صرف نظر کرده کسر مسلسل حاصل را حساب کرده آنرا با $\frac{p}{q}$ نمایش می‌دهیم. اگر $x_0=p$ و $y_0=q$ در معادلهٔ

$$x^2-Dy^2=1$$

صدق کنند جوابهای کلی این معادله از تساوی

$$x+\sqrt{D}\,y=(x_0-\sqrt{D}\,y_0)^r \quad r=1و2و3\ldots$$

بدست می‌آید و گر نه با توجه به قضیه ۱ازشمارهٔ قبل بسهولت معلوم می‌شود که جوابهائی که از تساوی

$$x+\sqrt{D}\,y=(x_0+\sqrt{D}\,y_0)^r$$

به ازاء مقادیر زوج r بدست آیند ریشه های معادلهٔ

$$x^2-Dy^2=1$$

خواهند بود و به ازاء مقادیر فرد r این جوابها متعلق بمعادلهٔ

$$x^2-Dy^2=-1$$

می‌باشند. مثلا ریشه‌های معادلهٔ $x^2-10y^2=1$ عبارتند از اعدادی که از تساوی

$$x+y\sqrt{10}=(3+\sqrt{10})^r$$

برای x و y پیدا نشود به شرطی که در آن $r=2k$ اختیار شود. ولی ریشه های $x^2-11y^2=1$ از تساوی

$$x+y\sqrt{11}=(10+3\sqrt{11})^r$$

به ازاء هریك از مقادیر r بدست بدست می‌آیند.

حل یك مسئلهٔ نمونه

مبنای x وعدد دورقمی $(\overline{aa})_x$ و عدد چهار رقمی $(\overline{bbbb})_x$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$(\overline{aa})^2_x = (\overline{bbbb})_x$$

مقدمه‌ای برحل ـ

ازرابطهٔ فوق به‌سهولت تساوی

$$a^2(x+1)^2 - b(x+1)(x^2+1). \quad (1)$$

بدست می‌آید که اگر از حل آن جوابهای بزرگی برای x پیداشود معقول نیست آن جوابهارا به‌عنوان مبنای عدد نویسی وسیلهٔ طرح مسئله ای قرار داده باشیم علیهذا از اینجا به‌بعد صورت مسئله را به‌شکل دیگر تغییر می‌دهیم .

مسئله ـ اعداد x و a و b را چنان‌پیدا کنید که دررابطهٔ (۱) صدق کرده و نامساویهای

$$0 < x \text{ و } 0 < a < x \text{ و } 0 < b < x$$

برقرار باشد.

حل ـ به موجب رابطهٔ (۱) باید داشته باشیم:

$$a^2(x+1) = b(x^2+1) \quad (2)$$

اگر x زوج باشد اعداد x^2+1 و $x+1$ که درطرفین (۲) واقع‌اند نسبت به‌هم اول‌اند پس‌باید

$$x+1 = bk$$

باشد ولی چون $b < x$ است تساوی اخیر محال است .

اگر x فرد باشد دراین‌صورت بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك x^2+1 و $x+1$ برابر ۲ بوده و میتوان فرض کرد $x+1 = 2u$ ضمناً می‌دانیم $x^2+1 = 2v$ یعنی $b < x+1$ دچون

دنبالهٔ درپائین صفحهٔ ۱۳

جدول مربوط به ریشه های اساسی معادلهٔ پل

y	x	D	y	x	D	y	x	D
۱	۸	۶۵°	۴	۲۳	۳۳	۱	۱	۲°
۸	۶۵	۶۶	۶	۳۵	۳۴	۱	۲	۳
۵۹۶۷	۴۸۸۴۲	۶۷	۱	۶	۳۵	۱	۲	۵°
۴	۳۳	۶۸	۱	۶	۳۷°	۲	۵	۶
۹۳۶	۷۷۷۵	۶۹	۶	۳۷	۳۸	۳	۸	۷
۳۰	۲۵۱	۷۰	۴	۲۵	۳۹	۱	۳	۸
۴۱۳	۳۴۸۰	۷۱	۳	۱۹	۴۰	۱	۳	۱۰°
۲	۱۷	۷۲	۵	۳۲	۴۱°	۳	۱۰	۱۱
۱۲۵	۱۰۶۸	۷۳°	۲	۱۳	۴۲	۲	۷	۱۲
۵	۴۳	۷۴°	۵۳۱	۳۴۸۲	۴۳	۵	۸	۱۳°
۳	۲۶	۷۵	۳۰	۱۹۹	۴۴	۴	۱۵	۱۴
۶۶۳۰	۵۷۷۹۹	۷۶	۲۴	۱۶۱	۴۵	۱	۴	۱۵
۴۰	۳۵۱	۷۷	۳۰۸۸	۲۴۳۳۵	۴۶	۱	۴	۱۷°
۶	۵۳	۷۸	۷	۴۸	۴۷	۴	۱۲	۱۸
۹	۸۰	۷۹	۱	۷	۴۸	۳۹	۱۷۰	۲۹
۱	۹	۸۰	۱	۷	۵۰°	۲	۹	۲۰
۱	۹	۸۲°	۷	۵۰	۵۱	۱۲	۵۵	۲۱
۹	۸۲	۸۳	۹۰	۶۴۹	۵۲	۴۲	۱۹۷	۲۲
۶	۵۵	۸۴	۳۵	۱۸۲	۵۳	۵	۲۴	۲۳
۴۱	۳۷۸	۸۵°	۶۶	۴۸۵	۵۴	۱۵	۱	۲۴
۱۱۲۲	۱۰۴۰۵	۸۶	۱۲	۸۹	۵۵	۱	۵	۲۶°
۳	۲۸	۸۷	۲	۱۵	۵۶	۵	۲۶	۲۷
۲۱	۱۹۷	۸۸	۲۰	۱۵۱	۵۷	۲۴	۱۳۷	۲۸
۵۳	۵۰۰	۸۹°	۱۳	۹۹	۵۸	۸	۷۰	۲۹°
۱۹۰	۱۹	۹۰	۶۹	۵۳۰	۵۹	۲	۱۱	۳۰
۱۶۵	۱۵۷۴	۹۱	۴	۳۱	۶۰	۲۷۳	۱۵۲۰	۳۱
۱۲۰	۱۱۵۱	۹۲	۳۸۰۵	۲۹۷۱۸	۶۱°	۳	۱۷	۳۲
۱۲۶۰	۱۲۱۵۱	۹۳	۸	۶۳	۶۲			
۲۲۱۰۶۴	۲۱۴۳۲۹۵	۹۴	۸	۶۳	۶۳			
۴	۳۹	۹۵						
۵	۴۹	۹۶						
۵۶۹	۵۶۰۴	۹۷°						
	۹۹	۹۸						
		۹۹						
	۱۰۱	۱۰۰						
۲۲۴۱۹	۲۲۷۵۲۸	۱۰۳						

درسی از فیزیک

تعیین فاصلهٔ کانونی عدسی به کمک فیزیک موجی

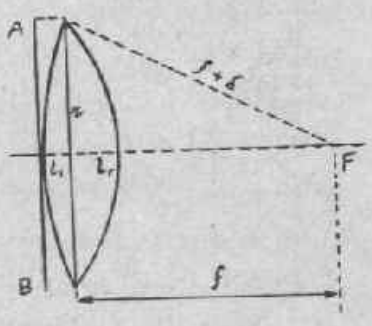
ترجمهٔ : هوشنگ شریفزاده

می‌دانیم که ذرات نور به صورت امواجی از منبع نور منتشر می‌شوند .

وقتی که نور منبعی توسط یك عدسی کانونی می‌شود (دریك نقطه به نام کانون جمع می‌شود) ، ذرات مختلف یك قلهٔ موج دریك لحظه به کانون می‌رسند، به این طریق است که نوردر آنجا متمرکز می‌شود ، درغیر این صورت همانطور که درمبحث تداخل امواج دیده‌ایم اگر فرورفتگیها و برجستگیها دریك لحظه برهم منطبق شوندیکدیگر را حذف می‌نمایند .

فرض می‌کنیم که منبع نوردرفاصلهٔ بسیار دوری درطرف چپ یك عدسی محدب قرار گرفته باشد . ذرات مختلفی ازنور که متعلق به یك قلهٔ موج هستند دریك لحظه درامتداد خط AB عماس برطرف چپ عدسی ، قرار می‌گیرند . چنانچه موج به طرف راست عدسی برود، این ذرات مسیرهای مختلفی را انتخاب می‌کنند ؛ ولی بالاخره همهٔ آنها ، پس از عبور ازعدسی ،در نقطه‌ای به نام کانون به یکدیگر ملحق می‌شوند . پس ذرات مختلف متعلق به یك قلهٔ موج ، ضمن عبور ازعدسی، مسیرهای متفاوتی را درمدت زمان متساوی طی می‌کنند .

برای پیدا کردن رابطه‌ای بین شکل عدسی و f ، فاصلهٔ کانونی آن ،کافی است که دومسیر رادرنظر بگیریم . البته‌ممکن است که مسیر تمام ذرات موج را که ازعدسی می‌گذرند رسم نمود ولی دوتای ازآنها برای آنچه که مادر جستجوی آن هستیم کافی است. این دومسیر راکه انتخاب می‌کنیم درشکل به‌صورت خط‌چین نمایش می‌دهیم . یکی ازاین دومسیر ازمرکز عدسی می‌گذرد ودیگری ازیکی ازکناره‌های عدسی . همانطور که درشکل می‌بینید ذره‌ای ازموج که ازکنارهٔ عدسی می‌گذرد تمام مسیر خود رادر هوا طی می‌کند . طول مسیری راکه این ذره طی می‌کند تا به کانون برسد برابر است با $l_1+f+\delta$. این مسافت در مدت زمانی برابر $\frac{l_1+f+\delta}{v_a}$ طی می‌شود که درآن v_a سرعت نور



است درهوا. از طرف دیگر ذره‌ای که ازمرکز عدسی می‌گذرد ،برای اینکه به‌کانون برسد ، قسمتی از مسیر خود را که برابراست با l_1+l_2 از میان شیشه و قسمت دیگر راکه برابراست با $f-l_2$ از میان هوا طی می‌کند. مدت زمانی که باید از میان شیشه عبور کند برابراست با $\frac{l_1+l_2}{v_g}$ و مدت زمانی که باید از میان هوا عبور کند برابر است با $\frac{f-l_2}{v_a}$. مجموع این دومدت زمان باید برابر بامدت‌زمانی باشد که ذرهٔ دیگر ازکنارهٔ عدسی عبورکرده و به‌کانون رسیده است یعنی :

$$\frac{l_1+f+\delta}{v_a}=\frac{l_1+l_2}{v_g}+\frac{f-l_2}{v_a}$$

طرفین این تساوی را در v_a ضرب وجملات متشابه را به یك طرف تساوی می‌بریم :

$$\delta=(\frac{v_a}{v_g}-1)(l_1+l_2) \qquad (1)$$

$f+\delta$ فاصلهٔ کنارهٔ عدسی‌است ازکانون آن و δ اختلاف این‌فاصله است از f فاصلهٔ کانونی عدسی . پس معادلهٔ (۱) رابطه‌ای است بین ضخامت عدسی واین اختلاف فاصله .

فاصلهٔ کانونی را می‌توان برحسب شعاع عدسی ، r ، و ایـن اختلاف فاصله ، δ ، بیان کرد . r و f اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستند که وتر آن برابر است با $f+\delta$. برطبق قضیهٔ فیثاغورث مربع وتر برابراست بامجموع مربعات دوضلع دیگر .

$$(f+\delta)^2=f^2+r^2$$

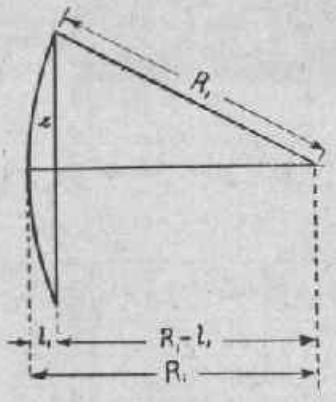
یا

$$\delta(2f+\delta)=r^2$$

به شرطی که شعاع عدسی نسبت به فاصلهٔ کانونی آن کوچک باشد l_2 نیز کوچک خواهد بود و می‌توان از مقدار آن در داخل پرانتز صرف نظر کرد . دراین صورت خواهیم داشت :

$$\delta = \frac{r^2}{2f} \qquad (2)$$

همچنین می‌توانیم رابطهٔ بین l_1 و l_2 را با شعاع عدسی r، وشعاعهای تحدب عدسی، R_1 و R_2 ، پیدا کنیم. بر طبق شکل می توان نوشت :



$$R_1^2 - (R_1 - l_1)^2 = r^2$$

یا

$$l_1(2R_1 - l_1) = r^2$$

به شرطی که l_1 نسبت به R_1 کوچک باشد می‌توان از مقدار آن درداخل پرانتز صرف نظر کرد . دراین صورت

$$l_1 = \frac{r^2}{2R_1} \qquad (3)$$

به طریقی مشابهٔ عملیاتی که انجام دادیم داریم :

$$l_2 = \frac{r^2}{2R_2} \qquad (4)$$

که در آن R_2 شعاع تحدب سطح سمت راست عدسی است . δ را ازرابطهٔ (۲) و l_1 را ازرابطهٔ (۳) و l_2 را ازرابطهٔ (۴) بدست می‌آوریم ودررابطهٔ (۱) می گذاریم .

$$\frac{r^2}{2f} = \left(\frac{v_a}{v_g} - 1\right)\left(\frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2}\right)$$

هردوطرف معادله را بر $\frac{r^2}{2}$ تقسیم می کنیم :

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{v_a}{v_g} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

این رابطه‌ای است بین فاصلهٔ کانونی عدسی و شعاعهای تحدب سطوح آن .

برطبق تعریف $\frac{v_a}{v_g}$ ضریب شکست شیشه است نسبت به‌هوا اگر آن را به n نمایش دهیم می‌توان نوشت :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

حل یک مسئلهٔ نمونه مربوط به معادلهٔ پل (بقیه ازصفحهٔ ۱۱)

u و v با هم اول‌اند پس :

$$a^2 = 2u = b \times 2v$$

و از آنجا $b = u$ و $v = a^2$ و داریم:

$$x^2 + 1 = 2a^2 \Longrightarrow x^2 - 2a^2 = -1 \qquad (3)$$

در معادلهٔ (۳) اگر $\sqrt{2}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل‌نموده $\frac{p}{q}$ را پیدا کنیم خواهیم داشت $p = 1$ و $q = 1$ یعنی اعداد $x = 1$ و $a = 1$ در (۳) صدق می‌کنند و برای تعیین سایر جوابهای (۳) باید r را در تساوی

$$x + a\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^r$$

عددی فرد انتخاب کرد.

تمرین: وقتی D بر مجذور کاملی بخش پذیر باشد چگونه‌ریشه های معادلهٔ پل را پیدا کنیم؟

ریشه‌های اساسی- چنانکه دیدیم وقتی $\sqrt{D}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کرده کسر $\frac{p}{q}$ را حساب‌کنیم p مساوی x_0 و q مساوی y_0 خواهد بود.این x_0 و y_0 به ازاء بعضی‌مقادیر D کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - Dy^2 = 1$ و به ازاء بعضی دیگر از مقادیر D ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - Dy^2 = -1$ خواهند بود در هردوحال x_0 و y_0 را که کوچکترین جواب یکی از معادلات $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ است ریشه های اساسی می‌نامند و جدول زیر که اقتباس از کتب خارجی است شامل همین ریشه‌های اساسی برای مقادیر $D < 10^3$ می‌باشد (یادآوری می‌شود که D مجذور کامل نیست) در جدول هرجا که x_0 و y_0 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - Dy^2 = 1$ است بالای عدد D علامت ٥ گذارده شده است.



مسائل حل‌نشدهٔ ریاضی

تألیف:
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ: ع. م.

بخش سوم ـ مسائل مربوط به بازیها

مربع وفقی یا مربع یونانی ـ لاتین در اصل مجموعه‌ای ازحروف یونانی وحروف لاتن بوده‌است: می‌توان به‌جای این حروف دودسته اشیاء متفاوت انتخاب کرد. مثلا درمورد مربع $n \times n$ می‌توان n حرف و n عدد بکاربرد. قاعده چنین‌است که درهریك از خانه‌های مربع یك حرف ویك‌عدد قرارداد به شرط اینکه هرحرف درهرستون ودرهرسطر مربع فقط یك دفعه وجود داشته باشد وهرعددباهرحرف *فقط یك دفعه همراه‌باشد.*

شکل مقابل یك مربع وفقی مرتبهٔ ۳ را نشان می‌دهد.

A۱	B۲	C۳
B۳	C۱	A۲
C۲	A۳	B۱

لئوناردداولر ثابت کردکه همواره‌می‌توان مربعهای وفقی‌مرتبهٔ فردومربعهای‌وفقی‌مرتبهٔ‌زوجی راکه مرتبهٔ‌آنهامضربی‌از۴باشدتشکیل داد. وی‌تصورمی‌کردکه‌تشکیل مربعهای وفقی مرتبهٔ زوجی‌که مرتبهٔ آنها مضربی از۴ نباشد (۶، ۱۰ و۱۴ و...) امکان پذیر نیست. این تصور درمورد مربعهای مرتبهٔ ۲ یا ۶ درست است اما در ۱۹۵۹ ثابت‌کردند که می‌توان هرنوع مربعهای وفقی بامرتبهٔ زوج را تشکیل‌داد. ومربع وفقی مرتبهٔ ۱۰ را نیز تشکیل دادند.

به‌جای بکاربردن حروف واعداد می‌توان اعداد دورقمی را بکار برد که رقمهای یکان آنها نمایندهٔ یك دسته اشیاء ورقمهای دهگان آنها نمایندهٔ یك دسته اشیاء دیگر باشد.

شکل پائین‌یك مربع‌وفقی مرتبهٔ ۱۰ را نشان می‌دهد. این مربع توسط **ا. ت. پارکر** درست شده است، این شخص یکی از اشخاصی‌است که‌امکان درست‌کردن یك چنین‌مربعهای وفقی را ثابت‌کردند.

دراین شکل مشاهده می‌شودکه نه خانهٔ واقع درگوشهٔ پائین‌وراست خود یك مربع وفقی مرتبهٔ ۳ را تشکیل‌داده‌اند.

۵۲	۶۱	۳۴	۸۵	۹۳	۲۹	۷۶	۱۸	۴۷	۵۰
۶۳	۵۲	۴۵	۹۴	۳۹	۷۰	۲۸	۵۷	۱۱	۸۶
۵۴	۱۳	۵۶	۴۹	۷۱	۳۸	۶۷	۲۲	۸۰	۹۵
۱۵	۲۴	۶۰	۷۲	۴۸	۵۷	۳۳	۸۱	۹۶	۵۹
۲۶	۳۵	۵۱	۵۸	۱۷	۴۴	۸۲	۹۰	۶۹	۷۳
۳۰	۶۶	۱۲	۲۷	۵۵	۸۳	۹۱	۵۹	۷۴	۶۸
۴۱	۵۰	۲۳	۶۶	۸۴	۹۲	۱۹	۷۵	۵۸	۳۷
۹۹	۸۸	۷۷	۵۳	۶۲	۵۱	۴۰	۳۶	۲۵	۱۴
۷۸	۹۷	۸۹	۱۰	۵۶	۶۵	۵۴	۴۳	۳۲	۲۱
۸۷	۷۹	۹۸	۳۱	۲۰	۱۶	۵۵	۶۴	۵۳	۴۲

تاکنون هرمربع وفقی مرتبهٔ ۱۰ که درست کرده‌اند درداخل آن یك مربع وفقی مرتبهٔ ۳ یافت شده است. اما تاکنون نه تنها موفق نشده‌اندکه علت این امر را معلوم‌کنند بلکه برای‌اثبات نظری آنهم توفیقی بدست نیاورده‌اند.

* * *

راجع به تعمیم شکل «دومینو» نظریه‌ای پیداشده که‌چهار پنج سال است موضوع روز می‌باشد؛ دومینو مربع مستطیلی‌است که ازچوب یامقوا یاکائوچو وغیره ساخته می‌شود، ابعاد آن ۲ بر یك است وبه دومربع مساوی تقسیم می‌شود.

(برای اینکه درترجمهٔ Polyominos که تعمیمی از کلمهٔ Dominos است‌اشکالی‌پیش نیاید دومینو به«دوخانه‌ای» وپولیو مینو به «چند خانه‌ای» ترجمه می‌شود. مترجم)

دنباله دریائین صفحهٔ ۱۹

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gautier مترجم : عطاءالله بزرگ‌نیا

فصل پنجم

نمونه هائی از مسائل که در آنها فقط یك واکنش بکار رفته است

روش حل این قبیل مسائل غالباً با روش حل مسائل ساده، که در فصل گذشته بیان شد تفاوت چندانی ندارد. فقط ممکن است چند محاسبهٔ ساده بیشتر داشته باشد .

حالت اول

۳۲ـ مقادیر دو جسم واکنش کننده معلوم است.ـ

در مسائل گذشته که فقط مقدار یکی از اجسام معلوم بود هر گاه این جسم یکی از اجسام واکنش کننده باشد ، مسلماً مقادیر سایر اجسام شرکت کننده در واکنش را باید بیش از اندازهٔ لازم فرض کرد . اما گاهی ممکن است مقادیر هر دو جسم واکنش کننده معلوم باشد در این صورت جز در یك حالت خاص در سایر موارد مقدار یکی از دو جسم واکنش کننده بیش از اندازهٔ لازم خواهد بود . بنابر این از روی مقدار جسمی که کاملا مصرف شده است می‌توان مقادیر سایر اجسام واکنش را تعیین نمود . اما باید دید این جسم کدامیك از دو جسم واکنش کننده است و به‌عبارت دیگر از دو مقدار معلوم کدامیك را باید انتخاب کرد.

بدون شك پاسخ به این سؤال را باید در معادلهٔ واکنش که نسبت جرم اجسام واکنش کننده را نشان می‌دهد جستجو نمود. بنابراین قبل از حل مسئله باید بر اساس معادلهٔ معین واکنش و با همان روش اقدام به حل یك مسئلهٔ مقدماتی نمود .

مثال I ـ ده گرم روی تحت اثر محلولی از کلریدریك که شامل ۱۲ گرم اسید خالص است قرار می‌دهیم حجم ئیدرژن حاصل را بدست آورید .

حل مسئلهٔ مقدماتی ـ ابتدا باید تعیین کرد که روی یا اسید کلریدریك کدامیك بطور کامل مصرف شده‌اند . به عبارت دیگر برای حل ده گرم روی چه مقدار اسید کلریدریك لازم است. اگر این مقدار کمتر از ۱۲ گرم باشد معلوم می‌شود مقدار اسید بیش از اندازهٔ لازم بوده و باید مسئله را از روی ده گرم روی حل کرد و اگر بیشتر از ۱۲ گرم باشد، مقدار روی اضافه است و باید با استفاده از ۱۲ گرم اسید مسئله را حل کرد .

$$Zn + 2HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2\uparrow$$

$$\begin{array}{cc} 65/4 & 73 \\ 10 & X \end{array}$$

$$\frac{X}{73} = \frac{10}{65/4} \Rightarrow X = 11$$

بنابراین مقدار اسید زیادتر از اندازهٔ لازم می‌باشد و باید مسئله را از روی مقدار روی حل نمود. (مراجعه به بند ۱۴)

محاسبهٔ مقدماتی در این مثال لازم می‌بود زیرا مقدار اضافی اسید کم بود . اما در حالتی که مقدار اضافی یکی از دو جسم زیاد و یا نسبت ساده‌ای بین آنها برقرار باشد نیازی به محاسبه نیست و نظراً می‌توان تعیین کرد که مقدار کدامیك از دو جسم باید مأخذ محاسبه قرار گیرد . مانند مثال زیر در مورد مخلوط دو گاز :

مثال II ـ در مخلوط 12^{cc} ئیدرژن و 8^{cc} اکسیژن جرقه بر قرار می‌کنیم جرم آب تشکیل شده چقدر است ؟

در اینجا آشکار است که مقدار اکسیژن اضافه می‌باشد زیرا دو حجم ئیدرژن با یك حجم اکسیژن ترکیب می‌شود .

