دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ
۷
شمارهٔ مسلسل
۴۴
فروردین ـ اردیبهشت
۱۳۴۷

تلفن مجله : ۳۳۳۱۸۱

یکان

مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots + x^n$$

دراین شماره :

مزیتهای ریاضی جدید	ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی	۴۲۱
دربارهٔ حل مسائل یکان‌سال ۴۶	ــ	۴۲۴
رادیوآسترونومی	ترجمهٔ : هوشنگ شریفزاده	۴۲۵
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۴۳۰
درسی ازفیزیك ، حرکت‌پرتابی	ترجمهٔ : شریفزاده	۴۳۳
اصطلاحات فیزیکی ومعادل انگلیسی آنها	مهندس ایرج ارشاقی	۴۳۸
حل‌مسائل هندسه به‌کمك اعداد‌مختلط	ترجمهٔ : احمدقاضی‌زاده	۴۳۹
چهارضلعی محیطی محاطی	ترجمهٔ : یعقوب گنجی	۴۴۱
تحویل رادیکال مرکب بافرجهٔ ۳	ترجمهٔ : جعفر آقایانی	۴۴۳
راهنمای حل‌مسائل هندسه	ترجمه	۴۴۵
Problems & Solutions	ــ	۴۴۸
تصاعد حسابی هندسی	ترجمهٔ : قوام نحوی	۴۴۹
کتابخانهٔ یکان	ــ	۴۴۹
راهنمای رسم فنی	مهندس شیرمحمدی	۴۵۰
مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها	ــ	۴۵۳
مسائل برای حل	ــ	۴۷۳
حل‌مسائل یکان شمارهٔ ۴۲	ــ	۴۷۸

بها: بیست و پنج ریال

توضیح

به علت تراکم مطالب چاپ مقالات :
سرگرمیها ، داستانهای تفننی ، پاسخهای رسیده مربوط به حل مسائل شمارهٔ ۴۲ وریاضی جدید
دراین شماره میسر نشد و به شمارهٔ بعد موکول گردید
علاوه بر مطالب فوق چاپ چند مقالهٔ دیگر از جمله «حل مسئلهٔ مسابقه»مندرج درشمارهٔ ۴۱، که آمادهٔ چاپ‌هم شده بود به شمارهٔ بعد موکول شد .

توجه

برای کلیهٔ مشترکانی که قبل ازاسفند ۱۳۴۶ مجلهٔ یکان‌را مشترک‌شده‌بودندیکان سال۴۶ارسال شده‌است. این‌مجله درتاریخ ۱۰ فروردین ۴۷ به نشانی مشترکان تحویل ادارهٔ پست شده است .
ازمشترکانی‌که مجلهٔ مزبور را دریافت نکرده وتاکنون ادارهٔ مجله را مطلع نکرده‌اند تقاضا می‌شود مراتب را اطلاع دهند .

یکان برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم

در اسفند ماه هر سال شمارهٔ مخصوصی به ضمیمهٔ یکان سال برای دانش‌آموزان‌کلاس سوم دبیرستان منتشر می‌شود . اولین شماره از این مجله منتشر شده هم اکنون در دسترس علاقمندان می‌باشد .

همه می‌خواهند بدانند درفضا چه خبر است ؟

مجلهٔ فضا

برای دادن پاسخ به این پرسش منتشر می‌شود

مجلهٔ فضا اول هرماه

مطبوعاتی صابر خوش خلق

نمایندگی فروش مجله و انتشارات یکان

در **سراب**

چاپ دوم

یکان سال ۱۳۴۶

منتشر شد

با وجود کاغذ مرغوبتر بها همان

۵۰ ریال است

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یک‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ هفتم ـ شمارهٔ مسلسل: ۴۴

فروردین ـ اردیبهشت ۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه‌اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV , number 7 , April. 1968

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ریاضی جدید چه مزیتهایی دارد؟

ترجمه توسط ، عبدالحسین مصحفی

ازیکی ازمجلات فرانسه

آیا تاکنون یك کتاب ریاضی جدید را بازکرده‌اید ؟ یك چنین کتابی مخلوطی است از : عبارتهایی تازه ، طرز بیانی جدید ، علامتهایی عجیب و تعدادی نمودار ، و این پرسش برای ما مطرح می‌شود که درآینده زبان فرزندان خود را چگونه باید درك کنیم ؟ یك چنین انقلابی چه ضرورت دارد؟ چرا در دبیرستانها، ریاضی جدید جانشین ریاضیات معمولی می‌شود ؟ مقصود از این آموزش جدید چیست ؟ مادموازل ب . یکی از استادان ممتاز خواسته است که به‌این سؤالات‌جواب دهد. سؤالاتی‌که اولیاء اطفال راآنهمه به‌خود مشغول داشته و برای آنان این نگرانی را بوجود آورده است که مبادا بازیچهٔ دست فرزندان خود شوند .

- امروزه «ریاضیات جدید» و «ریاضیات قدیم» را در مقابل هم قرار می‌دهند . درسابق ریاضیات‌را حقایق همیشگی می‌دانستیم ،آیا دچار اشتباه بوده‌ایم .

