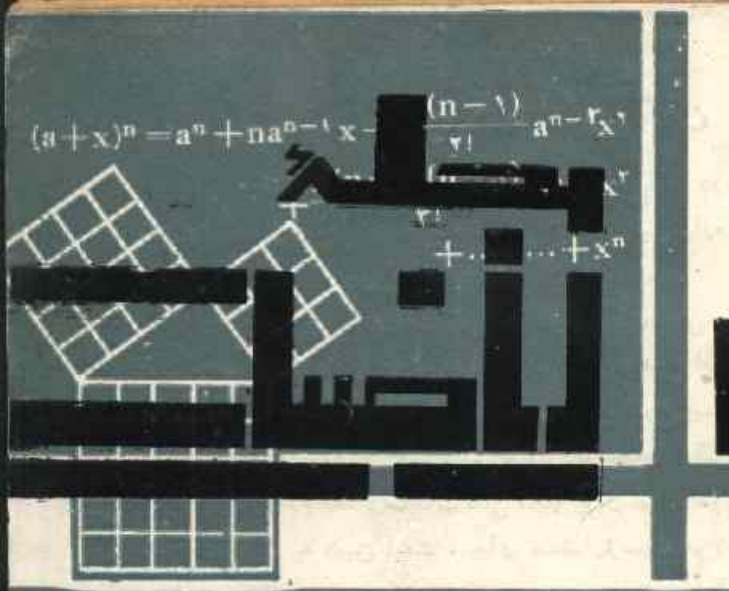


برهان

مجله ریاضیات

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ :

۱۲

شمارهٔ مسلسل

۳۷

مردادماه ۱۳۴۶

در این شماره :

ریاضیات جدید و برنامه‌ها	عبدالحسین مصحفی	۱
بررسی کتاب مثلثات شکم ریاضی	غلامرضا عجدی	۲
زاویه ، بنابرآخرین تعریف	ترجمه	۷
دترمینان	سید محمد کاظم نائینی	۱۱
مراحل مهم علم نجوم	ترجمه	۱۵
بی‌آنکه عصبانی شوید	«	۱۷
تجزیهٔ کسر به کسرهای ساده‌تر	جلیل‌الله قراگزلو	۱۸
چند نامساوی در هندسه	ترجمهٔ: جعفر آقایانی	۲۲
راهنمای حل مسائل شیمی	ترجمهٔ : بزرگ‌نیا	۲۵
سرگرمیهای ریاضی	—	۲۸
داستانهای تفننی ریاضی	ترجمه	۲۹
Problems & Solutions	—	۳۱
اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها	مهندس ارشاقی	۳۲
حل مسائل نمونه، مسئلهٔ مالفاتی	ترجمهٔ : کارآپیان	۳۳
مسائل برای حل	—	۳۵
حل مسائل شمارهٔ ۳۵	—	۳۷
پرسش و پاسخ	—	۴۷
از میان نامه‌های رسیده	—	۴۸

بها : بیست ریال

پایان دورهٔ سوم انتشار یکان

با این شماره دورهٔ سوم انتشار یکان پایان می‌یابد. در ماه شهریور ، طبق معمول ، مجله منتشر نمی‌شود . اولین شماره از دورهٔ چهارم اوایل مهرماه تقدیم دوستداران خواهد شد.

بعضی تغییرات درجهت خواست خوانندگان پیش بینی شده که در دورهٔ چهارم معمول خواهد شد. اولین موضوع ازدیاد صفحات مجله است که اجازه خواهد داد هم مطالب متنوع بیشتری در مجله درج شود و هم تعداد مسائل برای حل افزون گردد. یک‌چهارم تعداد صفحات فعلی مجله به‌آن اضافه خواهد شد ودر مقابل به همین نسبت ، بهای تک‌شمارهٔ مجله هم زیاد می‌شود .

موضوع دوم ، ترتیب اشتراک مجله است . باترتیبی که فراهم آمده است از این به بعد هر دورهٔ مجلهٔ یکان شامل ده شمارهٔ عادی و یک شمارهٔ مخصوص (یکان‌سال) می‌باشد . ابتدای هر دوره ماه مهر خواهد بود ؛ سال مجله با سال تحصیلی مطابق می‌شود . اشتراک مجله هم برای یک دورهٔ کامل آن یعنی از ابتدای مهرماه هرسال عملی خواهد بود. وجه اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ ریال است که قبلا دریافت می‌شود و درازای آن ده شماره ماهانه (تک‌شماره ۲۵ ریال) و یک‌شماره یکان سال برای هر مشترک ارسال خواهد شد. برای مشترکان فعلی یکان که دورهٔ اشتراک آنها تمام نشده‌است ، بقیهٔ مبلغی راکه باید بپردازند تا اشتراک آنها تا آخر دورهٔ چهارم مجله باشد محاسبه شده به‌اطلاع ایشان خواهد رسید .

موضوع ارسال حل مسائل به‌این ترتیب خواهد بود که در هر شماره چند مسئله تعیین می‌شود که فقط حل همین مسائل ارسال شود و نام کسانی که حل صحیح ارسال داشته باشند در دوشمارهٔ بعد اعلام می‌شود .

***

بعداز قطع چاپ ریاضیات جدید در مجله ، عدهٔ بسیاری ازخوانندگان به‌این امر اعتراض کردند وخواهان چاپ دنبالهٔ مطلب شدند . با کتابهای مختلف و متنوعی که در این زمینه فراهم آمده وانتخاب مناسبترین آنها ، ادامهٔ مطلب ، توأم باطرح وحل مسائل ، از دورهٔ جدید مجله آغاز خواهد شد.

موضوع مصاحبهٔ با استادان و معاریف از ریاضیدانان با جدیت بیشتر دنبال شده علاوه بر آن سعی خواهد شد که در هر شمارهٔ مجله ، یک یا چند نفر از ریاضیدانان نامی معاصر به خوانندگان مجله معرفی شوند .

***

مطالب دیگری زیر عناوین تازه بـه مطالب مجله اضافه خواهد شد . اما بطور کلی نسبت به مطالبی که باید در مجله چاپ شود منتظر دریافت نظرات و پیشنهادهای خوانندگان هستیم .

آگهی نوبت اول

مجمع عمومی عادی

انجمن معلمان ریاضی ایران

هیئت مجریان انجمن معلمان ریاضی ایران بـر طبق اساسنامهٔ انجمن از عموم معلمان ریاضی دعوت می‌کند که در ساعت ۸ صبح روز جمعه ۱۵ شهریورماه برای شرکت‌درمجمع عمومی انجمن به دبیرستان شمارهٔ ۱ آذر (خیابان نادری ـ چهارراه قوام‌السلطنه ـ شمارهٔ ۳۳۳) تشریف بیاورند .

دستور جلسه :

۱) گزارش هیئت مجریان .

۲) انتخاب شورای مرکزی .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

سال چهارم ـ دورهٔ سوم ـ شمارهٔ دوازدهم (شمارهٔ مسلسل: ۳۷)

مرداد ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسئول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یک بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زار نو، نزدیک شاهرضا ـ شمارهٔ ۸۱۴

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراک برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زار نو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 12 , July. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ریاضیات جدید و برنامه‌ها

اطلاعاتی که از منابع مختلف واز مطبوعات خارجی بدست می‌آید حاکی است که اجرای آزمایشی برنامهٔ «ریاضیات جدید» درکشورهایی که به این کار دست زده‌اند موفقیت‌آمیز بوده و نتایج حاصل از آن رضایت بخش بوده است.

در این کشورها اکنون مرحلهٔ قطعی اجرای برنامه‌های جدید آغاز می‌شود. اما درکشور ما هنوز در این باره گام قطعی و اساسی برداشته نشده است. فقط گاه‌به‌گاه زمزمه‌هایی به گوش می‌رسد که برنامه‌های ریاضی که براساس نظام نوین آموزش و پرورش تنظیم خواهد شد ریاضیات جدید را دربر خواهد داشت.

ترجمهٔ عناوین برنامهٔ یك کشور پیشرفته واعلام آن به‌عنوان برنامهٔ جدید شاید کاری ساده باشد اما آنچه موفقیت یك برنامهٔ جدید را تضمین می‌کند اعتقاد مجریان برنامه، یعنی معلمان، به این برنامه و تسلط آنان در اجرای مواد آن می‌باشد.

درایران، یك‌بار برنامهٔ هندسهٔ دبیرستانها براساس پیشرفته‌ترین روشها تنظیم شداما اجرای آن با شکست مواجه شد به‌این علت که نسبت به‌آشنایی دبیران با این روش هیچ اقدامی انجام نگرفته بود.

اکنون هم، در اجرای برنامه‌های جدید، مخصوصاً دربارهٔ ریاضیات نوین، آنچه بایددر درجهٔ اول اهمیت قرارگیرد آشناساختن دبیران شاغل، وتربیت‌دبیران آینده، براساس این برنامه‌ها می‌باشد.

عبدالحسین مصحبی

غلامرضا عسجدی

بررسی کتاب

مثلثات برای سال ششم ریاضی

-۲-

برای تبدیل حاصل‌ضرب سینوسها و یا کسینوسهای دو کمان به تفاضل یا مجموع ، یا تبدیل حاصل‌ضرب سینوس یك کمان در کسینوس کمان دیگر به مجموع، از دستورهای زیر استفاده می کنند:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

۶
۱۱/۶/۱

تقریباً در تمام کتابهای درسی اعم از خارجی و یا داخلی که تاکنون ملاحظه شده است بجز این کتاب مورد بحث، تبدیلات فوق را در چهار فرمول ضبط کرده‌اند . حذف فرمول چهارم به منظور رعایت اختصار جائز نیست زیرا که این عمل ارتباط و تداعی معانی ذهنی دانش‌آموزان را با عبارات نظیر :

$\cos p \pm \cos q$ و $\sin p \pm \sin q$

که به موجب چهارفرمول دیگر به حاصل ضرب تبدیل می‌شوند، و این فرمولها در شمارهٔ دهم فصل اول همین کتاب مورد بحث هم درج شده است ، بهم می‌زند . بنابراین بهتر است تبدیلات مذکور به تبعیت از سایر کتب درسی به ترتیب زیر نوشته شود :

برای تبدیل حاصل‌ضرب سینوسها یا کسینوسهای دو کمان یا حاصل‌ضرب سینوس یك کمان در کوسینوس کمان دیگر به تفاضل یا مجموع ، از دستورهای زیر استفاده می کنند :

$$\begin{cases} \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{cases}$$

بطوری که ملاحظه می‌شود اصلا فرمول چهارم از لحاظ سمت راست با فرمول سوم اختلاف دارد . اگر گفته شود با جابجا کردن a و b در فرمول سوم می‌توانیم آنرا به فرمول چهارم تبدیل نمائیم البته این حرف صحیح است درصورتی که از قضیهٔ

$\sin(-x) = -\sin x$

نیز استفاده شود . بنابراین معلوم می‌شود که اختلاف این دو فرمول در خارج از وضع خود آنها است پس نمی‌توان یکی از آنها را حذف کرد .

به کمك جدولهای لگاریتم دو نوع مسئلهٔ زیر را می‌توان حل کرد :

مسئلهٔ اول ـ کمانی معلوم است لگاریتم خطوط مثلثاتی آن را تعیین کنید

مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی کمانی معلوم است اندازهٔ آن کمان را تعیین کنید

۷
۱۱/۲
از شمارهٔ ۱

بیان فوق باید به ترتیب زیر تکمیل گردد :

به کمك جدولهای لگاریتم مثلثاتی سه نوع مسئلهٔ زیر را در مورد کمانهای بین صفر و نود درجه می‌توان حل کرد :

مسئلهٔ اول ـ کمانی معلوم است لگاریتم توابع مثلثاتی آنرا تعیین کنید

مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از توابع مثلثاتی کمانی معلوم است اندازهٔ آن کمان را تعیین کنید

مسئلهٔ سوم ـ لگاریتم یکی از توابع مثلثاتی کمانی معلوم است لگاریتم یکی دیگر از توابع مثلثاتی آنرا بدون تعیین خود کمان بدست آورید .

توضیح ـ سفارش‌دهندهٔ این سطور توأم با درود فراوان به محضر همکاران محترم معلمان ریاضی اینست که اهتمام فرمایند تا محصلین آنها در محاسبات لگاریتم مخصوصاً به اجرای مسئلهٔ سوم عادت کنند . غالباً مشاهده شده است که مثلا اگر $\log\sin\alpha$ معلوم باشد و بخواهند به ازاء آن $\log\cos\alpha$ را از جدول استخراج نمایند قبلا خود α را تعیین سپس لگاریتم کسینوس

آنرا بدست می‌آورند . این عمل دور زدن موجب اتلاف وقت محاسبه در موقع امتحانات یامواقع عادی و امولا نقطهٔ ضعف برای محاسب است . گاهی هم باعث عدم دقت می‌شود زیرا که در دو عمل نامبرده دو تقریب برمحاسبه تحمیل می‌شود . این تقریبها گاهی درخلاف جهت بوده همدیگر راخنثی می کنندو گاهی دریك جهت بوده باهم جمع می‌شوند. درصورتی که ازابتدامی توانیم بایك عمل ، در مقابل لگاریتم سینوس هر کمان مستقیماً لگاریتم کسینوس آنرا از جدول استخراج نمائیم . واگر این لگاریتمها عیناً درردیف اعداد مندرج درجدول موجود نباشند اختلافهارا که تقریباً متناسب فرض می‌شود بوسیلهٔ جدولهای میانه‌گیر tables · interpalation

از حاشیهٔ صفحات جدول لگاریتم جبران می کنیم

دانش آموزان همواره باید درمواقع لزوم از جدولهای میانه‌گیر مذکور ، عوض حل معمولی تناسبها ، استفاده نمایند. این کار موجب سرعت‌عمل و مرتب بودن ریزمحاسبات لگاریتمی خواهدبود . درکتاب مثلثات سال ششم ریاضی وهمچنین درکتاب مثلثات سال پنجم به این منظورها عطف توجه نشده است؛ در زیر عیناً یك‌مثال‌عددی از مثلثات ششم ریاضی برای‌مزیداطلاع دانش‌آموزان گرامی نقل می کنیم :

۸/۱۷/۲ مثال ، ازشمارهٔ۲

مثال ـ درصورتی که بدانیم

$\log a = ۰/۴۷۷۱۲$ و $\log b = ۰/۳۴۹۴۸$

بدون محاسبهٔ a و b لگاریتم $(a+b)$ راحساب کنید .

برای حل این مثال چنین عمل شده است :

$$a+b = a(۱+\frac{b}{a}) = a(۱+tg^۲\varphi) = \frac{a}{\cos^۲\varphi}$$

که درآن $tg\varphi = \frac{b}{a}$ می‌باشد .

بطوری که درکتاب مشاهده می‌شود پس از محاسبهٔ :

$\log tg\varphi = \log b + colog a = \bar{۱}/۹۳۶۱۸$

خودکمان φ از جدول استخراج شده :

$\varphi = ۴۰^\circ\ ۳۸'\ ۱۸''$

سپس به محاسبهٔ $\log\cos\varphi$ یا $colog\cos\varphi$ ۲ وبالاخره بمحاسبهٔ $\log(a+b)$ اقدام شده است. درصورتی که ابداً به تعیین کمان φ احتیاج نبوده است . می‌توان $\log\cos\varphi$ را از روی لگاریتم تانژانت آن ازصفحهٔ ۱۱۹ جدول J.Dupuis بدست‌آورد:

tg	D	cos	D'
$\bar{۱}/۹۳۶۱۸$		؟	
$\bar{۱}/۹۳۶۱۰$	۲۶	$\bar{۱}/۸۷۹۰۹$	-۱۱
$d-۸\{^{+۴۳}_{+۳۵}$		$d'=-۳\{^{-۱۸}_{-۱۵}$	
$\bar{۱}/۹۳۶۱۸$	پس	$\bar{۱}/۸۷۹۰۶$	

جدولهای حاشیه یا میانه‌گیری

$D=۲۶$ $D'=-۱۱$

۰/۱۸	۱	→	۰/۴۳ ۱
۰/۳۷	۲		۰/۸۷ ۲
۰/۵۵	۳		۱/۳۰ ۳
۰/۷۳	۴		۱/۷۳ ۴
۰/۹۱	۵		۲/۱۷ ۵
۱/۱۰	۶		۲/۶۰ ۶
۱/۲۸	۷		۳/۰۳ ۷
۱/۴۶	۸		۳/۴۷ ۸
۱/۶۳	۹	→	۳/۹۰ ۹

در نتیجه $colog\cos\varphi = ۰/۱۲۰۹۴$

جواب کتاب $۲colog\cos\varphi = ۰/۲۴۱۸۸$

باز مشاهده می‌شودکه در صفحهٔ ۱۲۱ کتاب مثلثات سال پنجم ریاضی یك مثال عددی حل شده وبه این نکته که معروض افتاد توجه نشده است . شاید خوانندگان محترم تصورفرمایند که این موضوع خیلی بی‌اهمیت است لیکن هرآموزنده و یا دانش‌آموز دقیق که با جدول لگاریتم و محاسبات لگاریتمی سروکار داشته است می‌داند وقتی که به‌ازاء $\log tg\varphi$ مثلاً کمان φ را از جدول استخراج می کنیم . فوراً جدول را می‌بندیم ، اگر چند دقیقه پس از آن یا بلافاصله به ازاء کمان φ مثلا $\log\cos\varphi$ را ازنوپیدابکنیم برای‌پیداکردن‌همان‌صفحهٔ قبلی‌باید صرف‌وقت کنیم. واگردرجریان‌یك سلسله‌محاسبات این‌عمل‌چند مرتبه تکرار شود اتلاف وقت‌قابل ملاحظه‌خواهد بود. درصورتی که برعکس ، اگر دراولین مرتبه که جدول را بازکرده‌ایم به ازاء لگاریتم تانژانت φ مستقیماً لگاریتم‌کسینوس آن‌راهم استخراج کنیم به سرعت‌ودقت‌عمل افزوده خواهد شد . متأسفانه‌محاسبات لگاریتمی که از قسمتهای بسیار مهم وعملی ریاضیات بوده‌وتعلیم آن دربرنامهٔ تحصیلات دبیرستانها نیز قرار دارد درکلاسهای مربوط به خوبی تدریس نمی‌شود ، بلکه اصلا ....

علت آن گذشته‌ازکثرت عدهٔ دانش‌آموزان کلاسها وموانع دیگر بیشترازاین است که اکثر دبیرستانهای ماازنظرآموزشی موادلازم‌ومفیدضعیف بوده‌و ازنظرپرورش‌هم‌چندان تعریف‌ندارند:

شرح این هجران واین خون‌جگر
این زمان بگذار تا وقت دگر

۹ — ۶/۲۲/۲

تبدیل عبارت $a\sin x + b\cos x$ به عبارت قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم با بکار بردن زاویهٔ کمکی φ به فرض $tg\varphi = \frac{b}{a}$

به نظر اینجانب اختیار بی‌قیدوشرط ویابی‌بندوبار زاویهٔ کمکی صحیح نیست. درتمام موارد قبلا باید حدود این زاویه مشخص باشد. دراین مثال چون علامتهای a و b تعیین نشده پس باید $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد.

توضیح ـ بطورکلی در تبدیلات لگاریتمی بوسیلهٔ زاویهٔ کمکی، بایداین زاویه محصور و مشخص و منحصر به فرد باشد در غیر این‌صورت علاوه براینکه باعث زحمت محاسب می‌شود احیاناً ممکن است برای یك‌عبارت جوابهای مختلف بدست‌آید:

خلاصهٔ عمل کتاب در مورد تبدیل فوق‌چنین است :

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \frac{b}{a}\cos x)$$

به فرض $tg\varphi = \frac{b}{a}$ خواهیم داشت :

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + tg\varphi\cos x)$$

حال اگر مقدار عبارت $a\sin x + b\cos x$ را برابر با A بنامیم پس از اختصار چنین خواهیم‌داشت :

$$A = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$$

ولی چون بموجب متن کتاب درسی زاویهٔ φ بدون شرط اختیار شده پس :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

و یا :

$$\cos\varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$A = \pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

بطوری که ملاحظه می‌شود برای یك عبارت مفروض دو جواب مختلف پیداشده است ، کدام یك را انتخاب کنیم؟

برای رفع این تضاد ازاول بایددر نظربگیریم که‌زاویهٔ کمکی φ نمی‌تواندبی‌قیدوشرط باشد بلکه در هر مثال به‌تناسب موقعیت باید محصور ومقید باشد و چنانچه درآغاز بحث ذکر شد در این مثال باید $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد.

در این کتاب هفت ویاهشت مرتبه برای لگاریتمی کردن عبارتها بوسیلهٔ اختیار زاویهٔ‌کمکی به همین ترتیب که‌ذکر شد اقدام‌شده ودرهیچیك ازآنها حدود زاویهٔ‌کمکی تعیین‌نگردیده است.این‌اشکال درکتاب مثلثات سال‌پنجم‌ریاضی نیزوجوددارد. برای احتراز ازتکرار مطلب از یادآوری تمام‌آنها صرف‌نظر می‌شود . فقط دقت خوانندگان صاحب نظر نکته‌سنج را به این اصل‌جلب می‌کنم که زاویهٔ‌کمکی باید محصور و مشخص‌ومنحصر به‌فرد‌باشد. لیکن هرمحاسب درشروع محاسبه‌برای‌تعیین‌حدود مناسب زاویهٔ‌کمکی آزاداست. یعنی‌مثلا دراین مثال عوض :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

می‌توانیم : $0 < \varphi < \pi$ هم اختیارکنیم .

۱۰ — ۷/۲۳/۲

حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$ax^2+bx+c=0$$

حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم که‌در این‌کتاب درج‌شده مطابق معمول سایر کتابهای درسی است .

لیکن نگارنده برای‌حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم‌طریقهٔ دیگری پیشنهاد می‌کنم که شاید نسبت به طریقهٔ‌کتاب آسانتر باشد :

I ـ در حالتی‌که $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta = b^2-4ac > 0$ باشد مجهول x را به این‌شکل انتخاب می‌کنیم :

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,tg\varphi$$

II ـ در حالتی‌که $\frac{c}{a} < 0$ باشد مجهول معادله یعنی x را به این شکل‌انتخاب می‌کنیم: $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}\,tg\varphi$

در اینجا کمانφوظیفهٔ تغییر مجهول را بازی می‌کند و مانندطریقهٔ‌کتاب زاویهٔ‌کمکی برای‌لگاریتمی کردن‌عبارت‌نیست وچون ریشه‌های معادله ممکن است هردو مثبت و یا هردومنفی و یایکی‌مثبت ویکی دیگر منفی باشد پس‌کافی است‌کمان φ مثلا $0 < \varphi < \pi$ باشد .

مقدار x رادرمعادلهٔ درجهٔ‌دوم:

قرار می‌دهیم‌خواهیم داشت: $ax^2+bx+c=0$

I ـ درحالت اول : $\sin 2\varphi = \frac{-2c}{b\sqrt{\frac{c}{a}}}$ چون $0 < 1$

فرض‌شده پس $|\sin 2\varphi| < 1$ خواهد بود.

II ـ در حالت دوم :

$$tg 2\varphi = \frac{-2c}{b\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

خواهد بود . از روی این دو رابطه قبلا φ سپس x را بوسیلهٔ جدول لگاریتم حساب خواهیم کرد. از آنجائی که درهردوحالت $0 < \varphi < \pi$ فرض شده پس $0 < 2\varphi < 2\pi$ خواهد بودو لذا برای 2φ دو جواب و برای φ دو جواب و بالاخره برای x دو جواب بدست خواهدآمد. اگردو جواب φ را φ_1 و φ_2 بنامیم ریشه‌های معادله درحالت اول :

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} tg\varphi_1 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}} tg\varphi_2$$

و در حالت دوم :

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} tg\varphi_1 \quad و \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} tg\varphi_2$$

خواهند بود ملاحظه می‌شودکه روابط :

$tg\varphi_1 . tg\varphi_2 = -1$ و $tg\varphi_1 . tg\varphi_2 = 1$

در دوحالت وجود دارد . چنانچه قبلا هم‌ذکر شد این‌طریقه بر طریقهٔ اول ترجیح دارد زیراکه‌بهتر بخاطر سپرده می‌شود و جنبهٔ حفظی وعملیات آن‌کمتر از طریقهٔ اول است .نگارنده این‌طریقه رابه‌دوستی که‌کتاب اختصاصی برای‌یکی‌ازدانشکده‌ها می‌نوشتند پیشنهادکرد . نامبرده آنرا پسندید ودرکتاب‌خود واردکرد واگرچه درآن‌کتاب از اینجانب یادی نکرد معذالك مرا خوشحال گردانید . تا عقیدهٔ مؤلفین محترم‌دیگرچه باشد؛ امیدوارم دریکی‌از شماره‌های آیندهٔ مجلهٔ یکان یك مثال عددی در این قسمت به‌دانش‌آموزان عرضه‌بدارم .

تعیین کمانهای x که سینوس آنها برابر مقدار معلوم $q(-1 < q < +1)$ باشد .
همانطورکه در سال پنجم دیده‌ایم به‌کمك روابط مثلثاتی و جدولی که درآن خطوط‌مثلثاتی کمانها را نوشته‌اند یا جدول لگاریتم می‌توان کمانی یافت‌که‌سینوس آن برابر مقدار معلوم q باشد . اگر این‌کمان را α بنامیم چنین‌خواهیم داشت $\sin x = \sin\alpha$

۱۱
۱/۲۷/۳

این بیان درمورد تشخیص کمان α صراحت ندارد . به نظر اینجانب بهتر است به‌شکل زیر تغییر یابد :

تعیین کمانهای x که سینوس آنها برابر مقدار معلوم $q(-1 < q < +1)$ باشد ؛ همانطورکه‌درسال پنجم دیده‌ایم مابین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ رادیان فقط یك کمان وجود داردکه سینوس آن برابر q می‌باشد. این کمان‌را α می‌نامیم. کمان α راهم‌بوسیلهٔ‌رسیم هندسی وهم بوسیلهٔ محاسبه‌به‌کمك روابط مثلثاتی‌و جدولی که در آن توابع مثلثاتی کمانها را نوشته‌اند یا جدول لگاریتم می‌توان بدست‌آورد . بنابراین چنین خواهیم داشت : $\sin x = \sin\alpha$

در مورد بندهای $\frac{12}{2/28/3}$ و $\frac{13}{3/29/3}$ و $\frac{14}{4/29/3}$ تعیین کمان x که‌کسینوس ، تانژانت یا کتانژانت آن معلوم باشد برای اجتناب از طولانی شدن‌مطلب، از درج دستور متن کتاب و دستور پیشنهادی خودداری می‌شود . در این مواردهم باید تشخیص کمان α صراحت داشته باشد ؛ درمورد کسینوس و کتانژانت، کمان α مابین صفر و π رادیان ودر موردتانژانت، کمان α ما بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ رادیان‌محدودومشخص‌شده‌باشد.

توضیح ـ برای مزید توجه‌دانش آموزان‌عزیز توضیح زیر را به‌این قسمت اضافه می‌کنیم :

در مقابل توابع مثلثاتی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ و $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ توابع مثلثاتی معکوس نیز وجود دارد ، به این معنی‌که‌اگر فرض کنیم $x = \sin\alpha$ باشد معکوس این رابطه چنین نوشته می‌شود : $\alpha = \arcsin x$. x یك تابع مثلثاتی از کمان α است وکمان α هم به‌نوبهٔ خودیك تابع مثلثاتی‌معکوس از مقدار x که محصور بین (-1) و $(+1)$ قرار دارد می‌باشد . بدیهی است به‌ازاء هرمقدار ازکمان α فقط یك مقداربرای x پیدا می‌شود .لیکن‌به‌ازاء هر مقدار قابل قبول x بینهایت‌جواب برای کمان α بدست می‌آید : مابین تمام این مقادیر α فقط یکی را مشخص‌کرده به‌نام مقدار اصلی تابع مثلثاتی معکوس به‌صورت $\mathrm{Arc}\sin x$ می‌نامند . دراکثرکتابهای درسی حدود مقادیر اصلی چهار تابع مثلثاتی معکوس به‌این ترتیب است :

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arc}\sin x < +\frac{\pi}{2} \quad : \quad -1 \le x \le 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arc}tg\, x < +\frac{\pi}{2}$$

$$0 < \mathrm{Arc}\cos x < \pi \quad : \quad -1 \le x \le 1$$

$$0 < \mathrm{Arc}cotg\, x < \pi$$

لیکن اگر بخواهیم در هر چهار مقدار اصلی توابع مثلثاتی معکوس کمان منفی دخالت ندهیم می‌توانیم درهر کدام‌از توابع مثلثاتی معکوس کوچکترین آنهارا که مابین صفر و ۳۶۰ درجه قرار دارد به‌نام مقدار اصلی انتخاب بکنیم . خیلی از دبیران ریاضیات به‌این روش عادت دارند . باید دانست که نتیجهٔ هردوروش درحل مسائل مربوط یکسان است .

