دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ

۳

شمارهٔ مسلسل

۴۰

آذر ۱۳۴۶

برهان

مجلهٔ ریاضیات

دراین شماره:

دبیرستانهای تجربی	عبدالحسین مصحفی	۱۳۳
مراحل مهم علم نجوم	ترجمه	۱۳۴
دربارهٔ محور اصلی	ترجمهٔ جعفر آقایانی	۱۳۵
دترمینان	سید کاظم نائینی	۱۳۹
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۱۴۳
دوران محورهای مختصات	علی عاملی	۱۴۵
حل یك مسئلهٔ شیخ بهائی	علی رضائی	۱۴۷
مثلث	ترجمه	۱۴۸
قابلیت تقسیم بریك عدد	«	۱۵۲
راهنمای حل مسائل هندسه	«	۱۵۴
راهنمای رسم فنی	مهندس شیرمحمدی	۱۵۵
داستانهاتفننی ریاضی	ترجمه	۱۵۸
سرگرمیهای ریاضی	-	۱۶۰
مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات‌داخلی دبیرستانها	-	۱۶۱
حل‌مسئلهٔ نمونه‌مسئلهٔ سه‌کارخانه	ترجمهٔ شاهپورکاظمی	۱۹۰
بی آنکه عصبانی شوید	ترجمهٔ کارابتیان	۱۹۱
Problems & Solutions	-	۱۹۲
مسائل برای حل	-	۱۹۳
حل‌مسائل یکان‌شمارهٔ ۳۸	-	۱۹۷
ریاضی جدید	-	۲۰۸

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots + x^n$$

بها: بیست و پنج ریال

از انتشارات یکان:

مقدمه بر

تئوری مجموعه ها

تألیف :

علی‌اصغر هومانی

به ضمیمهٔ :

فرهنگ فارسی-انگلیسی ، فرهنگ انگلیسی -فارسی

اصطلاحات ریاضی جدید

با مقدمه‌ای از:

استاد دکتر محسن هشترودی

آمادهٔ فروش است

بهاء ۵۰ ریال

تشکر

استاد دانشمند آقای **دکتر وازگن آوانیسیان** مجموعه‌ای از جزوات مربوط به دروسی را که در دانشگاه استراسبورگ زیر عنوان :

Algèbre Linéaire

ایراد کرده‌اند برای ادارهٔ مجلهٔ یکان ارسال داشته‌اند.

بدین‌وسیله از ایشان سپاسگزاری می‌شود و امیدواراست وسائلی فراهم آید تا ترجمهٔ به فارسی این دروس برای استفادهٔ علاقمندان درمجلهٔ یکان درج گردد.

انجمن ریاضی دبیرستان کمال

آقای **حسن‌گل محمدی** اطلاع داده‌اند که ازاوایل آبان‌سال جاری انجمن ریاضی دبیرستان کمال به سرپرستی آقای **رجائی** دبیرریاضیات تشکیل شده و هفته سه‌بار تشکیل جلسه می‌دهد.

این انجمن دارای سه‌نوع عضو است: عضو هیئت‌مدیره که از حائزین بهترین نمرهٔ ریاضی سال قبل می‌باشد - عضووابسته برای کسب اطلاعات بیشتر ریاضی - عضو پیوسته برای جبران کمبودهای درسی.

جلسات انجمن معلمان ریاضی

جلسات هیئتهای سه‌گانهٔ انجمن معلمان ریاضی ابتدا از ۹/۱۹ هرپانزده روز یك بار عصرهای یکشنبه از ساعت ۵ تا ۷ بعدازظهر در محل دبیرستان شمارهٔ ۱ آذر دایر است. حضور همهٔ معلمان ریاضی در این جلسات آزاد است.

عزیمت به‌فرانسه

آقای **عطاءالله بزرگ‌نیا** بااستفاده ازیك بورس‌واگذاری دولت فرانسه برای مطالعه در آخرین پیشرفتهای علم شیمی به کشور فرانسه عزیمت کردند.

مدیر و سایر نویسندگان مجلهٔ یکان توفیق همکارگرامی خودرا درادامهٔ مطالعات علمی آرزومندند.

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ چهارم - شمارهٔ سوم - شمارهٔ مسلسل: ۴۵

آذر ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانکه صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV , number 3 , Nov. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

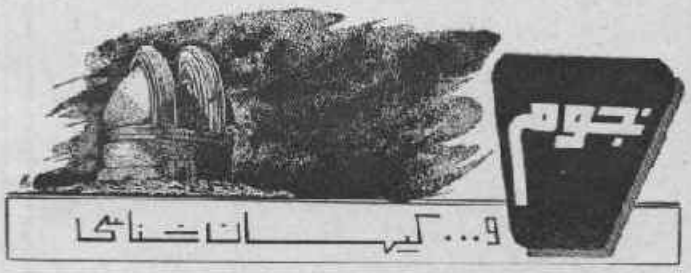
دبیرستانهای تجربی

از ابتدای سال تحصیلی ۴۸ـ۱۳۴۷ برنامهٔ دورهٔ راهنمائی ، طبق نظام‌نوین آموزش و پرورش ، به‌مرحلهٔ اجرا در می‌آید ؛ و بنابرقاعده ، سه سال بعد از آن مرحلهٔ اجرائی برنامهٔ دورهٔ تعلیمات متوسطهٔ نظری آغاز خواهد شد .

اگر قرار است برنامهٔ ریاضیات دوره‌های جدید تحصیلی هماهنگ برنامهٔ ریاضیات کشورهای پیشرفته و براساس ریاضیات جدید تنظیم شود ، شایسته است که همانند همان کشورها ، نخست برنامهٔ جدید دریك یاچند دبیرستان به‌عنوان آزمایش پیاده گردد و دقیقاً ارزشیابی شود ،آنگاه تجدید نظر های لازم در آن بعمل آمده در تمام دبیرستانهای کشور به مرحلهٔ اجرا گذاشته شود .

نیازی نیست که اجرای آزمایشی برنامه‌های جدید دریك یا چند دبیرستان تجربی ، به بعد از خاتمهٔ اجرای برنامهٔ دورهٔ راهنمائی موکول شود ؛ اگر از هم اکنون مقدمات کار فراهم آید، شروع به کار این دبیرستانها از ابتدای سال تحصیلی ۴۸ ـ ۴۷ عملی خواهد بود . در این صورت ، سه سال بعد از آن یعنی هنگامی که بنابرقاعده مرحلهٔ اجرائی‌دورهٔ تعلیمات متوسطهٔ نظری‌آغاز خواهد شد برنامهٔ مربوط به‌آن از مرحلهٔ آزمایش گذشته نقایص آن برطرف شده و می‌توان آنرا با قاطعیت (نه مانند سایر برنامه‌ها به عنوان آزمایشی !) در دبیرستانهای سر تا سر کشور مجری داشت .

عبدالحسین مصحفی



مراحل مهم علم نجوم

ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Astronomie Moderne» تألیف : **TOCQUET**

۳ = دورهٔ نزدیك معاصر

فلاماریون
۱۸۴۲ – ۱۹۲۵

وجه امتیاز خاص این دوره از علم نجوم انتشارات مربوط به این علم است که بموازات سایر نشریات برای شائقین خواندنیهای علمی تهیه می‌شد. در این مورد باید اذعان کرد ، درضمن مباهات نمود، که اولین قدم را تحت رهبری **کامیی فلاماریون** فرانسویها برداشتند .

کامیی فلاماریون (Camille Flammarion) که از یك خانوادهٔ دهقان در ۲۶ فوریهٔ ۱۸۴۲ در **مونتینیی لوروا** (Montigny – le – Roi) مرکز ایالت **اوت مارن** (Haute – Marne) به‌دنیا آمد یکی از مروجین پرحرارت علوم سماوی می‌باشد . در تمام عمرش کوشیده است که علم نجوم را بدون آنکه به‌ابتذال بکشاند همگانی کند وشگفتیهای جهان را به‌عموم بفهماند. تاحدسماجت کار می‌کرد ، دانشمندی بود که به‌منافع شخصی پشت‌پا زده‌بود، محققی‌بود که خستگی‌سرش نمی‌شد، زندگی این مرد فوق‌العاده وقف مطالعه ومخصوصاً ایجاد رغبت برای درك علم نجوم در دیگران بوده وهمهٔ عشق وعلاقهٔ شخصی وی دراین علم خلاصه شده بود. می‌توان ادعاکرد که در تمام روی زمین و در تمام محافل اجتماعی کمتر شخصی شناخته می‌شود که محضری‌اینچنین باعظمت ودرحال توسعه داشته باشد. **امیل توشه** می‌نویسد: «بین مؤسسین آئینهای بزرگ و بانیان مکاتب فلسفی هم یك چنین شخصیت استثنائی به‌ندرت وجود دارد که در افکارعمومی این‌همه نفوذ داشته‌آثار وی هزاران و هزاران طرفدار داشته هرروز مریدان علمی تازه‌ای پیدا کند .» حتی در عصر ما هم برای بسیاری از مردم نام فلاماریون مترادف با علم نجوم می‌باشد .

مجموعهٔ آثار وی بیشمار واز لحاظ موضوع پراکنده‌است اما درهرحال عبارت می‌باشد از بیان‌ساده وموجز دانش. این مجموعه غیرازتعداد زیادی مقالات فلسفی وعلمی شامل‌تألیفاتی ازقرار زیر است: دوازده تألیف راجع به نجوم عملی، پانزده تألیف دربارهٔ تعلیم علم نجوم که از بین‌آنها **نجوم برای‌همه** مشهور است، ده‌تألیف دربارهٔ علوم مختلف ، هفت تألیف‌فلسفی، هشت‌تألیف مربوط به‌متافیزیك و شش تألیف ادبی. علاوه‌بر آن وی در زمینه‌های فنی مختلف تحقیقات ارزنده‌ای انجام داده است که مهمترین آنها تحقیقات در بارهٔ ستارگان دوقلو ، در بارهٔ زهره، دربارهٔ ماه،دربارهٔسیارات مخصوصاً مریخ که مورد توجه‌خاص او بوده می‌باشد. فلاماریون بیشتراز شصت گزارش به‌آکادمی علوم تقدیم داشته است . تعداد قابل توجهی از این گزارشها تحقیق و بحث دربارهٔ مطالعات نجومی است که خود یك مجموعهٔ ارزندهٔ علمی را تشکیل می‌دهد.

یکی از آرزوهای فلاماریون این بود که رصد خانه‌ای شخصی داشته باشد و بتواند اوقات فراغت خود را در آنجا به مشاهدهٔ آسمان بپردازد . این آرزو در ۱۸۸۲ برآورده شد به این ترتیب که یکی از مریدان ناشناس وی یك ملك مرغوب واقع در Juvisy – sur – Orge را به وی هدیه‌کرد ودر آنجا رصدخانه‌ای بناشدکه در آن یك دوربین نصف النهاری‌به قطر ۲۴ سانتیمتر بکارگذاشته شد. این رصدخانه بااحداث یك ایستگاه جوشناسی ویك ایستگاه کسب اطلاعات از طریق اشعهٔ کیهانی تکمیل گردیده است .

فلاماریون درهمان سال۱۸۸۲ **مجلهٔ نجوم** را تأسیس کرد که تا سال ۱۸۹۴ مرتباً منتشر می‌شد ، در این سال نام مجله با عنوان **بولتن مؤسسهٔ نجوم فرانسه** عوض شد . این مؤسسه در ۱۸۸۷ با همکاری گروهی از منجمین مشهور تأسیس شده بود ، گروهی از شخصیتهایی‌که سعی داشتند جهان را بشناسند، نظری‌یا عملی به نجوم‌اشتغال داشتند، می‌کوشیدند تا علم آسمان را به صورت مفید و قابل استفاده توسعه دهند و

قضیه هایی مربوط به :

محور اصلی

دوایر متحدالمحور با دایرهٔ محیطی مثلث

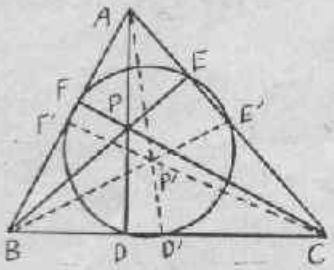
نوشتهٔ: D.Moody Bailey

مجلهٔ: Mathematics magazine

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

بخش ۲



دایرهٔ محیطی مثلث سوائی DEF نقطهٔ P را رسم کرده و فرض می‌کنیم این دایره اضلاع AB و CA و BC مثلث ABC را به ترتیب در نقاط F' و E' و D' قطع نماید .

قطعه‌خطهای CF' و BE' و AD' در یك نقطه متقاربند، معلوم است که :

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)-b^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)+c^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}{a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)+b^2\left(\frac{BD}{CD}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)-c^2\left(\frac{BD}{CD}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}$$

برای $\frac{CE'}{E'A}$ و $\frac{AF'}{F'B}$ مقادیری مشابه‌وجود دارد.

بقیه از صفحهٔ قبل

بالاخره از اثراین علم در رشدافکار و اندیشه‌ها استفاده کنند.»

این مؤسسه به زودی به صورت یکی از بزرگترین مؤسسات علمی جهان در آمد . این مؤسسه را در زمان حاضر می‌توان یك فامیل بزرگ علمی شامل بیش از ۵۰۰۰ عضو تلقی کرد . در تهیهٔ بولتن آن مهمترین دانشمندان و منجمین فرانسه و کشورهای دیگر همکاری می‌کنند وخوانندگان آنرا باآخرین پیشرفتهای علم نجوم وعلوم دیگری‌که به آن مربوط می‌شود در جریان می‌گذارند . جایگاه این مؤسسه که در شمارهٔ ۲۸ خیابان سرپانت پاریس واقع می‌باشد شامل یك رصدخانهٔ کامل است‌که خود ازچندین بخش مختلف تشکیل شده ومورد استفادهٔ اعضای مؤسسه است . بخشهای مهم مؤسسه عبارتند از : بخش مشاهدات و مطالعات عملی در بارهٔ آسمان ، کتابخانه ، تالار کنفرانس ، بولتن ماهانه و بولتن سالانهٔ نجوم . هر فرد فرانسوی‌که به مطالعات نجومی علاقمندباشد باید قبول عضویت درمؤسسه را وظیفه‌ای برای خودبداند. چنانکه **آلفونس برژه** توضیح می‌دهد: «وقتی‌که عده بالارود اثرآنها افزون می‌گردد و نیروی پراکندهٔ آنها جمع می‌شود ؛ حتی با حداقل همکاری بزرگترین بهره‌ها را بر می‌دارند که از نظر مطالعات شخصی هم برای آنها رجحان دارد» .

مؤسسات نجومی دیگری مشابه با مؤسسه نجومی فرانسه درکشورهای دیگر تأسیس شده است :

دربلژیك (۱۸۹۵)، در اسپانیا (۱۹۱۱)، درانگلستان در آلمان ، درایتالیا، درکشورهای متحدهٔ آمریکا . وغیره .

دورهٔ نزدیك معاصر به طور خلاصه از این قرار شد که ازیك طرف در اثرفعالیتهای دانشمندان وریاضیدان علم مکانیك سماوی توسعه یافت ، اوضاع سیارات منظومهٔ شمسی در روی کرهٔ سماوی مشخص شد ، با استفاده از طیف نورستارگان ساختمان اجرام‌سماوی معین گردید وبالاخره با پیدایش فن عکسبرداری از آسمان گام تازه‌ای در راه پیشرفت علم نجوم برداشته شد.

هریك از سه‌جملهٔ مخرج کسر اخیر را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)=a^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=a^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\frac{BD}{DC}$$

$$b^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)-b^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\frac{BD}{DC}$$

$$c^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)=c^2\left(\frac{CD}{BD}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\frac{BD}{DC}$$

اگر MNO محور اصلی دایرهٔ DEF با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد طبق قضیهٔ (۱) داریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}$$

اگر به جای $\frac{BD'}{D'C}$ مقدارش را که قبلا معین کردیم قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)-b^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)+c^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}{a^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)+b^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)-c^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}$$

به‌همین طریق می‌توان مقادیری مشابه برای نسبتهای $\frac{CN}{NA}$ و $\frac{AO}{OB}$ بدست آورد .

قضیهٔ ۶ـ فرض می‌کنیم P نقطه‌ای واقع در صفحهٔ مثلث و DEF مثلث سوائی آن باشد . محور اصلی دایرهٔ DEF با دایرهٔ محیطی ABC اضلاع AB و AC و BC را به ترتیب در M و O و N قطع می‌کند و داریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)-b^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)+c^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}{a^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)+b^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)-c^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{CE}{EA}+1\right)}$$

$$\frac{CN}{NA}=-\frac{b^2\left(\frac{CD}{DB}+1\right)\left(\frac{BF}{FA}+1\right)-c^2\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\left(\frac{CD}{DB}+1\right)+a^2\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\left(\frac{AF}{FB}+1\right)}{b^2\left(\frac{BD}{DC}+1\right)\left(\frac{AF}{FB}+1\right)+c^2\left(\frac{AE}{EC}+1\right)\left(\frac{CD}{DB}+1\right)-a^2\left(\frac{AE}{EC}+1\right)\left(\frac{AF}{FB}+1\right)}$$

$$\frac{AO}{OB}=-\frac{c^2\left(\frac{AE}{EC}+1\right)\left(\frac{CD}{DB}+1\right)-a^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)+b^2\left(\frac{AF}{FB}+1\right)\left(\frac{BD}{DC}+1\right)}{c^2\left(\frac{CE}{EA}+1\right)\left(\frac{BD}{DC}+1\right)+a^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{AE}{EC}+1\right)-b^2\left(\frac{BF}{FA}+1\right)\left(\frac{BD}{DC}+1\right)}$$

اگر P را مرکز ثقل مثلث انتخاب کنیم داریم :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=1$$

پس دایرهٔ DEF دایرهٔ نه نقطهٔ (دایرهٔ اویلر) مثلث ABC می‌شود و از قضیهٔ ۶ حاصل می‌گردد :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\text{ ، }\frac{CN}{NA}=-\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}\text{ ، }\frac{AO}{OB}=-\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$$

باتوجه به قضیهٔ (۲) معلوم است که محور اصلی دایرهٔ نه نقطه بادایرهٔ محیطی مثلث ، قطبی (Trilinear polar) نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. این محور اصلی یعنی خط MNO محور ارتفاعی مثلث نامیده می‌شود .

قضیهٔ ۶ A ـ فرض می‌کنیم P **نقطهٔ ژرگون** (Gergonne) مثلث ABC باشد . نقاط F و E و D نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث با اضلاع آن می‌شوند وداریم :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{a+c-b}{a+b-c}\ ,\ \frac{CE}{EA}=\frac{a+b-c}{b+c-a}\ ,\ \frac{AF}{FB}=\frac{b+c-a}{a+c-b}$$

به‌جای طرف چپ این نسبتها مقادیرشانرا ازقضیهٔ ۶ قرارمی‌دهیم. چون دایرهٔمحاطی مثلث حالت خاصی ازدایرهٔ (D' و D)است که D و D' برهم منطبق شده‌اند پس داریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}=-\left(\frac{BD}{DC}\right)^2=-\left(\frac{a+c-b}{a+b-c}\right)^2$$

به همین طریق نقاط E و E' روی ضلع CA و F و F' روی ضلع AB برهم منطبق می‌شوند .

قضیهٔ ۶B ـ محوراصلی دایرهٔ محاطی با دایرهٔ محیطی مثلث ABC اضلاع AB و CA و BC مثلث‌را به ترتیب در O و N و M قطع می‌کنند وداریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{a+c-b}{a+b-c}\right)^2\ ,\ \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{a+b-c}{b+c-a}\right)^2\ ,\ \frac{AO}{OB}=-\left(\frac{b+c-a}{a+c-b}\right)^2$$

اگر DEF مثلث سوائی نقطهٔ P نسبت‌به‌مثلث ABC باشد، ممکن است‌امتداد AB وCA و BCاضلاع EF و FB و DE را به ترتیب در F' و E' و D' قطع کنند فرض کنیم O و N و M اوساط قطعه خطهای FF' و EE' و DD' باشند معلوم است که :

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{BD}{DC}\right)^2\ ,\ \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{CE}{EA}\right)^2\ ,\ \frac{AO}{OB}=-\left(\frac{AF}{FB}\right)^2$$

ونقاط M و N و O بریك استقامت هستند .

اگر P نقطهٔ ژرگون باشد ازقضیهٔ فوق‌الذکر نتیجه می‌شودکه اوساط FF' و EE' و DD' برمحوراصلی دایرهٔمحاطی ودایرهٔ محیطی واقع هستند .

فرض می‌کنیم‌که F و E و D به ترتیب به نقاط تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A با اضلاع AB و CA و BC مثلث باشند. قطعه خطهای AD و BE و CF درنقطهٔ P متقارب خواهندبود وداریم :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{a+b-c}{a+c-b}\ ,\ \frac{CE}{EA}=-\frac{a+c-b}{a+b+c}\ ,\ \frac{AF}{FB}=-\frac{a+b+c}{a+b-c}$$

بابکاربردن قضیهٔ (۱) ویا جانشین سازی درقضیهٔ ۶ محوراصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ محاطی خارجی معین می‌شود .

قضیهٔ ۶ Cـ محوراصلی دایرهٔ محاطی خارجی نظیررأس A ودایرهٔ محیطی مثلث ABC اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب درنقاط O و N و M قطع می‌کنند داریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{a+b-c}{a+c-b}\right)^2\ ,\ \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{a+c-b}{a+b+c}\right)^2\ ,\ \frac{AO}{OB}=-\left(\frac{a+b+c}{a+b-c}\right)^2$$

برای نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی رأس B خواهیم داشت :

$$\frac{BD}{DC}=-\frac{a+b+c}{b+c-a}\ ,\ \frac{CE}{EA}=\frac{b+c-a}{a+b-c}\ ,\ \frac{AF}{FB}=-\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{a+b+c}{b+c-a}\right)^2\ ,\ \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{b+c-a}{a+b-c}\right)^2\ ,\ \frac{AO}{OB}=-\left(\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)^2$$

برای دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس C داریم :

$$\frac{BD}{DC}=-\frac{b+c-a}{a+b+c}\ ,\ \frac{CE}{EA}=-\frac{a+b+c}{a+b-c}\ ,\ \frac{AF}{FB}=\frac{a+c-b}{b+c-a}$$

و بوسیلهٔ کسرهای زیرمحور اصلی MNO معین می‌شود .

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)^{2}\ ,\ \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{a+b+c}{a+c-b}\right)^{2}\ ,\ \frac{AO}{OB}=-\left(\frac{a+c-b}{b+c-a}\right)^{2}$$

خواننده توجه داردکه نسبت های مشترك با محورهای اصلی که درقضیهٔ B۶ و C۶ ذکرشده‌اند همهٔ منفی‌هستند. نقطهٔ P برای خواننده اختیاری است ومی‌تواند مرکزدایرهٔ محاطی‌یا مرکزثقل ویانقطهٔ دیگری ازمثلث انتخاب‌شود .

فرض‌کنید دوخط مستقیم درصفحهٔ مثلث ABC اضلاع AB و CA و BC رابه ترتیب درنقاط O و N و M و O' و N' و M' قطع نمایند. واین دوخط یعنی خطوط MNO و M'N'O' یکدیگررا در P قطع‌کنند. همچنین امتداد قطعه خطهای CP و BP و AP بااضلاع AB و AC و BC به‌ترتیب درنقاط F و E و D متلاقی شوند. معلوم است‌که

$$\frac{BD}{DC}=-\left(\frac{BO}{OA}-\frac{BO'}{O'A}\right):\left(\frac{CN}{NA}-\frac{CN'}{N'A}\right)\ ,\ \frac{AF}{FB}=-\left(\frac{AN}{NC}-\frac{AN'}{N'C}\right):\left(\frac{BM}{MC}-\frac{BM'}{M'C}\right)\ ,$$

$$\frac{CE}{EA}=-\left(\frac{CM}{MB}-\frac{CM'}{M'B}\right):\left(\frac{AO}{OB}-\frac{AO'}{O'B}\right)$$

درقضیهٔ A۶ وB۶ هرگاه خطوطMNO و M'N'O' رامحورهای اصلی انتخاب‌کنیم نقطهٔ P محل تلاقی این محور-های اصلی خواهد شد .

نقطهٔ P علاوه برآن‌مرکزاصلی دایرهٔ‌نه ونقطه ودایرهٔ‌محاطی ودایرهٔ محیطی‌مثلث ABC نیز می‌باشد . ونسبتهای $\frac{BM}{MC}$ و $\frac{AO}{OB}$ و $\frac{CN}{NA}$ رامی‌توان از پاراگراف آخر قضیهٔ A۶ معین‌کرد . ونیز نسبتهای $\frac{B'M}{M'C}$ و $\frac{CN'}{N'A}$ و $\frac{AO'}{O'B}$ از قضیهٔ B۶ معین می‌شوند .

$$\frac{BM}{DC}=-\left(\frac{BO}{OA}-\frac{BO'}{O'A}\right):\left(\frac{CN}{NA}-\frac{CN'}{N'C}\right)=\left(\frac{a-b}{c-a}\right)\left(\frac{a^{3}+b^{3}-2c^{3}+ac^{2}+bc^{2}-ab^{2}-a^{2}b}{a^{3}+c^{3}-2b^{3}+b^{2}c+ab^{2}-a^{2}c-ac^{2}}\right).$$

به همین طریق برای $\frac{CE}{EA}$ و $\frac{AF}{FB}$ مقادیری نظیر بدست می‌آیند .

قضیهٔ ۷ـ نقطهٔ P را مرکزاصلی دایرهٔ محاطی ، دایرهٔ نه نقطه ودایرهٔ محیطی مثلث ABC انتخاب‌کرده و DEF مثلث سوائی آنرا درنظرمی‌گیریم . داریم :

$$\frac{BD}{DC}=\left(\frac{a-b}{c-a}\right)\left(\frac{a^{3}+b^{3}-2c^{3}+ac^{2}+bc^{2}-ab^{2}-a^{2}b}{a^{3}+c^{3}-2b^{3}+b^{2}c+ab^{2}-a^{2}c-ac^{2}}\right)$$

$$\frac{CE}{EA}=\left(\frac{b-c}{a-b}\right)\left(\frac{b^{3}+c^{3}-2a^{3}+a^{2}b+a^{2}c-bc^{2}-b^{2}c}{a^{3}+b^{3}-2c^{3}+ac^{2}+b^{2}c-ab^{2}-a^{2}b}\right)$$

$$\frac{AF}{FB}=\left(\frac{c-a}{b-c}\right)\left(\frac{a^{3}+c^{3}-2b^{3}+b^{2}c+ab^{2}-a^{2}c-ac^{2}}{b^{3}+c^{3}-2a^{3}+a^{2}b+a^{2}c-bc^{2}-b^{2}c}\right)$$

معلوم است‌که محور اصلی دوایر DEF و ABC با استفاده ازقضیهٔ ۶ معین می‌شود . اگر D'E'F' مثلث سوائی‌نقطهٔ P' باشد محوراصلی دوایر D'E'F' و ABC به همان طریق بدست می‌آید . بوسیلهٔ قضیهٔ ۶ می‌توان مرکز اصلی دوایر ABC و DEF و D'E'F' رامعین‌کرد .

فرض می‌کنیم P و P' دونقطهٔ مزدوج هم گوشه بوده و مثلث هائی سوائی آنها به ترتیب DEF و D'E'F' باشد . از P عمودهائی براضلاع AB و CA و BC مثلث فرودآورده وپای آنهارا به ترتیبI و H و G می‌نامیم ونیزاز P' عمودهائی‌بر اضلاع این مثلث رسم‌کرده وپای آنهارا I' و H' و G' می‌نامیم .

دنباله در صفحهٔ ۲۱۱

دترمینان

تنظیم از : سید محمدکاظم نائینی با استفاده از منابع خارجی

دنباله از شمارهٔ گذشته

اینك‌مواردداستعمال دترمینان را از ابتدائی‌ترین‌مراحل پیدایش آن مورد بررسی قرار داده و گسترش دامنهٔ وسیع‌آن را به خواص جالب جبر ماتریسی مرتبط می‌سازیم.

ساده ترین مرحلهٔ استفاده در حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول است که در سال سوم متوسطه تدریس‌می‌شود

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

چنانکه می‌دانیم برای حل این دستگاه از روش حذفی عمل کرده و مقادیر x و y بر حسب ضرایب به قرار زیر بدست می‌آیند :

$$x=\frac{dp-bq}{ad-bc} \quad و \quad y=\frac{aq-cp}{ad-bc}$$

این دو کسر که به دستور کرامر معروفند مخرجهای مشترك دارند و چنانکه مشاهده می‌شود با توجه به تعریف دترمینان صورت و مخرج هر کدام یك دترمینان رسته ۲است:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

مخرج صورت x صورت y

پس می‌توان نوشت :

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta} \quad و \quad x=\frac{\Delta x}{\Delta}$$

که در آن Δx و Δy و Δ به ترتیب دترمینانهای فوق می‌باشند . درعمل هر سه ستون ضرائب را در دو سطر می‌نویسند سپس

$$\begin{vmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{vmatrix}$$

به ترتیب ، ستون اول را حذف کرده به جایش ستون سوم را قرار می‌دهند ، Δx بدست می‌آید ، ستون دوم را حذف کرده ستون سوم را جایگزین آن می‌کنند . Δy نتیجه می‌شود ودو ستون اول ، دترمینان مخرج است .

مثال عددی: دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 5x-3y-7=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$$

سپس دترمینان‌ضرائب اول می‌نویسیم $\begin{cases} 5x-3y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

را تشکیل می‌دهیم و از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5+6=11$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=7+15=22 \quad و$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=25-14=11 \quad و$$

بنا براین :

$$y=\frac{11}{11}=\frac{\Delta y}{\Delta}=1 \quad و \quad x=\frac{22}{11}=\frac{\Delta x}{\Delta}=2$$

بدیهی است دستگاه وقتی دارای جواب است که $\Delta\neq 0$ باشد. اگر $\Delta=0$ باشد دستگاه نشدنی است و در این حالت اگر Δx یا Δy نیز صفر باشند دستگاه مبهم است در حل دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases}$$

درجهٔ اول نیز دستوراتی مشابه وجود دارد ؛ دستورات کرامر

در حل این دستگاه به صورتهای زیر درمی‌آیند :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

که در آن

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a & c & p \\ d & f & q \\ g & i & r \end{vmatrix} \quad \text{و}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود Δ دترمینان ضرائب مجهولات است و برای تشکیل دترمینانهای مربوط به x و y و z به ترتیب ستون ضرائب آن مجهول را در Δ حذف کرده به‌جای آن ستون اعداد ثابت را قرار می‌دهیم . درحقیقت Δ مفسر دستگاه است و برحسب آنکه صفر یا مخالف صفر باشد دستگاه ممتنع یا دارای جواب خواهد بود.

مثال عددی: دستگاه سه‌معادله‌سه‌مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+3z=9 \\ -3y+z=-3 \end{cases}$$

ابتدا دترمینان ضرائب را نوشته محاسبه می‌کنیم سپس مقادیر x و y را طبق دستورات کرامر تعیین می‌نمائیم .

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=8-2+6=12$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=0\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=0-18+30=12$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=18-0+6=24$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=30+6+0=36$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{12}{12}=1 \quad \text{و} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{24}{12}=2$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{36}{12}=3$$

به همین‌ترتیب به کمک نوعی استدلال که از حوصلهٔ این مقال خارج است (استدلال ازطریق بازگشت) وجود دستورات کرامر را برای حل دستگاه n معادلهٔ n مجهولی درجهٔ اول به ثبوت می‌رسانند. دراین حالت دترمینان ضرائب یعنی Δ از رتبهٔ n است :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{و} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{و} \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \quad \text{و} \quad \ldots\ldots$$

با توجه به‌اینکه یک‌معادلهٔ درجهٔ یک دو مجهولی نمودار جبری خطی مستقیم درصفحه است ویک‌معادلهٔ درجهٔ یک سه‌مجهولی نمودار جبری خط مستقیم در فضا است ، یک معادلهٔ درجهٔ یک n مجهولی نیز نمودار جبری خطی مستقیم در یک فضای n بعدی است .

تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی تعیین نقطهٔ برخورد دو خط در صفحه و تعبیر هندسی حل دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهول تعیین نقطهٔ برخورد سه‌خط در فضا و بالاخره تعبیر هندسی حل‌دستگاه n معادلهٔ n مجهولی درجهٔ اول تعیین نقطهٔ برخورد n خط در یک فضای n بعدی است و بدیهی‌است وقتی که تجسم فضای ۴ بعدی برای ما غیر ممکن است حتی تصور فضای n بعدی ما را در وادی مجهولات حیران می‌سازد

یک مثال مثلثات : می دانیم که در هر مثلث بین اضلاع و کسینوس زوایا روابط زیر برقرار است :

$$\begin{cases} b\cos C+c\cos B=a \\ c\cos A+a\cos C=b \\ a\cos B+b\cos A=c \end{cases}$$

اگر بخواهیم این دستگاه‌را نسبت به اضلاع a و b و c حل کنیم آنرا به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} -a+b\cos C+c\cos B=0 \\ a\cos C-b+c\cos A=0 \\ a\cos B+b\cos A-c=0 \end{cases}$$

دترمینان ضرائب عبارتست از:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & \cos C & \cos B\\ \cos C & -1 & \cos A\\ \cos B & \cos A & -1\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta_a=\begin{vmatrix}0 & \cos C & \cos B\\ 0 & -1 & \cos A\\ 0 & \cos A & -1\end{vmatrix}$$

و چنانکه ملاحظه می‌شود $\Delta_a=0$ است و به همین ترتیب به آسانی ملاحظه می‌شود که : $\Delta_b=0$ و $\Delta_c=0$

پس : $$a=\frac{0}{\Delta} \quad \text{و} \quad b=\frac{0}{\Delta} \quad \text{و} \quad c=\frac{0}{\Delta}$$

است و چون a و b و c اضلاع مثلث و مخالف‌صفراند لذا باید $\Delta=0$ باشد

اگر دترمینان ضرایب یعنی $\Delta=0$ را بسط دهیم‌چنین خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc}+\searrow & & \swarrow -\\ +\searrow & \begin{vmatrix}-1 & \cos C & \cos B\\ \cos C & -1 & \cos A\\ \cos B & \cos A & -1\end{vmatrix} & \swarrow -\\ +\searrow & & \swarrow -\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & \cos C & \cos B\\ \cos B & \cos A & -1\\ -1 & \cos C & \cos B\\ \cos C & -1 & \cos A\end{vmatrix}$$

$$\Delta=-1+\cos C\cos A\cos B+\cos B\cos C\cos A$$
$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-0$$

و نتیجه خواهد شد درهر مثلث رابطهٔ زیر برقراراست:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C-1$$

دترمینان وابسته یا الحاقی (ADJOINT)-

به عنوان مثال دترمینان 3×3 را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\Delta$$

اگر این‌دترمینان‌را نسبت به‌اعضای سطر اول بسط داده‌ضرائب را A_1 و B_1 و C_1بنامیم سپس به همین ترتیب نسبت‌به‌اعضای دو سطر دیگر بسط داده و ضرایب را A_2 و B_2 و C_2 و A_3 و B_3 و C_3 بنامیم خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\Delta=A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1\\ \Delta=A_2x_2+B_2y_2+C_2z_2\\ \Delta=A_3x_3+B_3y_3+C_3z_3\end{cases}$$

دترمینان ضرائب را در دستگاه معادلات زیر دترمینان وابسته یا الحاقی می‌نامند و آنرا به Δ^π نمایش می‌دهند:

$$\Delta^\pi=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$$

اگر این دودترمینان یعنی Δ و Δ^π را در هم ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$\Delta\cdot\Delta^\pi=\begin{vmatrix}\Delta & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{vmatrix}=\Delta^3 \rightarrow \Delta^\pi=\Delta^2$$

و بهمین ترتیب ثابت می‌شودکه دترمینان الحاقی رستهٔ ۴ برابر Δ^3 و دترمینان الحاقی رستهٔ n برابر Δ^{n-1} است.

ضرب دو دترمینان بدین نحو صورت گرفت که اجزاء سطر اول را دراجزاء سطر اول دیگری‌یك یك ضرب کرده با هم جمع کردیم وجملهٔ اول دترمینان حاصل ضرب قرار دادیم سپس برای جملات دوم و سوم سطر اول حاصل ضرب نیز همان اجزاء سطر اول مضروب را دراجزاء سطر دوم وسوم مضروب فیه ضرب می‌کنیم و برای تعیین اجزاء سایر سطرها نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم . مثال زیر این مطلب را واضح می‌کند.

مثال- دترمینان الحاقی Δ را به همان صورت دترمینان بنویسیدسپس حاصل‌ضرب $\Delta\Delta^\pi$ را بدست‌آورید :

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2(3-35)-4(-1-10)+1(-7-6)=-33$$

نسبت به سطر اول بسط داده‌شد.

اگر این دترمینان را نسبت به سطرهای اول و دوم و سوم بسط دهیم تساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$\Delta=2\begin{vmatrix}3 & 5\\ 7 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\Delta=+1\begin{vmatrix}4 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\Delta=2\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

در نتیجه معادلات زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\Delta=2(-32)+4(11)+1(-13)\\ \Delta=-1(+3)+3(0)+5(-6)\\ \Delta=2(17)+7(-11)+1(10)\end{cases}$$

دترمینان ضرائب که همان‌دترمینان الحاقی‌است به‌صورت

زیر خواهد بود:

$$\Delta^{\pi}=\begin{vmatrix}-۳۲ & ۱۱ & -۱۳\\ +۳ & ۰ & -۶\\ ۱۷ & -۱۱ & ۱۰\end{vmatrix}$$

مقدار این دترمینان پس از محاسبه برابر ۱۵۸۹ است که مربع (۳۳−) ، اندازهٔ دترمینان Δ است یعنی :

$$\Delta^{۲}=\Delta^{\pi}$$

(در بسط Δ نسبت به سطر دوم توجه کنید که جملهٔ اول علامتش منفی و دومی مثبت و سومی منفی است درصورتی که در بسط Δ نسبت به‌سطراول وسوم‌جملهٔ اول‌مثبت،دوم منفی و سوم مثبت است)

$$\Delta\times\Delta^{\pi}=\begin{vmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ -۱ & ۲ & ۵\\ ۲ & ۷ & ۱\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}-۳۲ & ۱۱ & -۱۳\\ ۳ & ۰ & -۶\\ ۱۷ & -۱۱ & ۱۰\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-۳۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۳۳\end{vmatrix}=(-۳۳)^{۲}$$

سطر اول Δ را یك یك در سطر اول و دوم و سوم Δ^{π} ضرب کرده سطر اول حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود .

تمرین۱: دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$\Delta=\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۳\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۵\\ ۱ & ۵ & ۳\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}۴ & -۱ & ۴\\ -۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & -۱ & ۵\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۷ & ۳ & ۴\\ -۱ & ۲ & ۵\\ ۳ & ۶ & ۱\end{vmatrix}$$

تمرین۲: دترمینانهای زیر را نسبت به اجزاء هر سطر بسط دهید :

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\\ A & B & C\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۲ & ۴ & ۳\\ -۱ & ۳ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۷\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & ۰ & ۱\\ ۰ & a & ۰\\ ۱ & ۰ & a\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & ۰ & ۱\\ c & ۱ & ۰\end{vmatrix}$$

تمرین ۳: دترمینانهای زیر را نسبت به اجزاء هر سه ستون بسط دهید :

$$\Delta=\begin{vmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۷\\ ۳ & ۵ & ۲\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۴ & -۱ & ۳\\ -۱ & ۴ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۵\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}۲ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}-۱ & ۰ & ۲\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۵ & ۲ & ۱\end{vmatrix}$$

تمرین ۴: دترمینان وابستهٔ هریك از دترمینانهای زیر را بنویسید:

$$\Delta=\begin{vmatrix}۲ & ۵ & ۱\\ ۴ & ۳ & ۲\\ -۱ & ۷ & ۳\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۴ & -۱ & ۳\\ ۲ & -۲ & ۵\\ ۷ & ۱ & ۰\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۷ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۴ & ۵\end{vmatrix}\quad ،\quad \Delta=\begin{vmatrix}۵ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۵ & ۳\\ ۷ & ۰ & ۵\end{vmatrix}$$

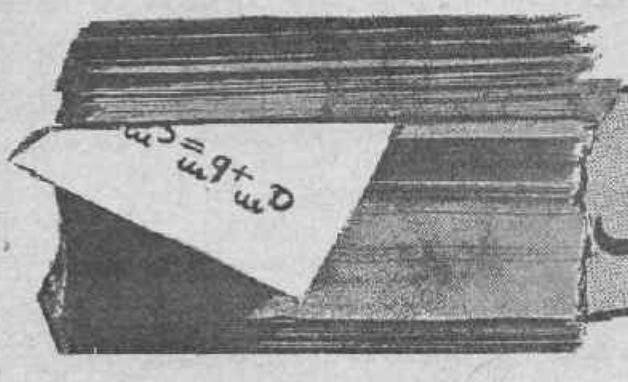
تمرین ۵ : دترمینانهای زیر مفروضند :

$$A=\begin{vmatrix}۲ & ۳ & -۱\\ -۷ & ۲ & ۴\\ ۴ & ۱۱ & -۵\end{vmatrix}\quad ،\quad B=\begin{vmatrix}-۳ & ۷ & ۲\\ ۴ & ۵ & -۱\\ ۲ & ۶ & -۳\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}۴ & ۳ & ۱۱\\ ۱۰ & ۹ & ۶\\ ۴ & ۳ & ۲\end{vmatrix}\quad ،\quad D=\begin{vmatrix}۶ & ۹ & ۶\\ ۳ & ۶ & ۴\\ ۶ & -۱ & ۶\end{vmatrix}$$

مطلوبست تعیین حاصل‌ضربهای زیر:

A.B و B.C و C.D و A.D و A.C و B.D



مسائل حل نشدهٔ ریاضی

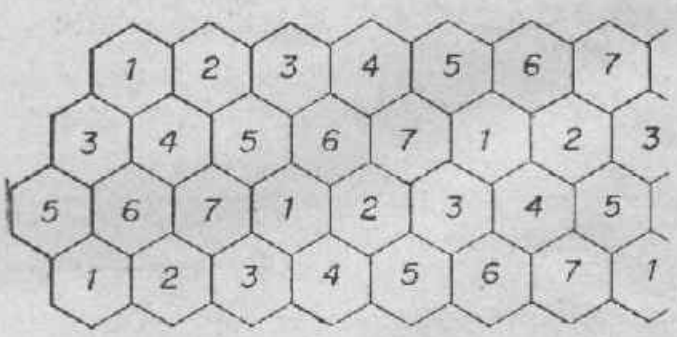
تألیف :
C. STANLEY OGILVY

ترجمهٔ : ع . م .

بخش چهارم ـ مسائل هندسه

بقیه از شمارهٔ گذشته

مسئلهٔ زیر توسط **لئوموزه** (Leo moser) مطرح شده است: می‌خواهیم یك نقشهٔ (مسطح) جغرافی را چنان رنگ آمیزی کنیم که هر دو نقطهٔ به فاصلهٔ یك واحد در دو ناحیهٔ با رنگهای مختلف واقع شوند . برای این کار حداقل چند نوع رنگ لازم است ؟ از شکل زیر برمی‌آید که ۷ رنگ کافی است حتی اگر تعداد نواحی نامحدود اختیار شود . در این شکل هر عدد نمایندهٔ یك رنگ بوده و عددهای مختلف نمایندهٔ



رنگهای متفاوت بوده و قطر هر یك از شش ضلعیها کمی کمتر از واحد (مثلا ۰/۹۹) می‌باشد . صورت مسئله از این قرار است که آیا تعداد ۷ رنگ لازم است یا نه و حداقل تعداد رنگهای لازم چه می‌باشد ؟

مسئلهٔ دیگری مشابه با مسئلهٔ بالا در مورد مثلث مطرح می‌شود : یك مثلث متساوی الاضلاع را روی یك نقشهٔ جغرافی قرار می‌دهیم . حداقل با چند رنگ باید نقشه را رنگ‌آمیزی کرده باشیم تا سه رأس مثلث در سه ناحیهٔ با رنگهای متفاوت واقع شوند ؟ بنظر می‌رسد که مسئله برای یك نقشهٔ مسطح قابل حل باشد اما برای نقشه‌های کروی هنوز راه‌حلی بدست نیامده است .

***

در یك صفحه دوخط وقتی متقاطع‌اند که متوازی نباشند. در فضا وضع از قرار دیگر است ، دو خط که در یك صفحه واقع نباشند متقاطع نیستند (دراین حالت متنافر نامیده می‌شوند) و اگر دوخط در یك صفحه واقع باشند وقتی که متوازی نباشند متقاطع خواهند بود. دو خط متنافر یك وفقط یك عمود مشترك دارند که طول آن اقصر فاصلهٔ بین نقاط آن دو خط می‌باشد . در یك فضای سه بعدی چند خط می‌توان رسم کرد که اقصر فاصلهٔ هر کدام از آنها از بقیه برابر با یك واحد باشد ؟ گمان می‌کنند که رسم ۷ خط امکان دارد اما هنوز نتوانسته‌اند این ادعا را ثابت کنند. امکان دارد که جواب مسئله بزرگتر از ۷ یا کوچکتر از آن باشد .

***

یك چند ضلعی محدب غیر منتظم را درنظر می‌گیریم که تعداد رأسهای آن n باشد؛ اگر d فاصلهٔ بین دورأس دلخواه باشد ، چند مقدار مختلف برای d وجود دارد ؟ حداقل تعداد این مقادیر را $\frac{n}{3}$ دانسته‌اند . اما **اردس** (Erdös) تصور می‌کند که این حداقل باید $\frac{n}{2}$ باشد.