- مسلماً چنین نیست . آنچه در سابق حقیقت بوده است بازهم حقیقت می‌باشد، ونسل جدید هم مانند پدران‌خود،جذر، قضیهٔ فیثاغورس و جدول ضرب را یاد خواهد گرفت ، مزیت ریاضیات جدید مخصوصاً ازآن جهت است‌که ایجاد قوهٔ متفکرهٔ نوی را تحقق می‌بخشد .

- مقصود از «قوهٔ متفکرهٔ نو» چیست ؟

- قوهٔ متفکره‌ای‌که قابلیت استدلال و ابداع داشته باشد سابقاً تحصیل ریاضیات عبارت بود از تکرار بیهودهٔ جدولها ، ازحفظ‌کردن خواص اشکال و چگونگی تشکیل یك معادله ، نتیجهٔ‌آن این بودکه درسن شانزده سالگی سه چهارم‌ازجوانان ازهرچه ریاضی است متنفر بودند .

فعلا ، ریاضیات جدید طفل را وا می‌داردکه بیندیشد و «سهیم» باشد ، خلاصه‌آنکه‌کشف‌کند . دیگر مانند سابق برای حل یك مسئله فقط نباید معادله را تشکیل دهد بلکه علاوه بر آن باید قابلیت آن را داشته باشد تا نتایج استدلال خود را برای دومین و سومین مسئله هم تعمیم دهد . تنها نباید جدول جمع را فراگیرد بلکه باید چگونگی تشکیل این جدول را درك کند وآنرا برای اوضاع دیگری نیز بکار برد، مثلا بتواند نسبت به‌عددهای رومی حساب ابجد * ، وحتی عددنویسی در دستگاه به مبنای ۲، جدول جمع مربوط را تشکیل دهد.

- این موضوع چه نفعی می‌تواند داشته باشد ؟

- قبول دارم‌که جدول‌جمع یا حساب ابجد یاارقامهای رومی اهمیت عملی ندارد، اماکارماشینهای محاسبه باعددهایی است‌که درمبنای۲ نوشته شده باشند وازاین‌جهت‌ازلحاظ ریاضی هم ما درعصر الکترونی خواهیم بود.

ریاضیات تمام قلمروها را بتصرف درمی‌آورد

- می‌خواهید بگوئید که این فکر نو به جوان اجازه می‌دهدکه خود را با جهان جدید تطبیق دهد . ولی ریاضیات معمولی بودکه راه ارسال قمرهای مصنوعی وسایر پیشرفتهای فضایی را میسرساخت .

- اگر صحبت ازپیشرفتهای خاص و درشاخه‌هایی بودکه شمااسم بردید دراین صورت ریاضیات متداول کفایت می‌کرد. اما در دورهٔ ما ریاضیات به‌کارهای مهندسی و تکنیکی ختم نمی‌شود، درحقیقت ریاضیات بخشی ازفرهنگ می‌باشد.

در سابق ، کسی که استعداد این نظام را نداشت متوجه رشته های ادبی می‌شد، امروزه، ریاضیات تقریباً تمام رشته ها

* ازطرف مترجم

را در بر گرفته است: روانشناسی، جامعه‌شناسی، زیست‌شناسی و حتی سیاست. هنر هنوز به‌زیر سلطهٔ آن نیامده‌است اما تا چه مدت می‌تواند پایداری کند؟ هر چیز فعلا به زبان آمار بیان می‌شود. برای استفاده از ماشینها باید قبلا بتوان انبوهی از اطلاعات را روی فیشهای مخصوص جا داد و این کار تکنیك ریاضیات جدیداست.

- اینطور گفتید که آموزش جدید به‌این خاطر که پرجنب وجوش و رو حدار است خوشایند محصلین می‌باشد. با اینهمه وقتی یك کتاب ریاضیات جدید را بگشایند بازهم علامتهایی مجرد و عبارتهایی نامأنوس خواهند یافت. چند اصطلاح را اتفاقی نام می‌برم: «مفهوم مجموعه» «رابطهٔ تعلق داشتن» «رابطهٔ شمول»، «رابطهٔ هم ارزی». آیا شما اینهارا غامض و مبهم نمی‌یابید؟

- این موضوع را باید کاملا تشریح کرد. اگر به عمق مطلب توجه‌کنیم این اصطلاحات بسیار ساده هستند. مثالی در نظر بگیریم: محله‌ای که فعلا در آن ساکن هستیم. برای توضیح مفهوم مجموعه چنین می گوییم «همهٔ اشخاصی که در این محله ساکن‌هستند عضوهای یك مجموعه می‌باشند». دربارهٔ رابطهٔ تعلق داشتن اینطور می گوییم «شما به مجموعهٔ ساکنان این محله تعلق ندارید» و برای رابطهٔ شمول می گوییم «من ودوستم، که هر دو در یك کوچه ساکن هستیم مجموعه‌ای تشکیل می‌دهیم که زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام ساکنان محله‌است» و برای رابطهٔ هم‌ارزی چنین می گوییم «همهٔ ساختمانهایی که دونمای شمالی و جنوبی دارند برای همهٔ اشخاصی ازمجموعه که اینچنین وضعی را دارند هم ارز می‌باشند».