۱۵ / ۶/۳۰/۳

مقصود ازحل معادلهٔ مثلثاتی تعیین جوابهای آنست .

به نظراینجانب باید در این قسمت شرح زیر اضافه‌شود:

هر معادلهٔ مثلثاتی دارای دونوع جواب است :

جواب کلی و جوابهای خصوصی :

جواب کلی- درصورتی که‌مجهول معادله مثلا x محدود به حدودی نباشد یعنی بتواند در فاصلهٔ $[+\infty \text{ و } -\infty]$ تغییر کند معادلهٔ مثلثاتی به تعداد بی‌شمار جواب خواهد داشت . که همهٔ آنها در تحت یك‌فرمول کلی که به‌نام جواب کلی موسوم‌است نوشته می‌شوند . بدیهی‌است که دراین فرمول یك پارامتر متغیر عدد صحیح وجود خواهد داشت که تغییرات آن جوابگوی جوابهای بی‌شمار معادله باشد .

جوابهای خصوصی - درصورتی که مجهول معادله مثلا x محدود به‌حدودی یعنی مثلا به‌صورت $\alpha<x<\beta$ باشد معادلهٔ مثلثاتی یك‌عده جواب مخصوصی خواهد داشت که شمارهٔ آنها معلوم است‌وهمهٔ آنها از جواب‌کلی به‌ازاء بعضی ازمقادیر پارامتر بدست آمده‌اند .

مثلا در معادلهٔ $\cos x = \frac{1}{2}$ جواب کلی معادله عبارت است از : $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ و اگر $\frac{9\pi}{2} < x < 8\pi$ باشد جوابهای خصوصی عبارتند از :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{17\pi}{3} : k=3 & \text{به ازاء} \\ x_2 = \frac{19\pi}{3} : k=3 & \text{به ازاء} \\ x_3 = \frac{23\pi}{3} : k=4 & \text{به ازاء} \end{cases}$$

توضیح - در کتاب مثلثات سال پنجم‌و کتاب مثلثات‌سال ششم ریاضی‌راجع به‌جواب‌کلی و خصوصی معادلهٔ مثلثاتی تعریف صریح داده‌نشده است درصورتی که ضمن مسائل مختلف حل شده و یا تمرینات حل نشده زیاد به این موضوع برخورد می‌کنیم .

مطالب گاهی طوری مخلوط می‌شود که نه تنها برای یك دانش آموز مبتدی حتی برای یك معلم قدیمی جداکردن آنها خسته کننده است . مثلا شمارهٔ ۷ از صفحهٔ ۳۴ کتاب ششم را با مثال سوم که در صفحهٔ ۳۸ به‌این موضوع آورده شده مقایسه‌فرمائید. لذا اینجانب لازم دیدم این تصریح را در قسمت جوابهای معادلهٔ مثلثاتی اضافه کنم .

۱۶ / ۷/۳۴/۳

حل و بحث معادلات پارامتری مثلثاتی یك مجهولی :

برای حل معادلات مثلثاتی یك مجهولی به طریقی که‌در شمارهٔ (۶) گفته شد عمل می‌کنیم. برای بحث معادلات پارامتری مثلثاتی یك مجهولی باید مقادیر پارامتر را به‌طریقی تعیین کنیم که اولا مقادیر خطوط مثلثاتی کمان مجهول حقیقی باشند و ثانیا اگر ازحل معادله سینوس یاکسینوس کمان مجهول محاسبه‌شده باشدمقدار سینوس‌یاکسینوس حاصل محصور بین (+۱) و (−۱) باشد .

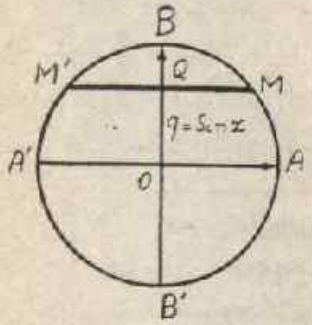
به نظر اینجانب در ذیل این بیان لااقل باید تبصرهٔ زیر اضافه شود تاتناقضی راکه بین مندرجات شمارهٔ ۷ ازصفحهٔ ۳۴ و مثال صفحهٔ ۳۸ آن ازکتاب درسی وجود دارد برطرف‌سازد:

تبصره- این حل و بحث مربوط است به‌جواب کلی معادلات یك مجهولی پارامتری مثلثاتی و معمولادر مورد جوابهای خصوصی در حالتهای غیر مشخص صدق نمی‌کند . برای بحث در جوابهای خصوصی همواره بایداز نامساوی $\alpha<x<\beta$ که حدود تغییرات مجهول معادله را نشان می‌دهد استفاده‌شود .

۱۷ / ۲/۷۶/۵

حل نا معادلهٔ $\sin x - q > 0$

این نا معادله را به‌صورت $\sin x > q$ می‌نویسیم. اگر q محصور بین (−۱) و (+۱) باشد نا معادله جواب دارد و برای تعیین جوابهای آن دایرهٔ مثلثاتی را رسم‌کرده روی محور سینوسها پاره خط OQ را به طریقی جدا می‌کنیم که $\overline{OQ} = q$ باشد(شکل مقابل) از نقطهٔ Q خطی موازی محور کسینوسها رسم می‌کنیم تادایرهٔ مثلثاتی را در نقاط M و M' قطع کند. کمانهائی که انتهای آنها روی کمان MBM' واقعند دارای سینوسهای بزرگتر از q هستند. بنابراین جواب‌های نا معادلهٔ مزبور $\widehat{AM} < x < \widehat{AM'}$ می‌باشند.



تعاریف بنا بر ریاضیات جدید

ترجمهٔ فصلی از کتاب «فرهنگ استدلالی ریاضیات»

Dictionnaire Raisonné de math. par : A . WARUSFEL

زاویه

[۱] در یك صفحه ، دو نیم‌خط بامبدأ مشترك Ox و Oy را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های صفحه را که به این دو ضلع (دونیم خط) تعلق نداشته باشند به دو زیر مجموعهٔ A و B چنان بخش می‌کنیم که اگر M و N دو نقطهٔ دلخواه متعلق به یکی از این دو زیر مجموعه ، مثلا A ، باشد بتوان این دو نقطه را بایك خط راست (یا شکسته) به هم وصل کرد بقسمی که این خط نه Ox را قطع کند و نه Oy را .

[۲] اگر Ox و Oy دارای یك محمل نباشند در این صورت فقط یکی از دوزیر مجموعه ، مثلا A ، محدب می‌باشد؛ به این ترتیب که هر قطعه خط MN که دوسر آن به A متعلق

←

به نظر اینجانب درحل این نامعادله یك اشتباه عمده و زننده وجود دارد و آن اینست که نوشته شده برای اینکه نامعادله جواب داشته باشد باید q محصور بین (۱ −) و (۱ +) باشد.

این حرف صحیح نیست .

آیا وزارت آموزش به‌این کتاب درسی واینهمه دبیران ریاضی که مجبورند آنرا تدریس کنند واقعاً اعتقاد دارد که مثلا نامعادلهٔ $\sin x + 2 > 0$ جواب ندارد ؟

اگر جواب دارد پس این کتاب‌چه می‌گوید؟ نکتهٔ قابل عرض اینست که در پایان مقدمهٔ این کتاب چنین نوشته شده‌است لطفاً این غلط چاپی را تصحیح فرمائید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۵۱	۲۰	رباطه	رابطه

یعنی این کتاب فقط یك غلط دارد !

حال جای تعجب است اگر جابجا شدن محل دوحرف دریك کلمه ازکلمات مورد توجه‌قرار گرفته پس چرا دربیان مطالب علمی دقت نشده است ؟

آیادریك‌کتاب درسی کلمهٔ رابطه رارباطه بنویسند بیشتر اهمیت دارد یااینکه‌اصل‌موضوع‌را وارونه نوشته‌ووارونه تدریس کنند ؟ کدامیك ؟ خلاصه به‌نظر اینجانب مطلب‌فوق‌باید به‌ترتیب زیر بیان شود :

حل نامعادلهٔ $\sin x - q > 0$

این نامعادله را به‌صورت $\sin x > q$ می‌نویسیم و برای تعیین جوابهای‌آن‌دایرهٔ مثلثاتی را رسم کرده‌روی‌محور‌سینوسها پاره خط OQ را به‌طریقی جدا می‌کنیم که $OQ = q$ باشد (شکل‌قبل)از نقطهٔ Q خطی موازی‌محور کسینوسها رسم می‌کنیم؛ حالتهای زیر اتفاق می‌افتد:

۱ـ $q > 1$: در این حالت خط دایره راقطع نمی‌کند، نامعادله جواب ندارد .

۲ـ $q = 1$: دراین حالت خط درنقطهٔ B بر دایره مماس می‌شود ، باز نامعادله جواب ندارد .

۳ـ $-1 < q < 1$ دراین حالت‌خط دایره را درنقاط M و M′ قطع می‌کند . کمانهائی که ابتدای آنها نقطهٔ A و انتهای آنهاروی کمان MBM′ واقعند دارای‌سینوسهای‌بزرگتر از q هستند بنابراین جوابهای نا معادلهٔ مزبور :

$$\widehat{AM} < x < \widehat{AM'}$$

می‌باشد .

۴ـ $q = -1$ دراین حالت خط درنقطهٔ B′ بردایره مماس می‌شود تمام کمانهای غیر مشخص x بجز کمانهای $\widehat{AB'}$ جواب‌نامعادله خواهندبود .

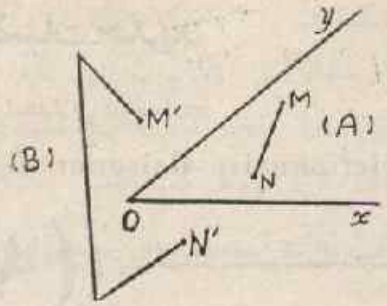
۵ـ $q < -1$ در این‌حالت نیز خط دایره را قطع نمی‌کند ولی‌تمام کمانهای غیر مشخص x بدون استثناء جواب نامعادله خواهد بود . مثلا نامعادلهٔ:

$\sin x > -2$ یا $\sin x + 2 > 0$

به ازاء جمیع مقادیر x جواب دارد .

بقیه دارد

باشدبه‌تمامی در A واقع خواهد شد. دراین‌صورت A **زاویهٔ**



کوژ و B **زاویهٔ‌کاو** و O رأس‌آنها می‌باشد .

اگر Ox و Oy متقابل باشند A و B هر دو محدب بوده هریك **نیم‌صفحه** یا **زاویهٔ تخت** می‌باشد . بالاخره اگر Ox و Oy منطبق باشند ، A تهی‌بوده و **زاویهٔ صفر** می‌باشد .

[۳] به هرزاویه یك عدد مثبت a مربوط می‌کنیم‌وآنرا **اندازهٔ هندسی** زاویهٔ A می‌نامیم بقسمی‌که اگر :

$$a = \text{ز } xOy$$

باشد :

الف ـ این اندازه در هر ایزومتری غیر متغیر باشد (گروه‌ایزومتری ضمن‌اصول‌هندسهٔ اقلیدسی در حالت‌کلی‌تعریف شده است) .

ب ـ اندازهٔ زاویهٔ تخت با عدد ثابتی مانند p برابر باشد .

ج ـ اگر xOy و yOz دو زاویهٔ‌کوژ مجاور باشندیعنی اینکه Oz داخل xOy باشد . در این صورت اندازهٔ زاویهٔ xOz برحسب a و b اندازه‌های زاویه‌های xOy و yOz از رابطهٔ زیر بدست آید :

$$c = a + b$$

د ـ دوزاویه که‌دارای‌یك اندازه باشند برابر گفته‌شوند.

ه ـ همهٔ اندازه‌ها بین ۰ و ۲p محصور باشند .

و ـ اگر عدد حقیقی a بین ۰ و ۲p محصوربا‌شد، حداقل یك زاویه باا‌ندازهٔ a وجود داشته باشد .

ز ـ هر زاویه‌ای‌که اندازه‌اش‌کمتر از $\frac{p}{۲}$ باشد **حاده** وهر زاویه‌ای‌که اندازه‌اش بین $\frac{p}{۲}$ و p‌محصور باشد **منفرجه** نامیده شود .

ح ـ اگردو زاویه دارای ضلعهای مشترك باشندواندازه‌های آنها a و b باشد چنانچه هردو زاویه ازیك نوع باشند داشته باشیم $a = b$ و در غیر آن داشته باشیم :

$$a + b = ۲p$$

ط ـ نظیرهرزاویهٔ کوژیا تخت دونیم‌خط متقابل Oz و Oz' و همچنین دو نیم خط متقابل Ot و Ot' بقسمی وجود داشته باشدکه‌اندازه‌های زاویه‌های xOz و xOz' برابر با $\frac{a}{۲}$ و $\frac{a}{۲}+p$ و اندازه‌های زاویه‌های xOt و xOt' برابرباشد با $\frac{p}{۲}+\frac{a}{۲}$ و $\frac{۳p}{۲}+\frac{a}{۲}$. خطوط zz' و tt' نیمسازهای داخلی و خارجی xOy نامیده می‌شوند .

ی ـ زاویه‌ای با اندازهٔ $\frac{p}{۲}$ به نام **زاویهٔ قائمه** وجود دارد :دراین صورت می‌گویندکه Ox بر Oy **عمود** یا **قائم** است و آن‌رابه‌صورت $Ox \perp Oy$ نمایش می‌دهند . نیمسازهای یك زاویه بر یکدیگر عمودا‌ند .

یا ـ دو زاویهٔ xOy و x'Oy' به‌قسمی‌که Ox با Ox' و Oy با Oy' متقابل باشد دو زاویهٔ **متقابل به رأس** نامیده شده و برابر هستند .

یب ـ دوزاویه‌باا‌ندازه‌های a و b **متمم** نامیده‌می‌شوند اگر $a + b = \frac{p}{۲}$ باشد و **مکمل** نامیده می‌شوند اگر :

$$a + b = p$$

باشد .

[۴] ـ برحسب مقدار انتخابی برای p (یعنی زاویهٔ با اندازهٔ یك) واحد به‌شرح زیر می‌باشد :

الف ـ اگر $p = \frac{۱}{۲}$ باشد واحد عبارتست از **دور** ؛

ب ـ اگر $p = ۱$ باشد واحد عبارتست از زاویهٔ‌تخت؛

ج ـ اگر :

$$p = \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۰\ldots$$

باشد واحد **رادیان** می‌باشد (π در آنالیز تعریف می‌شود ، مثلاطبق دستور $\pi = ۴\int_{۰}^{۱} \frac{dt}{۱+t^۲}$) در دستگاه با این واحد ، فرمولهای مثلثاتی به‌ساده‌ترین صورت درمی‌آیند . از طرف دیگر اگر طول کمانی از دایرهٔ به شعاع یك معلوم شده باشد دراین‌صورت‌اندازهٔ‌یك زاویه برحسب رادیان برابر خواهد بود باطول کمانی از دایرهٔ به شعاع یك و به مرکز O (رأس زاویه) و محدود به‌دوضلع زاویه .

د ـ اگر $p=۱۸۰$ باشد واحد **درجهٔ شصت‌شصتی** (Sexagésimal) است که درعین حال برابر است با ۶۰ دقیقه و ۳۶۰۰ ثانیه . برای مثال داریم :

$$۱^{rad} = ۵۷^{\circ}\ ۱۷'\ ۴۴''/۸۰۶۲۴۷\ldots. \quad \text{رادیان} = ۱$$

$$۱^{\circ} = ۰/۰۱۷۴۵۳۲۹۶۵۲\ldots^{rad} = \frac{\pi}{۱۸۰}rad \quad \text{درجه} = ۱$$

ه ـ اگر $p=۲۰۰$ باشد واحد **گراد** خواهد بود.

زاویه‌هایی که زیاد متداول هستند برحسب واحدهای مختلف عبارتند از :

دور	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۲}$		
رادیان	۲π	π	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۶}$		
درجه	۳۶۰	۱۸۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۰		
گراد	۴۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۶۶/۶۶۶۰	۵۰	۳۳/۳۳		

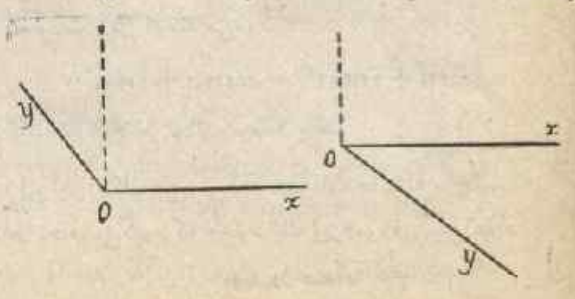
[۵]ـ گروه اپیومتری شامل یك زیر گروه بسیار مهم می‌باشد که عبارتست از تغییر مکان . در یك صفحهٔ مفروض ، زاویهٔ قائمه‌ای را صریحاً تعیین کرده یك ضلع آن را مبدأ می‌نامیم و (در حالت عمومی می‌توانیم صفحه را مانند صفحهٔ ساعت درنظر بگیریم در وضعی که ساعت ۳ را نشان دهد عقربهٔ کوچکتر به‌عنوان ضلع مبدأ باشد). دراین‌صورت می گوئیم که برای دوران جهت مثلثاتی انتخاب شده و گفته می‌شود که صفحه **جهت‌دار** شده است .

[۶]ـ زاویهٔ کوژ xOy با اندازهٔ a رادیان را درنظر می گیریم، به‌این زاویه دوزاویهٔ بین دونیم خط رانسبت‌می‌دهیم که‌آنها رابانشانه‌ای ($(Ox$ و $O)$) و ($(Oy$ و $Ox)$) نمایش می‌دهیم . با یك تغییر مکان ، زاویهٔ قائمهٔ اصلی را چنان قرار می‌دهیم که رأس آن بر O و ضلع مبدأ آن بر Ox واقع شود . اگرضلع دوم این زاویهٔ قائمه در همان نیم صفحه‌ای به کنارهٔ Ox واقع شودکه Oy واقع است در این‌صورت [بایکی کردن ($(Oy$ و $Ox)$) با اندازهٔ آن] خواهیم داشت.

$$(Ox \text{ و } Oy) = -(Oy \text{ و } Ox) = a = \angle xOy$$

در غیر آن چنین خواهیم‌داشت :

$$(Ox \text{ و } Oy) = -(Oy \text{ و } Ox) = -a = -(\angle xOy)$$



[۷]ـ در حالت قبل فرض می کنیم که :

$$-\pi < (Ox \text{ و } Oy) < +\pi$$

دراین صورت هرعددحقیقی b را که از رابطهٔ زیربدست‌می‌آید نیز اندازهٔ این زاویه می‌نامیم .

$$b = a + ۲k\pi$$

که درآن k عدد نسبی صحیح می‌باشد. رابطهٔ بالا را به‌صورت زیرهم می‌نویسند :

$$b \equiv a \pmod{۲\pi}$$

که یك همنهشتی با مدول ۲π نامیده می‌شود . این رابطه یك رابطهٔ هم ارزی بوده و با هردقتی اندازهٔ a - $(Ox$ و $Oy)$ معرف کلاس همنهشتی a خواهد بود .

مثلا زاویهٔ قائمهٔ اصلی می‌تواند هریك از اندازه‌های زیر را قبول کند.

$$\ldots \text{ و } -\frac{۷\pi}{۲} \text{ و } -\frac{۳\pi}{۲} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{۹\pi}{۲} \text{ و } +\frac{۵\pi}{۲} \text{ و } +\frac{\pi}{۲}$$

[۸]ـ دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را در نظر می گیریم ، زاویهٔ این دوبردار عبارتست از زاویهٔ دو نیم خط Ox و Oy که موازی و هم‌جهت با این بردارها رسم شده باشند، به‌عبارت دیگر ، Ox مبدل $\overrightarrow{AB}$ باشد درانتقال به بردار $\overrightarrow{AO}$ و Oy مبدل $\overrightarrow{CD}$ باشد در انتقال به بردار $\overrightarrow{CO}$. زاویهٔ دوبردار از هرنوع انتخاب نقطهٔ O ، از هرنوع انتقال یکی از حاملها ، از هرنوع ضرب یکی از آنها دویك عدد مثبت مستقل می‌باشد. بالاخره این زاویه ، زاویهٔ بردارهای آزاد بوده و به صورت زیر نشان داده می‌شود .

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{DC}) = \pi + (\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CD}) \pmod{۲\pi}$$

[۹]ـ سه‌بردار V و V' و V'' داده‌شده‌است، **فرمول شال** به دوصورت زیر نوشته می‌شود :

$$(V \text{ و } V'') \equiv (V \text{ و } V') + (V \text{ و } V'') \pmod{۲\pi}$$

$$(V \text{و} V') + (V' \text{و} V'') + (V'' \text{و} V) \equiv ۰ \pmod{۲\pi}$$

درحالت خاص می‌توان نوشت :

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA} \text{ و } \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{BA}) \equiv (\pi) \pmod{۲\pi}$$

که‌رابطهٔ اخیرمعرف این‌است‌که: «مجموع(اندازه‌های هندسی) زاویه‌های یك مثلث برابر است بایك زاویهٔ تخت» .

[۱۰]ـ دوخط D و D' مفروض‌است، برای این‌دوخط هم زاویه‌ای تعریف می‌شودکه یك همنهشتی با مدول π خواهد

بود ؛ از یك نقطهٔ O دونیم خط Ox و Oy را با محملهای موازی با D و D' رسم می‌کنیم وچنین تعریف می‌کنیم .

$$(D \text{ و } D') \equiv (Ox \text{ و } Oy') \pmod{\pi}$$

محقق می‌شود که این زاویه با هرجهتی که برای Ox و Oy انتخاب شودبامدول π ثابت است. بنابراین اگر Oy' متقابل Oy باشد داریم .

$$(Ox \text{ و } Oy') \equiv \pi + (Ox \text{ و } Oy) \pmod{2\pi}$$

واز آنجا :

$$(Ox \text{ و } Oy') \equiv (Ox \text{ و } Oy) \pmod{\pi}$$

برای زاویه‌های بین خطوط هم فرمول شال صادق‌خواهد بود.

[۱۱]ـ درفضا هم می‌توان زاویهٔ بین خطوط ، بردارها وغیره را تعیین کرد . باهرنوع تغییرمکان شکلها ، اندازه‌های هندسی (مثبت) ثابت باقی می‌مانند اما اندازه‌های جبری چنین نخواهد بود. با یك تغییرمکان ساده می‌توان نیم خطها راچنان جابجا کرد که زاویهٔ (Ox و Oy) به (Ox و Oy) — بدل شود که نشان خواهد داد زاویهٔ xOy ثابت است .

[۱۲]ـ **زاویهٔ بین دوصفحه** بوسیلهٔ زاویهٔ دو خط عمود برآنهاتعریف می‌شود. این تعریف مبتنی براندازهٔهندسی بوده و نمی‌تواند علامت‌دار باشد . **زاویهٔ یك خط و یك صفحه** عبارتست از متمم زاویه‌ای‌که این خط با خط عمود بر صفحه می‌سازد .

[۱۳]ـ **زاویهٔ بین دو منحنی** (یا **بین دوسطح** یا **یك منحنی ویك سطح**) زاویه‌ای است ، اگر وجود داشته باشد ، که مماسها (یا سفحات مماس ، یایك خط ویك صفحهٔ مماس) در یك نقطهٔ تقاطع آنها با یکدیگر می‌سازند . اگر این زاویه برابر $\frac{\pi}{2}$ باشدمی‌گویندکه‌آنها بریکدیگرعمودند.

مثلا برای اینکه دو دایرهٔ با شعاعهای R و R' و با خطالمرکزین d بریکدیگر عمود باشند لازم وکافی‌است‌که :

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

[۱۴]ـ سطح مخروطی به‌رأس O را در نظرمی‌گیریم . از تقاطع این سطح باکرهٔ به‌مرکز O و به شعاع یك، سطحی بامساحت A پدید می‌آید . سطح مخروطی را **زاویهٔ مجسم** گفته و می‌گویند اندازهٔ آن A **استرادیان** می‌باشد . اگر سطح مخروطی مفروض تمام فضای حول یك نقطه باشد اندازهٔ آن 4π استرادیان خواهد بود .

[۱۵]ـ تصورات مختلف یك زاویه به‌سادگی به زاویهٔ بین‌دوبرداردریك صفحه‌منجرمی‌شوند.

ممکن است‌که تعریف هندسی دشواری‌که به این‌صورت خلاصه شد، ومشکل است‌که به‌تمامی درهندسهٔ با **اصول‌بندی هیلبرت** صادق باشد ، یا بمعنی **عملیات تحلیلی** جانشین شود. مثلابدون استفاده ازشکل مثلثاتی اعداد مختلط اما ضمن‌بررسی رشته‌های با جمله‌های مختلط می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت‌کرد :

[۱۶] الفـ اگر z عددی یك مدولی باشد.

$$z = a + ib \quad , \quad a^2 + b^2 = 1$$

سعی می‌شود که عدد e^{iu} که با رابطهٔ

$$e^{iu} = 1 + \frac{iu}{1!} + \frac{i^2u^2}{2!} + \cdots + \frac{i^nu^n}{n!} + \cdots$$

تعریف می‌شود باعدد z همسان باشد.

بـ با تحقق توابعی‌که با رابطهٔ :

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

یا روابط :

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

تعریف می‌شوند با بسطهای محدود معین می‌شود که cosu یا مقادیری که بطور مطلق $\frac{\pi}{2}$ نامیده می‌شوند صفر شده و توابع سینوس وکسینوس به‌ترتیب در فواصل $[-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}]$ و $[2\pi$ و $0]$ تغییر می‌کنند. نتیجه‌می‌شودکه باتقریب 2π عددی مانند u وجود دارد بقسمی‌که :

$$\cos u = a \text{ و } \sin u = b$$

جـ تناوب توابعی که فوقاً تعریف شدند مستقیماً از **فرمول اولر** واز **فرمول موآور** نتیجه می‌شود :

$$e^{\frac{i\pi}{2}} - i(e^{i\pi}) = -1 \quad \text{(بنابه‌فرمول مشهور)}$$

$$e^{i(u+u')} = e^{iu} \times e^{iu'}$$

که اغلب به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(\cos u + i \sin u)^n = \cos nu + i \sin nu$$

وبنابراین مثلثات کاملا می‌تواند توسعه یابد.

[۱۷]ـ این‌امکان‌پیش می‌آید درهمان حال‌که ساختمان اعداد مختلطانجام می‌گیردکه وجود یك ایزومورفی بین‌اعداد

بقیه در صفحهٔ ۴۶

دترمینان

تنظیم از : سید محمد کاظم نائینی

با استفاده از منابع خارجی

ترکیب (Combinaison)

هرگاه در گروههای ترتیب n حرف p به p از گروههائی که از حیث حروف مشترکند یکی را انتخاب کرده بقیه را حذف کنیم تعداد گروههای باقیمانده که از حیث حروف متفاوتند ترکیب n حرف p به p نامیده می‌شود به صورت C_n^p نمایش داده می‌شود.

فرض کنید ۵ مهره داریم در ۵ رنگ مختلف ، چنانکه دیدیم این ۵ مهره را می‌توان به ۶۰ گروه سه تائی تبدیل کرد (ترتیب ۵ حرف سه به سه)

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

از این گروهها گروههائی هستند که از نظر رنگ مهره‌ها مشترکند مثلا abc و bca و cab و acb و ..... از این گروهها یکی را اختیار کرده مثلا abc بقیه را حذف می‌کنیم ، بدیهی است ما بقی که حذف می‌شوند از صورتهای تبدیل سه حرف است و تعداد این تبدیلات برابر !۳ است پس از ۶۰ گروه ترتیب ۵ مهره سه به سه تعداد C_5^3 گروه اختیار شده ما بقی حذف گردیده است لذا می‌توان نوشت

$$C_5^3=\frac{60}{3!} \quad \text{یا} \quad 60=3!C_5^3$$

واز آنجا تعداد گروههای ترکیب ۵ مهره سه به سه برابر ۱۰ حاصل می‌شود.