***

دو مسئلهٔ زیر مشغول کننده بوده اما مشکل می‌باشند و توسط **استنهوس** (Steinhous) طرح شده‌اند:

۱) یك میز بیلیارد در نظر می‌گیریم که کناره های آن منحنی محدبی را تشکیل می‌دهند . مثلثی مانند ABC فرض می‌کنیم که توپ بیلیارد محیط آن را متناوباً می‌پیماید یعنی مسیر آن عبارت باشد از... ABCABCABC. این مثلث را مثلث تناوبی می‌نامیم . محقق شده است که از بین مثلثهای محاط در محیط میز بیلیارد آنکه محیطش ماکزیمم است یك مثلث تناوبی است . آیا غیر از آن حداقل یکی دیگر وجود دارد ؟

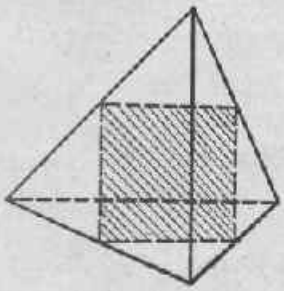
۲) توپ کوچکی در نظر می‌گیریم که ، در داخل یك چهار وجهی منتظم در جهش باشد بدون آنکه با یالها تماس حاصل کند . بـه‌شرط آنکه از قوهٔ ثقل صرف نظر کنیم آیا برای این توپ یك مسیر تناوبی وجود دارد ؟

***

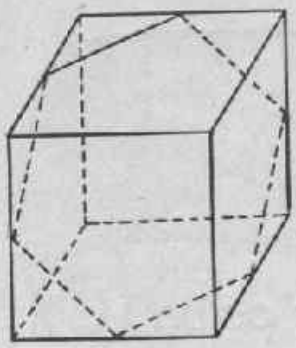
مثلث ABC را در نظر می‌گیریم ؛ یك مثلث PQR که در مثلث ABC محاط شده آنرا بـه چهار مثلث تقسیم می‌کند . آیا امکان دارد که محیط مثلث PQR از محیط هر یك از سه مثلث دیگر کوچکتر باشد؟ در حالتی که P و Q و R اوساط اضلاع باشند چهار مثلث دارای محیطهای برابر خواهند بود .

***

به سادگی ثابت می‌شود که بزرگترین قطعه خط محصور بین دو نقطه از محیط مثلث همان بزرگترین ضلع مثلث می‌باشد. آیا در فضای سه بعدی هم این حکم صادق است ؟ یعنی آیا بزرگترین مقطع مسطح یك چهار وجهی همان بزرگترین وجه آن می‌باشد ؟ ظاهراً بنظر مـی‌آید که چنین باشد اما هنوز برای این سؤال پاسخی صریح بدست نیامده و نسبت به آن مشکوك هستند. اگر هر مقطع مسطح از چهار وجهی را یك مثلث بـدانیم کامـلا اشتباه کرده‌ایـم . شکل مقابل یك چهار وجهی منتظم را نشان می‌دهد که با یك مقطع مربع به دو قسمت تقسیم شده‌است .



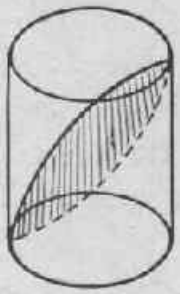
اگر مکعبی را با صفحه‌ای کـه بر مرکز آن گذشته وبر یکی از قطر های آن عمود است قطع کنیم ، مقطع یك شش ضلعی منتظم خواهد بود.



آنچه جالب است اینکه این مقطع بزرگترین مقطع در یك مکعب نمی‌باشد . **آلان ر. هید** ثابت کرده است که بـزرگترین مقطع در یك مکعب بایـد شامل دویال متوازی غیر واقـع در یك وجه باشد (اگر حجم مکعب واحد باشد مساحت این مقطع برابر $\sqrt{2}$ خواهد بود).

استوانهٔ دواری را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ارتفاع آن h و شعاع قاعده‌اش r باشد .

بزرگترین مقطع مسطح آن چیست؟ مقطع بیضوی که از تقاطع یك صفحهٔ قطری بـا استوانه بدست می‌آید (شکل مقابل) اینچنین مقطعی نیست. بـزرگترین مقطع بـوسیلهٔ صفحه‌ای حادث می‌شود کـه تقریباً قائم بود و دو قاعـده را قـطع کند . زاویـهٔ این



صفحه با محور قائم استوانه به نسبت $\frac{h}{r}$ بستگی دارد. می‌توان مساحت مقطع را برحسب $\frac{h}{r}$ بدست آورد و از روی تغییرات آن ماکزیمش را محاسبه کرد . اما از این راه معادلهٔ پیچیده‌ای بدست می‌آید که تعیین جواب آن جز از راه محاسبهٔ تقریبی امکان پذیر نیست . هنوز فرمولی بدست نیاورده‌اند که ازروی آن مساحت ماکزیمم را بر حسب h و r حساب کنند.

پاسخ مسئلهٔ زیر عنوان «بی‌آنکه خبائی شوید» مندرج در یکان شمارهٔ گذشته:

اگر n عدهٔ افراد جمعیت مـورد نظـر باشد ، چنانچه فرض کنیم هیچ دونفری از بین افراد جمعیت وجود ندارد که عدهٔ دوستان آنها با هم برابر باشد در این صورت عدهٔ دوستان هریك از افراد جمعیت برابر با یکی از اعداد زیر خواهد بود:

۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ... و n − ۲ و n − ۱

یك نفر وجود دارد که ابداً دوست ندارد (نظیر عدد صفر)

و یك نفر وجود دارد که با همهٔ افراد جمعیت دوست است (نظیر عدد n − ۱) اما این دو موضوع با هم مغایرت دارد، زیـرا اگر یك نفر با همهٔ افراد جمعیت دوست باشد دیگر فردی بدون دوست وجود نخواهد داشت. بنابراین فرض اینکه «هیچ دونفری وجود ندارد که عدهٔ دوستان آنها با هـم برابر باشد» غیـر ممکن است.

راهنمای ریاضیات متوسطه

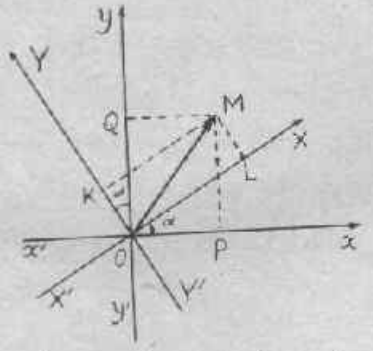
دوران محورهای مختصات

محاسبهٔ حد بعضی از توابع

تنظیم از: علی عاطفی ـ دبیر دبیرستان طباطبائی

I ـ دوران محورهای مختصات و موارد استعمال آن

انتقال محورهای مختصات وموارد استعمال آن در برنامهٔ ریاضیات دبیرستان منظورشده وتدریس می‌شود . دربسیاری از کشورها ، دوران محورهای مختصات نیز در برنامهٔ تعلیمات متوسطه منظورشده است. اما درکشورما آموزش این مبحث به سالهای اول‌دانشکده هاواحاله شده است . درصورتی‌که ، چنانچه ذیلا ملاحظه خواهدشد ، یك مبحث ساده بوده وعلاوه برآنکه مطابق با معلومات ریاضی متوسطه قابل درك است درحل‌مسائل ریاضیات دبیرستان هم موارد استعمال‌گوناگون دارد.



اگرمختصات‌یك نقطهٔ M نسبت‌به‌دستگاه محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ عبارت باشداز :

$M(x=\overline{OP}, y=\overline{OQ})$

چنانچه محور های مختصات را حول‌نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ α دوران دهیم تا به وضع $X'OX$ و $Y'OY$ درآیندواضح‌است که :

$$(\widehat{x'x}\text{ و }\widehat{X'X})=(\widehat{y'y}\text{ و }\widehat{Y'Y})=\alpha$$

فرض می‌کنیم مختصات نقطهٔ M نسبت به دستگاه محور های XOY عبارت باشداز :

$M(X=\overline{OL}, Y=\overline{OK})$

رابطهٔ برداری زیررا درنظرمی‌گیریم :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LM} \qquad (۱)$$

طرفین این رابطه را بر $x'x$ تصویرمی‌کنیم : می‌شود:

$$x=\overline{OL}\cos\alpha+\overline{LM}\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$$

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha \qquad (۲)$$

ازتصویرطرفین رابطهٔ (۱) بر $y'y$ نتیجه خواهدشد:

$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha \qquad (۳)$$

روابط (۲) و(۳)مختصات قدیم یك نقطهٔ M رابرحسب مختصات جدید آن بعد از دوران محور های مختصات بدست می‌دهد .

مثال ـ دردستگاه محورهای‌مختصات xOy معادلهٔ‌یك منحنی (C) عبارتست از $y=\frac{۱}{x}$. محورهارابه‌زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ دوران می‌دهیم تا به وضع دستگاه جدید XOY درآید.معادلهٔ منحنی (C) را نسبت به دستگاه جدید تعیین کنید .

بنابه رابطه های (۲) و (۳) داریم :

$$x=\frac{X\sqrt{۲}}{۲}-\frac{Y\sqrt{۲}}{۲} \qquad \text{و}$$

$$y=\frac{X\sqrt{۲}}{۲}+\frac{Y\sqrt{۲}}{۲}$$

این مقادیررا درمعادلهٔ منحنی (C) منظورمی‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(X-Y)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(X+Y)=۱$$

$$\Rightarrow\frac{X^۲}{۲}-\frac{Y^۲}{۲}=۱$$

تبصره ـ به طریقی‌که در مثال بالا ذکر شد بطورکلی ثابت می‌شودکه منحنی نمایش هندسی هر تابع هموگرافیك $\left(y=\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)$ یك هذلولی است .

مورد استعمال

بنابرآنچه درمخروطات سال ششم ریاضی اثبات می‌شود؛ منحنی (C) نمایش هندسی تابع

$$Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰ \qquad (۴)$$

یك مقطع مخروطی است . به این معنی‌که :

اگر $A=B$ باشد ، C یك دایره است (برای آنکه یك دایرهٔ حقیقی باشد شرط دیگری لازم است).

اگر A و B همعلامت باشند یعنی $AB>0$ باشد، C یك بیضی است .

اگر $AB<0$ باشد یعنی A و B مختلف العلامت باشند ، C یك هذلولی است .

اگر یکی‌ازمقادیر A و B صفر باشد، C یك سهمی‌است.

این قضیه به‌صورت کلی زیرتعمیم می‌یابد :

قضیه ـ هر تابع که برحسب x و y ازدرجهٔ دوم باشد به شکل کلی:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

معادلهٔ یك منحنی مقطع مخروطی می‌باشد .

برای اثبات، محورهای مختصات رادوران می‌دهیم وزاویهٔ دوران راچنان تعیین می کنیم که معادلهٔ منحنی نسبت به‌دستگاه جدید فاقد جملهٔ xy یعنی به شکل معادلهٔ (۴) باشد ودراین صورت بنابر آنچه قبلابیان شد منحنی نمایش هندسی تابع یك مقطع مخروطی بوده ونوع‌آن نیز مشخص می‌شود .

مثال ـ معادلهٔ $x^2-xy+1=0$ رادرنظرمی گیریم محورهای مختصات را بـه زاویهٔ α دوران می دهیم . خواهیم داشت :

$$X^2(\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)+Y^2(\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha)-XY(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)+1=0$$

برای اینکه معادله فاقد جملهٔ XY باشد باید داشته باشیم :

$$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha=\frac{3\pi}{8}$$

ومعادلهٔ منحنی به‌صورت‌زیردرمی‌آید.

$$\frac{X^2}{2(\sqrt{2}+1)}-\frac{Y^2}{2(\sqrt{2}-1)}=1$$

که منحنی مربوط، یك هذلولی است .

موارد استعمال دیگر

ثابت‌کنیدکه منحنی به معادلهٔ

$$x^2+y^2+6xy+4x-4y+a=0$$

دارای دومحور تقارن است . معادلات این محور ها را بدست آورید .

محورهای مختصات رابه زاویهٔ α دوران می‌دهیم. بعداز اختصارخواهیم داشت :

$$x^2(1+3\sin 2\alpha)+y^2(1-3\sin 2\alpha)+6xy\cos 2\alpha+4x(\cos\alpha-\sin\alpha)-4y(\cos\alpha+\sin\alpha)+a=0$$

با انتخاب

$$\cos 2\alpha=0 \longrightarrow \alpha=45^\circ$$

نتیجه می‌شود:

$$4x^2-2y^2-4y\sqrt{2}+a=0$$

محورهای مختصات را انتقال می‌دهیم تا $O'(0 \quad -\sqrt{2})$ مبدأ جدیدباشد . خواهیم داشت

$$4x^2-2y^2+a+4=0$$

باتبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله فرق نمی کند. بنابراین محورهای جدید محورهای تقارن منحنی هستند. چون معادلات این محورهارا نسبت به محورهای اولیه حساب کنیم‌می‌شود :

$$y=x-2 \quad و \quad y=-x$$

II ـ راهی ساده برای محاسبهٔ حد در توابع اصم

انجام پاره‌ای محاسبات روی توابع اصم پیچیده ودشوار است . ازآن جمله تعیین حدتوابعی است نظیر :

$$y=\frac{\sqrt[m]{P(x)}+A}{\sqrt[n]{P(x)}+B}$$

وقتی که‌مثلا $x\longrightarrow\alpha$ ($P(x)$یك کثیر الجمله است و A و B مقادیر ثابت‌اند).

ولی برای سهولت محاسبه ، با انتخاب متغیر جدیدی به صورت :

$z=\sqrt[mn]{P(x)}$ می‌توان تابع کسری واصم بالارا ابتدا به تابعی کسری وغیر اصم تبدیل کرد و آنگاه مقدار حد مورد نیاررا ازروی تابع اخیربدست آورد . طرزعمل به قرار زیر است :

به فرض : $z=\sqrt[mn]{P(x)}$ داریم : $P(x)=z^{m.n}$

وازرابطهٔ اخیرحاصل خواهد شد :

$$\sqrt[n]{P(x)}=z^m \quad و \quad \sqrt[m]{P(x)}=z^n$$

درنتیجه :

$$\frac{\sqrt[m]{P(x)}+A}{\sqrt[n]{P(x)}+B}=\frac{z^n+A}{z^m+B}$$

اما وقتی $x \to \alpha$

$$z \to \sqrt[m]{P(\alpha)} = z_0$$

لذا :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sqrt[m]{P(x)}+A}{\sqrt[n]{P(x)}+B} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^n+A}{z^m+B}$$

(درصورتی که به‌جای دوعدد A و B دوعبارت جبری غیراعم A(x) و B(x) داشته باشیم فقط کافیست آنهارا برحسب متغیر جدید نوشته ودرتابع قراردهیم) .

مثال ـ

مطلوبست تعیین

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$$

اگرفرض کنیم : $z = \sqrt[2\times 3]{x+1}$

خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{x+1} = z^2 \quad و \quad \sqrt{x+1} = z^3$$

وروشن است که وقتی $x \to 0$ ، $z \to 1$. بنابراین :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2-1}{z^3-1}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{z^2+z+1}{z+1} = \frac{3}{2}$$

درمثال زیرمخرج تابع اصم نیست :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

به ترتیب چنین عمل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x^2}+1}{(x-1)^2}$$

اکنون فرض می‌کنیم :

$$z = \sqrt[2\times 6]{x^2} \quad و \quad x^2 = z^{12}$$

ازرابطهٔ اخیرمعلوم است وقتی $x \to 1$ ، $z \to 1$ ، لذا :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x^2}+1}{(x-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{z^6-2z^3+1}{(z^2-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z^3-1)^2}{(z^2-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{(z^3-1)^2}{(z^3-1)^2(z^6+z^3+1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z^6+z^3+1)^2} = \frac{1}{9}$$

حل یك مسئله ازمسائل شیخ بهائی

دریکان شمارهٔ یکم به‌نقل از خلاصةالحساب شیخ بهائی زیر عنوان مسائل لاینحل هفت مسئله درج شده بود . **آقای علی رضائی** دبیردانشمند ریاضیات (فعلا بازنشسته) حل یکی ازاین مسائل رامرقوم داشته‌اند که دوزیرچاپ می‌شود :

مطلوبست حل هریك ازدومعادلهٔ زیر:

$$x^2+10 = \sqrt{a} \quad و \quad x^2-10 = \sqrt{b}$$

معادلات را درحالت کلی زیرحل می‌کنیم :

(۱) $x^2+\alpha = \sqrt{a}$

(۱) $x^2-\alpha = \sqrt{b}$

معادلهٔ (۱) راچنین می‌نویسیم :

$$x^2-\alpha = \sqrt{a}-2\alpha$$

تساوی زیررا درنظرمی‌گیریم :

$$\sqrt{a}-2\alpha = (\sqrt[4]{a}-\alpha)^2$$

که ازآن نتیجه خواهدشد :

$$\sqrt{a} = (\frac{\alpha+2}{2})^2$$

وازمعادلهٔ (۲) نیزحاصل می‌شود :

$$\sqrt{b} = (\frac{2-\alpha}{2})^2$$

چون این مقادیررا در معادلات (۱) و (۲) منظورکنیم نتیجه خواهد شد :

$$x^2 = \frac{\alpha^2+4}{4}$$

ودر ازاء مقادیرمختلف α می‌توان مقادیر نظیر a و b و x را تعیین کرد . مثلا :

$\alpha = 0$: $\sqrt{a} = 1$ ، $\sqrt{b} = 1$ ، $x^2 = 1$

$\alpha = 1$: $\sqrt{a} = \frac{9}{4}$ ، $\sqrt{b} = \frac{1}{4}$ و $x^2 = \frac{5}{4}$

ودرحالت خاص $\alpha = 10$ داریم :

$$\sqrt{a} = 36 \quad و \quad \sqrt{b} = 16 \quad و \quad x^2 = 26$$

علی رضائی

مثلث

[۱] شکل حاصل ازسه نقطه‌که بر یك خط مستقیم واقع نباشند. وبه معنی‌وسیعتر ، قسمتی ازصفحه که به سه ضلع AB وBC وCA محدودباشد. A ، B ، C سه **رأس** مثلث‌می‌باشند.

به هر مثلث عموماً شش عدد نسبت داده می‌شود:

ـ اندازه‌های سه ضلع که با $a=BC$ و $b=CA$ و $c=AB$ نشان داده می‌شود .

ـ سه **زاویه**‌که با $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نشان‌دادممی‌شوند بقسمی که $\hat{A}$ عبارت باشد از زاویهٔ $(\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB})$.

اندازه‌های ضلعها سه عدد مثبت بوده و بین آنها شش رابطه برقرار می‌باشد از جمله :

$$|b-c|<a<b+c$$

که به **نامساوی مثلثی مینکوسکی** معروف می‌باشد اگر مثلا بدانند که $c<b<a$ کافیست که رابطهٔ بالارا نوشته ووجودیك مثلث به ضلعهای a ، b و c را محقق‌سازند. روابط دیگر از این رابطه نتیجه می‌شوند.

عدد $a+b+c=2p$ **محیط** مثلث نامیده می‌شود.

سه زاویهٔ مثلث چنان هستند که :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi(\text{modulo } 2\pi)$$

چنانچه از بین زاویه‌های برداری آنهایی را در نظر بگیرند که از لحاظ قدر مطلق کوچکتر از π رادیان هستند سه زاویه دارای یك علامت خواهند بود. با توجه به این شرط این اندازه‌هارا مثبت و محصور بین صفر و π برابر با سه زاویهٔ هندسی محدب در A ، B و C انتخاب می‌کنند بقسمی که : اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi\\ \hat{A}>\hat{B}>\hat{C}\end{cases}\qquad a>b>c$$

[۲] یك مثلث **متساوی‌الساقین** است اگر دوضلع آن با هم برابر باشندکه دراین‌حال نتیجه خواهدشددوزاویهٔ مقابل به آنها نیز برابراند، و برعکس یعنی:

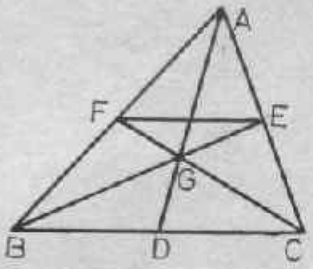
$$b=c \iff \hat{B}=\hat{C}$$

مثلث **متساوی‌الاضلاع** است اگرسه‌ضلع‌آن باهم‌برابرباشند:

$$a=b=c \implies \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{3}$$

مثلث**قائم‌الزاویه**است اگرمثلا $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت ضلع BC **وتر** نامیده می‌شود .

[۳] **میانه** خطی است‌که یك رأس را به وسط ضلع‌مقابل وصل‌می‌کند. سه‌میانهٔ AD ، BE و CF در یك نقطهٔ G به‌نام **مرکز ثقل مثلث** مشترك هستند بقسمی که رابطهٔ :



$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}$$

و رابطه‌های مشابه آن، برقرار بوده و همچنین :

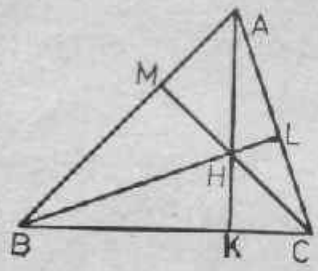
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

به علاوه EF با BC موازی است و :

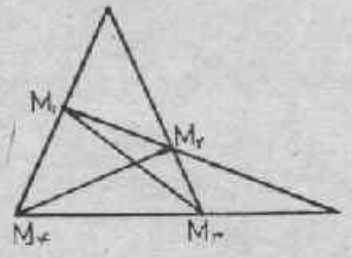
$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$$

(نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث DEF نیز می‌باشد.)

[۴] **ارتفاع** مثلث خطی است که از یك رأس A به نقطهٔ K ازضلع BC وصل‌شود که KA بر BC عمود باشد K **تصویر قائم** A بر BC نامیده می‌شود



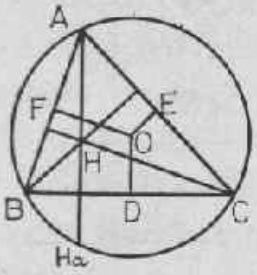
سه ارتفاع در یك نقطهٔ H به نام **مرکز ارتفاعی** (Orthocentre) متقاربند .



اگر چهار نقطهٔ M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 رادریك‌صفحه‌در نظر بگیریم‌می‌توانیم‌یك

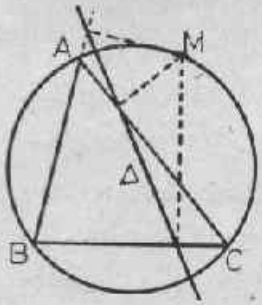
چهار زاویه‌ای (Quadrangle) بسازیم که این چهار نقطه چهار رأس آن و شش‌خط M_iM_j شش ضلع آن باشد(از تلاقی دو به دوی این ضلعها هفت رأس پدید می‌آید). اگر یکی از این نقطه‌ها مرکز ارتفاعی مثلثی باشد کـه توسط سه نقطـهٔ دیگر تشکیل می‌شود چهارزاویه‌ای‌را (Orthocentrique) می‌نامند. مثلاسه‌رأس‌مثلث ABC وH مرکز ارتفاعی آن‌یك‌چهار زاویه‌ای تشکیل می‌دهند که در ضمن A مرکز ارتفاعی مثلث BCH می‌باشد ؛ چهار نقطه نسبت به یکدیگر وضعی متقارن دارند .

[۵] عمودمنصف یك ضلـع مثلث مثـلا BC مکان نقطه‌هایی مانند M می‌باشد که $MB=MC$ است : این مکان‌خط‌مستقیمی‌است که برBC عمود بوده‌ازوسط‌آنDمی گذرد. سه عمودمنصف ضلعهای مثلث در یك نقطهٔ O به نام **مـرکـز دایرهٔ محیطی** مثلث متقاربند. شعاع این دایره به R نشان داده می‌شود. قرینهٔمرکزارتفاعی مثلث‌نسبت به هرضلع بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است. O مرکز ارتفاعی‌مثلث DEF می‌باشد.دایرهٔ محیطی همچنین مکان نقطه‌هـایی مانند M است که :



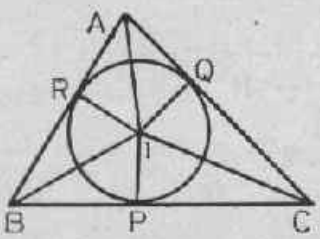
$(MB\text{و}MC)=(AB\text{و}AC)$

اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث باشد تصویرهای M بر سه ضلع مثلث بر یك خط راست Δ به‌نام **خط سمسون** قراردارند .



در تجانسی به مرکز Mوبه نسبت۲مجانس‌خط‌سمسون خطی‌است به نام **خط اشتینر** نظیرM کـه همواره از مرکز ارتفاعی مثلث می گذردوشامل‌قرینه‌های‌Mنسبت‌به اضلاع می‌باشد.

[۶] سه نیمساز داخلی مثلث در یك نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث‌متقاربند شعاع این دایره به‌r نشان داده می‌شود. دایرهٔ محاطی درنقاط P ، Q وRبرضلعهای BC ، CA و AB مثلث مـماس است که این نقاط داخل ضلعهاواقع بوده‌وداریم:

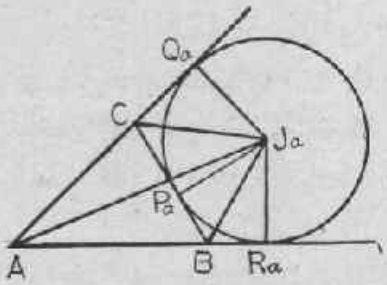


$$AQ-AR=p-a=\frac{b+c-a}{2}$$

$$BR=BP=p-b \text{ و } CP=CQ=p-c$$

به‌این موضوع هم اشاره شودکه H مرکز دایرهٔمحاطی مثلث KLM می‌باشد).

[۷] هر نیمساز داخلی یك زاویه ، مثلاA، بانیمسازهای خارجی‌دوزاویهٔدیگر B و C در یك نقطهٔ J_a متقاربندکه‌مرکز دایرهٔ **محاطی خارجی داخل زاویهٔ A** می‌باشد. شعاع این دایره با r_a و نقاط تماس‌آن باضلعها به P_a ، Q_a و R_a نشان داده می‌شود و رابطه‌های زیر برقرار است :



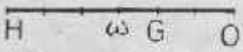
$$AQ_a=AR_a=p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$CP_a=CQ_a=p-b \text{ و } BR_a=BP_a=p-c$$

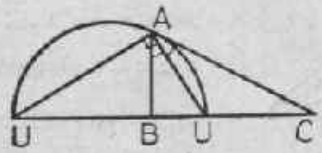
بالاخره چهار زاویه‌ای $I J_a J_b J_c$ (Orthocentrique) می‌باشد .

[۸] سه نقطهٔ O ، G و H بر یك خط مستقیم موسوم به **خط اولر** قرار دارند و داریم :

$$\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$$



نقطهٔ ω وسطOHمرکز **دایرهٔ اولر** یا **دایرهٔ نه‌نقطه** است که بر اوساط اضلاع چهار زاویه‌ای ارتوسانتریك (D و E و F اوساط‌اضلاع‌واوساط AH ،BH وCH)وپاهای‌ارتفاعات می‌گذرد.شعاع‌آن برابر $\frac{R}{2}$ است و بین مثلثهـای ABC ، BCH ، CAH و ABH که شعاع دایـرهٔ محیطی همهٔ آنها با یکدیگر مساوی است مشترك می‌باشد. بنا به **قضیـهٔ فوئرباخ** دایرهٔ اولر بر هریك از دایره‌های محاطی داخلـی و خارجی مثلث‌مماس‌می‌باشد. دایرهٔ اولر مجانس دایرهٔمحیطی مثلث در تجانس به‌مرکزG و به نسبت$(-\frac{1}{2})$ می‌بـاشد ، در این تجـانس مجانس مثلث ABC عبارت می شـود از مثلث DEF .



[۹] اگرU و

U' نقاط تلاقی نیمسازهای داخلی زاویهٔ A با ضلع BC باشد (این نقاط اغلب پای نیمساز داخلی و پای نیمساز خارجی نامیده می‌شوند) داریم :

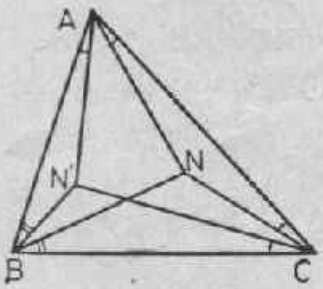
$$\frac{UB}{UC}=\frac{U'B}{U'C}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

نقاط U و U' ضلع BC را به نسبتهای $+\frac{c}{b}$ و $-\frac{c}{b}$ تقسیم می‌کنند. تقسیم (U' و U و C و B) توافقی بوده و دایرهٔ به قطر UU' مکان نقاطی مانند M است که نسبت فاصله‌های آنها از B و C مقدار ثابت است :

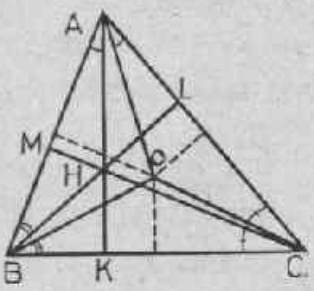
$$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$$

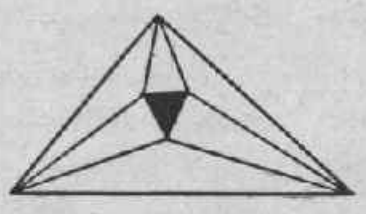
دایرهٔ مزبور بر دایرهٔ محیطی مثلث عمود می‌باشد.

[۱۰] سه خط در نظر می‌گیریم که از A و B و C گذشته در یک نقطهٔ N واقع در داخل مثلث متقارب باشند قرینهٔ هریک از این خطها را نسبت به نیمساز زاویهٔ مربوط رسم می‌کنیم . سه خط حاصل در یک نقطهٔ N' متقارب می‌شوند. اگر N را بر G اختیار کنیم خطوط AN' ، BN' و CN' **شبه میانه** (Symédiane) و نقطهٔ **نقطهٔ N' لموان** (Lemoin) مثلث نامیده می‌شود .



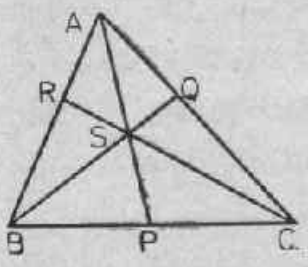
هر دو خط را که نسبت به یک نیمساز قرینه باشندمانند (AN و AN') یا (AC و AB) بنابه تعریف **زوج خطوط هم گوشه** (Isogonale) می‌نامند. ارتفاع AK و شعاع دایرهٔ محیطی AO نسبت به ضلعهای زاویهٔA هم گوشه هستند بنا براین نقاط O و H نقاط تلاقی دو دسته خطوط هم گوشه می‌باشند در حالت خاص ، خطوطی که هریک از زاویه‌های مثلث را به سه قسمت برابر بخش کنند مثلثی تشکیل





می‌دهند که متساوی‌الاضلاع است و به **مثلث مورلی** (Morley) معروف می‌باشد

[۱۱] سه نقطهٔ P ، Q و R را به ترتیب روی ضلعهای BC و CA و AB از یک مثلث داده شده است :

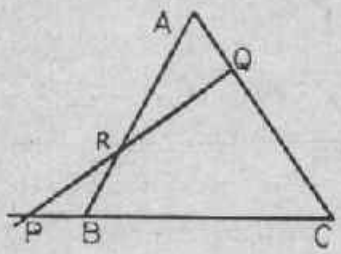


قضیهٔ سوا (Céva): شرط لازم و کافی برای اینکه سه خط AP ، PQ و CR در یک نقطهٔ S متقارب باشند این است که

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\times\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\times\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=-1$$

و بنا به **قضیهٔ ژرگون** (Gergonne) :

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PA}}+\frac{\overline{QS}}{\overline{QB}}+\frac{\overline{RS}}{\overline{RC}}=+1$$



قضیهٔ منلائوس (Menelaüs): شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطهٔ P ، Q و R بر یک استقامت باشند آنست که :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\times\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\times\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=+1$$

[۱۲] بین اجزاء یک مثلث: اضلاع a و b و c نصف محیط p ، زاویه‌های A ، B و C ، مساحت S ، شعاع دایرهٔ محیطی و شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی R ، r ، r_a ، r_b و r_c ، میانه‌ها m_a ، m_b و m_c ، ارتفاعها h_a ، h_b و h_c ، نیمسازها داخلی α ، β و γ نیمساز های خارجی α' ، β' و γ' فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $OI=d$ روابطی بر قرار است (که نمونهٔ آنها به ترتیب زیر بوده وباجابجاکردن دوری حروف بقیهٔ آنها بدست می‌آید):

$$A+B+C=\pi$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$bc\sin A = ah_a = 2S$$

$$abc = 4RS$$

$$S = pr = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{rr_a r_b r_c} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \quad \text{و} \quad \alpha' = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} \quad \text{و} \quad r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

رابطهٔ اولر:

$$d^2 = R(R-2r)$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

رابطهٔ اخیر به صورت :

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

نیز نوشته می‌شود با رابطهٔ:

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{DK} \cdot \overline{BC}$$

موضوع **قضیهٔ میانه** می‌باشد .

[۱۳] دو مثلث **هم‌اندازه** (Isométrique) هستند (سابقاً گفته می‌شد **متساوی‌اند**) اگر ضلعها و زاویه‌های آنها از لحاظ قدر مطلق با هم برابر باشند: در این صورت همهٔ مقادیر مربوط به آنها با هم برابرند. وجود یك ایزومتری که یکی را به دیگری تبدیل کند لازم و کافی می‌باشد؛ این ایزومتری مستقیم است اگر زاویه‌های مساوی همعلامت باشند و در غیر آن معکوس‌است، درهرحال تغییر مکان نامیده می‌شود. برای اینکه دو مثلث هم اندازه باشند سه شرط لازم و کافی قابل توجه معروف است که سابقاً **حالتهای تساوی** دو مثلث گفته می‌شد:

حالت اول ـ $C = C'$ ، $B = B'$ ، $a = a'$

حالت دوم ـ $c = c'$ ، $b = b'$ ، $A = A'$

حالت سوم ـ $c = c'$ ، $b = b'$ ، $a = a'$

[۱۴] دومثلث **همانند(متشابه)** خواهند بود اگر مقادیر مطلق زاویه‌های آنها با هم برابر باشند؛ در این‌حالت ضلعهای آنها با هم **متناسب** خواهند بود. وجود تشابهی که یکی را به دیگری تبدیل کند لازم و کافی است. از این‌بابت سه شرط لازم و کافی معروف می‌باشد که به **حالتهای تشابه** دو مثلث مشهور است:

حالت اول ـ $C = C'$ ، $B = B'$

حالت دوم ـ $A = A'$ ، $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$

حالت سوم ـ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

حالت قابل توجهی از تشابه از این قرار است که یك مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC توسط ارتفاع نظیر رأس زاویهٔ قائمهٔ A یعنی AK به دو مثلث متشابه باخودش و با یکدیگر تقسیم می‌شود.

اگر خطی دو ضلع AB و AC (یا امتداد آنها) را در B' و C' قطع کند و با CB موازی باشد دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه خواهند بود (**قضیهٔ تالس**) .

همهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع ، و همچنین همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باهم متشابه هستند. حالتهای هم‌اندازه بودن‌وهمچنین حالتهای تشابه‌برای دومثلث قائم‌الزاویه به صورت ساده‌تردرمی‌آیند. این نکته را که باید یادآوری کنیم‌که حالت $C = C'$ ، $b = b'$ ، $c = c'$ جز درحالتی که c بزرگترین ضلع‌باشد تساوی دومثلث را ایجاب‌نمی‌کند.

[۱۵] روابط بین اندازه‌های اجزاء یك مثلث وقتی که قائم‌الزاویه باشد ساده‌تر می‌شوند. علاوه بر آن خواهیم‌داشت:

$$B + C = \frac{\pi}{2}$$

$$BA^2 = \overline{BK} \cdot \overline{BC}$$

قضیهٔ فیثاغورس ـ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$KA^2 = -\overline{KB} \cdot \overline{KC}$$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ، مرکز ارتفاعی بر رأس A و مرکز دایرهٔ محیطی بر نقطهٔ D وسط وتر BC منطبق‌می‌باشد.

یك مثلث **شبه قائمه** (Pseudo – rectangle) نامیده می‌شود اگر $|B - C| = \frac{\pi}{2}$ باشد: در این مثلث‌روابطی نظیر روابط مربوط به مثلث قائم‌الزاویه بدست می‌آید.

[۱۶] اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، $B = C$، در این صورت ارتفاع، میانه، عمودمنصف و نیمساز داخلی مربوط به رأس A و قاعدهٔ BC همه برمحور تقارن مثلث منطبق

می‌باشند. در مثلث متساوی‌الاضلاع، علاوه بر آن، نقاط G، H، O و I نیز بر یکدیگر منطبق هستند که این نقطه **مرکز** مثلث نامیده می‌شود. اندازهٔ هر یك از سه زاویه برابر با $\frac{\pi}{3}$ و طول ارتفاع برابر با $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد.

[۱۷] در فضای R^3 (یعنی سه بعدی) شکل حاصل از چهار نقطهٔ غیرواقع بریك صفحه **چهاروجهی** نامیده می‌شود که به چهار **وجه** مثلث شکل محدود است. **مرکز ثقل** هر چهار وجهی در سه چهارم هر یك از خطوطی واقع است که یك رأس را به مرکز ثقل وجه مقابل وصل می‌کند و همچنین در وسط هریك از سه خطی است که اوساط دویال مقابل را به هم وصل می‌کند.

یك چهاروجهی (Orthocentrique) نامیده می‌شود هرگاه یالهای مقابل بر هم عمود باشند: $AB \perp CD$، $AC \perp BD$، $AD \perp BC$. برای اینکه این سه شرط برقرار باشد وجود دو شرط آن کافی است.

در چنین چهار وجهی چهارخطی که از هر رأس بروجه مقابل عمود باشند در یك نقطه بنام **مرکز ارتفاعی** متقارب هستند. یك چهار وجهی **منتظم** است اگر شش **یال** آن با هم برابر باشند، در این صورت وجوه مثلثهای متساوی‌الاضلاع خواهند بود هرچهاروجهی منتظم (Orthocentrique) می‌باشد.

حجم یك چهار وجهی برابر است با حاصلضرب مساحت یك وجه دریك سوم ارتفاع نظیر آن.

[۱۸] **مثلث کروی** شکلی است که ازتقاطع دوبه دوسه دایرهٔ عظیمه درروی یك کره پدیدمی‌آید. اجزاء مثلث کروی (که‌روبهم شش زاویه‌است) از روی فرمولهای مثلثات کروی حساب می‌شود.

درسی از حساب

دربارهٔ بخش پذیری اعداد

ترجمه ازکتاب « در راه ریاضیات » تألیف: KORDIEMSKY

II ـ بخش پذیری بر اعداد ۱۳ و ۱۷ و ۱۹

برای اینکه معلوم کنیم عدد مفروض N بر عددی مانند a بخش پذیر است یا نه، روش کلی آنست که از عدد N عدد دیگری مانند P چنان بدست آوریم که یا $N+P$ ویا $N-P$ بر a بخش‌پذیر باشد درمورداخیرهم ازقضایای مربوط به‌بخش‌پذیری دوجمله‌ای $a^n \pm b^n$ بردو جمله‌ای $a \pm b$ استفاده می‌کنیم.

برای تعیین بخش‌پذیری عددی بریکی از عددهای ۱۳و۱۷و۱۹ ازسمت چپ عددمزبورشروع کرده اولین رقم را به ترتیب در ۳ یا ۷ یا ۹ ضرب کرده ازحاصل، رقم بعدی را کم می‌کنیم. باقیمانده را بازدر ۳ یا ۷ یا ۹ ضرب کرده حاصل رابارقم سوم جمع می‌کنیم و عملهای جمع و تفریقهای متوالی را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. برحسب اینکه آخرین باقیمانده بر ۱۳ یا ۱۷ یا ۱۹ بخش پذیر باشد یا نباشد عدد مفروض نیز بر ۱۳ یا ۱۷ یا ۱۹ بخش‌پذیر می‌باشد یا نمی‌باشد.

مثال ۱ـ عدد ۲۰۷۵۴۲۷ بر ۱۹ بخش‌پذیراست زیرا:

$$۲ \times ۹ = ۱۸ \equiv -۱ \text{ و } -۱ - ۵ = -۶$$
$$-۱ \times ۹ = -۹ \text{ و } -۹ + ۷ = -۲$$
$$-۲ \times ۹ = -۱۸ \equiv ۱ \text{ و } ۱ - ۵ = -۴$$
$$-۴ \times ۹ = -۳۶ \equiv ۲ \text{ و } ۲ + ۴ = ۶$$
$$۶ \times ۹ = ۵۴ \equiv ۱۶ \text{ و } ۱۶ - ۲ = ۱۴ \equiv -۵$$
$$-۵ \times ۹ = -۴۵ \equiv ۱۲ \text{ و } ۱۲ + ۷ = ۱۹ \equiv ۰$$

مثال ۲ـ بخش پذیری عدد ۸۱۴۵۲ برعدد ۱۳:

$$۸ \times ۳ = ۲۴ \equiv -۲ \text{ و } -۲ - ۱ = -۳$$
$$-۳ \times ۳ = -۹ \text{ و } -۹ + ۴ = -۵$$
$$-۵ \times ۳ = -۱۵ \equiv -۲ \text{ و } -۲ - ۵ - -۷ = ۶$$
$$۶ \times ۳ = ۱۸ \equiv ۵ \text{ و } ۵ + ۲ = ۷$$

وعدد مفروض بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست. ←

III- روش کلی برای بخش پذیری بر یک عدد دلخواه

الف ـ برای تعیین بخش پذیری بر عدد اول p ابتدا عدد به شکل $d=10^n+1$ را چنان انتخاب می کنیم که مضرب p باشد .

$d=10^n+1$ ؛ $n=1$ و ۲ و ۳ و ۴ و ...

$n=1$ ، $d=11$ ؛ $p=11$

$n=2$ ، $d=101$ ؛ $p=101$

$n=3$ ، $d=1001$ ؛ $p=7$ و ۱۱ و ۱۳

$n=4$ ، $d=10001$ ؛ $p=73$ و ۱۳۷

درازاء هریك از عددهای p عدد نظیر آن n را درنظر گرفته و به ترتیب زیرعمل می کنیم .

۱) عددرا درجهت ازراست به چپ به گروههای n رقمی تقسیم می کنیم . البته آخرین گروه سمت چپ ممکن است تعداد رقمهایش کمتر از n باشد .

۲) ازسمت راست شروع کرده گروهها را شماره گذاری می کنیم .

۳) گروههای شمارهٔ فردرا باهم و گروههای شمارهٔ زوج را باهم جمع می کنیم .

۴) ازحاصل جمعهای بدست آمده آنرا که کوچکتر است از دیگری کم می کنیم .

برحسب اینکه تفاضل اخیر بر p قابل باشد یانباشد عدد مفروض بر p قابل قسمت است یا نیست .

مثال ـ تعیین بخش پذیری عدد ۱۵ رقمی :

۸۳۷۳۶۲۱۷۲۵۰۴۸۳۱

بر عدد های ۷۳ و ۱۳۷

درازاء $p=73$ یا $p=137$ داریم $n=4$ بنابراین عدد مفروض راازسمت راست به گروههای چهاررقمی تقسیم وبنا به دستورعمل می کنیم .

۸۳۷|۳۶۲۱|۷۲۵۰|۴۸۳۱

$4831+3621=8452$

$7250+837=8087$

$8452-8087=365$

عدد ۳۶۵ بر ۷۳ بخش پذیر است امابر ۱۳۷ بخش پذیر نیست بنابراین عددپانزده رقمی مفروض بر ۷۳ بخش پذیر بوده امابر ۱۳۷ بخش پذیر نمی باشد.

ب ـ برای تعیین بخش پذیری عددمفروضی برعدد اولی مانند p عدد به شکل $d=10^n-1$ (n فرد)راکه مضرب p باشد اختیارمی کنیم :

$d=10^n-1$ ، $n=1$ و ۳ و ۵ و ۷ و ...

$n=1$ ، $d=9$ ؛ $p=3$

$n=3$ ، $d=999$ ؛ $p=37$

$n=5$ ، $d=99999$ ؛ $p=41$ و ۲۷۱ و ...

وچنین عمل می کنیم:

۱) ازسمت راست شروع کرده عددمفروض را به گروههای n رقمی تقسیم می کنیم. ممکن است که تعدادارقام آخرین گروه کمتراز n باشد .

۲) تمام گروهها را باهم جمع می کنیم .

برحسب اینکه حاصل جمع بدست آمده مضرب p باشدیا نباشد، عددمفروض بر p بخش پذیر می باشد یا نمی باشد .

تبصره ـ درصورتی که حاصل جمع گروهها بیش از n رقم داشته باشد می توان عملیات بالارا نسبت به آن تکرار کردتاحاصل جمع باحداکثر n رقم بدست آید .

مثال ـ بخش پذیری عدد ۴۶۰۶۹۸۱ بر ۳۷ ـ در ازاء $p=37$ داریم $n=3$ پس عدد را به گروههای سه رقمی تقسیم می کنیم :

۴|۶۰۶|۹۸۱

$981+606+4=1591$

$1+591=592\equiv 0 \pmod{37}$

بنابراین عددمفروض بر ۳۷ بخش پذیراست .

نکته ـ روشهایی که دراین شماره و درشمارهٔ گذشتهٔ یکان در مورد تعیین بخش پذیری بریك عدد بیان شد وروشهای دیگری که وجوددارد عموماً آنقدرمفصل هستند که عملا ترجیح می دهند ازاین روشهاصرف نظر کرده مستقیماً عمل تقسیم راانجام دهند. ازهمین جهت هم در کتابهای درسی مربوط به اعداد از ذکراینچنین روشهایی خودداری می شود و برای عده‌ای این تصورپیش می آیدکه چنین روشهایی اصلا وجودندارد. این عده می کوشند شخصاً به کشف روشها بپردازند درصورتی آنچه بدست می آورند قبلا توسط دیگران بیان شده است منتهی آن اندازه که اینان تصورمی کنند واجداهمیت نیست .

موضوعی که در اینجا یاد آوری می شود این است که در چندین سال گذشتهٔ انتشاریکان مقاله‌های متعددی درموردقابلیت تقسیم براعدادی مانند ۷ و ۱۳ و ۱۹ واصل شده است که به‌علل فوق‌الذکر ازدرج آنها درمجله خودداری شده است .