ملاحظه می‌فرمائید که هیچیك از عبارتهای مربوط نه مرموز است ونه غامض. وهمهٔ این تعاریف را می‌توان به‌صورت نمودار نمایش داد. با اسباب بازیهای رنگین و با وسائل مخصوصی که بتوان به‌آنها تغییرشکل داد تفهیم این‌اصطلاحات برای اطفال خوشایند خواهد بود.

شروع از دبستانها

- بعضی از والدین مخصوصاً از تشویش‌افکار فرزندان خود صحبت می‌کنند.

- اشکال عمده ناشی از آنست که این دانش‌آموزان ریاضیات جدید را مختلط با ریاضیات متداول‌آموخته یا هنوز می‌آموزند. تئوری مجموعه ها را به تازگی در کلاس اول دبیرستان وارد ساخته‌اند ومتأسفانه بین زبان مجموعه‌ها وزبان قدیمی که باآن مثلثها را آموخته‌اند ناسازگاری وجود دارد. مثلا در تئوری مجموعه ها برای تساوی دو مجموعه یك تعریف انجام می گیرد. اما وقتی درریاضیات قدیم ازتساوی دو مثلث صحبت می‌شود کلمهٔ «تساوی» معنی دیگری را می‌رساند. محصل ناچار است که گاهی این دگاهی آن تعریف را ببازی بگیرد واین امر درآغاز یك تعلیم تأسف‌آور است.

به عقیدهٔ من مطلوبتر آنست که آموزش ریاضیات جدید از دورهٔ ابتدایی آغاز شود. انجمن معلمان این موضوع را به وزارت تذکر داده است وکمیسیون تجدید نظر با فعالیت شدید به‌بررسی موضوع اشتغال دارد. موضوع یك انقلاب مطرح نیست، بلکه کوشش می‌شود تحولی تدریجی درافکارانجام گیرد: هم در افکار محصلین وهم در افکار والدین آنها، والبته قبل از همه درافکارمعلمان.

- ممکن‌است به من بگوئید که چرا همهٔ معلمان باروشهای جدید موافق نیستند؟

- به خاطر عکس‌العمل علیه نهضت **بورباکی** وبه این بهانه که تجدید بنای ریاضیات‌اتفاقی است کلا خارج اززندگی واقعی. معلمانی که هنوزهم با روشهای جدید مخالف هستند ازآن می‌ترسند که درریاضیات جدید بحث‌ازموضوعاتی درمیان باشدکه ازاستدلال روی اشیائی که حتی وجودآنهارانمی‌شناسند منتج شده باشد. اولین کتابهاکه بسیار منتزع تنظیم شده‌اند تأثرآنان را شدیدتر کرده‌است.

درحقیقت اینچنین نیست. برخلاف آنچه ایشان تصور می‌کنند، ریاضیات جدید قوهٔ ابتکاررا در محصلین پرورش می‌دهد **وبه‌جای کله‌های انباشته کله‌هایی فکور بوجود می‌آورد.**

برگشت والدین به کلاس

- اینکه‌آموزش جدید جوانان را باکله‌های ریاضی بار می‌آورد چه بهتر و خیلی خوبست. احتیاج ما به تکنیسین روزافزون است. در مکتب جدید والدین محصلین‌کنارگذاشته شده‌اند وآنان نمی‌توانند در راهنمائی فرزندان خود نقشی داشته باشند. آیاگمان نمی‌کنیدکه به این وسیله حایل موجود بین نسل‌گذشته ونسل‌جدید بیش ازپیش افزون‌گردد؟

- ما والدین‌را کنارنگذاشته‌ایم. برعکس، می‌کوشیم که

آنها بهترین حامیان ما نزد فرزندانشان باشند. سال گذشته، همکاران ما در **لیون** کلوب والدین را تشکیل دادند. حدود ۴۰ پدر ومادر هرپانزده روز یك بار به مدت دوساعت دورهم جمع می‌شدند و دبیران کلاسهای اول، دوم، سوم و چهارم همان تعلیمات محصلین را به‌آنان می‌آموختند. من گمان‌دارم که انجمن مرکزی والدین (همکاری خانه ومدرسه) این ابتکار را در سایر شهرهای فرانسه هم بکاربندد. راجع به تشکیلات معلمان هم پیش بینیهای لازم بعمل‌آمده است. چنانکه درهمین سال گذشته تنها در **پاریس** هفت مرکز کارآموزی برای آنها فراهم‌آمده است.

ارزشیابی صحیح کاردانش‌آموز

ـ آخرین سؤال: آیا ریاضیات جدید به فرزندان ما آن امکان را می‌دهدکه گلیم خودرا ازآب بیرون بکشند؟

ـ مسلماً، فقط کافی است که درنحوهٔ امتحان هم تجدیدنظر انجام گیرد. زیرا درنحوهٔ امتحانی که فعلا معمول است و از دانش‌آموزان می‌خواهند که برای مسئله‌ای معادلهٔ مربوط را تشکیل دهند استعدادها شناخته نمی‌شود.

یك چنین تجدید نظری از طرف والدین محصلین هم استقبال خواهد شد. درست درچنین موقعیتی است که آنان ارزش عملی دیپلم جدید را درمی‌یابند.