بنابراین ئیدروژن بطور کامل مصرف خواهدشد و ۱۲^{cc} یا $\frac{۱۲}{۲۲۴۰۰}$ ملکول گرم آن همین کسر از ملکول گرم آب یعنی $\frac{۱۲\times۱۸}{۲۲۴۰۰}=۹/۶$ میلی گرم آب تولید می کند .

حالت دوم

۲۳- مقادیر مطلوب یا معلوم خالص نیستند و ناخالصی هادرواکنش دخالت نمی کنند . (مسائل اندازه گیری)

در معادلات شیمیائی فقط اجسام خالص شرکت می کنندو و در نتیجه مسئلهشیمی براساس مقادیرخالص اجسامحل می‌شود. اما قبل یا بعد از حل مسئله برای یافتن جسم ناخالص از روی خالص یا بالعکس اقدام بهمحاسبه نمود .

مثال I - مقداری بی‌اکسید منگنز ناخالص راتحت‌اثر اسیدکلریدریك زیاد قرار می‌دهیم بهفرض معلوم بودن جرم کلر متصاعد مقدار بی‌اکسید منگنز خالص را در نمونهٔ مزبور محاسبه کنید .

به‌کمك واکنش مربوط به سهولت می‌توان جرم بی‌اکسیدمنگنز خالص را در نمونهٔ ناخالص محاسبه نمود .

مثال II - چه مقدار هوابرای احتراق کامل دو لیتر ئیدروژن لازم‌است. ازروی واکنش‌حجم اکسیژن لازم (یك‌لیتر) رابدست می‌آوریم وچون ۱۰۰ لیترهواشامل ۲۱ لیتر اکسیژن است‌بنابراین حجم هوائی‌که شامل یك‌لیتر اکسیژن باشد برابر $\frac{۱۰۰}{۲۱}=۴/۷۶$ لیتر می‌باشد.

۲۴ - یك نمونه‌ازاین قبیل‌مسائل‌احتیاج به‌دقت‌مخصوص دارد وآن مسائل مربوط به اندازه گیری های حجمی است.

مثال III - به ۱۰۰^{cc}محلول‌نیترات نقره $۷/۳^{cc}$ محلول اسید کلریدریك ۵۰ گرم در لیتر می افزائیم . تمامی نقره به شکل‌کلرور ته‌نشین می‌شود .

تعیین کنید :

۱- جرم‌کلرورنقره‌را .

۲- جرم نیترات نقره را دریك لیتر محلول‌آن .

حل : مقادیر اجسام خالص موجود دریك لیتر محلول آنهارا طبق‌بند ۱۷ به ملکول‌گرم تبدیل می کنیم .

طبق واکنش :

$$AgNO_3+HCl\rightarrow HNO_3+AgCl\downarrow$$

$$۱۷۰^{gr}\quad ۳۶/۵^{gr}\quad ۱۴۳/۵^{gr}$$

بااستفاده از غلظت محلول اسیدکلریدریك که درهر لیتر شامل ۵۰ گرم اسید می‌باشد خواهیم داشت :

شامل ۵۰ گرم اسید می‌باشد خواهیم داشت :

$$\frac{۵۰\ HCl}{۳۶/۵}$$

و $۲/۳۰^{cc}$ آن شامل:

$$\frac{۷/۳}{۱۰۰۰}\times\frac{۵۰}{۳۶/۵}HCl=\frac{HCl}{۱۰۰}$$

درنتیجه تعداد ملکول‌گرم‌کلرور نقره برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ یعنی ۱/۴۳۵ گرم ومقدار نیترات‌نقره معادل $\frac{۱۷۰}{۱۰۰}=۱/۷$ گرم خواهد بود . واین مقدارنیترات در ۱۰۰^{cc} محلول‌آن وجود دارد. بنابراین هرلیتر محلول شامل ده‌برابراین‌مقداریعنی ۱۷ گرم نیترات نقره می‌باشد .

راه حل دیگر - با استدلالی مشابه با آنچه در مورد حجم گازها بیان‌شد .

« حجم ملکولی » محلول یعنی حجمی‌که شامل یك ملکول گرم از جسم خالص حل شده است پیدامی‌کنیم وچون دراین‌مسئله۵۰ گرم اسیددر $۱۰۰۰^{c.c}$ محلول یافته می‌شود بنابراین $۳۶/۵$ گرم‌آنددر $\frac{۳۶/۵}{۵۰}\times۱۰۰۰=۷۳۰^{cc}$ محلول وجود دارد . بنابراین **« حجم ملکولی »** این محلول ۷۳۰^{cc}است.

بنابراین طبق فرمول :

$$AgNO_3+HCl\rightarrow HNO_3+AgCl\downarrow$$

$۷/۳^{c.c}$ شامل $\frac{HCl}{۱۰۰}$ می باشد. وبقیهٔ حل طبق‌آنچه دربالا گفته‌شد انجام می‌شود .

۲۵ - محلولهای نرمال - در اندازه‌گیری مقادیر اجسام شیمیائی گاهی از محلولهای سنجیده استفاده می‌شود . دراین صورت محاسبات بسیار ساده خواهد بود .

محلول نرمال محلولی است که‌یك لیتر آن‌یك اکی‌والان گرم از جسم حل شده را در عمل وارد نماید . محلول دهمی نرمال شامل $\frac{۱}{۱۰}$ اکی والان گرم جسم حل‌شده درلیتر می‌باشد.

محلول نرمال اسیدها شامل یك اتم گرم ئیدرژن اسیدی و محلول نرمال باز شامل یك مجموعهٔ OH بازی در لیتر می‌باشند .

نظر به اینکه یك یون گرم ئیدرژن اسید بوسیلهٔ یك یون گرم OH بازی کامل خنثی می‌شود بنابراین محلولهای اسید وباز بادرجهٔ نرمالی مساوی باحجم مساوی کاملا یکدیگر را خنثی می‌سازند .

تعریف فوق در مورد محلول سایر اجسام نیز صادق می‌باشد. مثلا محلول نرمال پرمنگنات پتاسیم شامل یك اکی‌والان گرم پرمنگنات در هر لیتر می‌باشد . چون دو ملکول گرم پرمنگنات در محیط اسیدی ۵ اتم گرم اکسیژن معادل ۱۰ اتم گرم ئیدرژن یا ۱۰ والانس در عمل واردمی سازد .

بنابراین محلول نرمال آن شامل

$\frac{۲KmO_۴}{۱۰} = \frac{۲\times ۱۵۸}{۱۰} = ۳۱/۶$ گرم ودسی نرمال درآن

شامل ۳/۱۶ گرم پرمنگنات پتاسیم درلیتر می‌باشد .

۲۶ ـ مثال ـ درجهٔ نرمالی (نرمالیتهٔ) محلولی از سود که $^{cc}۳۰$ آن بوسیلهٔ $^{cc}۲۲/۵$ محلول نرمال اسید سولفوریك خنثی می‌شود پیدا کنید :

حل ـ $^{cc}۲۲/۵$ یا $\frac{۲۲/۵}{۱۰۰۰}$ لیتر محلول اسید شامل

$\frac{۲۲/۵}{۱۰۰۰}H$ اسیدی است که همین تعداد OH ، یعنی $\frac{۲۲/۵}{۱۰۰۰}$ ملکول

سود را خنثی می‌کند.

بنابراین $^{cc}۳۰$ ازمحلول سود شامل $\frac{۲۲/۵}{۱۰۰۰}$ ملکول گرم

سود ویك لیتر آن شامل $\frac{۲۲/۵}{۳۰} = \frac{۱۰۰۰}{۳۰} \times \frac{۲۲/۵}{۱۰۰۰} = ۰/۷۵$

ملکول گرم یا اکی‌والان گرم در لیتر است زیرا ملکول گرم واکی‌والان گرم سود بایکدیگر برابر است .

درپایان این کتاب حل چند نمونه ازمسائل نرمال نگاشته شده است.

حالت سوم

در مسائل مورد بحث در فصول گذشته مقدار معلوم یا مطلوب مستقیماً مربوط به اجسام ترکیب شونده بود . در مسائلی که ذیلا بیان می‌شود این مقادیر مربوط به نتایج محاسبات می‌باشد .

در بین انواع واکنشها ، واکنش بین گازها با تغییر حجم همراه است .

مثال ـ $^{c.c}۲۰$ درمخلوط اکسید کربن واکسیژن حرقه الکتریك برقرار می کنیم تمامی اکسید کربن محترق می‌شود حجم گاز باقیمانده $^{c.c}۱۴$ می‌باشد . ترکیب حجمی مخلوط را محاسبه کنید .

حل ـ چون تمامی اکسید کربن محترق شده است ازروی حجم آن باید حجم گاز اکسیژن و گاز کربنیك را تعیین کرد.

حجم $^{cc}۲۰$ و $^{c\ c}۱۴$ که درمسئله داده شده است مربوط به مخلوط گازها است ویك قسمت از این حجمها در واکنش شرکت نداشته است . از این جهت باید از اختلاف حجم یعنی ۱۴ـ۲۰ که معرف نقصان حجم دراثر احتراق است استفاده نمود .

طبق روش معمولی از راه مقایسه این نقصان حجم با نقصان حجم مربوط به واکنش باید مسئله راحل کرد .

در فرمول مربوط به ازاء حجم هر ملکول ، حجم یك سانتیمترمکعب را در نظر می گیریم :

$$CO + \frac{۱}{۲}O_۲ \longrightarrow CO_۲$$

$$۱^{cc}\quad \frac{۱^{cc}}{۲}\quad ۱^{cc}$$

نقصان حجم دراین واکنش $۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}^{cc}$ است .

وچون نقصان حجم درآزمایش فوق $^{c.c}۶$ یعنی ۱۲/۲ برابر نقصان حجم فرمول است برای یافتن حجم هریك ازگازها باید حجم آنها را ۱۲ برابر کرد بنابراین مخلوط اولیهٔ گازها شامل $^{cc}۱۲$ اکسید کربن و $^{cc}۸$ اکسیژن بوده است .

از انتشارات یکان :

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

به زودی منتشر خواهد شد .

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

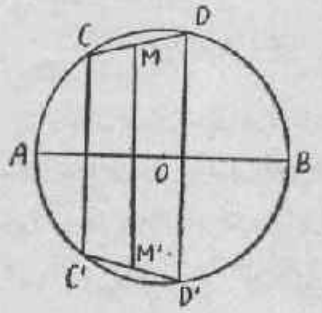
تالیف: E. J. Honnet چاپ هفتم . پاریس: ۱۹۶۳ ــ ترجمهٔ : ع م.

فصل سوم- چگونه ثابت کنیم که دو خط بر یکدیگر عمودانند

روش چهارم - استفاده از خواص خطوط متوازی

اگر دو خط متوازی باشند هرخط که بر یکی از آنها عمود باشد بر دیگری نیز عمود است . اگر دوخط برهم‌عمود باشند هر خط کـه با یکی از آنها موازی بـاشد بر دیگری عمود است .

مسئلهٔ ۳۲ ــ در دایرهٔ O دو وتر CC' و DD' را عمود بر قطر AB رسم‌می کنیم وCD و C'D' را رسم‌می کنیم. ثابت‌کنید خطی که اوساط دو وتر CD وC'D' را بهم وصل می‌کند بر AB عمود است .



فرض: $CC' \perp AB$، $DD' \perp AB$، M وسط CD، M' وسط $C'D'$

حکم : $MM' \perp AB$

اثبات‌ـوترهای CC' و DD' که‌هردو بر AB عمود هستند با هم موازی‌اند پس‌چهارضلعی CC'D'D ذوزنقه بوده و خط MM' که‌اوساط دوساق ذوزنقه را بهم وصل‌کرده با دو قاعده موازی است بنابراین بر AB عمود می‌باشد .

تمرینات

۱۳۸ ــ در لوزی ABCD خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم . ثابت کنید کـه BMDN مستطیل است .

۱۳۹ ــ در نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث ABC عمودی براین ضلع اخراج می‌کنیم تا ضلع BC را در N قطع کند . اگر N وسط ضلع BC باشد ثابت‌کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه است .

۱۴۰ــ دو دایرهٔ O و O' متخارج هستند. مماس‌مشترک خارجی آنها MM' را رسم می‌کنیم. اگرخط‌المرکزین OO' دایرهٔ O را در A و B و دایرهٔ O' را در A' و B' قطع کند و این‌نقاط به همین ترتیب واقع باشندثابت‌کنیدکه MA بر M'B و MB بر M'A' عمود است .

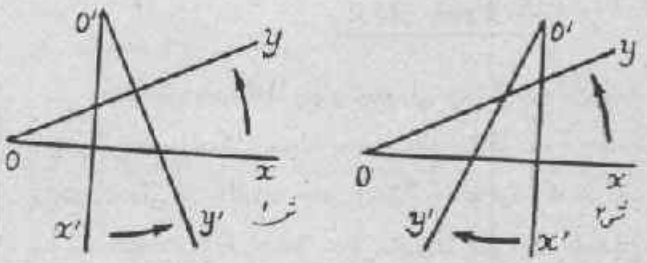
۱۴۱ ــ مسئلهٔ قبل را درحالتی‌حل‌کنیدکه MM' مماس مشترک داخلی دو دایره رسم شده باشد .

۱۴۲ــ باز هم همان مسئلهٔ قبل را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دو دایره مماس خارج بوده و نقطه‌های B و A' در یک نقطهٔ C منطبق باشند .

M'C دایرهٔ O را در N قطع می‌کند. ثابت کنید که AMCN مستطیل است .

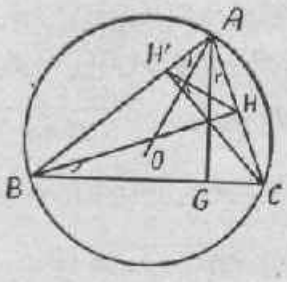
روش پنجم ـ استفاده از زاویه‌هایی که ضلعهای آنها بر یکدیگر عمودند

اگر ضلعهای دو زاویه بر یکدیگر عمود باشند آن دو زاویه در حالتی که هردو حاده یا هر دو منفرجه باشند با یکدیگر برابرند و برعکس : اگر دو زاویهٔ حاده (یا دو زاویهٔ منفرجه) با یکدیگر برابر بوده یك ضلع از اولی بر یك ضلع از دومی عمود باشد ،به‌شرط اینکه دوزاویه ، ابتدا از این ضلع . هم‌جهت باشند دوضلع دیگر آنها نیز بریکدیگر عمود می‌باشند .



در شکلهای بالا دوزاویهٔ XOY و $X'O'Y'$ باهم برابر بوده و OX بر $O'X'$ عمود است در شکل ۱ که دوزاویه هم‌جهت هستند ضلع OY هم بر ضلع $O'Y'$ عمود است . اما در شکل ۲ که دوزاویه مختلف‌الجهت هستند OY بر $O'Y'$ عمود نیست .

مسئلهٔ ۳۳ ـ در مثلث ABC ارتفاعهای BH و CH' را رسم کرده و نقطه‌های H و H' را به‌هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید که HH' بر شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث عمود است.



فرض : BH : ارتفاع ، CH' : ارتفاع ، OA : شعاع دایرهٔ محیطی

حکم : $OA \perp HH'$

اثبات ـ زاویه‌های A_1 و A_2 باهم برابرند (تمرین ۱۰۸) همچنین زاویه‌های B_1 و B_2 نیز برابرند. پس دو زاویهٔ A_1 و B_2 برابر می‌باشند. چهارضلعی $BH'HC$ محاطی است پس دوزاویهٔ B_2 و H'_1 برابرند و نتیجه می‌شود که دوزاویهٔ A_1 و H'_1 برابر باشند . اگر برای این دوزاویه ضلعهای AB و $H'C$ را ضلع مبدأ اختیار کنیم هردو زاویه در یك جهت هستند و چون دو ضلع مزبور بر یکدیگر عمودند پس دو ضلع دیگر دو زاویه یعنی $H'H$ و AO نیز بر یکدیگر عمودند .

تمرینات

۱۴۳ ـ اگر دوزاویه باهم برابر بوده و ضلعهای آنها نظیر به‌نظیر بر یکدیگر عمود باشند نیمسازهای داخلی (یا خارجی) آنها نیز بریکدیگر عمودند .

۱۴۴ ـ در دایرهٔ O دو شعاع عمود برهم OA و OB را رسم کرده از نقاط A و B و در همان جهت این شعاعها دو وتر متساوی AM و BN را رسم می‌کنیم . ثابت کنید که این دو وتر بر یکدیگر عمودند .

۱۴۵ ـ روی ضلعهای AD و DC از مربع $ABCD$ طولهای برابر AM و DN را جدا کرده BM و AN را رسم می‌کنیم ثابت کنید که این دوخط بر یکدیگر عمودند .

۱۴۶ ـ چهارضلعی $ABCD$ که در آن دو قطر در یك نقطهٔ G بر یکدیگر عمودند محاط در دایرهٔ O مفروض است. از M وسط CD به G وصل می‌کنیم ثابت کنید که MG بر AB عمود است .

۱۴۷ ـ در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط ضلع AB عمود MH را بر AB و به‌اندازهٔ نصف این ضلع واز N وسط ضلع AC عمود NG را بر AC و به‌اندازهٔ نصف این ضلع رسم می‌کنیم که MH و NG هردو درخارج مثلث واقع باشند . نقطه‌های H و G را به P وسط BC وصل می‌کنیم . ثابت کنید که زاویهٔ HPG قائمه است .

بهترین وسیله برای توفیق در حل مسائل ریاضی و در نتیجه موفقیت در امتحانات ، استفاده از کتاب پرارزش

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف : استاد دکتر محسن هشترودی

نشریهٔ ممتاز یکان است

روشهای تجزیهٔ عبارتهای جبری

پرویز شهریاری

تجزیهٔ یك عبارت جبری به صورت ضرب عوامل اول ، یکی از مباحث اساسی جبر است واهمیت آن ناشی از آنست که درهمهٔ زمینه‌های ریاضی‌مورد استعمال دارد : برای‌حل‌معادلات ساده‌کردن‌کسرها ، بیرون آوردن عبارتی اززیررادیکال و... همه‌جا به تجزیه احتیاج داریم . در عین حال تجزیه یکی از مشکل‌ترین مباحث جبراست ونمی‌توان راه حل‌عمومی برای‌آن ذکر کرد . مادراینجا یعنی از روشهای‌تجزیه را ذکرمی‌کنیم:

روش ضرایب نامعین : فرض کنید که‌بخواهیم‌عبارت x^4+2x^2+5 را به صورت ضرب دوعامل درجهٔ دوم تبدیل کنیم . عوامل‌تجزیه‌را x^2+ax+b و $x^2+\alpha x+\beta$ فرض می‌کنیم وبنابراین باید داشته باشیم :

$$x^4+2x^2+5\equiv(x^2+ax+b)(x^2+\alpha x+\beta)$$

اتحاد وقتی برقرار است‌که ضرایب x^p درطرفین‌تساوی برابر باشند داریم :

$$x^4+2x^2+5\equiv x^4+(a+\alpha)x^3+(b+\beta+a\alpha)x^2+(a\beta+b\alpha)x+b\beta$$

وبنابراین باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a+\alpha=0 \\ b+\beta+a\alpha=2 \\ a\beta+b\alpha=0 \\ b\beta=5 \end{cases} \qquad (1)$$

دستگاه چهارمعادلهٔ چهار مجهولی (۱) ازدرجهٔدوم‌است وبنابراین درحالت‌کلی منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ چهارم می‌شود ، ولی درحالتهای خاص (مسئلهٔ حالت فوق) که ضرایب مناسب انتخاب شده باشند ، می توان **ضرایب نامعین** a و b و α و β را بدست‌آورد .

از معادلهٔ اول دستگاه داریم : $a=-\alpha$ ، که اگر در معادلهٔ سوم دستگاه قرار دهیم به صورت $\alpha(b-\beta)=0$ درمی‌آید . $\alpha\neq 0$ است ، زیرا در غیراین صورت ازمعادلات دوم وچهارم دستگاه خواهیم داشت : $b+\beta=2$ و $b\cdot\beta=5$ که منجر به مقادیر موهومی برای b و β می‌شود . بنابراین $b=\beta$ خواهد بود . درنتیجه معادلهٔ چهارم به‌صورت $\beta^2=5$ درمی‌آید . ولی در حالت $\beta=-\sqrt{5}$ از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $\alpha^2=-2(\sqrt{5}+1)$: یعنی مقادیر a و α موهومی می‌شوند . بنابراین $b=\beta=\sqrt{5}$ وازمعادلهٔ دوم :

$$a=\mp\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$$ و بالاخره $$\alpha=\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$$

بدست می‌آید وبه‌این ترتیب داریم : *

$$x^4+2x^2+5=(x^2+\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}x+\sqrt{5})$$

***

*) راهی‌که برای تجزیهٔ این عبارت بکار بردیم ، ضمناً همهٔ انواع ممکنهٔ تجزیهٔ عبارت را بدست می‌دهد (اگر مقید به ضرایب حقیقی نباشیم)، نمونه‌های دیگر تجزیهٔ این عبارت چنین می‌شود :

$$x^4+2x^2+5=(x^2+1+2\sqrt{-1})(x^2+1-2\sqrt{-1})=$$
$$=(x^2+x\sqrt{-2(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{5})(x^2-x\sqrt{-2(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{5})$$

۲ـ استفاده از روش حل معادلات : فرض کنید تجزیهٔ عبارت زیر مورد نظر باشد :

$$A=۴(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$$

این عبارت ، یك عبارت معکوسهٔ درجهٔ چهارم است . برای تجزیهٔ آن ازهمان‌روش حل‌معادلهٔ‌معکوسه استفاده‌می‌کنیم. ابتدا از $x^۲$ فاکتور می‌گیریم :

$$A=۴x^۲(x^۲+x+۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲})$$

اگر $t-\frac{۱}{x}+x$ فرض‌کنیم ، $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲-۲$ می‌شود وبنابراین داریم :

$$A=۴x^۲(t^۲+t-۱)$$

مقدار داخل‌پرانتز نسبت به t از درجهٔ دوم وقابل‌تجزیه است . ریشه‌های آن $\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ است‌وبنابراین‌خواهیم‌داشت:

$$A=۴x^۲(t+\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})(t-\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})$$

دوباره بجای t مقدارش $x+\frac{۱}{x}$ را قرار می‌دهیم :

$$A=۴x^۲(x+\frac{۱}{x}+\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})(x+\frac{۱}{x}-\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})$$

وباتوجه‌به اینکه $۴x^۲=۲x\times۲x$ می‌باشد،هریك ازپرانتزها را در $۲x$ ضرب‌می‌کنیم :

$$A=[x^۲+(\sqrt{۵}+۱)x+۲][x^۲-(\sqrt{۵}-۱)x+۲]$$

۳ـ استفاده از دوری‌بودن عبارت

تعریف : تبدیل دوری (Périodique) یك عبارت جبری نسبت به n حرف a و b و c و ... و l و k عبارتست از عبارت دیگری که از عبارت اول وباتبدیل a به b و b به c و ... و l به k و k به l بدست آمده باشد .

مثلا عبارت $a^۲+b$ درتبدیل دوری نسبت به a و b به عبارت $b^۲+a$ تبدیل می‌شود (درعبارت اول a را به b و b را به a تبدیل نمودیم) . واضح است از تبدیل دوری عبارت دوم به همان عبارت اول خواهیم رسید .

ویا اگر بخواهیم تبدیلات دوری عبارت $x^۲+۳xy+۴z^۲$ را نسبت به چهارحرف x و y و z و t بدست‌آوریم ،داریم:

عبارت اصلی :	$x^۲+۳xy+۴z^۲$
تبدیل اول	$۱)y^۲+۳yz+۴t^۲$
تبدیل دوم	$۲)z^۲+۳zt+۴x^۲$
تبدیل سوم	$۳)t^۲+۳tx+۴y^۲$

و اگر عبارت (۳) را تبدیل دوری‌کنیم ، همان عبارت اصلی بدست می‌آید .