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف، E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

فصل چهارم ـ چگونه ثابت کنیم که دو خط متوازی‌اند.

روش ششم ـ به کمک سومین خط موازی

خاصیت مورد استفاده از این قرار است: اگر دو خط با خط سوم موازی باشند بایکدیگر موازی می‌باشند. بنابراین وقتی خواسته باشیم ثابت کنیم دو خط با هم موازی هستند می‌توانیم خط سومی از شکل را پیدا کنیم و ثابت کنیم که هریك از آن دو خط با این خط سوم موازی می‌باشد.

تمرینات:

۲۰۰ـ ثابت کنید که اگر اوساط ضلعهای یك چهار ضلعی را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

۲۰۱ـ روی ضلعهای متساوی AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC و در خارج آن دو مربع ABDF و ACGH را می‌سازیم و FH و DG را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این دو خط باهم موازی هستند.

۲۰۲ـ ثابت کنید که در هرچهارضلعی اوساط دو ضلع مقابل و اوساط دو قطر چهار رأس یك متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

۲۰۳ـ در یك مثلث ABC میانه‌های AM ، BN و CP در G متقاطع‌اند. اگر F وسط AG و D وسط BG باشد ثابت کنید که FDMN متوازی‌الاضلاع است.

۲۰۴ـ ساقهای یك ذوزنقهٔ ABCD را امتداد می‌دهیم تا در E متلاقی شوند. اگر M و N و P و Q به ترتیب اوساط AE ، BE ، AC و BD باشند ثابت کنید که چهارضلعی MNQP ذوزنقه است.

۲۰۵ـ مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث و N وسط AH و P وسط AB و Q وسط AC باشد. ثابت کنید خط HP با خط OQ موازی است. همچنین ثابت کنید که OPNQ متوازی‌الاضلاع است.

تمرینات فصل چهارم

۲۰۶ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. درخارج مثلث دو خط Bx و Cy را چنان رسم می‌کنیم که با ضلعهای BA و CA زاویه‌های ۴۵ درجه بسازند. از A عمودهای AF و AG را بر Bx و Cy رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه نقطهٔ F و A و G بریك خط راست واقع بوده و چهارضلعی BCGF ذوزنقه است

۲۰۷ـ زاویهٔ xOy و یك نقطهٔ A روی ضلع Ox مفروض است؛ دایره‌ای رسم می‌کنیم که در A بر Ox مماس باشد و بر این دایره مماسهایی موازی با Oy رسم می‌کنیم. اگر M و N نقاط تماس این مماسها باشد ثابت کنید که AM و AN با نیمسازهای زاویهٔ xOy موازی هستند.

۲۰۸ـ دو دایرهٔ دلخواه رسم می‌کنیم که هردو بر نقاط B و C طرفین ضلع BC از مثلث ABC بگذرند. این دایره‌ها ضلع AB را در M و N و ضلع AC را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که MP با NQ موازی است.

۲۰۹ـ میانه‌های AM ، BN و CP از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. از N موازی با CP رسم می‌کنیم که امتداد BC را در F قطع می‌کند. از F موازی با BN و از B موازی با CP رسم می‌کنیم که در D متقاطع می‌شوند. ثابت کنید که سه نقطهٔ D ، M و P بریك استقامت بوده و AM با DN موازی و مساوی می‌باشد.

۲۱۰ـ ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. عمود C'H دابر AC و عمود B'G را بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که BC با GH موازی است.

۲۱۱ـ ثابت کنید خطوطی که نقطهٔ تلاقی نیمسازهای یك متوازی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنند با ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی می‌باشند.

راهنمای رسم فنی

تنظیم از: مهندس شیر محمدی

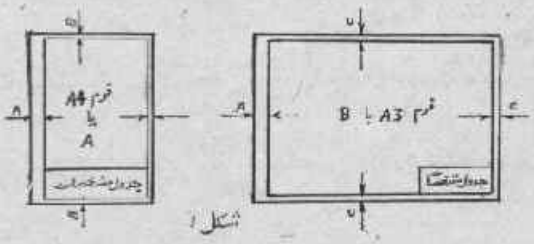
شکل عمومی کاغذ رسم، جدول مشخصات و استاندارد های موجود

اندازهٔ کاغذهای رسم به‌صورتهای گوناگون توسط سازمانهای استاندارد کشورهای مختلف ومؤسسات بین‌المللی استاندارد ها پیشنهاد شده است . در اروپا بیشتر از استاندارد های آلمانی (DIN) ودر آمریکا از استانداردهای پیشنهاد شده توسط «انجمن استاندارد های آمریکائی» (ASA) استفاده می‌شود. ما تا سر حد امکان از استاندارد های بین‌المللی که مورد قبول اغلب مراکز صنعتی جهان است استفاده خواهیم کرد ودر صورتی که در بعضی موارد کمیت ویا علامتی به صورت بین‌المللی و استاندارد نشده باشد از استانداردهای اروپائی (که در ایران بیشتر معمول است) استفاده می کنیم و پیشنهاد های انجمن استانداردهای آمریکائی را نیز به منظور اطلاع ذکر می کنیم .

تعدادی از فرمهای پیشنهاد شده برای کاغذ رسم

استاندارد آمریکائی ASA Z 1401 – 1946		استاندارد آلمانی (DIN 476)	
فرم	ابعاد به اینچ (in)	فرم	ابعاد به میلیمتر (mm)
E	۳۴ × ۴۴	A0	۸۴۱ × ۱۱۹۸
D	۲۲ × ۳۴	A1	۵۹۴ × ۸۴۱
C	۱۷ × ۲۲	A2	۴۲۰ × ۵۹۴
B	۱۱ × ۱۷	A3	۲۹۷ × ۴۲۰
A	$8\frac{1}{2} \times 11$	A4	۲۱۰ × ۲۹۷
		A5	۱۴۸ × ۲۱۰

برای تمرینات دورهٔ دبیرستان اندازهٔ فرمهای A4 و A3 که معادلهای آنها در استاندارد های آمریکائی به ترتیب A و B می‌باشند مناسب به نظر می‌رسند . سازمانهای نامبرده برای حاشیه های لازم در فرمهای فوق مقادیری را که به‌کمک شکل (۱) وجدول زیر نشان داده شده پیشنهاد می کنند.



شکل ۱

بعد	استاندارد آلمانی به میلیمتر (mm)	استاندارد آمریکائی به اینچ (in.)
A	25	1
B	5	$\frac{1}{16}$
C	10	$\frac{3}{8}$

جدول مشخصات که درشکل (۱) محل آن تعیین‌شده از ضروریات رسم فنی است . از بین فرمهای پیشنهاد شده برای جدول مشخصات آنچه که برای تمرینات دبیرستان مناسب به نظر می‌رسد درشکل (۲) نشان داده‌شده‌است. ازاین کادر می‌توان در هردوفرم A3 و A4 استفاده نمود .



شکل ۲

در نظر داشته باشید که ضخامت خطوط حاشیه و جدول مشخصات بایددرحدود ۱/۵ برابرضخامت خطوط اصلی تصاویر رسم باشد.

مقیاس و واحد مقیاس (یا اشل) معلوم می کندکه اندازه های طولی تصاویر رسم نسبت به جسم اصلی چه اندازه

کوچك و یا بزرگ شده‌اند . مثلا وقتی یك کارگرفنی درکادر مشخصات رسم مقیاس $\frac{1}{5}$ رامشاهده کند متوجه می‌شودکه‌جسمی راکه اوباید بسازد ۵ برابر از تصاویرنشان داده شده در روی کاغذ رسم بزرگترخواهد بود. قبل‌ازشروع به ترسیم بایدبادر نظر گرفتن فضای موجود درروی کاغذ رسم مقیاس صحیحی را انتخاب نمود .

دراستاندارد های اروپائی (سیستم متری) بیشترمقیاسهای $\frac{1}{1}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{25}$ ، $\frac{1}{50}$ ، $\frac{1}{100}$ . . . و در آمریکا بیشتر مقیاسهای $\frac{1}{1}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{3}{32}$... مورد استفادهٔ مهندسین و آرشیتکت ها قرار می گیرد .

واحد عبارتست‌از طولی‌که ابعاد جسم‌اصلی بوسیلهٔ آن اندازه‌گیری می‌شود . معمولادرروی خطوط‌اندازه‌یادیمانسیون (که بعداً مفصلاتوضیح داده خواهندشد) واحد نیزدرکناراعداد باعلامت اختصاری مشخص‌می‌شود .

علامات‌اختصاری بین‌المللی‌که برای واحدها بکارمی‌روند درمثالهای زیرنشان داده شده‌اند.

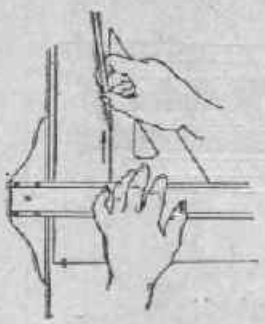
سیستم متری (معمول‌دراروپاوایران)	میلیمتر (mm)	مثلا 25 mm
	سانتیمتر (cm)	مثلا 50 cm
	متر (m)	مثلا 10 m
سیستم اینچی (معمول درآمریکا)	اینچ (in) ویا (")	مثلا 10in. ویا 10"
	فوت (ft) ویا (')	مثلا 20ft. ویا 10'

دربعضی موارد ممکن است در روی خطوط اندازه فقط به‌نوشتن اعداد اکتفا نموده‌ودرمحل‌تعیین شدهٔ درکادرمشخصات واحدبکاررفته را درج کرد.

ازگونیاها استفادهٔ بیشتری بکنیم

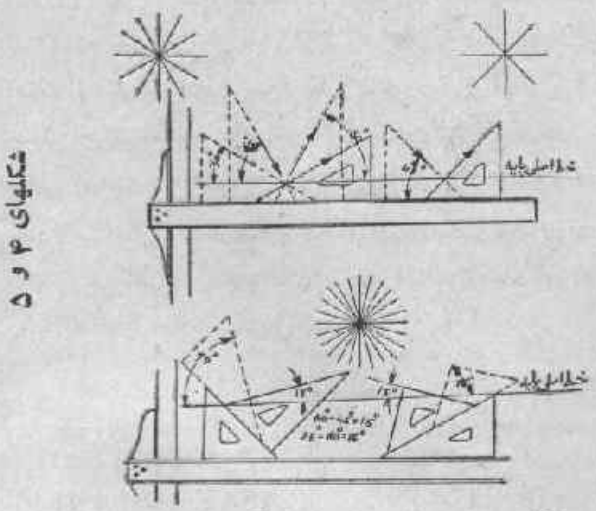
بطورکلی به غیر از خطوط افقی‌که با خط‌کش تی (T) رسم می‌شوند . دررسم بقیهٔ خطوط باید ازگونیا استفاده‌کرد . طریقهٔ رسم خطوط قائم بوسیلهٔ گونیا درشکل (۳) نشان داده شده است . بخاطرداشته باشیدکه برای رسم خطوط قائم‌همواره ضلع عمودی‌گونیا بایددرسمت چپ‌وتر قرارگیرد. خطوط قائم، همواره ازسمت پائین به بالارسم می‌شوند .

شکلهای (۴) و (۵) طریقهٔ‌استفاده ازگونیا هارابرای رسم‌زوایای‌مختلف نشان‌می‌دهند ـ سعی کنید جهت حرکت مداد مطابق باشد با آنچه‌که در شکل با علامت فلش مشخص شده است .



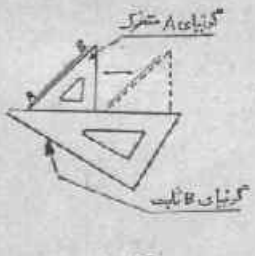
شکل ۳

برای رسم‌خطوط موازی می‌توان بطریقهٔ زیرعمل‌کرد : فرض کنید لازم است چند خط به موازات خط ثابت **AB** شکل (۶) رسم شود. برای این منظوربایدوترگونیای (A) را مطابق شکل برروی خط **AB** منطبق‌کرده وبعداً گونیای (B) را به طریقی‌که وتر آن بایکی ازاضلاع گونیای (A) درتماس باشد بـا دست چپ



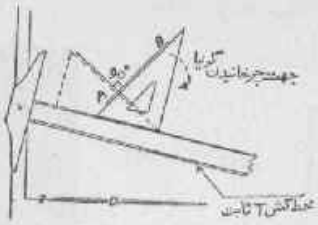
شکلهای ۴ و ۵

ثابت نگاه داشت. حال درصورتی‌که گونیای (A) را به‌آرامی روی‌گونیای (B) بلغزانیم خطوطی که بوسیلهٔ وتر آن رسم می‌شوند باخط **AB** موازی خواهندبود. به جای‌گونیای (B) می‌توان از بعد خط‌کش تی(T) نیز استفاده‌کرد .



شکل ۶

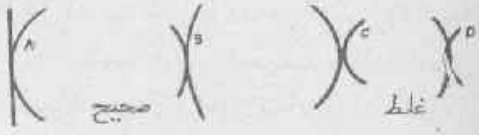
برای رسم خطی عمودبر یك خط مطابق شکل(۷) ابتداباید گونیارا برخط موردنظرمنطبق‌کرده وبعد خط‌کش تی (T) (ویاگونیای دیگری) رابریکی‌ازاضلاع‌آن منطبق کرده وآن را بادست چپ ثابت نگاه داشت .آنگاه بایدگونیا را مطابق شکل (۷) ۹۰ درجه چرخانید . در این حالت وتر گونیا برخط مورد نظرعمود خواهد بود و با لغزانیدن گونیا بعقب وجلومی‌توان خطوطی عمود برخط موردنظربه هرتعداد که لازم باشد رسم‌کرد. توجه‌کنیدکه در این حالت بعدکوتاه خط‌کش تی (T) بالبهٔ تختهٔ رسم درتماس نمی‌باشد.



شکل ۷

خطوط مماس بر هم

دررسم فنی مکرراً لازم است خطی رامماس برداید ویا دایره‌ای رامماس بردایرهٔ دیگررسم کرد . نکته‌ای که باید در رسم مماسها مورد دقت قرارگیرد این است که دو خط مماس بر یکدیگر باید دارای ضخامت مساوی بوده ودر نقاط تماس کاملا بر یکدیگر منطبق باشند. شکل (۸) این نکته را بخوبی روشن می‌سازد. درمماسهای C و D خطوط گرچه بایکدیگر درتماسند

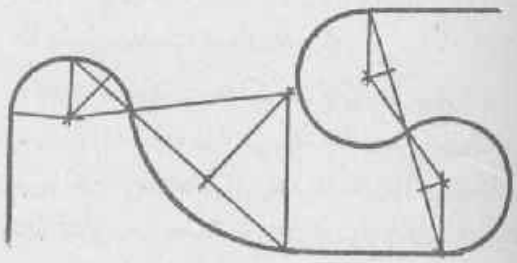


شکل ۸

ولی درنقطهٔ تماس ضخامت آنها کاملا بریکدیگرمنطبق نیست .

دررسم مماسها باید قضایای مربوط به خطوط مماس را (که درهندسه فراگرفته‌اید) موردتوجه داشته باشید :

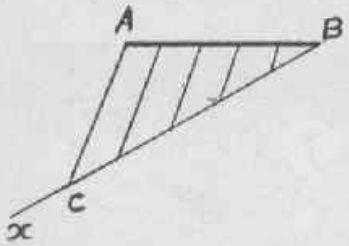
وخط المرکزین دو دایرهٔ مماس بر هم از نقطهٔ تماس می‌گذرد. شعاع نقطهٔ تماس خط ودایره برخط مماس عمودست و غیره ، شکل (۹)



شکل ۹

تقسیم یك خط به چند قسمت مساوی

فرض کنید لازم است خط AB ، شکل ۱۰ ، به n قسمت مساوی تقسیم شود. برای این منظوراز نقطهٔ (B) خط دلخواه Bx دارسم کرده بااستفاده ازپرگارتقسیم کننده (که درانتهای شاخه‌هایش فقط دوسوزن نصب شده است) n قسمت مساوی بر روی آن جدامی کنیم تا نقطهٔ (C) بدست آید . حال ازنقاط تقسیم درروی خط Bx خطوطی به‌موازات AC رسم می کنیم، قطعه‌خط AB به n قسمت‌مساوی تقسیم‌خواهد شد .



شکل ۱۰

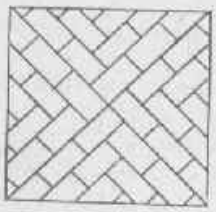
تمرینات

دقت کنید دراین تمرینات و بسیاری ازتمرینهای دیگر لازم است ابتدا پاره خطهای کامل را رسم‌کرده وبعد قسمتهای اضافی‌آن را پاك کنید. برای این منظور می‌توان ابتدا ازمداد های درجهٔ 3H و یا 4H که نوك آنهاکاملا به‌شکل مخروطی تیزشده باشداستفاده کرد. پس‌ازپاك‌کردن قسمتهای اضافی‌برای تکمیل رسم‌از مداد های H و یا 2H استفاده‌کنید ،

درضمن نوشتن اندازه های مربوط فعلا ضروری نیست .

تمرین ۱ـ شکل ۱۱ . استفاده از گونیای ۴۵ درجه وخط‌کش (T) . مربعی به‌ضلع ۸ سانتیمتررسم‌کرده اقطارآن را به‌قسمتهای ۱ سانتیمتری تقسیم‌کنید.

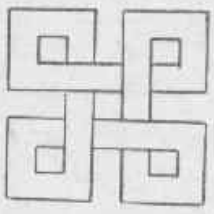
(برای این‌کار ازخط‌کش سانتیمتری استفاده‌کنید وتقسیم بندی را ازمحل تقاطع‌اقطارشروع کرده به‌طرف‌رؤوس مربع ادامه دهید) . بعد با استفاده ازگونیای ۴۵ درجه وخط‌کش (T) شکل را کامل‌کنید .



شکل ۱۱

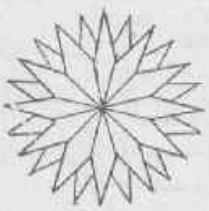
این‌تمرین **قدرت دست را** برای شروع وتوقف دررسم قطعهٔ خطهای‌کوچك زیاد می‌کند.

تمرین ۲ـ شکل (۱۲) . رسم خطوط افقی وقائم . با استفاده ازگونیا و خط‌کش (T) مربعی به ضلع دلخواه رسم کنید اضلاع پائینی وسمت راست آن رابوسیلهٔ پرگارتقسیم‌کننده (بطوری که درمتن شرح داده شد) به هفت قسمت مساوی‌تقسیم‌کنید. بعدبامراجعه به شکل ۱۲ رسم را تکمیل‌کنید .



شکل ۱۲

تمرین ۳ـ شکل (۱۳). دایره‌ای به شعاع ۵سانتیمتر و ۱۲ قطرآنراکه بایکدیگرزوایای ۱۵ درجه می‌سازند رسم کنید (با استفاده ازخط‌کش تی(T) وگونیای ۳۰° ـ ۶۰° و ۴۵°) . با مراجعه به شکل ۱۳ رسم‌راکامل‌کنید .



شکل ۱۳

بالین صفحهٔ بعد



نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه از فرانسه

کارمند بازنشستهٔ راه‌آهن

۲ ـ ترنهائی که از کنار یکدیگر می‌گذرند

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد . از آن طرف ، دکتر ازمکانیسین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعدازظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند . جانسن که بازنشسته بود و همهٔ اوقات را آزادی داشت دعوت دکتر را پذیرفت وعصر به ملاقات وی رفت. در آنجا دکتر گفت که با معمای تازه‌ای مواجه شده است و آنرا برای جانسن چنین شرح داد :

ـ با یکی از بیمارانم راجع به آنچه که برای توپیش آمده بود صحبت کردم واودرمقابل مسئله‌ای مربوط به خودش را برای من بیان کرد : این شخص برای رفتن سرکارش از راهی باید بگذرد که یك رشتهٔ تنهای راه‌آهن را قطع می‌کند؛ این یك رشته راه آهن اغلب برای عبور ترنهای تجارتی مورد استفاده واقع می‌شود که هم‌ازلحاظ طول وهم‌ازاین نظر که به کندی و برای عبور ازشهرها حرکت می‌کنند معروف می‌باشند . بسیار اتفاق افتاده که شخص مزبور مجبور شده است پشت مانع راه‌بند، اتومبیل خودرا متوقف کند وپشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجارتی با آن کندی که حرکت می‌کند وبا دنبالهٔ دور و درازش بگذرد وراه برای اتومبیل وی باز شود. او به من گفت که ترجیح می‌دهد تا به جای یك رشته، دورشته راه‌آهن وجودداشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دوترن در جهتهای مخالف از آن راه می‌گذرند واین باعث می‌شود که زمان توقف اجباری وی مضاعف گردد .

آیا به عقیدهٔ شما این شخص درست پیش‌بینی می‌کند ؟ یعنی اگر دورشته راه‌آهن وجودداشته باشد زمان توقف وی در حالت اخیر کمتر می‌شود ؟

مکانیسین بازنشسته اظهارداشت که :

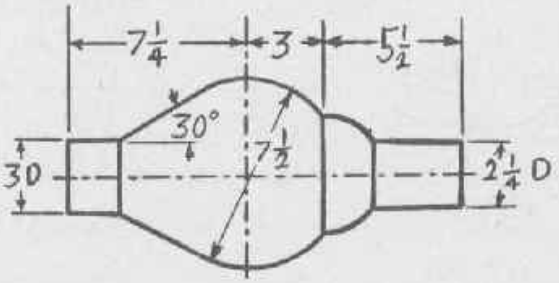
ـ کاملا صحیح است : اگر تعداد کل ترنهایی که دورشته راه‌آهن رامورد استفاده قرارمی‌دهند باتعداد ترنهایی که روی یك رشته حرکت می‌کنند برابر باشد درتقاطع آنها زمان انتظار به حدوسط تقلیل خواهد یافت. اگر دوترن باهم ازمعبر بگذرند زمان توقف اجباری درراه بسته برای آن دو درست برابر است بازمان توقف برای یك ترن تنها .

دکتر پاسخ داد :

ـ این موضوع درست، اما برای وقتی که محل عبورترنها ازیکدیگر درست محل تقاطع جاده باراه‌آهن باشد. درحالتهایی غیرازاین ، وضع ازقراردیگرخواهد بود، یك حالت هم که ممکن است پیش بیاید حالتی است که وقتی لکوموتیو یکی ازترنها به معبر برسد که درست واگن انتهایی ترن دیگر درحال گذشتن

بقیهٔ رسم فنی

تمرین ۴ ـ شکل ۱۴ در این تمرین از واحد اینچ استفاده شده است ومی‌توانید مقیاس را $\frac{1}{2}$ انتخاب کنید .



شکل ۱۴

باشد. راجع به این حالت چه‌می گوئید ؟

مکانیسین پاسخ داد :

ـ بین این حالت و حالتی که دو ترن درآن محل ابداً تقاطعی نداشته باشند هیچ فرقی نیست .

دکتر اظهارداشت :

ـ دراین مورد شما اشتباه می‌کنید . اجازه بدهید تا با محاسبات مقدماتی دلیل اشتباه شمارا برایتان توضیح دهم . فرض می‌کنیم که به طورمتوسط درهرجهت یك ترن از راه‌آهن بگذرد، وزمان عبورهرترن ازمعبرمحل تقاطع ۶ دقیقه باشد . با این مفروضات زمان توقف پشت راه بندرا حساب می‌کنیم! احتمال اینکه اتومبیل موقعی به‌محل تقاطع برسد که ترن‌از آن می‌گذرد یعنی راه بسته باشد برابر با یك بر ده است . احتمال اینکه درست موقعی برسد که ترن‌به معبرمی رسدبرابر است با احتمال آنکه درست موقعی که ترن آنجا را ترك می‌کند .

رویهم رفته وی باید سه دقیقه انتظار بکشدتاترن بگذرد. بنابراین زمان متوسط توقف ۰/۳ دقیقه خواهدشد.

اکنون حالت فوق العاده‌ای‌را درنظر بگیریم که ترنهادر محل تقاطع به وضعی از یکدیگر بگذرندکه لکوموتیو یکی‌در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شده باشد. خیلی ساده است که اگرتعداد ترنها را نصف بگیریم ودرعوض طول هرترن را دوبرابردرنظر بگیریم درنتیجه‌فرقی‌حاصل نخواهدشد. احتمال مربوط به‌اینکه باراه‌بسته روبروشویدهمان احتمال قبلی‌خواهد بود. اما اگرپشت راه بندتوقف کرده باشید زمان انتظار شما دو برابرخواهد شد . بنا براین یك چنین دو ترن برای اتومبیل سواری که مجبوربه توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند :

مکانیسین درحالی‌که به‌موضوع فکرمی‌کرد گفت :

ـ واضح است که اگربین‌عبوردوترن ازمحل تقاطع‌چند دقیقه‌ای فاصله باشد ، اتومبیل سوار می‌تواند ازاین مدت‌زمان استفاده‌کرده قبل‌ازعبورترن دیگرازراه‌آهن بگذرد واین‌حالت برحالتی که دوترن متوالیاً ازمعبر بگذرند وجاده رادرتمام‌طول مدت بسته نگاه دارند برتری دارد .

دکتر گفت :

ـ خوشحالم که موضوع‌رادرك کرده‌اید. فعلا به‌این‌نتیجه رسیده‌ایم که درحال کلی که ترنها از یکدیگر می‌گذرند زمان توقف نصف می‌شود ودرحالت خاصی که‌درعبور ازمعبرلکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود . زمان توقف دوبرابر می‌گردد .

مکانیسین اظهارداشت حالتی رابررسی‌کنندکه ترنهاوقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند لکوموتیو یکی در نیمهٔ طول دیگری واقع شده باشد و دکتر چنین پاسخ داد :

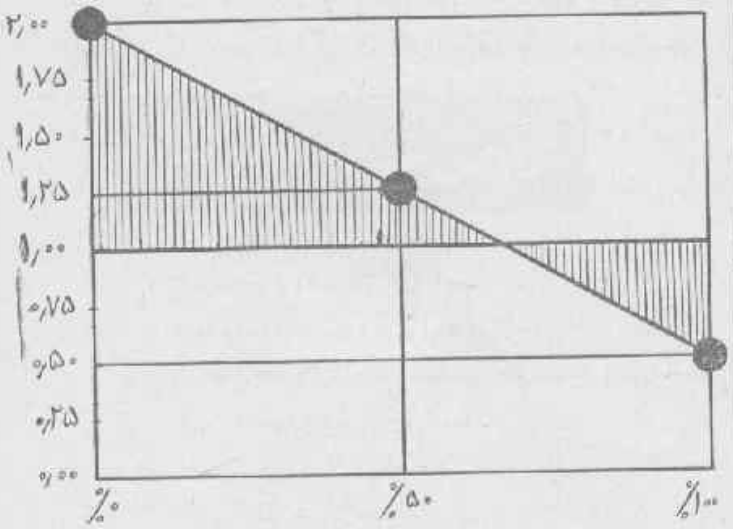
ـ خیلی ساده‌است،چنین حالتی‌معادل‌است باوقتی که‌تعداد ترنها نصف بوده اماطول هر کدام یك برابرونیم بزرگتر باشد. درچنین وضعی‌احتمال مربوط به‌اینکه وقتی‌به‌محل‌تقاطع برسیم که راه بسته باشد در $\frac{۱/۵}{۲}$ ضرب می‌شود وحد متوسط زمان انتظاربرای بازشدن راه در۱/۵ ضرب می‌شود. رویهم، ترقی زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با :

$$\frac{۱/۵}{۲} \times ۱/۵ = ۱/۱۲۵$$

بنابراین در عبور نیم طول ترنها زمان انتظار ۱۲/۵ درصد افزایش خواهد داشت :

مکانیسین گفت که برای یك چنین وضعی عمل محاسبه ناجور است ودکترچنین توضیح داد:

ـ جواب آنهم قابل تأمل است . فعلا نمودار سه حالت گفته شده را رسم بکنیم .

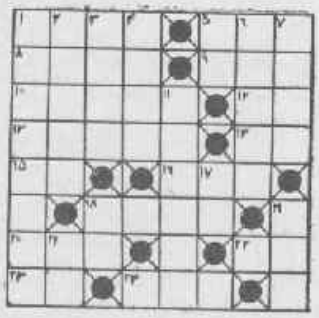


ملاحظه می‌شود که سطح کل متناظر با افزایش زمان‌متوسط به طورقابل ملاحظه‌ای ازسطح متناظر باکاهش‌زمان متوسط بیشتر است . بنابراین نتیجه می‌گیریم که ،طورمتوسط ، رویروشدن دوترن‌درمعبرهای مختلف باعث می‌شود که‌به مدتی بیشترازوقتی که همان تعداد ترن بریك رشته راه آهن می‌گذرند جاده بسته باشد .

سرگرمیهای ریاضی

جدول اعداد

طرح از : محمود مسعود ششم ریاضی دبیرستان ادب اصفهان



افقی : ۱ـ در مبنای ۹ به صورت ۱۸۸۶ نوشته می‌شود . ۵ـ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند: $\overline{aaa} = \overline{3a} \times \overline{3a}$ ۸ـ همان‌عدد۵ افقی که سمت چپ آن رقم ۲ اضافه شده است . ۹ـ از رقمهای متوالی تشکیل شده است . ۱۰ـ تفاضل آن از متمم حسابیش برابر است با ۲۳۰۸۰ . ۱۲ـ مقلوبش همه اعداد را می‌شمرد . ۱۳ـ به صورت $\overline{ab8ba}$ بوده ومجموع رقمهایش ۳۰است. ۱۴ـ دوبرابر عدد۲۲ افقی. ۱۵ـ مجموع رقمهایش مربع کامل است . ۱۶ ـ اگر در رقم یکانش ضرب شود عدد ۲۳۵۹ بدست آید . ۱۸ ـ مجموع رقمهایش ۱۹ است و اگر از صفر سمت راست آن صرف نظر کنیم بقیهٔ رقمهایش تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند . ۲۰ـ سه رقم متوالی . ۲۲ ـ تکرار رقم یکان عدد ۲۳ افقی. ۲۳ـ جذرش مجذور است . ۲۴ـ متمم حسابی عدد ۱۲ افقی.

قائم : ۱ـ رشتهٔ اعداد طبیعی (تاحدی که امکان داشته است).

۲ـ همان عدد ۱۳ افقی .

۳ـ مجموع رقمهایش ۲۴ است.

۴ ـ به‌صورت $\overline{ab(a+1)b}$ می‌باشد .

۵ ـ از ده برابر رقم دهگانش یك واحد بیشتر است .

۶ ـ به صورت $\overline{abcba}$ است .

۷ ـ در مبنای ۷ می‌شود ۳۰۲۱۴ .

۱۱ ـ مقلوبش برعددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و ۹ بخش پذیراست.

۱۷ ـ ده برابر رقم‌دهگان‌خود می‌باشد.

۱۸ ـ مربع یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد ۵ افقی .

۱۹ ـ اگر عدد۲۴ افقی را $\overline{abb}$ فرض کنیم این عدد می‌شود : $\overline{aab}$.

چگونه؟

تعدادی مکعبهای چوبی را به یك سازندهٔ ابزار بازی دادند تا بروجوه آنها تعداد معینی از حروف وارقام‌را حك کند. صنعتگر دریافت که برای حك این تعداد حروف وارقام تعداد وجوه مکعبهای سپرده شده کافی نیست ؛ بلکه باید تعداد وجوه آنها دو برابر شود . این صنعتگر چه روشی‌را بکاربرد تا بدون اینکه مکعبهای دیگری دریافت کند تعداد وجوه لازم را بدست آورد؟

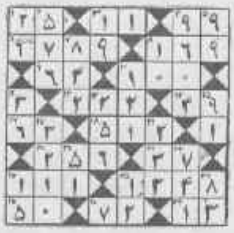
تعمیم دهید

اگر به صورت و مخرج کسر $\frac{1}{3}$ مقدار مخرج را بیفزائیم کسری دو برابر آن بدست می‌آید . اگر این عمل را نسبت به کسر $\frac{1}{5}$ انجام دهیم کسری سه برابر آن حاصل می‌شود. کسری تعیین کنید که چون مخرج آن‌را برصورت ومخرج بیفزائیم کسر حاصل n برابر کسر مفروض گردد.

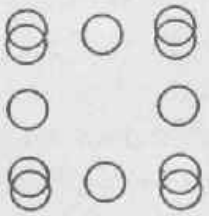
پاسخ تعیین طول‌ترن

سرعت تغییر مکان مسافر ترن دوم نسبت به ترن اول برابر است با $۳۶ + ۴۵ = ۸۱$ کیلومتر درساعت یا $\frac{۸۱۰۰۰}{۳۶۰۰} = \frac{۴۵}{۲}$ متر درثانیه. بنابر. این طول ترن اول برابر است با $\frac{۴۵}{۲} \times ۶ = ۱۳۵\text{m}$

حل جدول شمارهٔ گذشته



پاسخ معمای مهره‌ها



مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

سه ماههٔ اول سال تحصیلی ۴۶ - ۱۳۴۵

کلاس چهارم طبیعی

جبر

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: ازگمی ــ فرستنده: جواد دربندی

۱ـ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف‌ـ $x^{۳}-۳۱x-۳۰$

ب‌ـ $x^{۴n}-۱۳x^{۲n}+۳۶$

ج‌ـ $a^{۴n}+b^{۴n}+a^{۲n}\times b^{۲n}$

د‌ـ $(۳a-۲c-b)^{۳}+(۳b-۲a-c)^{۳}+$
$+(۳c-۲b-a)^{۳}$

۲ـ حاصل کسر $\frac{x^{۲}+۲x-۲}{x}$ را در ازاء

$$x=\sqrt{۷+\sqrt{۱۳}}-\sqrt{۷-\sqrt{۱۳}}$$

بدست آورید.

۳ـ حاصلضرب زیر را بدست آورید.

$$(\sqrt[۳]{۱۲۵}-\sqrt[۳]{۴۰}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۲۷})(\sqrt[۳]{۶۲۵}-\sqrt[۳]{۳۲۰}+$$
$$+\sqrt{۷۵}-\sqrt{۴۸})$$

دبیرستان دولتی کیوان

دبیر: خانم کیخانزاده ـ فرستنده: ژینده گودرزی

۱ـ عبارت زیر را گویا و خلاصه کنید.

$$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

۲ـ صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۱+x+\sqrt{۱+۲x}}+\sqrt{۱+x-\sqrt{۱+۲x}}=$$
$$\sqrt{۲(۱+۲x)}$$

۳ـ سه‌عدد x و y و z متناسب با اعداد a و b و c پیدا کنید بطوری که $۲x+۴z-۳y=m$ باشد.

(حالت خاص $m=۹۵$ و $c=-۲$ و $b=-۷$ و $a=۳$)

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان ارشاد

دبیر: فروغی ــ فرستنده: حسن گل‌محمدی

۱ـ حاصل عبارت زیرا را بدست آورید.

$$\sqrt{\sqrt[۴]{\frac{\sqrt[۶]{a^{۵}}}{\sqrt{a}}}}+\sqrt{\sqrt[۱۲]{\frac{\sqrt{a^{۳}}}{\sqrt{a}}}}+\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt[۱۱]{a^{۶}}}{\sqrt{a}}}}+$$
$$\sqrt{\frac{\sqrt[۱۲]{a}}{\sqrt{a}}}$$

۲ـ مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر:

$$\frac{\frac{x+۲a}{x-۲a}-\frac{x+۳a}{x-۳a}}{\frac{x+a}{x-۲a}+\frac{a-x}{x-۳a}}=\frac{۱}{۲}$$

دبیرستان ملی ۲۵ شهریور آبادان

فرستنده : پیروز بنش

۱ـ درستی رابطهٔ زیر راتحقیق کنید .

$$(x^{۲}+x^{\frac{۴}{۳}}\,.\,x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}+(y^{۲}+y^{\frac{۴}{۳}}\,x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}=(x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$$

۲ـ مخرج کسر زیررا گویا کنید وآن را ساده کنید .

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

۳ـ کسر زیررا بساده‌ترین صورت بنویسید .

$$\frac{[(۲-x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}})\,(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲)]^{۲}}{[(x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}})^{-۲}\,(x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}]^{-\frac{۳}{۲}}}$$

دبیرستان پهلوی اراک

دبیر: محمدی ـ فرستنده : مصطفی راستگردافی

۱ـ عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{۳x^{۳}+۴x^{۲}+۷x+۲}{۳x^{۲}+۱۰x+۳}$$

۲ـ کثیرالجملهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ضریب درجهٔ دوم آن ۱ و بر $(x-۳)$ بخش پذیر بوده و نیز باقیماندهٔ آن بر $(x-۱)$ برابر ۲ باشد .

دبیرستان پهلوی ساری

دبیر: مهران ـ فرستنده : محمد مقدسی

۱ـ عبارت زیر را ساده کنید .

$$\frac{\left(۱+\frac{x}{a}+\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right):\left(۱+\frac{x}{a}\right)}{\left(۱-\frac{x^{۳}}{a^{۳}}\right):\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)}$$

۲ـ مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که عبارت $x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+c$ بر عبارت $x^{۲}-x-۲$ بخش پذیر بوده وباقیماندهٔ آن بر $x-۳$ برابر ۴۰ گردد.

۳ـ اگر $x^{\frac{۱}{۲}}-y^{\frac{۱}{۲}}=۱$ باشد مقدار عبارت زیر را بدست آورید .

$$A=x^{۲}-y^{۳}-۳x^{\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}}$$

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر : ازگمی ـ فرستنده : جواد دربندی ـ احمد شمی

۱ـ بفرض اینکه

$$\frac{۱}{\sqrt{x^{۳}}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۴}}}+\frac{۱}{\sqrt[۴]{x^{۵}}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{x^{n+۲}}}$$

باشد ثابت کنید .

$$\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۴]{x^{۳}}+\sqrt{x^{n}}=kx^{۲}$$

دبیرستان جوینی قوچان

دبیر : عبداللهی ـ فرستنده : بهروز نوبهار

۱ـ صحت تساوی زیر راتحقیق کنید .

$$\frac{\sqrt{\sqrt[۴]{۸}-\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}-\sqrt{\sqrt[۴]{۸}-\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}}{\sqrt{\sqrt[۴]{۸}-\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}}=\sqrt{۲}$$

۲ـ در کسر $\frac{a^{۲}+۱}{۲a^{۲}-۵a+۲}$ اگر a رابه $b+r$ تبدیل کنیم به‌صورت $x+\frac{by+z}{b^{۲}+h}$ تبدیل می‌شود مطلوبست تعیین مقادیر r و b و x و y و z و h

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : ترقی ـ فرستنده : عبدالله نقی

۱ـ معادلات اصم زیر راحل کنید

$$\sqrt{x-\frac{۱}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x}}=x$$

$$\sqrt[۳]{(x^{۲}+۲۴)^{۲}}+۶=-۵\sqrt[۳]{x^{۲}+۲۴}$$

۲ـ ثابت کنید عبارت $(۷x^{۲}+۳x-۳)^{۳}+(۵x^{۲}-۴x-۳)^{۳}$ بر $(۳-۴x)$ و $(۲+۳x)$ قابل قسمت است .

دبیرستان شاهپور (شیراز)

دبیر: دستغیب ـ فرستنده : حمید جعفری ـ رسول رزاقی

۱ـ اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۳$ باشد مطلوبست محاسبهٔ عبارت زیر :

$$A=\frac{f(۲x)-f(x)-x^{۲}}{f(-۱)}$$

۲ـ اگر $a+b+c=0$ باشد ثابت کنید

$$a^۲(b+c)^۲+b^۲(c+a)^۲+c^۲(a+b)^۲+$$
$$+(a^۲+b^۲+c^۲)(ab+bc+ca)=0$$

۳ـ تحقیق کنید که عبارت:

$$x^{۲a}-a^۲x^۲+۲x(a^۲-x^{a-۱})-a^۲+۱$$

بر $(x-۱)^۲$ بخش پذیر است.

۴ـ معادلهٔ درجهٔ سومی با ضرایب گویا پیدا کنید که یك ریشهٔ آن $x=\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۴}$ باشد.

دبیرستان نادرشاه (مشهد)

دبیر: بقائی ـ فرستنده: احمد صدر

۱ـ معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{a(x-a)}{b}=x+\frac{b(b-x)}{a}$$

۲ـ معادلهٔ اصم زیر را حل کنید (جوابها را امتحان کنید).

$$\frac{۱}{\sqrt{x+\sqrt{x^۲-۱}}}+\frac{۱}{\sqrt{x-\sqrt{x^۲-۱}}}=\sqrt{۲(x^۲+۱)}$$

دبیرستان هدایت شیراز

دبیر: صادقی ـ فرستنده: غلامرضا شیرزادی

۱ـ اگر

$$\frac{a^۲}{m^۲}+\frac{b^۲}{n^۲}+\frac{c^۲}{p^۲}=۱ \text{ و } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

باشد ثابت کنید که:

$$\frac{x^۲}{m^۲}+\frac{y^۲}{n^۲}+\frac{z^۲}{p^۲}=\frac{x\sqrt{xy}+y\sqrt{yz}+z\sqrt{zx}}{a\sqrt{ab}+b\sqrt{bc}+c\sqrt{ac}}$$

۲ـ اگر a و b اعداد مثبت بوده و $a+b=۱$ باشد. ثابت کنید که:

$$(a+\frac{۱}{a})^۲+(b+\frac{۱}{b})^۲>\frac{۲۵}{۲}$$

متمم حساب

دبیرستان شمارهٔ (۱) و (۲) آذر

دبیر: مهندس پایافر ـ فرستنده: حمید قیدر

۱ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$\log[۳+۲\log(۱+x)]=0$$

دبیرستان ارشاد

دبیر: سیستانی ـ فرستنده: حسن گل محمدی

مقدار y را از رابطهٔ لگاریتمی زیر حساب کنید.

$$\log_{۲}{}^{\log_{\sqrt{۳}}{}^{۴}}{}^{\log_{\sqrt{۲}}{}^{۲}}{}^{\log_{۱}{}^{\sqrt{۴}}}{}^{\log_{\sqrt{۵}}{}^{۵}}y=۲$$

دبیرستان پهلوی سابق

دبیر: مهران ـ فرستنده: محمد مقدسی

۱ـ مقدار A را از رابطهٔ زیر بدست آورید.

$$A=۹^{(۱-\log_{۳}۲)}+۵^{-۲\log_{۵}۳}$$

دبیرستان پهلوی (ملایر)

دبیر: گلستانی فرستنده: رسول طلائی

۱ـ ثابت کنید $(\frac{۲۱}{۲۰})^{۱۰۰}>۱۰۰$ می‌باشد.

۲ـ معین کنید $۴۵^{۲۶}$ چند رقم دارد.

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: ازگمی ـ فرستنده: جواد دربندی

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۱۰۰^{\log(x+۱)}+۱۰۰^{\log(x+۲)}+$$
$$+۱۰۰^{\log(x+۳)}=۵۰$$

۲ـ بفرض آنکه $\log a\cdot\log b\cdot\log c=\log x$ باشد ثابت کنید:

$$\log a\cdot\log b+\log b\cdot\log c+\log a\cdot\log c=$$
$$+\log_{a}x+\log_{b}x+\log_{c}x$$

دبیرستان حاج قوام

دبیر: سلطانی مقدم ـ فرستنده: مجتبی محزون

۱ـ اگر a و b و c جمل متوالی یك تصاعد هندسی باشند روابط زیر را ثابت کنید.

۱) $(a^۲+b^۲)(b^۲+c^۲)=(ab+bc)^۲$

۲) $a^۲b^۲c^۲(\frac{۱}{a^۳}+\frac{۱}{b^۳}+\frac{۱}{c^۳})=a^۳+b^۳+c^۳$

۲ـ اگر داشته باشیم:

$$S_n=a+ar+ar^۲+\cdots+ar^{n-۱}$$

مطلوبست محاسبهٔ:

$$S=S_۱+S_۲+\cdots+S_n$$

گروه فرهنگی خوارزمی دبیرستان شمارهٔ ۱

دبیر: مؤمنی ـ فرستنده: مجید فارسی ـ علی مرعشی

۱ـ تصاعد حسابی را پیدا کنید که جملهٔ اول آن یك

وجملهٔ دوم و دهم‌وسی‌چهارم آن تشکیل یك تصاعدهندسی بدهند.

۲ـ $a+۳$ رابطهٔ عددی‌بین $(a+۵)^۲$ و $(۱۰a+۴۱)$ درج کنید اگر واسطهٔ ششم مساوی ۱۱۳ باشد تمام واسطه ها را بنویسید .

۳ـ تعیین کنید چند عدد چهار رقمی مضرب ۳۱ داریم دهمین آنها چه عددی است .

دبیرستان دکتر نصوری

دبیر : ایزدی ـ فرستنده عبدالله نقی

۱ـ اگر $log_{۲}۲۱=a$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $log_{۷}۲۷$

۲ـ ثابت کنید اگر داشته باشیم .

$$log_a c \times log_b a + log_a x \times log_b a - log_b ac = ۱$$

خواهیم داشت $x=ab$

دبیرستان شاهپور (شیراز)

دبیر : جوادپور ـ فرستنده : حمید جعفری

۱ـ ثابت کنید اگر $log_b x = \frac{log_a x + log_c x}{۲}$ باشد رابطهٔ $a^۲=(ac)^{log_c b}$ برقرار است .

۲ـ درصورتی که $log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ باشد معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$۴^x + ۱۰^x = ۶ \times ۲۵^x$$

دبیرستان هدایت شیراز

دبیر، بهروز ـ فرستنده : غلامرضا شیرزادی

۱ـ اگر سه‌عدد تشکیل تصاعد هندسی بدهند ثابت کنید که حاصلضرب این اعداد مکعب‌کامل‌است ومجموع این‌اعداد برمجموع مربعهای‌این اعداد بخش‌پذیر است .