از اینجا راه عملی برای تعیین گروههای ترکیب n حرف p به p حاصل می‌شود بدین ترتیب که فرض می‌کنیم تعداد ترکیبهای n حرف p به p را تشکیل داده‌ایم و تعداد آنها برابر C_n^p گردیده است هریك از این گروهها P حرف دارد اگر تبدیل این P حرف را بنویسیم از هر گروه ترکیب !p گروه تبدیل بدست می‌آید .

واز تبدیل تمام گروههای ترکیب تعداد $p!C_n^p$ گروه حاصل می‌شود این تعداد درست برابر ترتیب n حرف p به p می‌باشد ، A_n^p بنابراین خواهیم داشت

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!} \quad \text{یا} \quad A_n^p=p!C_n^p$$

ویا :

$$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال ۱ـ ترکیب ۵۲ ورق ۴ به ۴ برابراست با :

$$C_{52}^4=\frac{52!}{(52-4)!\times 4!}$$

مثال ۲ـ گروههای ترکیب ۷ مهره سه به سه برابراست با

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}$$

مثال ۳ـ گروههای ترکیب n مهرهٔ n به n :

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

مثال ۴ـ گروههای ترکیب n مهرهٔ $n-p$ به $n-p$ برابر است با

$$C_n^{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}=C_n^p$$

به سهولت ثابت می‌شود که :

$$C_n^{p-1}+C_n^p=C_{n+1}^p$$

زیرا

$$C_n^{p-1} = \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!}$$

و

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^{p-1} + C_n^p =$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{1}{n-p+1} + \frac{1}{p}\right]$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \times \frac{n+1}{p(n-p+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} = C_{n+1}^p$$

به موجب دستورهای فوق می‌توان روابط زیر را نوشت

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1 \qquad C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

به فرض $n=1$ و $p=1$ خواهیم داشت

$$C_1^0 + C_1^1 = C_2^1 \qquad 1+1=2$$

$$C_2^1 + C_2^2 = C_3^2 \qquad 2+1=3$$

$$C_3^2 + C_3^3 = C_4^3 \qquad 3+1=4$$

. . . . . .

یکی از موارد استعمال دستور اخیر تعیین اجزاء مثلث حسابی پاسکال است

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$$

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \quad C_n^3 \quad C_n^4 \ldots C_n^n$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

***

دترمینان ـ تعریف: اگر n^2 عدد جبری را در n سطر و n ستون به شکل یک مربع بنویسیم آنرا دترمینان رستهٔ n نامند:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

چنانکه قبلا متذکر شدیم جملهٔ a_{32} یعنی جملهٔ متعلق به سطر سوم وستون دوم.

درزیر چند نوع دترمینان ازرسته‌های ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را معرفی می‌کنیم.

$$\Delta_{5\times5} = \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
4 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\
6 & 2 & 0 & 1 & 3
\end{vmatrix} \qquad \Delta_{4\times4} = \begin{vmatrix}
1 & 5 & 7 & 3 \\
4 & -2 & 6 & 9 \\
11 & 23 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 5
\end{vmatrix}$$

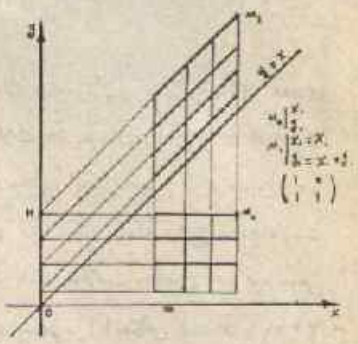
$$\begin{vmatrix}
2 & 1 & 9 \\
-5 & 3 & -2 \\
1 & 4 & 7
\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}
2 & 3 \\
5 & 6
\end{vmatrix}$$

اینک ضمن مثالهائی چند ماهیت و چگونگی و موارد استعمال دترمینان را بیان می‌کنیم.

۱ـ ضمن تعریف ماتریس آنجا که راجع به خواص ماتریس

عمومی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحث کردیم ملاحظه شد که تأثیر ماتریس چگونه بود و چطور می‌توانستیم مثلا بموجب قانون ماتریسی مربعی را به متوازی‌الاضلاع تبدیل کنیم (صفحهٔ ۴ یکان شمارهٔ ۳۲)

به موجب قانون تبدیل $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ می‌توان یک شبکهٔ متشکل از چندین مربع را به شبکه‌ای متشکل از چندین متوازی‌الاضلاع تبدیل کرد .



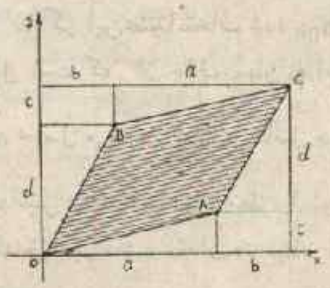
اگر مساحت مربعی S باشد و این مربع را طبق قانون ماتریسی تبدیل کنیم و به متوازی‌الاضلاع بدل شود مساحت متوازی‌الاضلاع را اگر B فرض کنیم $B = K \cdot S$ خواهد بود . و K ضریب تغییر مساحت برابر همان دترمینان ماتریس است .

اگر ماتریس تبدیل $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد

$$K = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

خواهد بود .

برای تحقیق این مطلب ماتریس عمومی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را در نظر گرفته اجزاء هرستون را مختصات دو نقطه مانند A و B فرض می‌کنیم $A(a \text{ و } c)$ و $B(b \text{ و } d)$ اگر $O(۰ \text{ و } ۰)$ مبدأ مختصات باشد مختصات نقطهٔ C رأس چهارم متوازی‌الاضلاع AOBC چنین خواهد بود $C(a+b \text{ و } c+d)$ حال این متوازی‌الاضلاع را در داخل یک مستطیل محاط می‌کنیم بطوری که در قطر بزرگ مشترک باشند (مطابق شکل) مساحت متوازی‌الاضلاع AOBC را به ترتیب زیر حساب می‌کنیم .



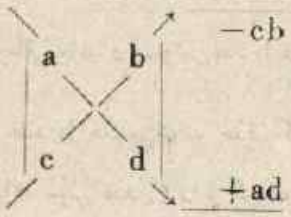
مساحت مستطیل برابر است با :

$$(a+b)(c+d)$$

از این مساحت سطح دو مستطیل کوچک $(bc \text{ و } cb)$ و چهار مثلث قائم‌الزاویه جانبی $(۲ \times \frac{ac}{۲} \text{ و } ۲ \times \frac{bd}{۲})$ را کم می‌کنیم

$$(a+b)(c+d) - ۲bc - bd - ac = ad - bc$$

مقدار حاصل برابر سطح متوازی‌الاضلاع است این مقدار $(ad - bc)$ را به صورت قراردادی $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش داده و آنرا دترمینان وابسته به ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ می‌نامند وچنانکه ملاحظه شد مقدار این دترمینان عددی است برابر مساحت متوازی‌الاضلاع که طبق شرایط مذکور تعیین می‌گردد و این عدد برابر تفاضل حاصل ضرب اعدادی است که روی دو قطر مربع قرار دارند و علامت آنها به شکل زیر تعیین می‌گردد



دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۱ \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}$ و مقدار آن برابر است

یا $۳ \times ۱ - ۵ \times ۴ = -۱۷$

دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}$ و مقدار آن برابر است

یا $(-۱)(۵) - ۰ \times ۲ = -۵$

دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$ و مقدار آن برابر است

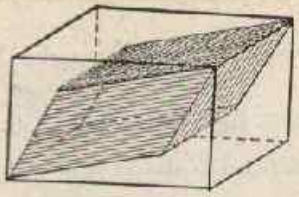
یا $۱ \times ۱ - ۰ \times ۱ = ۱$

پس دترمینان مربوط به یک ماتریس همان مساحت متوازی‌الاضلاع و ضریب تغییر مساحت به موجب قانون تبدیل است

البته این مطلب تنها در مورد ماتریس مربع ۲×۲ نیست و در مورد ماتریس مرتبهٔ سوم ۳×۳ نیز به سهولت می‌توان ثابت کرد که اندازهٔ دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ برابر حجم متوازی‌السطوحی است که از تبدیل یک مکعب به موجب قانون ماتریسی

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

حاصل می‌شود



وبطور کلی به هرماتریس مربع‌شکل می‌توان یك دترمینان وابسته نمود. اندازهٔ دترمینان وابسته به‌ماتریس ۳×۳ یعنی حجم متوازی‌السطوح برابر مجموع جبری حاصل‌ضربهای زیر است

$$aei - afh + bdi - bgf + cdh - ceg$$

این حاصل ضربها را اینطور بدست‌آوردیم که ابتدا سطر اول دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ را در نظر گرفتیم، عدد a را اختیار کرده سطر وستونی که به a ختم می‌شود حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ باقی ماند و همچنین عدد b را اختیار کرده سطر وستونی که به عدد b ختم می‌شوند حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ باقی ماند سپس عدد C را برگزیده سطر وستون مختوم به آنرا حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ باقی ماند وبعد حاصل ضربهای زیر را تشکیل دادیم

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) + b(di - gf) + c(dh - eg)$$

$$= aei - ahf + bdi - bgf + cdh - ceg$$

اصطلاحاً گویند که این دترمینان نسبت به سطر اول بسط داده‌شده است والبته می‌توانستیم آنرا نسبت به سطر دوم یاسوم یانسبت به ستونها بسط دهیم طریقهٔ عمل نظیر فوق صورت گرفته ونتیجه یکی است مثلا دترمینان زیر را اگر به روش فوق بسط دهیم خواهیم داشت

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

علامت یك در میان مثبت ومنفی است

$$= 1(-1 \times 5 - 3 \times 2) - 2(7 \times 5 - 4 \times 2) + 3(7 \times 3 - (4)(-1)) = -11 - 54 + 75 = 10$$

طبق روش فوق می‌توان دترمینانهای رستهٔ ۴×۴ و۵×۵ و... و n×n را بسط داد وعمل در حالت کلی بدین نحو صورت می‌گیرد که از هرسطر و ستون فقط یك جمله برگزیده شده و حاصل ضرب آنها واتشکیل می‌دهیم وعلامت آنها را طبق قاعده تبدیل به دترمینانهای رستهٔ کوچکتر تعیین کرده همه را باهم جمع می‌کنیم .

هریك از حاصل ضربها را جمله و هرعدد را عضو و n را رستهٔ دترمینان گویند وهرجملهٔ دترمینان دارای n عضو باید باشد و تعداد حاصل ضربهای (جملات) برابر تبدیل n حرف یعنی n! (n فاکتوریل) است مثلا دترمینان ۲×۲ دارای دو جمله (۲!) و دترمینان رستهٔ ۳ دارای ۶ جمله (۳!) و غیره می‌باشند

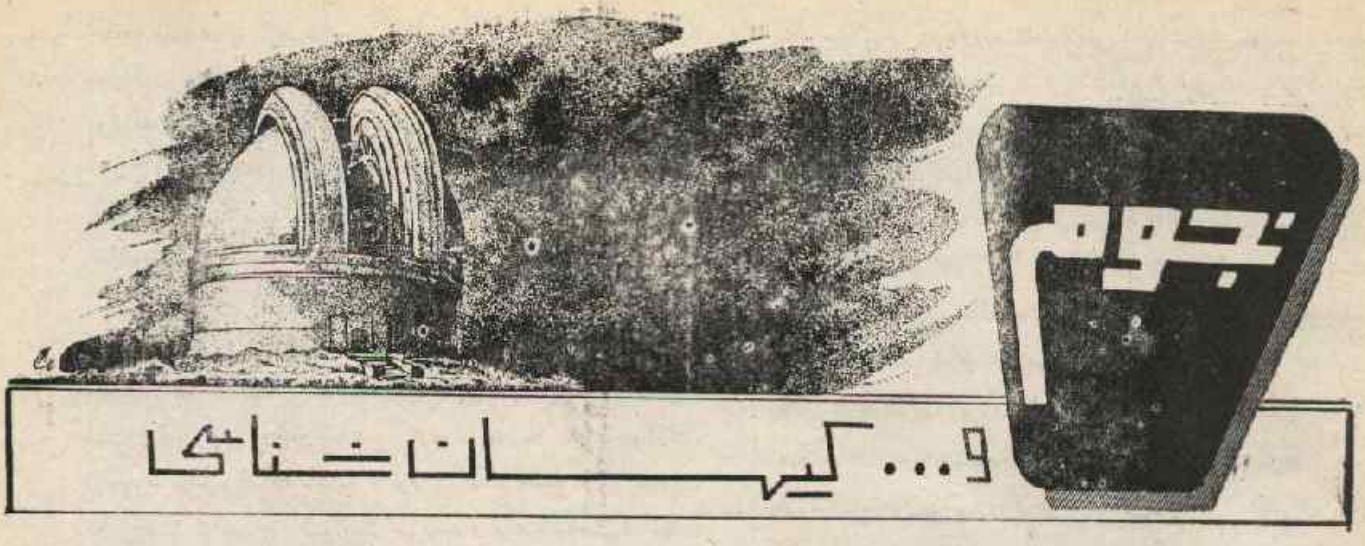
اگر جملات و اعضای یك دترمینان با شماره‌های عددی مشخص شده باشند علامت جملات دترمینان را می‌توان از روی تعداد انعکاس نماینده‌ها و شماره‌های اعضا تعیین کرد بدین نحو که هرگاه تعداد انعکاس در n عدد یك جملهٔ زوج باشد علامت حاصل ضرب مثبت واگر فرد باشد علامت حاصل ضرب منفی است مثلا علامت $a_{11}a_{22}$ مثبت است زیرا انعکاس اعداد ۱۱و۲۲ صفر است (صفر را زوج اختیار می‌کنند) وعلامت جملهٔ $a_{12}a_{21}$ منفی است زیرا مجموع انعکاسهای اعداد ۱۲ و۲۱ برابر است با (۱ = ۰ + ۱) یك و فرد است

علامت $a_{12}a_{23}a_{31}$ مثبت است زیرا تعداد انعکاسهای اعداد ۱۲ و ۲۳ و ۳۱ برابر است با (۲ = ۱ + ۱ + ۰) وزوج است. علامت جملهٔ $a_{13}a_{22}a_{31}$ منفی است زیرا تعداد انعکاس نماینده‌های ۱۳ و ۲۲ و ۳۱ برابر است با (۱ = ۰ + ۰ + ۱) که فرد است. جمله‌ای که عواملش اعضائی از دترمینان باشند که روی قطر مربع قرار دارند جملهٔ اصلی دترمینان نامیده می‌شود : $a_{11}a_{22}a_{33}$ و $a_{31}a_{22}a_{13}$ چنانکه دیده می‌شود علامت جملهٔ اول مثبت وعلامت جملهٔ دوم منفی است

بسط دترمینان : برای بسط دترمینان یك سطر یا یك ستون از آنرا به دلخواه اختیار می‌کنیم از این سطر یاستون عضوی را برگزیده ضریب آنرا تعیین می‌نمائیم

اگر این عضو انتخاب شده a_{pq} باشد ضریب آن دترمینان Δ_{pq} است که از حذف سطر p ام و ستون q ام مختوم به a حاصل می‌شود . علامت حاصل ضرب برابر $(-1)^{p+q}$ است سپس به تعداد اعضای سطر یاستونی انتخابی بدین ترتیب جمله خواهیم داشت مقدار دترمینان مجموع جبری این جملات خواهد بود

مثلا ـ دترمینان رستهٔ ۳ را در نظر می‌گیریم مثلا سطر او را اختیار می‌کنیم خواهیم داشت .



ترجمهٔ فصلی از کتاب : «L' Astronomie moderne» تألیف : TOCQUET

مراحل مهم علم نجوم

۳- دورهٔ نزدیک معاصر

هانری پوانکاره ژول هانری پوانکاره

(Jules—Henri Poincaré) ۱۸۵۴-۱۹۱۲

در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در نانسی متولد شد . پسر عمویش **ریموند پوانکاره** از ۱۹۱۳ تا ۱۹۲۰ رئیس جمهور فرانسه بود . اولین بار در ۱۸۷۳ وارد مدرسهٔ پلی‌تکنیك شد ، دورهٔ این مدرسه را با چنان درخشندگی گذراند که به افسانه بیشتر شباهت دارد ، در ۱۸۷۸ بعد از خروج از مدرسهٔ معادن در **دانشکدهٔ کان** باسمت دانشیاری شروع به آموزش آنالیز ریاضی نمود . در ۱۸۸۱ به **سوربن** فراخوانده شد تا تصدی کرسی مکانیك فیزیك و تجربی را به عهده گیرد ، بعداً استاد کرسی فیزیك ریاضی شد ؛ بعد از درگذشت **تیسران** کرسی مکانیك سماوی به عهدهٔ وی گذاشته شد. در ۱۸۸۷ به عضویت **آکادمی علوم** و در ۱۹۰۹ به عضویت **آکادمی فرانسه** برگزیده شد . غیر از آن ، در بسیاری از آکادمیهای علمی جهان عضویت داشت.

آثار هانری پوانکاره بسیار است و همهٔ شاخه‌های ریاضی و فیزیك را در برمی‌گیرد : آنالیز عالی، هندسه‌های غیر اقلیدسی حساب، توپولوژی، مکانیك، نجوم و فیزیك ریاضی. **لوئی دوبرگلی** می‌نویسد : «در ۵۸ سالگی مرد در حالی که آثاری از خود باقی گذاشت که از نظر وسعت شگفت‌انگیز است ؛ تقریباً غیر ممکن بنظر می‌رسد که در طول عمر چنین کوتاهی اینهمه کارهای مختلف و پر ارزش انجام گرفته باشد .»

در تاریخ ریاضیات ، تعداد کمی از ریاضیدانها مثل هانری پوانکاره توانسته‌اند در نظام اساسی ریاضیات تا این حد ، حد اعلای امکان ، تحول پدید آورند . در ریاضیات محض ، قوهٔ ابداع او اعجاب‌آور است، در فراهم آوردن بهترین راههای ابتکاری برای حل همهٔ مسائلی که با آنها مواجه می‌شده چنان استادی و شایستگی از خود بروز داده است که همه را متحیر می‌سازد . قابلیت فوق‌العاده‌ای که در خلق همه نوع راههای تحلیلی برای بررسی مسائل داشته است مشخص نبوغ وی می‌باشد، به علاوه ، استعداد شگرفی داشته که همهٔ موضوعها را ، در همان نظر اول ، در حالت کلی و عمومی در نظر می‌گرفته است . کارهای گذشتگان را به ندرت بررسی کرده است ، مگر اینکه حداکثر برجندتائی از آنها نظری سطحی افکنده باشد ؛ برای درك کلیهٔ قسمتهای نظریه‌ای ، مختصر اطلاعی از آن برای وی کفایت داشته است .

مثال خوبی از اساسی بودن مشاهدات وی موضوع کشف **توابع فوشین** می‌باشد که تقریباً مربوط به اوایل زندگی علمی وی است و نام او را بلند آوازه ساخت . وقتی که پوانکاره مطالعات خود را در این باره شروع کرد و حالت کلی موضوع را در نظر گرفت، بعضی حالات خاص آن توسط **ژاکوبی، هرمت** و دیگر ریاضیدانها تحت بررسی بود ، اما پوانکاره از این موضوع اطلاعی نداشت . مرحلهٔ شروع مسئله عبارت بود از پوشاندن

سفحهٔ مستوی با آجرهای به شکل متوازی الاضلاعهای برابر ، پوانکاره به مطالعهٔ حالت کلی پرداخت ومسئله را به صورت پوشاندن نیم‌صفحه‌ای با مجموعه‌ای از چندضلعیهای منحنی‌الخط مطرح کرد. آنچه‌ویرادر نیل به‌هدف‌رهبری کرد ویك‌نتیجه‌گیری عالی را موجب شد تصویر سریهای کاملا تازه‌ای بود (**توابع تتافوشین**) .

در قسمت فیزیك ، بیست موضوع که به‌هنگام‌تصدی کرسی فیزیك ریاضی دانشگاه سوربن عرضه‌کرده‌است همه را به‌حیرت افکنده است . دربارهٔ موضوعهای مختلف ومتغیری بحث کرده است ازقبیل : نیروی‌ارتجاع، نیروی مایعات ، نظریهٔ‌حرارت. ترمودینامیك ، قوای شعریه ، نور و الکتریسیته. وی همچون مخرج‌مشترك بین‌چندکسر بنظر می‌رسد و برهنه ساختن‌نظامهای اساسی که با عنوانهای مختلف در فیزیك ریاضی عرض وجود می‌کنند برای او همچون یك بازی بوده است .

دربارهٔ نجوم ، تقریباً همهٔ‌کارهایی‌که کرده به مکانیك سماوی مربوط می‌شود ، اما هرچه‌کرده‌کاملاتازگی داشته‌وهنوز هم مانند منبعی می‌ماندکه استفادهٔ‌ازآن . درهمان ممری‌که‌وی احداث‌کرده ، میسر می‌باشد

اولین تذکاریهٔ وی‌دربارهٔ مکانیك سماوی مربوط‌به‌بررسی معادلات علم‌القوی است و درآن دربارهٔ مسئلهٔ مشهور«سه‌جسم» به بحث پرداخته است : بعد از آن ، آثاری دربارهٔ نظریهٔ جزر ومد ودربارهٔ‌روشهای‌جدید در مکانیك سماوی منتشر کرده است آخرین کتابش که‌به فرضیات آفرینش جهان اختصاص‌دارد وچند سال قبل از مرگش انتشاریافت واقعاً یك شاهکار علمی می‌باشد . دراین اثر ، کلیهٔ فرضیات مربوط به تشکیل منظومهٔ شمسی‌که بعد از **کانت** و **لاپلاس**عنوان شده مجدداً موردبحث واقع شده است ، اما روش بررسی آنهاکاملا تازه واساسی است وانگهی به منظومهٔ شمسی محدود نمی‌شود : او نظریهٔ خود را تاستارگان و سحابیها گسترش داده است . نظریهٔ **آرنیوس** (Arrhenius) را دربارهٔ امکان اینکه جهان به مرگ حرارتی‌می‌افتد با یك نظر انتقادی‌مؤثر و دلنشین بررسی کرده است ومی‌توان **اصل کارنو** (Carnot) را به وی نسبت‌داد . این اثر از جهات‌دیگرهم مملواز نظریات‌عالی است‌واز کتابهایی است‌که باید از دیدگاهی عالی‌موردمقاومت واقع شوند،می‌توان آنرا چکامه‌ای درعلوم دانست .

نکتهٔ مهمی‌که از این اثر مستفاد می‌شود آنست‌که برای اولین دفعه‌وقبل از **اینشتین** ، نظریهٔ نسبیت توسط هانری‌پوانکاره مطرح شده است و بایستی افتخار این‌کشف بزرگ نصیب‌علوم فرانسه باشد .

وی در **دانش‌وروش** (صفحهٔ ۲۴۰) آنجاکه‌نتایج‌همهٔ تجربیاتش را دربارهٔ مسئله‌بیان‌می‌کند‌چنین می‌نویسد : «ممکن است‌که این باشد ، غیرممکن‌است‌که از این تأثیر برکنار بود، اساس نسبیت یك قانون عمومی طبیعت است ، هیچگاه وبا هیچ وسیلهٔ خیالی سرعتها را نمی‌توان مسلم وقطعی دانست ، همه‌نسبی هستند . وباآن وسیله‌سرعتها را نسبت به اتر حس نمی‌کنیم‌بلکه آنچه بدست می‌آوریم عبارتست از سرعتهایی‌که اجسام نسبت به یکدیگر دارند . بسیاری از آزمایشهای مختلف نتایج یکسان داده‌اند برای اینکه نخواسته‌اند برای نسبیت همان ارزشی را قائل شوندکه مثلا برای قانون تعادل قائل اند . لازم‌است‌که‌در همهٔ حالات نوع مشاهده‌ای راکه ما را به اخذ نتایج رهبری می‌کند امتحان‌کنیم و بالاخره بعدازکنترل آزمایش این‌نتایج را قبول داشته باشیم .»

نتیجه آنکه ، در ۱۹۰۴ زمانی‌که اینشتین تازه‌کارهای قطعی خود را آغاز می‌کرده پوانکاره برکلیهٔ جزئیات نظریهٔ نسبیت احاطه داشته است . وی تمام اشکالات الکترودینامیك اجسام درحال حرکت را مطرح‌کرده وتمام ریزه‌کاریهای آنرا آشکارا مشخص ساخته‌است ؛ عناوینی‌که‌وی بررسی کرده‌عبارتند از : زمان محلی **لورنتز** ، انقباض **فیتزجرالد** ، طرح ثابتهای معادلات الکترومغناطیس ونتایج آزمایش **مایکلسن** .

لوئی بروگلی چنین می‌نویسد: «در این‌باره ، پوانکاره گام قطعی را برنداشته و افتخار مشاهدهٔ همهٔ نتایج نظریهٔ نسبیت را به اینشتین واگذار کرده است . بخصوص تحقیق دقیق اندازه های طول و زمان و درك حقیقت فیزیکی مشخص ارتباطی‌که اساس نسبیت بین فضا و زمان مستقر می‌سازد. چرا پوانکاره بعد از اولین قدم ، قدمی فراتر ننهاده است ؟ وی مانند یك ریاضیدان محض فکر می‌کرده وبعلاوه دارای اندیشهٔ انتقادی مفرطی بوده است ، در مواجههٔ با نظریه‌های فیزیکی رفتاری شکاك داشته است . عموماً تصورات نامحدود مختلفی وجود داردکه ازلحاظ منطقی هم‌ارز هستند ، دانشمندان ازبین آنها ، آنهایی را انتخاب می‌کنند که دلایل آسانتری را لازم داشته باشد . بنظر می‌رسدکه یك‌چنین وضعی موجب شده تاوی به نظریاتی‌که به‌حقیقت فیزیکی بسیارنزدیك بوده‌وفیزیکدانها در مشاهدات خود در هرحال آنها را می‌پذیرند توجه نداشته باشد . از این‌جهت است‌که اینشتین ، جوانی‌که تازه ۲۵ سال داشت و اطلاعات ریاضی او در برابر معلومات عمیق وداهیانهٔ دانشمند فرانسوی‌کاملا مقدماتی بوده ، موفق شده است همهٔ تجربیات جزئی سلف خودرا بکاربرد و به مرحله‌ای برسد که کلیهٔ اشکالات‌کار را با قاطعیت استخراج کند . اندیشه‌ای قوی ، کار ماهرانه‌ای‌راکه بوسیلهٔ مشاهدهٔ‌عمیق حقایق فیزیکی‌رهبری می‌شده به ثمررسانده است .» اما به هرحال خیره‌کنندگی و

شایستگی موقعیت اینشتین نباید موجب آن شود که این موضوع را فراموش کنیم که مسئلهٔ نسبیت قبل ازوی توسط اندیشهٔ درخشان پوانکاره عمیقاً تجزیه وتحلیل شده است.

قبل ازآنکه صحبت از پوانکاره را قطع کنیم مناسب است که راجع به فلسفهٔ وی هم چندکلمه‌ای صحبت کنیم : رویهمرفته وی متفکری مستقل ونسبت به هرمکتبی بیگانه بوده و هیچگاه هم ، مانند **رنوویه** ، **برگسون** یا **ویلیام جمز** در صدد تأسیس مکتب خاصی برنیامده است . پای‌بند هیچ آئینی نبوده و ازخود هم هیچ‌نوع آئینی اظهارنکرده است . اگر خواسته باشیم که نوع تفکر وی را دریک کلمه خلاصه کنیم شاید مناسبترین کلمه «طرفداری سهولت عمل» باشد . وانگهی ، در نوشته‌هایش کلمهٔ «سهل» مرتباً تکرار می‌شود و توضیحاتش هم همیشه با این کلمه پایان می‌یابد .

شاید بتوان پوانکاره را جانبدار فلسفه پراگماتیسم دانست اما کلمهٔ «سهولت» نزد او معنی ذهنی‌تری دارد و غیر از دکترین ویلیام جمز می‌باشد ، درست است که معنی آسان را می‌رساند اما درعین حال با بعضی داده‌های تجربی هم متناظر می‌باشد .

بطورکلی ، پوانکاره یك ایده‌آلیست بوده است و همین طرز تفکر ایده‌آلی در تنظیم آثاری که همچون یك شعر قابل تحسین در ادبیات فرانسه جاودانی خواهد بود الهام‌بخش وی بوده است . آخرین صفحهٔ کتاب وی دربارهٔ ارزش دانش با این چنین کلماتی آغاز می‌شود : «چیزی که دربارهٔ آن نشود فکر کرد وجود ندارد» ، یا جای دیگر درقسمتی ازکتابش که قیافهٔ کاملا جدی داشته اندیشه را چنین توصیف می‌کند : «آذرخشی درنیمه‌شبی طولانی» .

بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله‌را حل کنید

من چهار نوع ساعت در خانه دارم : یك ساعت دیواری ، یك ساعت پاندول دار ، یك ساعت شماطه‌دار و یك ساعت مچی . اما این چهار ساعت هیچگاه در نشان دادن وقت باهم توافق ندارند. روزی آنها را نزد ساعتساز بردم : معلوم شدکه ساعت دیواری نسبت به‌ساعت ساعتساز ۳ دقیقه در ساعت تأخیر دارد ، ساعت پاندول‌دار نسبت به‌ساعت دیواری ۳ دقیقه در ساعت جلو است ، ساعت شماطه‌دار نسبت به ساعت پاندول‌دار ۳ دقیقه در ساعت عقب است . بالاخره ساعت مچی نسبت به‌ساعت شماطه‌دار ۳ دقیقه در ساعت جلو است .

با اطلاع براینکه به‌هنگام ظهر، هرچهار ساعت با ساعت ساعتساز میزان شده باشند، وقتی که ساعت پاندول‌دار ساعت ۱۹ را نشان دهد ساعت مچی چه وقتی را معین می‌کند ؟

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان مندرج در یکان شمارهٔ قبل

اگر فاصلهٔ ده تا شهر x کیلومتر فرض شود وقتی که دهقان پیر y کیلومتر آن را پیموده باشد بقیهٔ مسافت $(x-y)$ کیلومتر خواهد بود و اگر $3y$ کیلومتر پیموده باشد مسافت مانده $(x-3y)$ کیلومتر می‌شود .

پس بنابه فرض داریم

$$x-y=2(x-3y) \Rightarrow y=\frac{1}{5}x$$

و اگر دهقان جوان z کیلومتر از فاصلهٔ بین ده تا شهر را پیموده باشد خواهیم داشت :

$$3(x-z)=x-\frac{z}{2} \Rightarrow z=\frac{4}{5}x$$

از نامساوی $\frac{4}{5}x>\frac{1}{5}x$ نتیجه می‌شود $z>y$ که می‌رساند دهقان جوان با اتومبیل مسافرت می‌کرده است .

راهنمای ریاضیات متوسطه

تبدیل یك کسر به کسرهای ساده‌تر

Partial Fractions

تهیه کننده : جلیل‌الله قراگزلو

در فصول پیشرفتهٔ ریاضی به‌ویژه در مبحث انتگراسیون به‌عملی که‌عکس جمع کسرهاست برمی‌خوریم‌واین عمل‌را «تبدیل کسر به‌کسرهای ساده‌تر» می‌نامیم (بسیار بجا خواهد بود که این قسمت در متوسطه تدریس شود) .

مثال‌ـ اگر کسرهای :

$$\frac{۲}{x-۱} \quad و \quad \frac{-۳}{۲x-۱} \quad و \quad \frac{۴}{x+۲}$$

را باهم جمع کنیم به‌آسانی خواهیم داشت :

$$\frac{۴}{x+۲}-\frac{۳}{۲x-۱}+\frac{۲}{x-۱}=\frac{۹x^۲-۹x+۶}{۲x^۳+x^۲-۵x+۲}$$

ولی تبدیل کسر $\frac{۹x^۲-۹x+۶}{۲x^۳+x^۲-۵x+۲}$ به کسور ساده:

$$\frac{۲}{x-۱} \quad و \quad \frac{-۳}{۲x-۱} \quad و \quad \frac{۴}{x+۲}$$

عملی است که در این مختصر مورد بحث ماست ـ قبل از بیان‌و شرح چگونگی این تبدیل نخست یادآور می‌شویم که :

لم ـ هر کثیرالجمله از هردرجه که باشد قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دوجمله‌ایهای درجهٔ اول و سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم خواهد بود (از اثبات صرف نظر می‌شود) . سپس متذکر می‌گردیم که کسرها به‌دودسته تقسیم می‌شوند:

الف‌ـ کسرهائی که درجهٔ صورتشان ازدرجهٔ مخرجشان کمتر است (Proper Fractions) .

ب‌ـ کسرهائی که‌درجهٔ صورتشان یا بیشتر ازدرجهٔ‌مخرج ویا برابر درجهٔ مخرج است (Inproper Fractions) کسرهای اخیر را می‌توان به یك کثیرالجمله و یك کسر از نوع الف تبدیل کرد. مثلا: کسر $\frac{x^۳-۴x^۲+۶x-۷}{x^۲-۵x+۶}$ را می‌توان به‌دوجمله‌ای $x+۱$ وکسر $\frac{۵x-۱۳}{x^۲-۵x+۶}$ تبدیل کرد زیرا ازتقسیم زیرعبارت $x^۳-۴x^۲+۶x-۷$ برعبارت $x^۲-۵x+۶$ عبارت خارج قسمت به‌صورت $x+۱$ وعبارت باقیمانده و به‌صورت $۵x-۱۳$ نتیجه می‌شود، پس:

$$\frac{x^۳-۴x^۲+۶x-۷}{x^۲-۵x+۶}=x+۱+\frac{۵x-۱۳}{x^۲-۵x+۶}$$

قضیهٔ زیر روش تبدیل را دربارهٔ کسر های نوع الف روشن می‌کند .

قضیه‌ـ هرگاه در کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ درجهٔ صورت کمتر از درجهٔ مخرج باشد می‌توان آنرا با درنظرگرفتن مراحل‌زیر به‌کسرهای جزئی تبدیل‌کرد .

الف‌ـ درازاء هرعامل درجهٔ اول $ax+b$ که در $D(x)$ دیده شودیك‌کسر به‌صورت $\frac{A}{ax+b}$ که درآن A مقداریست ثابت درکسرهای جزئی وجود خواهد داشت .

ب- اگر عامل $(ax+b)$ n بار در $D(x)$ تکرار شده باشد یا به گفتهٔ دیگر عامل $(ax+b)^n$ در $D(x)$ وجود داشته باشد در ازاء آن عامل n کسر به‌صورت :

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

که در آن A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n مقادیر ثابتند در تبدیل وجود خواهد داشت .

ج- در ازاء هرعامل درجهٔ دوم تحویل ناپذیر : ax^2+bx+c که در $D(x)$ دیده شود یک کسر به‌صورت $\frac{Ex+F}{ax^2+bx+c}$ که در آن E و F مقادیر ثابتند در تبدیل وجود خواهد داشت .

د- اگر در $D(x)$ عامل $(ax^2+bx+c)^n$ وجود داشته باشد در ازاء آن n کسر به‌شکل :

$$\frac{E_1x+F_1}{ax^2+bx+c}+\frac{E_2x+F_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{E_nx+F_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

که در آن E_1 و E_2 و ... و E_n و F_1 و F_2 و ... و F_n مقادیر ثابتند در تبدیل وجود خواهد داشت :

از اثبات قضیهٔ بالا صرف نظر می‌شود وفقط طریقهٔ یافتن مقادیر ثابت را با ذکر مثال شرح می‌دهیم :

مثال ۱- (در مورد کسرهائی که مخرج آنها به عوامل درجهٔ اول تجزیه شده باشد) - مطلوبست تبدیل کسر $\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$ به کسرهای ساده‌تر

حل- طبق قضیهٔ بالا داریم :

$$\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2} \quad (1)$$

رابطهٔ بالا اتحاد است یعنی به ازاء جمیع مقادیر x طرفین برابرند (مگر به‌ازاء $x=-2$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ که مخرج را صفر می‌کنند). پس اگر طرفین را در کوچکترین مضرب مشترک مخارج یعنی در $(x-1)(2x-1)(x+2)$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$9x^2-9x+6\equiv A(2x-1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(2x-1) \quad (2)$$

به دو طریق می‌توان مقادیر A و B و C را یافت

طریق اول - رابطهٔ بالا را ساده کرده و برحسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم، بدست می‌آید .

$$9x^2-9x+6\equiv(2A+B+2C)x^2+(3A+B-3C)x+(-2A-2B+C)$$

طبق خاصیت اتحادها ضرایب جملات متشابه در طرفین برابرند یعنی

$$\begin{cases}2A+B+2C=9\\3A+B-3C=-9\\-2A-2B+C=6\end{cases}$$

از حل این دستگاه بدست می‌آید : $A=2$ و $B=-3$ و $C=4$ پس :

$$\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2x-1}+\frac{4}{x+2} \quad (3)$$

طریق دوم - در رابطهٔ (۲) به‌ازاء x عدد ۱ را بکار می‌بریم حاصل می‌شود $3A=6$ و یا $A=2$ همچنین با بکار بردن $x=\frac{1}{2}$ و $x=-2$ بدست می‌آید : $\frac{15}{2}=-\frac{5B}{4}$ و $15C=60$ و از آنجا $B=-3$ و $C=4$ خواهد شد و تجزیهٔ (۳) نتیجه می‌شود .

تمرینات نوع الف

کسرهای زیرین را به کسرهای ساده تر تبدیل کنید :

۱) $\frac{x+12}{(2x-1)(x+2)}$

۲) $\frac{10x+2}{(3x+2)(x-4)}$

۳) $\frac{-x-12}{2x^2-x-6}$

۴) $\frac{9x-7}{6x^2+14x+4}$

۵) $\frac{2x^2+10x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

۶) $\frac{7x^2-22}{(2x-3)(x-2)(x+1)}$

۷) $\frac{x^4+5x^3+7x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$

۸) $\frac{x^4+3x^3-5x^2-4x-2}{x^2+2x-8}$

۹) $\frac{5x^3+36x^2+77x+48}{(x+1)(x^2+5x+6)}$

(۱۰) $\dfrac{۲x^۴-۳x^۳-۱۹x^۲+۹x+۱}{(x^۲+x-۲)(x-۴)}$

***

مثال دوم ـ (در مورد کسرهائی که در مخرج آنها توان ۱ام دوجمله‌ای درجهٔ اول وجود دارد) ـ

کسر $\dfrac{x^۲-۳x+۱}{(x-۱)^۲(x-۲)}$ را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید.

حل ـ طبق بند ب از قضیه داریم:

$$\frac{x^۲-۳x+۱}{(x-۱)^۲(x-۲)}\equiv\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{(x-۱)^۲}+\frac{C}{x-۲} \quad (۶)$$

طرفین را در (کسم) ضرب می‌کنیم چنین می‌شود:

$$x^۲-۳x+۱\equiv A(x-۱)(x-۲)+B(x-۲)+C(x-۱)^۲ \quad (۷)$$

و یا:

$$(۸)\quad x^۲-۳x+۱\equiv(A+C)x^۲+(-۳A+B-۲C)x+(۲A-۲B+C)$$

طریق اول ـ از خاصیت تساوی جمل متشابه در اتحاد داریم:

$$\begin{cases}A+C=۱\\-۳A+B-۲C=-۲\\۲A-۲B+C=۱\end{cases}$$

که از حل آن بدست می‌آید: $A=۲$ و $B=۱$ و $C=-۱$

و از آنجا:

$$\frac{x^۲-۳x+۱}{(x-۱)^۲(x-۲)}=\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}-\frac{۱}{x-۲}$$

طریق دوم ـ در رابطهٔ (۷) مقدار $x=۱$ را در طرفین بکار می‌بریم حاصل می‌شود $B=۱$ همچنین از بکار بردن $x=۲$ بدست می‌آید $C=-۱$ و پس از قرار دادن مقادیر B و C در (۷) کافی است x را برابر عدد دلخواهی مانند $x=۳$ قرار دهیم بدست می‌آید: $A=۲$

تمرینات نوع دوم

هریك از کسرهای زیررا به چندین کسر تبدیل کنید:

۱۱) $\dfrac{۳x+۵}{(x+۱)^۲}$ ۱۲) $\dfrac{۲x-۵}{x^۲-۶x+۹}$

۱۳) $\dfrac{۲x^۳-۹x+۱۱}{x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸}$ ۱۴) $\dfrac{۲x^۲+۷x+۹}{(x+۱)^۳}$

۱۵) $\dfrac{۵x^۲+۱۸x+۱۴}{(۲x+۱)(x^۲+۶x+۹)}$

۱۶) $\dfrac{۵x^۲-۲۵x+۸}{(۳x+۲)(x-۳)^۲}$

۱۷) $\dfrac{۵x^۳-۶x^۲-۳x-۱}{(x+۱)^۲(x-۲)^۲}$

۱۸) $\dfrac{۸x^۳-۳۷x^۲+۳۹x-۱۸}{x^۴-۶x^۳+۹x^۲}$

۱۹) $\dfrac{۶x^۳-۲۹x^۲-۵۱x+۲۷۸}{(۲x+۴)(x-۴)^۲}$

۲۰) $\dfrac{۸x^۳-۸x^۲+۹x-۹}{۲x^۳-۳x^۲}$

***

مثال نوع سوم ـ (هنگامی که مخرج شامل عاملهای درجهٔ دوم تکرار نشده باشد) ـ کسر زیررا به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید:

$$\frac{۴x^۲+x+۱}{(x^۲+۱)(x-۱)}$$

حل ـ طبق بند ج ازقضیه داریم:

$$\frac{۴x^۲+x+۱}{(x^۲+۱)(x-۱)}=\frac{Ax+B}{x^۲+۱}+\frac{C}{x-۱}$$

پس:

$$(۱۲)\quad ۴x^۲+x+۱\equiv(Ax+B)(x-۱)+C(x^۲+۱)$$

و یا:

$$(۱۳)\quad ۴x^۲+x+۱\equiv(A+C)x^۲+(-A+B)x+(-B+C)$$

طریق اول ـ از تساوی ضرایب جمل متشابه در اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$-B+C=۱ \quad \text{و} \quad -A+B=۱ \quad \text{و} \quad A+C=۴$$

و از آنجا: $A=۱$ و $B=۲$ و $C=۳$ بنابراین:

$$\frac{۴x^۲+x+۱}{(x^۲+۱)(x-۱)}=\frac{x+۲}{x^۲+۱}+\frac{۳}{x-۱}$$

طریق دوم- در (۱۲) در ازاء $x=۱$ حاصل می‌شود $C=۳$ به ازاء دو مقدار دلخواه مثلا $x=۰$ و $x=۲$ در (۱۲) حاصل می‌شود: $B=۲$ و $A=-۱$

تمرینات نوع سوم (ج)

کسرهای زیر را به کسرهای ساده تر تبدیل کنید:

۲۱) $\dfrac{x^۲-۶x+۲}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$

۲۲) $\dfrac{۸x^۲-۵x+۶}{(۳x-۲)(x^۲+x+۲)}$

۲۳) $\dfrac{۵x^۲+۱}{x^۳+۱}$

۲۴) $\dfrac{۵x^۲-۶x}{x^۲-۲۷}$

۲۵) $\dfrac{۵x^۲+۲x+۹}{x^۳+x^۲+۳x}$

۲۶) $\dfrac{x^۲+۱۴x-۱۵}{۲x^۳+۶x}$

۲۷) $\dfrac{۳x^۲-۲x+۵}{(x^۲+۱)(۲x^۲-x+۳)}$

۲۸) $\dfrac{-۲x^۲+۴x+۱۵}{(x^۲+۳x+۴)(x^۲+x+۱)}$

۲۹) $\dfrac{x^۵+x^۴+۴x^۲+۷x^۲-۲x+۱۹}{(x^۲+۳)(x^۲-x+۲)}$

۳۰) $\dfrac{x^۵+۷x^۳+۶x-۲}{x^۴+۲x^۲}$

۳۱) $\dfrac{۴x^۴+۷x^۳+۵x^۲+x-۶}{x^۴+x^۳+۲x^۲}$

۳۲) $\dfrac{۳x^۴-۵x^۳-۱۶x^۲-۲۸x+۴}{(x-۱)^۲(x^۲+۴)}$

***

مثال نمونهٔ ۴ - (هنگامی که در مخرج کسر سه جمله‌ای درجهٔ دوم تحویل ناپذیر مکرر وجود داشته باشد).

کسر:

$$\frac{۴x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۵x}{(x-۱)(x^۲+x+۱)^۲}$$

را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید.

حل - طبق بندهای (الف) و (د) قضیه داریم:

$$\frac{۴x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۵x}{(x-۱)(x^۲+x+۱)^۲}=\frac{A}{x-۱}+\frac{Bx+C}{(x^۲+x+۱)}+\frac{Dx+E}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

$$۴x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۵x=A(x^۲+x+۱)^۲+$$
$$+(Bx+C)(x^۲+x+۱)(x-۱)+$$
$$+(Dx+E)(x-۱) \quad (۱۷)$$

و یا:

$$۴x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۰x=(A+B)x^۴+$$
$$+(۲A+C)x^۳+(۳A+D)x^۲+$$
$$+(۲A-B-D+E)x+(A-C-E)$$

طریق اول - از تساوی ضرایب جمل متشابه نتیجه می‌شود:

$A+B=۴$ و $۲A+C=۳$ و $۳A+D=۶$

و $۲A-B-D+E=۵$ و $A-C-E=۰$

که از حل آنها خواهیم داشت $A=۲$ و $B=۲$ و $C=-۱$ و $D=۰$ و $E=۳$ ودر نتیجه داریم:

$$\frac{۴x^۴+۳x^۳+۶x^۲+۵x}{(x-۱)(x^۲+x+۱)^۲}=\frac{۲}{x-۱}+\frac{۲x-۱}{x^۲+x+۱}+\frac{۳}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

طریق دوم - اگر $x=۱$ را در ۱۷ بکار بریم بدست می‌آید $۹A=۱۸$ و یا $A=۲$ حال اگر مقادیر دلخواه $x=۰$ و $x=-۱$ و $x=۲$ و $x=-۲$ را در (۱۷) بکار بریم سایر مقادیر ثابت بدست می‌آیند.

تمرینات نوع «د»

کسرهای زیر را به مجموع کسرهای جزئی تبدیل کنید.

۳۳) $\dfrac{x^۲+۲x-۲}{(x^۲+۱)^۲}$

۳۴) $\dfrac{۲x^۳-x^۲+۳x+۱}{(x^۲-x+۲)^۲}$

۳۵) $\dfrac{۳(x^۲+x+۳)}{x(x^۲+۳)^۲}$

۳۶) $\dfrac{x^۴+۲x^۳+۳x^۲+۳x}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲}$

۳۷) $\dfrac{۳x^۵+۲x^۴+۶x^۳+۶x^۲+۳x+۵}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۲)^۲}$

۳۸) $\dfrac{۲x^۴+۱۴x^۲+۲۵}{(x^۲+۳)^۲(x^۲+۴)^۲}$

۳۹) $\dfrac{۳x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۳x+۲}{(x-۱)(x^۲+۱)^۲}$

۴۰) $\dfrac{۲x^۴-x^۳+۱۵x^۲-۲x+۲۸}{(x+۱)(x^۲+۳)^۲}$

((دربارهٔ چند نامساوی هندسی))

از مجلهٔ : The Mathematics Teacher

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

اگر a_1 و a_2 و ... و a_n مقادیری مثبت باشند نامساوی

$$(1)\quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

که به «نامساوی واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی» معروف است برقرار می‌باشد . تساوی وقتی برقرار است که :

$a_1=a_2=\cdots=a_n$ باشد.

در حالتهای خاص $n=2$ و $n=3$ نامساوی (۱) به صورتهای زیر درمی‌آید :

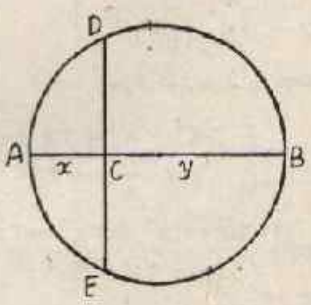
$$(2)\quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$(3)\quad \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

یك راه سادهٔ اثبات جبری نامساوی (۱) بسط نامساوی مسلم زیر می‌باشد .

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

ویك راه سادهٔ اثبات هندسی این نامساوی از این قرار است که دایرهٔ به قطر $AB=x+y$ را در نظر گرفته در نقطهٔ C از AB که $AC=x$ و $BC=y$ باشد وتر DE را عمود بر AB اخراج می‌کنیم.



با استفاده از رابطهٔ

$$DC\cdot CE = AC\cdot CB \Longrightarrow DC = CE = \sqrt{xy}$$

وبا توجه به اینکه در هردایره قطر بزرگترین وتر است نتیجه می‌شود

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

برای اثبات نامساوی (۳) اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم :

$$p^3+q^3+r^3-3pqr =$$

$$=\frac{p+q+r}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]$$

وقتی که p و q و r مقادیری مثبت باشند طرف راست اتحاد بالا همواره بزرگتر از صفر ویا لااقل برابر با صفر است (درحالت $p=q=r$) بنابراین

$$p^3+q^3+r^3 \geq 3pqr$$

از این نامساوی با فرض

$x=p^3$ و $y=q^3$ و $z=r^3$

نامساوی (۳) بدست می‌آید .

***

اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند با توجه به نامساوی (۲) خواهیم داشت

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ و $y+z \geq 2\sqrt{yz}$ و $z+x \geq 2\sqrt{zx}$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین سه نامساوی بالا در یکدیگر خواهیم داشت

$$(4)\quad (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

تساوی وقتی برقرار است که :

$x=y=z$

فرض کنیم که

$$x=a+b-c$$
$$(5)\quad y=b+c-a$$
$$z=c+a-b$$

و a و b و c را اندازه‌های ضلعهای یك مثلث اختیار می‌کنیم باتوجه به نامساویهای بین اضلاع (یعنی $a+b>c$ وغیره) مقادیر x و y و z مثبت خواهد بود . چون مقادیر (۵) را در نامساوی (۴) منظور کنیم نامساوی زیر بین اندازه‌های ضلعهای هرمثلث بدست می‌آید

$$(6)\quad abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

تساوی وقتی برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد

اگر R شعاع دایرهٔ محیطی، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی p نصف محیط و S مساحت مثلث باشد می‌دانیم که:

(۷) $2p=a+b+c$

(۸) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(۹) $S=pr$

(۱۰) $4RS=abc$

(۱۱) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

رابطه‌های (۵) به صورت زیر درمی‌آیند

(۱۲) $x=2(p-c)$ و $y=2(p-a)$ و $z=2(p-b)$

و نامساوی (۶) چنین می‌شود

(۱۳) $abc\geq 8(p-a)\ p-b)(p-c)$

از ضرب طرفین در p می‌شود

(۱۴) $pabc\geq 8S^2$

باتوجه به رابطهٔ (۹) وپس ازاختصار می‌شود

(۱۵) $abc\geq 8pr^2$

این نامساوی را می‌توان چنین نوشت

$4RS\geq 8Sr \Longrightarrow$ (۱۶) $R\geq 2r$

(۱۷) $Rp\geq 2S$ (۱۸) $2R^2p\geq abc$

از رابطهٔ (۱۱) ونامساوی (۱۶) نتیجه می‌شود :

(۱۹) $1\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

نامساوی (۱۷) را از راه دیگر هم می‌توان بدست‌آورد :بنابر قضیهٔ اولر داریم

$d^2=R^2-2Rr$

که d فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تا مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن است.

$d^2\geq 0 \Longrightarrow R^2-2Rr\geq 0$ یا $R\geq 2r$

اگر l فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی ارتفاعها تا مرکز دایرهٔ محیطی‌مثلث باشد می‌دانیم

$l=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C$

$l\geq 0$ است وباتوجه به (۱۶) نتیجه می‌شود

(۲۰) $1\geq 8\cos A\cos B\cos C$

***

اگر r_1 و r_2 و r_3 شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث و I_1 و I_2 و I_3 مرکزهای این دایره‌ها باشنددداریم

(۲۱) $r_1+r_2+r_3=4R+r$

ومساحت مثلث $I_1I_2I_3$ برابر است با :

(۲۲) $S_{I_1I_2I_3}=\frac{abc}{2r}$

ازاین دورابطه‌باتوجه به نامساویهای(۱۷) و (۱۸)نامساویهای زیر حاصل می‌شود :

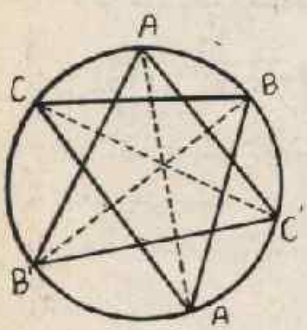
(۲۳) $\frac{9R}{2}\geq r_1+r_2+r_3\geq 9r$

(۲۴) $\frac{R^2}{r^2}S\geq S_{I_1I_2I_3}\geq 4S$

باتوجه به **قضیهٔ پونسله** * (بینهایت مثلث وجود دارد که دارای یک‌دایرهٔ محیطی ویک‌دایرهٔ محاطی داخلی‌مشترک‌هستند) واز نامساویهای (۲۳ و (۲۴) مسئلهٔ زیر مطرح می‌شود :

از بین‌مثلثهایی که‌همه‌دردایرهٔ ثابت محیط بوده‌وبردایرهٔ ثابت محاط باشند نسبت به کدامیک $r_1+r_2+r_3$ ماکزیمم است وهمچنین نسبت به‌کدامیک مساحت مثلث $I_1I_2I_3$ماکزیمم خواهد بود ؟

***



مثلث ABC ودایرهٔ محیطی آن‌رادر نظرمی گیریم. نیمسازهای‌زاویه‌های A وB وC دایرهٔ محیطی‌مثلث‌را به‌ترتیب در نقاط A' و B' و C' قطع می کنند.مساحت‌مثلث A'B'C' برابراست با $\frac{pR}{2}$ وبا ملاحظهٔ رابطهٔ (۹) ونامساوی (۱۶) نتیجه می‌شود :

(۲۵) $S_{A'B'C'}\geq S_{ABC}$

این نامساوی را می‌توان به شرح زیر تعمیم داد

چندضلعی‌محدب‌محاطی $v_1v_2\cdots v_n$رادر نظرمی گیریم. چند ضلعی دیگری که رأسهایش به ترتیب وسطهای کمانهای v_1v_2وv_2v_3و ... و v_nv_1 باشد دارای مساحتی‌است که‌مقدار آن بزرگتر یاالاقل مساوی‌مساحت چند ضلعی مفروض‌می‌باشد. ازاین تعمیم نامساوی مثلثاتی زیر نتیجه می‌شود .

اگر زاویه‌های $A_i\geq 0$ بوده و

$A_1+A_2+\cdots+A_n=\pi$

باشد داریم

$\sin 2A_1+\sin 2A_2+\cdots+\sin 2A_n\geq$

$\sin(A_1+A_2)+\sin(A_2+A_3)+\cdots+\sin(A_n+A_1)$

درضمن ازآنچه که گفته شد معلوم‌می‌شود که بین‌تمام n ضلعیهای محدب محاط دریک دایره آنکه منتظم است دارای مساحت و همچنین محیط ماکزیمم می‌باشد .

***

اگر ابعادمکعب مستطیل را با x و y و z ، حجم‌آنرا

با V، سطح کل آنرا با S ومجموع طولهای تمام یالهای آنرا با E بنمائیم داریم

$$V=xyz$$
$$S=2(xy+yz+zx)$$
$$E=4(x+y+z)$$

واز نامساوی (۲۱) نتیجهٔ زیر بدست می‌آید، بین تمام مکعب‌مستطیلهای با حجم ثابت آنکه سطح کلش می‌نیمم است مکعب می‌باشد. همچنین مابین تمام مکعب‌مستطیلهای باسطح کل ثابت آنکه حجمش ماکزیمم است مکعب می‌باشد .

مسئله ـ فرض کنیم که بخواهیم از ورقهٔ حلبی جعبهٔ دربازی به شکل مکعب مستطیل با حجم معلوم بسازیم . ابعادجعبه را چگونه انتخاب کنیم تا مقدار حلبی بکار رفته می‌نیمم باشد . اگر x و y و z ابعاداین جعبه و S و V سطح کل وحجم آن فرض شود بنابه نامساوی (۳) داریم

$$\frac{S}{3}=\frac{2xy+yz+2zx}{3}\geq\sqrt[3]{4(xyz)^2}=\sqrt[3]{4V^2}$$

V مقداری است ثابت‌پس S وقتی‌می‌نیمم است که تساوی‌برقرار باشد یعنی

$$S_{min}=3\sqrt[3]{V^2}$$
$$2xy=yz=2zx=\sqrt[3]{4V^2}$$
$$2x=y=z=\sqrt[3]{2V}$$

مسئلهٔ عکس ـ می‌خواهیم از مقدار معینی ورقهٔ‌حلبی جعبه‌ای‌دربازبه شکل مکعب‌مستطیل بسازیم که حجم آن‌ماکزیمم باشد . دراین حالت نتیجه خواهیم گرفت .

$$2x=y=z=\frac{\sqrt{S}}{3}$$

مسئلهٔ دیگر ـ می‌خواهیم از ورقهٔ فلزی یك قوطی به شکل استوانهٔ قائم وبه گنجایش یك لیترچنان بسازیم که مقدار ورقهٔ فلزی‌که بکار می‌رود می‌نیمم باشد .