دربارهٔ حل مسائل مندرج در یکان سال ۱۳۴۶

بعداز انتشار چاپ اول یکان سال ۱۳۴۶ ملاحظه‌شد که درمحاسبات مربوط به‌حل یعنی‌مسائل اشتباههایی رخ داده‌است. عده‌ای‌از خوانندگان علاقمند مجله‌نیز این اشتباهها‌را یادآوری فرموده‌اند که در زیر منعکس می‌شود واز کسانی‌که یکان‌سال مزبوررا مورد استفاده قرار می‌دهند تقاضا می‌شود به این‌نکات توجه داشته باشند. اصولا توصیه می‌شود با توجه به راه حل‌هر مسئله محاسبات مربوط را شخصاً انجام دهند.

✻ آقایان **ابوتراب فهیمی** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خیام نیشابور و **حسین خبازیان** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان تمونه اصفهان نوشته‌اند که در مسئلهٔ سوم از امتحان گروه دوم دانشگاه تهران بایستی گفته می‌شد که‌عبارت E مضربی از یك مربع کامل است وگرنه ممکن است که رابطهٔ $pq+qr+rp=0$ برقرار باشد اما عبارت E مثلا به صورت K^2- درآید که نمی‌توانیم آن‌را یك مربع کامل بشناسیم. مثال‌سادهٔ عددی وقتی‌که:

$$r=2 \text{ و } q=-3 \text{ و } p=-6$$

باشد.

✻ آقای **حیدر شوکتی** از درگز نوشته‌اند که در حل مسئلهٔ جبر کنکور دی‌ماه دانشکدهٔ پلی‌تکنیك در محاسبهٔ حجم مطلوب اشتباه شده است. مقصود حجمی است که ازدوران سطح محصور بین منحنی و خطوط $x=2$ و $y=3$ (بالای خط $y=3$) حول خط $x=2$ می‌باشد و مقدار این حجم برابراست با:

$$\lim_{k\to\infty}\left[V=\pi\int_{3}^{k}\frac{-16}{y-2}\right]=\lim\pi\left[\frac{16k-48}{k-2}\right]$$

$$=16\pi$$

✻ آقای **مسعود کشمیری** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان محمدرضاشاه کرمانشاه نوشته‌اند که در حل مسئلهٔ حساب کنکور دی‌ماه دانشکدهٔ پلی‌تکنیك باید به‌جای:

$$\frac{1}{24}colog180$$

نوشته شود $-\frac{1}{24}log180$ وجواب‌درست عبارت خواهدشد از:

$$A=0/00894$$

✻ آقای **محمدرضا یزدان** توضیح داده‌اند که:

۱) در شکل مربوط به مسئلهٔ مکانیك مندرج دربالای صفحهٔ ۱۱۷ جرم پائینترین وزنه m_4 است.

۲) درحل مسئلهٔ هندسهٔ رشتهٔ ریاضی دانشسرای عالی فرمولهای مربوط به AM^2 و OM^2 باید به صورت زیر اصلاح شود.

$$\overline{AM}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4} \quad و \quad \overline{OM}^2=\frac{R^2+R^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

و به‌این‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\omega M=\frac{1}{2}\sqrt{R^2+d^2}$$

۳) مقدار صحیح طرف دوم تساوی سطر دوم صفحهٔ ۷۲ برابراست با $\frac{25}{144}$

۴) حل مسئلهٔ دوم رشتهٔ علوم تجربی دانشسرای عالی باید به صورت زیر اصلاح شود:

$$1-(log\alpha)^2<0 \Longrightarrow log\alpha>1 \text{ یا } log\alpha<-1$$
$$\Longrightarrow \alpha>10 \text{ یا } \alpha<0/1$$

۵) در حل مسئلهٔ اول از رشتهٔ ریاضی دانشگاه ملی باید اصلاح زیر انجام گیرد:

$$\Delta'=4(m+2)^2+3m(4m+8)=0$$

و محاسبات بعداز آن‌هم تصحیح شود.

✲ آقای **مصطفی راست‌گردانی** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان صمصامی اراک نیز اشتباه مربوط به حل مسئلهٔ دوم علوم تجربی دانشسرای عالی را (که در بالا درج شد) یادآوری کرده‌اند.

✲ آقای **بهروز یوسفی** نوشته‌اند که به نظر ایشان در حل مسئلهٔ حساب کروه ریاضی کلاسهای شبانهٔ دانشگاه تهران اشکالی وجود دارد: اگر عددی عددهای A و B را عاد کند عدد $5A-2B=51$ را نیز عاد خواهد کرد اما عکس آن صحیح نیست، یعنی اگر عددی ۵۱ را عاد کند لزومی ندارد که A و B را نیز عاد کند. مثلاً اگر فرض کنیم $A=19$ و $B=22$ داریم $5A-2B=51$ اما مقسوم‌علیه‌های ۵۱ یعنی ۳ و ۱۷ هیچیک از عددهای ۱۹ و ۲۲ را عاد نمی‌کند.

✲ آقای **پرویز شکوهی** نوشته‌اند که فکر نمی‌کنند مسئلهٔ دوم کنکور دانشکدهٔ نفت آبادان مندرج در یکسان سال جزو مسائل امتحان ورودی دانشکدهٔ مزبور باشد و ایشان این مسئله را نفرستاده‌اند.