عبارتهای دوری : عبارتی را نسبت به n حرف a و b و c و ... و k و l دوری گوئیم‌که در اولین تبدیل دوری نسبت به این حروف به خودش تبدیل شود .

عبارت ab نسبت‌به a و b وعبارت $(x-y)(y-z)(z-x)$ نسبت به x و y و z عبارتهای دوری هستند ، زیرا در اولین تبدیل دوری ، هریك ازآنها به خودشان تبدیل می‌شوند .

اگر عبارتی نسبت به n حرف غیردوری باشد دارای $n-۱$ تبدیل دوری خواهد بود .

خاصیت اصلی : خاصیت اصلی یك عبارت دوری در اینست‌که آنرا به هر شکلی بنویسیم باز هم یك عبارت دوری خواهد بود . هرگز باعملیاتی از قبیل ساده‌کردن ، بازکردن پرانتزها ، تجزیه‌کردن ، تبدیل به اتحاد وغیره‌نمی‌توان یك عبارت دوری را به یك عبارت غیر دوری و یا برعکس تبدیل کرد .

چند مثال

۱) آیا تساوی زیراتحاد است ؟

$$(a+b-c)^۳+(ab+۲c)^۳=(ab-۲c)^۳+$$
$$+(a+b+c)^۳+۳a^۲bc$$

حل : سمت چپ تساوی نسبت به a و b یك عبارت دوری است (یعنی باتبدیل a و b به یکدیگر تغییر نمی‌کند)، در حالی‌که عبارت سمت راست تساوی نسبت به همین دوحرف a و b غیردوری است (زیرا جملهٔ $۳a^۲bc$ باتبدیل a و b به یکدیگر تغییر می‌کند) وبنابراین نمی‌تواند یك اتحاد باشد .

توضیح : واضح‌است‌که اگر هردوطرف یك تساوی‌نسبت به چند مجهول دوری باشند به معنای این نیست‌که تساوی یك اتحاد است . در این صورت برای تحقیق در اتحاد بودن آن بایستی راه دیگری را انتخاب‌کرد .

۲) عبارت زیر را تجزیه‌کنید :

$$A=(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳$$

حل : عبارت A نسبت به ۳ مجهول x و y و zدوری است بنابراین بعد ازتجزیه هم باید به صورت یك عبارت‌دوری نسبت به همین مجهولات درآید . از طرف دیگر روشن است که عبارت A به ازاء $x=y$ برابر صفر می‌شود ، بنابراین شامل فاکتور $x-y$ می‌باشد ، ولی چون عبارت A دوری‌است ناچار باید تمام تبدیلات دوری $x-y$ یعنی $y-z$ و $z-x$ جزو عوامل تجزیهٔ آن باشد ، درنتیجه می‌توانیم بنویسیم :

$$(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=$$
$$=\lambda(x-y)(y-z)(z-x)$$

۴ـ استفاده از جذر عبارتهای جبری :

قاعده: از عبارتهای جبری می‌توان باطریقی مشابه حساب عددی جذر گرفت ، دراین مورد باید به دونکته توجه داشت :

اولا برای اینکه عبارتی قابل جذر گرفتن باشد باید نسبت به مجهول خود (و اگر شامل چند مجهول است نسبت به همهٔ مجهولات) از درجهٔ زوج باشد .

ثانیاً اگر ضریب بزرگترین درجه مجذور کامل نباشد به معنای آن نیست که عبارت مفروض مجذور کامل نیست .

طریقهٔ جذر گرفتن : فرض کنید که می‌خواهیم جذر عبارت زیررا بدست آوریم :

$$9a^6-12a^5+10a^4-34a^3+21a^2-10a+25$$

صورت عمل چنین است :

$9a^6-12a^5+10a^4-34a^3+21a^2-10a+25$	$3a^3-2a^2+a-5$
$-9a^6$	$6a^3-2a^2$
$-12a^5+10a^4$	$-2a^2$
$+12a^5-4a^4$	$6a^3-4a^2+a$
$6a^4-34a^3+21a^2$	$+a$
$-6a^4+4a^3-a^2$	$6a^3-4a^2+2a-5$
$-30a^3+20a^2-10a+25$	-5
$+30a^3-20a^2+10a-25$	
$R=0$	

شرح عمل: ابتدا جذر کامل $9a^6$ یعنی $3a^3$ را می‌نویسیم ومجذور آنرا از $9a^6$ کم می‌کنیم .

سپس دوجمله یعنی $10a^4-12a^5$ را پائین می‌آوریم واولین جمله یعنی $-12a^5$ را بردوبرابر $3a^3$ (یعنی $6a^3$) تقسیم می‌کنیم ، خارج قسمت یعنی $-2a^2$ را در سمت راست $6a^3$ می‌نویسیم سپس حاصلضرب $6a^3-2a^2$ را در $-2a^2$ ضرب کرده از $10a^4-12a^5$ کم می‌کنیم . ضمناً $-2a^2$ را سمت راست $3a^3$ (دوبالا) هم می‌نویسیم . حالا دوباره دوجمله پائین می‌آوریم وپهلوی باقیماندهٔ قبلی می‌نویسیم و اولین جملهٔ عبارت حاصل را برهمان $6a^3$ (دوبرابر $3a^3$) تقسیم می‌کنیم و درسمت راست $-4a^2$ $6a^3$ (دوبرابر $3a^3-2a^2$) یا حاصل جمع $6a^3-2a^2$ یا $-2a^2$) می‌نویسیم و مانند سابق عمل را ادامه می‌دهیم . جذر عبارت $3a^3-2a^2+a-5$ می‌شود .

چند مثال

۱) عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل تجزیه کنید :

$$P=m^4+2m^3-m^2-2m-8$$

حل : اگر ازعبارت P جذر بگیریم چنین می‌شود:

$m^4+2m^3-m^2-2m-8$	m^2+m-1
$2m^3-m^2$	$2m^2+m$
$-2m^3-m^2$	$+m$
$-2m^2-2m-8$	$2m^2+2m-1$
$+2m^2+2m-1$	-1
$R=-9$	

می‌بینیم که عبارت مجذور کامل نیست وباقیمانده‌ای مساوی -9 دارد ، بنابراین P را می‌توان چنین نوشت :

$$P=(m^2+m-1)^2-9$$

---

*) برای اطلاع بیشتر از موارد استعمال عبارتهای دوری وبخصوص موارد استعمال فراوان عبارتهای متقارن (که حالت خاصی از عبارتهای دوری هستند) به کتاب کوچك به نام **«تقارن درهندسه وجبر»** مراجعه کنید (کتابهای سیمرغ شمارهٔ ۷) .

ودیگر ادامهٔ کار روشن است : باتوجه به اتحاد
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ خواهیم داشت :

$$P=(m^2+m-3)(m^2+m+2)=$$

$$=\frac{1}{4}(2m+1+\sqrt{17})(2m+1-\sqrt{17})(m^2+m+2)$$

(عبارت m^2+m+2 قابل تجزیه به عوامل حقیقی درجهٔ اول نیست) .

۲) ثابت کنید معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی ندارد :

$$x^8-2x^5+15x^4-16x^3+51x^2-14x+8=0$$

حل : عبارت سمت چپ تساوی مجذور کامل نیست وپس از جذرگرفتن از آن حاصلی برابر x^4-x^3+7x-1 و باقیمانده ای مساوی ۷ بدست می‌آید و بنابراین معادله را می‌توان چنین نوشت :

$$(x^4-x^3+7x-1)^2+7=0$$

روشن است که این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد (حاصل پرانتز حداقل برابر صفر است و بنابراین سمت چپ تساوی نمی‌تواند کوچکتر از ۷ باشد) .

۳) عبارت درجهٔ چهارم زیر را به دو عامل درجهٔ دوم تجزیه کنید :

$$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+2$$

حل : اگر از عبارت $f(x)$ جذربگیریم حاصلی برابر x^2+x+ و باقیمانده‌ای برابر ۱ پیدا می‌کند و بنابراین داریم :

$$f(x)=(x^2+x+1)^2+1$$

به این ترتیب ریشه‌های $f(x)=0$ موهومی است. این ریشه را بدست می‌آوریم :

$$f(x)=0 \Longrightarrow x^2+x+1=\pm\sqrt{-1}$$

۱) $x^2+x+1=\sqrt{-1} \rightarrow$

$$x_1=\sqrt{-1}\ ;\ x_2=-(1+\sqrt{-1})$$

۲) $x^2+x+1=-\sqrt{-1} \Longrightarrow$

$$x_3=-\sqrt{-1}\ ;\ x_4=-(1-\sqrt{-1})$$

اگر برای سهولت کار $\sqrt{-1}=i$ فرض کنیم خواهیم داشت :

$$f(x)=[(x-i)(x+i)][(x+i+1)(x-i+1)]=$$
$$=(x^2+1)(x^2+2x+2)$$

تمرین

این عبارتها را به صورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

۱) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

۲) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$

۳) $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

۴) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

۵) x^4+4x-1

۶) این معادله راحل کنید :

$$x^6+2x^5+3x^4+24x^3+13x^2+22x+21=0$$

۷) تجزیه کنید :

$$x^4-x^2+7$$

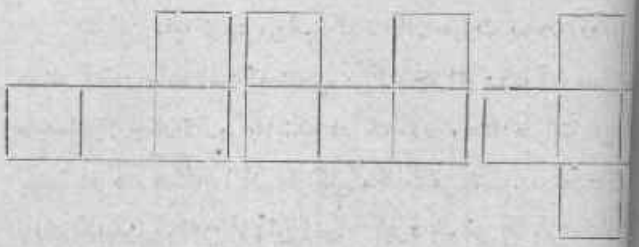
۸) تجزیه کنید :

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n$$

مسائل حل نشده

(بقیه از صفحهٔ ۱۴)

شکلی که از اجتماع چندین مربع مساوی تشکیل شده این مربعها دوبه دو حداقل در یك ضلع مشترك هستند چند-خانه‌ای می‌نامیم . درشکل زیر یك نوع چهار خانه‌ای ودونوع



پنج خانه‌ای مشاهده می‌شود .

هر چندخانه‌ای را می‌توان به‌انواع مختلف تهیه کرد . موضوع ساختن این چندخانه‌ایها موجب شده است که مسائل جالبی مشکلی مطرح شود. مثلا باتوجه به‌اینکه ۱۲ نوع پنج-خانه‌ای می‌توان درست کرد . شخصی می‌خواهد ازیك ورقه‌فیبر همهٔ این دوازده نوع پنج‌خانه‌ای را تهیه‌کند . اره‌ای که در اختیار دارد در گوشه ها نمی‌تواند بپیچد . البته شکل کلی یك چند خانه‌ای راکه برید بعد بوسیلهٔ خطکشی روی آن ، آن را خانه‌بندی می‌کند . مسئله ازاین قرار است که حداقل ابعاد ورقهٔ فیبر چه مقدار می‌باشد ؟

می‌دانند که از یك ورقهٔ فیبر به ابعاد ۶ و ۱۳ می‌توان هر ۱۲ نوع پنج خانه‌ای را بدست آورد اما در این صورت به اندازهٔ ۱۸ خانه از فیبر ضایع می‌شود ، زیرا ۱۲ پنج‌خانه‌ای فقط به اندازهٔ ۶۰ خانه از فیبر را اشغال می‌کند . آیا راهی وجود دارد که با صرفه‌جوئی کامل همراه باشد ؟

می‌دانند که ۱۲ نوع پنج خانه‌ای ، ۳۵ نوع شش خانه‌ای و ۱۰۸ نوع هفت خانه‌ای وجود دارد . اما تاکنون کسی موفق نشده است فرمولی کلی بدست آورد که تعداد نوعهای یك n خانه‌ای را برحسب n معلوم کند .



نویسندگان: ژ. گامو
م. استرن

ترجمه: از فرانسه

گفتگوی پدر و پسر

۶- مسابقهٔ تنیس

سامی خطاب به‌پسرش اظهار داشت :

ـ طرح مسائل مربوط به‌حساب احتمالات فعلاکافی‌است. آن اندازه‌ای که از این علم دانستم کفایت‌می‌کند تا ظرف یك هفته مبالغ هنگفتی از راه بازیهای شانسی بدست آورم . قبلا صحبت‌کرده بودی‌که در این تابستان بیشتر وقت خودت را در بازی تنیس گذرانده‌ای ، از خاطرات خودت تعریف کن . ریاضیات را فعلاکنار بگذار.

پسر سامی پاسخ داد :

ـ حرفی ندارم ، ریاضیات‌را کنار می‌گذارم ، اماراجع به تنیس هم با مسئله‌ای روبرو شده‌ام‌که هنوز نتوانسته‌ام برای آن راه حلی ریاضی وساده پیداکنم . سامی از اینکه تنیس هم به ریاضیات مربوط می‌شود اظهار تعجب کرد و پسرش چنین توضیح داد :

ـ شاید آنچه می‌گویم دقیقاً ریاضیات نباشد اما تا اندازه‌ای به‌آن مربوط می‌شود : یك دور مسابقهٔ تنیس بین جوانان رادرنظرمی‌گیریم، می‌خواهیم‌حساب کنیم‌که چندجعبه توپ لازم است در صورتی‌که می‌دانیم مسابقهٔ تنیس به‌این نحو انجام می‌گیرد که‌در ابتدای بازی کلیهٔ بازیکنان‌را به‌گروههای دونفری تقسیم می‌کنند ، بعداز پایان اولین دور ، بازندگان را کنار می‌گذارند و برندگان را باز به‌گروههای دو نفری دسته‌بندی می‌کنندو دور دوم مسابقه‌را شروع می‌کنند . مسابقه به‌این ترتیب ادامه‌می‌یابد تا موقعی‌که فقط یك‌نفر بازیکن باقی بماند که همان برندهٔ مسابقه‌است . این موضوع راهم اضافه‌کنم که اگر در بعضی دورها عدهٔ‌نفرات فرد باشد یکی ازبازیکنان صبر می‌کند تا یك نفر بازنده کنار برود و وی با برنده مسابقه دهد .

فرض می‌کنیم‌که در هردور بازی برای هرزوج بازیکن یك جعبهٔ توپ لازم باشد . موضوع مسئله عبارتست از محاسبهٔ تعداد جعبه‌های توپ لازم برای تمام دوره‌های مسابقه . آنچه در این محاسبه اشکال ایجاد می‌کند تعداد دفعاتی است که عدهٔ بازیکنها فرد می‌باشد و نمی‌توان پیش‌بینی کرد چه موقع پیش می‌آید .

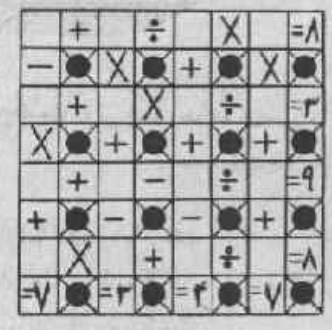
با معلوم بودن تعداد بازیکنان در ابتدای مسابقه و با توجه به تغییرات موقتی‌که در عدهٔ بازیکنان پیش می‌آید، من نتوانسته‌ام معلوم‌کنم که تا تعیین برندهٔ نهایی چند دور مسابقه انجام می‌گیرد .

سامی که اظهارات پسرش را دقیقاً گوش داده بود خنده را سرداد و گفت :

ـ این دفعه نوبت من‌است‌که تورااز حیرت بیرون‌آورم. مسئله آنقدر ساده است‌که تعجب می‌کنم چراتو روی آن معطل مانده‌ای : چکار داریم به‌اینکه در یك دور ، عدهٔ نفرات زوج باشد یافرد ، مسئله را از نظرکلی مطالعه می‌کنیم . در هردور بازی که‌بین یك‌زوج‌بازیکن انجام گیرد یك‌نفر از بازی‌کنار می‌رود . در پایان مسابقه فقط یك‌نفر ، برندهٔ مسابقه ، باقی می‌ماند . بنابراین اگر عدهٔ بازیکنان در ابتدای بازی n‌نفر باشد تا پایان مسابقه $n-1$ نفرکنار رفته‌اند یعنی $n-1$ دور بازی انجام گرفته پس $n-1$ جعبهٔ توپ لازم است .

سرگرمیهای یکان

جدول اعداد



طرح : هوشنگ امیر فتحی

دبیرستان ابن‌سینا رضائیه

افقی : ۱ ـ مجذور نصف شش برابر آن است. ۳ ـ توان هفتم عددی است . ۶ ـ حاصل‌ضرب سه‌عدد اول که ضمناً تصاعد حسابی هم می‌سازند . ۷ـ نصف آن مکعب کامل است . ۸ ـ مقلوب عدد ۱ افقی . ۹ ـ مقلوبش مقسوم علیهی ازعدد ۳ افقی است و نه مجذور کامل است ونه مکعب کامل . ۱۰ ـ مجذور بزرگترین عامل اول عدد ۶ افقی . ۱۴ ـ بهریك از اعداد ازیك تا ده بخش پذیر است . ۱۶ ـ اگر مجذورمجموع ارقامش به آن اضافه شود عدد ۳ افقی بدست می‌آید . ۱۷ ـ اگرصد برابرشود مکعب کامل گردد.

قائم : ۱ ـ دوبرابرعدد ۱۶ افقی .

۲ ـ هررقمش شمارهٔ مرتبهٔ نظیرش است .

۴ ـ مجموع ارقامش برابر ۱۵ است .

۵ ـ مجموع ارقامش سه برابر تفاضل آنها است .

۹ ـ اگر جذر عدد ۱۲ قائم به‌آن اضافه شود مجذور کامل گردد .

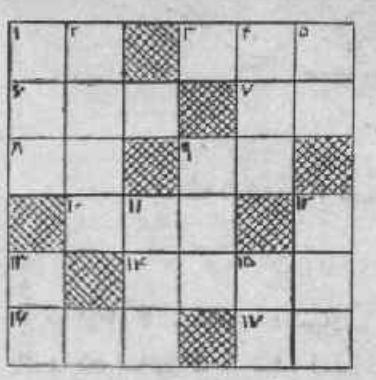
۱۱ ـ تکرار یك‌رقم.

۱۲ ـ رقم سدگان آن کلیهٔ اعدادرا می‌شمرد .

۱۳ـ بامجذور مجموع ارقامش برابراست .

۱۵ ـ عددی است کامل(تام) .

تکمیل جدول



طرح : نصیرزادی مقدم

دبیرستان کسری اردبیل

خانه‌های جدول بالا راباستفاده از اعداد یك رقمی چنان پر کنید که حاصل هر سطر یاستون مساوی باعدد داده شده باشد .

چرا چنین است؟

طرح : سید اسماعیل ذریت‌خواه

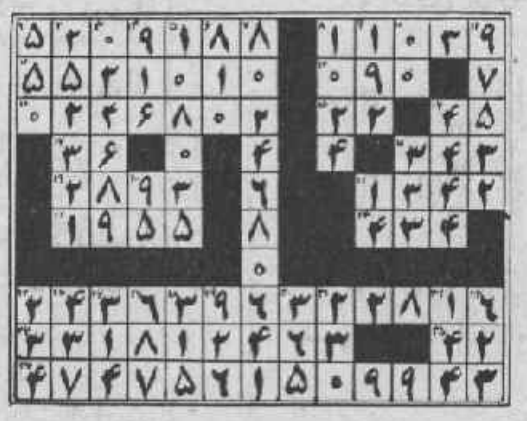
ششم ریاضی دبیرستان مرآت

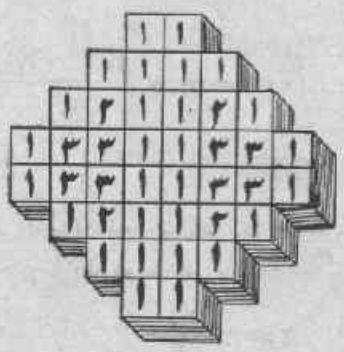
ظرفی است که‌دقیقاً ۱۱۲سانتیمتر مکعب گنجایش دارد . یك گلولهٔ کوچك پلاتین‌داخل‌آن می‌اندازیم ودراین حال اگرظرف راپرازآب کنیم ، حجم آب لازم کمتراز۱۱۲ سانتیمتر مکعب خواهد بود .

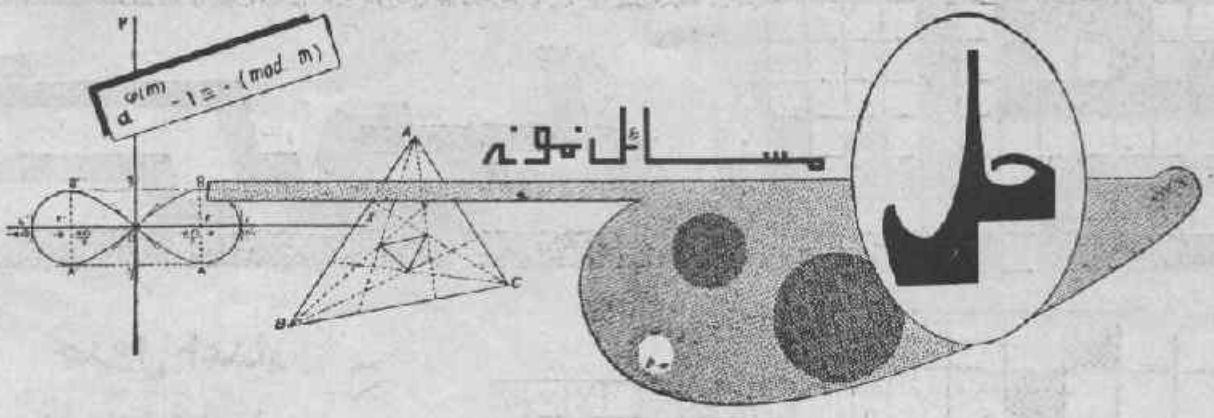
اما اگر علاوه بر گلولهٔ پلاتین مقدار ۵۴ سانتیمتر مکعب‌آب و۵۸ سانتیمتر مکعب الکل داخل ظرف بریزیم تمام‌آن درظرف‌جا خواهد گرفت .

چرا چنین است ،

پاسخ جدولهای شمارهٔ پیش







یك مسئلهٔ مکانیك (ترجمهٔ یدالله ارضی دانشجوی سال دوم دانشکدهٔ فنی تهران)

۴۰۶۶ ـ مطلوبست تعیین سرعت اولیهٔ لازم V_0 برای یك راکت فضائی که از سطح زمین در مدار ماه پرتاب گردد در صورتی که راکت موقعیتی را انتخاب نماید که در آنجا نیروهای ثقل ماه و زمین اثر همدیگررا خنثی نمایند ، درحل این مسئله از تأثیر حرکت زمین و ماه بعلت مقاومت هوا صرف نظر می‌گردد . $g=۹/۸^{m}/sec^{۲}$ نسبت تودهٔ ماه بهزمین $\frac{m}{M}=\frac{۱}{۸۰}$ و فاصلهٔ مراکز زمین و ماه برابر $d=۶۰R$ و $R=۶۰۰۰^{Km}$ است . f ضریب نیروی جاذبه از فرمول زیر بدست می‌آید :

$$m_۱g=m_۱f\left[\frac{M}{R^۲}-\frac{m}{(d-R)^۲}\right]$$

حل ـ اگر فرض گردد راکت در روی خط مستقیمی حرکت می‌کند که مراکز کرهٔ زمین و ماه را بهیکدیگر متصل می‌سازد درنقطه‌ای بفاصلهٔ r از مرکز زمین نیروهای زیر بر آن اثر می‌کند .

$$\begin{cases} F_{\text{زمین}} = f\dfrac{m_۱M}{r^۲} & (۱) \\ F_{\text{ماه}} = -f\dfrac{m_۱m}{(d-r)^۲} & (۲) \end{cases}$$

کار لازم : dA برای تغییر مکان dr بین دو مرکز از رابطهٔ زیر حاصل می‌گردد ،

$$dA=(F_{\text{زمین}}+F_{\text{ماه}})dr$$

$F_{\text{زمین}}$ و $F_{\text{ماه}}$ نیروی اعمالی از طرف زمین و ماه بر روی راکت و $m_۱$ جرم راکت است .