۲ـ اگر $\sqrt[۳]{۸}$ و $\sqrt[۳]{۸a}$ و $\sqrt[۳]{-b}$ تشکیل تصاعدعددی بدهند ثابت کنید .

$$\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^۳ = abc$$

۳ـ معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$x^{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots} - ۳x^{\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}} = ۴$$

هندسه

دبیرستان رهنما

دبیر : حسن مولائی

۱ـ دو دایرهٔ متقاطع و غیرمتساوی O و O' مفروضند.

از نقطهٔ A محل تقاطع قاطعی چنان رسم کنید که تفاضل آن دو وتری که در دو دایره بوجود می‌آید برابر l باشد .

۲ـ مثلث ABC مفروض‌است نیمساززاویهٔ خارجی A را رسم‌کرده ثابت کنیدکه اگر از نقطهٔ دلخواه M به دوسر خط BC وصل کنیم‌محیط ABC کوچکتراز MBC می‌باشد.

دبیرستان پسرانه سحن

دبیر : ذوالقدر

۱ـ از مثلثی سه عمود منصف اضلاع و یك نقطه از یك ضلعش معلوم است آن را رسم کنید.

۲ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی وسط قطعه خطی بطول ثابت $AB=l$ ، که دوسرش برروی دو خط عمودبرهم حرکت نماید .

۳ـ مجموع زوایای داخلی‌یك چند ضلعی ۱۶ قائمه است تعداد اضلاعش چقدر است .

دبیرستان مهر (تبریز)

دبیر: پور رضا

۱ـ از چهار ضلعی ABCD معلومات زیر در دست است آن را رسم کنید .

قطر BD و فاصلهٔ نقطهٔ C از BD و زاویهٔ C و ضلع AB وزاویهٔ A.

دبیرستان

دبیر : نادر دیلمقانیان

۱ـ مثلثی رسم کنید کـه طول دو ضلع و طول نیمساز زاویهٔ بین آندو ضلع معلوم است .

فیزیك

دبیرستان پهلوی (بهبهان)

دبیر : جاویدان ـ فرستنده : شکوری

لوله‌ای به بلندی ۱/۲ متر به وزن ۲۵ گرم بوسیلهٔ دو رشته طناب قائم‌که به دو انتهای آن بسته شده‌است. بطورافقی آویزان شده است . وزنهٔ ۱۸۰ کیلو گرمی را به فاصلهٔ ۴۰ سانتیمتری یکی ازطنابها به ضلع آویزان می‌کنیم نیروی کشش هر طناب را حساب کنید .

شیمی

دبیرستان شمارهٔ ۲ آذر

دبیر: مهرگان ـ فرستنده : حمیدقیدر

۱ـ بر محلولی از کلرور دوشو سولفیت سدیم و سپس کلرور باریم اضافه می‌کنیم در نتیجه ۰/۴۶۶ گرم رسوب

تولید می‌شود چه حجم آب آهك ۰٫۷۴ گرم در لیتر برای تهیه کلرور دوشوی فوق مصرف شده است .

دبیرستان امیرکبیر

دبیر : تنهائی و دیلمقانی ـ فرستنده : آهنساز

۳ گرم آلومینیم ناخالص را با سود سوزآور گرم وغلیظ ترکیب می‌کنیم حجم هیدروژن بدست آمده ۳٫۳۶ لیتر حجم سود مصرف شده 50^{cc} می‌باشد .

اولا درجهٔ خلوص آلومینیم را پیدا کنید .

ثانیاً غلظت محلول سود را محاسبه کنید .

ثالثاً هیدرژن حاصل چند گرم اکسید فریك را در گرما احیاء می‌کند .

کلاس پنجم طبیعی

فیزیك

دبیرستان پهلوی (بهبهان)

دبیر: جاویدان ـ فرستنده : موسی خبازه

۱ـ آئینه‌ای ازجسمی تصویری می‌دهد حقیقی وسه‌برابر جسم در صورتی که فاصلهٔ جسم تا تصویرش 60^{cm} باشد مطلوبست نوع آئینه وشعاع انحنای آن .

۲ـ در دوظرف A و B به ارتفاع 12^{cm} به‌ترتیب آب وبنزین می‌ریزیم کدامیك از دوظرف گودتر بنظرمی‌رسد و در ظرفی که بنظر کم عمق‌تر است تاچه اندازه مایع ازهمان جسم بریزیم تا گودی دوظرف بنظر یکسان باشد (ضریب شکست آب $\frac{4}{3}$ و بنزین $\frac{3}{2}$)

شیمی

دبیرستان بهبهانی (کازرون)

دبیر : جواهری

۱ـ بر 100^{cc} محلول ClH بقدر کافی نیترات نقره می‌ریزیم رسوب سفید به وزن ۱٫۴۳۵ گرم تولید می‌شود مطلوبست :

الف ـ فرمول معادلهٔ شیمی‌عکس‌العمل فوق الذکر به‌طریقهٔ یونی وتحقیق در بارهٔ اینکه واکنش فوق کامل است ویاناقص.

ب ـ تعیین غلظت معمولی ، غلظت ملکولی ، غلظت یونی و نرمالیتهٔ محلول اسید.

ج ـ اگر 10^{cc} ازمحلول اسید فوق‌الذکر با 100^{cc} محلول سود سوزآور خنثی‌شود پیدا کنید PH و POH محلول سود را

د ـ چه مقدار از این اسید را باید انتخاب کرد و چه مقدار آب باید به آن اضافه نمود تا یك لیتر محلول سانتی‌نرمال بدست آید اگر نتوانستید فاکتور را پیدا کنید آن را $\frac{1}{15}$ بگیرید).

۲ـ ۱ گرم سنگ آهك را در 10^{cc} جوهرنمك ۲ نرمال می‌اندازیم. برای خنثی شدن کامل اسید باید 50^{cc} محلول سود سوزآور ۰٫۱ نرمال اضافه کرد پیدا کنید درجهٔ خلوص سنگ آهك را .

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر ، مروجی ـ فرستنده، موسی خبازه ،

محلولی است از جوهر نمك 10^{cc} آن بوسیلهٔ 24^{cc} سودبه فاکتور ۰٫۲۵ خنثی می‌شود درآزمایش دیگر 50^{cc} از این اسید با 15^{cc} پتاس به فاکتور غیر مشخص خنثی‌می‌شود. درآزمایش سوم 20^{cc} ازاین پتاس‌می‌تواند 16^{cc} جوهر گوگرد را خنثی کند. غلظت جوهر گوگرد را حساب کنید .

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان امیرکبیر

دبیر، بنائی ـ فرستنده: احمد صدر

۱ـ نقطهٔ A به طول ۱ ـ برروی نیمساز ربع دوم و دونقطهٔ B(۲ و ۵) و C(a − ۴ و ۱ − ۳a) مفروضند:

۱ـ مطلوبست تعیین a به قسمی که :

الف ـ سه نقطهٔ AوBوC بر یك استقامت باشند .

ب ـ از نقطهٔ C پاره خط AB بزاویهٔ قائمه دیده‌شود

ج ـ نقطهٔ C روی عمود منصف قطعه خط AB واقع شود .

د ـ فاصلهٔ نقطهٔ C از نیمساز ربع اول مساوی $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ باشد .

۲ـ با فرض ۲ ـ a مساحت مثلث ABC و طول شعاع دایرهٔ محیطی آن را حساب کنید :

۳ـ محور مختصات را بموازات خود به نقطهٔ G محل

تلاقی میانه‌های مثلث انتقال می‌دهیم مختصات رؤوس جدید مثلث را بدست آورید .

دبیرستان البرز

دبیر، زاوشی ــ فرستنده، ژوزف صالح

۱ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=۹۰)$ بقسمی است که رأس A روی محور $x'Ox$ و رأس B روی محور $y'Oy$ و رأس C روی خط $۳x-۴y=۰$ واقعند در صورتی که نقطهٔ تلاقی سه میانهٔ مثلث $G(\frac{۷}{۳}$ و $\frac{۴}{۳})$ باشد .

الف ــ مختصات رؤوس مثلث را حساب کنید .

ب ــ اگر رؤوس مثلث $A(۳و۰)$ و $B(۰و۱)$ و $C(۴و۳)$ باشد طول پاره خط DD' را حساب کنید (D و D' محل تلاقی نیمسازهای زاویهٔ A با ضلع BC می‌باشد .

۲ــ نقاط A و B به طولهای ۴ و ۲ ــ روی محور $x'Ox$ واقعند . مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقاطی مانند M بقسمی که $tg\,AMB=\frac{۳}{۴}$ باشد.

دبیرستان ایرانشهر (یزد)

دبیر، امینیان ــ فرستنده: ولی پورکرامتی

۱ــ ثابت کنید که منحنی‌های نمایش تابع :

$$y=\frac{mx^۲+(۴-۲m)x+m-۲}{x^۲+۱}$$

به ازاء جمیع مقادیر m از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند .

۲ــ A و C دو سر قطر مربعی هستند که از آن A نقطهٔ تلاقی خط $x=-k$ $(k>۰)$ با نیمساز ربع دوم و C محل تلاقی خط $y=۲k$ با نیمساز ربع اول باشد مختصات B و D دو رأس دیگر این مربع را بدست آورید.

۳ــ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات :

$$x-ay=a \quad و \quad ax+y-(a-۱)=۰$$

را تعیین کنید .

دبیرستان پهلوی زنجان

دبیر: میربها ــ فرستنده: شهاب اجلی

۱ــ مثلث ABC که در آن $AB=۲$ و $AC=۳$ و $B(۳و۱)$ و $C(۲و۳)$ می‌باشد مفروض است مطلوبست مختصات نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ A .

۲ــ نقاط A و B به طولهای ۱ و ۲ روی محور $x'Ox$ مفروضند نقطهٔ M به طول x را چنان تعیین کنید که :

$$\overline{AM}+\overline{BM}=a$$

باشد و به ازاء مقادیر مختلف a که منجر به تغییرات x می‌شود بحث کنید .

دبیرستان پهلوی ساری

دبیر: مهران ــ فرستنده: محمد مقدسی

۱ــ اگر

$$y=\text{Arc}\,tg\,\frac{۱}{۲} \quad و \quad x=-\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

و انتهای کمان x و y در ربع سوم باشند حاصل $tg(x-y)$ را بدست آورید .

۲ــ مقدار a را طوری تعیین کنید که عبارت زیر بستگی به x نداشته باشد .

$$\frac{a\,tg\,x+(a-۲)\cos x}{(a+۸)\cos x-(a-۱)tg\,x}$$

دبیرستان پهلوی ملایر

فرستنده: منصور توفیقی

۱ــ نقاط $A(۳و۰)$ و $B(۲و۰)$ و نقطهٔ C به عرض ۵ روی خطی که از B بر AB عمود است واقع می‌باشد از نقطهٔ C خطی بموازات AB واز نقطهٔ A خطی موازی BC رسم می‌کنیم مختصات نقطهٔ D محل تلاقی این دو خط را معین کنید و تحقیق کنید چهارضلعی $ABCD$ مربع است ومرکز آن روی نیمساز ربع اول واقع است نقطهٔ E را به طول ۱ روی نیمساز ربع دوم اختیار می‌کنیم مطلوبست محاسبهٔ طول محیط و مساحت مثلث ABE .

دبیرستان حاج قوام شیراز

دبیر: سلطانی ــ فرستنده، کیانی

۱ــ تابع $y=\frac{(m-۱)x+۲m}{mx-۱}$ مفروض است .

اولا ــ ثابت کنید که نمایش هندسی تابع فوق به ازاء جمیع مقادیر m از دو نقطهٔ ثابت که مختصات آن را تعیین خواهید کرد می‌گذرد .

ثانیاً ــ m را طوری تعیین کنید که نمایش هندسی تابع فوق به خط مستقیم تبدیل گردد .

ثالثاً ــ اگر $p(-۱$ و $-۱)$ و $q(۲$ و $۲)$ به ترتیب اوساط اضلاع AB و BC از مربع $ABCD$ باشد مختصات رؤوس این مربع را بدست آورید .

۲ــ اولا به فرض آنکه $a<b<c<d$ باشد ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر m معادلهٔ:

$$(x-a)(x-c)+m(x-b)(x-d)=۰$$

دارای ریشه های حقیقی است.

ثانیاً ــ معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$(x-۲)(x-۴)+m(x-۳)(x-۵)=۰$$

مفروض است به ازاء چه مقادیر m ریشه‌های این معادله عکس یکدیگرند .

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۳

دبیر: فروغی ـ فرستنده: سخاوت

۱ـ زاویهٔ مابین دوخط که معادلات آنها به صورت‌زیر داده شده است بدست آورده و معادلهٔ نیمساز زاویهٔ این‌دوخط را بنویسید :

$$۲y^۲+۳(۱-x)y-۲x^۲-x+۱=۰$$

۲ـ نقطهٔ A(۴و۶) یکی ازرؤوس مستطیل ABCD مفروض است M(۳/۵و۱/۵) مرکز مستطیل و مساحت آن ۲۰ واحد مربع است مختصات رؤوس مستطیل‌را بدست‌آورید.

دبیرستان دکتر کریم فاطمی (اهواز)

دبیر: گیتی زاده ـ فرستنده: شاهرخ‌شمیم

سه نقطهٔ :

$$A(a\text{و}a+۱) \text{ و } B(a+۱\text{و}۳a) \text{ و } C(۵a\text{و}۵a-۳)$$

مفروضند :

۱ـ ثابت کنید کلیهٔ مثلثهائی که از تغییر پارامتر a بدست می‌آیند با یکدیگر متشابه‌اند .

۲ـ مقدار a را به طریقی تعیین کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث بر روی خط $x=-۱$ واقع باشد .

۳ـ مثلث ABC به ازاء $a=۰$ درنظر می‌گیریم مثلث دیگر A'B'C' را بطریقی تعیین کنید که اضلاعش از اضلاع مثلث ABC بزرگتر و نسبت تشابه آنها برابر $\sqrt{۵}$ باشد این دو مثلث را در صفحهٔ محور ها رسم کنید .

دبیرستان سخن(پسران)

دبیر: سید محمد کاظم نائینی ـ فرستنده: فروتن

۱ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۸۹ \\ x+y+\sqrt{x+y}=۱۳ \end{cases}$$

۲ـ ثابت کنید شرط اینکه دستگاه :

$$\begin{cases} ax+by=۱ \\ cx^۲+dy^۲=۱ \end{cases}$$

فقط یك رشته جواب داشته باشد این است که :

$$\frac{a^۲}{c}+\frac{b^۲}{d}=۱$$

دبیرستان شاه‌عباس (اصفهان)

دبیر: قیاسیان ـ فرستنده: مظاهر امینی

۱ـ معادلهٔ خطی بنویسید که از نقطهٔ A(۳و۱) گذشته و حاصل ضرب عرض از مبدأ و طول از مبدأ آن ۱۲ باشد.

دبیرستان شاهپور (شیراز)

دبیر: دستغیبی ـ فرستنده: محمد صادق رجائی

۱ـ دو خط $x=-۲$ و $y=x-۱$ مفروضند اگر این دوخط محور x ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع کنند نقطهٔ C روی‌محور x'Ox چنان پیدا کنید که داشته‌باشیم

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}+\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=۰$$

دبیرستان صفائی (سمنان)

دبیر: لاسجردی ـ فرستنده: ایزدپناه

۱ـ سه نقطهٔ A و B و C روی محور x'Ox واقعند محت رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\overline{BC}+\overline{OB}^۲\cdot\overline{CA}+\overline{OC}^۲\cdot\overline{AB}+$$
$$+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AD}=۰$$

دبیرستان گلشن‌راز (شیشتر)

دبیر: باهمت ـ فرستنده: پریچهر

۱ـ a و b را طوری بیابید که نقاط A(a−۱ ،۱) و B(a+۱و۱) و C(a−۱و b+۱) و D(۱−a و b−۱) بریك استقامت باشند .

دبیرستان محمدرضاشاه پهلوی ـ شیراز

فرستنده: محقق

خطوط $d_۱$ و $d_۲$ به معادلات :

$ax+۳y+۱=۰$ و $۴x+ay-۱=۰$ و $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ به معادلات $x+۲y=۱$ و $y=۲x+۳$ مفروض‌است مقدار a را طوری تعیین کنید تا خطی که از نقطهٔ تلاقی‌دوخط $d_۱$ و $d_۲$ را به نقطهٔ تلاقی خطوط $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ وصل می‌کند نیمساز زاویهٔ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ باشد (بدون‌استفاده از برخورد خطوط $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$).

۲ـ دو خط d و Δ به ترتیب به معادلات :

$۲y-۳x-۱=۰$ و $۲y+x+۲=۰$

مفروض است‌اگر خط d معادلهٔ ارتفاع AH و Δ معادلهٔ‌ارتفاع BH' از مثلث ABC باشند مختصات‌سه رأس مثلث راحساب کنید در صورتی که رأس C روی محور Oy' قرارداشته‌باشد وزاویهٔ AOB قائمه باشد .

۳ـ تابع زیر مفروض است‌ثابت‌کنیددر ازاء جمیع‌مقادیر a و b منحنی‌های نمایش‌این تابع از یك نقطهٔ ثابت که‌مختصات آن را تعیین خواهید کرد می‌گذرد .

$$(x^x y^y-xy^۲-۲)^a+(x^۲y-y^x x^y-۲)^b$$
$$=xy(x-y)-۱$$

دبیرستان مهرآئین

دبیر: اردشیری ـ فرستنده: کیانی

۱ـ از مثلث غیر مشخص A(۲و۴) یك رأس و معادلهٔ

دو میانه عبارتند از $3y-x+1=0$

و $2y-5x+12=0$

مختصات رؤوس دیگر این مثلث را تعیین کنید.

دبیرستان نمازی

دبیر: همت ــ فرستنده: حسین شهپری

۱ــ خط Δ به معادلهٔ $ax+by+a+b=0$ محور طولها را در نقطهٔ P و محور عرضها را در نقطهٔ Q تلاقی می‌کند و نقطهٔ $R(\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b})$ مفروض است وقتی a و b مقادیر مختلف اختیار نمایند مکان هندسی نقطهٔ S رأس چهارم متوازی‌الاضلاع را که با OR و OG ساخته می‌شود تعیین نمائید (O مبدأ مختصات و G مرکز ثقل مثلث PQR است).

۲ــ تحقیق کنید که خط D به معادلهٔ:

$$(2m^2+m^2-m+2)x+(-3m^2+m^2+$$
$$+m-1)y-5m^2+m-4=0$$

به ازاء جمیع مقادیر m از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد مختصات این نقطه را تعیین کنید.

۳ــ اگر a و b مختصات نقطهٔ M از صفحهٔ مختصات باشد مکان M را پیدا کنید بقسمی که معادلهٔ:

$$a^2x^2+2a(a+b)x+ab+b^2-a^2=0$$

دارای جواب مضاعف باشد ثانیاً مکان M را بیابید بطوری که به ازاء جمیع مقادیر x سه جملهٔ طرف اول معادله مثبت باشد.

دبیرستان نوربخش (رشت)

دبیر: میر مشعشعی ــ فرستنده: رضا میرزنده‌دل

۱ــ x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر هستند،

$$4x^2-2(2m+3)x+m^2+2m-7=0$$

مطلوبست حدود m به شرط اینکه بین ریشه‌ها نامساوی زیر برقرار باشد:

$$x'x''^2+x''x'^2>2(x'+x'')$$

۲ــ روی یك محور دو نقطهٔ A و B مفروض است. نقطه‌ای مثل M چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\frac{2MA}{3MB}+\frac{3MB}{2MA}=\frac{13}{6}$$

سپس تحقیق کنید که آیا نقطهٔ M می‌تواند بین A و B واقع باشد.

دبیرستان نوباوگان ضرابی

دبیر: حریرچی ــ فرستنده: اکرم حبیبی

۱ ــ نقطهٔ $O'(3$ و $1)$ مرکز مربع ABCD می‌باشد اگر رأس A بر مبدأ مختصات منطبق باشد.

اولا مربع را از لحاظ هندسی رسم کنید.

ثانیاً مختصات رؤوس دیگر را حساب کنید.

۲ــ نقاط $A(2-$ و $5)$ و $B(5$ و $4)$ و $C(6$ و $5)$ مفروضند. حضی از مبدأ مختصات چنان عبور دهید که هرگاه نقاط برخورد خط فوق با خطوط AC و BC به ترتیب D و F باشد نقطهٔ O وسط خط DF باشد.

ثانیاً ــ مستطیل PMQR را در مثلث ABC محاط می‌کنیم اگر نقاط M و Q بر خط AB و نقاط R و P به ترتیب بر خطوط AC و CB منطبق باشد مکان هندسی محل برخورد اقطار مستطیل PMQR را محاسبه کنید.

۳ــ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=19 \\ x^4+y^4-x^2y^2=133 \end{cases}$$

۴ــ خط D به معادلهٔ $2x-4y=2$ و خط D' به معادلهٔ $4x+3y=3$ مفروضند. مختصات نقطهٔ A را چنان تعیین کنید که مجموع فواصل نقطهٔ A از دو خط D و D' برابر $\frac{9}{5}$ باشد.

دبیرستان هدف ۳

دبیر: قوامی ــ فرستنده: شهاب ذکاوتی

۱ــ دو نقطهٔ:

$A(m+3$ و $3m+2)$ و $B(3-m$ و $m+2)$

مفروضند. m را طوری تعیین کنید که هر نقطه از نیمساز ربع دوم از A و B به یك فاصله باشد.

۲ــ $A(5$ و $4)$ یك رأس و $K(1$ و $4)$ محل تلاقی دو قطر دوزنقهٔ ABCD می‌باشد که در آن $CAB=45^\circ$

و $DAB=2CAB$

(AB ساق است).

۱ــ مختصات رؤوس B و C و D را بدست آورید

۲ــ مساحت مثلث CDA را محاسبه نمائید.

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دبیر: بهنیا

۱ــ θ را بین معادلات زیر حذف کنید:

$$\frac{x}{\cos\theta}=x'-y'tg\theta \quad \text{و} \quad \frac{y}{\cos\theta}=y'+x'tg\theta$$

دبیرستان ادیب

دبیر: دانا ــ فرستنده: محمدتقی معیر

۱ــ خطوط مثلثاتی $\frac{9\pi}{8}$ را حساب کنید درصورتی که:

$$C_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

باشد.

دبیرستان امیرکبیر

دبیر: بقائی ـ فرستنده احمد صدر

۱ـ در صورتی که :

$$tg^{۲}x\,cotg(x-y)=۱ \quad و \quad cotg(x-y)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

باشد مطلوبست محاسبهٔ کمانهای x و y .

۲ـ اولا از معادلهٔ :

$$(۲m+۱)sin^{۲}x-۲m\,sinx\,cosx+m\,cos^{۲}x=۰$$

معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب tgx نتیجه بگیرید.

ثانیاً ـ m را به قسمی تعیین کنید که:

الف ـ جوابهای معادلهٔ حاصل متمم یکدیگر باشند .

ب ـ یکی از جوابهای معادله $x=\frac{۵\pi}{۴}$ گردد سپس به ازای $m=-۱$ معادله را حل کرده جوابهای محصورین بین صفر و ۲π را مشخص کنید :

دبیرستان البرز

دبیر: بهمنیار ـ فرستنده: زورق صالح

۱ـ جوابهای بین ۲π و ۴π معادلهٔ زیر را حساب کنید

$$sin^{۳}x+cos^{۳}x=sinx-cotgx$$

دبیرستان سخن (پسران)

دبیر: نصیری ـ فرستنده: احمدفروتن

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابهای بین صفر و ۲π آن را بدست آورید :

$$\frac{cosx+۲sinx}{cosx+sinx}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲}$$

۲ـ هرگاه $tgx=\frac{۳m-۱}{m+۲}$ و $tgy=\frac{m-۴}{m+۱}$

باشد m را طوری تعیین کنید که کمانهای x و y مکمل یکدیگر باشند .

دبیرستان شاهدخت

دبیر: شیخان

۱ـ می‌دانیم $cosx-sinx=\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ است مطلوبست محاسبهٔ مقدار tgx .

۲ـ مطلوبست تعیین‌ساده‌ترین رابطه بین a و b بطریقی که داشته باشیم :

$$\begin{cases} a\,tg\varphi+cos\varphi=a \\ sin\varphi=a-b \end{cases}$$

دبیرستان فیوضات مشهد

فرستنده: محسن مخملی

۱ـ بین روابط زیر x را حذف کنید ،

$$\begin{cases} sinx-\frac{۱}{sinx}=a \\ cosx-\frac{۱}{cosx}=b \end{cases}$$

۲ـ می‌دانیم: $tga+\frac{۱}{cosa}=۲$ می‌باشد مطلوبست تعیین خطوط مثلثاتی a در صورتی که a در ربع اول باشد.

دبیرستان فردوسی

دبیر: کریمی ـ فرستنده: فرخ نرامی

۱ـ در صورتی که انتهای کمان α در ربع اول بین صفر و $\frac{\pi}{۴}$ و $cos^{۶}x+sin^{۲}x=\frac{۷}{۱۶}$ باشد خطوط مثلثاتی کمان x را تعیین کنید.

دبیرستان قطب دزفول

دبیر: فخرعطار ـ فرستنده: صادق مهردادی

۱ـ از تساوی زیر a و b و c را تعیین کنید.

$$sin^{۸}x+cos^{۸}x=a\,cos^{۲}۴x+b\,cos۴x+c$$

۲ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر مفروض است :

$$m\,sin^{۲}x+sin۲x+(m-۱)cos^{۲}x=۲$$

m را طوری تعیین کنید که $x'+x''=\frac{\pi}{۴}$ گردد.

دبیرستان گلشنراز (شبستر)

دبیر: باهمت ـ فرستنده: پریچهر

۱ـ به ازاء چه مقداری از a کسر زیر بستگی به x ندارد

$$\frac{(۳-a)sinx-(۳a-۱)cosx}{(۲+۳a)cosx+(۲+a)sinx}$$

دبیرستان مجیدی (اراک)

دبیر: محمدی ـ فرستنده: محسن امیری

۱ـ سری زیر را حساب کنید :

$$S=cos\frac{\pi}{n}+cos\frac{۲\pi}{n}+cos\frac{۳\pi}{n}+$$

$$+\ldots+cos\frac{(n-۲)\pi}{n}+cos\frac{(n-۱)\pi}{n}+cos\frac{n\pi}{n}$$

دبیرستان نمازی (شیراز)

دبیر: همت ـ فرستنده: دبیری

۱ـ ثابت کنید که اگر α کمانی باشد که انتهای آن در ربع اول است داریم :

$$tg\alpha+cot\alpha>۲$$

۲ـ α کمانی حاده‌است و داریم :

$$\begin{cases} cotg\,(K\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)-4x=tg(K'\pi+\frac{\pi}{4}) \\ sin(2K''\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha)+\sqrt{x+\frac{\pi}{3}}=0 \end{cases}$$

مقدار x راحساب کنید) (K و K' و K'' اعداد صحیح اند).

دبیرستان نوربخش (رشت)
دبیر: آخوندزاده ـ فرستنده: سیدرضا میرزنده دل

۱ـ اگر داشته باشیم :

$$3sin(5x+y)=5sin(3x+y)$$

ثابت کنید :

$$4tgx=tg(4x+y)$$

دبیرستان هدایت (سنندج)
دبیر: عطائی ـ فرستنده: اسعد اردلان

۱ـ اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 که به ترتیب صعودی قرار دارند کوچکترین چهار زاویهٔ مثبت باشند که سینوس آنها برابر k است در صورتی که $1\geq k>1$ باشد ثابت کنید

$$4sin\,x_1+3sin\frac{x_2}{2}+2cos\frac{x_3}{2}+sin\frac{x_4}{2}=4k$$

دبیرستان هدف شمارهٔ (۳)
فرستنده: حمد جنانی

۱ـ به ازاء چه مقادیر m می‌توانیم داشته باشیم :

$$cosx=\frac{m^2-2m}{m-1}$$

در این حال tgx را حساب کنید.

۲ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند که دردوابط زیر صدق نمایند این زوایا را برحسب رادیان حساب کنید.

$$\begin{cases} cosA\,cosB=\frac{1}{2} \\ \frac{sinA}{sinB}=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

دبیرستان هدف ۲ (دختران)
دبیر: شیخان

۱ـ می‌دانیم $tga+\frac{1}{cosa}=2$ است و انتهای کمان a در ربع اول است مطلوبست محاسبهٔ sina.

۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید. جوابهای کلی و جوابهای واقع بین صفر و 2π را با استفاده از جدول تعیین کنید.

$$2sin^2(x+\frac{3\pi}{5})+(1-\sqrt{3})cos(x+\frac{\pi}{10})=\sqrt{3}$$

مسائل هندسهٔ فضائی

دبیرستان البرز
دبیر: بهمنیار ـ فرستنده: ژوزف صالح

۱ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی در صفحهٔ R که مجموع مربعات فواصل آن نقاط از دو نقطهٔ ثابت A و B خارج از صفحه مقدار ثابت k^2 باشد.

دبیرستان پهلوی (ملایر)
فرستنده ـ توفیقی

۱ـ خطی چنان رسم کنید که یك سرش روی خط مفروض D و یك سر دیگر آن در داخل صفحهٔ مفروض P و نقطهٔ مفروض O وسط آن باشد.

دبیرستان خرداد
دبیر: محمود کاشانی

۱ـ صفحهٔ P و خط Δ مفروضند از خط Δ صفحه‌ای مرور دهید که با صفحهٔ P زاویهٔ α بسازد.

۲ـ هر صفحه‌ای که از نیمسازیك زاویه بگذرد با اضلاع آن زاویه زوایای متساوی می‌سازد.

دبیرستان دکتر محمود شیمی
دبیر: شیخان

۱ـ چهار وجهی ABCD مفروض است.

اولا ثابت کنید که چهار قطعه خط که هر یك از آنها یك رأس چهار وجهی را به محل تلاقی میانه های مثلث وجه مقابل به آن رأس وصل می‌کنند متقاربند و نقطهٔ مشترك آنها G در $\frac{3}{4}$ طول هر یك از آنها ابتدا از رأس قرار دارد.

ثانیاً ـ اگر دو وجه ABC و DBC مثلث های متساوی‌الساقین برابر به قاعدهٔ مشترك BC بوده، وفرجهٔ تظیریال BC برابر 60° و طول یال $BC=2a$ و $AD=a$ باشد طول عمود مشترك دو یال متنافر AD و BC و طول سایر یالهای چهار وجهی و نیز سطح و حجم آنرا برحسب a حساب کنید.

دبیرستان سخن (پسران)
دبیر: ذوالقدر ـ فرستنده: احمد فروتن

۱ـ خط D و پاره خط BC که با D متنافر است مفروضند بر خط D نقطهٔ A را چنان بیابید که :

$$BAC=90^\circ$$

باشد.

۲ـ صفحهٔ ثابت P و مثلث ABC مفروضند. از نقطهٔ دلخواه O واقع در خارج آنها به A و B و C وصل

نموده امتداد می‌دهیم تا صفحهٔ P را به ترتیب در 'A و 'B و 'C قطع نمایند ثابت کنید اگر O در فضا تغییر نماید خطوط 'A'B و 'B'C و 'A'C هر یك از نقطهٔ ثابتی می گذرند که این سه نقطهٔ ثابت بریك خط راست واقع‌اند

دبیرستان فردوسی (تبریز)

دبیر: حسیمی ـ فرستنده: فرخ قوامی

۱ـ دو خط Δ و'Δ و دو نقطهٔ A و 'A داده شده است از A و 'A دو خط موازی چنان رسم کنید که اولی Δ و دومی 'Δ را قطع کند .

دبیرستان فردوسی (رضائیه)

دبیر: صولتی ـ فرستنده عبادی ، فیضی آذر آرومیه

۱ـ برسه رأس مثلث ABC سه صفحهٔ موازی ومتساوی‌الفاصله چنان مرور دهید که یکی از آنها از نقطهٔ مفروضی واقع در خارج صفحهٔ مثلث بگذرد .

دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی (رشت)

دبیر: فردادی ـ فرستنده : سالار محمودی

۱ـ سه محور ثابت و متحدالجهت و غیر واقع در یك صفحه مفروض‌اند . سه نقطهٔ ثابت A و B و C به ترتیب برسه محور واقع‌اند و سه نقطهٔ متغیر 'A و 'B و 'C به ترتیب بر سه محور چنان حرکت می کنند که مجموع جبری:

$$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$$

برابر با مقدار K باقی می‌ماند ثابت کنید که 'G مرکز ثقل مثلث 'A'B'C نقطهٔ ثابتی است و برعکس یعنی اگر 'G ثابت فرض شود و رابطهٔ (۱) برقرار خواهد بود .

۲ـ دو خط متعامد ومتنافر Ax و By مفروض است و

$$AB=a$$

عمود مشترك آنها می باشد قطعه خط MP با طول ثابت چنان تغییر مکان می‌دهد که M همواره بر Ax و P همواره بر By واقع است (b>a) .

الف ـ ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ دوخط AB وMP مقدار ثابت است.

ب ـ مکان هندسی I نقطهٔ وسط MP را تعیین کنید .

دبیرستان مجیدی (اراك)

دبیر: نشوادیان ـ فرستنده: محسن امیری

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$) مفروض است . از نقطهٔ B عمود BS را بر صفحهٔ مثلث اخراج کرده و نقطهٔ S را به نقاط C و A وصل می کنیم .

اولا ـ ثابت کنید زاویهٔ SAB زاویهٔ مسطحه دوصفحهٔ SAC و BAC می‌باشد .

ثانیاً ـ اگر از نقطهٔ B دو عمود BE و BD را به ترتیب بر SC و SA فرود آوریم ثابت کنید که :

$$SE\times SC-SD\times SA=SB^2$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که چهار ضلعی ADEC محاطی‌است.

ثالثاً ـ ثابت کنید که خط SE بر صفحهٔ BDE عمود است .

دبیرستان نوربخش (رشت)

دبیر: آخوندزاده ـ فرستنده: سید ضیا میرزنده‌دل

۱ـ دو خط متقاطع D و Δ که در خارج صفحهٔ P قرار دارند مفروضند مطلوبست مکان هندسی نقاطی ازفضا که ازصفحهٔ P به فاصلهٔ l بوده و از دو خط D و Δ به یك فاصله باشد .

دبیرستان نادر شاه (مشهد)

دبیر: بقائی ـ فرستنده : احمد صدر

۱ـ دایرهٔ به قطر AB روی صفحهٔ P مفروض است نقطهٔ M را بر روی محیط دایره در نظر می گیریم از نقطهٔ A عمود AS را بر صفحهٔ P اخراج کرده و نقطهٔ S را به دو نقطهٔ B و M وصل می‌نمائیم از نقطهٔ A عمودهای AC و AN را به ترتیب بر خطوط SB و SM فرود می‌آوریم .

اولا ثابت کنید :

$$SA^2=SN\cdot SM=SC\cdot SB \quad \text{و} \quad SMB=90^\circ$$

ثانیاً ـ ثابت کنید دو مثلث ICN و SMB متشابهند

۲ـ مکان هندسی نقاطی را در صفحهٔ P بیابید که تفاضل مربعات فواصلشان از دو نقطهٔ معلوم A و B واقع در خارج مساوی مقدار معلوم l باشد .

دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

۱ـ دایرهٔ O به شعاع R در صفحهٔ P مفروض است از نقطهٔ A روی صفحهٔ دایره (OA=2R) خطی بر صفحه عمود می‌کنیم و روی آن $AB=R\sqrt{3}$ جدا می کنیم اگر از نقطهٔ A معاسهای AC و AD را بر دایره رسم کنیم :

الف ـ ثابت کنید BC بر CO نیمساز BD و BC=BD می‌باشد .

ب ـ اگر از نقطهٔ A بر صفحه مثلث BCP عمودی رسم کنیم ثابت کنید نقطهٔ H پای این عمود مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BCD می‌باشد .

ج ـ تانژانت زاویهٔ فرجه‌ای که وجهٔ دایره با صفحهٔ مثلث BCD می‌سازد حساب کنید .

۲ـ صفحهٔ P و خط D که در نقطهٔ O آن را قطع کرده مفروض است از نقطهٔ O در صفحهٔ P خطی رسم کنید که با خط D زاویهٔ α بسازد.

دبیرستان هدف ۲ (دختران)

دبیر : شیخان

۱ـ سه خط دو به دو متنافر d و d_1 و d_2 مفروض‌اند متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که یك ضلع آن موازی d متکی به دو خط متنافر d_1 و d_2 بوده و ضلع دیگر آن به طول معلوم l روی d_2 قرار گرفته باشد.

فیزیك

دبیرستان‌سخن (یسران)

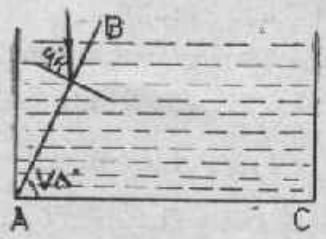
۱ـ آئینهٔ محدبی که قطر دهانهٔ آن ۲۰ سانتیمتر و شعاع آن یك متراست مطلوبست محاسبهٔ قطر میدان دیدآئینه.

۲ـ ظرفی به شکل مکعب مستطیل پراز مایعی به ضریب شکست $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ است سطح AB آن‌راروی‌مایعی به‌ضریب‌شکست $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم لوزی با زاویهٔ ۴۵ درجه به سطح جانبی ظرف برخورد می‌کند با محاسبه تعیین کنید نور با چه زاویه‌ای از کف ظرف یعنی AB وارد مایع می‌شود.

دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

فرستنده: جهانشاه منصوری ـ شهاب ذکاوتی

۱ـ دردوظرف A و B مطابق‌شکل مایعاتی به ضریب شکست $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ریخته شده است و مطابق شکل یك‌شعاع



نور بر سطح AB فصل مشترك این دو مایع می‌تابد این‌شعاع از سطح AC در تحت چه زاویه‌ای خارج می‌شود و زاویهٔ انحراف آن چقدر است.

شیمی

دبیرستان بواسحق (کازرون)

دبیر: حسین جواهری ـ فرستنده سید مسعود هدایت‌زاده

۱/۱۷ گرم نمك طعام جامدرا تجزیهٔ الکتریکی‌نموده و گاز حاصل را در آب می‌اندازیم که تا کاملا ناپدید شود آنگاه بر محلول حاصل تورنسل می‌زنیم برای تغییررنگ معرف 5^{cc} اسید کلریدریك نرمال مصرف می‌نمائیم ملاحظه می‌کنیم که بار رنگ تورنسل تغییر نمی‌کند برای تغییر رنگ معرف ۵ سانتیمتر مکعب اسید سولفوریك ۰/۵۰ ملکول گرم در لیتر لازم است. پیدا کنید:

اولاً ـ درجهٔ خلوص نمك طعام را.

ثانیاً ـ حجم گاز ئیدروژن متصاعد شده در عمل دوم در شرائط متعارفی و همچنین در فشار ثابت و حرارت ۲۷/۳ درجهٔ سانتیگراد.

ثالثاً ـ تعیین غلظت معمولی و غلظت پنی و نرمالیتهٔ اسید سولفوریك.

رابعاً ـ PH و POH اسید فوق‌الذکر.

خامساً ـ چه حجم از این اسید را باید انتخاب کرد و چه مقدار از آب مقطر باید به آن اضافه نمود تا یك لیتر محلول نیم‌نرمال اسید سولفوریك بدست آید.

سادساً ـ اگر نیم لیتر از اسید سولفوریك اولیه‌اسیدا غلیظ نموده سپس قطعه مسی در آن بیندازیم تا کاملا حل شود (به‌کمك‌حرارت) ومحلول‌حاصل رابه ملایمت تبخیر نمائیم جسم بلوریتی به وزن ۳۱/۲۵ گرم تولید می‌شود پیدا کنید تعداد ذرات آب تبلور سولفات مس را.

سابعاً ـ تعداد اتم گرمهای مس که در عمل شرکت کرده است حساب کنید.

ثامناً ـ نسبت درصد آب و سولفات مس پی آب را در سولفات مس متبلور حساب کنید.

تاسعاً ـ اگر این کمك در آب تبلور خود حل شود غلظت معمولی آنرا حساب کنید در صورتی که از تغییر حجم صرف نظر کنیم.

دبیرستان جوینی (قوچان)

دبیر عطاران ـ فرستنده : بهروز نوبهار

۱ـ 10^{cc} از یك محلول‌اسید سولفوریك و اسیدکلریدریك بوسیلهٔ 30^{cc} ازیك‌محلول سود دسی‌نرمال خنثی‌می‌شود 10^{cc} دیگر از همان محلول اولیه را با کلرور باریم ترکیب می‌کنیم ۰/۲۳۳ گرم رسوب بدست می‌آید مطلوبست غلظت و فاکتور هریك از اسیدها.

دبیرستان دکتر کریم فاطمی (اهواز)

دبیر: کامکار ـ فرستنده : شاهرخ شمیم

۱ـ تعیین کنید برای رقیق کردن یك محلول اسید

سولفوریك با غلظت ۲۴/۵ گرم در لیتر چند سانتیمتر مکعب از آن را باید با ۸۰ سانتیمتر مکعب از محلول دیگری از همین اسید با فاکتور ۰/۱۲۵ مخلوط کرد تا فاکتور محلول اسید بدست آمده ۰/۱ گردد.

۲ـ PH یك محلول پتاس ۳ می‌باشد غلظت و فاکتور محلول پتاس را حساب کنید.

دبیرستان سخن (پسران)

دبیر : فرزاد ـ فرستنده: احمد فروتن

۱ـ ۰/۸ گرم از یك اکسید فلز دو ظرفیتی را با اسید کلریدریك به طور کامل ترکیب کرده‌ایم در این عمل 40^{cc} از اسید کلریدریك نرمال مصرف شده است با استفاده از اطلاعات خود جنس فلز را تشخیص دهید.

۲ـ PH محیط اسیدسولفوریك $\frac{1}{10}$ نرمال را محاسبه کنید ۱۲ = PH باشد تراکم را برای اکسیدریل بدست آورید.

دبیرستان صمصامی اراك

دبیر : نوروزیان ـ فرستنده : هادی کارگشا

۱ـ ۰/۶ ملکول گرم سولفات فرو را با ۳۳/۱ گرم نیترات یك فلز دو ظرفیتی مجهول مخلوط کرده‌ایم و با آن آزمایشهای زیر را انجام می‌دهیم.

الف ـ $\frac{1}{2}$ مخلوط را با اسید سولفوریك حرارت می‌دهیم یون Fe^{++} از بین می‌رود و عمل کامل می‌شود. از روی اعمال مربوط جنس فلز مجهول را تشخیص دهید.

ب ـ مخلوط باقیمانده را صاف می‌کنیم و محلول زیر صافی را با آمونیاك ترکیب می‌نمائیم رسوبی بدست می‌آید این رسوب را تکلیس می‌نمائیم وزن جسم جامد حاصل چقدر است.

ج ـ اگر سولفات فروی اولیه را در محیط اسید سولفوریکی با پرمنگنات پتاسیم $\frac{N}{10}$ آزمایش می‌کردیم چند سانتیمترمکعب پرمنگنات بی‌رنگ می‌شد.

دبیرستان محمدرضاشاه (کرمانشاه)

دبیر: صدیق کاکیان ـ فرستنده : شهریار لطیفی

۱ـ 10^{cc} اسید سولفوریك دارای ۰/۴۹ گرم اسید می‌باشد. در صورتی که درجهٔ تفکیك ۶۰٪ فرض شود PH آن را حساب کنید :

($\log 3 = 0/47712$ و $\log 2 = 0/30103$)

دبیرستان هدف‌شمارهٔ ۳

۱ـ یك محلول سود که یونیزاسیون آن صد درصد است دارای PH = ۱۲ می‌باشد فاکتور و غلظت و غلظت ملکولی آن را حساب کنید.

۲ـ محلولی از کلرورسدیم و کلرور پتاسیم و کلرور آمونیوم روی‌هم ۷/۳۶ گرم وزن دارند. نصف این محلول را با سودتکلیس می‌کنیم گاز حاصل ۳۰ سانتیمتر مکعب اسید سولفوریك یك نرمال را خنثی می‌کند نصف دیگر محلول را در آب حل می‌کنیم و بقدر کافی محلول نیترات نقره می‌افزائیم ۸/۶۱ گرم رسوب حاصل می‌گردد وزن هریك از سه کلرور را در محلول حساب کنید.

کلاس ششم طبیعی

جبر

دبیرستان دانش اسکو

دبیر: اسکوئی ـ فرستنده: خلیل علمداری‌میلانی

اولاً ـ معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که در نقطهٔ به‌عرض ۴ بر خط Δ به معادلهٔ $y = \frac{1}{3}x + 3$ مماس بوده و محور x ها را در نقطه‌ای به طول یك قطع کند.

ثانیاً ـ دایره‌ای به معادلهٔ :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

را رسم کنید.

ثالثاً ـ از نقطهٔ تلاقی خط Δ با محور y ها مماس دیگری بر دایره رسم می‌کنیم معادلهٔ این مماس و مختصات نقطهٔ تماس را پیدا کنید.

رابعاً ـ بیضی به معادلهٔ :

$$9x^2 + 36x + 25y^2 - 200y + 211 = 0$$

را در همان دستگاهی که دایره رسم شده است رسم نمائید.

دبیرستان شهپرست

دبیر: شیخان

۱ـ مشتق تابع $y = \frac{x + \cos 2x}{1 + \sin 2x}$ را حساب نموده ساده کنید.

۲ـ اولا مشتق تابع :

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0$$

را بدست آورید.

ثانیاً ـ در نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی معادلهٔ فوق با

محور x ها خطوطی بر منحنی نمایش‌نموده‌ایم معادلات مماسها را بنویسید وسپس زاویهٔ بین دو خط مماس را بدست آورید.

۳ـ تابع $y=\frac{(m+1)x-1}{mx+m+1}$ مفروض است.

اولاً ـ m را طوری تعیین کنید که تابع همواره صعودی یا نزولی بوده یا تبدیل به مقدار ثابتی شود.

ثانیاً ـ m را طوری تعیین کنید که منحنی فوق محور y ها را در نقطه‌ای به عرض (۱ ـ) قطع کند.