یکان ـ این مسئله ضمن مسائل ارسالی آقای احمد حاجی‌باقر جزء سؤالات کنکور دانشکدهٔ مزبور منظور شده است.

***

✲ آقای **هوشنگ شریفزاده** دربارهٔ حل مسائل فیزیک مندرج در یکان سال اصلاحات زیر را یادآوری کرده‌اند:

صفحه	ستون	سطر	آنچه باید نوشته شود
۸	۱	۷	$x=۲۲۰/۵cm$
۸	۱	۱۲	$E=\frac{۹۵\times۴۹\times۴۹\times۹}{۱۰^۷}J\neq ۰/۲۰۵۳J$
۸	۲	۵	$P=۲۳۱W$
۱۳	۱	آخر	$=\frac{۱۵}{۲}do_۲=\frac{۱۵}{۸}do_۱=si_۱$
۲۶	۱	آخر	$P=\frac{۱۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۵۰W$
۳۷	۲	۶و۱۱و۱۵و۱۶و۱۹	$\sqrt{۳}$ حذف شود
۳۷	۲	۱۶	$-5m$
۳۸	۱	۱۴	$\times ۸۰^۲\times\frac{۴/۹\times۲\text{ نیوتن}}{۱۰۰۰}=۶/۴kgf$
	۲	۲و۸	$sol_۲\neq$

همچنین آقای **شریفزاده** راجع به حل مسائل کنکور دانشگاه صنعتی آریامهر شرح زیر را مرقوم داشته‌اند:

بنظر می‌رسد که صورت و نیز حل قسمت ۳ مسئلهٔ هشتم مسابقهٔ ورودی دانشکدهٔ صنعتی آریامهر (تیرماه ۱۳۴۶) که در صفحات ۴۹ و ۵۱ یکان سال نوشته شده است بر طبق دلایل زیر ناقص باشد:

۱ـ در جملهٔ «ده‌درصد از توان مولد برق شهر به مدت ۸ ساعت در روز **صرف تبخیر آب با درجهٔ حرارت ۲۵ درجهٔ سانتیگراد در یك دیگ بخار می‌گردد.**» قسمتی که در اینجا با حروف سیاه نوشته شده است بیشتر این مفهوم را دارد که آب در درجهٔ حرارت $۲۵^\circ C$ تبخیر می‌شود و چنین استنباطی غلط نیست، زیرا اولا مسئلهٔ جوشیدن آب مطرح نشده است و نقش دیگ بخار نه در صورت و نه در حل مسئله مشخص نشده است، ثانیاً تبخیر آب در هر درجهٔ حرارتی امکان‌پذیر است، ولی بطوری که از حل مسئله (نه از صورت مسئله) استنباط می‌شود، تبخیر آب در صددرجه صورت گرفته است و حال آنکه هیچیك از معلومات صورت مسئله نشان نمی‌دهد که آب درچنین درجه‌ای تبخیر شود. بخصوص که نامی از دیگ بخار برده شده است ومعمولا تبخیر آب در دیگ بخار در دمایی بالاتر از صددرجه صورت می‌گیرد. چه بهتر که اگر بنا باشد آب در صددرجه تبخیر شود بگوییم که درظرف بازی می‌جوشد.

۲ـ عبارت «**گرمای تبخیر آب در فشار مربوطه ۵۳۱ کالری**» مؤید استدلال فوق می‌باشد. زیرا اولا عبارت **فشار مربوطه** نشان می‌دهد که منظور مسئله فشاری بجز فشار جو است. ثانیا اگر آب در فشار جو تبخیر می‌شد، گرمای تبخیر آن در حدود ۵۳۷ کالری می‌بود، و چون ۵۳۱ کمتر از ۵۳۷ است معلوم می‌شود که آب در فشاری بالاتر از فشار جو تبخیر می‌شود. این مفهوم را داوطلبان در کتاب فیزیك چهارم دبیرستان تحت عنوان **فرمول رنیو** دانسته‌اند.

به عقیدهٔ من، پس از اصلاح عبارات صورت مسئله و افزودن این مطلب که **آب در فشار ثابت تبخیر می‌شود.** راه حل این قسمت از مسئله به شرح زیر است:

گرمای تبخیر آب بر طبق فرمول رنیو یافرمول تقریبی رنیو با نقطهٔ جوش آب بستگی دارد (البته بهتر است که در صورت مسئله فرمول رنیو که یك فرمول تجربی است تذکر داده شود):

فرمول رنیو $L=۶۰۶/۵-۰/۶۹۵t$

فرمول تقریبی رنیو $L=۶۰۸-۰/۷t$

که t نقطهٔ جوش آب به مقیاس سانتیگراد و L گرمای تبخیر آب در دمای $t^\circ C$ برحسب کالری است. L در مسئله معلوم است، بنابراین می‌توان t را تعیین کرد:

برطبق فرمول تقریبی رنیو:

$$۵۳۱=۶۰۸-۰/۷t \Rightarrow t=۱۱۰^\circ C$$

یعنی آب در شرایط مذکور در مسئله دردمای $۱۱۰^\circ C$ می‌جوشد

مقدار آبی که دریك روز تبخیر می‌شود:

$$m=\frac{Q}{c(t_۲-t_۱)+L}=\frac{۲/۷۵\times۱۰^۵}{(۱۱۰-۲۵)+۵۳۱}$$

$$m=۴۴۶kg$$



مقدمهٔ کتاب:

رادیو آسترونومی

تألیف: I. CHKLOVSKI

ترجمه: هوشنگ شریفزاده

علم نجوم از کهنسالترین علوم بشری بشمار می‌رود و یکی از امتیازاتش منشعب شدن آن به رشته‌های مختلفهٔ علوم طبیعی است. علم نجوم ، یا دانش ستارگان ، بر خلاف فیزیك که مبتنی بر تجربه است، براساس مشاهده بوجود آمده است. فیزیك، دخالت شدید پژوهندگان را در پدیدهٔ مورد مطالعه ایجاب می‌کند برای روشن نمودن خصوصیات یك پدیده ایجاد شرایطی که معمولا در طبیعت وجود ندارد لازم است.

تا روزی که دست بشر به کرات آسمانی نرسد منجمین نمی‌توانند مستقیماً به مطالعه و تجربه برروی اجسام آسمانی بپردازند مگر دردومورد استثنایی : نخستین مورد استثنا انجام آزمایش است برروی اجسام آسمانی که از فضای بین‌سیارات به زمین افتاده‌اند مثلا تعیین ترکیبات شیمیایی و ایزوتوپی سنگهای فضایی. دومین مورداستثنا مربوط به رادیوآسترونومی است و آن از هنگامی بوجود آمده است که امکان فرستادن امواج هرتز به اجسام آسمانی و دریافت انعکاس آن پیدا شده است .

برای نخستین‌بار در تاریخ بشریت فاصلهٔ زمین تاکرهٔ ماه بطورتجربی محاسبه شد (فاصلهٔ زمانی که از فرستادن‌موج هرتز به کرهٔ ماه تا برگشت آن طول می‌کشد). البته این فاصله را درگذشته به روش مشاهدات نوری بخصوص در موقع خسوف یا کسوف اندازه می‌گرفتند.

واضح است که مشاهده و دقت در مورد سایر علوم از قبیل جانورشناسی یا گیاه‌شناسی و غیره ، رل اساسی را بازی می‌کند ولی‌هرگز نمی‌تواند تنهاوسیله برای شناخت پدیده‌های مورد مطالعه باشد.

روش بررسی و مشاهدات منجمین چگونه است؟ تنهامنبع اطلاع از اجسام آسمانی یا کیهانی امواج الکترومانتیکی است که بوسیلهٔ آنها منتشر یا منعکس می‌شود. ولی‌در این موردنیز استثنایی وجود دارد: اغلب اجسام آسمانی از خود تابشهایی می‌کنند که به تابشهای کیهانی اولیه موسومند: ایـن اشعه که از هستهٔ عناصر مختلف تشکیل شده‌اند با سرعتهای سرسام‌آور و فوق‌العاده زیاد پس ازبرخورد باملکولهای جو زمین ذرات جدیدی که به ثانویه موسومند بوجود می‌آورند. ذرات کیهانی اولیه یا ثانویه به کمك دستگاههای مختلف فیزیکی قابل بررسی می‌باشند . خورشید نیز ذراتی را که سرعت‌بسیار زیاد دارند منتشر می‌سازد. اینها اغلب یونهای ئیدرژن وکلسیم می‌باشد که انرژی آنها معمولا کمتر از انرژی ذرات کیهانی اولیه‌اند. این اشعه‌هنگامی بخصوص قابل بررسی و مشاهده‌اند که لکه‌های زیادی درخورشیدپیدا می‌شود. ذراتی‌راکه‌خورشید منتشر می‌کند در جو زمین نفـوذ می‌کنند و شفـق قطبـی و آشفتگیهای‌مغناطیسی، که به بینظمی‌میدان مغناطیسی زمین‌توسط جریان ذرات باردار موسوم است ، پدید می‌آورند.

ولی استثنای مذکور ، استنتاج کلی مارا تغییر نخواهد داد : کلیهٔ اطلاعات علم جدیداز طبیعت اجسام کیهانی براساس

مطالعه و بررسی امواج الکترومانتیك که بوسیلهٔ ایـن اجسام منتشر یا منعکس شده است بدست آمده‌اند.

مطالعهٔ امواج الکترومانتیك آسمانی، اطلاعات ذیقیمتی در اختیار منجمین می گذارد.

منجمین می‌توانند با دقت زیاد محل و نـوع حـرکت تعداد زیادی از اجسام آسمانی را تعیین نمایند. زیرا جهاتی که به طرف کواکب متوجهند به کمك جهات انتشار امـواج الکترومانتیك نظری این کواکب معین شده‌اند. بدون دیدن و مشاهدهٔ عینی ستارگان تعیین مکان و حرکت آنها در فضا غیر ممکن است. می‌توان اعتراض کرد که اغلب اجسام آسمانی که مکان و نوع حرکت آنها شناخته شده غیر قابل مشاهده‌اند : این ایراد بجاست ولی باید گفت که بعضی از این کرات غیر قابل مشاهده بر کرات مجاور خود که قابل مشاهده‌اند تأثیر می‌نمایند مثلا مشاهدهٔ مستقیم بعضی از اجسام آسمانی نسبتـاً کوچك که جرم آنها در حدود جرم مشتری بوده و اطراف چند ستارهٔ نزدیك، می‌چرخند، غیر ممکن است ولی به کمك قوانین مکانیك آسمانی خصوصیات حرکت این ستارگان مشخص شده است .