طبق فرض مسئله در فاصلهٔ r_0 داریم :

$$F_{\text{زمین}}+F_{\text{ماه}}=۰ \qquad (۳)$$

$F_{\text{زمین}}$ و $F_{\text{ماه}}$ را از روابط (۱) و (۲) در رابطهٔ (۳) قرار می‌دهیم خواهیم داشت :

$$F_{\text{زمین}}+F_{\text{ماه}}=fm_۱\left(\frac{M}{r_0^۲}-\frac{m}{(d-r_0)^۲}\right)=۰\Rightarrow$$

$$r_0=\frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}$$

طبق مطالب بالا کار لازم برای تغییر مکان (r_0-R) برابر است با :

$$(۴)\quad A=fm_۱\int_R^{r_0}\left[\frac{M}{r^۲}-\frac{m}{(d-r)^۲}\right]dr$$

$$=fm_۱m\frac{\frac{M}{m}(d-R)^۲-۲R(d-R)\sqrt{\frac{M}{m}}+R^۲}{Rd(d-R)}$$

اما اگر از رابطهٔ فرض مسئله f را بدست آوریم:

$$(۵)\quad f=\frac{gR^۲(d-R)^۲}{M(d-R)^۲-mR^۲}$$

با حذف f از روابط (۴) و (۵) :

$$(۶)A=m_۱g\,\frac{R(d-R)}{d}\times\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R}$$

این مقدار کار بایستی مساوی تغییرات انرژی جنبشی جسم پرتاب شده از سطح زمین تا نقطهٔ مورد نظر باشد :

$$A=m\frac{V_0^۲}{۲}$$

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

۴۰۶۷ ـ به‌فرض اینکه سه عدد متمایز ومخالف صفر x و y و z در دو رابطهٔ زیر صدق کنند

(۱) $xy-ax+a^2=0$

(۲) $yz-ay+a^2=0$ ، $a\neq 0$

صحت روابط زیر را محقق کنید .

(۳) $zx-az+a^2=0$

(۴) $xyz+a^3=0$

(۵) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{1}{a}$

۴۰۶۸ ـ ترجمه از فرانسه

چندجمله‌ای زیر را درنظر می‌گیریم

$f(x)=x^3-(a+b+1)x^2+(ab+2a-1)x-(a-1)(b+1)$

ثابت کنید که عبارت بالا در ازاء $x=1$ صفر می‌شود و عبارت را ابتدا به‌شکل $f(x)=x^2(x-1)-f_1(x)$ و بعد به‌شکل $f(x)=(x-1)\varphi(x)$ تبدیل کرده معادلهٔ $\varphi(x)=0$ را حل کنید .

۴۰۶۹ ـ ترجمه از فرانسه

نیمدایرهٔ به‌قطر $AB=2R$ مفروض است . نقطهٔ C را روی نیمدایره انتخاب می‌کنیم که $BC=x$ باشد و در داخل نیمدایره کمان CD را به‌مرکز B وبه‌شعاع BC رسم می‌کنیم (D بر AB واقع است) .

۱) S مجموع مساحتهای سطوح حادث از دوران کمانهای AC و CD را حول AB برحسب R و x حساب کنید .

۲) نمایش هندسی تابع $y=\frac{S}{\pi}$ را در ازاء مقادیر قابل قبول x رسم کنید .

۴۰۷۰ ـ ترجمه از مجلهٔ ریاضیات فرانسه

ذوزنقهٔ قائم ABCD که در آن زاویه‌های A و D قائمه بوده و $AB=a$ و $CD=4a$ و $AD=5a$ مفروض است. بر ساق AD نقطهٔ M را تعیین می‌کنیم که $AM=x$ باشد . مقدار x را چنان تعیین کنید که :

اولا زاویهٔ BMC قائمه باشد.

ثانیاً اندازهٔ زاویهٔ DMC دوبرابر اندازهٔ AMB باشد .

۴۰۷۱ ـ از **کاظم حافظی**

جوابهای کلی معادلهٔ زیر را پیدا کنید .

$\cos^2(n+1)x+\sin^2(n-1)x=\cos^2 2x$

۴۰۷۲ ـ ترجمه توسط: **پرویز خواجه خلیلی**

اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ سه مقدار متمایز بوده و داشته باشیم $tg3\alpha=tg2\beta=tg3\gamma$ ثابت کنید که :

$(tg\alpha+tg\beta+tg\gamma)(cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma)=9$

بقیه از صفحهٔ روبرو

چه در آن نقطه $V=0$ می‌گردد

از اینرو داریم :

$$V_2^2=\frac{2gR(d-R)}{d}\times\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R}$$

با فرض $g=9/8 m/s^2$ و $d=60R$ و $R=6000 Km$ و $\frac{m}{M}=\frac{1}{80}$ سرعت اولیهٔ لازم برای پرتاب راکت عبارت خواهد شد از :

$V_0=10/75 Km/s$

۴۰۷۳ ـ ترجمهٔ **محمدجواد غفوری**
دانشجوی دانشکدهٔ پلی‌تکنیک

شش‌ضلعی ABCDEF در دایرهٔ O به‌شعاع R محاط است و می‌دانیم که :

$AB=BC=2x$ و $CD=FA=2y$ و $DE=EF=2z$

معادله‌ای تشکیل دهید که در آن مقدار R برحسب x و y و z بدست آید .

۴۰۷۴ ـ از **بهمن ازگمی** دبیر دبیرستانهای همدان

سه دایرهٔ متساوی و دو به دو متماس را در یك مثلث متساوی‌الاضلاع محاط کرده‌ایم . اگر طول شعاع هریك از این دایره‌ها r باشد طول ضلع مثلث را برحسب r حساب کنید .

۴۰۷۵ ـ ترجمه ازمجلهٔ تربیت ریاضی

مثلث ABC که درآن زاویهٔ A دوبرابر زاویهٔ C است مفروض است . نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم که ضلع BC را در D وخطی را که از C موازی با AB رسم می‌شود در A' قطع کند . از نقطهٔ E مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ، عمودی بر AD اخراج می‌کنیم که دایرهٔ به‌قطر AD را در M و N قطع می‌کند. طول هریك از قطعه خطهای BD ، DC ، ED ، AE و MN را برحسب a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث حساب کنید .

۴۰۷۶ ـ ترجمه از مجلهٔ تربیت ریاضی

دو دایرهٔ O و O' به‌شعاعهای R و R' در A مماس خارج هستند . وتر AM را در دایرهٔ O و وتر AM' را در دایرهٔ O' عمود بر AM رسم می‌کنیم .

۱ـ ثابت کنید که اگر M دایرهٔ O را بپیماید خط MM' بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۲ ـ نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که طول MM' برابر با طول معلوم l باشد. بحث کنید .

۴۰۷۷ ـ ترجمه از مجلهٔ ریاضیات دانش‌آموز

(صورت مسئله توسط **بهروز نوبهار** از دبیرستان‌جوینی قوچان نیز ارسال شده است)

مثلث ABC مفروض است . در A عمودهایی بر AB و AC رسم می‌کنیم که BC یا امتداد آن را به‌ترتیب در D و E قطع می‌کنند . ثابت کنید که : $DE=BC\ tg B\ tg C$

۴۰۷۸ ـ از **حسن نوریان** ، همدان

در مکعبی به‌طول‌یال a استوانه‌ای دوارچنان محاط کنید که محورش بایك قطر مکعب موازی بوده و حجمش ماکزیمم باشد و حجم آن را برحسب a حساب کنید .

۴۰۷۹ ـ ترجمهٔ **ژوزف بهنامی**

یك تابع اولیهٔ هریك از دوتابع زیر را بدست‌آورید .

$$y=\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} \quad و \quad y=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

۴۰۸۰ـ ترجمه از فرانسه

دوعدد مثبت a و x به‌فرض $a<x$ مفروض‌اند .

اولا نامساویهای زیر را محقق کنید

$$(1)\quad \frac{a^2}{x}<a<\frac{1}{2}\left(x+\frac{a^2}{x}\right)$$

ثانیاً با استفاده از نامساویهای(۱) ثابت کنید که اگر A عددی مثبت بوده و مجذور کامل نباشدو چنانچه x_0 یك مقدار تقریبی‌اضافی $\sqrt{A}$ باشد مقدار x_1 که ازرابطهٔ:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{A}{x_0}\right)$$

بدست می‌آید با تقریب اضافی کمتری به مقدا رحقیقی $\sqrt{A}$ نزدیك است یعنی اینکه $\sqrt{A}<x_1<x_0$

و حداکثر خطای مربوط به انتخاب x_1 را تعیین کنید .

مثال عددی ـ جذرتقریبی اضافی $A=2/10111$ را با تقریب ۰/۰۰۰۱ حساب کنید .

۴۰۸۱ ـ فرستنده : **قوام نحوی** از اصفهان

عددی‌چهاررقمی به‌شکل $\overline{abcd}$ پیداکنید که داشته‌باشیم:

$$\overline{dcba}-\overline{abcd}=\overline{mm(m-1)(m-1)}$$

۴۰۸۲ ـ فرستنده : **یدالله ارضی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی

عددی چهار رقمی به‌شکل $\overline{abcd}$ چنان تعیین کنید که محذورش به‌شکل‌زیر باشد :

$$M=\overline{\ldots\ldots abcd}$$

۴۰۸۳ ـ ترجمهٔ **سعید فرشاد** ، شصم ریاضی دبیرستان گلشن‌راز شبستر

مجموع زیر را برحسب n حساب کنید .

$$S=\sum_{N=2}^{N=n}\frac{6}{N^3-N}$$

دو مسئله مربوط به ریاضیات جدید

ترجمهٔ از فرانسه

۴۰۸۴ ـ ۱) مجموعهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$E=\{a,b,c,d\}$$

کلیهٔ زیر مجموعه‌های E را تشکیل دهید.

۲) اگر تعداد عنصرهای یك مجموعهٔ E برابر با n باشد تعداد زیر مجموعه‌های E را در حالتهای :

$n=۱$ و $n=۲$ و $n=۳$ و $n=۴$

حساب کنید (خود مجموعهٔ E و نیز مجموعهٔ تهی به‌حساب خواهد آمد)

۳) اگر p تعداد زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ E با n عنصر باشد و E' مجموعه‌ای باشد با $(n+۱)$ عنصر آیا می‌توان p' تعداد زیر مجموعه‌های E' را از روی آن نتیجه گرفت؟

۴۰۸۵ ـ فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای باشد که روی آن دو قانون ترکیب داخلی اولی با نشانهٔ o و با عنصر بی‌اثر e و دومی با نشانهٔ * و با عنصر بی اثر f تعریف شده است. به‌علاوه فرض می‌کنیم که x و y و u و v عنصرهای E هرچه باشند داریم :

(۱) $(x*y)o(u*v)=(xou)*(yov)$

۱) ثابت کنید که $e=f$

۲) ثابت کنید که $x*y=xoy$

۳) ثابت کنید که عمل o (یا *) مستقل از ترتیب عوامل و شرکت پذیر است.

دو مسئله در بارهٔ بردارها

ترجمهٔ : **هوشنگ شریفزاده**

۴۰۸۶ ـ اگر OAB مثلثی دلخواه و C نقطه‌ای از AB باشد که $m.AC=n.CB$ داشته باشیم ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$m\vec{OA}+n\vec{OB}=(m+n)\vec{OC}$$

۴۰۸۷ ـ در مثلث ABC نقاط M و N و O به ترتیب وسطهای ضلعهای AB و BC و CA می‌باشند. اگر D نقطهٔ دلخواهی باشد صحت رابطهٔ زیر را محقق کنید.

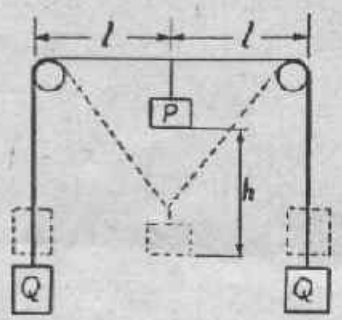
$$\vec{DA}\wedge\vec{DN}+\vec{DB}\wedge\vec{DO}+\vec{DC}\wedge\vec{DM}=۰$$

دو مسئلهٔ مکانیك

ترجمهٔ : **رسول آژیری** دبیر دبیرستانهای گچساران

۴۰۸۸ ـ وزنه‌های A و B که وزن آنها به‌ترتیب ۲۴kg و ۴۰kg است بوسیلهٔ ریسمانی که از روی قرقره گذشته است به‌هم وصل شده‌اند. قرقره را با نیروی $F=۱۲۰kg$ به‌طرف بالا می‌کشیم شتاب وزنه‌های A و B را پیدا کنید (از وزن ریسمان و قرقره صرف‌نظر شود)

۴۰۸۹ ـ در شکل مقابل دستگاه را از حال تعادل بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. ماکزیمم ارتفاعی که وزنهٔ P پائین می‌رود چقدر است.



بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

من به‌فرامرز گفتم که جواد می‌گفت یك بشقاب پرنده دیده است. فرامرز جواب داد که : یك کلمه از حرفهای جواد را باور مکن.

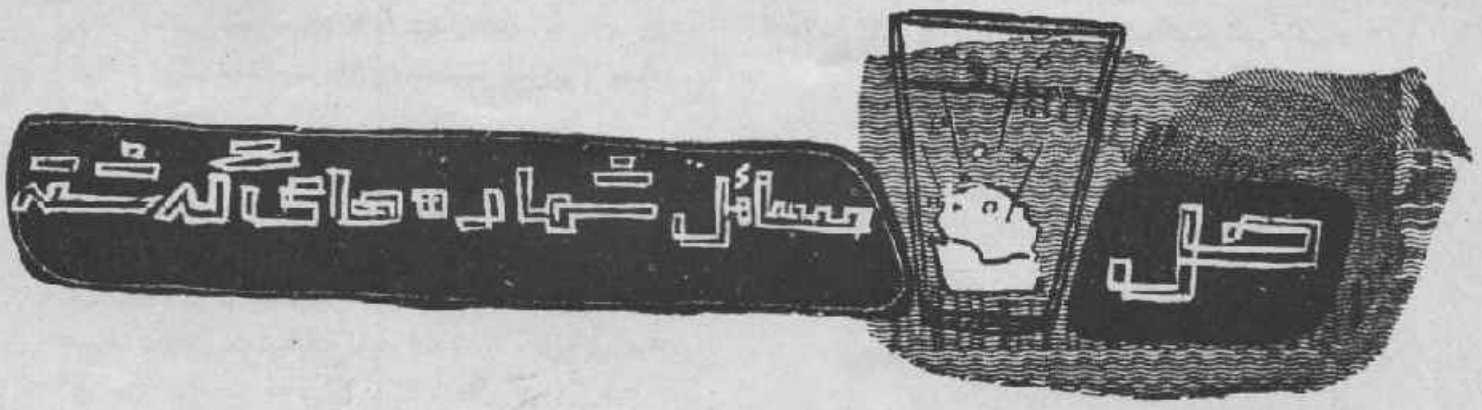
من در جواب فرامرز گفتم : عجیب است، جواد در بارهٔ تو درست برعکس تو عقیده داشت. ومن به‌فرامرز حقیقت را گفته بودم.

احتمال اینکه جواد بشقاب پرنده را دیده باشد تا چه حد است ؟

ترجمهٔ : **داود مصطفی**

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان مندرج در یکان شمارهٔ قبل

در فرض داشتیم که صندوقدار کمتر از همه وفروشنده بیشتر از همه حقوق می‌گیرد. زنی که بیش‌از متصدی مغازه حقوق می‌گیرد فروشنده است و میترا نام دارد. صندوقدار یگانه فرزند خانواده است پس مینو که دارای برادر می‌باشد متصدی مغازه و مینا صندوقدار است.



حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۳

کلاس چهارم طبیعی

۴۰۰۴ـ اگر x و y و z تصاعد هندسی با زتدیعنی داشته باشیم $y=qx$ و $z=q^2x$ و $q>0$ باشد دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} x+2y+3z=11 \\ 3(x+y+z)=19 \end{cases}$$

حل ـ دستگاه به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{cases} x(1+2q+3q^2)=11 \\ 3x(1+q+q^2)=19 \end{cases}$$

از تقسیم طرفین تساوی بر هم نتیجه می‌شود

$$\frac{1+2q+3q^2}{1+q+q^2}=\frac{33}{19}\Rightarrow 24q^2+5q-14=0$$

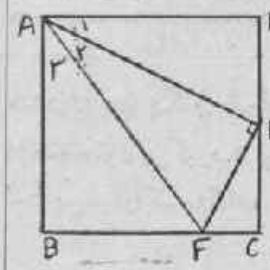
ریشه‌های این معادله می‌شود

$$q=\frac{2}{3} \text{ و } -\frac{7}{8}$$

که ریشهٔ مثبت قابل قبول است ودرازاء آن خواهیم داشت

$$x=3 \text{ و } y=2 \text{ و } z=\frac{4}{3}$$

۴۰۰۵ ـ مربع ABCD به ضلع a مفروض است از A به E وسط CD وصل کرده‌ودر E عمودی بر AE اخراج می‌کنیم که BC را در F قطع می‌کند و AF را رسم می‌کنیم



۱) ثابت کنید که دو مثلث ADE و CEF متشابهند .طول ضلعهای آنها را برحسب a حساب کنید .

۲) ثابت کنید که دو زاویهٔ DAE و EAF بایکدیگر برابر بوده وهر کدام آنها از زاویهٔ FAB کوچکتر می‌باشند .

۳) نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $\alpha=FAB$ را حساب کنید

حل ـ ۱) چون زاویهٔ AEF قائمه است زاویهٔ AED متمم زاویهٔ FEC است از طرف دیگر زاویهٔ AED متمم زاویهٔ DAE است. بنا بر این دوزاویهٔ DAE وFEC باهم برابرند ودر نتیجه دومثلث ADE و EFC متشابه می باشند و داریم :

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DE}{CF}=\frac{AE}{EF}\Rightarrow CF=\frac{a}{4}$$

$$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ و } EF=\frac{a\sqrt{5}}{4}$$

۲) درهریك ازمثلثهای ADE وAEF و AFB داریم

$$tgA_1=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2} \text{ و } tgA_2=\frac{EF}{AE}=\frac{1}{2}$$

$$tgA_3=\frac{BF}{AB}=\frac{3}{4}\Rightarrow A_1=A_2<A_3$$

۳) داریم

$$tg\alpha=tgA_3=\frac{3}{4} \text{ و } cotg\alpha=\frac{4}{3}$$

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\ldots=\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\ldots=\frac{4}{5}$$

کلاس چهارم ریاضی

۴۰۰۶ ـ اندازه‌های ضلعهای مثلثی عددهای متوالی هستند اگر مساحت این مثلث ۸۴ واحد مربع باشد طول هر یك از ضلعهای آن چقدر است

حل ـ فرض می کنیم

$$\begin{cases} a=x-1 \\ b=x \\ c=x+1 \end{cases} \Longrightarrow \text{نصف محیط} : p=\frac{3x}{2}$$

با توجه به‌فرمول $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$x^4-4x^2-37632=0 \Longrightarrow x=\pm 14$$

که جواب مثبت قابل قبول است یعنی :

$$x=14 \text{ و } b=14 \text{ و } c=15 \text{ و } a=13$$

۴۰۰۷ ـ ثابت‌کنید اگر معادلهٔ :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

که ضریبهای جمله‌های آن‌عددهای درست هستند دارای‌یك‌ریشهٔ گویای $x_1=r$ باشد با شرط $c+ar^2=0$ دو ریشهٔ دیگر معادله نیز عددهای‌گویا می‌باشند

حل ـ خارج‌قسمت‌تقسیم عبارت معادله بر $x-r$ عبارت زیر می‌باشد .

$$ax^2+(b+ra)x+(c+ar^2+br)=0$$

با توجه به شرط مسئله معادلهٔ بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$ax^2+(b+ar)x+br=0$$

$$\Delta=(b+ar)^2-4abr=(b-ar)^2$$

ومعادله همیشه دوجواب گویا دارد .

۴۰۰۸ـ سه‌عدد تشکیل یك تصاعدعددی وسه‌عدد دیگر تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند . بین جمله های اول و قدر نسبتهای این دوتصاعد چه رابطه‌ای برقرار باشد تا اگر جمله های دو تصاعد را نظیر به نظیر باهم جمع کنیم اعداد حاصل یك تصاعد هندسی تشکیل دهند

مثال عددی ـ اگر جملهٔ اول تصاعد عددی ۱۶ و جملهٔ اول تصاعدهندسی ۹ باشد قدرنسبت تصاعدعددی‌را برحسب q قدر نسبت تصاعد هندسی بدست آورید وبحث کنید ودر حالت $q=2$ دو تصاعد را مشخص کنید

حل ـ اگر a و aq و aq^2 سه‌عدداول و b و $b+r$ و $b+2r$ سه عدد دوم باشند برطبق مفروضات مسئله می‌توان نوشت :

$$(aq+b+r)^2=(a+b)(aq^2+b+2r)$$

بعد از اختصار شرط مطلوب به صورت زیر درمی‌آید

$$r^2-2ar(1-q)-ab(1-q)^2=0$$

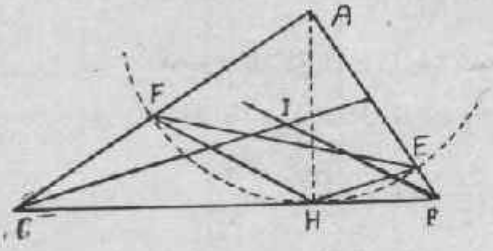
مثال عددی ـ درحالتی‌که $a=9$ و $b=16$ باشد خواهیم‌داشت

$$r^2-18r(1-q)-144(1-q)^2=0 \Longrightarrow$$

واز آنجا $r'=24(1-q)$ و $r''=-6(1-q)$

به ازاء $q=2$ خواهیم داشت $r''=6$ و $r'=-24$

۴۰۰۹ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، قائمه درزاویهٔ A مفروض است . ارتفاع AH را رسم‌می کنیم وبه مرکز A وبه شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم که‌ضلعهای AB و AC را به ترتیب در E و F قطع‌می‌کند . اگر I مرکز دایرهٔ‌محاطی داخلی مثلث ABC باشد



۱) ثابت کنید که BI با HF و CI با HE موازی است

۲) ثابت‌کنید که : $BI \cdot HF = CI \cdot HE$

حل ـ چون‌مثلث AFH ومتساوی‌الساقین‌و $CAH=B$ خواهیم داشت : $AFH=90^\circ-\frac{B}{2}$ وچون زاویهٔ FHC متمم زاویهٔ AHF است بنابراین داریم $FHC=\frac{B}{2}$ یعنی دوخط FH و BI متوازیند . برای موازی بودن CI با HE همین استدلال بکار می‌رود .

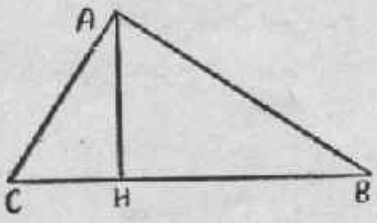
۲)دردایرهٔ بمرکز وبه‌شعاع AH زاویهٔ محاطی EFH برابر بانصف زاویهٔ‌مرکزی HAB ودر نتیجه بازاویهٔ IBH برابراست وهمچنین‌دوزاویهٔ HEF و ICH برابر بوده ونتیجه می‌شود که دومثلث ERH و BIC متشابه باشند وخواهیم‌داشت:

$$\frac{HF}{BI}=\frac{HF}{CI} \Longrightarrow BI \cdot HF = CI \cdot HE$$

۴۰۱۰ ـ اگر در مثلث ABC H پای ارتفاع AH بوده وداشته باشیم :

$$BC=2AC \text{ و } BH=3HC$$

۱) مقدار $\cos C$ واز روی آن اندازهٔ زاویهٔ C را حساب‌کنید



۲) ثابت‌کنید که‌مثلث ABC قائم‌الزاویه است و طول‌ضلعهای آن را برحسب $BH=a$ حساب‌کنید

حل ـ۱) می‌دانیم که

$$\cos C=\frac{CH}{AC}=\frac{\frac{BC}{4}}{\frac{BC}{2}}=\frac{1}{2} \Longrightarrow C=60^\circ$$

۲) داریم:

$$BH=۳CH=\frac{۳AC}{۲} \quad و \quad AH=\frac{AC\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tgB=\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{BH}\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Longrightarrow B=۳۰^\circ$$

$$tgB=\frac{AH}{BH}=\frac{AC\sqrt{۳}}{۳AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow B=۳۰^\circ$$

مجموع دوزاویهٔ B و C یك قائمه بوده و مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه می‌باشد و خواهیم داشت:

$$BC=a+\frac{a}{۳}=\frac{۴a}{۳} \quad AC=\frac{BC}{۲}=\frac{۲a}{۳}$$

$$AB=BC\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

کلاس پنجم طبیعی

۴۰۱۱ـ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ را انتقال داده‌ایم تا محورهای جدید $X'O'X$ و $Y'O'Y$ بدست آمده است معادلهٔ منحنی C نسبت به دستگاه جدید عبارتست از:

$$Y=X^۲+۲X$$

۱) منحنی C را رسم کنید.