چنانچه r شعاع قاعده ، h ارتفاع ، S سطح کل و V حجم قوطی باشد داریم

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$
$$V=\pi r^2h$$

با ملاحظهٔ نامساوی (۲) خواهیم داشت

$$\frac{S}{2}=\frac{2\pi r^2+2\pi rh}{2}\geq\sqrt{4\pi^2r^2h}$$

چون طرف راست این نامساوی مقدار ثابتی نیست بنابراین برای تعیین می‌نیمم سطح از نامساوی (۳) استفاده می‌کنیم

$$\frac{S}{3}=\frac{2\pi r^2+\pi rh+\pi rh}{3}\geq\sqrt[3]{2\pi^2r^4h^2}=\sqrt[3]{2\pi v^2}$$

طرف راست مقداری است ثابت پس طرف چپ هنگامی می‌نیمم می‌شود که تساوی برقرار باشد یعنی :

$$S_{min}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$
$$2\pi r^2=\pi rh=\pi rh=\sqrt[3]{2\pi V^2}$$
$$h=2r=\frac{\sqrt[3]{2V}}{\pi}$$

تمرینات

۱ـ حجم بزرگترین استوانهٔ محاط در کرهٔ معلوم‌رابدست آورید .

۲ـ ازبین مستطیلهای محاط در بیضی معلوم کدام‌دارای مساحت ماکزیمم است ؟

۳ـ اگر x و y و z مقادیر مثبت و $x^a+y^b+z^c=k$(ثابت) و a و b و c و m و n و p اعدادی منطق باشند ماکزیمم حاصل ضرب $x^my^nz^p$ چه موقع است ؟

۴ـ اگر P و Q و R نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باضلعها باشد ثابت کنید که

$$S_{PQR}\leq\frac{1}{4}S_{ABC}$$

۵ـ اگر A و B و C زاویه‌های مثلثی باشند ثابت کنید

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\geq tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}$$

یادداشت ـ پونسله‌ریاضیدان فرانسوی قضیهٔ خودرا درحالت کلی زیر بیان کرده‌است : بینهایت n ضلعی وجوددارد که بر منحنی مقطع مخروطی‌معلومی محیط بوده درمنحنی‌مقطع مخروطی دیگری محاط باشد .

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gaulier مترجم : عطاءالله بزرگ‌نیا

فصل VII ـ مسائلی که با استفاده از چند واکنش یا یک ردیف واکنش شیمیائی تنظیم شده است

۳۰ـ در برخی از این مسائل هریك از معلومات مسئله مربوط به مجهولی است . در این صورت مسئله را می توان مستقیماً به‌چند مسئلهٔ کوچك تجزیه کرد .

۳۱ـ در برخی موارد دیگر که بعضی از معلومات مسئله مربوط به‌نتیجهٔ کلی چند واکنش است و با تنظیم چند معادلهٔ چند مجهولی ، مسئله به شکل مسئلهٔ جبری درمی‌آید .

۳۲ـ حل دستگاه معادلات چند مجهولی گاهی بسیار ساده است . مثلا وقتی دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی به شکل زیر باشد :

(۱) $ax+by=c$

(۲) $dy=e$

از رابطهٔ (۲) می توان مقدار y را بدست آورد و در رابطهٔ (۱) قرار داد وآنرا به معادلهٔ یك مجهولی تبدیل کرد. (یاد آوری حل معادلات چند مجهولی ضروری است).

حالت اول

مسائلی که به چند مسئلهٔ ساده قابل تجزیه می‌باشند

۳۳ـ مثال ـ از تجزیهٔ عنصری ۰/۴۱۳ گرم از یك مادهٔ آلی ازت‌دار ۰/۶۱۶ گرم گاز کربنیك و ۰/۳۱۵ گرم آب حاصل شده است . ازت حاصل از تجزیهٔ ۰/۳۵۴ گرم ازهمین ماده تحت شرایط متعارفی $67/2\ cm^3$ حجم دارد . ترکیب درصد عناصر رادر این مادهٔ آلی پیدا کنید .

حل ـ از روی معلومات مسئله می‌توان نسبت درصد هر یك از عناصر کربن ، ئیدرژن و ازت را مستقلا محاسبه کرد . نسبت در صد اکسیژن ازکاستن مجموع نسبتهای سایر عناصر از عدد ۱۰۰ بدست‌می‌آید . بنابراین مسئلهٔ فوق به‌سه مسئلهٔ بسیار ساده تجزیه می‌شود .

الف) ـ درصد کربن ـ تمامی کربن مادهٔ آلی به‌گاز کربنیك تبدیل شده‌است . چون ۱۲ گرم کربن در اثرسوختن ۴۴ گرم CO_2 تولید می کند پس تشکیل ۰/۶۱۶ گرم گاز کربنیك وجود $\frac{12}{44}\times 0/616$ گرم کربن رادر جسم نشان می‌دهد . این مقدار کربن در ۰/۴۱۳ گرم از مادهٔ آلی‌وجود دارد مقدار درصدکربن برابر است با :

$$\frac{12\times 0/616\times 100}{44\times 0/413}=\text{گرم } 40/68$$

ب) درصد ئیدرژن ـ تمامی ئیدرژن مادهٔ آلی به‌آب تبدیل شده است . چون ۲ گرم ئیدرژن تولید ۱۸ گرم آب می‌نماید . پس تشکیل ۰/۳۱۵ گرم آب وجود $\frac{2}{18}\times 0/315$ گرم ئیدرژن را در ۰/۴۱۳ گرم جسم ثابت می‌کند و مقدار آن در ۱۰۰ گرم می‌شود :

$$\frac{2\times 0/315\times 100}{18\times 0/413}=\text{گرم } 8/47$$

ج) در صد ازت ـ حجم ازت $67/2\ cm^3$ و جرم آن N_2 $\frac{67/2}{22400}$ یا $\frac{67/2\times 28}{22400}$ گرم در ۰/۳۵۴ گرم‌جسم

است . بنابراین مقدار درصدآن برابرخواهد بود با :

$$\frac{۶۷/۲ \times ۲۸ \times ۱۰۰}{۲۲۴۰۰ \times ۰/۳۵۴} = ۲۳/۷۳ \text{ گرم}$$

باقیماندهٔ از ۱۰۰ گرم :

$$۱۰۰ - (۴۰/۶۸ + ۸/۴۷ + ۲۳/۷۳) = ۲۷/۱۲$$

معرف نسبت اکسیژن است .

تبصره ـ تعیین نسبت در صد در مخلوط وجسم مرکب خالص به یك طریق انجام می‌شود و نسبتهای ساده‌ای که بین اتمهای عناصر درجسم مرکب خالص برقرار است فقط در تعیین فرمول جسم دخالت دارد .

مسائلی که در بند ۵۳ و ذیلا بررسی خواهد شد این مطلب را نشان می‌دهد .

حالت دوم

حالت کلی از مسائل بند ۳۱

۳۴ ـ مثال ۱ـ ۷/۷۵ گرم آلیاژ مس‌ونقره را تحت اثر مقدار زیادی اسید سولفوریك غلیظ و گرم قرار می‌دهیم . تمامی گاز حاصل‌رادر مقدار زیادی‌آب کلر وارد می‌کنیم. سپس محلول حاصل را بامقدارزیادی کلرور باریوم می‌آمیزیم .رسوب حاصل‌پس‌از شستشو و خشك کردن ۱۱/۶۵ گرم‌جرم‌دارد. نسبت درصد دو فلز رادر آلیاژ پیداکنید .

$Ag = ۱۰۸$ و $Cu = ۶۳/۵$

حل ـ اگر تعداد اتمهای نقره‌و مس رادر ۷/۷۵ گرم آلیاژ با x و y نشان دهیم . برای یافتن x و y دو معادله لازم است .

الف) طبق فرض‌مسئله جرم‌آلیاژ برابر است با :

$$۱۰۸x + ۶۳/۵y = ۷/۷۵$$

ب) جرم رسوب سولفات باریوم حاصل را نیز می‌توان برحسب x و y این طور بیان نمود :

در فرمول واکنش اسید سولفوریك بر فلز نقره طبق معادلهٔ زیر :

$$۲SO_۴H_۲ + ۲Ag \longrightarrow SO_۴Ag_۲ + SO_۲ + ۲H_۲O$$

۲ اتم‌نقره دخالت دارد. وچون تعداد اتمهای‌نقره‌شرکت کننده درواکنش را x در نظر گرفتیم بنابراین باید ضریب فرمول را $\frac{x}{۲}$ قرار داد .

$$\frac{x}{۲}(۲SO_۴H_۲ + ۲Ag \longrightarrow SO_۴Ag_۲ + SO_۲ + ۲H_۲O) \quad (۱)$$

با استدلال مشابهی درمورد مس‌چنین می‌شود :

$$y(۲SO_۴H_۲ + Cu \longrightarrow SO_۴Cu + SO_۲ + ۲H_۲O) \quad (۲)$$

$SO_۲$ حاصل از واکنش (۱) برابر $\frac{x}{۲}$ وازواکنش (۲) برابر y ملکول می‌باشد . بنابراین مجموعاً تعداد ملکولهای $SO_۲$ مساوی $(\frac{x}{۲}+y)$ خواهد شدکه از واردکردن آن‌در آب کلر $(\frac{x}{۲}+y)$ ملکول اسید سولفوریك و در نتیجه $(\frac{x}{۲}+y)$ ملکول سولفات‌باریوم تولید می‌شود وچون ملکول گرم سولفات‌باریوم ۲۳۳ گرم است خواهیم داشت :

$$(\frac{x}{۲}+y)۲۳۳ = ۱۱/۶۵$$

یا

$$\frac{x}{۲}+y = \frac{۵}{۱۰۰}$$

از حل دو معادلهٔ (الف) و (ب) :

$$x = \frac{۶}{۱۰۰} \text{ و } y = \frac{۲}{۱۰۰}$$

بدست می‌آید .

بنابراین جرم نقره و مس در آلیاژ به ترتیب ۶/۴۸ و ۱/۲۷ گرم است .

۳۵ـ مثال II (مخلوط چند گاز) $۱۰^{cm^۳}$ مخلوط ئیدرژن ، متان واتیلن را با $۲۰^{cm^۳}$ اکسیژن در آبسنجی واردکرده درآن جرقهٔ الکتریك برقرار می‌کنیم . پس‌ازجرقه و انفجار و سرد شدن $۱۲^{cm^۳}$ گاز باقی می‌ماندکه $۹^{c.c}$ آن قابل جذب پتاس و بقیه جذب فسفر می‌شود ، نسبت درصد حجمی گازها را در مخلوط پیداکنید .

هرگاه حجم ئیدرژن ، متان واتیلن را در $۱۰^{c.c}$ مخلوط به‌ترتیب x و y و z سانتیمتر مکعب فرض کنیم‌چون‌طبق بند ۱۹ به‌ازاء هر ملکول گاز می‌توان یك‌حجم از آنراقرار داد . فرمول واکنشهای سوختن گازها بادر نظر گرفتن‌ضرایب ملکولی چنین خواهد شد :

$$x(H_۲ + \frac{۱}{۲}O_۲ \longrightarrow H_۲O) \quad \text{(الف)}$$

$$y(CH_۴ + ۲O_۲ \longrightarrow CO_۲ + ۲H_۲O) \quad \text{(ب)}$$

$$z(C_۲H_۲ + ۳O_۲ \longrightarrow ۲CO_۲ + ۲H_۲O) \quad \text{(ج)}$$

برای حل این مسئله سه معادله لازم است که باتوجه به معلومات آن می‌توان نوشت :

۱ـ حجم‌مجموع گازها : $x+y+z=۱۰$

۲ـ حجم گاز کربنیك حاصل ازاحتراق ($۹^{cm^۳}$) برابر مجموع گاز کربنیك تولید شده ازمعادلات (ب) و (ج)می‌باشد.

$$y+۲z=۹$$

۳ ـ حجم اکسیژن مصرف‌شده $۱۷^{cm^۳}$ می‌باشدزیرا از $۲۰^{cm^۳}$ اکسیژن اولیه $۳^{cm^۳}$ آن باقیمانده است وطبق معادلات واکنشهای فوق خواهیم داشت :

$$\frac{x}{۲}+۲y+۳z=۱۷$$

از حل دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی نتیجه‌می‌شود که :

$$x=۴ \text{ و } y=۳ \text{ و } z=۳$$

است . از اینجا نسبت درصدحجمی گاز خواهد شد

ئیدرژن ۴۰٪ ، متان ۳۰٪ ، اتیلن ۳۰٪

تبصره ـ می‌توان برای نقصان حجم یعنی :

$$۳۰-۱۲=۱۸$$

که تابع مجهولات مسئله است نیز معادله‌ای تنظیم‌کرد .

نقصان حجم‌برای واکنش (الف) $x+\frac{x}{۲}=\frac{۳x}{۲}$ ، برای واکنش (ب) $y+۲y-y=۲y$ و برای واکنش (ج) : $z+۳z-۲z=۲z$ سانتیمتر مکعب است بنابراین معادلهٔ چهارم بصورت زیر در می‌آید :

$$\frac{۳}{۲}x+۲y+۲z=۱۸$$

از این معادله‌برای تعیین درستی جوابها می‌توان‌استفاده کرد .

حالتی که مسئله قابل تجزیه به چند مسئله ساده‌تر است (بند ۳۲)

۳۶ـمثال۱ـ از احتراق‌کامل مخلوطی ازاکسیدکربن و متان ۰/۲۲ گرم انیدریدکربنیك و ۰/۱۰۸ گرم آب‌حاصل شده است نسبت حجمی مخلوط را پیداکنید .

حل ـ محصول احتراق اکسیدکربن ، گاز $CO_۲$ (واکنش۱) و محصول احتراق $CH_۴$ آب و گازکربنیك است (واکنش۲) نظر به‌اینکه آب منحصراً از احتراق متان حاصل می‌شود از روی مقدار آن مستقیماً می‌توان مقدار متان را محاسبه‌کرد .

۱۰۸ میلی‌گرم آب یعنی $\frac{۱۰۸}{۱۸}=۶$ میلی ملکول

آن از احتراق۳ میلی ملکول متان حاصل‌می‌شود علاوه براین ۳ میلی ملکول گازکربنیك نیز تولید می‌کنند .

۲۲۰ میلی‌گرم گازکربنیك معرف $\frac{۲۲۰}{۴۴}=۵$ میلی ملکول ازآنست . از این تعداد ملکول ۳ میلی ملکول مربوط به متان و ۲ میلی ملکول دیگر محصول احتراق همین تعداد ملکول ازاکسیدکربن می‌باشد . بنابراین حجم ۳ میلی‌ملکول متان $۶۷/۲^{cm^۳}$ و حجم ۲ میلی ملکول اکسید کربن $۴۴/۸^{cm^۳}$ در مخلوط می‌باشد .

۳۷ ـ مثال II ـ گاز آمونیاك حاصل از یك واکنش شیمیائی را در $۵۰۰^{cm^۳}$ محلول نرمال اسید سولفوریك وارد می‌سازیم . آزمایش‌نمونه‌ای از محصول حاصل نشان می‌دهدکه $۲۰^{cm^۳}$ آن بوسیلهٔ $۸۰^{cm^۳}$ از محلول دسی نرمال سود خنثی می‌شود . جرم آمونیاك را محاسبه‌کنید .

حل ـ $۸۰^{cm^۳}$ محلول دسی‌نرمال سود $۸^{cm^۳}$ محلول نرمال اسید راخنثی می‌سازد بنابراین $\frac{۱۲}{۲۰}$ اسید موجوددرمحلول یعنی‌از $۲۰^{cm^۳}$ اسید $۱۲^{cm^۳}$ آن بوسیلهٔ آمونیاك خنثی‌شده است و حجم اسید خنثی شده بوسیلهٔ آمونیاك :

$$\frac{۱۲}{۲۰}\times ۵۰۰=۳۰۰^{cm^۳}$$

نرمال‌خواهدشد که شامل $\frac{۳۰۰}{۱۰۰۰}$ اتم ئیدرژن اسیدی است .

از اینجا مقدار آمونیاك $\frac{۳۰۰}{۱۰۰۰}$ ملکول یعنی :

$$\frac{۳}{۱۰}\times ۱۷=۵/۱$$

گرم خواهد شد .

سرگرمیهای ریاضی

جدول اعداد

طرح از : چنگیز ارومیه دانش آموز دبیرستان فردوسی رضائیه

افقی : ۱ ـ جذرش از متمم حسابیش ده واحد کم دارد . ۲ـ مساحت مثلثی که مختصات سه رأس آن عبارتست از :
(۷ـ۵) و (۴و۵) و (۸و۵)
۴ ـ مقدار S از رابطهٔ زیر :

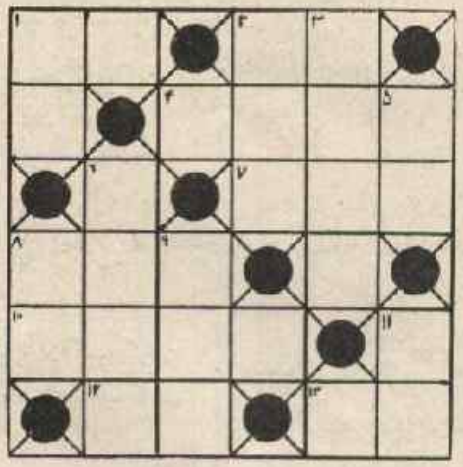
$$S=(1+\sqrt{2})^{10}+(1-\sqrt{2})^{10}$$

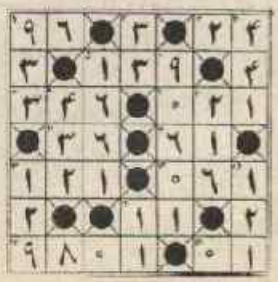
۷ـ تعداد نیمسازهای زاویه‌هایی که از ۲۲ خط متقارب پدید می‌آید.
۸ـ توان هشتم یك عدد .
۱۰ ـ تفاضل زیر در مبنای ۷ :

$$(5412)_7-(465)_7$$

۱۲ ـ مقلوبش مربع کامل است .
۱۳ ـ باقیماندهٔ تقسیم آن بر عددهای ۱۰ و ۹ به ترتیب برابر با ۱ و ۱ ـ است.

قائم : ۱ـ یکی از رقمهایش ریشهٔ سوم رقم دیگری است .
۲ ـ عددی است متقارن
۳ ـ حاصل جمع آن با مجموع رقمهایش برابر است با ۴۲۸۵
۵ ـ دو برابر یك‌عدد اول .۶ ـ تکرار یك عدد دو رقمی .
۸ـ اندازهٔ مساحت مثلثی که شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی آن برابرند با ۱۲ و ۶ و ۴ .
۹ـ حجم هرم مربع‌القاعده‌ای که ارتفاع آن ۵۱ و ضلع قاعده‌اش ۶ واحد باشد.
۱۱ ـ نصف مقلوب عدد ۸ قائم .





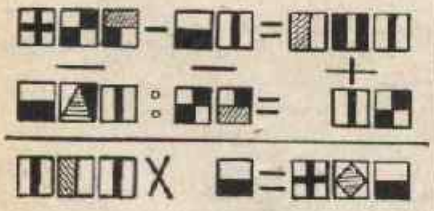
حل جدول شمارهٔ ۳۶ گذشته

پاسخ «تعیین ارقام»

$$۴\times۴۷۴۳=۹\times۲۱۰۸$$
$$۴\times۶۱۶۵=۹\times۲۷۴۰$$
$$۴\times۶۸۶۷=۹\times۳۰۵۲$$
$$۴\times۵۸۵۹=۹\times۲۶۰۴$$

سرگرمی فکری

طرح از : غلامرضا فرزین
دانشجوی دانشکدهٔ افسری



هر مربع نمایندهٔ یك رقم و مربعهای متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند. باتوجه به علامتهای بین اعداد ، ارقام را مشخص کنید

پاسخ «بهترین استراتژی»

بازیکن اول می‌تواند GH را رسم کند . دومی اگر مثلا JK را رسم کرد در این صورت اولی بارسم KO و LP دو مربع ساخته بعد LH را رسم می‌کند . دومی با رسم GK دومربع بدست می‌آورد و بعد مجبور است که دو نقطه را به‌هم‌وصل کند که در هرصورت به اولی اجازه خواهد داد پنج مربع باقیمانده را بدست آورد . برداولی رویهم هفت مربع خواهد شد.

اما اگر بعد از آنکه اولی GH را رسم کرد دومی CG ، BF یا مثلا EF را رسم کرد در این‌صورت پنج‌مربع را به‌رقیب داده اما مطمئن است که چهار مربع بقیه را بدست خواهد آورد .



نویسندگان: ژ. گامو
م. استرن

ترجمه: از فرانسه

نیکلای جوان

۱. معمای دومینوها

نیکلا که تازه قدم به‌دورهٔ جوانی گذاشته بود، بسیارمایل بود به عضویت «باشگاه» مردان شطرنج باز» پذیرفته شود. اما اعضای قدیمی باشگاه بادرخواست وی مخالفت می‌کردند؛ آنان فقط یك دلیل می‌آوردند و آن اینکه نیکلا هنوز بسیار جوان است و با این سن کم برای درك روشهای منطقی آمادگی نداشته و نمی‌تواند فکری استدلالی داشته باشد، دلیل خود را منطقی می‌دانستند وغیر ازآن هم حاضر نبودند حرف دیگری‌را گوش کنند.

باوجود آنکه نیکلا در بازی شطرنج بسیار ماهر بود اما آقایان اعضای باشگاه در عقیدهٔ خود پابرجا بودند و هیچ گذشت هم نداشتند. نیکلا معمولا به باشگاه می‌رفت اما در آنجا فقط می‌توانست بازی دیگران را تماشا کند. یك‌روزعصر، طبق معمول به تماشای بازی دیگران مشغول بود، محجوبانه تقاضاکرد که باوی هم یك دست بازی کنند، اما بزرگترها با ریشخند بهوی نصیحت کردندکه برود خودش را بادومینوها سرگرم کند ودر این بازی مهارت پیداکندکه با سن وی‌بیشتر جور می‌آید.

نیکلا اظهار داشت:

ـ اگر عقیدهٔ شما این است که من هنوز برای بازی شطرنج آمادگی ندارم، با بازی بادومینوها هم که چنین آمادگی بدست نخواهم آورد!؟

پاسخی‌که به وی دادند چنین بود:

ـ برو جانم، برو، بادومینوها بازی کن. این بازی خیلی خوب می‌تواند تورا سرگرم سازد.

نیکلا به‌گوشه‌ای رفت وخودش را با دومینوها مشغول ساخت. بعد از مدتی خطاب به بزرگترها اظهار داشت که یك معمای جالب طرح‌کرده است‌که هم به دومینوها مربوط است‌و هم به‌شطرنج، اگر مایل باشند این معما را مطرح کند.

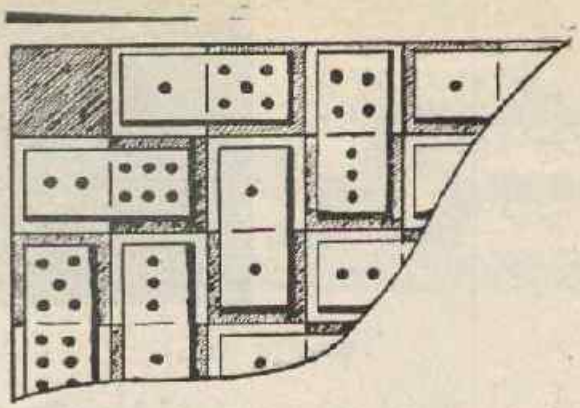
اعضای قدیمی باشگاه باحالتی که‌نشان می‌دادکه ملاحظهٔ حال وی را دارند نشان دادندکه معمایش را گوش می‌کنند و نیکلاچنین توضیح داد:

ـ می‌دانیم‌که صفحهٔ شطرنج به‌شکل مربع ۸×۸ بوده رویهم شامل ۶۴ خانهٔ مربع شکل می‌باشد. دومینو به شکل مستطیل ۱×۲ است و شامل ۲ خانه می‌باشد. فرض می‌کنیم که هرخانهٔ صفحهٔ شطرنج معادل باشد با یك خانهٔ دومینو یعنی هردومینو درست دوخانهٔ متوالی شطرنج را بپوشاند. چنانچه فقط ۳۱ دومینو در اختیار داشته باشیم به‌هرترتیب‌که آنها را روی صفحهٔ شطرنج قرار دهیم، ۶۲ خانهٔ شطرنج پوشانیده شده و۲ خانهٔ آن خالی خواهد ماند.

مسئله از این قرار است که این ۳۱ دومینو را چنان قرار دهیدکه دوخانه‌ای‌که خالی می‌مانددوخانهٔ دوگوش‌مقابل (انتهای یك قطر) از صفحهٔ شطرنج باشد. گمان می‌کنم‌که این مسئله یکی ازمسائل شهودی عینی است، البته آقایان بیشتر از من دراین باره اطلاعات دارند.

بزرگترها ابتداکمی یکدیگر را نگاه‌کردند، بعدکم‌کم متوجه شدندکه ممکن است مسئلهٔ جالبی باشد و شروع کردند که عملاآزمایش کنند. آنان خانهٔ گوشهٔ‌بالای‌صفحهٔ شطرنج را خالی نگاه می‌داشتند و بعد دومینوها را به ترتیبهای مختلف روی بقیهٔ خانه‌ها قرار می‌دادند. آن شب وچند روز بعد را به تمرین و آزمایش گذراندند. بعد از چند روز به‌نیکلا اطلاع دادندکه به حل مسئله موفق شده‌اند: مسئله به ترتیب گفته‌شده غیرممکن است.

نیکلا خواست تا دربارهٔ غیر ممکن بودن مسئله توضیح



بیشتری بدهند . بزرگترها فقط اظهار داشتند چونکه عملا نتوانسته‌اند به نتیجه برسند. نیکلا گفت که اگر ممکن است دلیل قانع کننده‌ای ارائه دهند و بزرگترها گفتند که غیر از این چیزی نمی‌دانند. اگر دلیلی هست خود نیکلا آن راشرح دهد. نیکلا چنین توضیح داد:

ـ مسئله را باید مستدلا بررسی کرد . خانه های صفحهٔ شطرنج یك در میان سیاه و سفید است . هیچ دوخانهٔ متوالی‌از آن‌هم‌رنگ نیستند. هردومینو فقط دوخانهٔ شطرنج رامی‌پوشاند که این دوخانه، یکی سیاه ودیگری سفید خواهدبود. بنابراین دوخانه‌ای‌که خالی می‌مانند بارنگهای مختلف هستند. تمام‌خانه های واقع برهرقطر صفحهٔ شطرنج ازیك رنگ هستندودوخانهٔ واقع در دوگوش مقابل هم همرنگ می‌باشند . پس غیر ممکن خواهد بود که ۳۱ دومینو را روی صفحهٔ شطرنج چنان قرار دادکه دوخانه واقع در دوگوش مقابل خالی بماند. این‌مسئله نمونه‌ای از مسائلی است‌که در آنها نکته‌ای نهفته است و در صورت مسئله ظاهر نمی‌شود اما توجه به‌همین نکته تعیین‌جواب را به سادگی ممکن می‌سازد . در عمل می‌توان روی صفحه‌ای کاغذ یك مربع به ضلع ۸ رسم‌کرده‌آنرا به۶۴ خانه تقسیم‌کرد واین۶۴خانه را به دوگروه تقسیم‌کرد ، که می‌توانیم آنها را گروه مربعهای سفید وگروه مربعهای سیاه نامگذاری‌کنیم، در این صورت حل‌مسئله‌به سادگی و آشکارا میسر خواهد بود.

←

x for which the corresponding A exsits

b) If $A'=\{a', b', c', d'\}$, what condition must a' , b' , c' , d' satisfy for an A to exsit ?

Solution: Part a. From the given data we have

$2=|1-b|$; $9=|b-c|$;

$4=|c-d|$; $x=|d-1|$

Therefore :

$\pm 2=1-b$

$\pm 9=b-c$

$\pm 4=c-d$

$\pm x=d-1$

Adding , we obtain : $\pm 2\pm 9\pm 4\pm x=0$.

If we now choose signs so that x is positive , we find : $x\in\{3,7,11,15\}$.