منجمین به روش زیر موفق به تعیین ترکیبات شیمیائی لایه‌های فوقانی خورشید، سیارات ، و ستارگان شده‌اند. بدین منظور طیف اشعهٔ الکترومانتیکی را که از این اجسام به ما می‌رسد مورد مطالعه قرار می‌دهند . درحقیقت هر خط طیف «ورقهٔ هویت» یك عنصر شیمیایی معین است.

تجزیهٔ طیف نه‌تنها وجود عنصر غیر مشخص را در جـو یك ستاره بلکه خواص آنرا نیز مشخص می‌سازد دما، فشار گاز وجود میدان مغناطیسی و سرعت حرکت وضعی ستاره را به کمك طیف می‌توان تعیین کرد .

یکی از مشخصات مهم یك ستاره ، جریان کلی تابشهایی است که از آن به زمین می‌رسد، شناسایی این جریان دراغلب حالات محاسبهٔ فاصلهٔ آن ستاره را اززمین آسان می‌کند کلیهٔ روشهای مذکور منتهی به تجزیهٔ امواج الکترومانتیکی می‌شود که بوسیلهٔ این ستارگان منتشر می‌شود.

ما دربکاربردن جملهٔ «امواج الکترومانتیك» تعمددارید و نمی‌توانیم در اغلب حالات جای آن را بـا جملـهٔ «امـواج نورانی مرئی» عوض کنیم. زیرا امواج مرئی جزئی از طیف امواج الکترومانتیك را تشکیل داده‌اند.

مشخصهٔ اصلی یك اشعه ، یعنی طول موج ، برای امواج مرئی بین ۰٫۴ میکرون (اشعهٔ بنفش) تا ۰٫۷۵ میکـرون (اشعهٔ قرمز) قراردارد. عبارت «امواج الکترومانتیك» تابشهایی را بیان می‌کند که طول موج آنها بین صفر و بینهایت است. اشعهٔ با طول موج کمتر از اشعهٔ مرئی به‌اشعهٔ فوق بنفش موسوم‌اند و اشعه‌ای که طول موج آنها از طول موج اشعهٔ فوق بنفش ـ کمتر است به اشعهٔ مجهول x (تا ۱۰ـ۱۰ سانتیمتر) موسوم است. طول موج اشعهٔ گاما بسیاربسیار کوچك است. تابشهایی که طول موج آنها بیش از اشعهٔ قرمز است مادون قرمز نامیده می‌شود قلمرو اشعهٔ غیر مرئی مادون قرمز (که اشعهٔ حرارتی نیز نامیده‌می‌شوند). تا امواجی به‌طول موج یك میلیمتر گسترده شده است. بالاخره اشعه‌ای که طول موج آنها بلندتر از همهٔ اینها است شامل گام امواج رادیو الکتریك‌است. کلیهٔ تابشهایی کـ طول موج آنها متجاوز از چند میلیمتر است. به قلمرو امواج هرتز تعلق دارند. در شکل (۱) تقسیمات امواج الکترومانتیك را مشاهده می کنید .

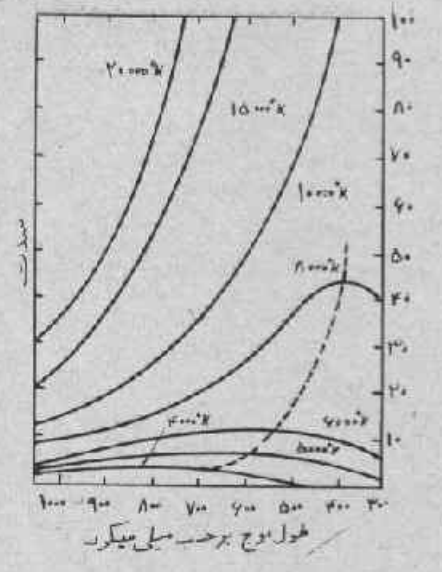


شکل ۱ـ تقسیمات امواج الکترومانتیك. قسمت‌هاشور زده مربوط به امواج مرئی است

تا این اواخر ، تقریباً کلیهٔ اطلاعات ما از طبیعت و ماهیت اجسام آسمانی بر اثر تجزیهٔ اشعهٔ مرئی بدست آمـده بود. چرا آنطور که‌باید و شاید از سایر اشعهٔ الکترومانتیك استفاده نکرده‌اند.؟

هرجسم گرم، مثلاخورشید ، مرتباً تابشهای الکترومانتیك با طول موجهای مختلف منتشر می‌سازد. پخش انرژی تابشی با طول موجهای مختلف، یعنی پخش طیف انرژی، فقط براثر حرارت جسم منتشر کننده است.