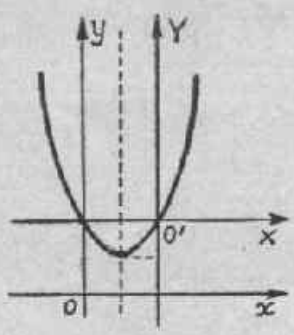
۲) اگر Δ محور تقارن منحنی (C) باشد به فرض آنکه مماسی که در O' بر (C) رسم می‌شود Δ را روی $x'x$ قطع کند و قرینهٔ O' نسبت به Δ بر $y'y$ باشد مختصات O' را نسبت به دستگاه محورهای قدیم تعیین کرده ومحورهای قدیم را درشکل C رسم کنید.

حل ـ جدول تغییرات و شکل منحنی نسبت به دستگاه جدید به شرح زیر است

$$Y'=۲X+۲$$

X	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
Y'		$-$	۰	$+$					
Y	$+\infty$	$\searrow$	۰	$\searrow$	-۱	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$

۲) معادلهٔ Δ عبارتست از $X=-۱$ و ضریب مماس بر منحنی در نقطهٔ O' برابر با ۲ بوده معادلهٔ این مماس می‌شود $Y=۲X$ که مختصات نقطهٔ تقاطع این مماس با Δ می‌شود $(X=-۱ \text{ و } Y=-۲)$



اما این نقطه برمحور $x'x$ واقع‌است یعنی نسبت به دستگاه قدیم داریم : $y=۰$

پس :

$$Y=y-\beta \text{ یا } -۲=۰-\beta \text{ و } \beta=۲$$

قرینهٔ O' نسبت به Δ به‌طول $X=-۲$ است پس

$$X=x-\alpha \text{ یا } -۲=۰-\alpha \text{ و } \alpha=۲$$

بنابراین نسبت به‌دستگاه $x'x$ و $y'y$ داریم $O'(۲ \text{ و } ۲)$ و نسبت به دستگاه $X'X$ و $Y'Y$ خواهیم داشت :

$$O(-۲ \text{ و } -۲)$$

۴۰۱۲ـ اگر داشته باشیم:

$$\cos ۲x=\frac{a^۲+b^۲}{۲ab} \qquad (۱)$$

مقدار tgx را حساب کرده و از روی آن نتیجه بگیرید که معادلهٔ (۱) فقط وقتی دارای جواب است که $a=b$ باشد و با این شرط رابطهٔ کلی کمانهای ریشهٔ معادلهٔ (۱) را بدست آورد.

حل ـ می‌دانیم:

$$tg^۲x=\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x} \Longrightarrow tg^۲x=-\frac{(a-b)^۲}{(a+b)^۲}$$

اما $tg^۲x>۰$ بنابر این تساوی اخیر و در نتیجه رابطهٔ (۱) فقط وقتی برقرار است که $a=b$ باشد و خواهیم‌داشت:

$$\cos ۲x=\frac{۲a^۲}{۲a^۲}-۱ \Longrightarrow ۲x=۲k\pi \text{ و } x=k\pi$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۰۱۳ـ اولا منحنی(C) به معادلهٔ $y=\frac{۱}{۴}x^۲-x$ را رسم کنید .

ثانیاً ـ اگر O مبدأ مختصات و A رأس منحنی(C) باشد نقطهٔ B را بر منحنی C چنان تعیین کنید که زاویهٔ OAB قائمه باشد.

ثالثاً ـ مختصات (C) رأس چهارم از مربع مستطیل OABC را حساب کرده تابع هموگرافیك $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ را چنان مشخص کنید که مرکز مستطیل OABC مرکز تقارن منحنی نمایش آن بوده و خط OC در یك نقطهٔ M قائم بر این منحنی باشد (مماس بر منحنی در نقطهٔ M بر OC عمود باشد). مختصات M را حساب کنید و بدون هیچگونه محاسبه ثابت کنید که منحنی مزبور در یك نقطهٔ N بر خط AB عمود است و مختصات N را تعیین کنید.

رابعاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=\frac{۱۳۵x-۶۵۰}{۱۸x-۹۰}$$

را در شکل منحنی (C) رسم کنید.

حل ـ اولا جدول تغییرات وشکل منحنی (C) به شرح زیر است:

$$y'=\frac{۱}{۲}x-۱$$

x	$-\infty$	۰	۲	۴	$+\infty$
y′		−	۰	+	
y	$+\infty$ ↘	۰ ↘	−۱ ↗	۰ ↗	$+\infty$

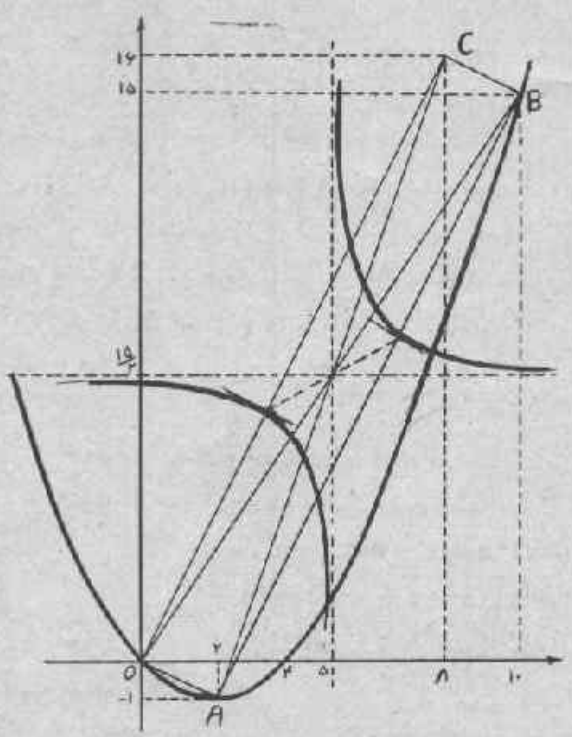
ثانیاً ـ داریم A(۲ و −۱) ضریب زاویهٔ OA برابر با $-\frac{۱}{۲}$ است پس ضریب زاویهٔ AB برابر با ۲ بوده معادلهٔ خط مار بر A وبا ضریب زاویهٔ ۲ می‌شود $y=۲x-۵$ مختصات B از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{۴}x^۲-x \\ y=۲x-۵ \end{cases} \longrightarrow B\begin{vmatrix} ۱۰ \\ ۱۵ \end{vmatrix}$$

ثالثاً داریم

$$\begin{vmatrix} x_O+x_B=x_A+x_C \\ y_O+y_B=y_A+y_C \end{vmatrix} \Longrightarrow C\begin{vmatrix} ۸ \\ ۱۶ \end{vmatrix}$$

$$\omega\left(x=\frac{x_O+x_B}{۲}=۵ \text{ و } y=\frac{y_O+y_B}{۲}=\frac{۱۵}{۲}\right)$$



از تقسیم صورت و مخرج کسر تابع هموگرافیك بر $a'\neq ۰$ و با انتخاب:

$$\frac{a}{a'}=p \text{ و } \frac{b}{a'}=q \text{ و } \frac{b'}{a'}=r$$

تابع هموگرافیك را به‌صورت $y=\frac{px+q}{x+r}$ در نظر می‌گیریم

چون ω مرکز تقارن این منحنی است بنابراین:

$$r=-۵ \text{ و } p=\frac{۱۵}{۲} \quad ; \quad y=\frac{۱۵x+۲q}{۲x-۱۰}$$

اگر خط OC در یك نقطهٔ M قائم بر منحنی این تابع باشد اولا مختصات M از دستگاه زیر نتیجه می‌شود:

$$M\begin{cases} y=\frac{۱۵x+۲q}{۲x-۱۰} \\ y=۲x \end{cases} \Longrightarrow ۴x^۲-۳۵x=۲q$$

ثانیاً ـ مماس بر منحنی در M بر خط OC عمود است و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -\frac{۱}{۲}=\frac{-۱۵۰-۴q}{(۲x-۱۰)^۲} \\ ۴x^۲-۳۵x=۲q \end{cases} \Longrightarrow ۳x^۲-۲۵x+۵۰=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ اخیر $x=۵$ و $x=\frac{۱۰}{۳}$ است که $x=۵$ قابل قبول نیست پس:

$$M\left(x=\frac{۱۰}{۳} \text{ و } y=\frac{۲۰}{۳}\right) \text{ و } q=-\frac{۳۷۵}{۹}$$

و تابع همو گرافیك می‌شود $y=\frac{۱۳۵x-۶۵۰}{۱۸x-۹۰}$

و منحنی نمایش آن در شکل قبل رسم شده است.

رابعاً ـ دوخط OC و AB نسبت به ω قرینه‌اند وچون ω مرکز تقارن منحنی (C') است واین منحنی در M بر OC عمود است بنا براین همین منحنی در N بر AB عمود است که N قرینهٔ M نسبت به ω می‌باشد و داریم .

$$N(x=\frac{۲۰}{۳} \quad و \quad y=\frac{۲۵}{۳})$$

۴۰۱۴ـ به ازاء چه مقادیری از a دو معادلهٔ زیر یك ریشهٔ مشترك دارند و این ریشهٔ مشترك چقدر است؟

$$\sin x(۲a\cos x-\sin x)=a$$

$$۲\sin x(۲a\sin x+\cos x)=۴a+۱$$

حل ـ اگر x را ریشهٔ مشترك فرض کنیم ازحل این‌دو معادله نتیجه می‌شود:

$$\cos ۲x=\frac{۱-۴a^۲}{۱+۴a^۲} \quad \sin ۲x=\frac{(۱+۲a)^۲}{۱+۴a^۲}$$

$$\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۲x=۱$$

$$\Longrightarrow (۴a^۲+۸a+۱)(۴a^۲+۱)=۰$$

$$\Longrightarrow a=\frac{-۲\pm\sqrt{۳}}{۲}$$

و ریشه های مشترك عبارت خواهند شد از:

$$x'=k\pi+\frac{\pi}{۱۲} \quad و \quad x''=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۴۰۱۵ـ هرم مربع‌القاعده و منتظم S.ABCD مفروض است. بر ارتفاع SO از آن نقطهٔ ثابتی مانند O' اختیار کرده صفحهٔ متغیری از این نقطه می‌گذرانیم که یالهای SA و SB و SC و SD را به ترتیب در A' و B' و C' و D' قطع کند ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{SA'}+\frac{۱}{SC'}=\frac{۱}{SB'}+\frac{۱}{SD'}=cte$$

حل ـ اگر $ASC=۲\alpha$ فرض شوددر این‌صورت

$$ASO=OSC=\alpha$$

و داریم :

$$\text{مساحت } SA'C'=\frac{۱}{۲}SA'.SC'\sin ۲\alpha$$

$$\text{مساحت } SA'O'=\frac{۱}{۲}SA'.SO'\sin\alpha$$

$$\text{مساحت } SO'C'=\frac{۱}{۲}SO'.SC'\sin\alpha$$

بنابراین :

$$\frac{۱}{۲}SA'.SC'.\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}SA'.SO'.\sin\alpha+$$

$$+\frac{۱}{۲}SO'.SC'.\sin\alpha$$

از تقسیم طرفین تساوی بر :

$$\frac{۱}{۲}SA'.SC'SO'.\sin\alpha$$

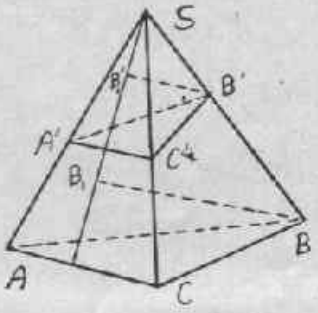
نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{SA'}+\frac{۱}{SC'}=\frac{۲\cos\alpha}{SO'}=cte$$

به‌همین طریق می‌توان دید :

$$\frac{۱}{SB'}+\frac{۱}{SD'}=\frac{۲\cos\alpha}{SO'}$$

۱۰۱۶ـ اگر دو چهاروجهی در یك کنج مشترك باشند نسبت حجمهای آن دو به یکدیگر برابر با نسبت حاصل ضربهای یالهای نظیر این کنج است .



حل (از کاروزه)ـ

فرض می‌کنیم SABC و SA'B'C' چهار وجهی های مفروض باشند باید ثابت کنیم :

$$\frac{\text{حجم } SABC}{\text{حجم } SA'B'C'}=\frac{SA.SB.SC}{SA'.SB'.SC'}$$

$BB_۱$ و $B'B'_۱$ را بروجه SAC عمود می‌کنیم سه نقطهٔ S و $B'_۱$ و B' روی‌یك خط راست قراردارند. واین خط تصویر SB روی‌وجه SAC است و داریم:

$$\frac{\text{حجم } SABC}{\text{حجم } SA'B'C'}=\frac{\frac{۱}{۳}(\text{مساحت } SAC).BB_۱}{\frac{۱}{۳}(\text{مساحت } SA'C').B'B'_۱}$$

$$=\frac{\text{مساحت } SAC}{\text{مساحت } SA'C'}\times\frac{BB_۱}{B'B'_۱}$$

چون مثلثهای SAC. و SA'C'. درزاویهٔ S مشترکانه

پس :

$$\frac{\text{مساحت } SAC}{\text{مساحت } SA'C'}=\frac{SA.SC}{SA'.SC'}$$

و به علاوه $\frac{BB_1}{B'B'_1}=\frac{SB}{SB'}$ و از آنجا :

$$\frac{\text{حجم}SABC}{\text{حجم}SA'B'C'}=\frac{SA\cdot SB\cdot SC}{SA'\cdot SB'\cdot SC'}$$

کلاس ششم طبیعی

۱۰۱۷ـ هذلولی به‌معادلهٔ $x^2-y^2+2x-a^2-1$ مفروض است. اولا مرکز آن را مشخص کرده مختصات کانون‌های آن را برحسب **a** بدست آورید.

ثانیاً ـ اگر خطی که از یکی از کانونهای هذلولی به موازات محور عرضها رسم شود هذلولی را در نقطه‌ای به‌عرض ± 2 قطع کند مقدار **a** را تعیین کنید هذلولی را رسم کنید.

حل ـ اولا معادله هذلولی به صورت زیر در می‌آید .

$$\frac{(x+1)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$C(-1\ \text{و}\ 0)$$

$$C(\alpha=-1\ \text{و}\ \beta=0)\ \text{و}\ c=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$$

$$F(\alpha+c=-1+a\sqrt{2}\ \text{و}\ \beta=0)$$

$$F'(\alpha-c=-1-a\sqrt{2}\ \text{و}\ \beta=0)\quad \text{و}$$

ثانیاً ـ چون مقادیر:

$$x=-1\pm a\sqrt{2}\quad \text{و}\quad y=\pm 2$$

را در معادلهٔ هذلولی قرار دهیم .

$$(-1\pm a\sqrt{2})^2-4+2(-1\pm a\sqrt{2})-a^2-1$$

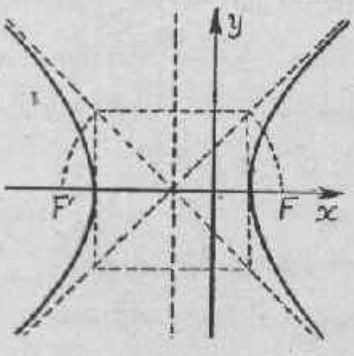
بعداز اختصار نتیجه می‌شود:

$$a^2-4$$

پس :

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

و هذلولی مطابق‌شکل مقابل می‌باشد.



۱۰۱۸ـ درمثلث ABC زاویهٔ B سه برابر زاویهٔ A بوده و اندازهٔ ضلع **b** مضرب صحیحی از اندازهٔ ضلع **a** می‌باشد اندازهٔ زاویهٔ A و از روی آن اندازه‌های زاویه‌های B و C را حساب کرده ضلعهای مثلث را بر حسب **a** طول ضلع BC بدست آورید.

حل ـ می‌دانیم:

$$B=3A\ ,\ b=ak\quad (k\ \text{عدد صحیح است})$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\ ,\ \frac{a}{\sin A}=\frac{ak}{\sin 3A}\Longrightarrow$$

$$k=\frac{\sin 3A}{\sin A}=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}$$

$$k=3-4\sin^2 A\longrightarrow \sin^2 A=\frac{3-k}{4}$$

$$0<A+B<180^\circ\ \text{یا}\ 0<4A<180\Longrightarrow$$
$$0<A<45^\circ$$

$$0<\sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0<\sin^2 A<\frac{1}{2}$$

$$\text{یا :}\quad 0<\frac{3-k}{4}<\frac{1}{2}$$

از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود که $(1<k<3)$ و چون k عدد صحیح‌است پس $k=2$ بوده و داریم:

$$\sin^2 A=\frac{1}{4}\quad \sin A=\frac{1}{2}\ \text{و}\ A=30^\circ\ \text{و}\ B=90^\circ$$

و $C=60^\circ$

$$b=2a\ \text{و}\ c=a\sqrt{3}$$

کلاس ششم ریاضی

۱۰۱۹ـ اولا منحنی (C) به معادلهٔ .

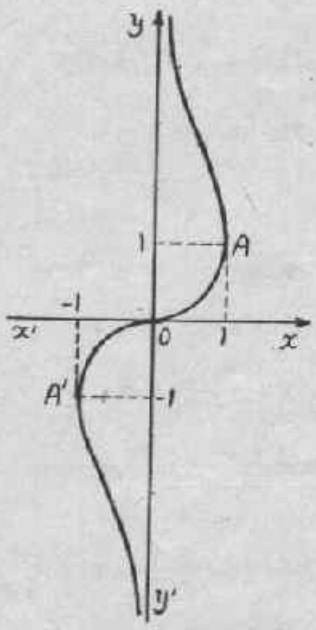
$$xy^2-2y+x^2=0$$

را رسم کنید.

ثانیاً در انعکاس به قطب O (مبدأ مختصات) و به قوت k نقطهٔ $P(X\text{و}Y)$ منعکس نقطهٔ $M(x\ \text{و}\ y)$ می‌باشد. مقادیر X و Y را برحسب **x** و **y** و **k** بدست آورید.

ثالثاً ـ ثابت کنید که در انعکاس به‌قطب $A(1\ \text{و}\ 1)$ و قوت $k=4$ منحنی (C) تغییر ناپذیر باقی می‌ماند.

حل کامل این مسئله



در صفحهٔ ۱۱۱ یکان سال ۴۵ مندرج است. منحنی (C) مطابق شکل می‌باشد.

۴۰۲۰ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ B دو برابر اندازهٔ زاویهٔ A است اگر طول ضلع BC را برابر a و اندازهٔ زاویهٔ A را برابر x و طول میانهٔ AM از مثلث را y فرض کنیم تابع y را برحسب x و a معین کرده حدود تغییرات آن را پیدا کنید و به ازاء $a=2$ منحنی نمایش این تغییرات را رسم کنید.

حل ـ داریم:

$$A=x \text{ و } B=2x \text{ و } C=180-3x$$

$$0<3x<180 \Longrightarrow 0<x<60^\circ$$

$$\frac{a}{\sin x}=\frac{b}{\sin 2x}=\frac{c}{\sin 3x} \Longrightarrow$$

$$b=2a\cos x \text{ و } c=a(2\cos^2 x-1)$$

و اما

$$y^2=\overline{AM}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$y^2=\frac{a^2}{4}(32\cos^4 x-8\cos^2 x+1)$$

عبارت داخل پرانتز همواره مثبت است زیرا در آن

$$\Delta'=16-32<0$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$y=\frac{a}{2}\sqrt{32\cos^4 x-8\cos^2 x+1} \quad , \quad 0<x<\frac{\pi}{3}$$

تابع y همواره اتصالی است وحدود تغییرات آن برابر است با:

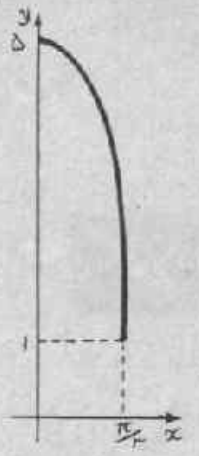
$$\frac{5a}{2}>y>\frac{a}{2}$$

در ازاء $a=2$ داریم:

$$y=\sqrt{32\cos^4 x-8\cos^2 x+1} \quad , \quad (0<x<\frac{\pi}{3})$$

$$y'=\frac{-16\sin x\cos x(8\cos^2 x-1)}{2y}$$

درفاصلهٔ $(\frac{\pi}{3}$ و $0)$ مشتق فقط در ازاء $x=0$ برابر صفر می‌شود. جدول تغییرات تابع وشکل منحنی به قرارزیراست:



x	0		$\frac{\pi}{3}$
y'	0	−	
y	5	↘	1

۴۰۲۱ـ اگر $m>1$ و n دوعدد صحیح باشند به‌ازاء چه‌مقادیر m خواهیم داشت:

$$\frac{1\times 2\times 3\times\dots\times(m-1)\times m}{n^m-n}=\frac{1}{k}$$

که در آن k عددی صحیح و مثبت است.

حل ـ باید معلوم کنیم که به ازاء چه مقادیر m عدد n^m-n بر حاصل ضرب $1\times 2\times 3\times\dots\times m$ قابل‌قسمت است. $m=0$ یا $m=1$ قابل‌قبول نیست. اگر $m=2$ یا $m=3$ باشد که رابطه به‌ازاء جمیع مقادیر n برقراراست زیرا $n^2-n=n(n-1)$ همواره بر ۲ و

$$n^3-n=n(n-1)(n+1)$$

همواره بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است. اگر $m=4$ باشد در حالاتی که n مربع کامل بزرگتر از ۴ و یا اینکه مضربی از ۲۴ باشد ویا اینکه $n-1$ مضربی از ۲۴ باشد رابطه برقرار است برای $m=5$ داریم:

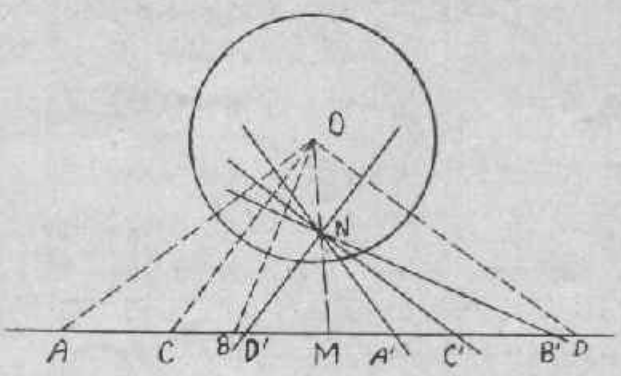
$$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

و در ازاء مقادیر فرد n و همچنین وقتی‌که n مضرب ۸ باشد رابطه برقرار خواهد بود.

در ازاء مقادیر $m>5$ رابطه به ندرت برقرارخواهد بود.

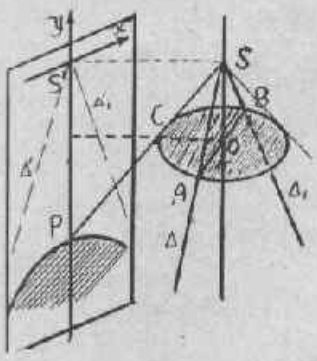
۴۰۲۲ـ نقطه‌های A و B و C و D بر روی خط Δ یك تقسیم توافقی پدید آورده‌اند. قطبیهای این نقطه ها را نسبت به دایرهٔ مفروض O رسم می‌کنیم که Δ را در A' و B' و C' و D' قطع می‌کنند. ثابت کنیدکه (A'B'C'D') یك تقسیم توافقی است.