Part b . we have , as in part a:

$\pm a'=1-b$

$\pm b'=b-c$

$\pm c'=c-d$

$\pm d'=d-1$

Adding we obtain the required conditions :

$\pm a'\pm b'\pm c'\pm d'=0$

And by definition a' , b' , c' , d' are positive

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(The Mathematics Student Journal . Vol . 14 . No . 3)

Problem 11 : if the measures of the sides of a triangle are consecutive numbers, and the measure of the greatest angle is twice that of the smallest angle, find the measures of the sides of the triangle .

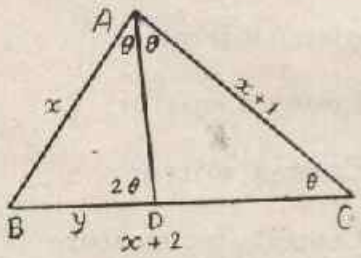
Solution : In Fig . let $m\angle C=\theta$, and $m\angle A=2\theta$. Also let $AB=x$. $AC=x+1$ $BC=x+2$, and $BD=y$. If AD is the bisector of $\angle A$, then $m\angle BAD=m\angle DAC=\theta$ and $m\angle BDA=2\theta$. From these we deduce

First : , AD divides BC into segments with lengths proportional to AB and AC Thus $AB/BD=AC/DC$, or

1) $x/y=(x+1)/(x+2-y)$

Second: $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, so that

(2) $x/y=(x+2)/x$



From (1) and (2) , we obtain $(x+2)/x=(x+1)/(x+2-y)$ If we replace y by $x^2/(x+2)$ (from (2)) , the result reduces to :

$$x^2-3x-4=0$$

of the two roots , 4 and -1 , only $x=4$ is acceptable . Thus $x=4$, $x+1=5$, $x+2=6$ are the required length measures.

Problem 12: A circle whose center is $P(a,b)$, $(a\neq 0 , b\neq 0)$, passes through the origin O . Without the use of slopes or calculus find the coordinates of the intersection Q of the tangents to the circle at the $x-$ intercepts O and A

Solution : (Editor – in this solution P is assumed to be in the first quadrant; sea fig) . Since $\triangle OPA$ and $\triangle OQA$ are isosceles, PQ is the perpendicular bisector of OA . Hence the abscissa of $Q=-OX=a$.

$\triangle POQ$ is a right triangle with hypotenuse QP . Therefore

$XP/OX=OX/QX$

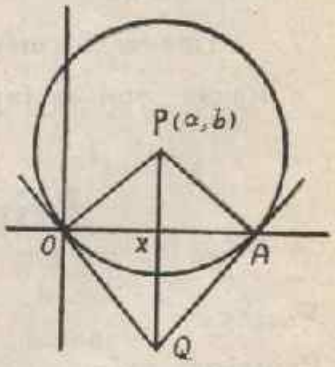
or

$b/a=a/(-XQ)$

Thus

$XQ=-a^2/b$

and the coordinates of Q are $(a,-a^2/b)$



Problem 13 : If b , c , d are integers and $A=\{1, b, c, d\}$, we define A' to be equal to $\{a', b', c', d'\}$ in which $a'=|1-b|$, $b'=|b-c|$, $c'=|c-d|$, and $d'=|d-1|$. For example if $A=\{1,5,-2,0\}$, then $A'=\{4,7,2,1\}$.

a) If $A'=\{2, 9, 4, x\}$, find all values of

→

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

۷ ـ نور : Light

Reflection	انعکاس
Diffusion	انتشار
Normal	خط‌عمود بر یک‌سطح
Angle of incidence	زاویهٔ تابش
Angle of reflection	زاویهٔ انعکاس
Image	تصویر
Virtual	مجازی
Erect	مستقیم
Inverted	معکوس

Practice Your Reading

The angles of incidence and reflection are equal , and , they lie in the same plane .

Images formed by plane mirrors are erect , virtual, the same size as the object , and as far behind the mirror as the object is in front .

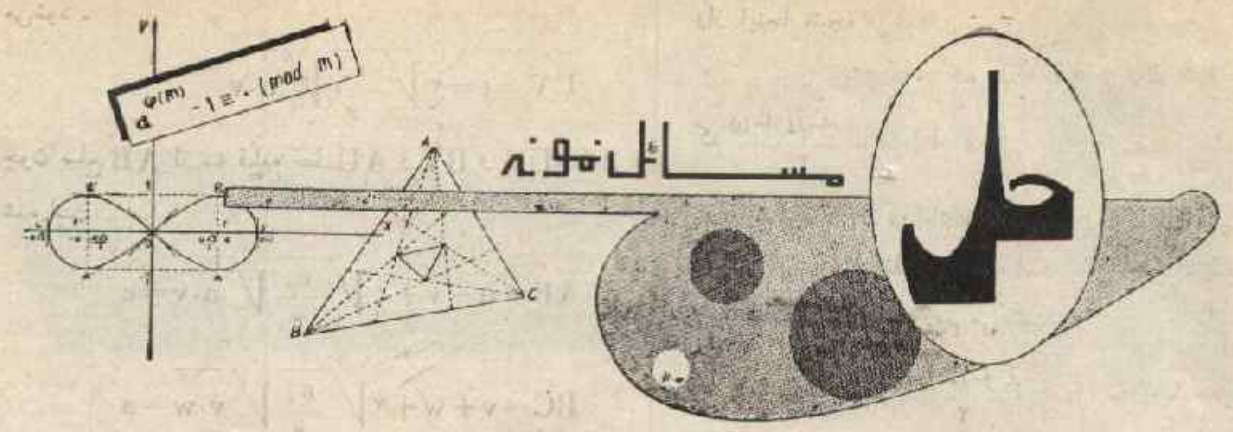
۸ ـ آینه‌ها : Mirrors

plane mirror	آینهٔ مسطح
Concave mirror	آینهٔ مقعر
Convex mirror	آینهٔ محدب
Center of curvature	مرکز انحناء
Vertex	رأس
Principal axix	محوراصلی
Diverging rays	اشعهٔ متباعد
Converging rays	اشعهٔ متقارب
Focus	کانون

Problems

In order to produce an image two - thirds the size of an object which is placed 10 cm . from a concave mirror , what focal length mirror is needed?

An object is placed 30 cm . from a concave mirror whose focal length is 6 cm . where will the image be located ?



مسألهٔ مالفاتی

ترجمهٔ : هراج کاراپتیان

۴۱۱۵ـ در مثلث مفروض سه دایره چنان رسم کنید که هر کدام بردو دایرهٔ دیگر و بردوضلع مثلث مماس باشند .

این مسئله به وسیلهٔ ریاضیدان ایتالیائی ، **مالفاتی** (Malfatti ۱۸۰۷ ـ ۱۷۳۱) درسال ۱۸۰۳ طرح شده و جزو مسائل مشهور ریاضیات متوسطه است .

حل ـ مثلث ABC به‌اضلاع a و b و c ، به محیط 2S وزوایای α و β و γ مفروض‌است. دوایرمالفاتی را(که‌براضلاع زوایای α و β و γ مماس هستند) به ترتیب به z و z′ و z″ و مراکز این دوایر را به P و Q و R و شعاعهای آنها را به p و q و r وطول مماسهای مرسوم ازرأسهای A و B و C بردوایر P و Q و R را به u و v و w نمایش می‌دهیم .

اگر K دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشدومرکز آن J و شعاعش d و طول مماسهای مرسوم از رأسهای A و B و C براین دایره a_1 و b_1 و c_1 باشد از سه معادلهٔ

$$a_1+b_1=c \text{ و } c_1+a_1=b \text{ و } b_1+c_1=a$$

مقادیر زیر نتیجه می‌شود :

$$c_1=s-c \text{ و } b_1=s-b \text{ و } a_1=s-a$$

چون P و J روی نیمساز زاویهٔ α قرار دارند ، بنابراین

$$\frac{p}{d}=\frac{u}{a_1} \text{ یا } \Longrightarrow p=\frac{d}{a_1}u$$

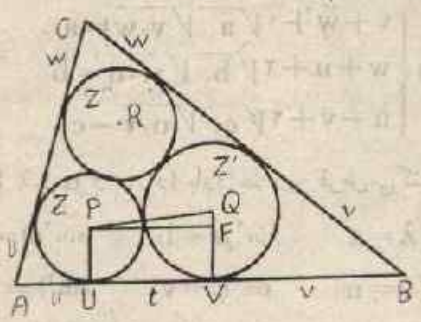
وبه همین ترتیب

$$q=\frac{d}{b_1}u$$

نقاط تماس AB را با دوایر z و z′ را به U و V نمایش می‌دهیم ومقدار UV = t را محاسبه می‌کنیم .

چون PF ، عمود وارد بر QV از P برابر t است،

از مثلث قائم‌الزاویهٔ PQF داریم که :



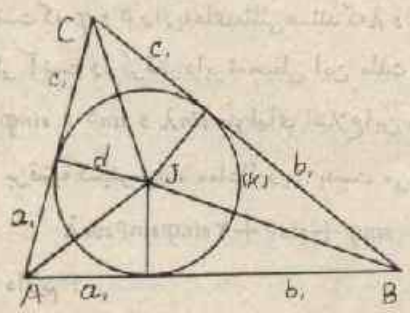
$$PQ^2=PF^2+FQ^2 \Longrightarrow (p+q)^2=t^2+(p-q)^2$$

وبنابراین :

$$UV=t=2\sqrt{pq}$$

حال اگر مقادیرپیداشدهٔ بالا رابرای p و q در فرمول‌اخیر قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$t=2\sqrt{u\cdot v}\sqrt{\frac{d^2}{a_1b_1}}$$



اما می‌دانیم که $d^2=\frac{a_1b_1c_1}{s}$ از اینجا مقدار t چنین

می‌شود .

$$UV=t=2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{u\cdot v}$$

چون ضلع AB از سه قطعه خط AU و BV و UV تشکیل شده است .

$$AB=u+v+2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{u\cdot v}=c$$

$$BC=v+w+2\sqrt{\frac{a_1}{s}}\sqrt{v\cdot w}=a$$

$$CA=u+w+2\sqrt{\frac{b_1}{s}}\sqrt{wu}=b$$

اگر نصف محیط را واحد فرض کنیم ، معادلات بالا چنین می‌شود :

$$(I)\begin{cases}v+w+2\sqrt{a_1}\sqrt{v\cdot w}=a\\ w+u+2\sqrt{b_1}\sqrt{w\cdot u}=b\\ u+v+2\sqrt{c_1}\sqrt{u\cdot v}=c\end{cases}$$

زوایای حادهٔ λ و μ و ... را باروابط زیر فرض می‌کنیم :

$$\sin^2\lambda=a \qquad \sin^2\mu=b \qquad \sin^2\omega=c$$

$$\sin^2\psi=u \qquad \sin^2\varphi=v \qquad \sin^2\rho=w$$

ونیز (چون $s=1$ و $a+a_1=1$ و $b+b_1=1$ و $c+c_1=1$) .

$$\cos^2\lambda=a_1 \qquad \cos^2\mu=b_1 \qquad \cos^2\omega=c_1$$

وبنابراین معادلات (I) چنین می‌شود :

$$(II)\begin{cases}\sin^2\varphi+\sin^2\rho+2\sin\varphi\sin\rho\cos\lambda=\sin^2\lambda\\ \sin^2\rho+\sin^2\psi+2\sin\rho\sin\psi\cos\mu=\sin^2\mu\\ \sin^2\psi+\sin^2\varphi+2\sin\psi\sin\varphi\cos\omega=\sin^2\omega\end{cases}$$

برای مثال ، معادلهٔ اول را در نظر می‌گیریم ، رابطهٔ $\varphi+\rho=\lambda$ معرف آنست که φ و ρ زاویه‌های مثلثی هستند که λ زاویهٔ خارجی رأس دیگر آنست و اگر قطر دایرهٔ محیطی این مثلث واحد اختیار شده باشد $\sin\varphi$ ، $\sin\rho$ و $\sin\lambda$ طولهای اضلاع این مثلث خواهند بود وبنا برقضیهٔ کسینوسها ، معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\sin^2\lambda=\sin\varphi+\sin\rho+2\sin\varphi\sin\rho\cos\lambda$$

از (II) داریم :

$$\psi+\varphi=\omega \text{ و } \rho+\psi=\mu \text{ ، } \varphi+\rho=\lambda$$

واز اینجا نتیجه می‌شود .

$$\psi=h-\lambda \text{ و } \varphi=h-\mu \text{ ، } \rho=h-\omega$$

که $h=\frac{\lambda+\mu+\omega}{2}$ است .

ترسیم : ۱ـ زوایای λ و μ و ω راکه مربع سینوسهای آنها برابر اضلاع مثلث داده‌شده است (به‌فرض اینکه نصف‌محیط مثلث واحد فرض شود) رسم می‌کنیم .

۲ ـ مقدار ($h=\frac{\lambda+\mu+\omega}{2}$) سه‌زاویهٔ جدید :

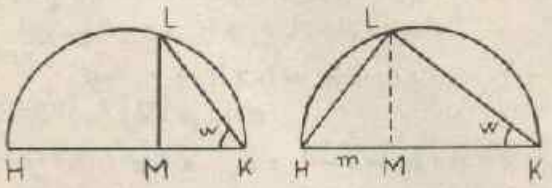
$\lambda-h=\psi$ و $\mu-h=\varphi$ و $\omega-h=\rho$ را رسم‌می‌کنیم،

۳ـ مربع سینوسهای‌سه زاویهٔ ψ و φ و ρ را می‌کشیم.این خطوط‌مماسهای‌مرسوم از سه رأس مثلث بردوایر مالفاتی‌هستند.

توجه ! اگر بخواهیم مربع سینوس $m=\sin^2 w$ را برای زاویهٔ معلوم w رسم کنیم ، یابرای کشیدن زاویهٔ w(که مربع سینوس آن برابر m است) به‌ازاء قطعه خط معلوم m، بدین طریق عمل می‌کنیم ،

نیمدایره‌ای به قطر $HK=1$ رسم می‌کنیم .زاویهٔ معلوم w را از K جدا می‌کنیم واز محل‌برخورد امتداد این خط‌با دایره ، یعنی L عمودی بر HK فرود می‌آوریم ، در نتیجه $HM=m=\sin^2 w$ (M پای عمود است).

برعکس اگر m داده شده باشد ویخواهیم w راپیدا کنیم $HM=m$ را روی HK جدا می‌کنیم ودر نقطهٔ M عمودی بر HK اخراج می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره رادرL قطع کند . LK را وصل می‌کنیم ، درنتیجه $HKL=w$ می‌شود.



زیرا از مثلث قائم‌الزاویهٔ HML داریم :

$$m=HM=HL\cdot\sin HLM=HL\cdot\sin w$$

واز مثلث قائم‌الزاویهٔ HKL :

$$HL=HK\cdot\sin w=\sin w$$

در نتیجه : $m=\sin^2 w$.

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

چند مسئله از مسائل امتحانات اتحاد جماهیر شوروی

فرستنده: **مهدادتقوی** دبیرستان خوارزمی

۴۱۱۶ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۶ ، ۱۹۶۱

معادلهٔ زیر راحل کنید :

$$(۳-x)^۴+(۲-x)^۴=(۵-۲x)^۴$$

۴۱۱۷ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۶

معادلهٔ زیر (معادلهٔ دکارت) را حل کنید :

$$x^۴-۴x^۳-۱۹x^۲+۱۰۶x-۱۲۰=۰$$

۴۱۱۸ـ کنکور دانشکدهٔ مهندسی فیزیک مسکو ۱۹۵۶

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_{\sin x}{}^{۲}\times\log_{\sin^{۲}x}{}^{۳}=۱$$

۴۱۱۹ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۱

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^۳x+\sin^۳۲x+\sin^۳۳x=(\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x)^۳$$

۴۱۲۰ ـ المپیاد ریاضی ۱۹۵۸

مقدار عددی عبارت زیررا بدست آورید :

$$P=\sin^۴\frac{\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۳\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۵\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۷\pi}{۱۶}$$

۴۱۲۱ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۰

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^{۱۰}x+\cos^{۱۰}x=\frac{۲۹}{۱۶}\cos^۴۲x$$

۴۱۲۲ ـفرستنده : **پرویز خواجه‌خلیلی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

مطلوبست محاسبهٔ a و b بطوری‌که جندجمله‌ایهای

$x^۳+ax^۲+۱۱x+۶$ و $x^۳+bx^۲+۱۴x+۸$

دارای عامل مشترکی به‌صورت $x^۲+px+q$ باشند،

۴۱۲۳ ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات» آمریکا

ثابت کنید که عدد زیر اصم است :

$$\sqrt{۱۹۶۵^{۱۹۶۶}+۱۹۶۸^{۱۹۶۷}}$$

۴۱۲۴ ـ فرستنده : **اسمعیل بابلیان** دانشجوی دانشسرای عالی .

سهمی به‌معادلهٔ $y^۲=۲px$ مفروض است . ثابت کنید محور اصلی‌هردو دایره‌ای‌که قطر آنها یک‌وتر کانونی سهمی‌باشد (وتری‌که‌ازکانون می گذرد) از رأس سهمی‌می گذرد .

۴۱۲۵ـ از**محمدصادق نهاوندی**، دبیرستان امیرکبیر زنجان .

مثلث متساوی‌الساقین ABC به‌رأس A مفروض است . اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باضلع BC ، M نقطه‌ای‌از این دایره ، r شعاع آن‌و H تصویر M بر BC باشد ثابت کنید که :

$$MD^۲=۲r\cdot MH$$

و درحالتی‌که r و MH اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ به‌وتر MD باشند مقدار $r^۲$ شعاع دایرهٔ‌محاطی داخلی این مثلث را برحسب r حساب کنید .

۴۱۲۶ ـ از **سید حسن نبوی** دبیرستان‌هدف۱

مثلث ABC که درآن اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰درجه است مفروض است . برضلعهای AB و BC و CA در جهت از A به B و از B به C واز C به A نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ و $A_۱$ و $A_۲$ و $B_۱$ و $B_۲$ چنان انتخاب می‌کنیم که‌هرضلع‌مثلث به سه‌قسمت متساوی تقسیم‌شود . در داخل مثلث مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع $C_۱C_۲C_۳$ و $B_۱B_۲B_۳$ را می‌سازیم . ثابت کنید که

هر یك از زاویه‌های BC_2A_2 و CB_2A_1 قائمه می‌باشند .

۴۱۲۷ ـ ترجمه از فرانسه .

اگر α و β دو زاویهٔ حاده و متمایز باشند ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{tg\alpha+tg\beta}{2}$$

۴۱۲۸ ـ ترجمه از فرانسه

فرض می‌کنیم که معادلهٔ $f(x)=0$ از درجهٔ n کامل بوده و دارای n ریشهٔ متمایز و مخالف صفر x_1 و x_2 و ... x_n باشد .

۱) هریك از عبارتهای زیر را حساب کنید :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \quad , \quad \frac{f''(x)}{f(x)} - \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2$$

۲) بااستفاده از قسمت (۱) حاصل هریك از سه‌مجموع زیر را حساب کنید :

$$S=\Sigma\frac{1}{x_ix_j} \quad , \quad S_{-2}=\Sigma\frac{1}{x_i^2} \quad , \quad S_{-1}=\Sigma\frac{1}{x_i}$$

۴۱۲۹ ـ ترجمه از فرانسه

فرض می‌کنیم که $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ سه سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم باضرایب حقیقی باشند و A و B ریشهٔ مشترك نداشته و بالاخره اتحاد زیر بر قرار باشد :

$$A^2+B^2=C^2$$

۱) ثابت کنید که C ریشهٔ حقیقی نداشته اما A و B دارای ریشه‌های حقیقی می‌باشند .

۲) ثابت کنید که :

$$C+A \ , \ C-A \ , \ C+B \ , \ C-B$$

ریشه‌های مضاعف حقیقی دارند .

۳) فرض می‌کنیم که :

$$A=(x-a)(x-b) \ , \ a\neq b$$

شکل کلی چند جمله‌ایهای B و C را بدست آورید . اگر a' و b' ریشه‌های $B=0$ باشند رابطه‌ای بین a و b و a' و b' بدست آورید .

۴۱۳۰ ـ مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر :

$$x-|x-1|=(m-1)x+1$$

۴۱۳۱ ـ ترجمه از «ماهنامه ریاضی آمریکا»

ثابت کنید که یك چهار ضلعی وجوددارد که در آن طولهای ضلعها و دو قطر عددهای منطق بوده اما هریك از فاصله‌های نقطهٔ تلاقی دوقطر تا رأسهای چهار ضلعی عددی اصم باشد .

مسائلی از ریاضیات جدید

۴۱۳۲ ـ دو مجموعهٔ A و B داده شده است . کلیهٔ مجموعه‌های X را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$A\cap X=B$$

۴۱۳۳ ـ A و B دو زیر مجموعه از یك مجموعهٔ E می‌باشند. مجموعه‌های متمم A و B را نسبت به E به ترتیب با $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نمایش می‌دهیم . روابط همارزی زیر را ثابت کنید :

۱) $A\subset B \iff A\cap\bar{B}=\emptyset$

۲) $A\subset B \iff \bar{A}\cup\bar{B}=E$

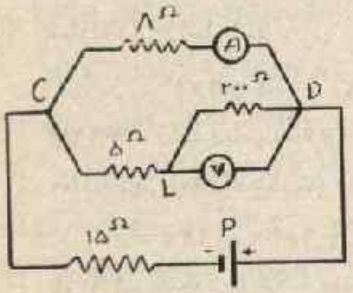
۴۱۳۴ ـ A و B دو زیر مجموعه از یك مجموعهٔ R می‌باشند . متممهای A و B را نسبت به R به ترتیب با $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مجموعهٔ عنصرهایی از A را که به B تعلق نداشته باشند با $A-B$ و مجموعهٔ عنصرهای B را که به A تعلق نداشته باشند به $B-A$ نمایش می‌دهیم . ثابت کنید که :

$$(A\cup A)\cap(A\cup B)=(A-B)\cup(B-A)$$

مسائلی از فیزیك

۴۱۳۵ ـ ترجمهٔ : **مهندس جمشید دانشور**

پیل P به نیروی محرکهٔ ۲۴ ولت و مقاومت داخلی ناچیز مطابق شکل به یك مدار الکتریکی جریان می‌فرستد . مقدار جریانی که دستگاه آمپرمتر نشان می‌دهد برابر یك آمپر و ولتمتری که در مدار قرار گرفته ۸ ولت را نشان می‌دهد . مطلوبست محاسبهٔ مقاومت داخلی هریك از وسایل اندازه گیر که در مدار قرار گرفته‌اند.



مسائل از هوشنك شریفزاده :

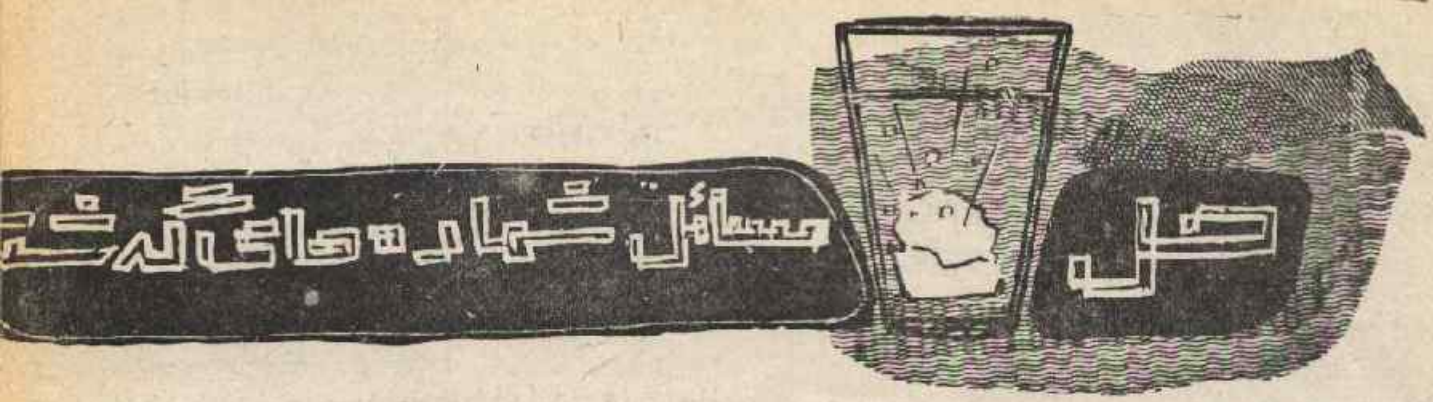
۴۱۳۶ ـ برآیند نیروهای متقارب P و Q برابر P است . ثابت کنید که اگر P دو برابر شود برآیند جدید عمود بر Q است .

۴۱۳۷ ـ دو وزنه که وزن هریك $10\,kgf$ است به دو انتهای نخ سبکی متصل است. این نخ از روی سه میخ صیقلی که به دیوار کوبیده‌شده‌می گذرد. میخها طوری به‌دیوار کوبیده‌شده‌اند که شکل یك مثلث متساوی‌الاضلاع باقاعدهٔ افقی را مجسم می کنند . تعیین کنید که بر میخها چه نیروی فشار می‌آورد ؟

۴۱۳۸ ـ یك قطار باری به‌طول ۶۳۰ متر و یك قطار مسافربری به‌طول ۱۲۵ متر بر دو مسیر مستقیم متوازی به‌ترتیب با سرعتهای ثابت $48\,km/h$ و $102\,km/h$ حرکت می کنند چه مدت طول می کشد تا دو قطار از یکدیگر رد بشوند در صورتی که:

الف ـ دو قطار در یك جهت حرکت می کنند .

ب ـ دوقطار در دو جهت متقابل حرکت می کنند.



حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۵

۴۰۶۷ـ به فرض اینکه سه عدد متمایز و مخالف صفر x و y و z در دو رابطهٔ زیر صدق کنند

(۱) $xy-ax+a^2=0$

$a\neq 0$،

(۲) $yz-ay+a^2=0$

صحت روابط زیر را محقق کنید

(۳) $zx-az+a^2=0$

(۴) $xyz+a^3=0$

(۵) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{1}{a}$

حلـ طرفین رابطهٔ (۱) را در $a-z$ وطرفین رابطهٔ (۲) را در x ضرب کرده طرفین دو رابط حاصل را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم بعد از اختصار و تقسیم طرفین بر a رابطهٔ (۳) بدست می‌آید.

از ضرب طرفین رابطهٔ (۱) در z حاصل می‌شود:

$$xyz-axz+a^2z=0$$

$$xyz-a(xz-az)=0$$

وبنابر رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود

$$xyz-a(-a^2)=0 \quad \text{یا} \quad xyz+a^3=0$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم

(۱') $y(x-z)-a(x-y)=0$

$$\frac{1}{x-y}=\frac{a}{y(x-z)}$$

از تفریق طرفین رابطه‌های (۱) و (۳) به طریق بالا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{y-z}=\frac{x}{a(x-z)}$$

وخواهیم داشت:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}=\frac{1}{x-z}\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{y}\right)=\frac{a^2+xy}{ay(x-z)}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}=\frac{ax}{ay(x-z)}=\frac{x}{y(x-z)}$$

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{x}{y(x-z)}-$$

$$-\frac{1}{x-z}=\frac{x-y}{y(x-z)}$$

بنابر رابطهٔ (۱') داریم

$$\frac{x-y}{y(x-z)}=\frac{1}{a}$$

ورابطهٔ (۵) بدست می‌آید

۴۰۶۸ـ چند جمله‌ای زیررا درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x^3-(a+b+1)x^2+(ab+2a-1)x-(a-1)(b+1)$$

ثابت کنید که عبارت بالا در ازاء $x=1$ صفر می‌شود وعبارت را ابتدا به شکل

$$f(x)=x^2(x-1)-f_1(x)$$

وبعد به شکل

$$f(x)=(x-1)\varphi(x)$$

تبدیل کرده معادلهٔ $\varphi(x)=0$ را حل کنید

حلـ داریم

$$f(1)=1-(a+b+1)+(ab+2a-1)-(a-1)(b+1)=\ldots=0$$

می‌توانیم چنین بنویسیم

$$f(x)=x^3-x^2\quad[(a+b)x^2-(ab+2a-1)x+(a-1)(b+1)]$$

چون $f(1)=0$ است بنابراین $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است

وچون

$$x^3-x^2=x^2(x-1)$$

بر $x-1$ بخش پذیر است بنابراین عبارت داخل کروشه نیز درازاء $x=1$ صفر خواهد شد وخواهیم داشت

$$(a+b)x^2-(ab+2a-1)x+(a-1)(b+1)$$
$$=(x-1)[(a+b)x-(a-1)(b+1)]$$

ونتیجه خواهد شد

$$f(x)=(x-1)[x^2-(a+b)x+(a-1)(b+1)]$$
$$=(x-1)\varphi(x)$$

که درآن:

$$\varphi(x)=x^2-(a+b)x+(a-1(b+1)$$

نسبت به معادلهٔ $\varphi(x)=0$ بعد از اختصار خواهیم داشت

$$\Delta=(a-b-2)^2$$

وریشه‌های معادله بعد از اختصار عبارت خواهد شد از

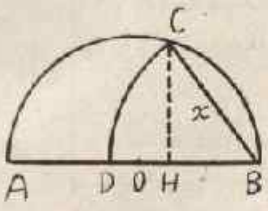
$$x'=b+1 \text{ و } x''=a-1$$

۴۰۶۹ـ نیمدایرهٔ به قطر $AB=2R$ مفروض است. نقطهٔ C را روی نیمدایره انتخاب می‌کنیم که $BC=x$ باشد ودرداخل نیمدایره کمان CD را به مرکز B وبه شعاع BC رسم می‌کنیم (D بر AB واقع است).