ثالثاً ـ جدول تغییرات منحنی (c) نمایش تابع:

$$y=\frac{2x-1}{x+2}$$

را رسم کنید.

رابعاً ـ ازمحل تلاقی مجانبهای منحنی(c)خطی با ضریب زاویهٔ a می‌گذرانیم در حدودی که a تغییر می‌کند تا خط منحنی c را قطع کند ثابت کنید دو نقطهٔ تلاقی نسبت به‌محل تلاقی مجانبها قرینهٔ یکدیگرند.

دبیرستان: فردوسی (گلپایگان)

دبیر: حبیبی ـ فرستنده: مصطفی جابری

۱ـ اولا m را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تابع:

$$y=x^3-4x^2-mx+2m$$

بر خط $y+4x=0$ مماس باشد.

ثانیاً ـ منحنی و خط را نسبت به یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۲ـ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر محورهای مختصات مماس بوده و فاصلهٔ مرکز آن از خط $x+y=4$ برابر $\sqrt{2}$ باشد.

۳ـ معادلهٔ $\sin^2x-\cos^2x=1$ را حل کرده و جوابهای کلی و همچنین جوابهای محصور بین صفر و 2π را بدست آورید:

شیمی

دبیرستان دختران بهمنهانی کازرون

دبیر: جواهری

۱ـ ۰/۳ گرم از یك مادهٔ آلی را تجزیه کرده‌ایم‌در نتیجه‌تولید 224^{cc} گازکربنیك شده در ضمن، درهمین نمونه ۰/۰۲ گرم هیدروژن وجود داشته مطلوبست:

اولا ـ ترکیب درصد عناصر مشکله جسم.

ثانیاً ـ ساده ترین فرمول جسم.

ثالثاً ـ درصورتی که‌ساده‌ترین فرمول جسم به‌صورت $(CH_2O)_n$

و چگالی به حالت بخارآن نسبت به H برابر ۳۰ باشدفرمول ملکولی جسم را پیدا کنید.

۲ـ ۲/۴۶ گرم از یك جسم آلی نیتروژن دار را مورد تجزیه قرار داده‌ایم‌در نتیجه تولید ۵/۲۸ گرم انیدرید کربنیك و 1120^{cc} بخار آب شده است. از طرفی چون ۱/۲۳ گرم ازهمین مادهٔ آلی را باآهك سده حرارت داده و گازقلیائی‌حاصل را وارداسیدسولفوریك دو نرمال نمائیم 5^{cc} از این اسید مصرف می‌شود. از طرف دیگر محلول حاصل‌از ۶/۱۵ گرم این جسم در ۴۰۰ گرم بنزین در ۴/۸۶ درجه منجمد می‌شود. چنانچه نقطهٔ انجماد بنزین خالص ۵/۵درجه باشد فرمول ملکولی جسم‌را تعیین کنید در صورتی که k برای ۱۰۰ گرم بنزین ۵۱/۲ باشد. (اگر نتوانستید جرم ملکولی را پیدا کنید آنرا ۱۲۳ بگیرید).

دبیرستان‌دولتی دانش اسکو

دبیر: تقی‌زاده ماکوئی ـ فرستنده: خلیل علمداری میلانی.

۱ـ‌ازتجزیهٔ $\frac{1}{100}$ ملکول‌گرم از یك الکل اشباع شدهٔ یك ظرفیتی ۸۹۶ سانتیمتر مکعب گاز کربنیك و $\frac{1}{20}$ ملکول گرم آب حاصل شده است فرمول الکل فوق را پیدا کرده و تمام ایزومرهای آن را رسم کنید.

دبیرستان فخرالدین (گرگان)

دبیر: فرقانی ـ فرستنده: ژند

۱ـ دو هیدروکربور A و B موجود است چگالی هیدروکربور A نسبت به B مساوی $\frac{15}{13}$ می‌باشد از طرفی چگالی مخلوط هیدروکربورهای A و B نسبت به انیدرید کربنیك $\frac{2}{3}$ می‌باشد در صورتی که حجم A دوبرابر حجم B در مخلوط باشد.

اولا ـ جرم‌ملکولی‌هریك‌ازهیدروکربورهارا بدست‌آورید.

ثانیاً ـ در صورتی که A اشباع شده و B از نوع هیدروکربورهای اتیلنی‌باشد فرمول هریك را تعیین نمائید

$C=12 \quad H=1 \quad O=16$

گروه فرهنگی فرگام

۱ـ ۰/۱۵ گرم از یك جسم آلی را تجزیه نموده:

112^{cc} و $CO_2\,112^{cc}$

بخار آب در شرائط متعارفی بدست آمده است از طرف دیگر می‌دانیم که این جسم اسیدی است یك ظرفیتی و نسبت وزن سدیم به وزن نمك سدیم آن‌اسید ۰/۲۸ است معین کنیدفرمول آن را .

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان شمارهٔ ۱ و ۲ آذر

دبیر: آذرنوش ـ فرستنده : صراف نهار

۱ ـ مقدار تابع $y=\frac{tgx\,tg3x\,tg5x}{x^2}$ رادرازاء $x=0$ پیدا کنید .

۲ـ معادلهٔ خط‌قائم برمنحنی $y=2-\sqrt{x^2+2x-3}$ رادر نقطهٔ $M(2\ و\ 2)$ بنویسید .

۳ ـ مکان هندسی نقطهٔ

$$P\left(x=\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha+1}{1+\sin^2\alpha}\ و\ y=\frac{3(1-\sin^2\alpha)}{1+\sin^2\alpha}\right)$$

وقتی که α جمیع مقادیر را اختیار کند تعیین کنید وچنانکه این مکان هندسی مرکز تقارنی داردآنرا پیدا کنید .

گروه فرهنگی آرش

دبیر : بهنیا

۱ ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+b}$ مفروض‌است. ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر a و b منحنی نمایش تابع فوق از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و تحقیق کنید این نقطه مرکز تقارن منحنی می‌باشد .

۲ ـ تابع $y=\frac{x^4-2x^3+ax^2+bx-4}{x^2-mx^2+nx+p}$ مفروض است ضرایب را با شرائط زیر بدست آورید .

الف ـ صورت کسر دارای دو ریشهٔ مساوی ودوریشهٔ قرینه است .

ب ـ خط $x=3$ یکی ازمجانبهای منحنی است .

ج ـ به‌ازاء $x=2$ تابع‌فوق میهم‌وبه صورت $\frac{0}{0}$ می‌باشد که مقدارحقیقی‌آن به سمت ۲ میل‌می‌کند .

دبیرستان ادیب

دبیر: طاهری ـ فرستنده : جعفرصادقی

۱ـ درتابع $y=\frac{2}{x^2-1}$ اولا معادلات خطوط‌قائمی که ازمبدأ مختصات برمنحنی‌رسم می‌شوندتعیین کنید ومختصات پاهای قائم راحساب کنید .

۲ـ معادلات خطوط مجانب منحنی به معادلهٔ $y=2x-3\pm\sqrt{x^2-x+5}$ را تعیین کنید .

دبیرستان امیرکبیر

دبیر: بقائی ـ فرستنده : احمد صدر

۱ ـ در تابع $y=\frac{x^2-m}{mx^2-x+m+1}$ حدود m را بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق دارای ۲ و یا یك مجانب موازی محورعرضها بوده ویا دارای چنین مجانبی نباشد m راچنان تعیین کنید که تابع فوق خط $y=1$ را قطع نکند .

دبیرستان پهلوی ساری

دبیر: مهران ـ فرستنده : محمد مقدسی

۱ ـ منحنی c بمعادلهٔ $y=\frac{x^2-2ax+b}{x+a}$ مفروض است .

الف ـ مکان هندسی نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی را پیدا کنید وقتی‌که b ثابت بماند a تغییر کند.

ب ـ مقادیر a و b را تعیین کنید بطوری‌که حاصل‌ضرب ماکزیمم ومینیمم تابع برابر ۴ گردد و مرکز تقارن روی خط $y=b-4$ قرارداشته باشد .

دبیرستان دین ودانش (قم)

دبیر: محمد عابدی ـ فرستنده نوجوان

۱ـ ثابت کنید جمیع منحنی های

$$m^2-2my-x^2+1=0$$

بردایرهٔ ثابتی مماس می‌باشد .

دبیرستان دکتر کریم واظمی

دبیر : نجفی ـ فرستنده : مسعود برکتی

۱ ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx-1}{ax^2+x-b}$ مفروض است .

الف ـ اگر $M(a\ و\ b)$ باشد به ازاء جمیع مقادیر مختلف a و b درجهت‌تغییرات‌تابع بحث کنید.

ب ـ ثابت کنید به ازاءجمیع مقادیرb منحنی تابع فوق برمنحنی‌تابع $y=x^2+x+1$ درنقطه‌ای به‌طول یك‌مماس‌است.

۲ ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ مفروض است

الف ـ ضرایب a و b و c را طوری بیابید که نقطهٔ $O'(1\ و\ 3)$ مرکز تقارن‌منحنی‌بوده‌وخط $2y=x-2$ برمنحنی

عمود باشد ومختصات پای قائم راحساب کنید .

ب ـ خط $y=m$ منحنی تابع $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ را در A و B قطع می‌کند اگر A' و B' تصاویر A و B بر محورطول باشندثابت کنید :

اولا دوایری بقطر A'B' ودارای یك محوراصلی‌اند.

ثانیاً بردایرهٔ ثابتی عمودند ومعادلهٔ دایره‌را تعیین کنید.

اگریکی از دوایربه قطر A'B' منعکس خط $x=1$ نسبت بـه مبدأ مختصات باشد معادلهٔ این دایره را معین کرده ومقدار m را دراین حالت بدست‌آورید .

دبیرستان شاهدخت

دبیر: عبداللهی

۱ ـ منحنی (c) به معادلهٔ $y=\frac{x^2-mx+m^2}{x-m}$ مفروض است .

ثابت کنید که منحنی های تابع مفروض همواره بریك خط ثابت مماس بوده ودارای مجانب مشترك ثابتی می‌باشند.

۲ ـ معادلهٔ مماس و قائم برمنحنی (γ) به معادلهٔ $x^2+(2-y^2)x^2+y^2+1=0$ رادرنقطه‌ای به طول $\sqrt{2}$ بنویسید وهمچنین مجانب های منحنی γ را پیداکرده و تحقیق کنید مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است .

۳ ـ مقدارحقیقی عبارت $\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ را در ازاء $x=0$ تعیین کنید .

دبیرستان شاهپورشیراز

دبیر: اطلاعات ـ فرستنده : غلامرضا قابل

۱ ـ خط $y=m$ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+1}{1-x}$ راعموماً دردونقطه مانند A و B قطع‌می‌نماید حدود m راطوری تعیین نمائیدکه طول یك نقطهٔ برخوردبین اعداد ۱ و ۲ وطول دیگربین۲ و ۵ قرارگیرد و تحقیق کنید فقط‌به ازاء یك مقدارصحیح m این وضع صورت می گیرد.

۲ـ مختصات مرکز تقارن تابع معکوس تابع $y=\frac{x^2+1}{1-x}$ را پیداکنید

دبیرستان گلشنراز شبستر

دبیر: باهمت ـ فرستنده : کلاهی شبستری

۱ ـ تابع $y=\frac{x^2-2ax}{ax+1}$ مفروض است $a\neq 0$

الف ـ بدون استفاده‌ازمشتق ثابت کنید،ازاء جمیع‌مقادیر a تابع فوق دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است و مقادیر ماکزیمم ومینیمم‌آن را پیداکنید .

ب ـ مقدار عددی a را طوری بیابیدکه بین y_1 و y_2 مقادیرماکزیمم و مینیمم تابع فوق رابطهٔ

$$3y_1y_2-y_1-y_2=13$$

برقراراباشد .

دبیرستان محمد قزوینی

دبیر: رجالی ـ فرستنده : سعید قاجار

۱ ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{\cos^2 3mx}{\sin^2 2x}$ به‌ازاء مقادیر m و $x=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید (m عددی است حسابی)

۲ ـ تابع $y=ax-\sqrt{x^2-1}$ مفروض‌است مقدار این تابع‌را به ازاء مقادیرمختلف a و $x=+\infty$ حساب کنید.

دبیرستان هدایت شیراز

دبیر: اردشیری ـ فرستنده : دانشور

۱ ـ تابع $y=2x+\sqrt{ax^2+bx-2}$ مفروض است. ضرایب a و b را طوری‌تعیین کنیدکه خط $y=x+1$ مجانب منحنی‌آن باشد .

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دبیر: بهنیا ـ فرستنده : طاهری

۱ـ مطلوبست حل وبحث معادلهٔزیر :

$$\sin(\pi\cos x)-\cos(\pi\sin x)=0$$

۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید وجوابهای کلی‌وجوابهای بین صفرو π رابدست آورید .

$$(\sin 2x+3)\sin^4 x-(\sin 2x+3)\sin^2 x+1=0$$

دبیرستان شماره ۱ و ۲ آذر

دبیر: طاهری ـ فرستنده : صراف نهار

۱ـ عبارت‌زیررا قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید.

$$S=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+$$
$$+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

۲ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کنید .

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=m\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

۳ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کنید .

$$2\cos a\sin^2 x-2\sin a\cos^2 x=\sin(x-a)$$

دبیرستان ادیب

دبیر: طاهری ـ فرستنده : امیرزاده

۱ـ اولا معادلهٔ مثلثاتی

$$m\sin^2 x-(m+1)\sin x\cos x-\cos^2 x=0$$

را حل و بحث کنید .

ثانیاً m را طوری تعیین نمائید که اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داشته باشیم :

$$2\sin(x'+x'')=3\cos(x'-x'')$$

۲ ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل و بحث کنید:

$$(m+1)\cos 2x-8m(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})+$$

$$+7m-7=0$$

۳ ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases}\sin x=a\sin y\\ tg^2 x=a\,tg y\end{cases}$$

دبیرستان امیرکبیر

دبیر: بقائی ـ فرستنده : احمد صدر

۱ـ معادلهٔ $m\cos^2 x-2\cos x-m=0$ مفروض است اگر $\cos x'$ و $\cos x''$ جوابهای معادلهٔ (۱) باشند معادله‌ای تشکیل دهید که جوابهای آن $\cos 2x'$ و $\cos 2x''$ باشد.

۲ ـ اولا مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر:

$$(m+1)\sin x+\cos x-m\sin^2\frac{x}{2}-2m\cos^2\frac{x}{2}=0$$

ثانیاً m را طوری تعیین کنید که یکی از جوابهای معادلهٔ فوق برابر $2\,\mathrm{Arc}tg 1$ گردد .

ثالثاً m را بقسمی تعیین کنید که داشته باشیم:

$$2\cos(\frac{x'}{2}-\frac{x''}{2})-\sin(\frac{x'}{2}+\frac{x''}{2})$$

دبیرستان خرد

دبیر: صداقت کیش

۱ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{5}{4}\\ \frac{tg x}{tg y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر: چاوشیان

۱ـ معادلهٔ

$$(m+5)\sin^2 x+m\sin 2x+(m-3)\cos^2 x=-2$$

مفروض است .

اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$x'+x''=\frac{\pi}{4}$$

دبیرستان دکتر کریم فاطمی

دبیر: نجفی

۱ـ رابطه‌ای مستقل از α بین x و y بدست آورید:

$$\begin{cases}x=\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\\ y=tg\alpha(\cos\alpha+1)+1\end{cases}$$

دبیرستان دکتر محمود شیمی

دبیر: عبداللهی

۱ـ معادلهٔ زیرراحل وبحث کنید :

$$\sin^2 x+8\cos^2 x=m(\sin x+2\cos x)$$

۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$$

$$+3\cos\frac{x}{2})-\sqrt{3}-2=0$$

دبیرستان شاهدخت

دبیر: عبداللهی

۱ـ عبارت زیررا قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$$2\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-8\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

۲ـ معادلهٔ

$$\cos^2(3x-\frac{\pi}{12})+a\cos(\frac{7\pi}{12}-3x)+b=0$$

مفروض است.

اولا اگر $x'-x''=\frac{\pi}{6}$ باشد ثابت کنید که بین a و b رابطهٔ $a^2+2b+1=0$ برقرار است .

ثانیاً اگر $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ باشد مقدار عددی b را حساب کرده سپس معادلهٔ حاصل را حل کنید وجوابهای بین صفر و π را بدست آورید .

دبیرستان صفائی سمنان

دبیر: فاضلی ـ فرستنده : شریف عرب اسمعیلی

۱ـ معادلهٔ زیررا حل و بحث کنید :

$$tg x-tg 3x=m\,tg 2x$$

دبیرستان فرهنگ

دبیر: طاهری

۱- m را چنان تعیین کنید که ریشه های معادلهٔ زیر هتم یکدیگر باشند.

$$x' + x'' = 90$$

$$m\sin^2 x - (m+1)\sin x + m - 1 = 0$$

۲- ربع دایرهٔ OAB به شعاع R مفروض است شعاع اختیاری OC را رسم می کنیم و از C خطی موازی OA رسم می کنیم تا AB را در D تلاقی نماید بفرض اینکه $AOC = x$ باشد زاویهٔ x را طوری تعیین کنید که مساحت ذوزنقهٔ ACDO برابر mR^2 باشد (بحث)

دبیرستان فخرالدین گرگان

دبیر: مشکین قلم - فرستنده: ژند

۱- نامعادلهٔ زیر را در فاصلهٔ ۰ و 2π حل کنید:

$$\frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1}{tg^2 x - 3} > 0$$

دبیرستان کریم فاطمی

فرستنده: محمد رضا نادری

۱- عبارت زیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$$\sin(a+b+c) - \sin a - \sin b - \sin c$$

۲- در معادلهٔ:

$$(m-1)\sin 2x + \cos 2x + 2m = 0$$

m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$x' - x'' = \frac{\pi}{2}$$

۳- در دستگاه:

$$\begin{cases} \cos 2x = a\sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

a را طوری تعیین کنید که x و y با هم برابر شوند.

دبیرستان گلشنراز (شبستر)

دبیر: باهمت - فرستنده: سعیدفرشاد

۱- ریشه‌های قابل قبول معادلهٔ:

$$2\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$$

را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید.

۲- تا معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{\sin x + \cos x - \sin x \cos x + 1}{\sin x + \sin 2x} > 0$$

۳- حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$S = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a}$$

دبیرستان نادرشاه (مشهد)

دبیر: بقائی - فرستنده: احمد صدر

۱- معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید:

$$(\sin x - \cos x)\sin\alpha + (\sin x + \cos x)\cos\alpha = m$$

دبیرستان هدایت سنندج

دبیر: عطائی - فرستنده: بدخشان

۱- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y - \sin x \sin y = 1\frac{3}{4} \end{cases}$$

حساب استدلالی

دبیرستان شمارهٔ ۲ آذر

دبیر: ربانی - فرستنده: رضا صراف زهار

۱- ثابت کنید اگر n عددی فرد باشد عدد:

$$A = 8^n + 9^n - 17^n$$

همواره بر ۵۱ بخش‌پذیر است.

۲- عددی چهار رقمی $N = \overline{mcdu}$ را از روابط زیر بدست بیاورید:

$$\begin{cases} \overline{uc} = c^2 \\ \overline{md} = md + c + u + 1 \end{cases}$$

دبیرستان آرش

دبیر: ازگمی

۱- عدد $\overline{abcde}$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\overline{cd} - 3(\overline{ab} + 2) = 5e$$

۲- جوابهای صحیح و مثبت x و y را از معادلهٔ سیال زیر بدست آورید.

$$x^2 - y^2 = 3(x - y) + 99$$

گروه فرهنگی بابکان

دبیر: ازگمی - فرستنده: محمد رضا بهادری

۱- ارقام x و y و z را از رابطهٔ:

$$(\overline{54632})_7 = (\overline{20xyz})_x$$

حساب کنید. پس از تعیین x و y و z عدد $(20xy5)_x$ را در عدد $(345)_7$ در مبنای z ضرب کنید و حاصل ضرب را در مبنای z بدست آورید.

۲- جوابهای صحیح و مثبت x و y را از معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$y^2 + 12y = x^2 - x - 7$$

۳- در یك عمل تقسیم باقیمانده ۱۷ است اگر یك صفر بین رقم یکان و دهگان مقسوم قرار دهیم و تقسیم را مجدداً انجام دهیم باقیمانده صفر وخارج قسمت جدید از خارج‌قسمت قبلی ۱۶۹ واحد بیشتر می‌شود عوامل تقسیم را پیدا کنید .

دبیرستان حوینی قوچان

دبیر: عبداللهی ـ فرستنده: بهروز نوبهار

۱- دو عدد a و b داریم اگر عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر تقسیم کنیم خارج قسمت را با باقیمانده جمع کرده و این مجموع را بر ۳ تقسیم کنیم باقیمانده برابر باقیمانده تقسیم a بر b می‌شود .

دبیرستان حاج قوام

دبیر: سلطانی ـ فرستنده: جلال افراسیابی

۱- ثابت کنید در سلسلهٔ فیبوناچی

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ و $a_1=1$ و $a_0=0$

همواره روابط زیر برقرار است :

الف) $a_{n+2}=1+a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

ب) $a_{n+1}=2a_n-a_{n-2}$

۲- مقلوب هریك از دومقدار :

$(\overline{abc})_7-(\overline{cba})_7$ و $9(a-b)$

را بدست آورید :

۳- معادلهٔ سیالهٔ زیر را حل کنید :

$$a+b+c+d=ab+cd$$

دبیرستان خرد

دبیر: مهماندوست ـ فرستنده : زینعلی

۱- ثابت کنید در هر مبنای a بزرگتر از ۴ عدد

$\overline{(x-3)(x-3)44}$

مربع کامل یك عدد دو رقمی است که آن را در مبنای x تعیین خواهید کرد.

دبیرستان دکتر محمود شیمی

دبیر: عبداللهی

۱- هرگاه :

$(\overline{med})_x=(352)_y=(280)_z$

باشد مقدار عددی x و y و m و e و d را پیدا کنید .

۲- اگر $y=\frac{x^2+8x-5}{x^2+2x-3}$ فرض شود به ازاء چه مقدار x و y صحیح و مثبت می گردد .

۳- عدد سه‌رقمی $N=\overline{\alpha\beta\gamma}$ را طوری تعیین کنید که:

$$15\alpha=20\beta+3\gamma$$

باشد .

دبیرستان دکتر فاطمی

دبیر: گیتی زاده

۱- مطلوبست تعیین اعداد چهار رقمی که بر ۲۴ و۳۶ بخش پذیر و باقیمانده: تقسیمشان بر ۳۵ برابر ۲ باشد .

۲- عدد $\overline{1xyz}$ در مبنای ۸ نوشته شده است ارقام x و y را طوری تعیین کنید که این عدد در همین مبنا بر ۴ و ۱۲ قابل قسمت باشد.

۳- ثابت کنید دوعدد $3^{4n+1}+2^{5n+1}$ و $7-2^{n+5}$ دارای رقم یکان متساوی می‌باشند .

۴- تعیین کنید عمل زیر در چه مبنائی انجام شده‌است:

$$23\times24+23+24-136=526$$

۵- اگر $4a+c=2b$ باشد ثابت کنید در هر مبنای بزرگتر از ۴ عددسه‌رقمی $\overline{abc}$ بر ۱۲ بخش پذیراست .

دبیرستان شاهدخت

دبیر: عبداللهی

۱- هرگاه $(531)_x-(423)_y=\overline{\alpha\beta\gamma}$ باشد .

الف ـ مقادیر عددی x و y و α و β و γ را تعیین کنید .

ب ـ حاصل ضرب $(531)_6\times(423)_6$ را در مبنای۶ بدست آورید .

۲- اعدادی را پیدا کنیدکه اگر ۳۶۷ را بر آنها تقسیم کنیم خارج قسمت تقریبی نقصانی تا یك واحد تقریب آنها مضربی از ده باشند .

دبیرستان فخرالدین (گرگان)

دبیر: سیدین ـ فرستنده : محمد مهدی ژند

۱- اعداد P و Q را طوری تعیین کنید که هرگاه مجموع ارقام P را با عدد Q جمع کنیم حاصل برابر۹۵ و هرگاه مجموع ارقام عدد Q با عدد P جمع کنیم حاصل ۸۱ گردد .

۲- عدد $N=(53)_p$ مفروض است .

اولا- مطلوبست تعیین اعدادی مانند a که اگر آنها را در N ضرب کنیم ارقام حاصلضرب همگی۶ شوند (درمبنای۷).

ثانیاً ثابت کنیدا گر کوچکترین عددαرادر N ضرب کنیم این حاصل ضرب درمبنای ۷ بر عدد$(111)_p$ بخش پذیر است.

۳- مطلوبست تعیین دوعدد N و N' که هر دو مجذور کامل هستند و تفاضل آنها ۲۵۹۲ است و بین‌این دوعدد فقط سه مجذور دیگر وجود دارد.

گروه فرهنگی فرگام

دبیر: محمد نوری ـ فرستنده : عنقائی

۱- عددی دو رقمی در پایهٔ ۱۴ چنان پیدا کنید که‌مثلم

حسابی آن در پایهٔ ۱۲ با همان ارقام و همان ترتیب نوشته‌شود

۲ـ مطلوبست تعیین کوچکترین عددی که رقم سمت راست آن ۸ بوده و چون رقم سمت راست آنرا بر داشته و در سمت چپش قرار دهیم عدد حاصل چهار برابر عدد اول‌شود.

دبیرستانهای محمد قزوینی

دبیر: صیامی ـ فرستنده : فرهودی ـ سعید قاجار

۱ـ ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر K عدد:

$$N=5^{2K+3}+3^{K+3}\times 2^{K}$$

بر عدد ۱۹ بخش پذیر است (K عددی است صحیح و حسابی)

۲ـ تعدادی سکه‌های ده ریالی (به قطر ۳سانتیمتر) و۵ ریالی (به قطر ۲ سانتیمتر) و یك ریالی(به قطر ۲ سانتیمتر) ویك ریالی(به قطر یك سانتیمتر) به ارزش ۲۴۱ ریال درکنار هم قرار داده وخطی‌ازسکه ها به طول یك مترتشکیل‌داده‌ایم . مطلوبست تعیین هریك از سکه ها بنا بر آنکه عمل با حداقل مقدار انجام گرفته باشد .

۳ـ در صورتی که داشته باشیم $a-c\geq 1$ درستی‌برابری زیر را ثابت کنید :

$$[(abc)_x-(cba)_x]+$$
$$+[\text{مقلوب عدد حاصل کروشهٔ‌اول در همان مبنا}]+$$
$$=[\overline{10(x-2)(x-1)}]_x$$

۴ـ ثابت کنید که به ازاء هیچیك از مقادیر n عدد:

$$P=25^{n}+2^{n}\times 47^{n+3}-3\times 5^{2n}$$

بر عدد ۳۱ بخش پذیر نیست .

دبیرستان کیهان نو

دبیر: ربانی ـ فرستنده: بیات

۱ـ سلسلهٔ طبیعی‌اعدادرا بدون جداکردن ارقام ازیك تا عدد سه رقمی N و خود این عددرا به دنبال هم نوشته‌ایم‌مقدار ارقامی که بکار رفته دو برابر عدد N است این عدد راتعیین کنید .

۲ـ ثابت کنید درازاء جمیع مقادیر صحیح $n>2$ عدد

$$A=7^{n}+7^{n-1}-50$$

بر ۱۰۰ بخش پذیر است

دبیرستان گلشنراز (شبستر)

دبیر: باهمت ـ فرستنده : کلاهی شبستری ـ سعید فرشاد .

۱ـ به ازاء چه مقادیری از x و y و z عدد $\overline{2xyz}$ بر ۲۹ و۲۳ قابل قسمت است .

۲ـ در تقسیم عدد ۹۹۴۷۵ بر عددی‌باقیمانده‌های‌جزئی به ترتیب ۲۹۲ و ۱۱۹ و ۱۴۲ هستند مقسوم‌علیه و خارج ـ قسمت را حساب کنید .

۳ـ اگر $A=3a-2b+5$ مضرب ۱۳ باشدثابت کنید عدد $B=2a+2b-1$ مضرب ۱۳ است .

دبیرستان هدایت سنندج

دبیر: عطائی ـ فرستنده: بدخشان ـ آرمند

۱ـ مطلوبست تعیین x در $\overline{xdu}_9$ بااستفاده ازرابطهٔ زیر:

$$(\overline{edu})_6 \quad (edu)_x+(edu)_{x-2}$$

۲ـ عددی را بیابید که چون در ۳۳۳۶۶۷ ضرب شود همهٔ رقمهای عدد حاصل ۸ شود .

مسائل هندسه مخروطات

دبیرستان شمارهٔ ۴ آذر

دبیر: نحوی ـ فرستنده: رضا صراف نهار

مثلث ABC مفروض است میانه های BB' و CC' را رسم می کنیم ثابت کنید ارتفاع AH محور اصلی دو دایرهٔ به قطرهای BB' و CC' می‌باشد.

دبیرستان دکتر محمود شیمی مامقانی. شاهدخت. خرداد .

دبیر: شیخان

۱ـ دو بردار به اندازهٔ ۵ و ۷ مفروضند در صورتی که اندازهٔ برآیند این دو بردار $\sqrt{39}$ باشد .

اولا ـ اندازهٔ تفاضل هندسی را بدست‌آورید.

ثانیاً ـ حاصل‌ضرب داخلی آن دو بردارا بدست‌آورید.

۲ـ دایره‌ای را رسم کنید که جزء دوایر دستگاهی‌بوده و برخط مفروضی مماس باشد .

۳ـ بر وسط هر ضلع مثلث غیر مشخص ABC خطی‌بر آن عمود نموده در جهت خارج بر روی‌آنها برداری به‌اندازهٔ همان ضلع جدا می‌کنیم ثابت کنید برآیند سه برداری که به این ترتیب بدست می‌آیند برابر صفر است .

۴ـ دایره‌ای رسم کنید که جزء دوایر دستگاهی بوده‌و بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد .

مسائل رقومی و ترسیمی

دبیرستان شمارهٔ ۴ آذر

دبیر : ارشاقی ـ فرستنده: رضا صراف نهار

۱ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید . واحد سانتیمتر. مقیاس‌شیب‌صفحهٔ P رابه‌شیب‌یك درطرف‌چپ کاغذموازی

با محور اطول یا ترقی رقوم از پائین به بالا رسم کنید بطوری که افقیهٔ رقوم یك آن از مرکز کاغذ بگذرد. نقطهٔ O_2 را در این صفحه روی محور اطول کاغذ اختیار کنید.

اولا ـ ملخص لوزی ABCD واقع در این صفحه را طوری رسم کنید که O_2 مرکز آن و قطر AC به شیب $\frac{1}{3}$ و به طول حقیقی ۸ باشد، AC محور اقصر کاغذ را درطرف راست مرکز کاغذ قطع می کند رقوم A از رقوم C کمتر و رقوم B مساوی ۲است.

ثانیاً ـ اگر از نقطهٔ O_2 عمودی بر صفحهٔ P اخراج و روی آن نقطه‌ای مانند F چنان تعیین کنید که:

$$OF = 5\sqrt{2}$$

و F زیر صفحهٔ P باشد.

ثالثاً ـ ملخص منشوری که یك قاعده‌اش لوزی ABCD و یك یالش BF باشد رسم نموده خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید.

دبیرستان انوشیروان دادگر

دبیر: مهندس خوئی

مسأله: واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصر را افقی و محورقائم راعمود منصف‌آن انتخاب نمائید.

۱ـ نقطهٔ b_2 را به فاصلهٔ۴سمت راست مرکز کاغذ روی محور اقصر در نظر گرفته ازاین نقطه خط b_2a_2 را به شیب $p=\frac{2}{3}$ بقسمی‌رسم کنید که نقطهٔ a_2 بر روی محور اطول قرار گیرد و a زیر مرکز کاغذ واقع شود.

۲ـ بر خط a_2b_2 صفحهٔ P را بقسمی مرور دهید که افقیه‌هایش موازی محور اقصر بوده و یك مقیاس شیب صفحه را در سمت چپ کاغذ رسم نمائید.

۳ـ در صفحهٔ P از نقطهٔ A خط a_2m_2 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که اثرش‌سمت چپ‌کاغذ قرار گیرد.

۴ـ مثلث ABC را در صفحهٔ P به نحوی رسم نمائید که C برروی‌خط AM واقع و $BC=9$ باشد. رقوم‌نقطهٔ c از a کمتر خواهد بود.

۵ـ نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC راتعیین نموده خط $O\Delta$ را که تصویرش موازی محور قائم و به طرف بالای کاغذ ممتد است رسم کنید.

۶ـ از نقطهٔ B خط BS را بقسمی مرور دهید که S برروی $O\Delta$واقع بوده و زاویهٔ خط BC باافق تصویر $a=25$ و بر خط AB در فضا عمود باشد. s در سمت بالای کاغذ واقع است.

۷ـ هرم SABC را رسم و مرئی و مخفی نمائید.

۸ـ عمود مشترك خط OS و BM را روی شکل رسم کنید.

مسئلهٔ اول ترسیمی: نقطهٔ 'aa را به فاصلهٔ ۵ از خط‌الارض بقسمی تعیین کنید که به فاصلهٔ یك واحد بالای‌صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول فضا باشد.

مسئلهٔ دوم: از نقطهٔ 'aa واقع بر خط‌الارض خطی رسم کنید که تصویرش ab و طول حقیقی آن $AB=1$ معلوم باشد 'a'b را بیابید.

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر: قمصری ـ فرستنده: فرخ‌صادقی

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱، محورهای کاغذ را محور مختصات بگیرید.

۱ـ a(۱ و ۳) به رقوم ۵ و b(۴ و ۶) به رقوم ۸ را مشخص کنید، ab و AB و اساس خط AB را به وسیلهٔ محاسبه بدست آورید و زاویهٔ خط AB را با صفحهٔ مقایسه به وسیلهٔ تسطیح بدست آورید.

۲ـ صفحهٔ P را بر خط AB بگذرانید بطوری که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل دهد و جوابی را اختیار کنید که افقیه‌های آن‌با محور اقصر کاغذ موازی باشند، مقیاس شیب صفحه را طرف چپ کاغذ رسم کنید.

۳ـ ازنقطهٔB خط BC را به شیب $\frac{1}{2}$ در صفحهٔ Pرسم کنید (C طرف چپ و بالای B است).

۴ـ زاویهٔحقیقی ABC را به وسیلهٔ تسطیح بدست‌آورید

۵ـ لوزی ABCD راکامل کنید (ملخص‌آنرا)

۶ـ از مرکز لوزی‌که O می‌نامیم‌خط $SO=10$ رابر صفحهٔ P عمود کنید (S زیر صفحهٔ لوزی)

۷ـ هرم SABCD را رسم کنید.

۸ـ مجددا بالای صفحهٔ P منشور قائم ناقصی با شرایط زیر رسم کنید،

$$AE=8\sqrt{2} \quad \text{و} \quad BF=6\sqrt{2} \quad \text{و} \quad CG=10\sqrt{2}$$

۹ـ این دو جسم را جداگانه به فرض آنکه سطح آنها کدر باشد مرئی و مخفی کنید.

دبیرستان راه‌نو

دبیر: مهندس خوئی

محوراقصر کاغذ افقی ومحور اطول راقائم ، محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ انتخاب شود .

۱ـ نقطهٔ a_0 به فاصلهٔ ۴ سمت بالای محوراقصر وبه‌فاصلهٔ ۳سمت راست محورقائم کاغذتصویرمی‌شود. ازاین نقطه خط AC را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنیدکه نقطهٔ C_1 آن در سمت چپ مرکزروی محوراقصرواقع شود.

۲ـ برخط AC صفحه‌ای به اساس $i=1$ مروردهید و یك مقیاس شیب صفحه را در سمت چپ‌کاغذ بقسمی رسم‌کنید که ترقی رقومش ازپائین به‌بالا باشد.

۳ـ به قطر AC درصفحهٔ P مستطیل ABCD رابنا کنیدکه b_2 سمت راست a_2c_1 قرارگیرد .

۴ـ از نقطهٔ c_1 خط c_1y_2 را به شیب $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ بقسمی رسم کنیدکه تصویرش موازی محور اطول وترقی رقومش‌ازبالا به‌پائین باشد.

۵ـ متوازی السطوحی‌که قاعده‌اش مستطیل ABCD و یك یال جانبی‌آن CG می‌باشد رسم و آنرا مرئی و مخفی کنید .

۶ـ مقطع متوازی السطوح را با صفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین کرده مرئی و مخفی نمائید .

۷ـ ارتفاع متوازی‌السطوح‌را که ازمرکزقاعدهٔ فوقانی می‌توان رسم‌کرد مشخص نموده اندازهٔ حقیقی‌آن رانشان‌دهید

۸ـ عمودمشترك خط CG وخط BD راروی شکل‌رسم کنید .

مسألهٔ اول ترسیمی: قرینهٔ نقطهٔ aa' به‌بعد۵ وارتفاع ۲ را نسبت به‌خط الارض نشان دهید.

مسألهٔ دوم : ازنقطهٔ aa' به‌بعد ۳ واقع‌درنیمسازاول خطی رسم کنید که‌تصویر b از آن به‌بعد ۲ نیز معلوم بوده و $AB=1$ نیزدردست باشد . ملخص حل رامشخص نمائید.

دبیرستان رهنما

دبیر: مهندس خوئی

واحد سانتیمتر، مقیاس ۱:۱ محورهای افقی وقائم‌کاغذ را محوراقصرواطول و محل تلاقی آنها مرکزکاغذانتخاب‌شود.

۱ـ نقطهٔ a_0 برمرکزکاغذمنطبق‌است . صفحهٔ P راازنقطهٔ A بقسمی‌مروردهیدکه‌افقیه نمایش موازی محوراقصروشیب صفحه برابریك واحدوترقی رقوم مقیاس شیب ازبالابه‌پائین است ،یك مقیاس شیب صفحه را درسمت چپ‌کاغذ رسم‌کنید.

۲ـ ازنقطهٔ A درصفحهٔ P خطی رسم کنیدکه‌بااثرصفحه درفضا زاویهٔ $\alpha=30$ درجه بسازد واقعیهٔ رقوم ۳ صفحه رادر سمت چپ محورقائم‌کاغذ قطع کند نقطهٔ b_2 را برروی این خط انتخاب نمائید.

۳ـ قطعه خط a_0d_0 را درصفحهٔ P برخط AB عمود کنید .

۴ـدرنقطهٔ A کنج سه قائمهٔ ABDE رابسازید بقسمی که خط $AE=10$ بوده ورقوم E از A بیشترباشد.

۵ـخطوط AB و AD و AE سه خطالرأس مجاور یك‌کنج یك مکعب مستطیل می‌باشند آنرا نمایش داده مرئی و مخفی نمائید.

۶ـ صفحهٔ Q راکه افقیهٔ رقوم ۵ آن برمحوراقصرمنطبق وزاویه‌اش با صفحهٔ افق‌نصف زاویهٔ صفحهٔ P با افق تصویراست درسمت راست‌کاغذ نشان داده وترقی رقوم‌آن خلاف ترقی‌رقوم صفحهٔ P می‌باشد.

۷ـ عمودمشترك افقیهٔ رقوم ۵ صفحهٔ Q را با خط AE ازمکعب مستطیل روی شکل رسم نمائید .

۸ـ مقطع مکعب مستطیل فوق رابا صفحهٔ Q تعیین کرده وآن رانسبت به‌جسم مرئی ومخفی کنید.

مسألهٔ اول ترسیمی : نقطهٔ aa' را به فاصلهٔ ۵ از خط‌الارض بقسمی‌تعیین کنیدکه قرینهٔ‌آن‌نسبت‌به‌صفحهٔ قائم‌تصویر به فاصلهٔ یك بالای نیمسازدوم قرارگیرد.

مسألهٔ دوم : از نقطهٔ aa' واقع بر خط الارض خطی رسم‌کنیدکه باصفحهٔ افق زاویهٔ $\alpha=30$ درجه بسازد و تصویر قائمش باخط‌الارض زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل دهد.

دبیرستان زاگروس

دبیر: مهندس خوئی

مسأله: واحد سانتیمتر ،مقیاس ۱:۱، محوراطول واقصر کاغذ رامرتباً قائم وافقی انتخاب‌کرده محل تلاقی‌آنهارا مرکز بنامید .

۱ـ صفحهٔ P که اثرش برمحوراقصرکاغذ منطبق وترقی رقوم‌آن ازبالا به‌پائین بوده وزاویه‌اش باافق تصویر $\alpha=45^\circ$ است درسمت چپ‌کاغذ رسم‌کنید.

۲ـ از نقطهٔ b_2 واقع درصفحهٔ P که تصویرش برمحور قائم کاغذ منطبق است خطی مرور دهیدکه شیب آن $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده وبرروی آن نقطهٔ d_5 راکه‌تصویرش سمت‌راست محورقائم است انتخاب نمائید.

۴ـ قطعه خط BD قطر لوزی ABCD واقع درصفحهٔ P است که رأس c_2 آن سمت‌چپ bd واقع‌است ملخص لوزی رارسم کنید .

۴ـ صفحهٔ Q را به موازات صفحهٔ P و به فاصلهٔ ۱۰ واحد است دربالای‌آن رسم نمائید. یك مقیاس‌شیب‌آن رادرسمت چپ نشان دهید .

۵ـ قطعه خط b_2s_{10} راکه تصویرش باسمت راست‌محور اقصرزاویهٔ ۱۲۵° درجهت مثلثاتی‌می‌سازدبقسمی رسم کنیدکه S در صفحهٔ Q واقع شود.

۶ـ هرم SABCD را رسم ومرئی و مخفی کنید.

۷ـ مقطع هرم‌را باصفحهٔ افقی رقوم ۵ بدست‌آوریدوآن رامرئی و مخفی کنید .

۸ـ اندازهٔ‌حقیقی‌زاویهٔ SBC رادرسمت چپ‌کاغذمشخص نمائید .

مسألهٔ اول ترسیمی فاصلهٔ نقطهٔ 'aa از خطالارض ۵ ومجموع فواصلش از صفحات نیمساز اول و دوم ۱ می‌باشد ملخص‌نقطه را در ربع اول نشان دهید .

مسألهٔ دوم : برخورد خط مفروض 'dd را با صفحهٔ نیمساز اول ('aa) و یـا صفحهٔ نیمساز دوم ('bb) یافته و اندازهٔ حقیقی قطعه خط AB رادوی یك شکل نشان دهید .

دبیرستان دکتر کریم فاطمی (اهواز)

دبیر، گیتی زاده

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است .

مسألهٔ اول : ۱ـ نقطهٔ a_1 برروی محوراقصر وبه‌فاصلهٔ ۲ سمت چپ مرکزتصویرشده است. نقطهٔ b_2 را به طریقی‌پیدا کنیدکه شیب خط a_1b_2 مساوی ۱ بوده b زیر محور اقصروبه فاصلهٔ ۱ سمت راست محور اطول واقع باشد.

۲ـ نقطهٔ d_2 را چنان تعیین‌کنید که d بـرروی محور اطول واقع و AD بر AB عمودباشد.

۳ـملخص مستطیل ABCD ویك مقیاس‌شیب‌ازصفحهٔ‌آن رارسم کنید .

۴ـ طولهای AD و BD را محاسبه نمائید .

۵ـ دوخط a_1b_2 و a_1d_2 دویال یك‌کنج سه قائمه‌فرض می‌شوند ملخص یال دیگراین کنج رارسم کنید وبرروی‌آن نقطهٔ s_2 رابدست آورید .

۶ـملخص هرم SABCD رارسم‌وخطوط مرئی‌ومخفی آنرا مشخص کنید.

۷ـعمودمشترك‌یال SA وقطر BD ازمستطیلABCD را رسم نمائید .

مسألهٔ دوم : مقیاس شیب صفحهٔ P را با اساس ۱ در کنارچپ کاغذ به موازات محور اطول به طریقی رسم کنید که اثرش از مرکز کاغذ بگذرد و ترقی دقومهایش از پائین به بالا باشد . دراین صفحه نقطهٔ o_2 را بر روی محور اطول انتخاب کنید .

۱ـ نقطهٔ o_2 مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقهٔ $a_1b_1c_2d_2$ از صفحهٔ P می‌باشدکه شعاع دایره ۴ است این ذوزنقه رارسم کنید (a سمت چپ b و d سمت چپ c قراردارند).

۲ـ برقطر a_1c_2 ذوزنقهٔ فوق صفحهٔ Q را برصفحهٔ P عمودکنید ویك مقیاس شیب ازاین صفحه رارسم نمائید.

۳ـ تصاویر نقاط b_1 و d_2 را بـرروی صفحهٔ Q تعیین کنید .

۴ ـ خط بزرگترین شیب صفحهٔ Q را ازنقطهٔ a_1 رسم کنید. وآنرا تانقطهٔ s_8 مدرج نمائید .

۵ـ ملخص هرم SABCD رارسم‌نموده مرئی ومخفی خطوط آنرا رعایت‌کنید .

۶ـ مقدار حقیقی زاویهٔ $a_1s_8b_1$ را بدست‌آورید.

دبیرستان سینا (اهواز)

دبیر، گیتی‌زاده

محورهای اطول و اقصر کاغذرا رسم کنید محل تلاقی آنها مرکز کاغذ ـ واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است .

مسئلهٔ اول : ۱ـ نقطهٔ a_0 را برروی محور اقصر کاغذ وبه‌فاصلهٔ۲ سمت چپ مرکز و نقطهٔ c_2 را که تصویر آن‌دربالای محور اقصر و به فاصلهٔ ۷ از محور اطول کاغذ و راست آن قرار دارد با فرض $AC=\sqrt{۲۴}$ بیابید .

۲ـ بر خط a_0c_2 صفحهٔ P را با شیب ۱ بگذرانید و مقیاس شیبی از آنرا به‌موازات محور اطول کاغذ می‌باشد در کنار چپ‌کاغذ رسم کنید همچنین مقیاس شیب صفحهٔ دیگر P' را که با صفحهٔ P موازی و محور اقصر افقیهٔ رقوم (۱۲ـ) آن می‌باشد درکنار راست کاغذ رسم نمائید .