حل ـ قطبی هر نقطه مانند A خطی است عمودبر OA از طرف دیگر قطبی هر نقطه از خط Δ از نقطهٔ N قطب این



قطب این خط می‌گذرد. بنابراین قطبیهای نقاط A و B و C و D خطوطی هستند که در نقطهٔ M متقارب بوده و به‌ترتیب بر خطوط OA و OB و OC و OD عمود می‌باشند و نتیجه می‌شود که زاویه‌هائی حول نقطهٔ M تشکیل می‌شود و به‌ترتیب برابر باشند بازاویه‌هائی که حول نقطهٔ O تشکیل شده است. بنابر این قطبیها یك دسته اشعهٔ توافقی تشکیل می‌دهند و خط Δ را به توافق تقسیم می‌کنند.

۴۰۲۳ ـ نقطهٔ نورانی S بالای صفحهٔ دایره شکل کدری چنان قرار گرفته است که شعاعی از S که عمودی بر این صفحه می‌تابد بر مرکز آن فرود می‌آید. شکل سایه ای را که توسط این صفحهٔ کدر بر صفحهٔ دیگر عمود بر آن تشکیل می شود معین کنید. اگر شعاع صفحهٔ دایره شکل برابر R و فاصلهٔ S از این صفحه برابر با $R\sqrt{3}$ و از صفحهٔ دوم برابر $2R$ باشد و تصویر S را بر این صفحه مبدأ مختصات و محور طول‌ها را به موازات صفحهٔ دایره انتخاب کنیم معادلهٔ منحنی سایه را بدست آورید.



حل ـ اگر از نقطهٔ S اشعهٔ نورانی به جمیع نقاط دایره (O) بتابد سایهٔ دایره سطح مخروطی ناقصی خواهد بود، صفحهٔ سایه با محور این سطح مخروطی موازی است بنابراین مقطع مخروط سایه با صفحهٔ سایه شاخه‌ای است از یك هذلولی به مرکز 'S و محور 'yy که محور قاطعش است ('S تصویر S و 'yy تصویر محور سطح مخروطی است). برای رسم این شاخه از هذلولی، قطر AB از دایرهٔ O را طوری که موازی صفحهٔ سایه باشد رسم می‌کنیم سپس امتداد های SA و SB را به ترتیب Δ_1 و Δ و تصاویرشانرا به ترتیب Δ'_1 و Δ' می‌نامیم که خطوط مزبور مجانبهای هذلولی هستند. اگر S' را مبدأ مختصات نامیده محور xx' را بر yy' متعامد رسم‌نمائیم، چون:

$$ASO - BSO = \Delta S'y' - \Delta' S'y' = 30^\circ$$

است پس معادلات مجانبها نسبت به دستگاه فوق عبارتند از:

$$y = \pm x\sqrt{3}$$

شعاع OC را عمود بر صفحهٔ سایه رسم می‌کنیم که آنرا در P قطع می‌کند نقطهٔ P رأس شاخهٔ موردنظر هذلولی است. اگر S'P را مساوی a بگیریم معادلهٔ هذلولی کامل که فقط یك شاخهٔ آن مورد نظر ماست عبارتست از:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

که در آن $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ است اما چون زاویهٔ S'PS برابر 30° است.

بنا براین $PS' = a = 2R\sqrt{3}$ و $b = 2R$ بوده معادلهٔ هذلولی می‌شود:

$$3x^2 - y^2 = 12R^2$$

باتوجه به اینکه نسبت به محورهای مختصات انتخابی عرض همهٔ نقاط منحنی سایه منفی است معادلهٔ آن عبارت خواهد شد از:

$$y = -\sqrt{3(x^2 - 4R^2)}$$

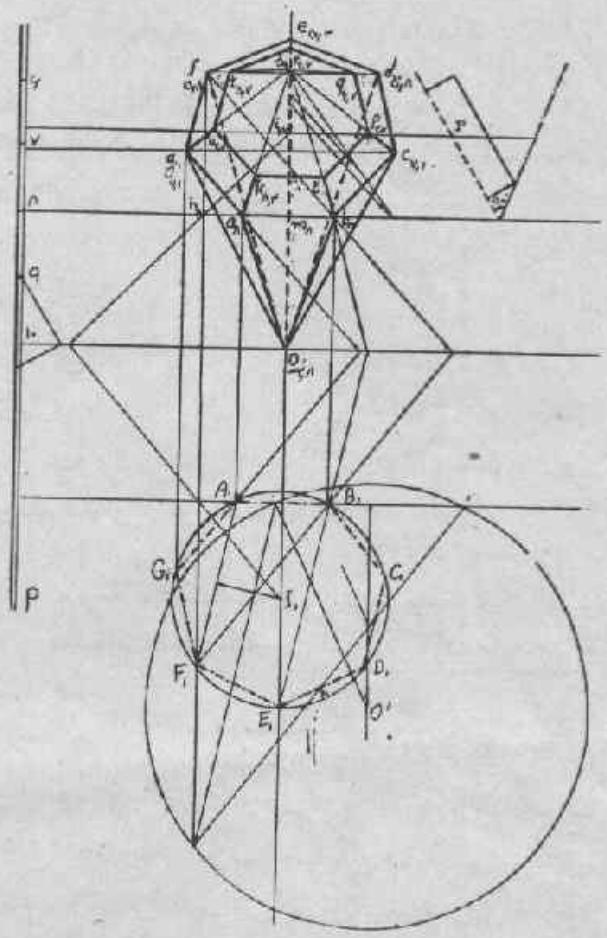
۴۰۲۴ ـ ۱ـ مقیاس شیب سطح P را که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ 30° می سازد در سمت چپ کاغذ چنان رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۱۰ آن بر محور افقی کاغذ منطبق بوده ترقی رقوم نقاط آن از بالا به پائین باشد.

۲ـ نقطهٔ h_1 را به‌فاصلهٔ ۲٫۲ از محور قائم کاغذ وسمت چپ آن اختیار کنید. نقطهٔ H پای ارتفاع رأس F از مثلث FAB است که در صفحهٔ P واقع است و در آن AB برافقیهٔ رقوم ۸ واقع بوده طول FH برابر با ۴٫۳ بوده و نسبت HB بر HA برابر با ۳٫۵ بوده زاویهٔ F یك هفتم زاویهٔ تمام صفحه بوده زاویهٔ A منفرجه و رقوم B از رقوم F بیشتر بوده A سمت راست H واقع باشد.

۳ـ ملخص هفت ضلعی منتظم ABCDEFG را رسم کرده رقوم رؤوس آن را تا ۰٫۱ تقریب حساب کنید.

۴ـ ملخص هرم منتظمی را رسم کنید که قاعدهٔ آن هفت ضلعی مزبور بوده تصویر رأس آن، O، بر محور افقی کاغذ واقع باشد.

۵- بر روی هفت ضلعی مزبور ،منشور ناقص منتظمی می‌سازیم که صفحهٔ P قاعدهٔ پائینی آن بوده و طول ارتفاع آن ۰/۸ و صفحات جانبی آن با صفحات P زاویهٔ ۵۰° می‌سازند. جسم حاصل از هرم و منشور ناقص فوق‌الذکر را کدر فرض کرده پالهای مرئی و مخفی آن را مشخص کنید.



مسائل متفرقه

۴۰۲۵- مجموع n عدد صحیح فرد متوالی ۳۴۳ است این اعداد را پیدا کنید.

حل- فرض می‌کنیم n عدد فوق بصورت زیر باشند:

$$x \text{ و } x+2 \text{ و } x+4 \cdots x+2(n-1)$$

بنابر این:

$$S_n = n(x+n-1) \Longrightarrow 7^3 - n(x+n-1)$$

حاصل ضرب عامل مثبت و صحیح n در عامل صحیح $x+n-1$ برابر است با 7^3 که به صورتهای زیر نوشته می‌شود:

$$۱ \times ۳۴۳ \text{ یا } ۷ \times ۴۹ \text{ یا } ۴۹ \times ۷ \text{ یا } ۳۴۳ \times ۱$$

و در نتیجه جوابهای زیررا خواهیم داشت:

و اگر $x = ۳۴۳$ فرض شود

$$\begin{vmatrix} n=۱ \\ x=۳۴۳ \end{vmatrix} \text{ یا } \begin{vmatrix} n=۷ \\ x=۴۳ \end{vmatrix} \quad n=۴۹ \text{ یا } x=-۴۱$$

$$\text{یا } \begin{vmatrix} n=۳۴۳ \\ x=-۳۴۱ \end{vmatrix}$$

۴۰۲۶- از روابط زیر مقادیر کلی کمانهای x و y را بدست آورید:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\cos x}{\cos y} = tg\,x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}}$$

حل- از تساوی دو نسبت اول خواهیم داشت:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \Longrightarrow tg\,x = tg\,y \Longrightarrow$$

$$x = k\pi + y \Longrightarrow tg\,x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}} = \pm 1$$

پس: $\cos x = \pm \cos y$ و $\sin x = \pm \sin y$

بوده داریم:

$$tg\,x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}} = \pm 1 \Longrightarrow$$

$$tg^2 x = \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1-\cos x}{1-\sin x} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x (1-\sin x)} = 0$$

$$(1-tg\,x)(1-\cos x) = 0$$

$$\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi$$

$$tg\,x = 1 \Longrightarrow x = k'\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \sin y = \sin x \\ \cos y = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = x = 2k\pi \\ y = x = k'\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin y = -\sin x \\ \cos y = -\cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = (2k+1)\pi \\ y = (k'+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۴۰۲۷- دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} tg^2 x + tg^2 y = 2 \\ tg^2 y - tg\,x = 0 \end{cases}$$

حل ـ اگر $tgx=X$ و $tgy=Y$ فرض کنیم دستگاه بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} X^2+Y^2=2 \\ Y^2-X=0 \end{cases} \Longrightarrow Y^{16}+Y^2=2$$

با فرض $Y^2=A$ خواهیم داشت:

$$A^8+A=2 \Longrightarrow (A^8-1)+A-1=$$
$$=(A-1)(A^7+A^6+\cdots+A+2)=0$$

و چون

$$A^7+A^6+\cdots A+2\neq 0$$

بنابراین $A=1$ یعنی

$$tg^2y=1 \Longrightarrow tgy=\pm 1 \Longrightarrow y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$tgx=tg^2y=1 \Longrightarrow x=k_1\pi+\frac{\pi}{4}$$

۴۰۲۸ـ چه رابطه‌ای بین a و b موجود باشد تا معادلهٔ

$$x^n+nax+(n-1)b=0$$

دارای یك ریشهٔ مضاعف باشد.

حل ـ ریشهٔ مضاعف عبارتست از ریشهٔ مشترك میان دو معادلهٔ زیر:

$$f(x)=x^n+nax+(n-1)b=0$$
$$f'(x)=nx^{n-1}+na=0$$

ریشهٔ مضاعف در رابطهٔ زیر نیز صادق است.

$$nf(x)-xf'(x)=ax+b=0 \Longrightarrow x=\frac{-b}{a}$$

که چون در یکی از معادلات بالا منظورشود خواهیم داشت

$$a^n+b^{n-1}=0 \text{ (فرد) } n \quad \text{یا} \quad a^n-b^{n-1}=0 \text{ (زوج) } n$$

۴۰۲۹ـ بین a و b و c طولهای ضلعهای مثلث ABC رابطهٔ

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=c^2$$

برقرار است. اندازهٔ زاویهٔ C از این مثلث را حساب کنید.

حل ـ رابطهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید:

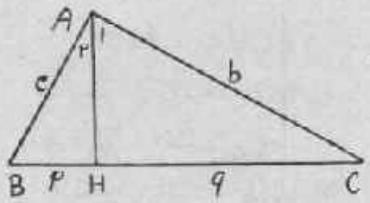
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=c^2 \Longrightarrow a^2+b^2=ac^2+bc^2$$

$$c^2=\frac{a^2+b^2}{a+b}=a^2-ab+b^2$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2} \text{ و } C=60^\circ$$

۴۰۳۰ـ در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم به فرض آنکه داشته باشیم:

$$\frac{HB}{HC}=\frac{AB^2}{AC^2}$$



ثابت کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه است و یامتساوی‌الساقین.

حل ـ فرض می‌کنیم:

$$HB=p \text{ و } HC=q \text{ و } AB=c \text{ و } AC=b$$

$$AH=h \text{ و } \frac{p}{q}=k \text{ یا } p^2=q^2k^2 \text{ پس } c^2=qb^2$$

و همچنین داریم:

$$h^2=c^2-p^2=b^2-q^2 \text{ یا } qb^2-q^2k^2=b^2-q^2$$
$$b^2(k-1)=q^2(k^2-1) \quad \text{یا}$$

۱) اگر $k=1$ باشد داریم $p=q$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲) اگر $k\neq 1$ باشد خواهیم داشت:

$$b^2-q^2(k+1) \text{ یا } k=\frac{b^2-q^2}{q^2}=\frac{h^2}{q^2} \text{ یا}$$

$$\frac{h^2}{q^2}=\frac{p}{q} \Longrightarrow \frac{h}{q}=\frac{p}{h}$$

یعنی دوضلع از دو مثلث ABH و ACH متناسب می‌باشند چون زاویه های بین این دو ضلع نیز متساوی‌اند دو مثلث مزبور متشابه بوده و نتیجه می‌شود که:

$$B=A_1 \text{ وچون } A_1+A_2=A=90^\circ \text{ پس } B+A_2=90^\circ$$

۴۰۳۱ـ مثلث ABC درزاویهٔ C قائمه‌است. نیمسازهای زاویه های A و B ضلعهای BC و AC را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند اگر $CD=9$ و $CE=8$ باشد طولهای ضلعهای مثلث را حساب کنید.

حل ـ داریم:

$$CD=\frac{ab}{b+c} \text{ و } CE=\frac{ab}{a+c}$$

$$\frac{CD}{CE}=\frac{a+c}{b+c}=\frac{9}{8} \Longrightarrow c=8a-9b$$

$$c^2=a^2+b^2=64a^2+81b^2-144ab$$

$$63a^2-144ab+80b^2=0 \Longrightarrow$$

$$a=\frac{4}{3}b \text{ یا } \frac{20}{21}b$$

چون $c=۸a-۹b>۰$ است جواب قابل قبول عبارت خواهد شد از :

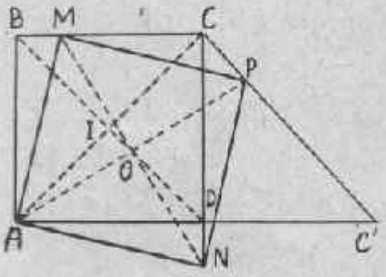
$$a=\frac{۴}{۳}b\Rightarrow c=\frac{۵}{۳}b\text{ و }CD=\frac{b}{۲}=۹\rightarrow$$

$$b=۱۸\text{ و }a=۲۴\text{ و }c=۳۰$$

۴۰۳۲ـ مربع ABCD به ضلع a و به مرکز I مفروض است. نقطهٔ M را بر ضلع BC اختیار کرده و در امتداد ضلع CD، از طرف D ، نقطهٔ N را چنان اختیار می‌کنیم که $DN=BM$ باشد و متوازی‌الاضلاع MANP را رسم می‌کنیم که MN قطری از آن می‌باشد.

۱) نوع متوازی‌الاضلاع MANP را معین کنید

۲) اگر M ضلع BC را بپیماید مکان هندسی نقطهٔ O مرکز MANP چیست ؟ و همچنین مکان هندسی نقطهٔ P ؟



حل ـ ۱) از تساوی مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABM و ADN نتیجه می‌شود که

$$MAN\text{ز}-BAD\text{ز}=۹۰^\circ$$

و $AM=AN$

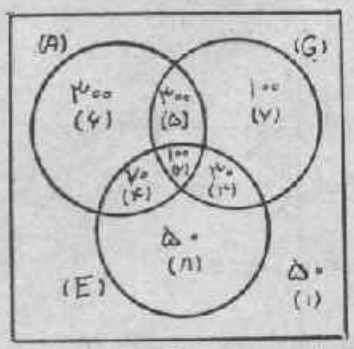
پس MANP مربع می‌باشد

۲) در مثلث قائم‌الزاویهٔ MCN میانهٔ CD با نصف وتر MN و در نتیجه با OA مساوی بوده نقطهٔ O بر عمود منصف AC یعنی بر BD واقع است و چون M قطعه خط BC را می‌پیماید مکان O قطعه خط ID خواهد بود .

چون $AP=۲AO$ بنابراین در تجانس به مرکز A و به نسبت ۲ نقطهٔ P مجانس نقطهٔ O بوده وقتی مکان O قطعه خط ID باشد مکان P قطعه خط CC' است که از C موازی با ID و محدود به امتداد ضلع AD رسم می‌شود

۴۰۳۳ ـ در دبیرستانی : ۷۷۰ دانش‌آموز زبان خارجی انگلیسی می‌آموزند ، ۵۳۰ دانش‌آموز فرانسه می‌خوانند، ۲۵۰ دانش‌آموز آلمانی یاد می‌گیرند، ۴۰۰ نفر هم انگلیسی می‌خوانند و هم فرانسه، ۱۷۵ نفر هم فرانسه می‌خوانند و هم انگلیسی، ۱۳۰ نفر هم فرانسه و آلمانی را باهم می‌آموزند و بالاخره ، ۱۰۰ نفر هر سه زبان را یاد می‌گیرند و ۵۰ نفر از دانش‌آموزان هم هیچیک از این زبانها را تحصیل نمی‌کنند .

مجموعهٔ R تمام دانش‌آموزان دبیرستان را با ناحیهٔ داخلی یک مربع مستطیل و هریک از زیر مجموعه‌های A ، E ، F را که عناصر آنها محصلینی هستند که انگلیسی ، فرانسه و آلمانی می‌خوانند : با ناحیهٔ داخلی یک دایره نمایش می‌دهیم . نمودار محصلین این دبیرستان را از نقطهٔ نظر تحصیل زبان خارجی رسم کنید و از روی آن تعداد محصلین مربوط به هر زیرمجموعه را حساب کنید و همچنین تعداد کل محصلین دبیرستان را حساب کرده معلوم کنید چند نفر از این محصلین فقط و فقط دو زبان خارجی و چند نفر از آنها منحصراً یک زبان خارجی را یاد می‌گیرند .



حل ـ دایره های (A) و (C) و (E) نمودار زیر مجموعه‌های A و G و E دو به دو متقاطع بوده و هر سه دارای یک ناحیهٔ مشترک هستند . این دایره ها ناحیهٔ داخلی مستطیل را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه معرف تعداد محصلینی است که یک یا چند زبان خارجی یاد می‌گیرند و ناحیهٔ (۱) معرف محصلینی است که اصلا زبان خارجی نمی‌آموزند ، با توجه به نمودار ملاحظه می‌شود تعداد کل محصلین دبیرستان برابر است با :

$$۵۰+۱۰۰+۳۰+۷۰+۳۰۰+۳۰۰+$$
$$+۱۰۰+۵۰=۱۰۰۰$$

تعداد محصلینی که هرکدام دو زبان خارجی می‌آموزند برابر است با :

$$۳۰+۷۰+۳۰۰=۴۰۰$$

و بالاخره تعداد محصلینی که فقط یک زبان خارجی می‌آموزند:

$$۳۰۰+۱۰۰+۵۰=۴۵۰$$

۴۰۳۴ـ در مجموعهٔ نقاط یک صفحه دو عمل با نشانهای Δ و $*$ را به شرح زیر در نظر می‌گیریم.

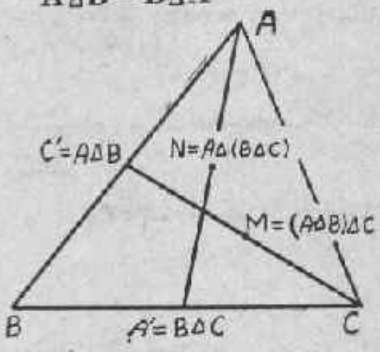
نظیر هر زوج نقطه‌های A و B ، نشانهٔ Δ معرف عملی است که نقطهٔ M وسط قطعه خط AB را بدست می‌دهد و نشانهٔ $*$ عملی را می‌رساند که نقطهٔ P قرینهٔ A نسبت به B را معین می‌کند . بنابراین $A\Delta B=M$ یعنی اینکه M وسط AB است و $A*B=P$ یعنی اینکه P قرینهٔ A نسبت به B می‌باشد .

۱) هریک از دو عمل مزبور را از لحاظ استقلال از ترتیب عوامل و شرکت پذیری بررسی کنید

۲) ثابت کنید که هریک از دو عمل مزبور نسبت به دیگری توزیعی است

حل-۱) نقطهٔ وسط AB درعین حال نقطهٔ وسط BA می باشد یعنی داریم ،

$$A\Delta B = B\Delta A$$



بنابراین عمل Δ مستقل از ترتیب عوامل است .

اگر A و B و C سه نقطهٔ دلخواه بوده 'C وسط AB و 'A وسط BC باشد مطابق شکل داریم :

$(A\Delta B)\Delta C = C'\Delta C = M$ (M وسط CC' است)

$A\Delta(B\Delta C) = A\Delta A' = N$ (N وسط AA' است)

در مثلث میانه‌های اضلاع از وسط یکدیگر نمی گذرند پس N و M دو نقطهٔ متمایز بود در نتیجه

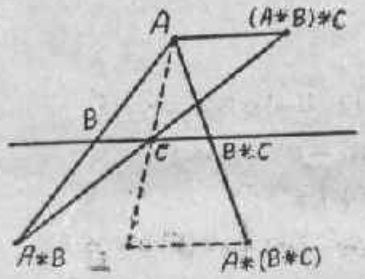
$$(A\Delta B)\Delta C \neq A\Delta(B\Delta C)$$

یعنی عمل Δ شرکت پذیر نیست .

می‌دانیم که قرینهٔ A نسبت به B نمی‌تواند درعین حال قرینهٔ B نسبت به A باشد پس:

$$A*B \neq B*A$$

یعنی عمل * مستقل از ترتیب عوامل نیست



چنانچه از شکل مقابل بر می آید در انتقال به حامل $\overrightarrow{BC}$ مبدل نقطهٔ A نقطهٔ C $(A*B)*$ است درصورتی که نقطهٔ $A*(B*C)$ مبدل قرینهٔ A نسبت به C در انتقال مزبور می‌باشد بنابراین

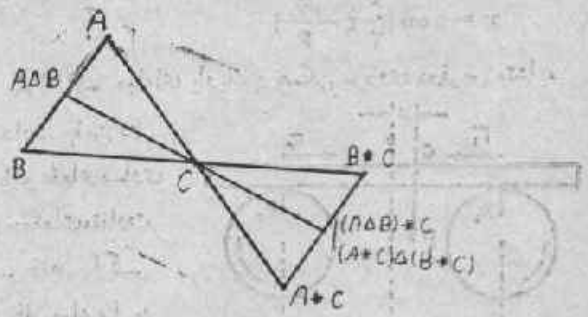
$$(A*B)*C \neq A*(B*C)$$

و عمل * نیز شرکت پذیر نیست .

۲) باید صحت هریك از رابطه های زیر را محقق کنیم

(۱) $(A\Delta B)*C = (A*C)\Delta(A*B)$

(۲) $C*(A\Delta B) = (C*A)\Delta(C*B)$

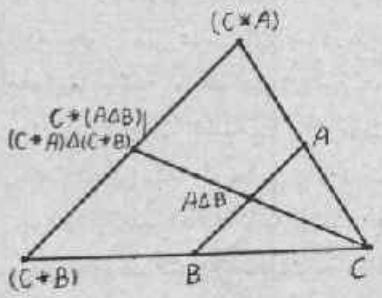


این دو رابطه را به ترتیب باشکلهای زیر نمایش می‌دهیم.