۱) S مجموع مساحتهای سطوح حادث ازدوران کمانهای AC و CD راحول AB برحسب R و x حساب کنید

۲) نمایش هندسی تابع $y=\frac{S}{\pi}$ را درازاء مقادیر قابل قبول x رسم کنید.

حل ـ اگر H تصویر C روی AB باشد داریم



$$AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{4R^2-x^2}{2R}$$

$$DH=x-BH=x-\frac{x^2}{2R}=\frac{x(2R-x)}{2R}$$

S_1 مساحت سطح حاصل از دوران کمان AC حول AB برابر است با

$$S_1=2\pi R.AH=\pi(4R^2-x^2)$$

S_2 مساحت سطح حادث از دوران کمان CD حول AB برابر است با

$$S_2=2\pi x.DH=\frac{\pi x^2(2R-x)}{R}$$

$$S=S_1+S_2=\ldots=\frac{\pi}{R}(-x^3+Rx^2+4R^2)$$

۲) خواهیم داشت

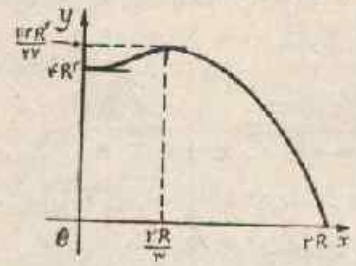
$$y=\frac{1}{R}(-x^3+Rx^2+4R^2)$$

x در فاصلهٔ $[2R \text{ و } 0]$ تغییر می‌کند، در ازاء همهٔ مقادیر x متعلق به این فاصله تابع y معین واتصالی است

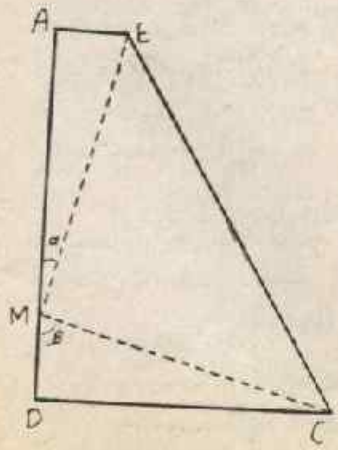
$$y'=\frac{1}{R}x(-3x+2R)$$

که در ازاء دومقدار $\frac{2R}{3}$ و $x=0$ تغییر علامت می‌دهد. جدول تغییرات وشکل منحنی به قرار زیر است.

x	0		$\frac{2R}{3}$		$2R$
y'	0	+	0	−	
y	$4R^2$	↗	$\frac{112R^2}{27}$	↘	0



۴۰۷۰ـ ذوزنقهٔ قائم ABCD که درآن زاویه‌های A وD قائمه بوده و $AB=a$ و $CD=4a$ و $AD=5a$ مفروض است. برضلع AD نقطهٔ M را تعیین می‌کنیم که $AM=x$ باشد مقدار x را چنان تعیین کنید که اولاً زاویهٔ BMC قائمه باشد ثانیاً اندازهٔ زاویهٔ DMC دوبرابر اندازهٔ زاویهٔ AMB باشد.



حل ـ اولا وقتی که زاویهٔ BMC قائمه باشد دو مثلث ABM وDMC متشابه بوده و داریم

$$\frac{AM}{DC}=\frac{AB}{MD}$$

$$\frac{x}{4a}=\frac{a}{5a-x}$$

$$\Rightarrow x^2-5ax+4a^2=0$$

$$\Rightarrow x=a \text{ یا } 4a$$

ثانیاً اگر :

$$\alpha = AMB \quad , \quad \beta = DMC$$

باشد :

$$tg\alpha = \frac{a}{x} \quad و \quad tg\beta = \frac{۴a}{۵a - x}$$

$$tg\beta - tg۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱ - tg^۲\alpha}$$

$$\frac{۴a}{۵a - x} = \frac{\frac{۲a}{x}}{۱ - \frac{a^۲}{x^۲}} = \frac{۲ax}{x^۲ - a^۲}$$

بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$۲x^۲ - ۵ax - ۲a^۲ = ۰$$

فقط ریشهٔ مثبت معادله قابل قبول است که عبارتست از $x = ۲a$

۴۰۷۱ـ جوابهای کلی معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$cos^۲(n+۱)x + sin^۲(n-۱)x = cos^۲۲x$$

حل ـ معادلهٔ فوق به‌صورت زیر در می‌آید :

$$sin^۲(n+۱)x - sin^۲(n-۱)x = sin^۲۲x$$

$$[sin(n+۱)x + sin(n-۱)x][sin(n+۱)x - sin(n-۱)x] = sin^۲۲x$$

و یا :

$$۴cosx\,sinx\,cosnx\,sinnx = sin^۲۲x \Longrightarrow sin۲x\,sin۲nx = sin^۲۲x$$

یا داریم :

$$sin۲x = ۰ \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

و یا :

$$sin۲nx = sin۲x$$

$$x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲(n+۱)} \quad یا \quad x = \frac{k\pi}{n-۱}$$

۴۰۷۲ ـ اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ سه مقدار متمایز بوده و داشته باشیم $tg۳\alpha = tg۳\beta = tg۳\gamma$ ثابت کنید که :

$$(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma)(cotg\alpha + cotg\beta + cotg\gamma) = ۹$$

حل ـ می‌دانیم $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$tg۳x = k$$

می‌باشند پس

$$tg۳x = \frac{۳tgx - tg^۳x}{۱ - ۳tg^۲x} = k$$

و یا :

$$tg^۳x - ۳ktg^۲x - ۳tgx + k = ۰$$

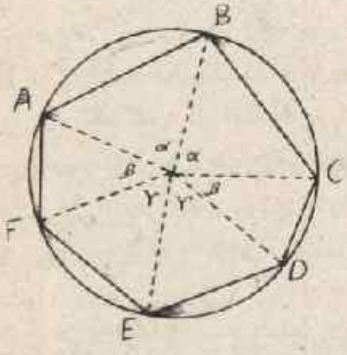
بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = ۳k & (۱) \\ tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\alpha tg\gamma = -۳ & (۲) \\ tg\alpha tg\beta tg\gamma = -k & (۳) \end{cases}$$

رابطهٔ (۲) را به رابطهٔ (۳) تقسیم کرده حاصل را در رابطهٔ (۱) ضرب می‌کنیم رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید :

۴۰۷۳ ـ شش ضلعی ABCDEF در دایرهٔ O به شعاع R محاط است و می‌دانیم که :

$$AB = BC = ۲x \quad و \quad CD = FA = ۲y \quad و \quad DE = EF = ۲z$$



معادله‌ای تشکیل دهید که در آن مقدار R برحسب x و y و z بدست آید .

حل ـ داریم :

$$cos\alpha = \frac{۲r^۲ - ۴x^۲}{۲r^۲} = \frac{r^۲ - ۲x^۲}{r^۲}$$

$$sin^۲\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}\left[۱ - \frac{r^۲ - ۲x^۲}{r^۲}\right] = \frac{x^۲}{r^۲}$$

و به‌همین ترتیب برای β و γ داریم :

$$sin^۲\frac{\beta}{۲} = \frac{y^۲}{r^۲} \quad و \quad sin^۲\frac{\gamma}{۲} = \frac{z^۲}{r^۲}$$

از طرفی داریم :

$$۲\alpha + ۲\beta + ۲\gamma = ۳۶۰^\circ \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰$$

از رابطهٔ اخیر رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

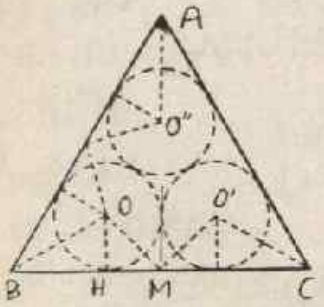
$$sin^۲\frac{\alpha}{۲} + sin^۲\frac{\beta}{۲} + sin^۲\frac{\gamma}{۲} + ۲sin\frac{\alpha}{۲}sin\frac{\beta}{۲}sin\frac{\gamma}{۲} = ۱$$

و یا

$$\frac{x^۲}{r^۲} + \frac{y^۲}{r^۲} + \frac{z^۲}{r^۲} - ۲\frac{xyz}{r^۳} = ۱$$

$$r^۳ - (x^۲ + y^۲ + z^۲)r - ۲xyz = ۰$$

۴۰۷۴ـ سه دایرهٔ متساوی‌ودو به دومماس را در یك مثلث‌متساوی الاضلاع محاط کرده‌ایم اگر طول شعاع هر یك از این دایره‌ها r باشد طول ضلع مثلث را بر حسب r حساب کنید.



حل ـ مماس مشترك

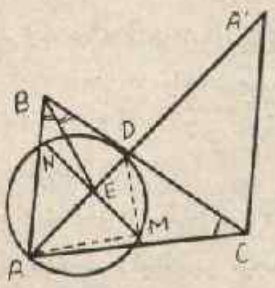
داخلی هردو دایره از سه‌دایرهٔ فوق عمود منصف ضلعی از مثلث است که‌بر این دودایره مماس می‌باشدو نتیجه خواهد شد خطی که وسط یك ضلع را به مرکز دایرهٔ مماس براین ضلع وصل می‌کند بااین ضلع زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد . در مثلث‌قائم‌الزاویهٔ BOH و OHM به‌ترتیب داریم :

$$BH = OH \cdot cotg 30^\circ = r\sqrt{3} \quad \text{و} \quad MH = OH \times tg 45^\circ = r$$

$$BC = 2BM = 2(r\sqrt{3} + r) = 2r(1 + \sqrt{3})$$

۴۰۷۵ ـ مثلث ABC که‌درآن زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ C است مفروض است . نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم که ضلع BC را در D و خطی راکه از C موازی با AB رسم می‌شود در A' قطع کند . از نقطهٔ E مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ، عمودی بر AD اخراج می‌کنیم که دایرهٔ به‌قطر AD رادر N و M قطع‌می‌کند . طول‌هریك از قطعه خطهای BD ، DC ، ED ، AE و MN رابرحسب a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث حساب کنید .

حل ـ در مثلث ABC بنا به خاصیت نیمساز زاویه داریم .



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC = BC}{AB + AC}$$

$$\frac{BD}{C} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

$$BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad DC = \frac{ab}{b+c}$$

در مثلث ABD نقطهٔ E پای‌نیمساز زاویهٔ B است و بنابر روابط بالا داریم :

$$DE = \frac{DC \cdot BD}{BA + BD} \quad , \quad EA = \frac{DC \cdot BA}{BA + BD}$$

مقادیر BD و DC را به‌جای آنها منظورکرده بعد از ساده کردن خواهیم داشت :

$$DE = \frac{a^2 b}{(b+c)(a+b+c)} \quad \text{و} \quad EA = \frac{ab}{a+b+c}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD داریم :

$$ME^2 = AE \cdot ED = \ldots = \frac{a^2 b^2}{(b+c)(a+b+c)^2}$$

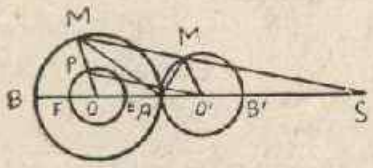
$$MN = 2ME = \frac{2ab}{a+b+c}\sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

۴۰۷۶ ـ دو دایرهٔ O و O' به شعاعهای R و R' در A مماس خارج هستند . وتر AM را در دایرهٔ O و وتر AM' را در دایرهٔ O' عمود بر AM رسم‌می‌کنیم .

۱ ـ ثابت کنید که اگر M دایرهٔ O را بپیماید خط MM' بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۲ ـ نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که طول MM' برابر باطول معلوم l باشد . بحث کنید .

حل ـ شعاعهای OM و O'M' رارسم می‌کنیم . اگر B و B' نقاط تلاقی دو دایره با خط‌المرکزین و α درجه اندازهٔ زاویهٔ OAM باشد اندازهٔ زاویهٔ AOM برابر خواهد شد با $180^\circ - 2\alpha$ مثلث M'AM قائم‌الزاویه‌است و زاویه‌های O'AM' و OAM متمم بوده اندازهٔ زاویهٔ O'AM' برابر با $90^\circ - \alpha$ می‌باشد. مثلث AO'M' به راس O' متساوی‌الساقین است و از آنجا نتیجه‌خواهدشد که‌اندازهٔ زاویهٔ B'O'M' برابر با $180^\circ - 2\alpha$ می‌باشد . بنابراین دوزاویهٔ AOM و B'O'M' برابر بوده نتیجه می‌شود که دوشعاع OM و O'M' متوازی‌باشند .



اگر S نقطهٔ تلاقی MM' با OO' باشد خواهیم‌داشت:

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$$

یعنی‌نقطهٔ S قطعه خط OO' را به‌نسبت ثابتی قطع‌می‌کند. بنابراین نقطهٔ S ثابت می‌باشد.

ثانیاً از O' موازی با MM' رسم می‌کنیم که OM را در P قطع‌می‌کند . داریم :

$$PM = O'M' = R' \quad \text{و} \quad OP = R - R'$$

وقتی M دایرهٔ O را بپیماید نقطهٔ P دایرهٔ (γ) به مرکز O و به‌شعاع R − R' راخواهد پیمود . برای‌اینکه طول MM' برابر مقدار l باشدکافی است بر دایرهٔ (γ) نقطهٔ P را چنان تعیین کنیم که O'P = l باشد . برای این کار به‌مرکز O' وبه‌شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم ، نقطهٔ تلاقی آن با (γ) نقطهٔ P را بدست خواهد داد . مسئله وقتی جواب داردکه دو دایرهٔ (γ) و (l و O') متقاطع یامماس باشند . اگر E و F نقطه‌های تلاقی (γ) با OO' باشد داریم :

$$O'E = OO' - OE = (R + R') - (R - R') = 2R'$$

$$O'F = \ldots = 2R$$

بنابراین اگر $l > 2R$ یا $l < 2R'$ باشد مسئله‌جواب ندارد .

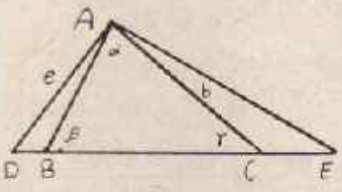
اگر $l=2R'$ یا $l=2R$ باشد مسئله یك‌جواب‌دارد که نقطهٔ E یا نقطهٔ F خواهد بود.

اگر $2R'<l<2R$ باشد مسئله دارای دوجواب می‌باشد.

۴۰۷۷ ـ مثلث ABC مفروض‌است. در A عمودهائی بر AB و AC رسم‌می‌کنیم که BC یاامتدادآن را به‌ترتیب‌در E و D قطع می‌کنند ثابت‌کنید که:

$$DE=BC\,tg B\,tg C$$

حل ـ اندازه‌های زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC را به ترتیب با α و β و γ وطولهای AC و AD را به ترتیب با b و e نمایش می‌دهیم. اندازهٔ زاویه‌های D و E به ترتیب‌برابر خواهد شد با $90-\gamma$ و $90-\beta$ و بنا بر روابط سینوسها در مثلث ABC داریم:



$$BC=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

و در مثلث ADE داریم:

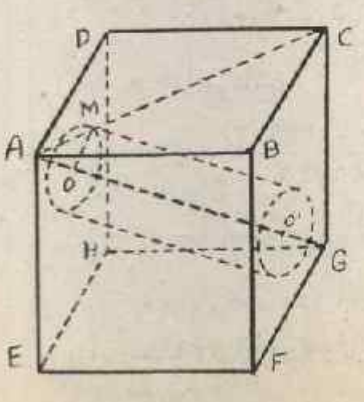
$$DE=\frac{e\sin A}{\sin E}=\frac{e\sin[180-(90-\beta)-(90-\gamma)]}{\sin(90-\beta)}$$

$$=\frac{e\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta}$$

$$\frac{e\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta}=\frac{b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{e}{b}$$

$$DE=BC\,tg\beta\,tg\alpha$$

۴۰۷۸ ـ در مکعبی به طول یال a استوانه‌ای دوار چنان محاط کنیدکه محورش بریك قطر مکعب منطبق بوده و حجمش ماکزیمم باشد و حجم آن را بر حسب a حساب کنید.



حلـ قطر AG از مکعب رامنطبق بر محور استوانه اختیار می‌کنیم چنانچه $O'O=x$ ارتفاع و $OM=R$ شعاع قاعدهٔ استوانه باشد داریم:

$$AO=\frac{AG-x}{2}=\frac{a\sqrt{3}-x}{2}$$

دایرهٔ قاعدهٔ استوانه در یك نقطهٔ M واقع بر قطر AC از وجه ABCD با این وجه نقطهٔ مشترك دارد. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM (قائمه در زاویهٔ O) و ACC (قائمه درزاویهٔ C) داریم:

$$\frac{AO}{OM}=\frac{AC}{CG}\quad\frac{a\sqrt{3}-x}{2R}=\frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Longrightarrow R=\frac{a\sqrt{6}-x\sqrt{2}}{4}$$

$$V=\pi x\left(\frac{a\sqrt{6}-x\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{\pi}{8}(x^3-2ax^2\sqrt{3}+3a^2x)$$

$$V'=\frac{\pi}{8}(3x^2-4ax\sqrt{3}+3a^2)$$

مشتق در ازاء دو مقدار $x=a\sqrt{3}$ و $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ صفرشده درازاء $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ازمثبت به‌منفی‌ودرازاء $x=a\sqrt{3}$ از منفی به‌مثبت‌تغییر علامت‌می‌دهد. بنابراین V درازاء $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ماکزیمم بوده و مقدار این ماکزیمم می‌شود:

$$V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$$

۴۰۷۹ ـ یك تابع‌اولیهٔ هریك‌از دو تابع زیر را بدست آورید.

$$y=\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\quad\text{و}\quad y=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

حل ـ به ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{\frac{x+3}{\sqrt{2x+3}}}{x^2}=\frac{\frac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}-\frac{x}{\sqrt{2x+3}}}{x^2}$$

$$=-\frac{\frac{x}{\sqrt{2x+3}}-\sqrt{2x+3}}{x^2}\quad(1)$$

فرض می‌کنیم $u=\sqrt{2x+3}$ و $V=x$ و در نتیجه داریم:

$$u'=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\quad\text{و}\quad V'=1\quad,\quad y=\frac{-u'v+v'u}{v^2}$$

$$Y=\frac{-u}{v}+C\Longrightarrow Y=-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$$

تابع دوم را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم :

$$y=\frac{x}{\frac{(1+x^2)^2}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}}$$

فرض می‌کنیم :

$$u=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \quad \text{و} \quad u'=\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}$$

پس $y=-\frac{1}{2}u'$ بوده و :

$$Y=-\frac{1}{2}u+C \Longrightarrow Y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+C$$

۴۰۸۵ـ دوعددمثبت a و x به‌فرض $x>a$ مفروض‌اند.

اولا نامساویهای زیر را محقق کنید :

$$(1) \quad \frac{a^2}{x}<a<\frac{1}{2}(x+\frac{a^2}{x})$$

ثانیاً بااستفاده‌از نامساویهای (۱) ثابت‌کنیدکه اگر A عددی مثبت بوده و مجذور کامل نباشد چنانچه x_0 یك مقدار تقریبی اضافی $\sqrt{A}$ باشد مقدار x_1 که از رابطهٔ :

$$(2) \quad x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})$$

بدست می‌آید با تقریب اضافی کمتری به‌مقدار حقیقی $\sqrt{A}$ نزدیك است یعنی اینکه $\sqrt{A}<x_1<x_0$ و حد اکثر خطای مربوط به انتخاب x_1 را تعیین کنید .

مثال عددی ـ جذر تقریبی اضافی $A=2/10011$ را با تقریب ۰/۰۰۰۱ حساب کنید .

حل ـ چون a و x دو عدد مثبت‌هستند بنابراین :

$$a<x \Longrightarrow a^2<ax \Longrightarrow \frac{a^2}{x}<a$$

$$(a-x)^2>0 \Longrightarrow 2ax<x^2+a^2$$

$$\Longrightarrow a<\frac{1}{2}(\frac{x^2+a^2}{x})=\frac{1}{2}(x+\frac{a^2}{x})$$

بنابراین نا مساویهای (۱) محقق می‌شود .

ثانیاً روابط استلزامی زیررا داریم :

$$\sqrt{A}<x_0 \Longrightarrow A<x_0^2 \Longrightarrow \frac{A}{x_0}<x_0$$

$$\Longrightarrow x_0+\frac{A}{x_0}<2x_0 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})<x_0$$

پس بافرض (۲) خواهیم داشت $x_1<x_0$

چنانچه در نامساوی مضاعف (۱) a را با $\sqrt{A}$ و x را با x_0 جانشین کنیم می‌شود .

$$\frac{A}{x_0}<\sqrt{A}<\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})$$

$$(3) \quad \frac{A}{x_0}<\sqrt{A}<x_1<x_0$$

یعنی عدد x_1 مقدار تقریبی $\sqrt{A}$ بوده برای انتخاب‌مناسبتر از x_0 می‌باشد .

باتوجه به :

$$x_1-\sqrt{A}=\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})-\sqrt{A}=$$

$$=\frac{x_0^2+A-2x_0\sqrt{A}}{2x_0}=\frac{(x_0-\sqrt{A})^2}{2x_0}$$

و با توجه به نامساویهای (۳) داریم :

$$x_0-\sqrt{A}<x_0-\frac{A}{x_0}$$

بنابراین داریم :

$$x_1-\sqrt{A}<\frac{(x_0-\frac{A}{x_0})^2}{2x_0}$$

یعنی حد اعلای مقدار $x_1-\sqrt{A}$ عدد :

$$\frac{(x_0-\frac{A}{x_0})^2}{2x_0}$$

می‌باشد .

مثال عددی ـ اگر $A=2/10011$ انتخاب شودبنابر آنچه گذشت اگر $x_0=1/45$ یك مقدار تقریبی $\sqrt{A}$ باشد داریم :

$$1/449053<\frac{A}{x_0}<1/449054$$

$$x_1=\frac{1}{2}(1/45+1/449054)=1/449052$$

و خواهیم داشت :

$$x_1-\sqrt{A}<\frac{(1/45-1/449053)^2}{2\times 1/45}<$$

$$<\frac{(0/000197)^2}{2}<\frac{(0/0002)^2}{2}<\frac{1}{10^5}$$

بنابراین جذر عدد ۲/۱۰۰۱۱ باتقریب اضافی 10^{-5} برابراست با ۱/۴۴۹۵۲ و با تقریب اضافی 10^{-4} برابراست با ۱/۴۴۹۶ .

۴۰۸۱ـ عددی چهار رقمی به‌شکل $\overline{abcd}$ پیدا کنید که داشته باشیم :

$$\overline{dcba}-\overline{abcd}=mm(m-1)(m-1)$$

حل ـ از بسط اعداد بالا نتیجه می‌شود :

$$999(d-a)+90(c-b)=1111m-11=$$
$$=11(101m-1)$$

طرف اول مضرب ۹ می‌باشد پس طرف دوم هم مضرب ۹ بوده و چون ۱۱ نسبت به۹ اول است پس داریم :

$$101m-1=9k$$

$$m=\frac{9k+1}{101}\Longrightarrow 9k+1=101 \text{ یا } 202 \text{ یا } 303$$

.... و ۵۰۵ یا ۴۰۴ یا ۳۰۳

که فقط $9k+1=505$ و یا $9k=504$ قابل قبول است.

$$k=56\Longrightarrow m=5$$
$$999(d-a)+90(c-b)=5544=9\times 616$$
$$111(d-a)+10(c-b)=666-50$$
$$37\times 3(d-a-6)=2\times 5(b-c-5)$$

عدد ۳۷ طرف اول را می‌شمرد پس طرف دوم را هم می‌شمرد بنابراین ۳۷ باید $b-c-5$ را بشمرد اما :

$$b-c-5<5$$

است پس‌باید داشته باشیم $b-c-5=0$ و در نتیجه :

$$d-a-6=0$$

یعنی داریم :

$$\begin{cases} b-c=5 \\ d-a=6 \end{cases}$$

جوابهائی‌که برای b و c و d و a حاصل می‌شود به‌صورت‌زیر می‌باشند :

$(c=2$ و $b=6)$ و $(c=1$ و $b=5)$ و $(c=0$ و $b=5)$

$(c=2$ و $b=9)$ و $(c=3$ و $b=8)$ و $(b=7$ و $a=2$ و $d=9)$ و $(a=2$ و $d=8)$ و $(a=1$ و $d=7)$

۴۰۸۲ـ عددی چهار رقمی به شکل $\overline{abcd}$ چنان‌تعیین کنید که مجذورش به‌شکل زیر باشد :

$$M=\overline{\ldots abcd}$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} N=\overline{abcd} \\ N^2=10^4A+\overline{abcd}=10^4A+N \end{cases}$$

و داریم :

$$N(N-1)=2^4\times 5^4A$$

چون اعداد N و $N-1$ نسبت به‌هم اولند پس بایستی یکی مضرب 2^4 و دیگری مضرب 5^4 باشد از این رو

الف ـ

$$\begin{cases} N=16p \\ N-1=625p' \end{cases}\Longrightarrow 625p'+1=16p$$

$$p=\frac{625p'+1}{16}=39p'+\frac{p'+1}{16}\Longrightarrow$$

$$p'+1=16k$$

و یا :

$$p=625k-39\Longrightarrow N=10000k-624$$

که تنها جواب به ازاء $k=1$ است

$$N=9376$$
$$M=87909376$$

ب ـ حالا فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} N=625p \\ N-1=16p' \end{cases}\Longrightarrow p'=39p+\frac{p-1}{16}$$

بایستی $p-1=16k$ و از آن رو :

$$p'=625k+39\Longrightarrow N=10000k+625$$

که این معادله جواب ندارد .

۴۰۸۳ـ مجموع زیر را برحسب n حساب کنید .

$$S=\sum_{N=2}^{N=n}\frac{6}{N^3-N}$$

حل ـ کسر $\frac{6}{N^3-N}$ به‌صورت‌زیر تجزیه‌می‌شود.

$$\frac{6}{N^3-N}=\frac{3}{N-1}-\frac{6}{N}+\frac{3}{N+1}$$

به ازاء مقادیر از ۲ تا n برای N چنین خواهیم داشت :

$$\frac{6}{2\times 1\times 3}=\frac{3}{1}-\frac{6}{2}+\frac{3}{3}$$

$$\frac{6}{3\times 2\times 4}=\frac{3}{2}-\frac{6}{3}+\frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{4\times 3\times 5}=\frac{3}{3}-\frac{6}{4}+\frac{3}{5}$$

.....

$$\frac{6}{n(n-1)(n+1)}=\frac{3}{n-1}-\frac{6}{n}+\frac{3}{n+1}$$

از جمع طرفین تساویها می‌شود :

$$S=3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n-1})-6(\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})+3(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1})$$

$$S=3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n})$$

$$-6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-1)+3(1+\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{2})$$

فرض می‌کنیم $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ بنابراین

$$S=3(a-\frac{1}{n})-6(a-1)+3(a-1-\frac{1}{2})\Longrightarrow$$

$$S=\frac{3n-6}{2n}$$

۴۰۸۴ ـ مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم .

$$E=\{a\ ،\ b\ ،\ c\ ،\ d\}$$

کلیهٔ زیر مجموعه‌های E را تشکیل دهید .