۳ـ دو نقطهٔ a_0 و c_2 دو رأس غیر متوالی شش ضلعی منتظمی از صفحهٔ P است‌که تصویر رؤوس‌آن متوالیاً ودرجهت مثلثاتی a و b و c و d و e و f نامیده می‌شوند و رقـوم آنها مثبت می‌باشد ملخص این شش ضلعی را رسم کنید.

۴ـ شش ضلعی فوق‌الذکر قاعدهٔ فوقانی منشور منتـظمی است که قاعدهٔ دیگرش در صفحهٔ P قرار دارد ملخص منشور را رسم و خطوط مرئی و مخفی آنرا از یکدیگر تمیز بدهید .

مسئلهٔ دوم: ۱ـ دو نقطهٔ b_0 و c_0 بر روی محور اقصر کاغذ و به فاصلهٔ ۶ از یکدیگر قرار دارند و نسبت به‌مرکز کاغذ متقارن می‌باشند و b سمت راست واقع شده است این‌دو نقطه دو رأس از مثلث متساوی الاضلاع Abc هستند که ضلع Ac برابر ۱ و a بالای محور اقصر می‌باشد ملخص‌این مثلث را رسم و رقوم مثبت رأس A را تا ۰٫۱ تقریب حساب کنید .

۲ـ مثلث Abc قاعدهٔ چهار وجهی منتظم SAbc می‌باشد که رأس S در بالای صفحهٔ قاعده قراردارد ملخص چهاروجهی را رسم کنید و خطوط مرئی و مخفی آنرا تمیز بدهید .

۳ـ بر خط b_0c_0 صفحهٔ P را با شیب ۱ مرور دهید و مقیاس شیب آنرا در کنار چپ کاغذ با ترقی رقوم رو به‌بالا رسم نمائید .

۴ـ اگر a تسطیح نقطهٔ D از صفحهٔ P در حول اثر این صفحه باشد ترفیع این نقطه و رقوم آنرا که مثبت فرض می‌شود تا ۰٫۱ تقریب حساب کنید .

۵ـ مقدار حقیقی زاویهٔ مسطحه فرجهٔ دو صفحهٔ Abc و P را بدست آورید .

۶ـ نقطهٔ e_4 را با فرض $bE = cE$ و $EcD = 90^\circ$ پیدا کرده ملخص هرم EbDc را رسم کنید .

دبیرستان گلشن‌راز «شبستر»
دبیر، با همت ـ فرستنده : سعید فرشاد

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم‌کنید. واحدسانتیمتر مقیاس ۱:۱ است .

۱ـ نقطهٔ a_0 را روی محور اقصر و به فاصلهٔ ۴ سمت‌چپ محور اطول و نقطهٔ b_4 را روی محور اطول و به فاصلهٔ ۳ زیر محور اقصر در نظر بگیرید شیب و اساس خط a_0b_4 را حساب کنید .

۲ـ صفحهٔ P راطوری رسم‌کنیدکه ازخط a_0b_4 گذشته و با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ 45° بسازد از دو جواب‌آنرا اختیار کنید که مقیاس شیبش موازی محور اطول است مقیاس شیب این صفحه را سمت چپ کاغذ و به فاصلهٔ ۲ از کنار کاغذ رسم کنید

۳ـ از نقطهٔ b_4 خط b_4c_1 را در صفحهٔ P چنان رسم کنید که $BC = 7$ باشد و c_1 سمت راست محوراطول قرار گیرد .

۴ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم‌کرده‌رقوم رأس D را پیدا کنید .

۵ـ اگر متوازی‌الاضلاع ABCD قاعدهٔ هرمی باشد که تصویر S رأس آن بر صفحهٔ P نقطهٔ d رأس چهارم متوازی‌الاضلاع ABCD باشد ملخص هرم را رسم کنید در صورتی که صفحهٔ SAB با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ 45° می‌سازد (توضیح اینکه این صفحه جواب دیگرصفحه‌ایست که درقسمت ۲ مسأله رسم کرده‌اید).

۶ـ در صورت کدر بودن هسم آنرا مرئی و مخفی نمائید .

۷ـ ملخص مقطع این هرم را با صفحهٔ افقی رقوم ۱ بدست آورده آنرا نسبت به وجه هرم مرئی و مخفی نمائید.

۸ـ زاویهٔ بین دو وجه SAB و SBC را نمایش دهید (زاویهٔ حقیقی)

دبیرستان مروی
دبیر، مهندس خوئی

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی محور اطول را قائم و محل تلاقی آنها را مرکز انتخاب نمائید .

۱ـ افقیهٔ a_0m_5 به طول حقیقی ۱۵ تصویرش بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده a به فاصلهٔ ۵ سمت چپ مرکز کاغذ و m سمت راست آن واقع است. بر این خط صفحهٔ P رابه‌شیب $p = \frac{2}{3}$ به قسمی مرور دهید که ترقی رقوم بزرگترین شیب آن از پائین به بالا باشد یك مقیاس شیب صفحه را در سمت‌چپ کاغذ رسم کنید .

۲ـ از نقطهٔ a_5 صفحهٔ P′ را به اساس یك بقسمی مرور دهید که افقیه‌های آن درتصویر با محور اقصر زاویهٔ ۳۰درجه بسازند و امتداد ترقی رقوم مقیاس شیب آن از راست به‌چپ و بالا به پائین باشد یك مقیاس شیب آن را سمت پائین کاغذ رسم نمائید .

۳ـ قطعه خط a_5l_4 فصل مشترك دوصفحهٔ P و P′ را مشخص نمائید .

۴ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC که $BC = AC = 8$ می‌باشد در صفحهٔ P رسم کنید C بالای کاغذ و رقومش از A بیشتر است .

۵ـ نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را مشخص نمائید .

۶ـ خط $K\Delta$ که تصویرش موازی محور قائم کاغذ و نقطهٔ K به ارتفاع ۸بررروی خط قائم ماربر نقطهٔ O مرکز

دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است و با صفحهٔ P' موازی می‌باشد رسم نموده و برروی‌این خط نقطهٔ S را بقسمی‌انتخاب کنید که SK = ۹/۲۵ و رقوم S بیش از K باشد .

۷ـ هرم SABC را رسم و مرئی ومخفی نموده ومقطع آنرا با صفحهٔ عمود منصف خط قائم OK بیابید .

۸ـ عمود مشترك خط KS و AM را روی شکل رسم نمائید .

مسئلهٔ اول ترسیمی : از نقطهٔ aa' به بعد ۳ و ارتفاع ۴ خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق زاویهٔ $\alpha = 45^\circ$ بسازد و بر خطالارض متکی باشد .

مسئلهٔ دوم: قطعه خط افقیهٔ aca'c' قطر لوزی است که $BD = \frac{AC}{2}$ اگرامتداد تصویر قائم BD داده‌شده‌باشد ملخص لوزی ABCD را رسم کنید .

دبیرستان مرجان
دبیر: مهندس خوئی

واحد سانتیمتر . مقیاس ۱:۱، محور اقصر کاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیار کـرده محل تلاقی آنها مرکز کاغذ می‌باشد .

۱ـ نقطهٔ o_4 تصویرش بر محور اقصر کاغذ به فاصلهٔ ۳ سمت چپ مرکز واقع است از این نقطه دو خط OB وOC را که مرتباً با صفحهٔ افق تصویر زوایای

$$\alpha = 45^\circ \quad و \quad \beta = \text{Arc } tg\frac{2}{3}$$

می‌سازند و قطعه خط واصل بین نقاط b_0 و c_0 آثار دو خط مزبور برابر ۷ بوده و از نقطهٔ ثابت m_0 واقع برمحوراقصر به فاصلهٔ ۵ سمت راست مرکز کاغذ می‌گذرد رسم نمائید.

$mb > mc$ و $ob > oc$

و b و c زیر محور اقصر می‌باشند .

۲ـ مثلث ABC را که BC قاعده و O مرکز ثقـل آنست کامل نموده ملخص آن را رسم و صفحـهٔ مثلث را بـا بزرگترین شیبش P مشخص نمائید .

۳ـ صفحهٔ P' را به فاصلهٔ ۳ به موازات صفحهٔ P رسم کرده و یك مقیاس شیب آن را نشان دهید . از دوجواب‌آنرا که P' زیر P است انتخاب کنید .

۴ـ منشور مثلث‌القاعدهٔ ABCDEF را که یالهای جانبی به شیب $p = 1$ و تصویرآنها موازی محور اقصربوده و تنزل رقوم آن ها از چپ به راست می‌باشد بقسمی رسم کنید که مثلث DEF درصفحهٔ P' قرارگیرد. منشوررا مرئی‌ومخفی نمائید . صفحهٔ افق را حاکی ماوراء بدانید .

۵ـ صفحهٔ Q که بروسط یال BF عمود می‌باشد بوسیلهٔ بزرگترین شیبش در پائین کاغذ مشخص کنید .

۶ـ مقطع منشور را با صفحهٔ Q بدست آورده مرئـی و مخفی نمائید .

۷ـ خط MΔ را که تصویرش بر محور اقصر کاغذ منطبق است بقسمی مدرج کنید که با BC زاویهٔ حقیقی۴۵ درجه در فضا تشکیل دهد .

۸ـ عمود مشترك خط MΔ را بـا افقیه‌ای که از o_4 می‌گذرد و تصویرش بهموازات محورقائم کاغذ است روی‌شکل رسم نمائید .

مسئلهٔ اول ترسیمی: از نقطهٔ aa' به ارتفاع ۳واقع در صفحهٔ نیمساز دوم خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق زاویهٔ ۲۰ درجه بسازد و صفحهٔ نیمساز اول را در نقطهٔ B به ارتفاع یك قطع کند .

مسئلهٔ دوم : ازنقطهٔ aa' به بعد۵ و ارتفاع۱ نیمرخی رسم کنید که به فاصلهٔ ۳ از خطالارض بوده و نقطهٔ bb' محل تلاقی آن را با صفحهٔ نیمساز اول تعیین کنید .

دبیرستان نظام وفا
دبیر: گیتی‌زاده

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید واحدسانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

مسألهٔ اول ـ مقیاس شیب صفحهٔP را در کنار چپ‌کاغذ با اساس ۱ به طریقی رسم کنید که اثر آن بر محـور اقصر کاغذ منطبق و ترقی رقومهایش از بالا به پائین باشد. در این صفحه نقطهٔ a_4 را بر مرکز کاغذ انتخاب کنید .

۱ـ در صفحهٔ P خط a_0b_2 را با شیب $\frac{1}{2}$ رسم‌کنید. (b سمت چپ a قرار دارد) .

۲ـ درصفحهٔ P خط b_2c_4 بر خط a_0b_2 عمود کنید.

۳ـ ملخص مستطیل ABCD را رسم نمائید.

۴ـ بر قطر BD صفحهٔ Q را با شیب $\frac{1}{3}$ مرور دهیـد و ترقی رقومهای مقیاس شیب‌آنرا از پائین به بالا اختیارکنید.

۵ـ از نقطهٔ a_0 خطی بر صفحهٔ P عمود کرده E نقطهٔ تلاقی آنرا با صفحهٔ Q بدست آورید.

۶ـ ملخص مکعب مستطیلی را رسم کنید که قاعده اش ABCD و یك یالش AE باشد و خطوط مرئی و مخفی آنرا از یکدیگر تمیز بدهید.

مسألهٔ دوم : ۱ـ اگر محور طولها منطبق بر محور اقصر کاغذ و محور عرضها منطبق بر محور اطول کاغذ اختیار شود نقطهٔ a_1 و c_5 را با فرض (۳ و ۲)a و (۱ − و ۱ −)c بدست آورید و طول قطعه خط AC را محاسبه کنید.

۲ـ بر خط a_1c_5 صفحهٔ P را به طریقی بگذرانید که مقیاس شیبش به موازات محور اطول کاغذ باشد.

۳ـ مثلث $a_1b_1c_5$ را در صفحهٔ P بقسمی رسم کنید که شعاع دایرهٔ محاطیش مساوی ۲ و b سمت چپ a باشد.

۴ـ بر ضلع a_1b_1 صفحهٔ قائمی مرور دهید و در این صفحه نقطهٔ a_4 را سمت راست محور اطول با فرض :

$$ASB = 45^\circ$$

تعیین وملخص هرم SABC را رسم نمائید.

۵ـ صفحهٔ قائم فوق‌الذکر را در حول اثرش به اندازهٔ 45° به طرف پائین کاغذ منحرف می کنیم وضع جدید هرم‌فوق و رقوم جدید رأسهای آنرا تا ۰٫۱ تقریب تعیین و مرئی و مخفی آنرا رعایت نمائید.

دبیرستان نمازی (شیراز)

دبیر : کهنگی - فرستنده. فرقانی، درعنائی

۱ـ مقیاس شیب صفحهٔ P را که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ 45° می‌سازد کنار چپ کاغذ موازی محوراطول به فاصلهٔ ۱۰ از آن طوری مدرج کنید که اثر آن از مرکز کاغذ گذشته ترقی رقومش به سمت بالا باشد.

۲ـ چهارضلعی محاطی $a_4b_4c_5d_4$ رادراین صفحه‌طوری اختیار کنید که $ABC = 90^\circ$ و $AC = 8$ و پاره خط ab سمت راست محور اطول و پاره خط cd سمت چپ آن و a به فاصلهٔ ۹ از محور اطول واقع شود.

۳ـ ثابت کنید چهارضلعی ABCD مستطیل است.

۴ـ نقطهٔ S رازیرصفحهٔ P به فاصلهٔ ۴ ازآن‌طوری اختیار کنید که داشته باشیم $SA = SB = SC$.

۵ـ ثابت کنید مثلث ASC قائم‌الزاویه است.

۶ـ مستطیل ABCD قاعدهٔ تحتانی مکعب مستطیلی است که مجموع رقومهای دوسر یال جانبی AE آن ۱۸ می‌باشد ملخص قاعدهٔ دیگر این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۷ـ ملخص جسم حاصل از هرم SABCD و مکعب مستطیل فوق را کامل کرده خطوط مرئی و مخفی آنرا تمیز دهید.

۸ـ نسبت حجم هرم SABCD را بر حجم مکعب مستطیل ABCDEFGH حساب کنید.

دبیرستان همایون شمارهٔ ۱

دبیر. مهندس خوئی

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱، محورهای اقصر و اطول کاغذ راافقی‌وقائم‌اختیار نموده ومحل‌تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ صفحهٔ P که افقیهٔ رقوم ۳ آن بر مرکز کاغذمرور کرده و مقیاس شیب آن با محور قائم کاغذ موازی است و در سمت چپ کاغذ قرار دارد با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ

$$\alpha = \text{Arc } tg \frac{\sqrt{3}}{3}$$

می‌سازد و ترقی رقوم آن از پائین به بالا است. یك مقیاس‌شیب صفحه را رسم کنید.

۲ـ از نقطهٔ a_4 واقع در صفحهٔ P که به فاصلهٔ ۲ سمت چپ مرکز کاغذ واقع است خطی رسم کنید که تصویرش بااثر افقی صفحه زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و آن را در سمت چپ a قطع کند و نقطهٔ b_4 را روی آن مشخص کنید.

۳ـ اساس وشیب وطول حقیقی قطعه خط a_4b_4 رادقیقاً حساب نمائید.

۴ـ بر روی قطعه‌خط AB در صفحهٔ P مثلث $a_4b_4c_1$ را بقسمی رسم کنید که ارتفاع مثلث نظیر رأس c برابر ۶ بوده و رأس c سمت راست ab قرار گیرد.

۵ـ مثلث فوق قاعدهٔ‌منشوری است‌که یالهای جانبی‌افقی بوده که تصویرشان موازی محور قائم و به طول هشت و قاعدهٔ دیگر در سمت بالای کاغذ قرار دارد. منشور را رسم و مرئی و مخفی نمائید.

۶ـ صفحهٔ Q را عمود بر صفحهٔ P بقسمی رسم کنیدکه در افقیهٔ رقوم ۳ مشترك بوده و یك مقیاس شیب صفحهٔ Q را درسمت راست کاغذ رسم‌کنید.

۷ـ متقاطع صفحهٔ Q را در منشور فوق بدست‌آورده‌مرئی و مخفی نمائید.

۸ـ حجم منشور فوق را دقیقاً محاسبه کنید.

مسئلهٔ ۱ ترسیمی ـ نقطهٔ aa' را بقسمی تعیین کنید که فاصله‌اش از خط‌الارض ۵ بوده و فاصله‌اش از نیمساز اول یك واحد بیش از فاصله‌اش از نیمساز دوم باشد.

مسئلهٔ ۲ـ خطی رسم کنیدکه دو خط منتصب و یك خط غیر مشخص مفروض را قطع‌نموده وبر نیمرخ مفروض $aba'b'$ متکی باشد.

دبیرستان‌همایون شمارهٔ ۲
دبیر : مهندس خوئی

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محل تلاقی در محورافقی و قائم کاغذ را مرکز بنامید .

۱ـ صفحهٔ P که بزرگترین شیب آن موازی محور قائم کاغذ و افقیهٔ رقوم ۲ آن بر مرکز کاغذ می‌گذرد با شیب $p=۱$ در سمت چپ کاغذ رسم کنید بقسمی‌که ترقی رقوم‌آن از بالا به پائین باشد . نقطهٔ $a_۲$ را به فاصلهٔ ۴ سمت چپ‌محور قائم در صفحهٔ P انتخاب نمائید .

۲ـ از نقطهٔ $a_۲$ در صفحهٔ P خط $a_۲b_۵$ را به شیب $p=\frac{۱}{۲}$ رسم کنید بقسمی که b سمت راست a قرار گیرد .

۳ـ از نقطهٔ $a_۷$ خط AE را برصفحهٔ P عمودنموده و $AE=۱۰$ را بقسمی مشخص کنید که رقوم E از A بیشتر باشد .

۴ـ از نقطهٔ $b_۵$ خطی مرور دهید که بر $a_۲b_۵$ عمود بوده و نقطهٔ $c_۱$ آن برروی محور اقصر کاغذ قرار گیرد.

۵ـ تصویر مستطیل ABCD را کامل نموده و وسعت حقیقی‌آن را با تسطیح مستطیل درسمت پائین کاغذ نشان‌دهید.

۶ـ متوازی‌السطوحی‌که قاعده‌اش ABCD وخط‌الرأس جانبی‌آن AE است مشخص نموده و مرئی و مخفی نمائید.

۷ـ مقطع متوازی‌السطوح را با صفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین نموده و آن را مرئی و مخفی نمائید .

۸ـ از نقطهٔ G از خط‌الرأس CG خطی به قاعدهٔ ABCD عمود کرده پای عمود را تعیین کنید .

مسئلهٔ ۱ ترسیمی ـ بر روی خط dd' نقطهٔ aa' را بقسمی تعیین کنید که ارتفاع آن ۲ برابر بعدش باشد.

مسئلهٔ ۲ـ نقطهٔ cc' را روی نیمرخ مفروض aba'b' به نحوی مشخص نمائیدکه نسبت قواصلش از دوائر نیمرخ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد.

مکانیك

دبیرستان شمارهٔ ۳ آذر
دبیر: عظیمی و بروخیم ـ فرستنده، صراف نهار

۱ـ گلولهٔ A به جرم ۴۰ کیلوگرم برروی سطح‌شیب‌داری قرار گرفته است که با افق زاویهٔ ۳۰° تشکیل می‌دهد و به آن نخی متصل است که از روی قرقره‌ها گذشته و به انتهای دیگر نخ گلولهٔ B به جرم ۶۰ کیلوگرم متصل است که برروی سطح شیب داری قرار گرفته که با افق نیز زاویهٔ ۳۰° درجه می‌سازد دستگاه بدون سرعت‌اولیه رها می‌شود معین کنید سرعت دستگاه پس از طی مسافت ۸ متر $g=۱۰m/s^۲$

دبیرستان شمارهٔ ۱ آرش
دبیر : کتیرائی

۱ـ از نقطهٔ A واقع بر بالای سطح شیب داری بزاویهٔ شیب ۳۰ درجه گلوله‌ای بدون سرعت اولیه‌رها می‌شود و پس‌از طی مسافت $AB=۱۰^m$ واردیك سطح افقی می گردد ودرسطح افقی پس از طی مسافت $BC=۸^m$ وارد سطح شیبدار CD به زاویهٔ شیب ۳۰° می‌شود .

الف ـ اگر نیروی اصطکاك صفر باشد تا چه مسافتی از سطح CD بالا خواهد رفت .

ب ـ اگر نیروی اصطکاك معادل ۰/۱ وزن گلوله باشد تا چه مسافتی بالا می‌رود $g=۱۰m/s^۲$

دبیرستان ادیب
دبیر: مهندس کارآموز ـ فرستنده، میرزازاده ـ جعفر صادقی

۱ـ پاندول ساده‌ای که طول آن یك متر است و در طرف راست نخ آن میخی به دیوار کوبیده شده و فاصلهٔ آن میخ از نقطهٔ تعلیق ۰/۵ متر است اگر پاندول را در طرف‌چپ ۴ درجه منحرف کرده رها کنیم تعیین کنید در طرف راست چه اندازه منحرف می‌شود سرعت خطی پاندول را در نقطهٔ A بدست آورید .

دبیرستان دکتر فاطمی (اهواز)
دبیر : توکلیان

۱ـ جسمی بدون سرعت اولیه از ارتفاع H بطور قائم رها می‌شود. در لحظهٔ شروع سقوط جسم آونگی بر روی سطح زمین در همان محل شروع به نوسان می‌کند و در مدت سقوط جسم آونگ۵ نوسان کامل انجام می‌دهد ارتفاع H رامحاسبه نمائید در صورتی‌که طول‌آونگ ۱/۶ متر و عدد $\pi=۳$ باشد $g=۱۰m/sec^۲$

۳ـ جرم هریك از دو وزنهٔ ماشین‌آتودی ۱۰۰ گرم و جرم سرباری که برروی یکی از وزنه‌ها قرار می‌گیرد ۵۰ گرم است .

اولا شتاب دستگاه و نیروی کشش نخ را محاسبه نمائید (از جرم نخ صرف نظر می‌شود)

پس ازدوثانیه از شروع حرکت ماشین وزنه‌ای که‌سرباز

روی آن قرار دارد وارد ظرف مایعی به‌جرم مخصوص ۱۳/۶ می‌گردد حساب کنید درجه ارتفاعی از سطح مایع وزنه‌خواهد ایستاد (جرم مخصوص وزنه‌ها و سرباد ۶/۸ گرم بر سانتیمتر مکعب است .

گروه فرهنگی فرسام
دبیر: عبدالحسن راستی

۱- دو وزنهٔ A و B که جرم هریك ۳۰ کیلوگرم‌است بوسیلهٔ نخی به هم متصل شده‌اند در روی سطح شیب داری به زاویهٔ ۳۰° قرار گرفته‌اند ضریب اصطکاك جسم A مساوی ۰/۱۵ و برای جسم B برابر ۰/۲۵ می‌باشد شتاب حرکت‌و نیروی‌کشش نخ را بدست آورید $g=10m/s^2$

دبیرستان قناد (بابل)
دبیر: جعفرزاده ـ فرستنده : نصرت‌الله حقیقت

۱- گلوله‌ای را روی سطح شیبداری که نیروی‌اصطکاك آن $\frac{1}{5}$ وزن گلوله است با سرعت اولیهٔ ۳ متر در ثانیه به طرف پائین رها می‌کنیم اگر گلوله مسافت ۱۲ متر را با حرکت متشابه‌التغییر تند شونده در مدت ۲ ثانیه طی نماید زاویهٔ شیب سطح را تعیین نمائید ($g=10m/s^2$) در این لحظه گلوله وارد سطح‌افقی شده وتحت تأثیر نیروی اصطکاکی این سطح پس از طی مسافت ۹ متر می‌ایستد مقدار گرمای حاصل رادر اثراصطکاك سطح افقی تعیین‌کنید.

$j=4/2 j/cal$

دبیرستان هدایت سنندج
دبیر: علی‌محمدیان ـ فرستنده : جمشید آرمند

۱- ماشینی به جرم ۲ تن از حال سکون در یك جادهٔ افقی شروع به حرکت می‌کند و پس از یك دقیقه سرعتش به ۷۲ کیلومتر در ساعت می‌رسد در صورتی که ضریب اصطکاك سطح افقی $K=0/01$ فرض شود نیروی موتور اتومبیل را حساب کنید .

اتومبیل با همین سرعت به روی سطح شیب‌داری به‌شیب ۰/۰۵ می‌رسد و بالا می‌رود راننده می‌خواهد بر روی جاده حرکت ماشین تند شونده و شتاب آن ۵۰ سانتیمتر بر ثانیه باشد در صورتی‌که نیروی اصطکاك بر روی جادهٔ شیب‌دار ۲۰ کیلوگرم باشدنیروی موتور در جادهٔ شیب دار را حساب کنید. پس از ۱۰ ثانیه حرکت برروی سطح شیب دار راننده موتوررا خاموش کرده و ترمز می‌نماید اتومبیل پس از طی مسافت ۱۰ متر می‌ایستد چه نیروئی اتومبیل را از حرکت باز داشته و نیروی ترمز چقدر است برای قسمت اخیر حرکت معادلات سرعت و حرکت را بنویسید.

فیزیك

دبیرستان ملی آرش
دبیر حبیب‌الله معلم

۱- در تجربهٔ یانگ فاصلهٔ دوشکاف ۲ میلیمتر و نوار ها روی صفحه‌ای به فاصلهٔ یك متر از دوشکاف تشکیل شده و عرض هرنوار روشن ۰/۳ میلیمتر است.

اولا طول موج نور را حساب کنید.

ثانیاًفرکانس این نور وهمچنین طول موج آن را درشیشه به ضریب شکست ۱/۵ حساب کنید

گروه فرهنگی خوارزمی شمارهٔ ۱
دبیر: راد منش ـ فرستنده : اسماعیل شاهی

۱- لولهٔ کنتی محتوی هوای صفر درجه است و بوسیلهٔ پیستونی هوای داخل آن مرتعش می‌شود پیستون درثانیه۲۵۰ ارتعاش می‌کند فاصلهٔ تودهٔ اول از سومین توده چقدر است سرعت صوت در هوای داخل لوله ۳۳۰m/s است.

ثانیاً اگر لوله را در داخل‌یك گاز سه‌اتمی که چگالی آن نسبت به هوا $\frac{20}{21}$ است پرکنیم فاصلهٔ دو توده گرد متوالی چقدر می‌شود درجهٔ حرارت این گاز ۱۲۰/۱۲°c است :

$\gamma_2=\frac{7}{5}$ و $\gamma_3=\frac{4}{3}$

۲ـ دو نت پیانو ۴ اکتاو باهم فاصله دارند اگر نت‌بمتر را تار مرتعشی به طول ۱۳۵cm و نت زیرتر را تار دیگری‌به طول ۴۰سانتیمتر تولید کند ونیروی‌کشش تارهاباهم مساوی‌باشند نسبت جرم واحدطول دوتاررا پیدا کنید.

دبیرستان دکتر کریم فاطمی
دبیر توکلیان

۱- معادلهٔ حرکت ارتعاشی نقطهٔ A و B به ترتیب عبارتند از:

$x_A=\sqrt{3}\sin 200\pi t$

$x_B=3\sin 200\pi t$

اولا پریود، فرکانس وطول موج‌این‌دو حرکت‌ارتعاشی را تعیین کنید در صورتی که سرعت ارتعاشات این دو منبع‌در محیط قابل ارتعاش ۲۵۰متر در ثانیه باشد.

ثانیاً نقطهٔ M درمحیط قابل ارتعاش وبه فاصلهٔ 50cm

از منبع A و ۱۰۰ سانتیمتر ازمنبع B قرار دارد معادلهٔ حرکت ارتعاشی که از نقطهٔ A و B به نقطهٔ M می‌رسد جداگانه بنویسید .

ثالثاً معادلهٔ حرکت ارتعاشی نقطهٔ M را نوشته دامنه واختلاف فاز آن رابا دو منبع از راه محاسبه و ترسیم بدست آورید .

شیمی

گروه فرهنگی آرش
دبیر: بزرگ‌نیا

۱- 10^{cc} از ئیدروکربور را با 40^{cc} اکسیژن در آبسنجی وارد کرده در آن جرقهٔ الکتریك برقرارمی‌کنیم 25^{cc} گاز باقی می‌ماند که 20^{cc} آن قابل جذب پتاس و بقیه جذب فسفر می‌شود فرمول ئیدروکربور را پیدا کنید .

۲- ترکیبی شامل ۴۹٪ کربن و ۲/۷۲٪ ئیدرژن است. جرم ملکولی آن ۱۴۷ می‌باشد از طرفی ۲/۵۶۱ میلی‌گرم از این ترکیب را هرگاه با سدیم حرارت داده و محصول عمل را با اسید نیتریك و نیترات نقره بیامیزیم ۵ میلی‌گرم کلرور نقره تولید می‌کند . فرمول این جسم را بدست‌آورید.

دبیرستان شمارهٔ ۳ آذر
دبیر: مهین‌بخت - فرستنده: رضا صراق نهار

۱/۸ گرم‌جسم آلی را تجزیه می‌کنیم ۱۳۴۴ سانتی‌متر مکعب کازکربنیك و ۱/۰۸ گرم بخار آب تولیدمی‌شود.

اولا فرمول ساده جسم‌را بیابید

ثانیاً در آزمایش دیگر ۳/۶ گرم از همان جسم را در ۱۰۰ گرم اسید استیك حل می‌کنیم محلول حاصل در۱/۵۶- درجه منجمد می‌شود و اگر ۱/۵ گرم جسم آلی‌را که جرم ملکولی آن ۳۰ می‌باشد در ۱۰۰ گرم اسید استیك حل‌کنیم محلول حاصله در ۱/۹۵- درجه منجمد می‌شود جرم ملکولی و فرمول بستهٔ جسم مورد آزمایش را تعیین کنید .

ثالثاً به فرض اینکه جسم مزبور یك عامل اسیدی و یك عامل الکلی داشته باشد فرمول نیم گستردهٔ آنرا بنویسید و کلیهٔ ایزومرهای آن را بیابید.

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱
دبیر: کمالی - فرستنده: فرخ صادقی

۱- برای تعیین مقدار کلرکه‌یك عامل اسیدی هم دارد ۰/۹۴۵ گرم آن‌را مطابق‌دستور عمل می‌کنیم در نتیجه پس‌از عملیات مربوط ۱/۴۳۵ گرم رسوب سفید کلرور نقره حاصل می‌شود. ۰/۹۴۵ گرم بوسیلهٔ تجزیه ۰/۲۴ گرم‌کربن و ۰/۲۷ گرم آب می‌دهد. ازطرفی ۱/۸۹ گرم از آن جسم با 20^{cc} سود نرمال خنثی می‌شود فرمول جسم را تعیین کرده و تعیین کنید محلول یك‌درصد آن درچه درجه یخ می‌بندد

دبیرستان ۲ بهمن (خوی)
دبیر: مهندس زکریازاده- فرستنده: حبشی‌زاده

برای تهیهٔ الکل اتیلیك از کربنات کلسیم و زغال وآب چه واکنشهایی باید انجام گیرد و اگر کربن ۷۰٪ خالص باشد از ۱۲۰ گرم کربن چقدر الکل بدست می‌آید وچقدر کربنات کلسیم برای این عمل لازم است.

دبیرستان شاهپور (شیراز)
دبیر: کیان - فرستنده: غلامرضا قابل

۰/۲۵ گرم ازیك ئیدروکربورراده۱۰ گرم‌حلالی‌حل می‌کنیم نزول نقطهٔ انجمادهمان‌قدر می‌شود که۰/۱۱۵ گرم‌الکل اتیلیك درهمان مقدار گرم ازهمان‌حلال‌حل می‌کنیم تعیین‌کنید جرم ملکولی ئیدروکربور را.

ثانیاً اگریك گرم ازهمان‌ئیدروکربور که‌کربن‌داردمورد احتراق قرارداد وگازها را پس‌ازعبور ازظرف‌اسید سولفوریك در ۲ لیتر آب‌آهك واردمی‌کنیم تعیین‌کنید کاهش‌فاکتورمحلول آب آهك و فرمول ئیدروکربور را.

دبیرستان صفائی (سمنان)
دبیر: مهدوی - فرستنده: شریف عرب‌اسمعیلی

از سوختن کامل۱/۷۶ گرم ئیدروکربور اشباع شده‌ای ۵/۲۸ گرم CO_2 پدید می‌آید فرمول خام آنرا مشخص‌کنید وگسترده ایزومرهای ممکنه‌را بنویسید وبگوئیداین‌ئیدروکربور ها جزء کدام دسته ازئیدروکربورها می‌باشند (با دلیل)

دبیرستان فرهنگ

۱- از احتراق ۰/۲۴۴ گرم مادهٔ آلی که مرکب از کربن و اکسیژن و ئیدرژن است ۰/۵۸۱ گرم CO_2 و ۰/۲۹۷ گرم آب بدست آمده است از طرف دیگر آزمایش نشان می‌دهد که چگالی به حالت بخار جسم نسبت به هوابین ۲/۱ و ۲/۶ می‌باشد فرمول ملکولی ماده را بنویسید و در صورتی که بدانیم جسم مزبور الکل است ایزومرهای آن را رسم کنید.

دبیرستان گلشنراز (شبستر)
دبیر: اشرفی‌زاده - فرستنده: سعید فرشاد

۱- ۰/۵۴ گرم از یك اسیدمنوبازیك آلی‌را می‌سوزانیم

پائین صفحهٔ بعد

حل مسائل نمونه

مسئلهٔ سه کارخانه

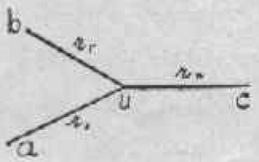
ترجمهٔ: شاهپور کاظمی

سه کارخانهٔ a و b و c مواد خام مورد احتیاج خود k_1 و k_2 و k_3 را از انبار u تهیه می‌کنند. هزینهٔ حمل و نقل متناسب با فاصله و مقدار است. انبار u در چه محلی انتخاب شود تا مجموع هزینه حداقل باشد؟

مسئله‌ای مشابه با آن از این قرار است: از دو محل a و b نفت یا گاز را بوسیلهٔ دولوله تا نقطهٔ u آورده از آنجا دو لوله را یکی کرده محتوی آنها با هم تا نقطهٔ c جریان می‌یابد با فرض اینکه قطرهای لوله‌ها متفاوت باشد نقطهٔ u در چه محلی انتخاب شود تا هزینهٔ رساندن گاز به نقطهٔ c حد اقل باشد؟

از لحاظ هندسی مسئله چنین مطرح می‌شود:

۴۲۳۵ـ سه نقطهٔ a و b و c داده شده اگر u نقطه‌ای باشد که فاصلهٔ آن از سه نقطهٔ مزبور به ترتیب r_1 و r_2 و r_3 باشد و k_1 و k_2 و k_3 سه عدد مثبت معین باشند مطلوبست تعیین موقعیت u برای اینکه:

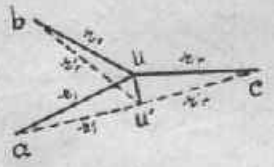


$$C=k_1r_1+k_2r_2+k_3r_3$$

مینیمم باشد.

در حالت خاص که $k_1=k_2=k_3$ باشد مسئله چنین می‌شود: مطلوبست تعیین نقطه‌ای که مجموع فواصل آن از سه رأس مثلث مفروض مینیمم باشد. این مسئله از مسائل مشهور هندسه است و راه حل آن در کتابهای هندسه موجود می‌باشد.

مسئلهٔ سه کارخانه از راههای مختلف حل می‌شود. در این مقاله راه حل هندسی آن ارائه خواهد شد: ابتدا تغییرات C را بر حسب تغییرات u بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم u' وضع جدید u باشد. بردار $\overrightarrow{\Delta}$ تغییر مکان u'u را می‌نامیم. فاصله‌های جدید u' از سه نقطهٔ مفروض یعنی r_i' از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:



$$r_i'=\sqrt{r_i^2+\Delta^2-2r\Delta\cos\varphi_i}\neq r_i-\Delta\cos\varphi_i$$

(برای مقادیر کوچک Δ)

بنابراین مقدار تغییر C (یعنی ΔC) برحسب تغییرات u چنین می‌شود:

$$\Delta C\neq -k_1\Delta\cos\varphi_1-k_2\Delta\cos\varphi_2-k_3\Delta\cos\varphi_3$$

بقیه از صفحهٔ قبل

۰/۷۹۲ گرم انیدرید کربنیک و ۰/۳۲۴ گرم آب تولید می‌شود. در آزمایش دیگر از سوختن ۰/۳۹۴ گرم از ملح نقره همان اسید ۰/۲۱۶ گرم نقره باقی مانده است. مطلوب است تعیین فرمول خام و فرمول گستردهٔ و ایزومرهای اسید مزبور.

دبیرستان مروی

دبیر: ثقة‌الاسلامی ـ ناصر الملك ـ فرستنده: جوادجمشیدی

۱ـ کربور ئیدروژنه اشباع‌شده‌ای داریم که چگالی آن نسبت به هیدرژن مساوی ۲۲ است تعیین کنید:

اولا فرمول کربور مزبور را

ثانیاً ۰/۴۴ گرم ازاین جسم را با کلر در سایه مجاور می‌کنیم جسم کلرداری که وزن آن ۱/۱۳ است بدست می‌آید فرمول آن‌را بنویسید وتمام ایزومرهای آن را رسم ونامگذاری کنید.

دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

فرستنده: شاهرخ ذکاوتی

۱ـ در یك ئیدروکربور گازی شکل تعداد اتمهای ئیدروژن ۲ برابر تعداد اتمهای کربن است و چگالی آن نسبت به هیدرژن ۱۳ می‌باشد فرمول این ئیدروکربور را تعیین کنید.

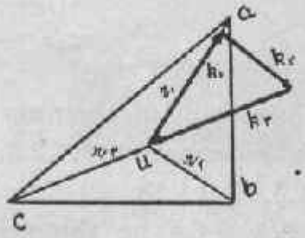
اگر بردارهای $\vec{k_i}$ را طوری تعیین کنیم که با بردارهای $\vec{r_i}$ دارای یك امتداد باشند و طول k_i آنها در رابطه‌های:

$$\vec{k_i} = \frac{k_i \vec{r_i}}{[r_i]'}$$

صدق کند عبارت ΔC به صورت زیر در می‌آید:

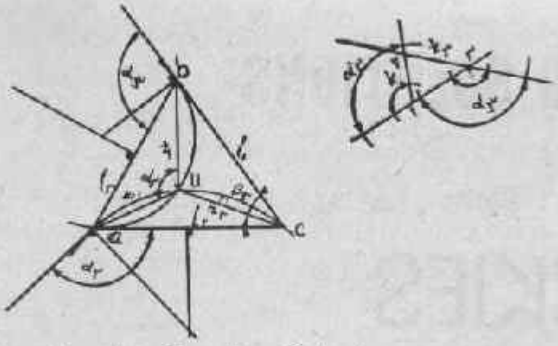
$$\Delta C = -1(\vec{k_1} + \vec{k_2}\vec{k_3}) \cdot \vec{\Delta}$$

در نقطه‌ای که C مینیمم است این تغییر باید برای هر بردار کوچك $\vec{\Delta}$ برابر صفر گردد و نتیجه می‌شود در نقطه‌ای که C مینیمم است باید:



$$\vec{k_1} + \vec{k_2} + \vec{k_3} = 0$$

ترسیم ـ می‌دانیم برای اینکه مجموع هندسی سه بردار صفر گردد باید آنها مثلثی را تشکیل دهند. این شرط امتداد نسبی بردارهای $\vec{k_1}$ و $\vec{k_2}$ و $\vec{k_3}$ و از آنجا امتدادهای r_1 و r_2 و r_3 را بدست می‌دهد. هریك از مثلثهای aub و buc با معلوم بودن قاعده و اندازهٔ زاویهٔ رأس قابل ترسیم است؛ u بر کمان درخور زاویهٔ aub که بر a و b می‌گذرد واقع است و به همین ترتیب کمان درخور مار بر b و c. شکل زیر رسم کامل مسئله را برای یك مقدار k_1 و k_2 و k_3 نشان می‌دهد.



بحث ـ برای اینکه مسئله ممکن باشد لازم است که سه مقدار k_1 و k_2 و k_3 بقسمی باشند که بتوانند مثلثی بسازند. در ضمن وقتی مینیمم وجود دارد u داخل مثلث abc واقع خواهد بود. زیرا اگر نقطه‌ای روی محیط مثلث اختیار کرده و آنرا به سمت خارج مثلث حرکت دهیم هر r_i و در نتیجه مقدار C زیاد می‌شود. این خاصیت ایجاب می‌کند که مثلا $\alpha_3 > \beta_3$ باشد و برای اینکه مینیمم وجود داشته باشد باید:

$$\cos\alpha_3 = \frac{k_3^2 - k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2} < \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1l_2} = -\cos\beta_3$$

و به همین ترتیب برای مقادیر α_1 و α_2. البته ساده‌تر آنست که u را بدست آورده و ثابت کرد که داخل مثلث واقع می‌شود و به کمك نقاط دیگر ثابت کرد که نقطه نمی‌تواند ماکزیمم باشد بلکه مینیمم است.

تبصره ـ در حالت $k_1 = k_2 = k_3$ مثلثی که این سه بردار $\vec{k_1}$ و $\vec{k_2}$ و $\vec{k_3}$ طول می‌سازند متساوی‌الاضلاع بوده و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{k_1}$ و $\vec{k_2}$ برابر 120° می‌باشد و در این حالت u نقطه‌ای است که از آن هر ضلع مثلث abc به زاویهٔ 120° دیده می‌شود.

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

مسئله‌ای از ارشمیدس: گلهٔ گاوی، شامل گاوهای نر و ماده، از چهار دستهٔ: سیاه، سفید، خالخال و قهوه‌ای تشکیل شده است.

بین گاوهای نر: تعداد گاوهای سفید نصف به علاوهٔ ثلث تعداد گاوهای سیاه و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به علاوهٔ خمس تعداد گاوهای خالخال و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای خالخال سدس به علاوهٔ سبع تعداد گاوهای سفید و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است.

بین گاوهای ماده: تعداد گاوهای سفید ثلث به‌علاوهٔ ربع تعداد تمام گاوهای سیاه گله است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوهٔ خمس تعداد گاوهای خالخال تمام گله است؛ تعداد گاوهای خالخال خمس به‌علاوهٔ سدس تعداد تمام گاوهای قهوه‌ای گله است؛ تعداد گاوهای قهوه‌ای سدس به‌علاوهٔ سبع تعداد تمام گاوهای سفید گله است.

تعداد هر دسته از گاوهای سفید، سیاه، قهوه‌ای و خالخال نر و مادهٔ گله را تعیین کنید.

ترجمهٔ: هراچ کاراپتیان

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان ... در صفحهٔ ۱۴۴

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics magazine · Vol.39 , No .3)

QUICKIES

Problem 16. Determine all the numbers which are both Fibonacci (1,1,2,3,5, 8, ...) and Lucas (1,3,4,7,11,18, ...)

Problem 17. Let D,E,F be the midpoints of the arcs BC,CA,AB of the circumcircle of an acute triangle ABC and let L,M,N be the feet of the perpendiculars from D,E,F respectively, upon BC,CA,AB.If r is the inradius of triangle ABC, show that

$$DL+EM+FN+r$$

is equal to the Circumdiameter 2R.

Problem 18. Show that all the points at infinity lie on exactly one straight line.

Problem 19. Show that if p_1 and p_2 are successive odd primes and if $p_1+p_2=2q$ then q is composite

Problem 20. Plant an orchard of 20 trees in 10 rows of 5 trees each

ANSWERS

16- $F_4<L_3<F_5<L_4<F_6$ The Lucas-Fibonacci recursion guarantees that $F_6<L_5<F_7<\cdots$ By induction, the two sequences remain strictly interleaved . Hence, 1 and 3 are the only numbers Common to both sequences

17. Extend DL,EM,FN to meet at the circumceuter O

Since $OL+OM+ON=R+r$,

We have $3R-(DL+EM+FN)=R+r$

Or $2R=DL+EM+FN+r$

18. Let P,Q,R be any three distinct points at infinity . Choose real lines p,q,r to pass through these points, respectively. These lines determine a real triangleABC Now P,Q,R divids the sides of triangle ABC in the ratio-1.(-1) (-1) (-1)=-1. Hence P,Q,R are collinear by the theorem of Menelaus.

19. We have

$$p_1 < \frac{p_1+p_2}{2} < p_2$$

and

$$q=\frac{p_1+p_2}{2}$$

Thus, since p_1 and p_2 are successive primes, q is not a prime

20. Plant five trees forming the pentagon 1 2 3 4 5. Then plant five at these intersections of pairs of opposite sides, as (12)(34),..., (52)(13). Plant five more at the intersections of pairs of diagonals,as (13) (24), ..., (52) (13), and plant the last five at the intersections of side - diagonal pairs, as (12) (35),..., (51) (24). The first of the four pentagons must be such that none of the 15 pairs of lines are parallel, so that it can not, for example, be regular on any finite form

مسائل برای حل

دانش‌آموزان هر کلاس می‌توانند راه‌حل مسائلی مربوط به کلاس خود را که شمارهٔ مسئله با علامت «*» مشخص شده است به ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال حل مسائل فاقد علامت * و همچنین از ارسال حل مسائل مربوط به کلاسهای پائین‌تر خودداری شود. روی ورقهٔ حل مسئله نام و کلاس و دبیرستان مربوط به صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۲۳۱ ـ حاصل ضرب زیر را بدست آورید:

$$S=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[8]{2})\cdots(1+\sqrt[2^n]{2})$$

۴۲۳۲ ـ ترجمه از روسی توسط: **حبیب‌الله گلستان‌زاده**

مثلث متساوی‌الساقین $ABC\ (AB=AC)$ مفروض است. میانهٔ AM آنرا رسم کرده از نقاط B و C به O وسط AM وصل کرده وامتداد می‌دهیم تا AC و AB را در D و E قطع کنند. ثابت کنید که مساحت چهار ضلعی $ADOE$ یک ششم مساحت مثلث ABC است.