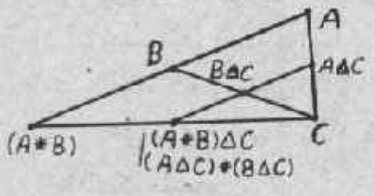
ملاحظه می کنیم که تجانس به مرکز C و به نسبت ۱- (درشکل اول) و به نسبت ۲ (درشکل دوم) دو رابطهٔ بالا را محقق می‌سازد.

برای اینکه ثابت کنیم که Δ نسبت به $*$ نیز توزیعی است باید رابطهٔ زیر را محقق سازیم .

$$(A*B)\Delta C = (A\Delta C)*(B\Delta C)$$



چنانچه از شکل مقابل ملاحظه می‌شود تجانس به مرکز C و به نسبت $\frac{1}{2}$ رابطه را محقق می‌سازد



۴۰۳۵- در یك صفحهٔ آهنی سوراخی مدور تعبیه شده است . ازاین سوراخ سیمی ازمس می گذرانیم. دردمای $0°C$ قطر سیم ۱mm است . روزنه‌ای حلقه مانند بین سیم وصفحه مشاهده می‌شود . قطر سوراخ چقدر باشد تا براثر افزایش دمای محیط سطح روزنهٔ حلقه مساحت تغییری نکند . ضریب انبساط مس ۱۷×۱۰^{-۶} وضریب انبساط آهن ۱۲×۱۰^{-۶}

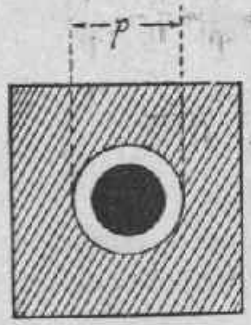
حل- فرض می کنیم که قطر سوراخ برابر است با d. بنابراین سطح روزنهٔ حلقه مانند برابر است با

$$\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(d^2-1) \quad mm$$

اگر دمای $t°C$ برسد قطر سیم وقطر سوراخ به‌ترتیب برابر:

$d(1+۱۲\times۱۰^{-۶}t)$ و $(1+۱۷\times۱۰^{-۶}t)$

خواهدشد . بنابراین سطح روزنه برابر است با:



$$\frac{\pi d^2}{4}(1+۱۲\times۱۰^{-۶}t)^2 - \frac{\pi}{4}(1+۱۷\times۱۰^{-۶}t)^2 \quad mm^2$$

از جملاتی که در آن t^2 هست صرف نظر می کنیم پس:

$$-\frac{\pi}{4}(d^2-1) + \frac{\pi}{4}(d^2\times۲۴\times۱۰^{-۶}A - ۳۴\times۱۰^{-۶}t)$$

برای اینکه سطح روزنه ثابت باشد باید

$$\frac{\pi}{4}(d^2\times۲۴\times۱۰^{-۶}t - ۳۴\times۱۰^{-۶}t) = ۰$$ باشد

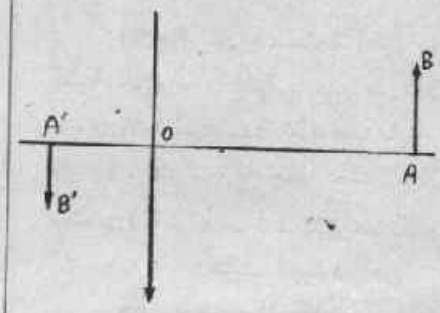
یا

$$۱۲d^۲ - ۱۷ = ۰$$

$$d = \sqrt{\frac{۱۷}{۱۲}} = ۱/۱۹\text{mm}$$

۴۰۳۶ـ یك‌دستگاه عکسبرداری‌را چنان قرار می‌دهیم که محور اصلی عدسی آن عمود بر امتداد مسیر حرکت یك هواپیما باشد. می‌خواهیم از این هواپیما عکسبرداری کنیم. دوربین‌را چنان تنظیم می‌کنیم که مدت زمان عکسبرداری (یعنی مدت زمانی که جلو عدسی باز و نور به داخل دستگاه وارد می‌شود) برابر ۰/۰۱ ثانیه باشد. به فرض آنکه اگر تصویر یك نقطه حداکثر ۰/۱ میلیمتر جابجاشود. بازهم‌واضح‌خواهدبود معلوم کنید سرعت هواپیما حداکثرچقدرباشد تا تصویرواضحی از آن بدست‌آید. فاصلهٔ هواپیما ازدستگاه عکسبرداری ۶۰۰m است. فاصلهٔ کانونی عدسی دستگاه عکسبرداری ۱۵cm است.

حل‌ـ فرض می‌کنیم که A یکی از نقاط هواپیما در لحظه‌ای که‌چلوعدسی باز می‌شود واقع بر محور اصلی‌باشد. در این صورت تصویر آن A′ خواهد بود. در مدت زمان t بر اثر حرکت هواپیما نقطهٔ A به محل B می‌رسد. تصویر این نقطه B′ است. برای اینکه تصویر واضحی‌از هواپیما بدست آید باید A′B′ حد اکثر برابر $\frac{۱}{۱۰}$ میلیمتر باشد. بر طبق فرمولهای عدسی:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{p'}{p} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{p} + \frac{۱}{p'} = \frac{۱}{f} \Longrightarrow \frac{۱}{p'} = \frac{۱}{f} - \frac{۱}{p}$$

$$p' = \frac{pf}{p-f} \Longrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{pf}{p(p-f)} = \frac{f}{p-f}$$

$$AB = A'B'\frac{p-f}{f}$$

می توان از f در مقابل p صرف نظرکرد و نوشت:

$$AB = A'B'\frac{p}{f}$$

$$AB = ۰/۱ \times ۱۰^{-۲} \times \frac{۶۰۰}{۱۵ \times ۱۰^{-۲}} = ۰/۴\text{m}$$

AB مسافتی است که هواپیما درمدت $\frac{۱}{۱۰۰}$ ثانیه طی می‌کند. مسافتی که هواپیما در مدت یك ثانیه طی می‌کند برابراست با $\frac{۰/۴}{۰/۰۱} = ۴۰\text{m}$ ومسافتی که دریك‌ساعت‌طی‌می‌کند برابر است با $۴۰ \times ۳۶۰۰ = ۱۴۴ \times ۱۰^۳$ یا ۱۴۴ کیلومتر بنا بر این سرعت هواپیما حداکثر باید ۱۴۴ کیلومتر درساعت باشد.

۴۰۳۷ـ حرکتی است ارتعاشی به معادلهٔ

$$x = a\cos(\omega t - \varphi)$$

a و ω و φ را تعیین کنید. می‌دانیم که طول مسیر ۱۰cm است و نسبت سرعت متحرك به شتاب آن در یك لحظهٔ معین برابر است با مقدار همین نسبت در دو ثانیهٔ بعد. و نیز در لحظهٔ t = ۱s داریم: v = ۱/۱۰۳γ

حل‌ـ طول مسیر ۱۰cm است. بنابراین دامنهٔنوسان a = ۵cm. معادلات سرعت وشتاب را در یك لحظهٔ معین می‌نویسیم:

$$v = -a\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

$$\gamma = -a\omega^۲\cos(\omega t - \varphi)$$

بنابراین:

$$\frac{v}{\gamma} = \frac{۱}{\omega}tg(\omega t - \varphi)$$

اگراین‌نسبت دردولحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ باهم مساوی‌باشند باید:

$$tg(\omega t_۱ - \varphi) = tg(\omega t_۲ - \varphi)$$

یا

$$\omega t_۱ - \varphi = \omega t_۲ - \varphi + k\pi$$

در حد اقل فاصلهٔ زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$ باید k = ۱ باشد و می‌توان نوشت:

$$\omega(t_۱ - t_۲) = \pi \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{۲}$$

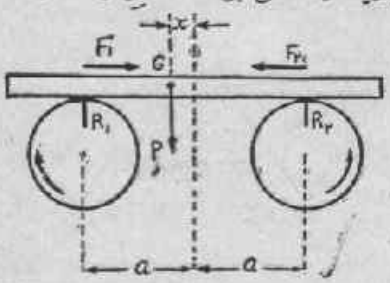
در لحظهٔ t = ۱ می‌توان نوشت:

$$\frac{۲}{\pi}tg(\frac{\pi}{۲} - \varphi) = ۱/۱۰۳$$

پس $\varphi = \frac{\pi}{۶}$ و معادلهٔ حرکت متحرك:

$$x = ۵\cos(\frac{\pi}{۲}t - \frac{\pi}{۶})$$

۴۰۳۸ـ میله‌ای باریك و همگن برروی دوقرص مشابه قرار دارد. این دو قرص باسرعتهای‌مساوی اما درجهتهای‌متفاوت می‌چرخند. اگر مرکزثقل میله را به اندازهٔ x از محل



تعادلش جابجا کنیم ثابت کنید که میله حرکتی نوسانی پیدا خواهد کرد که زمان تناوبش برابر است با

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$$

که در آن μ ضریب اصطکاک بین میله و قرص و $2a$ فاصلهٔ بین مراکز دو قرص است.

حل- نیرو های R_1 و R_2 ناشی از دوران چرخها بر میله وارد می‌شوند و برآیند آنها باوزن میله تعادل می‌کنند بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R_1+R_2=P \\ R_1(a-x)=R_2(a+x) \end{cases}$$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{a+x}{a-x}$$

$$\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{a+x}{a-x+a+x}=\frac{a+x}{2a}$$

$$R_1=\frac{P}{2a}(a+x)$$

و نیز

$$R_2=\frac{P}{2a}(a-x)$$

اگر F_1 و F_2 نیروهایی باشند که به وسیلهٔ قرصها بر میله وارد می شود در این صورت:

$$F_1=\mu R_1=\frac{\mu P}{2a}(a+x) \quad \text{و}$$

$$F_2=\mu R_2=\frac{\mu P}{2a}(a-x)$$

برآیند این دو نیرو

$$F=F_1-F_2=\frac{\mu P}{2a}(a+x-a+x)$$

$$F=\mu P\frac{x}{a}$$

$\vec{F}$ برآیند دو نیرو همجهت با $\vec{F_1}$ است. این نیرو شتابی معادل γ به میله می‌دهد که همجهت با نیروی F_1 است و مقدار آن

$$\gamma=\frac{F}{m}=\frac{\mu P\frac{x}{a}}{\frac{P}{g}}=\mu g\frac{x}{a}$$

شتاب در خلاف جهت تغییر مکان است. و می‌دانیم که در هر حرکتی که شتاب در خلاف جهت تغییر مکان و متناسب با آن باشد حرکت نوسانی است و زمان تناوب آن از راه زیر بدست می‌آید:

$$\gamma=\omega^2x=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2x \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{x}{\gamma}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{x}{\mu g\frac{x}{a}}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$$

۴۰۳۹- محلولی است شامل 20^{cc} اسید کلرئیدریک با $PH=1$ و 50^{cc} محلول اسیدسولفوریک با $PH=2$ این محلول پس از خنثی شدن با محلول پتاس حجمش به $72/5^{cc}$ می‌رسد اولا PH محلول پتاس و غلظت محلول را بر حسب کلرودوسولفات حساب کنید

ثانیاً- مخلوط دو اسید فوق توسط 5^{cc} محلول آمونیاک کاملا خنثی می‌شود. ارزش حجمی محلول آمونیاک را تعیین کنید ضریب تفکیک محلول ClH، SO_4H_2، KOH کامل فرض می‌شود.

حل -

$$PH=-\log[H^+] \quad 1=-\log[H^+] \quad \text{یا}$$

$$[H^+]=\frac{1}{10}=F_{ClH}$$

$$2=-\log[H^+] \quad \text{یا} \quad [H^+]=\frac{1}{100}=F_{SO_4H_2}$$

حجم محلول پتاس $72/5-(20+50)=2/5^{cc}$

$$F_1V_1+F_2V_2=FV$$

$$\frac{1}{10}\times 20+\frac{1}{100}\times 50=F\times 2/5$$

فاکتور پتاس $F=1$

$$POH=-\log[OH^-]=-\log[1]=0$$

$$PH+POH=14 \quad \text{یا} \quad PH=14$$

$$ClH + KOH \longrightarrow ClK + H_2O$$

1000^{cc} — $74/5$

$20\times\frac{1}{10}$ — $x=0/149$ گرم

$72/5^{cc}$ — $0/149$ گرم

1000 — $x=\frac{149}{72/5}=C_{ClK}$

$$SO_4H_2 + 2KOH \longrightarrow SO_4K_2 + 2H_2O$$

$$\underset{2000\,cc}{} \qquad \underset{174}{}$$

$$50 \times \frac{1}{100} \qquad x = 0/0435 \text{ گرم})$$

$$72/5\,cc \qquad 0/0435 \text{ گرم}$$

$$1000 \qquad x = \frac{43/5}{72/5} = C_{SO_4K_2}$$

$$F_1V_1 + F_2V_2 = FV$$

$$\frac{1}{10} \times 20 + \frac{1}{100} \times 50 = F \times 5$$

$F = \frac{1}{2}$ فاکتور محلول آمونیاك

$$C = F \cdot E$$

$$C = \frac{1}{2} \times 22/4 = 11/2$$

۴۰۴۰ـ حرارت احتراق یك مولکول گرم گاز اتان به گازکربنیك و آب برابر با ۳۷۲/۹ کیلوکالری و حرارت احتراق یك مولکول گرم گاز اتیلن برابر با ۳۳۷/۳ کیلوکالری وگرمای احتراق یك‌مولکول گرم گاز هیدروژن به‌آب مایع مساوی ۶۸/۳ کیلوکالری وحرارت تشکیلی گازکربنیك برابر ۹۴/۱ کیلوکالری می باشد از روی این معلومات حرارت واکنش زیررا حساب کنید.

$$C_2H_4 + H_2 \longrightarrow C_2H_6$$

حل- حرارتهای تشکیلی اتان و اتیلن را از معادلات شیمیائی زیر حساب می‌کنیم:

حرارتهای تشکیل

$$C_2H_6 + \frac{7}{2}O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 3H_2O + 372/9$$

$$x \quad 0 \qquad 2\times94/1 \quad 3\times68/3$$

$$372/9 = (2\times94/1 + 3\times68/3) - x$$

$x = 20/2$ کیلوکالری

حرارتهای تشکیل

$$C_2H_4 + 3O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 2H_2O + 337/3$$

$$x \quad 0 \qquad 2\times94/1 \quad 2\times68/3$$

$$337/3 = (2\times94/1 + 2\times68/3) - x$$

$x = -12/5$ کیلوکالری

حرارتهای تشکیل

$$C_2H_4 + H_2 \longrightarrow C_2H_6 + Q$$

$$-12/5 \quad 0 \qquad 20/2$$

$$Q = 20/2 - (-12/5) = 32/7$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به‌حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۲

کلاسهای چهارم

عبدالعلی کشاورز ـ منصورقمشه ـ محمودحقانی - بهمن کمالی‌رحمانی - مولود بنی‌جمالی - نادربزرگی - لیلی‌مجتهدی معصومه‌یزدانی-فریدفاضل - حسن قندچی‌مازندرانی-محمدحسین تمامی نراقی ـ آذر نیك‌زاد ـ حسین فقیهی مقدم ـ مسعود حبیب‌اللهزاده ـ مریم شاملی ـ مهنازپرتوی ـ رحمان حسین علمداری - مجیدفارسی - علی‌مرعشی - محمدمرتضوی- ابراهیم ذوالقدری ـ احمد توسلی ـ جعفرترکیان - حمید قیدر - بهرام صادقزاده ـ علی‌رضا کمالی - حسن گل‌محمدی

کلاسهای پنجم

ولی‌الله پورکرامتی ـ محمدمهدی عابدی‌نژاد ـ محمدعلی موحدیان ـ سلیمان نصرت‌آبادی ـ نعمت‌اله مقدم ـ خسرو جعفریان دیوکلائی ـ سیدجعفر لاریمی ـ علی‌اصغر بخت‌آزما- سید رضا میرزنده‌دل ـ سیدحبیب‌الله خلیلی- آذر حسینی‌پناه ـ زهرا سیدخلیلی ـ بایرام مدحت ـ مسعود حبیب‌اللهزاده - حسین فدائی ـ اصغر صحت ـ امان‌الله امین‌نیا ـ نادرصفوی ـ داوید قاطان-شهناز سهیلی- غلامحسین نیك‌رفتار ـ محمدرضا نیکوئی- محسن هاشمی‌نژاد - حسین‌علوی ـ جعفرآقایانی - مریم‌شاملی- اعظم آشفته ـ علی‌اصغر شاملی ـ چنگیز آرومیه ـ نسیرزادی مقدم ـ حسین خیازیان ـ تریمان رحیمی ـ داورنژادهندی ـ علی‌اکبر نظریان ـ محمد مقدسی ـ علی‌تقیان - عیسی خندانی فرامرز صارمی ـ علی‌اسکندربیاتی - سیروس‌مریوانی - علی‌رضا حیدری ـ مظاهر امینی ـ عباس طلائی‌زاده ـ بهرام قدوی ـ

حجت‌الله بابائی ـ شهلاسکاکی ـ الداپطرس ـ داوید ریحانی ـ حسن جعفری ـ غفارخلج‌هدایتی ـ مصباح‌جاوید ـ احمدیادگاری هدایت طوماریان ـ ژوزف صالح ـ جلال اشجعی ـ حسین اسدی پور .

کلاسهای ششم

خداقلی حسینلو ـ سعید فرشاد ـ سلیمان نصرت‌آبادی ـ مقصود صلاحی ـ منوچهر گوهرریزی ـ بهروز یوسفی ـ سیدرضا میرزنده‌دل ـ حسین ادیب ـ محمدحسین‌موسوی ـ بهمن‌شریعت پناهی ـ علی‌اصغرفقیهی مقدم ـ علی‌کاظمیان ـ غلامحسین‌اسداللهی ـ علیجان ذوالفقاری ـ پرویزدیده‌وری ـ مسعودفتاحی ـ محمدرضا فدائی ـ محسن هاشمی نژاد ـ فریدون امین‌زاده ـ حسین‌علوی مریم شاملی ـ سیدجمال‌آشفته ـ حسین ادیب ـ علی‌اصغرشاملی چنگیرآرومیه ـ نریمان رحیمی ـ محمد مقدسی ـ جواد جمشیدی ـ تورج خزائی ـ محمدرضا ارشدی ـ عیسی‌خندانی احمد توسلی ـ سیروس مریوانی ـ رضاعلی سلطان‌محمدی ـ سیدمحمدرضا بنی‌جمالی ـ کامران عادلی ـ بهرام‌فدوی ـ حسن جعفری ـ مصباح‌جاوید ـ محمدرضا یزدان ـ خلیل علمداری میلانی ـ احمد میرنژاد جویباری ـ احمد ضرابی ـ کوروش‌ستار محمدرضا نادری ـ حسن‌پوراحمدآذری ـ جلال اشجعی .

مسائل متفرقه

مهرداد معتمدگرجی ـ علی ساعی ـ محمودفضل ـ سعید فرشاد ـ محمدصادق ابریشمیان ـ هاشم قمشه ـ محمد مهدی عابدی‌نژاد ـ سلیمان نصرت‌آبادی ـ نعمت‌الله مقدم ـ مقصود صلاحی ـ محمد غراوی ـ علی‌اصغر بخت‌آزما ـ بهروز یوسفی سید رضا میرزنده‌دل ـ پرویز برادران شکوهی ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی ـ آقاویلی عظیمی ـ سیدصدرالدین شریعتی ـ حسن نوریان ـ پرویز بربری ـ بهمن شریعت‌پناهی ـ علی‌اصغر فقیهی مقدم ـ مسعود حبیب‌الله‌زاده ـ حسین‌فدائی ـ علی‌کاظمیان غلامحسین اسداللهی ـ امان‌الله امین‌نیا ـ ابوالفضل حسینی ـ مسعود فتاحی ـ محسن‌هاشمی‌نژاد ـ فریدون امین‌زاده ـ صمد فرهنج ـ حسین علوی ـ سیدجمال آشفته ـ حسین ادیب ـ علی‌اصغر شاملی ـ چنگیز آرومیه ـ نسیرزادی مقدم ـ حسین خبازیان ـ نریمان رحیمی ـ علی‌اکبر نظریان ـ محمدمقدسی جواد جمشیدی ـ تورج خزائی ـ علی تقیان ـ عیسی خندانی عیسی هندی‌نژاد ـ فرامرز سارمی ـ احمد توسلی ـ سیروس مریوانی ـ امیر دانشگر ـ سیدمحمدرضا بنی‌جمالی ـ عباس طلائی‌زاده ـ بهرام فدوی ـ مصطفی کریمی ـ حجت‌الله بابائی حسن جعفری ـ مصباح جاوید ـ محمدرضا یزدان ـ خلیل علمداری میلانی ـ حمزه گودرزی ـ قدرت‌الله شریفی ـ جعفر آقایانی چاوشی ـ هدایت طوماریان ـ کوروش‌ستار ـ احمد میرنژاد جویباری ـ منوچهر گوهرریزی ـ جلال اشجعی ـ فروهر انوری ـ حسین اسدی‌پور ـ محمدتقی مقدادیان .

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۳

کلاسهای چهارم

احمد توسلی ـ سعید سید منصوری ـ فرزین ارض‌پیما ـ عبدالمجید جمالی ـ نادر قلی‌ئیان ـ مریم شاملی ـ ابراهیم ذوالقدری ـ مرتضی مقدسی ـ حسن دوامی ـ عزت‌الله دالائی ـ حمید اکرامی ـ نادر بزرگی ـ غلامعلی احسانی ـ خسرو مهاجری ـ مسعودحبیب‌الله زاده

کلاسهای پنجم

شهناز سهیلی ـ اصغر صحت ـ مصباح جاوید ـ علی‌اصغر اسکندری ـ جعفرآقایانی چاوشی ـ حسین‌علوی ـ همت طبیبی ـ حسن‌چاکری ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی ـ مریم شاملی ـ حسین خبازیان ـ علی تقیان ـ عباس مهاجری ـ پرویز غرتیار ـ مسعود حبیب‌الله‌زاده ـ اردشیر گشتاسبی ـ حسن قلی بیگیان ـ مهدی فتاپور

کلاسهای ششم

خلیل علمداری ـ حسن دوامی ـ حسین علوی ـ احمد کلاهی شبستری ـ فریدون امین زاده ـ مریم شاملی ـ موسی صنوبری ـ حسین ادیب ـ مقصود صلاحی ـ شاهرخ میرمیرانی ـ اسمعیل یوسفی .

مسائل متفرقه

جعفرصادقی ـ خسروجعفریان‌دیوکلائی ـ محمودمشهدی‌حاتم ـ احمد توسلی ـ محمد تقی مقدادیان ـ قدرت‌الله شریفی ـ جعفرآقایانی‌چاوشی ـ حسن‌دوامی ـ حسین‌علوی ـ عبدالمجید جمالی ـ پرویز دیده‌وری ـ همت طیبی ـ احمدکلاهی شبستری ـ فریدون امین زاده ـ خداقلی حسینلو ـ مریم شاملی ـ سعید فرشاد ـ مهریار معتمد گرجی ـ عیدی محمدبابادی ـ حسین خبازیان ـ منصور ذوقی ـ اردشیر گشتاسبی ـ ابوالفضل‌حسینی ـ علی تقیان ـ موسی صنوبری ـ عزت‌الله دالائی ـ غلامرضا انصاری ـ پرویز غرتیار ـ غلامعلی احسانی ـ حسین ادیب ـ خیرالله خندانی ـ حسن چاکری ـ مسعود حبیب‌الله زاده ـ مقصود صلاحی ـ شاهرخ میرمیرانی ـ صفرعلی‌لشکربلوکی ـ مهدی فتاپور ـ پرویز بربری ـ بهمن شریعت پناهی ـ ایوب فروزنده ـ رحمن حسینی علمداری ـ فروهرانوری.



پرسش: آیا درحل مسئلهٔ مربوط به کلاس پنجم طبیعی که در یکان شمارهٔ ۳۵ انجام گرفته است می‌توانیم اینطور بیان کنیم که شرط اینکه سه نقطهٔ A و B و C بر یك‌استقامت باشند این است که:

الف ـ مختصات نقطهٔ C در معادلهٔ AB صدق کند.