۲) اگر تعداد عنصرهای یک مجموعهٔ E برابر با n باشد تعداد زیر مجموعه‌های E را در حالتهای

$n=4$ و $n=3$ و $n=2$ و $n=1$

حساب کنید (خود مجموعهٔ E و نیز مجموعهٔ تهی ، به حساب خواهد آمد .)

۳) اگر p تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ E با n عنصر باشد و E' مجموعه‌ای باشد با $(n+1)$ عنصر آیا می‌توان p' تعداد زیر مجموعه‌های E' را از روی آن نتیجه گرفت ؟

حل ـ کلیهٔ زیر مجموعه‌های E عبارتند از :

$$\{\emptyset\}\ ،\ \{a\}\ ،\ \{c\}\ ،\ \{d\}$$

$$\{a\ ،\ b\}\ ،\ \{a\ ،\ c\}\ ،\ \{a\ ،\ d\}\ ،\ \{b\ ،\ c\}$$

$$\{b\ ،\ d\}\ ،\ \{c\ ،\ d\}$$

$$\{a\ ،\ b\ ،\ c\}\ ،\ \{a\ ،\ b\ ،\ d\}\ ،\ \{a\ ،\ c\ ،\ d\}$$

$$\{b\ ،\ c\ ،\ d\}$$

$$\{a\ ،\ b\ ،\ c\ ،\ d\}$$

۲) در ازاء $m=1$ داریم $E=\{a\}$ که دارای دو زیر مجموعه می‌باشد: $\{\emptyset\}$ و $\{a\}$

در ازاء $m=2$ داریم $E=\{a\ ،\ b\}$ و تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر با ۴ خواهد شد .

در ازاء $m=3$ تعداد زیر مجموعه‌ها می‌شود ۸ و در ازاء $m=4$ تعداد زیر مجموعه‌ها برابر ۱۶ خواهد بود زیر مجموعه‌های E' هم می‌باشد ثانیاً شامل زیر مجموعه‌ای E' متمایز از زیر مجموعه‌های E می‌باشد که تعداد آنها نیز p است بنابراین : $p'=2p$

۴۰۸۵ ـ فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای باشد که روی آن دو قانون ترکیب داخلی اولی با نشانهٔ $\circ$ و با عنصر بی‌اثر e و دومی با نشانهٔ $*$ و با عنصر بی‌اثر f تعریف شده است . به علاوه فرض می‌کنیم که x و y و u و v عنصرهای E ، هرچه باشند داشته باشیم :

$$(1)\quad (x*y)\circ(u*v)=(x\circ u)*(y\circ v)$$

۱) ثابت کنید که $e=f$

۲) ثابت کنید که $x*y=x\circ y$

۳) ثابت کنید که عمل $\circ$ (یا $*$) مستقل از ترتیب عوامل و شرکت پذیر است .

حل ـ با فرض :

$$x=v=f\ ،\ y=u=e$$

بنا بر رابطهٔ فرض خواهیم داشت

$$(f*e)\circ(e*f)=(f\circ e)*(e\circ f)$$

اما e نسبت به عمل $\bullet$ و f نسبت به عمل $*$ عنصر بی اثر است پس داریم :

$$f\circ e=e\circ f=f\ ،\ f*e=e*f=e$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$e\circ e\quad f*f$$

یعنی $e=f$

۲) با فرض $y=u=e$ رابطهٔ (۱) چنین می‌شود.

$$\forall(x\ ،\ v)\in E^2\ :\ (x*e)\circ(e*v)=(x\circ e)*(e\circ v)$$

و چون e برای هردو عمل $\circ$ و $*$ عنصر بی‌اثر است بنابراین :

$$\forall(x\ ،\ v)\in E^2\ :\ x\circ v=x*v$$

با قرار دادن y به‌جای v (که دلخواه است) :

$$\forall(x\ ،\ y)\in E^2\ :\ x\circ y=x*y$$

دو عمل $\circ$ و $*$ متحد هستند .

۳) با انتخاب $x=v=e$ در رابطهٔ (۱) و قرار دادن $\circ$ به جای $*$ خواهیم داشت :

$$\forall(y\ ،u)\in E^2\ :\ (e\circ y)\circ(u\circ e)=(e\circ u)\circ(y\circ e)$$

$$\forall(y\ ،\ u)\in E^2\ :\ y\circ u=u\circ y$$

یعنی عمل ∘ (یا ✻) مستقل از ترتیب عوامل است .

در رابطهٔ (۱) فرض می‌کنیم $n=e$ و ∘ را به‌جای ✻ قرار می‌دهیم: $\forall(x\ و\ y\ و\ v)\in E^{۲}:\ (x\circ y)\circ(e\circ v)=(x\circ e)\circ(y\circ v)$

$\forall(x\ و\ y\ و\ v)\in E^{۲}:\ (x\circ x)\circ v=x\circ(y\circ v)$

یعنی عمل ∘ (یا ✻) شرکت پذیر است .

۴۰۸۶ ـ اگر (AH) مثلثی دلخواه و C نقطه‌ای از AB باشد که داشته باشیم $m\cdot AC=n\cdot CB$ ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=(m+n)\overrightarrow{OC}$$

حل ـ اگر C نقطه‌ای از AB باشد می‌توان نوشت:

$$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})+n(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=$$
$$=(m+n)\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$$

اما $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ غیر همسویند ، پس $m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$ صفر خواهد شد زیرا $m\cdot\overrightarrow{AC}=n\cdot\overrightarrow{CB}$.

توجه ـ اگر $m=n$ باشد خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=۲\overrightarrow{OC}$$

که C نقطهٔ وسط AB است .

۴۰۸۷ـ در مثلث ABC نقاط M و N و O به‌ترتیب وسط ضلعهای AB و BC و CA می‌باشند . اگر D نقطهٔ دلخواهی باشد صحت رابطهٔ زیر را محقق کنید :

$$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DM}=۰$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$$

اما :

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$$

پس :

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DC}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DB}$$

یا :

$$\overrightarrow{DN}=\frac{۱}{۲}\ (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB})$$

(این رابطه را در مسئلهٔ یك نیز بدست آوردیم)

به همین ترتیب :

$$\overrightarrow{DM}=\frac{۱}{۲}\ (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$$

و نیز

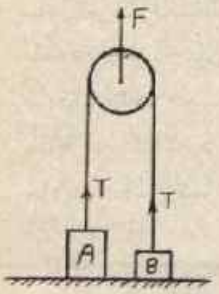
$$\overrightarrow{DO}=\frac{۱}{۲}\ (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$$

پس :

$$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DM}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\ (\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DA}+$$
$$\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DB})$$

مجموع حملات داخل پرانتز برابر صفر است یعنی رابطهٔ فوق درست است .

۴۰۸۸ ـ وزنه‌های A و B که وزن آنها به‌ترتیب ۴۰kg و ۲۴kg است بوسیلهٔ ریسمانی که از روی قرقره گذشته است به‌هم‌وصل شده‌اند قرقره را با نیروی $F=۱۲۰kg$ به طرف بالا می‌کشیم شتاب وزنه‌های A و B را پیدا کنید(از وزن ریسمان و قرقره صرف نظر شود.)



حل ـ اگر کشش ریسمان را T فرض کنیم داریم :

$T=۶۰kg$ یا $۲T=۱۲۰$

رابطهٔ دینامیك را برای هر یك از وزنه‌های A و B می‌نویسیم

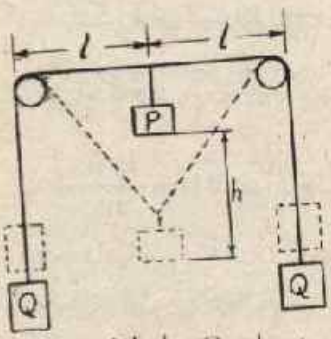
$$T-P=\frac{P}{g}\gamma_A\Longrightarrow ۶۰-۴۰=\frac{۴۰}{g}\gamma_A$$

$$\Longrightarrow\gamma_A=\frac{g}{۲}$$

$$T-P'=\frac{P'}{g}\gamma_B\Longrightarrow ۶۰-۲۴=\frac{۲۴}{g}\gamma_B$$

$$\Longrightarrow\gamma_B=\frac{۳}{۲}g$$

۴۰۸۹ـ در شکل مقابل دستگاه را از حالت تعادل بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم ماکزیمم ارتفاعی که وزنهٔ P پائین می‌رود چقدر است .



حل ـ وقتی که وزنهٔ P به‌اندازهٔ h سقوط می‌کند وزنه‌های Q به‌اندازهٔ :

$$\sqrt{l^{۲}+h^{۲}}-l$$

بالا می‌روند و چون انرژی پتانسیل وزنهٔ P مساوی انرژی پتانسیل وزنه‌های Q است داریم :

$$Ph=۲Q(\sqrt{l^{۲}+h^{۲}}-l)$$

یا

$$۴PQlh+۴Q^{۲}l^{۲}+P^{۲}h^{۲}=۴Q^{۲}(l^{۲}+h^{۲})$$

$$h=\frac{۴PQl}{۴Q^{۲}-P^{۲}}$$

پاسخهای رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۵

مقصود صلاحی ـ نصیرزادی مقدم ـ مرتضی ارشدی ـ ابراهیم‌ذوالقدری. بهمن کمالی. حجت‌الله بابائی. صمدسبحانیان. رحیم جوان آزاد ـ موسی صنوبری ـ چنگیز آزادی ـ سیدمحمد رضا مرعشی. شاهرخ میرمیرانی. پرویز عزتیار ـ نادربزرگی هوشمند پزشکی ـ حسن چاکری ـ کامبیز رفیعی ـ علی اصغر اسکندربیاتی ـ سیدمهدی نظیری ـ شمس‌الدین شاه‌علی ـ محمد صادق ابریشمی. سیدمحمودتقوی. فتح‌الله کلیاتی. زهرادوالفقاری مقصودصلاحی. جعفرصادقی ـ سیدجعفرموسوی. علیرضامیرمحمد صادق ـ مسعودحبیب‌اللهزاده ـ علی‌اصغر شاملی. قربانعلی شاهی. مظاهرامینی. مسعود نداف‌زاده ـ جعفرآقایانی چاوشی ـ مصباح جاوید ـ حسن‌جعفری ـ سیدجمال آشفته ـ سعید سیدمنصوری ـ بختیار علیمدد سلطانی ـ ژوزف صالح ـ منوچهر گوهرریزی ـ عباس طلائی زاده ـ ناصر حسینی‌پناه ـ محسن تقوی ـ پرویز مرادی حقگو ـ ابوالفضل فتح‌الله زاده ـ اردشیر گشتاسی ـ نادر ملائیان ـ محمدرضا نادری ـ ماشاالله سعید ـ علی‌طاهر ـ بهروز قاسمی ـ محسن هاشمی‌نژاد ـ عادل پاشاپور ـ فرید سیدمنصوری سعید هدایتی ـ حسین خبازیان ـ علی تقیان ـ منصور خلیلی ـ رضا مرعشی ـ یعقوب پریچهر ـ رمضان اصغرپور ـ محمد علی موحدیان. ناصر عساره ـ محمدرضا براتی ـ یوسف عباس‌پور. غلامرضا میرزاخانی ـ عزیزالله صادقیان ـ حسین شیشه‌گر ـ محمدتقی مقدادیان ـ محمد رضا نیکوئی ـ مصطفی کریمی ـ علی‌شادکامی .

زاویه (بقیه از صفحهٔ ۱۰)

با مدول ۱ و اعداد حقیقی با تقریب 2π را ایجاب می‌کند ، درهمان حال عدد π با اثبات وجود یک‌چنین ایزومورفی یعنی در سری اعداد مختلط تعریف شود .

این تناظر مثلا به‌صورت زیر نشان داده می‌شود .

$$z=E(u) \text{ و } u\equiv Arg\ z \pmod{2\pi}$$

که از خاصیت اساسی زیر منتج می‌شود .

$$Arg(zz')\equiv Arg\ z+Arg\ z' \pmod{2\pi}$$

اگر فرض کنیم که $E(u)=\cos u+i\sin u$ وبا قبول موقتی اینکه وقتی $0\leq u<\frac{\pi}{2}$ باشد $\cos u$ و $\sin u$ مثبت بوده‌و $\lim \frac{\sin u}{u}=1$ است آن وقت می‌توان مثلثات را کاملا بیان کرده وزاویهٔ بین بردار را به‌صورت آرگومان نسبت (مختلط) آفیکسهای این بردارها تعریف کرد و می‌توان فرمول شال ، تعریف هندسهٔ مقدماتی توابع دوری به کمک دایرهٔ مثلثاتی و غیره را نتیجه گرفت .

[۱۸]ـ درهندسهٔ تحلیلی زاویهٔ بین دو بردار بامختصات $(x\ و\ y\ و\ z)$ و $(x'\ و\ y'\ و\ z')$ در مبنای قائمه بسادگی از فرمول زیر بدست می‌آید .

$$\cos u=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

درصفحه‌ای که $z=z'=0$ است می‌توانیم زاویهٔ بین‌دونیم‌خط را با تصریح علامت از فرمول زیر حساب کنیم .

$$\sin u=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

در فضای R^2 این فرمولها تعمیم می‌یابند . درحالتی که مبنا قائمه‌نباشد در $\cos u$ یک‌فرم درجهٔ دوم ویک فرم دوخطی پدید می‌آید. در C^n باید فرمهای هرمیتیک پدید آید اما باز هم‌فرمولی که $\cos u$ را بدست‌می‌دهد ارزش‌خود را حفظ می‌کند.

[۱۹]ـ در R^2 زاویهٔ دوصفحهٔ با معادلات :

$$ux+vy+wz=h \text{ و } u'x+v'y+w'z=h'$$

همان زاویهٔ دو بردار $(u\ و\ v\ و\ w)$ و $(u'\ و\ v'\ و\ w')$ خواهد بود. اگر $w=w'=0$ باشد زاویهٔ بین‌دوخط در R^2 بدست می‌آید .

[۲۰]ـ **مسئلهٔ تثلیث زاویه** از این قرار است که به کمک‌خط‌کش وپرگار زاویه‌ای تعیین کنیم که ثلث زاویهٔ مفروض باشد، این مسئله درحالت‌کلی غیرممکن است، مثلا برای زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ ترسیم نه ضلعی منتظم پیش می‌آید ، اما مسئله برای $\frac{\pi}{2}$ ممکن می‌باشد .



● در تعقیب مذاکرات تلفنی راجع به نکته‌ای که در فصل راهنمای ریاضیات متوسطه یکان شمارهٔ ۳۶ بیان شده مبنی براینکه اگر وقتی که $x \to \alpha$ دراین‌صورت $h(x) \to \infty$ امکان دارد که $x = \alpha$ ریشه‌ای از معادلهٔ $y = \frac{g(x)}{h(x)} = 0$ باشد لازم بیادآوری است که این موضوع باید بقسم دیگر تعبیر شود. زیرا وقتی‌می‌گوئیم $x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $y = f(x) = 0$ است که مقدار $f(\alpha)$ صراحتاً برابر با صفر باشد بنابراین وقتی داشته باشیم.

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$$

آیا می‌توان حکم کرد که $x = \alpha$ ریشهٔ معادله است؟

حسن کلاهمال، شصم ریاضی دبیرستان دارالفنون

پاسخ ـ اگر $x \to \alpha$ مقادیر $f(\alpha)$ به ترتیب کوچك شده و بطور پیوسته بسمت صفر میل کند دراین‌صورت بنا به‌یك **اصل** قبول‌می‌کنند که $x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ می‌باشد.

خلاصه‌ای‌راجع به‌اصل مزبوردرصفحهٔ ۳۴۰ کتاب‌مثلثات (مستقیم‌الخطوکروی) ترجمهٔ پرویز شهریاری بیان شده‌است. مفصلتر آن به صورت یك مقاله در شماره‌های آیندهٔ یکان بیان خواهد شد.

بقیهٔ تذکرات شما زیرعنوان «از میان نامه‌های رسیده» چاپ شده است.

● **پرسش:** خواهشمند است راه‌حل صحیح مسئلهٔ شیمی زیر راتوضیح دهید زیرا دبیرما ازراهی که حل کرد برای آن جواب ۲ بدست‌آورد، دریك کتاب حل‌المسئله برای آن‌جواب $\frac{9}{8}$ و در حل‌المسئلهٔ دیگر جواب $\frac{1}{2}$ بدست آمده است.

موسی صنوبری

مسئله ـ مخلوطی از کربورکلسیم وکربور آلومینیم را با آب ترکیب کرده‌ایم. چگالی مخلوط بخارات تولید شده نسبت به هیدرژن ۱۰ است. نسبت دو جرم دو کربور را در مخلوط تعیین کنید.

پاسخ (ازعطاءالله بزرگ‌نیا) ـ هرگاه فرض کنیم که در این مخلوط x ملکول C_2Ca و y ملکول C_2Al_4 باشد. از روی چگالی مخلوط گازها باید نسبت $x : y$ را پیدا کرد. واکنش ترکیب کربورهای فوق باآب ازاین قراراست:

$$C_2Ca + 2H_2O \to C_2H_2 + Ca(OH)_2$$

$$C_2Al_4 + 12H_2O \to 3CH_4 + 4Al(OH)_3$$

بطوری‌که از فرمول برمی‌آید به‌ازاء یك ملکول C_2Ca یك ملکول C_2H_2 وبه‌ازاء یك ملکول C_2Al_6 سه‌ملکول CH_4 تولید می‌شود. وبا توجه به‌اینکه تعداد ملکولهای C_2Ca را برابر x وازآن C_2Al_4 را برابر y گرفته‌ایم‌تعدادملکولهای استیلن x و تعداد ملکولهای متان $3y$ و جرم مخلوط دوگاز

$$xC_2H_2 + 3yCH_4 = 26x + 48y$$

وحجم‌مخلوط باتوجه بقانون آووگادرو برابر $x + 3y$ است وچون چگالی آن ۱۰ است رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{26x + 48y}{(x + 3y)2} = 10$$

یا

$$26x + 48y = 20x + 60y$$

$$6x = 12y \Longrightarrow x : y = 2$$

مفهوم این نتیجه آنست که هرگاه بخواهیم مخلوطی‌ازاستیلن ومتان به‌چگالی ۱۰ تهیه‌نمائیم‌باید کربورکلسیم‌وکربورآلومینیوم رابه‌نسبت ملکولی ۲و۱ اختیار نمائیم بدیهی است برای‌تعیین نسبت جرم دو کربور بایستی این اعداد را در جرم ملکولی کربورهای مربوطه ضرب کرد در نتیجه نسبت جرمی برابر می‌شود با: $\frac{64 \times 2}{144} = \frac{8}{9}$

بطوری‌که ملاحظه می‌فرمائید راه‌حل مسئله بسیار ساده است و اشتباهی‌که برای شما پیداشده ناشی از این‌جاست‌که اگرنسبت ملکولی‌کربورکلسیم را به‌کربورآلومینیوم بدست آوریدبرابر۲ وهرگاه برعکس نسبت ملکولی کربور آلومینیوم رابه‌کربور‌کلسیم بدست آورید ($x : y$ دراین مسئله) برابر $\frac{1}{2}$ خواهد شد ونسبت جرمی $\frac{8}{9}$ و یا $\frac{9}{8}$ خواهد شد.

اما برای آنکه درستی حل مسئله را آزمایش‌کنید. کافی است چگالی مخلوط را محاسبه‌کنید:

$$\frac{2 \times 26 + 3 \times 16}{2 \times 5} = \frac{100}{10} = 10$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\Delta_{13} =$$
$$a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

بنابراین برای محاسبهٔ دترمینان بهتر است که دترمینان را مرتباً به ترمینانهای رستهٔ پائینتر تبدیل کرد سپس مقادیر عددی آنرا بدست آورد .

مثال ـ مقدار دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود علامت هر جمله برابر (-1) به قوهٔ مجموع شمارهٔ سطر وستون حذف شده است علامت جمله‌ای که شامل دترمینان حاصل از حذف سطر اول و ستون چهارم می‌باشد عبارتست از $(-1)^{1+4}$ حال هریك از دترمینانهای رستهٔ ۳ فوق را به دترمینانهای رستهٔ ۲ تبدیل می کنیم

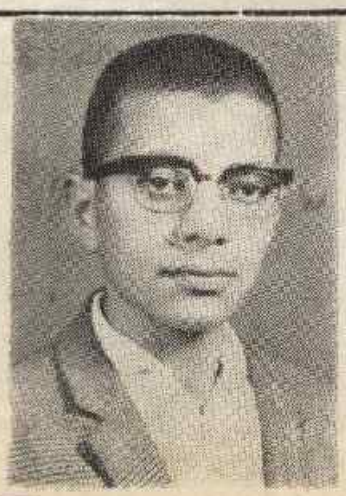
$$\Delta = 5[3 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}]$$
$$- 2[4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}]$$
$$+ 3[4 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}]$$
$$- 1[4 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}]$$
$$- 5[3(2 \times 3 - 0 \times 1) - 2(0 \times 3 - 4 \times 1) + 7(0 \times 0 - 2 \times 4)]$$
$$- 2[4(4 \times 3 - 0 \times 1) - 2(2 \times 3 - 5 \times 1) + 7(2 \times 0 - 5 \times 4)]$$
$$+ 3[4(0 \times 3 - 0 \times 1) - 3(2 \times 3 - 5 \times 1) + 7(2 \times 0 - 5 \times 0)]$$
$$- 1[4(0 \times 0 - 2 \times 4) - 3(2 \times 0 - 5 \times 4) + 2(2 \times 2 - 5 \times 0)]$$
$$= 5 \times 24 + 2 \times 94 - 9 - 36 = 263$$

بطور کلی در هر دترمینان رستهٔ n به تعداد اجزاء یك سطر دترمینان رستهٔ $n-1$ وجود دارد مثلا دترمینان رستهٔ ۴ به ۴ دترمینان رستهٔ ۳ وهر دترمینان رستهٔ سه به سه دترمینان رستهٔ ۲ وهر دترمینان رستهٔ ۲ به دو جمله تبدیل می‌شود پس تعداد حملات یك دترمینان رستهٔ چهاربرابر $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ است و بطورکلی تعداد جملاتی که از بسط دترمینان رستهٔ n حاصل می‌شود برابر $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times n = n!$ خواهدبود و اندازهٔ یك دترمینان رستهٔ n به صورت قراردادی زیر نمایش‌داده می‌شود .

$$\Delta nn = \sum_{K=1}^{K=n} (-1)^{i+K} a_{ik}\Delta_{ik}$$

Δ_{ik} یعنی دترمینان حاصل از حذف سطر i ام وستون K ام

وعلامت $\sum_{K=1}^{K=n}$ مجموع جملات که به‌ازاء k مساوی ۱و۲ و...n حاصل می‌شوند .



دانش‌آموز رتبهٔ اول

کلاسهای ششم ریاضی یزد

سید مهدی کمال‌الدینی

دبیرستان آرین

معدل ۱۹/۱۲

فرستندهٔ خبر، مطبوعاتی جهان نمایندگی فروش یکان در یزد

از میان نامه‌های رسیده

● آقای **غلامرضا فرزین** دانشجوی دانشکدهٔ افسری دربارهٔ اینکه دپشت یك میز گرد ۳ نفر به‌چند وضع می‌توانند بنشینند» توضیح داده‌اند که بر خلاف آنچه که درفصل «دترمینان» درصفحهٔ ۵ یکان شمارهٔ ۳۵ ذکر شده است ۳ نفر در پشت یك میز گرد فقط به ۲ وضع می‌توانند بنشینند . این مثال حالت خاصی از تبدیل مدور بوده ودر حالت کلی برای n نقطهٔ روی یك دایره رویهم $(n-1)!$ تبدیل وجود دارد .

● آقای **حسن کلاهمال** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان دارالفنون به دنبال مطلبی که در صفحهٔ پرسش وپاسخ چاپ شد تذکر داده‌اند که استفاده از فرمولهای

$$(۱)\quad \sin x=\frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}} \quad \text{و} \quad \cos x=\frac{۱-tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}$$

بشرطی جایزاست که $x\neq ۲k\pi+\pi$ باشد زیرا این‌فرمولها از تقسیم طرفین اتحادهای :

$$\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} \quad \text{و} \quad \cos x=\cos^{۲}\frac{x}{۲}-\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

بر $\cos^{۲}\frac{x}{۲}+\sin^{۲}\frac{x}{۲}$ و آنگاه از تقسیم عبارات صورت و مخرج کسرهای حاصل بر $\cos^{۲}\frac{x}{۲}$ بدست می‌آیند . اگر $\cos\frac{x}{۲}=۰$ باشد عمل اخیر جایز نمی‌باشد. بنابراین درحل معادلهٔ $۳\sin x-\cos x=۱$ استفاده از فرمولهای (۱) جایز نیست .

● آقایان **کامبیز علوی، جواد جمشیدی، غریبیان** وچند نفر دیگر از خوانندگان تذکر داده‌اند که در محاسبهٔ حجم مربوط به مسئلهٔ جبر کنکور دانشکدهٔ پلی‌تکنیك مندرج در یکان سال ۱۳۴۵ یك اشتباه فاحش روی داده است به‌این ترتیب که به جای آنکه تابع اولیهٔ تابع $\pi y^{۲}$ حساب شود از تابع πy حساب شده است ودر نتیجه جواب اشتباه بدست‌آمده است .

● آقای **کامبیز علوی** راجع به حل مسئلهٔ مکانیك همین دانشکده نیز توضیحاتی داده‌اند . چون بنا به تذکر یکی از خوانندگان راجع به حل این مسئله از مقامات دانشکدهٔ مزبور توضیحاتی خواسته شده است تذکرات آقای علوی هم‌بعد از وصول این توضیحات به‌نظر خوانندگان خواهد رسید .

● آقای **رمضان اصغرپور** دانش آموز دبیرستان پانزده بهمن تذکر داده‌اند که در محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع:

$$y=\frac{x^{۳}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

موضوع مسئلهٔ دانشکدهٔ فنی‌تبریز مندرج در یکان سال ۱۳۴۵ اشتباه شده است به‌این معنی‌که تابع به صورت زیر نوشته شده است .

$$y=x^{۲}(x^{۲}+۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

در صورتی‌که صحیح آن چنین است .

$$y=x^{۲}(x^{۲}+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$$

واز این‌جهت جواب بدست‌آمده نادرست می‌باشد .

معرفی کتاب

سه جزوه به‌عنوان

تمرینات ریاضی

و راهنمای حل

برای داوطلبان کنکور دانشگاه

تنظیم : م. هندی نژاد

به ادارهٔ مجله واصل شده است . مطالب این جزوه‌ها به‌شرح زیراست که دربارهٔ هرمطلب‌غیر از یادآوری تعاریف و تذکر نکات مسائل متعدد ومتنوعی هم‌چاپ شده است.

جزوهٔ اول: بخش‌پذیری ـ تصاعدها ـ بینم نیوتن‌ـطریقهٔ محاسبهٔ بعضی‌ازمجموعه‌ها. تمرینات

جزوهٔ دوم : دربارهٔ اتحادها ـ معادلات ـ روابط بین‌ضرایب وریشه‌ها. ریشه‌های مکرر.ریشهٔ مشترك‌دومعادله. اندازهٔ تقریبی ریشه‌ها. تمرینات

جزوهٔ سوم : تمرین معادلات ـ تعیین ریشهٔ منطق‌معادلات. بسط خطوط مثلثاتی mx برحسب x ـ لگاریتم ـ مشتق ـ تمرینات

تقاضا از خوانندگان و علاقمندان مجله که در امتحانات ورودی دانشکده‌های مختلف شرکت می‌کنند تقاضا دارد نسخه‌ای از سؤالات مربوط را به‌ادارهٔ مجله ارسال دارند .

نشریهٔ جدید یکان :

سرگرمیهای جبر

نوشتهٔ : پرلمان

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

باقطع جیبی وجلد شمیز بها ۶۰ ریال ـ باقطع بزرگ وکاغذ اعلا وجلد زرکوب بها ۱۰۰ ریال

انتشارات یکان :

مجموعهٔ علمی یکان سال
۶۰ ریال

یکان سال (امتحانات ۱۳۴۳)
۴۰ ریال (نایاب)

راهنمای ریاضیات متوسطه
چاپ دوم : ۱۵ ریال

معماهای ریاضی
۴۰ ریال (نایاب)

مسائلی از حساب استدلالی
جلد اول (نایاب)
جلد دوم: ۴۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴
۵۰ ریال (نایاب)

یکان سال ۱۳۴۵
۶۵ ریال (نایاب)

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تالیف: دکتر محسن هشترودی

نشریهٔ ممتاز یکان { ۱۲۰ ریال / ۱۵۰ ریال