کلاس چهارم ریاضی

۴۲۳۳ ـ از: **محمد مهدی عابدی نژاد**. ششم ریاضی دبیرستان سخن

مخرج کسر زیر را گویا کنید

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2}$$

۴۲۳۴ ـ ترجمهٔ: **قوام نحوی**، دبیر دبیرستانهای اصفهان.

اگر $1<k<n$ باشد ثابت نامساوی زیر را محقق کنید.

$$\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k}<\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$$

***۴۲۳۵** ـ فرستنده: **محمد ضمیری**، از مسجد سلیمان.

از رابطهٔ زیر مقدار x را بدست آورید.

$$\log_{\log_b x} a^n = n$$

***۴۲۳۶** ـ ترجمه از روسی توسط: **حبیب‌الله گلستان‌زاده**

در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ از هریك از نقطه‌های M، N، P و Q اوساط ضلعهای AB، BC، CD و DA به دو رأس مقابل وصل می‌کنیم.

اولا ثابت کنید که هر دو خط از خطوط حاصل بایکی از قطرهای AC و BD یا یکی از دو خط MP و NQ در یك نقطه متقارب می‌باشند و به این طریق هشت نقطه بدست می‌آید.

ثانیاً این هشت نقطه را متوالیاً به یکدیگر وصل می کنیم. مساحت هشت ضلعی را برحسب مساحت متوازی‌الاضلاع بدست آورید.

کلاس پنجم طبیعی

۴۲۳۷ ـ خطوط D و D' به معادله‌های $2y-x=2$ و $2y+x=4$ یکدیگر را در یك نقطهٔ P قطع می‌کنند. مختصات P را حساب کنید و معادلهٔ خط Δ را بدست آورید بنا بر آنکه Δ با OP موازی بوده عرض از مبدأ Δ برابر با b باشد. خط Δ دو خط D و D' را در Q و R قطع می‌کند. مقدار b را چنان تعیین کنید که چهار ضلعی $POQR$ متوازی‌الاضلاع باشد.

۴۲۳۸ ـ معادلهٔ $x^2+2ax+b=0$ را در نظر می گیریم. به فرض آنکه جوابهای این معادله عبارت باشند از:

$$x''=tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \text{ و } x'=cotg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

مقدار b را بدست آورید و نیز مقدار $tg\alpha$ را برحسب a حساب کرده و اگر $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد دستور کلی تعیین کمانهای x را بدست آورید.

کلاس پنجم ریاضی

۴۲۳۹ ـ فرستنده : **علی رضا ملکی** دانشجوی هنرسرای عالی .

معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از :

$$AB : 2x-(1-b)y-2a=0$$
$$BC: (b-2)x+y-b=0$$
$$AC : bx+ay-ab=0$$

به فرض اینکه معادلهٔ

$$(\lambda+3)x+(5-\lambda)y-8=0$$

معرف دسته خطوطی باشد که از G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC می‌گذرند مقادیر ضرایب a و b را بدست آورید .

۴۲۴۰ ـ اقتباس و تنظیم از : **مصطفی گودرزی طائمه**

سه‌دایرهٔ C_1, C_2, C_3 به‌مرکزهای $P_1(a_1 \text{ و } b_1)$ و $P_2\ (a_2 \text{ و } b_2)$ و $P_3\ (a_3 \text{ و } b_3)$ و به شعاعهای r_1 و r_2 و r_3 مفروض‌اند . مطلوبست تعیین مختصات مرکز وطول شعاع دایره‌ای که برسه دایرهٔ فوق مماس باشد .

۴۲۴۱ ـ از : **محمدمهدی عابدی‌نژاد**

مقدار x را با استفاده از روابط زیر بدست‌آورید :

$$\begin{cases} x=tg\,a+tg\,b \\ 2x=tg^2a+tg^2b \\ 3x=tg^3a+tg^3b \end{cases}$$

۴۲۴۲ ـ ترجمهٔ **جمشیدعمیقیان** دانشجوی‌دانشکدهٔ علوم اصفهان

درچهار وجهی $ABCD$ داریم :

$$AB=BD=2/5 \text{ و } AD=3$$
$$CA=CB=CD=4$$

مقدار کسینوس‌زاویهٔ میل خط AC را نسبت به صفحهٔ ABD بدست‌آورید .

۴۲۴۳ ـ از : **سید جلال آشفته** دانشجوی دانشگاه آریامهر .

درصفحهٔ P مربع $ABCD$ بطول‌ضلع a مفروض‌است. صفحهٔ Q را بر AB و عمودبر صفحهٔ P می‌گذرانیم . مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحهٔ Q راتعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آنها ازرأسهای مربع برابر مقدار ثابت K^2 باشد. اگر G مرکزثقل مثلث MCD باشد مکان هندسی نقطهٔ G رانیز پیدا کنید .

کلاس ششم طبیعی

۴۲۴۴ ـ از : **کاظم حافظی**

A و B نقاط نظیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=x^3-3x+a$ می باشند . مطلوبست تعیین مقدار a برای آنکه دایرهٔ بقطر AB برخط به‌معادلهٔ $y=x+1$ مماس باشد .

۴۲۴۵ ـ به‌ازاء چه مقادیر ازکمان α خط به معادلهٔ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$ ازمرکزدایرهٔ به معادلهٔ زیرمی گذرد .

$$x^2+y^2+2x-6y=0$$

کلاس ششم ریاضی

۴۲۴۶ ـ از : **عبدالله آویج** دانشجوی‌دانشگاه آریامهر

اگر معادلهٔ محور اصلی دودایرهٔ

$$(C) : (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=4$$
$$(C') : (x-\beta)^2+(y-\gamma)^2=9$$

عبارت باشد از . $x-3y+2=0$ مقادیر α و β و γ را پیدا کنید .

۴۲۴۷* ـ اولا ثابت کنید اگردرتابع $y=f(x)$ یا $f(x\text{ و }y)=0$ تبدیل $x=y-b$ و $y=x+b$ را انجام دهیم و عبارت تابع فرق نکند خط به معادلهٔ $y=x+b$ محورتقارن منحنی نمایش تابع است .

ثانیاً معلوم کنیدبرای‌اینکه‌خط به معادلهٔ $y=-x+b$ محورتقارن یک‌منحنی باشد چه تبدیلاتی از نوع تبدیلات فوق را باید انجام‌دهیم تاعبارت تابع فرق نکند .

ثالثاً با استفاده از آنچه گفته شد چگونه می‌توان معلوم کردیک منحنی دارای محورتقارنی موازی بایکی‌ازنیمسازهای محورها هست یانه ؟

مثال ۱ ـ ثابت کنیدکه خط به‌معادلهٔ $y=x-1$ محور تقارن منحنی‌نمایش‌تابع $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ می‌باشد .

مثال ۲ ـ ثابت کنیدکه منحنی نمایش‌تابع

$$(x+y)^2=2(x+3y-1)$$

دارای‌محورتقارنی به معادلهٔ $y=-x+2$ می‌باشد .

مثال ۳ ـ منحنی‌نمایش تابع:

$$y=5x+2\pm2\sqrt{6x^2+3}$$

دارای دومحورتقارن بموازات نیمسازهای محورها می‌باشد .

معادلات این دومحور تقارن رابدست آورید .

۴۲۴۸ـ از: ابوالفضل فتح‌الله‌زاده

معادلهٔ زیر راحل کنید :

$$(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)(\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x)$$
$$=2\sin^2 3x\cos^2 2x\cos^2 x)$$

۴۲۴۹ ـ ترجمهٔ : قوام نحوی

۱) کوچکترین عددصحیح پیدا کنید بقسمی که نصف آن مربع کامل وثلث آن مکعب کامل باشد .

۲) کوچکترین عددی صحیح پیدا کنید که نصف آن مربع کامل، ثلث آن مکعب کامل وخمس آن توان پنجم کامل باشد .

۴۲۵۰ ـ فرستنده : آلبرت رهبان

دودایرهٔ O و O' درنقطهٔ A مشترك هستند ، وتر AB را دردایرهٔ O ووتر AC را دردایرهٔ O' چنان رسم کنید که AB=AC بوده و زاویهٔ BAC برابر با مقدار معلوم α باشد .

۴۲۵۱ ـ زاویهٔ xOy ونقطهٔ A واقع درداخل آن و یك نقطهٔ دیگر B ، واقع در یك صفحه مفروض‌اند . از B خطی رسم کنید که اگر Ox را در M و Oy را در N قطع کند زاویهٔ MAN برابر بامقدار معلوم α باشد .

مسائل متفرقه

۴۲۵۲ ـ از : محمدمهدی عابدی‌نژاد

دستگاه معادلات زیررا حل کنید .

$$\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2 \\ \log_{y^3} x^2=3-7\log_{y^3} 2 \end{cases}$$

۴۲۵۳ ـ از : بختیار علیمدد سلطانی

اگرعدد $(n+2)$ رقمی A_n به شکل

$$A_n=\overline{1\,(a+1)\,(a+1)\cdots(a+1)a}$$

باشد حاصل جمع زیر را حساب کنید :

$$S=\sum_{n=0}^{n} A_n$$

۴۲۵۴ ـ از : بختیار علیمدد سلطانی

درمثلث ABC نقاط M ،N و P رابه‌ترتیب برضلعهای BC ، CA و AB چنان انتخاب شده‌اند که :

$$\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=\frac{AP}{AB}=K$$

می‌باشد . اگر سه خط AM ، BN و CP در یك نقطهٔ I متقارب باشند ثابت کنید که این خطوط میانه‌های مثلث می‌باشد.

۴۲۵۵ ـ اقتباس از یك مسئلهٔ روسی توسط ـ **حبیب‌الله گلستان‌زاده**

روی ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABC نقطه‌های M ،N و P رابه‌ترتیب‌چنان‌انتخاب می کنیم که‌داشته باشیم :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=K$$

اگرنسبت مساحت‌مثلث MNP بمساحت مثلث ABC را y فرض کنیم حدود تغییرات y را تعیین کنید . در حالت $K=0/28$ مقدار y نظیر آنرا معلوم کنید .

۴۲۵۶ ـ از : علی بیات مختاری دبیرستان خیام نیشابور

تابع y رابه‌صورت چندجمله‌ای صحیح نسبت‌به x چنان تعیین کنید که اگر y' مشتق آن باشد داشته باشیم :

$$y-y'=x^n$$

۴۲۵۷ ـ ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

ثابت کنید درهرمثلث مجموع فواصل‌مرکز دایرهٔ‌محیطی ازسه‌ضلع برابراست بامجموع شعاع دایرهٔ محیطی‌وشعاع‌دایرهٔ محاطی داخلی .

۴۲۵۸ ـ ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای AD ، BE و CF و R شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشدثابت کنید :

$$HD+HE+HF<3r$$

۴۲۵۹ ـ ترجمهٔ : اکبر حسنی از : مجلهٔ ریاضی آمریکا .

اگر a و b و c اندازه های ضلعها ، S مساحت ، R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی‌داخلی‌مثلث ABC باشد صحت نامساویهای زیررا ثابت کنید .

۱) $3\sqrt{3}S<\dfrac{9abc}{a+b+c}$

۲) $2\sqrt{3}S<9rR$

۳) $\cot gA+\cot gB+\cot gC>\dfrac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{9abc}$

۴) $\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}B+\operatorname{cosec}C>2\sqrt{3}$

۴۲۶۰ ـ ترجمه ازفرانسه

تابع زیررا درنظر می گیریم

$$y=E(x)+\sqrt{x-E(x)}\quad ,x\geq 0$$

که درآن‌مقصود از $E(x)$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x می‌باشد ، ثابت کنید که این‌تابع اتصالی‌است ونمایش هندسی

آنرا رسم کنید .

۴۲۶۱ ـ ترجمه از فرانسه

u_0 عددی است مثبت و مخالف با $\sqrt{2}$ ، رشتهٔ اعداد زیررا درنظرمی گیریم

u_0 و u_1 و u_2 ... u_{n-1} و u_n ...

که هر جملهٔ آن‌از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود ،

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{2} = \frac{1}{u_{n-1}} \qquad (1)$$

۱ ـ ثابت کنید که ابتدااز u_1 این‌رشته‌مرتباً نزولی‌است امادائماً هر جملهٔ آن‌بزرگتراز $\sqrt{2}$ باقی‌می‌ماندونتیجه بگیرید که وقتی که $n \to \infty$ جملهٔ u_n دارای حدی است و این حدرا پیداکنید .

۲) اگرزوج (u_n و u_{n-1}) را مختصات نقطه‌ای از منحنی (C) به معادلهٔ

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad , x > 0$$

فرض‌کنیم نتایج قبلی را مجدداً بدست آورید .

۳) ثابت‌کنیدکه رابطهٔ (۱) را می‌توان بـه صورت‌زیر درآورد .

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha} = \left(\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} + \alpha}\right)^2$$

α عدد مثبتی‌است‌که بایدآنرا تعیین کنید . از روی‌آن مقدار u_n را بر حسب n و $a = \left(\frac{u_0 - \alpha}{u_0 + \alpha}\right)^2$ بدست‌آوریدومجدداً حد u_n راوقتی $n \to \infty$ تعیین کنید .

مسائل فیزیك

ترجمه و انتخاب توسط: **هوشنگ شریفزاده**

برای کلاسهای چهارم

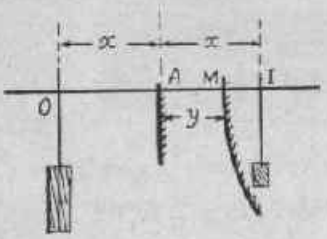
۴۲۶۲ ـ فنری به ازای وزنهٔ ۲۰۰ gf مقدار ۱۳mm برطولش‌اضافه می‌شود . تعیین کنیدکه به‌ازای وزنهٔ ۳۸۰ gf چقدر برطولش افزوده می‌شود .

۴۲۶۳ ـ افزایش طول فنری به‌ازای وزنهٔ ۵۰۰ gf برابر ۲۹mm است . چه وزنه‌ای می‌تواند طول فنر را ۳۸ میلیمتر اضافه کند .

۴۲۶۴ـ دو نیروی‌عمود برهم‌را به‌وسیلهٔ‌دو بردارعمود برهم که‌طول‌آنها به‌ترتیب ۸ cm و ۱٫۸ cm است نمایش‌داده‌ایم درصورتی‌که هرسانتیمترمعرف نیرویی برابر ۲٫۵kgf باشد بزرگی‌نیروی برآیند را تعیین کنید .

برای کلاسهای پنجم

۴۲۶۵ ـ برای تعیین فاصلهٔ‌کانونی یك‌آینهٔ محدب آزمایشی به‌شرح‌زیر ترتیب داده‌ایم :



در مقابل آینهٔ محدب M ، آینهٔ تخت کوچکی را نزدیك آن طوری می گذاریم که‌نصف‌آینهٔ محدب‌را بپوشاند. سنجاق O را به آینه چندان دورونزدیك می کنیم تا تصویر قسمت بالای سنجاق در آینهٔ محدب با تصویرقسمت پائین‌آن در آینهٔ تخت در یك امتداد دیده شوند (طرف صیقلی هردوآینه به طرف سنجاق است). فاصلهٔ آینهٔ تخت را از آینهٔ محدب y و ازسنجاق x فرض می کنیم. سه‌بارآزمایش کردیم. نتایج به‌شرح زیربود :

۱ـ $y_1 = 0/5\text{cm} \quad , \quad x_1 = 4/5\text{cm}$

۲ـ $y_2 = 0/8\text{cm} \quad , \quad x_2 = 5/8\text{cm}$

۳ـ $y_3 = 0/9\text{cm} \quad , \quad x_3 = 5/9\text{cm}$

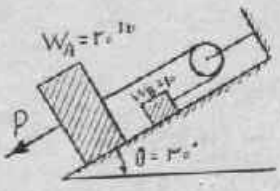
فاصلهٔ‌کانونی آینهٔ محدب راحساب کنید .

برای کلاسهای ششم وفارغ‌التحصیلان دبیرستانها

۴۲۶۶ ـ ترجمهٔ **بهروزقاجار** دانشجوی سال سوم دانشکدهٔ صنعتی .

چهارگوی فلزی تحت تأثیرنیروی‌وزن خوددریك‌لحظه ازنقطهٔ O درامتداد چهارسطح شیب‌دار OA ، OB ، OC و OD که زاویه های آنها باسطح‌افق به‌ترتیب α ، β ، γ و $90°$ است شروع به‌حرکت می کنند . ثابت‌کنید در هرلحظهٔ t این گلوله هایك دایرهٔ ماربر O تشکیل می‌دهند. وزن هر گلوله W و سطح شیب داربدون اصطکاك فرض می‌شود .

۴۲۶۷ ـ ترجمهٔ : **سیدجلال آشفته** دانشجوی دانشگاه‌آریامهر .



پیدا کنید نیروی P (درشکل‌مقابل) برای شروع‌حرکت‌دستگاه . درصورتی که می‌دانیم ضریب‌اصطکاك بین‌سطح و دوجسم برابر $\frac{1}{2}$ وامتداد نیروی P ودوریسمان به موازات سطح شیب‌دار می‌باشد.

۴۲۶۸ـ ترجمهٔ : **سیدجلال آشفته**

یك استوانه به وزن W وبه‌شعاع R روی یك سطح‌افقی قراردارد بقسمی که سطوح دوقاعدهٔ آن برسطح‌افقی عمودمی‌باشند. نیروی افقی P که به فاصلهٔ h از سطح افقی بر استوانه وارد می‌شود آنرا بدون چرخش باشتاب γ به حرکت در می‌آورد. درصورتی که ضریب اصطکاك بین استوانه و سطح افقی μ باشد مطلوبست محاسبهٔ P و h برحسب W و μ و R و γ .

مقادیرعددی :

$$g = 32/2 \frac{ft}{s^2} \quad , \quad \gamma = 8 \frac{ft}{s^2} \quad , \quad R = 2^{ft} \quad , \quad W = 20^{lb}$$

حل مسائل یکان شماره ۳۸

کلاس چهارم طبیعی

۴۱۴۰ ـ اولا برای اینکه عبارت $۸(x+۱)^۳$ را بر حسب $y=۲x-۱$ مرتب کنیم ازرابطهٔ اخیر x رابرحسب y حساب می‌کنیم ودرعبارت مفروض قرارداده آنرا بسط می‌دهیم

$$x=\frac{y+۱}{۲} \quad ; \quad ۸(x+۱)^۳=۸\left(\frac{y+۱}{۲}+۱\right)^۳$$

$$=y^۳+۹y^۲+۲۷y+۲۷$$

$$=(۲x-۱)^۳+۹(۲x-۱)^۲+۲۷(۲x-۱)+۲۷$$

ثانیاً باتوجه به‌بسط اخیرخواهیم داشت :

$$\frac{۸(x+۱)^۳}{(۲x-۱)^۳}=\frac{۱}{۲x-۱}+\frac{۹}{(۲x-۱)^۲}+$$

$$+\frac{۲۷}{(۲x-۱)^۳}+\frac{۲۷}{(۲x-۱)^۴}$$

۴۱۴۱ ـ اگر مرکز یك متوازی‌الاضلاع رابوسیلهٔ یك خط (مستقیم یامنحنی) به نقطهٔ دلخواهی ازمحیط آن وصل کنیم وبعد قرینهٔ این خط رانسبت به مرکزمتوازی الاضلاع بدست آوریم . متوازی‌الاضلاع به دوقسمت متساوی تقسیم خواهدشد . مسئله را برای چند ضلعیهایی که دارای مرکز تقارن باشند می‌توانیم تعمیم دهیم .

کلاس چهارم ریاضی

۴۱۴۲ ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a+b+c}$$

بعدازتحویل به یك مخرج واختصارنتیجه‌خواهدشد که :

$$(a+b)(b+c)(c+a)=۰$$

$$\Rightarrow a=-b \text{ یا } b=-c \text{ یا } c=-a$$

وهریك ازسه تساوی اخیرراکه اختیارکنیم اردوی آن تساویهای زیر(که درآنها k عدد فرداست) محقق خواهدشد:

$$\frac{۱}{a^k}+\frac{۱}{b^k}+\frac{۱}{c^k}=\frac{۱}{a^k+b^k+c^k}$$

$$\frac{۱}{(a+b+c)^k}=\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)^k$$

۴۱۴۳ ـ a و b و c سه عدد نسبی بوده و دوبه دوغیر متساوی می‌باشند .

۱) ثابت کنید که عبارت زیر همواره مخالف با صفر می باشد :

$$\frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{c-a}+\frac{۱}{a-b}$$

۲) هم ارزی زیررا ثابت کنید.

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=۰$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^۲}+\frac{b}{(c-a)^۲}+\frac{c}{(a-b)^۲}=۰$$

حل ـ ۱) خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{c-a}+\frac{۱}{a-b}=$$

$$\frac{(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)+(c-a)(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$=\ldots=-\frac{۱}{۲}\left[\frac{(b-c)^۲+(c-a)^۲+(a-b)^۲}{(b-c)(c-a)(a-b)}\right]$$

باتوجه به شرایط مفروض ، صورت کسراخیر مخالف صفراست بنابراین :

$$[\forall a \cdot \forall b \cdot \forall c \cdot a\neq b\neq c]$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{c-a}+\frac{۱}{a-b}\neq ۰$$

۲) خواهیم داشت

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$
$$=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)-S$$

که S عبارتست از :

$$S=\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)+$$
$$\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)+\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c-a}\right)=-\left[\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b}{(a-b)(b-c)}+\frac{c}{(b-c)(c-a)}\right]=0$$

بنابراین داریم :

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$
$$=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$$

باتوجه به‌اینکه عبارت داخل پرانتزدوم ازطرف‌دوم مخالف‌صفر است (قسمت ۱) بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه یکی ازدوعبارت :

$$A=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$

$$B=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}$$ و

برابر باصفر باشد آنست که دیگری برابر با صفر باشد یعنی :

$$A=0 \iff B=0$$

۴۱۴۴ـ بنابه تعریف داریم:

$$\forall x\,,\ x>0\ ;\ x^a=N \iff a=\log_x N$$

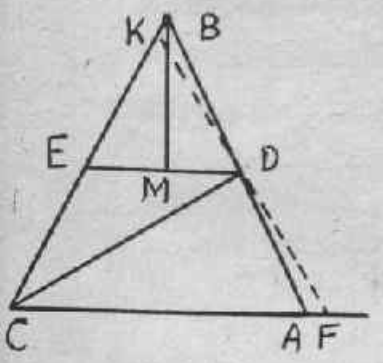
$$N^n=(x^a)^n=(x^n)^a \iff a=\log_{x^n} N^n$$

بنابراین $\log_x N=\log_{x^n} N^n$

باتوجه به‌این رابطه خواهیم داشت :

$$\log_x 5+\log_{x^2} 25+\cdots+\log_{x^n} 5^n=\log_x 5+$$
$$+\log_x 5+\cdots+\log_x 5=n\log_x 5=-2n$$
$$\Rightarrow \log_x 5=-2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۴۱۴۵ـ درمثلث ABC که AB=BC نیمسازداخلی Cضلع AB رادرD قطع می‌کند. خطی‌که از D موازی با اوبهٔ AC رسم شود ضلع BC رادر E وخطی‌که درD عمودبر CD اخراج‌شود امتدادضلع CA رادر F قطع می‌کند . بالاخره عمودی‌که ازB بر DE فرودآید نیز رادرM تلاقی می‌کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که FC=۴DM



حل ـ مثلث CFK متساوی الساقین است در نتیجهٔ DK=DF وخط DE که‌ازD وسط‌ضلع FK موازی‌باضلع CF ازمثلث CFK رسم‌شده‌است بانصف‌این‌ضلع برابراست‌پس

FC=۲DE=۴DM

۴۱۴۶ـ مطلوب رسم خطی موازی بایك ضلع مثلث‌است که محیط ذوزنقهٔ حادث برابرمقدارمعلوم l باشد .

حل ـ اگر DE خط مطلوب باشد چون آنرا امتداد دهیم‌تا Bx و Cy نیمسازهای خارجی زاویه های B و C را درG وF قطع‌کند داریم EF=EC وDG=DB وچون از G موازی با Cy رسم‌کنیم تاامتداد CB رادر L قطع‌کند خواهیم داشت :

$$BC+CE+ED+DB=BC+FG$$
$$=BC+CL=2BC+BL=l$$

طول BL=l−۲BC معلوم خواهد بود . بنابراین برای تعیین خط DE ابتدا نقطهٔ L را تعیین‌کرده از روی آن نقطهٔ G وبالاخره DE رابدست می‌آوریم . شرط امکان مسئله آنست که l>۲BC باشد .

کلاس پنجم طبیعی

۴۱۴۷ـ جواب مسئله خواهدشد:

$$P=4x^2+4y^2-4ax-4ay+4a^2$$

۴۱۴۸ـ طبق رابطهٔ شال داریم :

$$\widehat{A'A} = \widehat{AC} - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AB} = 2k''\pi + \frac{\pi}{3}$$

شش ضلعی $ABC\,A'B'C'$ منتظم بوده و اندازهٔ کلو کمانهایی که مبدأ مشترك آنها A وانتهای هریك بریکی ازرأسهای ضلعی واقع باشد عبارتست از :

$$\widehat{AM} = \frac{2K\pi}{3}$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۱۴۹ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمفروض است :

$$(E)\quad x^2 - 3mx + mp - 1 = 0$$

که درآن x مجهول بوده و m و p دوپارامتر می‌باشند.

۱) اگر α عدد دلخواهی باشد مقادیر m و p را چنان تعیین کنید که ریشه های معادلهٔ (E) عبارت باشند از $\alpha - 1$ و $2\alpha + 1$

۲) مقادیر m و p را چنان تعیین کنید که دو مقدار $\alpha - 1$ و $2\alpha + 1$ در معادلهٔ (E) صدق کنند. توضیح دهید که چرا برای دوحالت (۱) و(۲) حوابهای یکسان بدست نمی‌آید. اگر به جای مقادیر $\alpha - 1$ و $2\alpha + 1$ به ترتیب مقادیر $\alpha^2 - 1$ و $2\alpha^2 + 1$ اختیارشود چه وضعی پیش خواهدآمد؟

حل ـ ۱) معادلهٔ (E') راتشکیل می‌دهیم که ریشه های آن $\alpha - 1$ و $2\alpha + 1$ باشد:

$$(E')\quad x^2 - [(\alpha - 1) + (2\alpha + 1)]x + (\alpha - 1)(2\alpha + 1) = 0$$

$$(E')\quad x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

برای اینکه دو معادلهٔ (E) و (E') دارای ریشه های مشترك باشند لازم وکافی است که :

$$\begin{cases} 3m = 3\alpha \\ mp - 1 = 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m = \alpha \\ mp = \alpha(2\alpha - 1) \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول داریم $m = \alpha$ و دراین صورت معادلهٔ دوم چنین می شود :

$$\alpha p = \alpha(2\alpha - 1)$$

الف ـ اگر $\alpha \neq 0$ باشد خواهیم داشت : $p = 2\alpha - 1$

ب ـ اگر $\alpha = 0$ باشدداریم $m = 0$ ومقدار p نامعین بوده معادلهٔ (E) به صورت

$$(E'')\quad x^2 - 1 = 0$$

درمی‌آیدکه ریشه‌هایش ۱ و ۱ − می‌باشد .

۲) بایدداشته باشیم :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)^2 - 3m(\alpha - 1) + mp - 1 = 0 \\ (2\alpha + 1)^2 - 3m(2\alpha + 1) + mp - 1 = 0 \end{cases}$$

بعدازساده کردن داریم :

$$(1)\quad \alpha^2 - (3m + 2)\alpha + 3m + mp = 0$$

$$(2)\quad 4\alpha^2 - 2(3m - 2)\alpha - 3m + mp = 0$$

از تفریق نظیربه نظیر طرفین این دو معادله وبعد از اختصار خواهیم داشت :

$$(3)\quad \alpha(\alpha + 2) = m(\alpha + 2)$$

الف ـ اگر $\alpha \neq -2$ باشد داریم $m = \alpha$ ودرازاء آن هریك ازمعادلات (۱) و (۲) بصورت

$$(4)\quad \alpha p = \alpha(2\alpha - 1)$$

درآمده که دردوحالت $\alpha = 0$ یا $\alpha \neq 0$ همان نتایج قسمت (۱) بدست می‌آید.

ب ـ اگر $\alpha = -2$ باشد معادلهٔ (۳) نسبت به m مبهم بوده وازمعادلهٔ (۱) نتیجه خواهدشد که

$$mp = -9m - 8$$

ودراین صورت معادلهٔ (E) بصورت زیردرمی‌آید:

$$(E''')\quad x^2 - 3mx - 9(m + 1) = 0$$

دراین معادله اعداد

$$[\alpha - 1]_{\alpha=-2} = -3 \quad \text{و} \quad [2\alpha + 1]_{\alpha=-2} = -3$$

صدق‌می کنند امااین‌دوعدد(متساوی) فقطیکی ازریشه‌های معادلهٔ (E) بود،وریشهٔ‌دیگرآن $3(m + 1)$خواهدبود.اگر $m \neq -2$ باشد این ریشه باریشهٔ دیگر معادله برابرنخواهد بوداما اگر $m = -2$ باشددرآن صورت‌معادلهٔ (E''')همان معادلهٔ (E') است که‌درآن $\alpha = -2$ اختیارشده باشد. بنابراین ازدوقسمت (۱) و (۲) نتایج یکسان بدست نمی‌آید .

توضیح ـ یك معادلهٔ درجهٔ دوم حداکثردارای‌دوریشهٔ (متمایزیا مضاعف) می‌باشد، اگردوعدد **متمایز** u و v دریك معادلهٔ درجهٔ دوم صدق کنند می‌توان حکم کرد که این دوعدد ریشه های‌آن می‌باشند. امااگر $u = v$ باشددراین‌صورت‌اگر معادلهٔ درجهٔ دوم مورد نظر ریشهٔ مضاعف داشته باشد که این ریشهٔ مضاعف همان مقدار $v = u$ خواهد بوددرغیرآن علاوه‌بر $u = v$ مقدار دیگری که یافت می‌شود کـه در معادله صدق خواهد کرد .

در حالتی‌که مقادیر $\alpha^2 - 1$ و $2\alpha^2 + 1$ اختیار شوند چون تساوی

$$\alpha^2 - 1 = 2\alpha^2 + 1 \Rightarrow \alpha^2 = -2$$

غیرممکن است بنابراین ازهردو قسمت(۱) و (۲) نتایج یکسان بدست خواهد آمد .

۴۱۵۰ـ بافرض $x+y=a$ حدود تغییرات عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\frac{x^3+2xy^2+3y^2}{x^2+y^2}$$

حلـ عبارت را برابر m گرفته وچنین عمل می کنیم :

$$m=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)+2y^2(x+y)}{(x+y)^2-2xy}$$

$$m=\frac{a^3-3axy+2ay^2}{a^2-2xy}$$

چون $y=a-x$ قرارداده ساده کنیم می‌شود:

$$m=\frac{5ax^2-7a^2x+3a^3}{2x^2-2ax+a^2}$$

باید معلوم کنیم به ازاء چه مقادیر x برای m مقداری بدست می‌آید برای این کار عبارت بالارانسبت به x مرتب می کنیم ، می‌شود :

$$(5a-2m)x^2+a(2m-7a)x+a^2(3a-m)=0$$

$$\Delta=a^2[-4m^2+16am-11a^2]$$

$$\Delta>0 \longrightarrow \frac{a}{2}(4-\sqrt{5})<m<\frac{a}{2}(4+\sqrt{5})$$

۴۱۵۱ـ ازروابط $p=1+\sin^2\alpha$ و $q=1+\cos^2\alpha$ نتیجه خواهد شد:

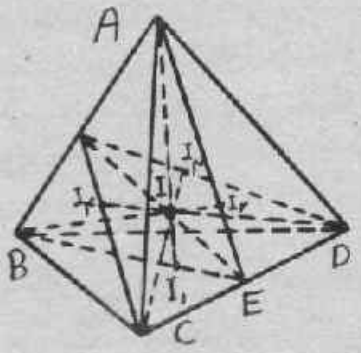
$$p+q=3 \text{ و } p^2+q^2=27-9pq$$

$$pq=(2-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)$$

$$=9-9\cos^2\alpha+9\cos^4\alpha$$

$$2(p^2+q^2)+9q^2=27(1+\cos^4\alpha)$$

۴۱۵۲ـ چهارنقطهٔ A ، B ، C ، و D غیرواقع دریک صفحه رادرنظرمی گیریم . اگر مرکزهای دایره های محاطی مثلثهای BCD ، CDA ، DAB و ABC را به ترتیب I_1 و I_2 و I_3 و I_4 بنامیم وفرض کنیم چهارخط AI_1 ، BI_2 ، CI_3 و DI_4 در یک نقطهٔ I متقارب هستند چون I_1 برنیمساززاویهٔ CBD و I_2 برنیمساز زاویهٔ CAD واقع است وقتی که AI_1 و BI_2 متقاطع باشند در یک‌صفحه واقع بوده‌ودر نتیجه نیمسازهای‌مزبور



نیزدرهمان صفحه واقع بوده وهردودریک‌نقطهٔ E ضلع CD را قطع خواهند کرد وخواهیم داشت :

$$\frac{EC}{ED}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$$

یا

$$(1)\quad AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

وبه همین‌ترتیب خواهیم داشت :

$$(2)\quad AD\cdot BC=AB\cdot CD$$

$$(3)\quad AB\cdot CD=AC\cdot BD$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$AB\cdot CD=AC\cdot BD-AD\cdot BC$$

کلاس ششم طبیعی

۴۱۵۳ـ برای اینکه منحنی نمایش تابع :

$$y=2\cos(ax-\frac{\pi}{3})$$

درنقطهٔ به‌طول $x=\frac{2\pi}{3}$ برخط به‌معادلهٔ $y+ax=1$ مماس شود باید داشته باشیم :

$$[y'=-2a\sin(ax-\frac{\pi}{3})]_{\frac{2\pi}{3}}=-a$$

$$\sin(2a-1)\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow a=3K+\frac{3}{4} \quad \text{یا} \quad a=3K'+\frac{7}{4}$$

اگر a مثبت‌و کوچکتر ازیک‌باشدمقدارآن‌فقط برابر با $\frac{3}{4}$ خواهد بود.

۴۱۵۴ـ حاصل عبارت

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}$$

$$-(\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{\cos 6x}{\cos 2x}+\ldots+\frac{\cos 3nx}{\cos nx})$$

باتوجه به اینکه

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=2$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin 2x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2$$

. . . . . .

$$\frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3nx}{\cos nx} = 2$$

برابر خواهد شد با $2n$.

کلاس ششم ریاضی

۴۱۵۵ـ اگر $\omega(\alpha \text{ و } \beta)$ مرکز تقارن منحنی به معادلهٔ

$$x^2 - \lambda xy + \lambda^2 x + y - 1 = 0$$

فرض شود چون محورهای مختصات را انتقال داده و ω را مبدأ جدید اختیار کنیم معادلهٔ منحنی می‌شود :

$$x^2 - \lambda xy - (2\alpha + \lambda\beta + \lambda^2)x + (\lambda\alpha + 1)y + K = 0$$

و خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \lambda\alpha + 1 = 0 \\ 2\alpha + \lambda\beta + \lambda^2 = 0 \end{cases}$$

از حذف λ بین دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$\beta = \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha} \text{ و } \beta' = \frac{4\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$$

$$\beta' = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ و } \beta = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

۴۱۵۶ـ به‌ازاء چه مقادیر a منحنیهای

$$(C) : 5ax^2 + y^2 = 5a^2 + a$$

$$(C') : 7x^2 - 3y^2 = 4a$$

یکدیگر را به زاویهٔ $45°$ قطع می‌کنند .

حل ـ ابتدا معلوم می‌کنیم به‌ازاء چه مقادیر a دو منحنی متقاطع هستند : از حذف y بین دو معادله خواهیم داشت :

$$(15a + 7)x^2 = a(15a + 7)$$

اگر $a = -\frac{7}{15}$ باشد معادلهٔ اخیر مبهم است اما منحنیهای (C) و (C') دارای معادلات مشابه بوده بر یکدیگر منطبق می‌باشند. چنانچه $a \neq -\frac{7}{15}$ باشد خواهیم داشت $x^2 = a$ که به شرط $a > 0$ جواب خواهد داشت .

نتیجهٔ کلی آنکه وقتی $a > 0$ باشد دو منحنی متقاطع بوده و مختصات نقاط تقاطع آنها عبارت خواهد بود از:

$$A(\sqrt{a} \text{ و } \sqrt{a}) \text{ و } B(-\sqrt{a} \text{ و } -\sqrt{a})$$

ضریب زاویه های مماسهای بر دو منحنی در نقاط تقاطع عبارت خواهد شد از $-5a$ و $\frac{7}{3}$ و با شرط $a > 0$ باید داشته باشیم

$$\frac{-5a - \frac{7}{3}}{1 - 5a \times \frac{7}{3}} = \pm 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

۴۱۵۷ـ تابع : $y^2 - 2xy - 1 = 0$ داده شده است. منحنی نمایش تغییرات این تابع از دو شاخهٔ متمایز (Γ_1) و (Γ_2) تشکیل شده است .

۱ـ معادلات (Γ_1) و (Γ_2) را به صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بدست آورید .

۲ـ اگر α_1 طول نقطهٔ غیرمشخصی از شاخهٔ (Γ_1) باشد ثابت کنید روی شاخهٔ (Γ_2) نقطهٔ به طول α_2 یافت می‌شود بطوری که :

$$f'(\alpha_1) = g'(\alpha_2)$$

۳ـ معادلات قائم بر (Γ_1) و (Γ_2) را در نقاط A_1 و A_2 محل برخورد آنها با محور عرضها می‌نویسیم . ملاحظه می‌شود که این دو قائم با یکدیگر موازیند . تعبیر هندسی این توازی چیست ؟

۴ـ قائم بر (Γ_1) در نقطهٔ A_1 و مماس بر (Γ_2) در نقطهٔ A_2 یکدیگر را در نقطهٔ A_3 قطع می‌کنند مختصات A_3 را بدست آورید و اندازهٔ زاویهٔ $A_2A_1A_3$ را برحسب رادیان حساب کنید .

حل :

۱ـ

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Longrightarrow y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ و } g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

۲ـ

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot$$

$$f'(\alpha_1) = 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot$$

$$g'(\alpha_2) = 1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}} \cdot$$

برای آنکه $f'(\alpha_1) = g'(\alpha_2)$ ، لازم است که :

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

دراین صورت :

$$g'(\alpha_2)=g'(-\alpha_1)=1+\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+1}}=f'(\alpha_1)$$

اماوقتی $\alpha_2=-\alpha_1$ باشد خواهیم داشت :

$$g(\alpha_2)=g(-\alpha_1)=-\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2+1}=-f(\alpha_1)$$

و معلوم می‌شود که نقاط بـه طولهای α_1 و α_2 نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند.

۳ـ داریم :

$$A_2(x=0 \text{ و } y=-1) \quad f'(0)=1 \text{ و } g'(0)=1$$

$$A_1(x=0 \text{ و } y=1)$$

درنتیجه معادلات قائم بر (Γ_1) و (Γ_2) عبارتنداز:

$$y=-x+1 \text{ و } y=-x-1$$

که با یکدیگر موازیند . علت این توازی ، تقارن بین نقاط (Γ_1) و (Γ_2) نسبت به مبدأ می‌باشد . زیراخطوط مماس بر دومنحنی درنقاط متقارن متوازیند .

۴ـ معادلهٔ مماس بر (Γ_2) درنقطهٔ A_2 چنین است :

$$y=x-1$$

و مختصات A_2 ریشه های دستگاه زیراست :

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+1 \end{cases}$$

که عبارتست از: $x=1$ و $y=0$ لذا قائم ومماس مورد نظر یکدیگر راروی محورطولها قطع می‌کنند.

۵ـ ازآنجاکه‌مثلث $A_1A_2A_3$ ، یك مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است لذا $A_2A_1A_3=\frac{\pi}{4}$

۴۱۵۸ـ اثبات هم‌ارزی زیر :

$$\sin 3x+\cos 3x=0 \iff \sin 4x+\cos 2x=0$$

$$\sin 3x+\cos 3x=4(\cos^3 x-\sin^3 x)-3(\cos x-\sin x)=(\cos x-\sin x)(1+4\sin x\cos x)$$

$$=\frac{\cos 2x(1+2\sin 2x)}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin 4x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}$$

۴۱۵۹ـ روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ M را در نظر گرفته اندازهٔ جبری کمان AM (A مبدأ کمانها)را a فرض می‌کنیم. تصاویر قائم M رابـر x'x محور کسینوسها وبر y'y محور سینوسها به ترتیب P و Q می‌نامیم . معاسی برداییـره در M عموماً غیرازحالات خاص دومحورمزبوررا به‌ترتیب در R و S قطع می‌کند .

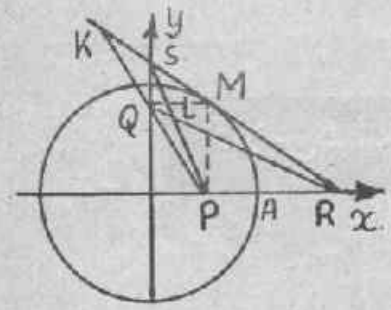
۱) اگر K نقطهٔ تلاقی PQ و RS و L نقطهٔ تلاقی PS و RQ باشدمختصات K و L دابرحسبa بدست‌آورید.

۲) مقادیری از a را تعیین کنیدکه در ازاء آنها :

الف ـ طول نقطهٔ K برابر۱ باشد.

ب ـ عرض نقطهٔ K برابر ۱ باشد .

ج ـ نقطهٔ L به دایرهٔ به معادلهٔ زیرتعلق داشته باشد



$$x^2+y^2=\frac{112}{169}$$

حل ـ فـرض $a\neq\frac{k\pi}{2}$ می‌کنیم :

وخواهیم داشت :

$$P(\cos a \text{ و } 0) \; , \; Q(0 \; , \; \sin a)$$

$$R\left(\frac{1}{\cos a} \text{ و } 0\right) \; , \; S\left(0 \text{ و } \frac{1}{\sin a}\right)$$

معادلات PQ و RS می‌شود :

$$PQ : x\sin a+y\cos a=\sin a\cos a$$

$$RS : x\cos a+y\sin a=1$$

ازحل دستگاه دومعادلهٔ اخیرنتیجه خواهدشد :

$$K\left(x=\frac{\cos^3 a}{\cos 2a} \text{ و } y=\frac{-\sin^3 a}{\cos 2a}\right)$$

اگر $\cos 2a=0$ باشد نقطهٔ K دربینهایت دوریکی از نیمسازهای زاویهٔ دومحورواقع خواهد شد .

$$QR : x\sin a\cos a+y=\sin a$$

$$PS : x+y\sin a\cos a=\cos a$$

$$L\left(x=\frac{\cos^2 a}{1-\sin^2 a\cos^2 a} \text{ و } y=\frac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a\cos^2 a}\right)$$

-(۲

الف) $x_k=1 \Longrightarrow \cos^2 a=2\cos^2 a-1$

$$\cos^2 a(\cos a-1)=\cos^2 a-1=(\cos a+1)(\cos a-1)$$

$$\cos a\neq 1 \Longrightarrow a=2k\pi\pm \text{Arccos}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ب) $y_k=1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm$

$$\text{Arccos}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ج) $$\frac{\cos^6 a+\sin^6 a}{(1-\sin^2 a\cos^2 a)^2}=\frac{112}{169}$$

$$\Longrightarrow 28\sin^4 2a+283\sin^2 2a-228=0$$

$$\Longrightarrow a=k\pi\pm\frac{\pi}{6} \text{ و } a=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۴۱۶۰ـ تعیین عدد شش رقمی زیر

$\overline{abaaba}=۱۰۰۱\overline{aa}^{۲}$

$\Longrightarrow ۱۰۰۱\overline{aba}=۱۰۰۱\overline{aa}^{۲}\Longrightarrow \overline{aba}=\overline{aa}^{۲}$

جواب قابل قبول $a=۱$ و $b=۲$ بدست می‌آید.

۴۱۶۱ ـ در هر دستگاه عدد نویسی به مبنای x حاصل ضربهای عدد $x-۱$ در دو عدد صحیح و مثبتی که مجموع آنها $x+۱$ باشد با ارقام یکسان اما به ترتیب عکس نوشته می‌شوند.

اگر $x>\alpha>۰$ باشد دو عدد $x-\alpha$ و $\alpha+۱$ دارای مجموع $x+۱$ بوده و داریم :

$$(x-۱)(x-\alpha)=(x-۱-\alpha)x+\alpha=$$
$$=\overline{(x-۱-\alpha)\alpha}$$

$$(x-۱)(۱+\alpha)=\alpha x+(x-۱-\alpha)=$$
$$=\overline{\alpha(x-۱-\alpha)}$$

فرع ـ اگر $\alpha=x-۱$ اختیار شود داریم :

$(x-۱)^{۲}=\overline{(x-۲)\alpha}$ و $۲(x-۱)=\overline{\alpha(x-۲)}$

یعنی در هر مبنای عدد نویسی ، مجذور بزرگترین رقم دو برابر این رقم مقلوب یکدیگر می‌باشند .

۴۱۶۲ـ خطهای واحد دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ را به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم (واحد برای هر دو محور یکی است). تصویر قائم نقطهٔ A واقع در صفحه دو محور و متمایز از O را روی محور $x'x$ به P و روی محور $y'y$ به Q نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم :

$\overline{OP}=a$ و $\overline{OQ}=b$

۱) حاصلضربهای $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}$ و $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{j}$ را برحسب a و b بدست آورید .

۲) اگر Q' قرینهٔ Q نسبت به O باشد. دایرهٔ PQO محور $x'x$ را در نقطهٔ دیگر P' قطع می‌کند . رأس چهارم متوازی الاضلاع $P'OQB$ را B می‌نامیم . حاصل $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ را حساب کرده نتیجهٔ حاصل از آن را بیان کنید.