ب ـ ضریب زاویهٔ AB با ضریب زاویهٔ AC برابر باشد.

نعمت‌الله مقدم

پاسخ: بنا به تعریف، می‌گوئیم سه نقطهٔ A و B و C بر یك خط مستقیم واقع‌اند وقتی که:

اولاً ـ سه بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ دارای امتداد مشترك باشند و ثانیاً داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

اما با تعریفی که از معادلهٔ یك منحنی یا ضریب زاویهٔ یك خط در هندسهٔ تحلیلی بعمل می‌آید اگر یکی از شرطهای الف یا ب که عنوان کرده‌اید برقرار باشد شرایط فوق‌الذکر نیز برقرار خواهند بود.

حل مسئلهٔ مندرج در یکان شمارهٔ ۳۵ بنا بر تعریف اولیه انجام گرفته است. وانگهی، درموقعی که این مسئله برای حل عنوان شد دانش‌آموزان کلاس پنجم‌طبیعی هنوز معادله وضریب زاویهٔ خط را نخوانده بودند.

پرسش: آیا دو جسم احیاءکننده، یا دو جسم اکسیدکننده بر هم اثر دارند یا خیر؟ اگر ندارند پس چرا در بعضی‌از کتابها سولفات فرو و هیدرژن‌سولفوره را باهم ترکیب می‌کنند؟

حجت‌الله بابائی

پاسخ (از عطاءالله بزرگ‌نیا): خاصیت احیاکنندگی و اکسیدکنندگی مطلق نیست بلکه نسبی است.

مثلاً ـ یك جسم ممکن است در مقابل یك یا چندجسم احیاکننده و درمقابل یك یا چند جسم دیگر اکسیدکننده باشد مثلا انیدریدسولفورو که در غالب موارد احیا کننده است در مقابل SH_2 اکسیدکننده است و واکنش ترکیب آن از این قرار است.

$$SO_2+SH_2 \longrightarrow 3S+2H_2O$$

اما در مورد ترکیب SH_2 با سولفات فرو بطوری که می‌دانید این واکنش انجام پذیر نیست زیرا سولفور آهن در اسید ها حل می شود وانگهی‌این واکنش سولفات فرو و اسید سولفیدریك هیچیك در نقش احیا کنندگی نیستند بلکه سولفات فرو به‌عنوان یك‌نمك و اسید سولفیدریك به عنوان یك اسیدعمل می کند.

پرسش: روی بعضی‌از کره‌های جغرافیائی‌شکلی‌شبیه‌به ∞ وجود دارد که روی‌آن اسامی ماههای فرنگی نوشته شده‌است. این شکل مربوط به چیست؟

دانش آموز

پاسخ: شکل مزبور نمایش هندسی معادلهٔ‌زمان‌دردستگاه مختصات قطبی است. چنانکه در پائین صفحهٔ ۹ از یکان شمارهٔ ۳۴ یادداشت شده است معادلهٔ زمان عبارت‌ازاختلاف بین ساعت قانونی و ساعت خورشید حقیقی می‌باشد. از روی منحنی که روی کرهٔ جغرافیائی وجود دارد می‌توان در هر موقع ازسال مخصوصاً ۲۱ ماههای فرنگی که مقارن با اول ماههای ایرانی است مقدار اختلاف مزبوررا تعیین کرد.

پرسش: در کتابهای درسی مقطع آینهٔ کروی را با صفحهٔ شکل به صورت قوسی‌از دایره رسم کرده‌اند اما در محاسباتی که برای پیدا کردن فرمولهای آینه انجام می‌دهند آن را به عنوان یك خط مستقیم در نظر گرفته‌اند. آیااین کار درست‌است یا خیر؟ و اگر صحیح است علت آن چیست؟

حسین علوی

پاسخ: (از هوشنگ شریفزاده) ـ این گونه شکلها هنگامی درست است که آینه واقعاً از شیء تصویرواضح بدهد. بنابراین قبلاباید شرط تشکیل تصویر واضح‌را درآینه‌های کروی بررسی کنیم.

شرط تشکیل تصویر در آینه های کروی: تجربه

دربارهٔ مندرجات یکان سال ۱۳۴۵

● **آقای محمد صادق ابریشمیان** اشتباهی را که ضمن مسئلهٔ ۳ از مسائل کنکور دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران (مندرج درصفحهٔ ۷۷) رخ داده است تذکر داده‌اند.

اشتباه ازاین‌قراراست که‌درمحاسبهٔ‌حجم V به‌جای $G(0)$ اشتباهی $G(1)$ اختیار شده است. مقدار حجم V_2 وحجم V به ترتیب چنین است.

$$V_2=\pi|G(2)-G(0)|=\frac{566\pi}{3}$$

واحد حجم $V=V_1-V_2=\frac{926-566}{3}\pi=120\pi$

● **آقایان فرهاد تاهباززاده و اسعد مرتضوی** یادآوری کرده‌اند که درحل مسئلهٔ حساب استدلالی خرداد ۴۵ ششم ریاضی اولا اینکه فرض شده

$N'=9h$ و $N''=3h'+1$

اشتباه است‌زیرا مجموع ارقام دوعدد N' و N'' باهم‌مساویست وباقیماندهٔ‌تقسیم هریك ازآنها بر ۹یا بر ۳ نیز مساوی خواهد بود. ثانیاً رابطهٔ

$N'-N''=3(h-h')$

بقیه پائین صفحه بعد

بقیه ازصفحه دوبرو

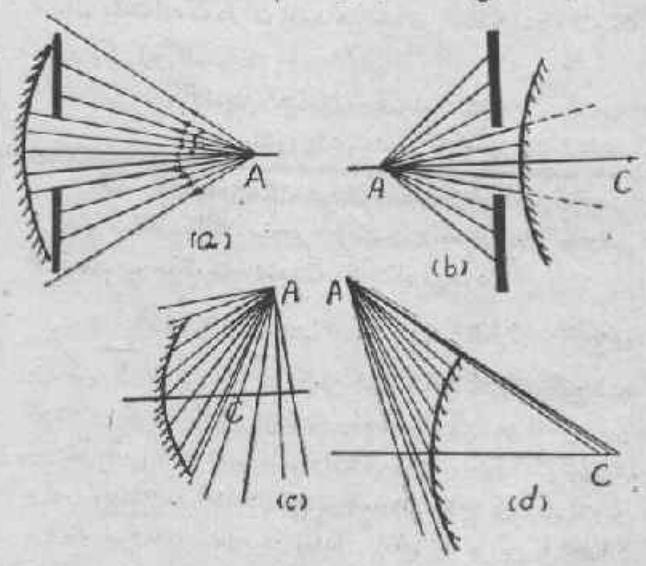
نشان می دهد که آینهٔ کروی هنگامی از یك شیء تصویر واضح می‌دهد که اشعه‌ای که از آن شیء برآینه می‌تابد تقریباً عمود بر سطح آینه باشد.

می‌دانیم که شعاع کره بر سطح کره‌عمودست: بنابراین برای اینکه یك شیء در آینهٔ کروی تصویر واضح داشته باشد لازم است که امتداد اشعه‌ای که از هـرنقطهٔ آن تابش می‌شود تقریباً از مرکز آینه بگذرد.

اکنون می‌خواهیم بدانیم که این شرط در چه مواردی موجود است:

۱ـ حالتی را در نظر می گیریم که شیء A در مرکز آینه یا نزدیك به مرکز آینه واقع است. اشعه‌ای کـه از آن بر آینه می‌تابد تقریباً عمود برسطح آینه است. بنابراین شیء A در این آینه تصویری خواهد داشت مانند A'. به عبارت دیگر دسته اشعهٔ مخروطی‌تابش‌که رأس‌آن A است پس‌ازانعکاس تبدیل به‌دسته اشعـهٔ مخروطی دیگر می‌شود که رأس آن A' است.

۲ـ حالتی را درنظر می گیریم که شیء A در فاصله‌ای



دور از مرکز اما نزدیك به محور اصلی واقع است. دسته‌اشعهٔ تابش مخروطی را تشکیل مـی‌دهد که معمـولاً زاویهٔ رأس آن بزرگ است. امتداد بعضی‌از شعاعهای این دسته اشعه از نزدیك مرکز آینه می گذرد و تقریباً بر آینه عمود است. برای‌آنکه تصویر واضحی از A تشکیل شود آینه باید فقط اشعـه‌ای را دریافت کند که امتداد آنها از نزدیك مرکز می گذرد. شرط اینکه چنین حالتی اتفاق بیفتد آنست که دهانهٔ آینـه کوچك باشد (شکلهای a و b). برای کـوچك‌کردن دهانهٔ آینه‌از یك دیافراگم استفاده می کنیم.

۳ـ حالتی‌را در نظر می گیریم که شیءA دوراز محور اصلی واقع است. در این صورت اگر زاویهٔ AC با محور اصلی بزرگ باشد اشعه‌ای که امتداد آنها از مرکز می گذرد به آینه برخورد نمی‌کند و امتداد اشعه‌ای که به آینه برخورد می‌کند از مرکز آینه دور است. درچنین حالتی‌شیء A تصویر واضح نخواهد داشت (شکلهای c و d).

بنابراین هرگاه شیء A ازمحوراصلی دورباشدهنگامی دارای تصویر واضح خواهد بود که زاویهٔ بین محور فرعی‌که از A می گذرد و محور اصلی کوچك باشد.

تجربه ومحاسبه نشان می‌دهد که با چنین شرایطی‌اگر شیء AB بر یکی‌از محورها عمود باشدتصویری خواهد داشت مانند $A'B'$ عمود بر همان محور.

واضح‌است‌که هرگاه دهانهٔ‌آینه کوچك باشد اشعهٔ‌تابش به یکدیگر نزدیکند، بنابراین نمی‌توان مسیر نور و چگونگی تشکیل تصویر را با مقیاس درست بر صفحهٔ کاغذ نشان داد.

به همین دلیل سطح منعکس‌کنندهٔ آینه‌های‌کروی را باید بزرگتر از اندازهٔ واقعی رسم کرد. بنابراین اگر چه مقطع آینه را به‌صورت قوسی‌از دایره نمایش دهیم در محاسبات می‌توانیم قوسی را کـه نـور به آن تابیـده است یك خط مستقیم بدانیم. و نیز ممکن است به همین دلیل مقطع‌آینه را به‌صورت یك خط مستقیم نمایش داد.

از میان نامه‌های رسیده

● آقای **محمد مهدی عابدی نژاد** تذکر داده‌اند که در حل مسئلهٔ ۳۹۷۵ مندرج در یکان ۳۴ چون جواب منفی $a-c=x$ در نظر گرفته نشده یك جواب مسئله که ۱۶۹ است بدست نیامده است .

● آقای **کورش ستار** از اصفهان تذکر داده‌اند که اولا درجلد اول مسائلی از حساب استدلالی در حل مسئلهٔ ۵۸ فقط یك جواب مسئله حساب شده است درصورتی که مسئله دارای جوابهای دیگری نیز می‌باشد. ثانیاً ضمن حل مسئلهٔ ۸۸ مقادیری بدست می‌آید که در رابطهٔ داده شده صدق نمی‌کند .

یکان ـ دربارهٔ این قسمت متذکر می‌شود که درسطر اول صفحهٔ ۵۳ کتاب که عدد ۲۷ چاپ شده اشتباه است وصحیح آن ۱۲۷ می‌باشد .

● آقای **سعید فرشاد** از شبستر نوشته‌اند که در یکی ازکتابهای حل‌المسئله برای اثبات نامساوی

$$S=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2}$$

چنین عمل کرده‌اند .

$$n+1>n \Rightarrow \frac{1}{n+1}>\frac{1}{n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n+n>n \Rightarrow \frac{1}{n+n}>\frac{1}{n}$$

ونتیجه گرفته‌اند که

$$S>\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1>\frac{1}{2}$$

درصورتی که استنباط بالا اشتباه است زیرا می‌دانیم که

$$n+1>n \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

$$n+n>n \Rightarrow \frac{1}{n+n}<\frac{1}{n}$$

ونتیجه خواهد شد که :

$$S<1$$

● آقای **فریدون امین‌زاده** از رضائیه نوشته‌اند که:

۱) در کتاب درسی حساب استدلالی آنجا که ذکر شده اگر عدد a بر d قابل قسمت باشد تمام قوای a نیز بر d قابل است باید قید شود تمام قوای صحیح ومثبت a

۲) دریکی ازکتابهای حل‌المسائل از رابطهٔ

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

نتیجه گرفته شده که

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \end{cases}$$

درصورتی که این استنباط غلط است زیرا دورابطهٔ اخیر درعین حال نمی‌توانند هر دو برابر با صفر باشند وانگهی از رابطهٔ $ab=0$ نمی‌توانیم استنباط کنیم که a و b هردو باهم برابر با صفر هستند .

● آقای **غلامرضا فرزین** دانشجوی دانشکدهٔ افسری نوشته‌اند که مسئلهٔ هندسهٔ امتحان ورودی بهمن ۴۵ دانشکدهٔ صنعتی تهران درحالتی که نقطهٔ B و دایرهٔ O در دوطرف خط CD واقع باشندجواب ندارد. همچنین درحالتی که مماس نقطهٔ C از B بگذرد زاویهٔ ADB بوجود نمی‌آید .

● آقای **مرتضی حصیبی ملایری** نوشته‌اند که ضمن سؤالات امتحانات داخلی دبیرستانها مندرج دریکان ۳۴ ملاحظه شد که به جای $\sec x$ و $\operatorname{cosec} x$ نوشته بودند $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ در صورتی که بنابر قرارداد بین‌المللی مقصود از $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ به‌ترتیب $\arcsin x$ و $\arccos x$ می‌باشد.

● آقای **جلال‌الدین مهدی‌نژاد** اشعاری در وصف استاد دکتر هشترودی‌سروده وبرای‌درج در مجله ارسال‌داشته‌اند که به جهاتی از درج آنها معذور هستیم . آخرین بیت اشعار ایشان ازاین قراراست :

مرا قدرت برای وصف خویت نیست بیش‌ازاین
قلم نیشش به کاغذ هست و لیکن مانده‌ام حیران

● آقای **بهمن راد مریخی** از لاهیجان نیز اشعاری ارسال داشته‌اند که درآن ازمشاهیرجهان یادشده است .ازجمله اشعار یکی این است :

کاوندیش هیدرژن بنموده کشف
ساخت بمبش را اینشتین ناگهان

بقیه از صفحهٔ قبل

نیزاشتباه است زیرا اگر تفاضل دومربع کامل بر ۹ قابل قسمت باشد لازم نمی‌آید که هریك‌ازآن دوعددمضرب ۹ باشد

● آقای **محمد صادق ابریشمیان** اشتباههای حل بعضی از مسائل فیزیك را به شرح زیر تذکر داده‌اند :

صفحهٔ ۹۶ ستون ۲ سطر ۴ ازآخر باید نوشته شود

$$=K\frac{mM}{d^2}$$ نیروی جاذبهٔ عمومی

صفحهٔ ۷۱ ستون ۲ سطر ۴ ازآخر باید نوشته شود

$$\gamma=\frac{4g}{30}$$

$$T_A=T_B=\frac{P}{2}-\frac{P}{g}\times\frac{4g}{30}=\frac{11P}{30}$$

● آقای **هوشنگ شریفزاده** تذکر داده‌اند که قسمتی از حل مسئلهٔ مکانیك صفحهٔ ۶۲ ستون ۲ بعد از سطر ۱۰ وقبل از قسمت ب حذف شده است که عیناً نقل می‌شود :

«از طرفی بزرگی نیروی $\overrightarrow{F}$ برابر ۶kgf می‌باشدیعنی بزرگی $\overrightarrow{F}$ از بزرگی $\overrightarrow{R}$ کمتر است وتاهنگامی که‌چنین‌باشد نیروهایی که در مقابل حرکت جسم ایستادگی می‌کنند برابر نیروی اقتیی است که برجسم وارد می‌شود ، یعنی اگر نیرویی برابر ۶kgf در امتداد افقی برجسم وارد شود بزرگی تصویر برآیند نیروهای مقاوم در امتداد افقی نیز برابر با ۶kgf خواهند بود»

آقای **مسعود براتی** نیزکامل نبودن حل این مسئله را تذکر داده‌اند .

آگهی مسابقهٔ ورودی دانشگاه صنعتی آریامهر

(بقیه از صفحهٔ دوم جلد)

شرایط نام نویسی برای شرکت در امتحان مسابقهٔ ورودی .

۱ـ تقاضانامهٔ کتبی به خط و امضای داوطلب (نام و نام‌خانوادگی داوطلب خوانا نوشته‌شود).

۲ـ یک‌برگ رونوشت مصدق شناسنامه و سه قطعه عکس برقی ۴×۳ (پشت عکسها باید نام و نام خانوادگی داوطلب نوشته شود) .

۳ـ رسید بانکی‌به‌مبلغ پانصدریال بابت شرکت‌درامتحان مسابقهٔ ورودی‌که به‌حساب جاری شمارهٔ (۱۲۷۶۵۳) دانشگاه آریامهر در بانك ملی ایران شعبهٔ دانشگاه پرداخت یا حواله شده باشد (وجه‌پرداختی‌به‌حساب مسابقهٔ دانشگاه‌صنعتی‌آریامهر به‌هیچ‌وجه مسترد نخواهد شد) .

۴ـ فتوکپی گواهینامهٔ ششم متوسطهٔ ریاضی و یا گواهی قبولی ششم متوسطهٔ ریاضی صادر از ادارات آموزش و پرورش برای فارغ‌التحصیلان سالهای قبل ـ گواهی اشتغال به تحصیل از دبیرستان مربوط برای‌دانش‌آموزان ششم ریاضی سال‌جاری مبنی براینکه برای شرکت در امتحانات نهائی خرداد۱۳۴۶ معرفی خواهند شد .

۵ـ از لحاظ وظیفهٔ عمومی :

الف ـ متولدین ۱۳۲۷ بدون‌کارت معافی وظیفه‌می‌توانند ثبت نام نمایند .

ب ـ متولدین ۱۳۲۶ وپائین ، دانش‌آموز سال تحصیلی ۱۳۴۵ـ۱۳۴۶ دبیرستانها باید گواهی‌نامه‌ای به امضای رئیس دبیرستان دایر بر اینکه برای آنها کارت معافی تحصیلی اخذ شده است ارسال دارند .

ج ـ متولدین ۱۳۲۶ وپائین که در دانشگاهها و مدارس عالی‌مشغول تحصیل هستند باید معرفی‌نامه‌ای از طرف دانشگاه یا مدرسهٔ عالی مربوط دایر براینکه برای آنها درسال تحصیلی جاری کارت معافی اخذ شده‌است‌ارسال دارند؛ این افراد در صورتی می‌توانند ثبت نام کنند که رشتهٔ تحصیلی‌آنها در دانشگاه صنعتی‌آریامهر بارشته‌ای‌که درسال ۱۳۴۵ ـ ۱۳۴۶ دردانشگاه یا مدرسهٔ عالی تحصیل می‌کنند مغایرت نداشته باشد، درغیر این صورت باتوجه به تصویب‌نامهٔ مورخ ۱۳۴۴/۲/۲۹ هیئت وزیران ، لزوم تغییر رشتهٔ آنان باید مورد گواهی شورای دانشگاه یامدارس عالی مربوط واقع گردد .

د ـ متولدین ۱۳۲۶ وپائین که در آموزشگاههای شبانه یا مؤسسات تعلیماتی زبان به تحصیل اشتغال‌دارند باید گواهی‌ـ نامه‌ای به‌امضای رئیس‌آموزشگاه یامؤسسه دایر براینکه برای آنها در سال تحصیلی ۱۳۴۵ـ۱۳۴۶ کارت معافی تحصیلی‌اخذ شده است ارسال دارند .

ه ـ متولدین ۱۳۲۶ وپائین‌که یکی از اوراق: معافیت‌تکفل- معافی پزشکی- معافی دویاچندبرادری- دفترچهٔ آماده به‌خدمت دردست دارند می‌توانند قبل از پایان مهلتی‌که در اوراق قانونی مربوط به‌آنان داده شده است با ارسال‌فتوکپی یا رونوشت مصدق اوراق مزبور ثبت‌نام نمایند .

و ـ سپاهیان دانش و سایر سپاهیان فارغ‌التحصیل ششم ریاضی به‌شرطی می‌توانند درامتحان مسابقهٔ ورودی‌شرکت‌کنند که از واحد مربوط گواهی نامه‌ای اخذ نمایند مبنی براینکه خدمت آنان حداکثر تاآخر شهریور ۱۳۴۶ پایان‌می‌پذیرد .

توضیح :

الف ـ داوطلبان باید از تاریخ نشراین آگهی‌کلیهٔ مدارك فوق را یکجا باپست سفارشی به‌نشانی : **(دبیرخانهٔ دانشگاه صنعتی آریامهر- خیابان امیرآباد شمارهٔ ۹۹)** ارسال دارند ودرپشت پاکت عبارت «مربوط به امتحان مسابقهٔ‌ورودی دانشگاه آریامهر» را حتماً قید نمایند .

ب ـ **ازارسال اصل مدرك تحصیلی مطلقاًخود- داری شود.** فقط در موقع اخذکارت شرکت درجلسهٔ امتحان مسابقهٔ ورودی باید اصل مدرك تحصیلی (گواهینامهٔ سال ششم متوسطهٔ ریاضی یاکارنامهٔ قبولی‌سال ششم یاجواز قبولی) همراه داوطلب باشد . **کارت شرکت در جلسهٔ امتحان مسابقهٔ ورودی بدون ارائهٔ اصل مدرك تحصیلی به‌داوطلب داده نخواهد شد .**

ج ـ به مدارکی‌که بعد از پایان وقت اداری روزپنجشنبه هشتم تیرماه ۱۳۴۶ برسد یا بطور ناقص ارسال شده باشد ترتیب اثر داده نخواهد شد .

د ـ کارت شرکت در جلسهٔ امتحان مسابقهٔ ورودی در روزهای‌دوشنبه‌دوازدهم تیرماه وسه‌شنبه سیزدهم ازساعت $8\frac{1}{2}$ صبح تا ۱۲ و از ساعت ۳ تا ۷ بعد از ظهر در محل دانشگاه آریامهر واقع در خیابان آیزنهاور توزیع می‌گردد. داوطلبان باید **شخصاً** برای اخذکارت مراجعه نمایند .

ه ـ امتحان مسابقهٔ ورودی به‌ترتیب زیر خواهد بود :

امتحان اول ـ روز چهار شنبه چهاردهم تیرماه ۱۳۴۶ ساعت $8\frac{1}{2}$ صبح : ریاضیات :

(جبر- مثلثات- حساب- هندسه - مخروطات - رقومی و ترسیمی)

امتحان دوم- روز پنجشنبه پانزدهم تیرماه ۱۳۴۶ ساعت $8\frac{1}{2}$ صبح : مکانیك - فیزیك - شیمی - رسم فنی .

و ـ نتیجهٔ امتحان مسابقهٔ ورودی و تاریخ نام نویسی قبولشدگان بعداً باطلاع داوطلبان خواهد رسید .

نیابت تولیت عظمی دانشگاه صنعتی آریامهر

محمدعلی مجتهدی

قابل توجه داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

برای تهیهٔ کتاب

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف

استاد دکتر محسن هشترودی

در تهران به ادارهٔ مجلهٔ یکان (یا به یکی از کتابفروشیها)
و در شهرستانها به نمایندگان فروش مجلهٔ یکان مراجعه فرمائید.

بها: با جلد زرکوب ۱۵۰ ریال ، با جلد شمیز ۱۲۰ ریال

انتشارات یکان:

مجموعهٔ علمی یکان سال
۶۰ ریال

یکان سال مخصوص
امتحانات نهائی ۱۳۴۳
۴۰ ریال (نایاب)

معماهای ریاضی
۴۰ ریال (نایاب)

راهنمای ریاضیات متوسطه
چاپ دوم : ۱۵ ریال

مسائلی از حساب استدلالی
جلد اول (نایاب)
جلد دوم: ۲۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴
۵۰ ریال (نایاب)

یکان سال ۱۳۴۵
۶۵ ریال (نایاب)