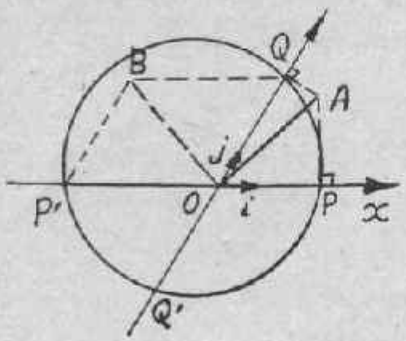
حل ـ ۱) داریم:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA})\vec{i}=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{i}+\overrightarrow{PA}\cdot\vec{i}=a$$
$$(\text{زیرا } \overrightarrow{PA}\cdot\vec{i}=۰)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{j}=(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA})\cdot\vec{j}=\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{j}+$$
$$+\overrightarrow{QA}\cdot\vec{j}=b$$

۲ـ داریم :



$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}$$

$a\cdot\overline{OP'}=-b^{۲}$ و

$$OP'=-\frac{b^{۲}}{a}$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'B}$$
$$=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ}=$$

$$-\frac{b^{۲}}{a}\vec{i}+b\vec{j}\;;\;\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\left(-\frac{b^{۲}}{a}\vec{i}+\right.$$

$$\left.+b\vec{j}\right)=-\frac{b^{۲}}{a}\overrightarrow{OA}\cdot\vec{i}+b\overrightarrow{OA}\cdot\vec{j}=$$

$$-\frac{b^{۲}}{a}\times a+b^{۲}=۰$$

بنابراین دو خط OA و OB بر یکدیگر عمودند .

مسائل متفرقه

۴۱۶۳ـ در رابطهٔ زیر حروف نمایندهٔ ارقام هستند و اعداد در دستگاه به مبنای ۱۰ نوشته‌اند. مطلوبست تعیین این اعداد

$COS^{۲}+SIN^{۲}=UNO^{۲}$

حل ـ اولا باید داشته باشیم:

$S^{۲}+N^{۲}\equiv O^{۲}\pmod{۱۰}$

که در آن $S\neq ۰$ است و می‌توانیم به ازاء مقادیر مختلف N که عبارت باشند از:

$N=۰$ و ۱ و ... و ۹

مقادیر نظیر S و O را تعیین کنیم. مثلا در ازاء $N=۰$ رقمهای S و N چنان باید انتخاب شوند که مجموع آنها ۱۰ باشد .

ثانیاً ـ سه عدد مطلوب سه عدد فیثاغورسی می‌باشند . برای تعیین اعداد فیثاغورسی از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم.

$$(x^{۲}+y^{۲})k^{۲}=(x^{۲}-y^{۲})k^{۲}+(۲xy)^{۲}k^{۲}$$

که x و y مقادیر دلخواه هستند . با تشکیل جدول اعداد فیثاغورسی سه رقمی و با در نظر گرفتن شرایط اولا، خواهیم داشت:

$۳۹۱^{۲}+۱۲۰^{۲}=۴۰۹^{۲}$

۴۱۶۴ـ بزرگترین مقسوم علیه به فرم 2^k هر یك از عددهای رشتهٔ ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ... رشتهٔ $2^2, 2\cdot 2^2, 2^3, 2\cdot 2^3$ و ... را تشکیل می‌دهد. جملهٔ nام این رشته را حساب کنید.

حل ـ اگر a_n جملهٔ nام این رشته باشد بطور کلی خواهیم داشت:

$$a_{2n+1}=2^1$$
$$a_{4n+2}=2^2$$
$$a_{8n+4}=2^3$$
$$\vdots$$
$$a_{2^r n+2^{r-1}}=2^r$$

بنابراین برای هر عدد n باید آنرا به فرم $2^r m+2^{r-1}$ در نظر گرفت و جملهٔ نظیر از رشته را تعیین کرد.

تبصره ـ اگر عدد $2n$ را در دستگاه به مبنای ۲ بنویسیم تعداد صفرهای سمت راست عدد حاصل برابر است با بزرگترین توان عدد ۲ موجود در عدد مفروض.

۴۱۶۵ـ اثبات اینکه:

$$\sin x=n\sin(\alpha-x) \Longrightarrow$$
$$tg\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{n-1}{n+1}tg\frac{\alpha}{2}$$

حل ـ از تساوی اول نتیجه می‌شود.

$$\frac{\sin x-\sin(\alpha-x)}{\sin x+\sin(\alpha-x)}=\frac{n-1}{n+1}$$

از تبدیل عبارتهای صورت و مخرج کسر اول به حاصل ضرب تساوی دوم بدست خواهد آمد. با توجه به آنچه گفته شد خواهیم داشت:

$$\sin x=3\sin(20^\circ-x) \Longrightarrow tg(x-10^\circ)=\frac{1}{2}tg10^\circ$$
$$x=180^\circ k-\mathrm{Arc}\frac{1}{2}tg10^\circ+10^\circ$$

۴۱۶۶ـ حل معادلهٔ مثلثاتی زیر:

$$\sum_{n=0}^{n=3} tg2^n x+cotg2^n x=0$$

حل ـ با توجه به اتحاد:

$$tgx=cotgx-2cotg2x$$

معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(cotgx-2cotg2x)+cotgx+$$
$$+(cotg2x-2cotg4x)+cotg2x+$$
$$+(cotg4x-2cotg8x)+cotg4x+$$
$$+(cotg8x-2cotg16x)+cotg8x=0$$
$$\Longrightarrow cotgx=cotg16x \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{15}$$

۴۱۶۷ـ تعیین مجموع زیر:

$$S=\frac{2x-a}{x^2-ax+a^2}+\frac{4x^2-2a^2x}{x^4-a^2x^2+a^4}+$$
$$+\cdots+\frac{2^n x^{2^n-1}-2^{n-1}x^{(2^{n-1}-1)}a^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}$$

حل ـ اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{2^n x^{2^n-1}-2^{n-1}x^{(2^{n-1}-1)}a^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}=$$
$$=\frac{2^n x^{2^n-1}(2x^{2^n}+a^{2^n})}{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}$$
$$-\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}(2x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}=$$

n را به ترتیب برابر با مقادیر از ۱ تا n قرار داده طرفین تساویهای حاصل را با هم جمع می‌کنیم نتیجه خواهد شد:

$$S=\frac{2^n x^{2^n-1}(2x^{2^n}+a^{2^n})}{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}$$
$$-\frac{2x+a}{x^2+ax+a^2}$$

۴۱۶۸ـ محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S=\sum_{r=1}^{r=n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)$$

حل ـ اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)$$
$$=\frac{r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k+1}$$

r را به ترتیب برابر با مقادیر از ۱ تا n قرار داده طرفین تساویهای حاصل را با هم جمع می‌کنیم می‌شود:

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}$$

۴۱۶۹ـ تعیین حد زیر :

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}$$

$$y=\lim\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(2)}$$

$$=\lim\sqrt[n]{1\times1\times\cdots\times2}=1$$

۴۱۷۰ـ اثبات صحت نامساوی زیر به فرض $x>1$ و اینکه n صحیح و مثبت می‌باشد:

$$x^{n-1}+\frac{n-1}{x}>n$$

حل ـ با توجه به اینکه $x>1$ است داریم:

$$\frac{x^n-1}{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}>n$$

$$\Longrightarrow x^n-1>nx-n \Longrightarrow x^n+n-1>nx$$

از تقسیم طرفین نامساوی اخیر بر x نامساوی موردنظر بدست می‌آید.

۴۱۷۱ـ ثابت کنید که درهرمثلث ABC بین ارتفاعات AD و BE و CF و R و r شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی نامساوی زیر برقرار است:

$$AD+BE+CF<2R+5r$$

حل ـ اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات باشد داریم:

$$(1)\quad HA+HB+HC=2R+2r$$

و

$$(2)\quad HD+HE+HF<3r$$

و در نتیجه نامساوی مطلوب بدست می‌آید. برای اثبات تساوی (۱) و نامساوی (۲) دو مسئلهٔ جداگانه طرح می‌شود که در بخش مسائل برای حل همین شماره مندرج است.

۴۱۷۲ـ اثبات نامساوی زیر:

$$\left(\frac{\alpha+\sin\alpha}{\pi}\right)^2+\cos^2\frac{\alpha}{2}<1\ ,\ (-\pi<\alpha<+\pi)$$

حل ـ فرض می‌کنیم:

$$y=\left(\frac{\alpha+\sin\alpha}{\pi}\right)^2+\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(\frac{\alpha+\sin\alpha}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^2$$

مشتق این تابع را تعیین می‌کنیم بعداز ساده کردن می‌شود:

$$y'=(1+\cos\alpha)\left[\frac{2}{\pi^2}(\alpha+\sin\alpha)-\frac{\sin\alpha}{2}\right]$$

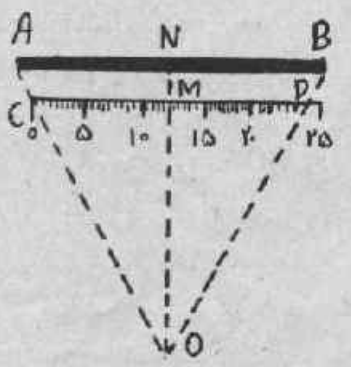
معادلهٔ $y'=0$ یك جواب $\alpha=0$ دارد و جوابهای دیگر آن می‌شود:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{4}{\pi^2-4}\neq0{,}6815 \Longrightarrow \alpha=\pm1{,}46$$

با تعیین مشتق ثانی y'' و تعیین علامت آن در ازاء ریشه‌های مشتق معلوم خواهد شد که تابع y در ازاء $\alpha=0$ دارای ماکزیمم برابر یك و در ازاء $\alpha=\pm1{,}46$ دارای مینیمم برابر $0{,}92$ می‌باشد بنابراین وبا توجه به اینکه تابع اتصالی است خواهیم داشت: $y<1$

مسائل فیزیك

۴۱۷۸ـ خط AB را با خط‌کشی اندازه می‌گیریم که ضخامت آن 8mm است و دو انتهای A و B را فقط با یك چشم که آن هم با فاصلهٔ 30cm از خط AB واقع است با



درجات خط‌کش تطبیق می‌کنیم. طولی که بر خط‌کش می‌خوانیم 23/4cm است. مقدار خطای مشاهده چقدر است؟ طول AB چقدر است؟

حل ـ فرض می‌کنیم که O محل چشم و CD خط‌کش باشد.

برطبق شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{ON}{OM}$$

$$\frac{AB-CD}{CD}=\frac{ON-OM}{OM}$$

$AB-CD$ خطای مشاهده است. آن را به e نمایش می‌دهیم. و OM فاصلهٔ بالای خط‌کش (محلی‌که درجات بر آن حك شده است) تا چشم می‌باشد برابر است با

$(30-0{,}8)\text{cm}$

پس:

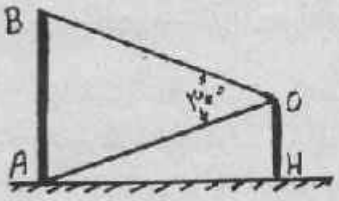
$$\frac{e}{23{,}4}=\frac{0{,}8}{29{,}2} \Longrightarrow e=23{,}4\times\frac{8}{292}$$

$$e=6\text{mm}$$

یعنی خطای مشاهده حداقل برابر 6mm است و

بنابراین طول خط AB برابر ۲۴cm است.

۴۱۷۹ـ O، چشم ناظر OH، در ۱/۵۸ متری ازسطح زمین است و ستون قائمی را که به‌فاصلهٔ AH=۱۰m



از ناظر قرار دارد تحت زاویهٔ ۳۰° می‌بیند. بلندی ستون را تعیین کنید(در صورت لزوم برای حل مسئله از رابطهٔ مثلثاتی:

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$$

استفاده کنید).

حل‌ـ فرض می‌کنیم: $AH=l$ و $OH=h$ و $AB=x$ و $\widehat{BOA}=\alpha$ و $\widehat{OAH}=\alpha_1$

پس:

$$tg\,\alpha_1=\frac{h}{l}$$

و

$$\frac{x-h}{l}=tg\,(\alpha-\alpha_1)=\frac{tg\alpha-tg\alpha_1}{1+tg\alpha\,tg\alpha_1}$$

یا:

$$\frac{x-h}{l}=\frac{tg\alpha-\frac{h}{l}}{1+\frac{h}{l}tg\alpha}$$

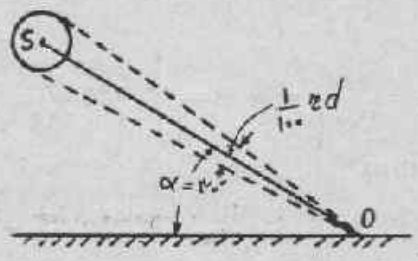
پس از ساده کردن:

$$x=\frac{l^2+h^2}{h+l\,cotg\alpha}$$

با بکاربردن مقادیر عددی:

$$x=\frac{10^2+1/58^2}{1/58+10\times1/732}=5/42m$$

۴۱۸۰ـ قطرظاهری بالونی به‌مرکز S و به قطر ۱۰متر برای ناظر O برابر $\frac{1}{100}$ رادیان است. در صورتی که OS



با امتداد افقی زاویهٔ ۳۰° بسازد. ارتفاع بالون را از سطح‌زمین پیدا کنید.

حل‌ـ اگر h ارتفاع بالون از سطح زمین باشد:

$$h=OS\sin\alpha$$

از طرفی شعاع بالون:

$$OS=200\times5=1000m \quad \text{یا} \quad R=\frac{1}{200}OS$$

پس

$$h=1000\times\frac{1}{2}=500m$$

۴۱۸۱ـ اگر برآیند نیروهای $3P$ و $5P$ مساوی با $7P$ باشد، زاویهٔ بین نیروهارا تعیین کنید.

حل‌ـ اگر θ زاویهٔ بین نیروهای $3P$ و $5P$ و R برآیند این نیروها باشد می‌توان نوشت:

$$R^2=9P^2+25P^2+30P^2\cos\theta$$

و چون $R=7P$ است:

$$49P^2=34P^2+30P^2\cos\theta$$

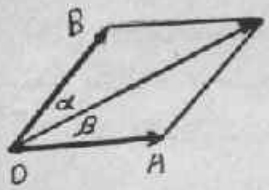
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=60°$$

۶۱۸۲ـ نقطه‌ای دارای دو سرعت متساوی در دوجهت معین است. اگر بزرگی‌یکی از دو سرعت نصف شود، زاویه‌ای که جهت برآیند باجهت سرعت دیگر می‌سازد نیز نصف‌می‌شود. ثابت کنید که زاویهٔ بین دو سرعت ۱۲۰° است.

حل‌ـ در ابتدا که $OA=OB$ است $\alpha=\beta$ است.

وقتی‌که $OB=\frac{1}{2}OA$ می‌شود زاویهٔ α سه برابر زاویهٔ β می‌شود: یعنی داریم:

$$\alpha+\beta=4x \text{ و } \beta=x \text{ و } \alpha=3x$$



می‌توان نوشت:

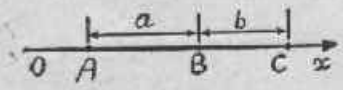
$$\frac{OA}{OB}=\frac{\sin3x}{\sin x}=2$$

اما $\sin3x=3\sin x-4\sin^3x$

پس $3\sin x-4\sin^3x=2\sin x$

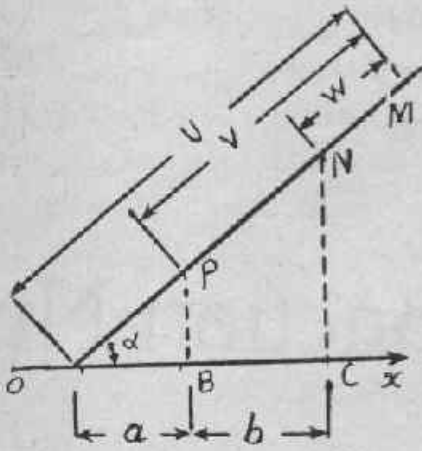
ازحل این معادله جواب قابل قبولی‌که برای x بدست می‌آید ۳۰° است. بنابراین $\alpha+\beta$ یعنی زاویهٔ بین دو سرعت ۱۲۰° است.

۴۱۸۳ـ سه نقطهٔ A و B و C واقع در روی محور Ox مطابق‌شکل مفروضند $AB=a$ و $BC=b$ می‌باشد. سه



متحرك با سرعتهای ثابت U و V و W اولی از A دومی‌از B و سومی از C در یك لحظه درجهت‌مثبت محور Ox شروع

به‌حرکت می‌کنند. برای اینکه این سه متحرک با هم به‌یک‌نقطه برسند چه رابطه‌ای باید بین مقادیرفوق برقرار باشد. بادرنظر گرفتن این‌رابطه بافرض معلوم بودن U و W مقدار V را بطورترسیمی معین کنید.



حل- اگر نقطهٔ A را به‌عنوان مبدأ سنجش‌فاصله‌درنظر بگیریم‌پس از t ثانیه متحرکهای فوق از A به‌فواصل زیرند:

$$x_1 = Ut \quad x_2 = a + Vt \quad x_3 = a + b + Wt$$

پس در لحظه‌ای‌که این سه‌متحرک به‌هم می‌رسند روابط زیر برقرارند:

$$Ut = a + Vt = a + b + Wt$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$t = \frac{a}{U-V} = \frac{b}{V-W}$$

از رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که $U > V > W$ و رابطهٔ مطلوب عبارتست از:

$$\frac{a}{U-V} = \frac{b}{V-W}$$

اگر صورتها را با هم و مخرجهارا با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{U-V} = \frac{a+b}{U-W}$$

از رابطهٔ فوق طریقهٔ ترسیمی زیر نتیجه می‌شود:

از نقطهٔ A خطی به زاویهٔ α رسم کرده روی آن طول $\overline{AM}$ را مساوی U اختیار کرده از انتهای آن $\overline{NM} = W$ را کم می‌کنیم. حال اگر از B خطی موازی CN رسم نمائیم تا $\overline{AM}$ را در P قطع کند داریم: $\overline{PM} = V$.

۴۱۸۴- اتومبیلی که با شتاب ثابت γ بر مسیری‌مستقیم حرکت می‌کند، از مقابل قرارگاه پلیس راه می‌گذرد. پلیس‌به رانندهٔ این اتومبیل مظنون می‌شود و با اتومبیل خود با شتاب ثابت $\frac{4}{3}\gamma$ به تعقیب آن می‌پردازد. سرعت اتومبیل اول‌هنگامی که از یک چهارراه می‌گذرد u می‌باشد وسرعت اتومبیل‌پلیس در این چهارراه که ۳ ثانیه بعد به آن می‌رسد، $\frac{1}{3}u$ است پس از مدتی اتومبیل پلیس به اتومبیل فراری می‌رسد. در این لحظه سرعت اتومبیل فراری ۲۷m/s و سرعت اتومبیل پلیس ۳۱m/s است. γ و u ونیز فاصلهٔ دومتحرک را در این لحظه از چهارراه مذکور پیدا کنید.

حل- اگرفاصلهٔ دو متحرک ازچهارراه مذکور x باشد برای اتومبیل فراری می‌نویسیم:

$$V^2 - u^2 = 2\gamma x$$

و برای اتومبیل پلیس می‌نویسیم:

$$V'^2 - \frac{1}{9}u^2 = 2 \times \frac{4}{3}\gamma x$$

از این دومعادله نتیجه می‌شود:

$$12V^2 - 9V'^2 = 11u^2$$

پس:

$$u^2 = \frac{12 \times 27^2 - 9 \times 31^2}{11} = 9$$

$$\Rightarrow u = 3\text{m/s}$$

و نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V - u = \gamma t \\ V' - \frac{1}{3}u = \frac{4}{3}\gamma(t-3) \end{cases}$$

یا:

$$V' - \frac{1}{3}u = \frac{4}{3}(V-u) - 4\gamma$$

پس

$$\gamma = \frac{V}{3} - \frac{1}{4}(V'+u) = \frac{1}{2}\text{m/s}^2$$

و

$$x = \frac{V^2 - u^2}{2\gamma} = 27^2 - 3^2 = 720\text{m}$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۸

دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۴۱۵۷- حسن چاکری دبیرستان پهلوی (کاشان) ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی دبیرستان بهمن فلهک ـ جلال اشجعی دبیرستان حکمت(قم) ـ ولی‌پور کرامتو دبیرستان ایرانشهر(یزد) ـ محمد مقدسی دبیرستان پهلوی ساری

۴۱۵۹- حسن چاکری

۴۱۶۳- حسین خبازیان دبیرستان نمونهٔ (اصفهان) ـ محمد بلوریان دبیرستان شاهرضا (مشهد) ـ جلال اشجعی

مسائل متفرقه

۴۱۶۶- محمد مقدسی‌ـاصغر بوستانی ـ محسن‌هاشمی‌نژاد ـ هاشم موسوی ـ عبدالحسین کوچکان ـ مسعود حبیب‌الله زاده

۴۱۶۷- عبدالحسین کوچکان ـ محمدمقدسی

۴۱۶۸- محمد مقدسی

۴۱۶۹- محسن هاشمی‌نژاد ـ حسین ادیب ـ امان‌الله امین‌نیا ـ جلال اشجعی ـ محمدعلی موحدیان ـ محمد بلوریان

۴۱۷۰- محمد موحدیان ـ حسین ادیب ـ محمد مقدسی ـ حمید رستگار ـ جلال اشجعی ـ بهمن گیلکی ـ حسن خجسته‌پی ـ علیمراد تقی‌پور ـ حمیدرضا رحیمی

۴۱۷۱- علی‌اصغراسکندر بیاتی ـ حسین خبازیان.

ریاضی جدید

ترجمه و تنظیم از :
عبدالحسین مصحفی

تابع عددی = Fonction Numérique

گسترش که قبلا تعریف شد و خواص آن بیان گردید یك تعریف عـام می‌باشد . درحالت خاص ، گسترش با اصطلاحات دیگری عنوان می‌شود؛ گسترشی که در آن مجموعهٔ مبدأ ومجموعهٔ مقصد مجموعهٔ نقاط صفحه باشد **تبدیل** (۱) نامیده مـی‌شود ؛ گسترش مجموعهٔ اعداد حقیقی در یاروی خودمجموعه، **تابع** (به عبارت دقیقتر، **تابع عددی**) نامیده می‌شود .

قبل ازتعریف تابع ، تعریف فاصله یادآوری می‌شود :

فاصله(۲) ـ فاصله مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که طبق جدول زیرمشخص می‌شود :

فاصلهٔ مربوط	مجموعهٔ اعداد حقیقی	
[a و b]	$a \leq x \leq b$	۱
] a و b [	$a < x < b$	۲
[a و b [	$a \leq x < b$	۳
] a و b]	$a < x \leq b$	۴
[a و $+\infty$ [	$a \leq x$	۵
] a و $+\infty$ [	$a < x$	۶
] $-\infty$ و a]	$x \leq a$	۷
] $-\infty$ و a [	$x < a$	۸

عددهای a و b راکه درسطرهای از یکم تا چهارم بکار رفته است **کناره**(۳) های فاصله‌وتفاضل $b - a$ را **وسعت**(۴) فاصله یا **طول**(۵) فاصله می‌نامند .

مجموعه‌ای که‌درسطر (۱) مشخص‌شده‌شامل a و b است: این‌مجموعه یك کوچکترین‌عنصر دارد که همان a است وهمچنین یك بزرگترین عنصر دارد که همان b می‌باشد . این مجموعه یعنی [a و b] را **فاصلهٔ بسته** (۶) می‌نامند .

مجموعهٔ]a و b[که‌درسطر(۲) مشخص شده است‌شامل a و b نبوده، نه کوچکترین عنصر دارد ونه بزرگترین عنصر و **فاصلهٔ باز**(۷) نامیده می‌شود.

مجموعه های [a و b[و]a و b] **نیمه‌باز**(۸) نامیده می‌شوند: اولی شامل b هست اما شامل a نیست ، بزرگترین عنصری دارد که‌همان b است وکوچکترین عنصر ندارد؛ دومی شامل a بوده وشامل b نمی‌باشد ، کوچکترین عنصری دارد که a است ودارای بزرگترین عنصر نیست .

نشانهٔ «∞» که درسطر های ازپنجم تا هشتم جدول بکار رفته است و «بینهایت» خوانده می‌شود **معرف یك‌عدد نیست**، ازاین جهت بکارمی‌رود که مورداستفاده است وبا استفاده ازآن بسیاری از نظریه هارا به سادگی می‌توان عمومیت داد.

مجموعهٔ اعداد حقیقی عبارتست از فاصلهٔ

$$]-\infty \text{ و } +\infty[$$

وقتی که مقصود تعیین یك فاصله باشد بـدون اینکه بسته بودن یا باز بودن آن مورد نظرباشد معمولا آنرا بایك حرف مثلا I نمایش می‌دهند که کناره ها به صورت اندیس و نمای آن نوشته می‌شوند ویا اینکه‌به صورت (a و b) نشان می‌دهند.

1- Transformation. 2- Intervalle. 3- Borne. 4- Amplitude. 5- Longueur.
6- Intervalle fermé. 7- Intervalle ouvert. 8- Semi-ouvert.

تابع

تعریف ـ اگر R مجموعهٔ اعدادحقیقی و X و Y دو زیرمجموعه ازآن باشندیعنی $X\subseteq R$و $Y\subseteq R$ گسترش به مبدأ X وبمقصد Yراتابع عددی متغیر حقیقی می‌نامند.این گسترش رابا f نشان‌داده وازاین به بعد آنرا فقطتابع می‌نامیم . عدد $x\in X$ را **متغیرمستقل** (۱) (ویا فقط متغیر) و تصویر آن یعنی $y\in Y$ را **متغیرتابع** (۲) (یا فقط **تابع**) ، مجموعهٔ X را **مجموعهٔ تعریف** (۳) و مجموعهٔ Y را **مجموعهٔ مقادیر**(۴) می‌نامند وچنین می‌نویسند :

$$\forall x\in X\ ,\ x\xrightarrow{\ f\ }y\in Y$$

ویابه صورت معمولی‌تر :

$$\forall x\in X\ ,\ y=f(x)$$

وقتی عدد $x\in X$ مشخص باشدآنرا **نقطه**(۵) نامیده یابه یکی ازصورتهای (x_0 ، x_1 و ...) یا با یکی از حروف اول الفباء (a ، b ، h و...) نشان می‌دهند وعدد $f(x_0)$را مقدار تابع درنقطهٔ x_0 (یا به‌ازای x_0) می‌نامند .

وقتی در ازای $x_0\in X\subseteq R$ مقدار $f(x_0)\in Y\subseteq R$ وجودداشته باشدمی‌گویند که تابع f در ازای x_0 **معین** است. وقتی‌که $f(x_0)$ در ازای هر مقدار x_0 متعلق به یك فاصلهٔ I وجود داشته باشد می‌گویند که تابع f درفاصلهٔ I معین‌می‌باشد. البته داریم $I\subseteq X\subseteq R$ وممکن است که یك تابع در ازای همهٔ عدد های حقیقی معین باشد.

تبصره ـ تفاوت بین نشانه های f و $f(x)$ رانباید از نظردورداشت: نشانهٔ f معرف‌یك تابع یعنی یك گسترش می‌باشد در صورتی‌که $f(x)$ معرف یك عدد است که تصویر عدد x در گسترش f می‌باشد . بنابراین نادرست است اگر بگوئیم «تابع $f(x)$» وبهتر آنست که چنین‌بگوئیم : « f تابعی‌است که‌در ازای هرعدد x عدد $f(x)$ را بدست می‌دهد» .

مثال ـ f تابعی است که در ازای هرمقدار x مقدار

$$f(x)=x^2\cos x-2x\sin x$$

رابدست می‌دهد وآنرا می‌توان چنین نوشت :

$$x\xrightarrow{\ f\ }f(x)=x^2\cos x-2x\sin x$$

توابع مساوی ـ دوتابع f و g که مجموعهٔ تعریف برای هر دو یکی است مساوی نامیده می‌شوند هرگاه داشته باشیم :

$$\forall x\in X\ ,\ f(x)=g(x)$$

تساوی دوتابع را **اتحاد**(۶) نیز می‌نامند وبه صورت‌زیر نمایش می‌دهند :

$$f(x)\equiv g(x)$$

تابع ثابت (۷)ـ اگردرتابع f تصویرهر نقطه‌از X یك مقدار ثابت مثلا n از Y باشد تابع f یك تابع ثابت نامیده می‌شود. ممکن است‌وقتی x دریك فاصلهٔ I تغییر کندمقدارتابع ثابت بماند .

مثال ـ اگر x عددحقیقی ومثبت بوده و $E(x)$ معرف جزء صحیح x باشد ، به عبارت دیگر $E(x)$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x باشد دراین صورت وقتی x درفاصلهٔ $[n\ ,\ n+1[$ تغییر کند مقدار $E(x)$ برابر مقدار ثابت n باقی می‌ماند :

$$\forall x\in[n\ ,\ n+1[\ :\ E(x)=n \quad \text{یعنی} \quad n\le x<n+1$$

صفرتابع ـ اگر f تابعی باشد که مجموعهٔ تعریف آن X باشد. چنانچه به‌ازای $x_0\in X$ مقدار $f(x)$ برابر با صفر گرددیعنی $f(x_0)=0$ باشد عدد x_0 راصفرتابع f می‌گویند.

طرق تعیین یك تابع ـ مقصود از تعیین یك تابع f پیداکردن وسیله‌ای است‌که توسط آن بتوان درازای هرمقدار از x مقدارنظیرآن $f(x)$ رابدست آورد .

الف ـ یك تابع ممکن است بایك فرمول جبری معین شود . مثل

$$f(x)=\frac{x-3+\sqrt{25-x^2}}{(x-1)(x-2)}$$

این‌فرمول‌مقدار $f(x)$ را وقتی‌که x متعلق‌به یکی ازفاصله‌های

$$I_1=[-5\ ,\ 1[\ ,\ I_2=]1\ ,\ 2[\ ,\ I_3=]2\ ,\ 5]$$

باشد بدست می‌دهد. دراین تابع مجموعهٔ تعریف عبارتست از:

$$X=I_1\cup I_2\cup I_3$$

ب ـ یك تابع ممکن است ازطریق هندسی معین شود . مثلا اگر x اندازهٔ یك‌کمان باشد در ازای هرعدد x عددی‌به نام $\sin x$ تعریف می‌شودکه مقدار $\sin x$ ازطریق هندسی معین می‌گردد. البته جدولهایی وجوددارد‌که در ازای هرمقدار x مقدار دقیق یا تقریبی $\sin x$ رابدست می‌دهد .

ج ـ یك تابع ممکن است‌نه به وسیلهٔ یك فرمول جبری معین شود ونه ازراه هندسی مشخص گردد. نوعی از این توابع ازراه آزمایشهای تجربی تعریف می‌شوند. مثلا از راه تجربه معلوم می‌کنندکه $v(p)$ حجم یك گازبرحسب p فشار وارد به آن (در شرایط معینی از دما) چه مقدار می‌باشد .

1- Variable indépendante. 2- Variable dépendante. 3-Ensemble de définition. 4- Ensemble des valeurs. 5- Point. 6- Identité 7- Fonction constante.

نمایش هندسی تابع (۱) ـ اگر f تابعی باشد که نظیر هر عدد $x\in X\subseteq R$ یك عدد $f(x)\in R$ را بدست دهد در حقیقت f یك رابطهٔ دوتائی بین x و $y=f(x)$ است .

درصفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ هر زوج عددهای (x و y) یك نقطهٔ M را مشخص می کند (x و y مختصات M نامیده می‌شوند). به این ترتیب هرتابع f مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ محور های مختصات را مشخص می‌کند. این مجموعهٔ نقاط رانمایش هندسی تابع f می‌نامند .

تابع معکوس (۲)ـ اگر تابع f ، که گسترش مجموعهٔ اعداد حقیقی R درخودش می‌باشد، دوسویه باشد دراین‌صورت گسترش معکوس f^{-1} وجود دارد که آنرا تابع معکوس تابع f می‌نامند.

$$x \xrightarrow{\ f\ } y=f(x)$$
$$y \xrightarrow{\ f^{-1}\ } x=f^{-1}(y)$$

راجع به تابع معکوس بعداً به‌تفصیل بیشتر صحبت خواهدشد)

تابع تابع یا تابع مرکب ـ اگر f تابعی باشد که به ازای هر $x\in X\subseteq R$ مقدار $y\in Y\subseteq R$ را بدست دهد و g تابعی باشد که به‌ازای هر y مقدار $z\in Z\subseteq R$ را بدست دهد . دراین صورت تابع مرکب $g\circ f$ وجود دارد که به ازای هر x مقدار z را بدست می‌دهد. تابع مرکب $g\circ f$ را تابع تابع می گویند.

$$x \xrightarrow{\ f\ } y \xrightarrow{\ g\ } z \qquad x \xrightarrow{\ g\circ f\ } z$$

$$y=f(x)\ ,\ z=g(y)\ ;\ z=g(f(x))$$

تبصره ـ باید توجه داشت که معکوس عدد $\frac{1}{f(x)}$ با تابع معکوس f یعنی $f^{-1}(x)$ ازیکدیگرمتمایز می‌باشند. مثلا اگرداشته باشیم $y=f(x)=\sin x$ داریم :

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sin x}$$

و

$$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x=\arcsin x$$

همچنین حاصل ضرب $g(x)\cdot f(x)$ را نباید با تابع مرکب $z=g\circ f$ یعنی $z=g(f(x))$ اشتباه کرد . مثلا اگر داشته باشیم :

$$f(x)=x^2-1 \text{ و } g(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

داریم :

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2-1)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=(x+1)^2$$

$$z=g\circ f=g(f(x))=\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}=\frac{x^2}{x^2-2}$$

تمرینات

۱ـ درهریك ازتابعهای زیر، X مجموعهٔ تعریف و Y مجموعهٔ مقادیررا تعیین کنید :

$$y=5x-3 \text{ و } y=\frac{3x+4}{5x-3} \text{ و } y=\sqrt{5x-3}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5x-3}} \text{ و } y=|x| \text{ و } y=\sin x \text{ و } y=\cos x$$

۲ـ در تابعهای زیر $f(g(x))$ و $g(f(x))$ را بایکدیگر مقایسه کنید .

۱) $f(x)=2x^2-1$ و $g(x)=4x^2-3x$

۲) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ و $g(x)=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-1$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

۳ـ نمایش هندسی هریك ازتابعهای زیررا رسم کنید.

$$y=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$

$$y=|x+2|+|x+1|+|x|+|x-1|+|x-2|$$

$$y=\sqrt{x^2+1+2\sqrt{x^2}}-\sqrt{x^2+1-2\sqrt{x^2}}$$

$$y=(-1)^{E(x)}[x-E(x)]$$

۴ـ فرمول مربوط به تابع معکوس هریك ازتابعهای‌زیر را تعیین کنید .

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \ ,\ y=\sqrt{x^4+1} \text{ و } x\geq 0$$

$$y=\frac{x^2+1}{2x} \ ,\ x>0 \text{ و } y=\frac{x}{\sqrt{x+1}} \ ,\ x>-1$$

۵ـ تابع f معلوم است بقسمی‌که :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$$

آیاتابعی مانند φ وجود داردکه داشته باشیم:

$$\varphi(f(x))=x$$

1- Graphe d' une foncotion. 2- Fonction inverse.

مثلث GHI (یا G'H'I') . اصطلاحاً **مثلث پدال** (Pedal triangle) نقطهٔ P (یا P') ودایرهٔ GHI (یا G'H'I') دایرهٔ پدال نقطهٔ P (یا P') نامیده می‌شود. شش نقطهٔ I' و H' و G' و I و H و G روی دایره‌ای هستندکه مرکز آن وسط PP' استوخواهیم است :

$$\frac{BG}{GC}=\frac{2a^2\left(\frac{AE}{EC}\right)+a^2+c^2-b^2}{2a^2\left(\frac{AF}{FB}\right)+a^2+b^2-c^2}\text{ و }\frac{BG'}{G'C}=\frac{2a^2\left(\frac{AE'}{E'C}\right)+a^2+c^2-b^2}{2a^2\left(\frac{AF'}{F'B}\right)+a^2+b^2-c^2}$$

به همین ترتیب می‌توان مقادیری برای نسبتهای $\frac{CH}{HA}$ و $\frac{CH'}{H'A}$ و $\frac{AI}{IB}$ و $\frac{AI'}{I'B}$ بدست آورد .

در طرف راست کسر $\frac{BG'}{G'C}$ می‌توانیم به‌جای $\frac{AF'}{F'B}$ و $\frac{AF}{E'C}$ به‌ترتیب مقادیر آنها راکه عبارتنداز :

$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{c^2}{a^2}$ و $\frac{BF}{EA}\cdot\frac{b^2}{a^2}$ قراربدهیم. ازآنجائی که روابط :

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{AF'}{F'B}=\frac{b^2}{a^2}\text{ و }\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CE'}{E'A}=\frac{a^2}{c^2}\text{ و }\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{B'C}=\frac{c^2}{b^2}$$

برای دونقطهٔ مزدوج هم‌گوشه همیشه برقرارهستند داریم :

$$\frac{BG'}{G'C}=\frac{2a^2\left(\frac{AE'}{E'C}\right)+a^2+c^2-b^2}{2a^2\left(\frac{AF'}{F'B}\right)+a^2+b^2-c^2}=\frac{2c^2\left(\frac{CE}{EA}\right)+a^2+c^2-b^2}{2b^2\left(\frac{BF}{FA}\right)+a^2+b^2-c^2}$$

قضیهٔ (۱) نشان می‌دهدکه محور اصلی دایرهٔ پدال GHI (یا G'H'I') ودایرهٔ محیطی ABC ضلع BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند . بنابراین داریم :

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{BG}{GC}\cdot\frac{BG'}{G'C}=-\left(\frac{2a^2\left(\frac{AE}{EC}\right)+a^2+c^2-b^2}{2a^2\left(\frac{AF}{FB}\right)+a^2+b^2-c^2}\right)\left(\frac{2c^2\left(\frac{CE}{EA}\right)+a^2+c^2-b^2}{2b^2\left(\frac{BF}{FA}\right)+a^2+b^2-c^2}\right)$$

قضیهٔ ۸ـ نقطهٔ P ومثلث سوائی آن DEF رادرنظرمی گیریم. محور اصلی دایرهٔ پدال نقطهٔ P ودایرهٔ محیطی ABC اضلاع AB و CA و BC رابه ترتیب در O و N و M قطع می کنندوداریم:

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{2a^2\left(\frac{AE}{EC}\right)+a^2+c^2-b^2}{2a^2\left(\frac{AF}{FB}\right)+a^2+b^2-c^2}\right)\left(\frac{2c^2\left(\frac{CE}{EA}\right)+a^2+c^2-b^2}{2b^2\left(\frac{BF}{FA}\right)+a^2+b^2-c^2}\right)$$

$$\frac{CN}{NA}=-\left(\frac{2c^2\left(\frac{CD}{DB}\right)+b^2+c^2-a^2}{2c^2\left(\frac{CE}{EA}\right)+a^2+c^2-b^2}\right)\left(\frac{2a^2\left(\frac{AF}{FB}\right)+a^2+b^2-c^2}{2c^2\left(\frac{CD}{DB}\right)+b^2+c^2-a^2}\right)$$

$$\frac{AO}{OB}=-\left(\frac{2c^2\left(\frac{CD}{DB}\right)+b^2+c^2-a^2}{2c^2\left(\frac{CE}{EA}\right)+a^2+c^2-b^2}\right)\left(\frac{2b^2\left(\frac{BD}{DC}\right)+b^2+c^2-a^2}{2a^2\left(\frac{AE}{EC}\right)+a^2+c^2-b^2}\right)$$

فرض کنیم مقادیر

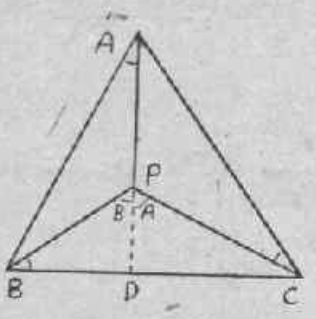
$$\frac{BD}{DC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\text{ و }\frac{CE}{EA}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}\text{ و }\frac{AF}{FB}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$$

مربوط به مثلث سوائی نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث باشد . در روابط قضیهٔ ۸ به آسانی معلوم می‌شود که ضریب $\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$ کسر $\frac{BM}{MC}$ می‌باشد و از این طریق حکم قضیهٔ ۶ A را می‌توان ثابت نمود. باردیگر فرض می‌کنیم P مرکز ثقل مثلث ABC باشد بنابراین $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=1$ و قضیهٔ ۸ چنین می‌شود :

قضیهٔ ۸ Aـ محور اصلی دایرهٔ پدال مرکز ثقل و دایرهٔ محیطی مثلث ABC اضلاع AB و CA و BC را به‌ترتیب در O و N و M قطع می‌کنند و داریم .

$$\frac{BM}{MC}=-\left(\frac{3a^2+c^2-b^2}{3a^2+b^2-c^2}\right)\left(\frac{3c^2+a^2-b^2}{3b^2+a^2-c^2}\right)$$

$$\frac{AO}{OB}=-\left(\frac{3c^2+b^2-a^2}{3c^2+a^2-b^2}\right)\left(\frac{3b^2+c^2-a^2}{3a^2+c^2-b^2}\right) \quad \text{و} \quad \frac{CN}{NA}=-\left(\frac{3b^2+a^2-c^2}{3b^2+c^2-a^2}\right)\left(\frac{3a^2+b^2-c^2}{3c^2+b^2-a^2}\right)$$



فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد بطوری که زاویه‌های PCA و PBC و PAB متساوی باشند . نقطه P را نقطهٔ بروکارد مثبت Brocard و P' نقطهٔ مزدوج هم گوشهٔ نقطهٔ P را نقطهٔ بروکارد منفی مثلث می‌گویند .

امتداد AP ضلع BC را در D قطع می‌کند معلوم است که $BPD=B$ و $DPC=A$ وزاویهٔ APB مکمل زاویهٔ B است . بنابراین طبق قانون سینوسها درمثلث PAB داریم :

$$(1) \quad \sin PAB=\frac{BP\sin B}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{BP}{c}=\frac{\sin PAB}{\sin B}$$

به همین ترتیب در مثلث PBC داریم :

$$(2) \quad \sin PBC=\frac{PC\sin C}{a}$$

از تساوی زوایای PAB و PBC نتیجه می‌شود :

$$\frac{BP}{PC}=\frac{c\sin C}{a\sin B}=\frac{c^2}{ab}$$

قانون سینوسها را برای مثلثهای PBD و PDC و PBC بکار می‌بریم حاصل می‌شود :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{PC}\cdot\frac{\sin BPD}{\sin DPC}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{\sin B}{\sin A} \Longrightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{a^2}$$

به‌همین طریق مقادیر $\frac{CE}{EA}$ و $\frac{AF}{FB}$ معلوم شده برای نقطهٔ بروکارد مثبت خواهیم داشت .

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{a^2}\text{ ، }\frac{CE}{EA}=\frac{a^2}{b^2}\text{ و }\frac{AF}{FB}=\frac{b^2}{c^2}$$

و برای نقطهٔ بروکارد منفی خواهیم داشت :

$$\frac{CE'}{E'A}=\frac{b^2}{c^2}\text{ و }\frac{AF'}{F'B}=\frac{c^2}{a^2}$$

قضیهٔ ۸ Bـ محور اصلی دایرهٔ پدال نقطهٔ بروکارد مثبت (منفی) و دایرهٔ محیطی ABC اضلاع AB و CA و BC را در نقاط O و N و M قطع می‌کند و داریم .

$$\frac{BM}{MC}=-\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{2a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-b^4}{2a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-c^4}\right) \text{ و } \frac{AO}{OB}=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^4}{2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2-a^4}\right)$$

بحث و محاسبه در شیمی

(حل‌المسائل شیمی)

برای استفادهٔ دانش‌آموزان سالهای ششم ریاضی و طبیعی و داوطلبان کنکور

ترجمه و تنظیم :

م. صیانتی　　ن. موسوی　　ر. یکتا گنجه‌ای

با استفاده از آخرین کتابهای فرانسوی و انگلیسی

ناشر : کتابفروشی شازده کوچولو - تهران پارس

پخش از : مؤسسهٔ مطبوعاتی امیرکبیر

بها : ۱۴۰ ریال

مشترکان یکان برای دریافت این کتاب می‌توانند با دفتر مجله تماس بگیرند

زیر چاپ :

جزوه سوم مسائلی از حساب استدلالی

شامل . مسائل مربوط به تقسیم

تألیف : محمود کاشانی

راهنمای حل مسائل شیمی

شامل مقالاتی که زیر این عنوان در یکان چاپ شده

به انضمام یك بخش حل مسائل نمونه

ویك بخش مسائل برای حل

ترجمهٔ . عطاءالله بزرگ‌نیا

چاپ سوم راهنمای ریاضیات متوسطه

چاپ دوم - جزوهٔ اول مسائل حساب استدلالی

کتاب یکان

برای دانش‌آموزان دورهٔ اول دبیرستان

شامل مقالات وسرگرمیهای فکری ومسائل امتحانات داخلی کلاسهای سوم دراسفندماه منتشرمی‌شود .

مسائل امتحانات داخلی‌سال تحصیلی گذشتهٔ کلاسهای‌سوم دبیرستانها برای درج در این مجموعه قبول می‌شود.

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف . استاد دکترمحسن هشترودی

۱۲۵ ریال - ۱۵۰ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ : پرویزشهریاری

۶۰ ریال - ۱۰۰ ریال

در ادارهٔ مجلهٔ یکان موجود است .

گروه فرهنگی خرداد

کلاسهای **جدید** شبانه

برای کلاسهای : ششم ریاضی - ششم طبیعی - کنکور فنی - کنکور پزشکی - کنکور علوم - کنکور حقوق - کنکور ادبیات - دروس تقویتی - تك درسی

مانند کلاسهای سابق

طرح برنامه **۲۵** ساعت تدریس در هفته

از اول آذر ماه دایر است

نشانی : سعدی شمالی - چهار راه سیدعلی - دبیرستان خرداد

تلفن : ۳۰۵۴۵۸ - ۳۱۶۹۸