شکل (۲) چگونگی پخش و توزیع طیفی انرژی جسمی را نشان می‌دهد که دمای آن ۶۰۰۰ درجه است . دمای لایهٔ سطحی خورشید ، که اشعهٔ آن به ما می‌رسد تقریباً نزدیك به ۶۰۰۰درجه است. باید درنظرداشت که قسمت اعظم این تابشها از اشعهٔ مرئی تشکیل شده‌اند. دمای لایـهٔ سطحی بعضـی از ستارگان بین ۴۵۰۰ تا ۱۰۰۰۰ درجه است نتیجه می‌شود که با بررسی نور آنها قسمت اعظم تابشهای الکترومانتیك مورد



شکل ۲- پخش طیفی انرژی یك جسم ملتهب در دماهای مختلف

مطالعه قرار می گیرد . ستارگانی بسیار گرم وجود دارد که دمای سطح خارجی آنها ۲۵۰۰۰ درجه تا ۵۰۰۰۰ درجه و حتی تا ۱۰۰۰۰۰ درجه است . پس مقدار زیادی از انرژی نشری آنها از اشعهٔ فوق بنفش تشکیل شده است .

شکل(۲) توزیع طیفی انرژی تابشی ستارگانی رانشان می‌دهدکه دمای سطح خارجی آنها به‌ترتیب ۸۰۰۰ و۱۰۰۰۰ و ۱۵۰۰۰ و ۲۰۰۰۰درجه است. ستارگانی نیز وجوددارند که دمای سطح خارجی آنها ۴۰۰۰ و ۳۰۰۰ درجه و حتی کمتر است. قسمت اعظم انرژی نشری این گونه ستارگان را اشعهٔ مادون قرمز و قسمت کمی از آنرا اشعهٔ مرئی تشکیل می‌دهد.شکل (۲) توزیع‌طیفی انرژی تابشی ستارگانی‌را نشان می‌دهد که دمای آنها ۵۰۰۰ و ۴۰۰۰ درجه است *

قسمت اعظم طیف‌یك‌ستاره یا یك جسم آسمانی‌غیرمشخص توسط منجمین قابل بررسی است. ستاره شناسان سعی می کنند که قلمرو پژوهشهای خودرا خواه در جوانب امواج بسیار کوتاه یا بسیار بلندتر از امواج اشعهٔ مرئی وسعت دهند. تابشهای فوق بنفش و نیز مادون قرمز غیر قابل رویتند. برای بررسی این اشعه آشکار کننده‌های مخصوصی بکار می‌برند . مثلا برای آشکارساختن اشعهٔ فوق بنفش از صفحهٔ عکاسی و برای مادون قرمز از سلولهای فتوالکتریك مخصوص استفاده می‌کنند. این آشکارکننده‌ها از زمانی تقریباً جدید در نجوم مورد استفاده واقع شده‌اند: عکس‌برداری ازاواسط قرن گذشته و سلولهای‌فتوالکتریك از چندسال قبل به این‌طرف بکارمی‌روند بنابراین قبل از شناسایی این آشکارکننده‌ها ، امکان بررسی سایر امواج الکترومانتیك جزاشعهٔ مرئی برای منجمین وجود نداشت. در مورد سؤالی‌که قبلا مطرح شد توضیح دیگری نیز لازم‌است بیان‌شود. قبل ازاختراع تلسکوپ، تابش‌الکترومانتیك خارج از زمین بایستی ازجو که ددشمن موروثی، منجمین‌است عبورکند.

تاپیکنواختی لایه‌های جو و تغییرات آن در تصویر ستارگان لرزش ایجاد کرده و باعث تغییر دائمی پژوهشهای منجمین می‌شود، ولی ازهمه بدتر این است که جو زمین‌قسمتی از امواج الکترومانتیك مافوق زمین را جذب می کند این جذب برای امواج مختلف که دارای طول موجهای متفاوتی می‌باشند یکسان‌نیست اشعهٔ مرئی کمتر جذب می‌شوند** . برعکس‌اشعهٔ مافوق بنفش باطول موج کمتر از ۰/۲۹ میکرون کاملا توسط جوجذب می‌شوند. بنابراین اشعهٔ فوق بنفش خورشید،ستارگان و سیارات که طول موج آنها از ۰/۲۹ میکرون کمتر باشد هرگز به‌ما نمی‌رسد؛ درحالی‌که‌این گام از امواج‌الکترومانتیك برای منجمین و فیزیکدانان فایده بخصوصی دارد اخیراًموفق به‌فرستادن موشکهایی به مدار مافوق ۴۰۰ کیلومتری زمین شده‌اندکه مجهز به آشکارکننده‌های تابشهای فوق بنفش هستند برای نخستین بار امواج کوتاه خورشید مورد بررسی قرار گرفت . زیرا در این ارتفاع جو زمین بشدت رقیق وقدرت جذب آن خیلی ضعیف است*** .

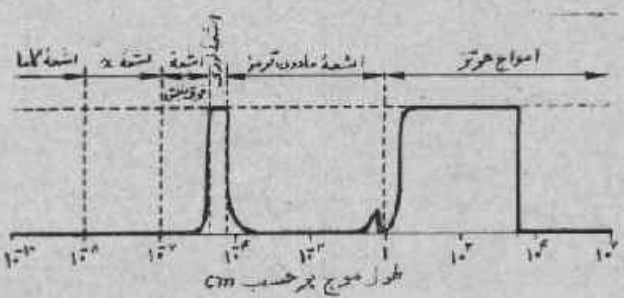
---

* بخاطر داشته باشید که تابش ستارگانی که از هم دور افتاده‌اند از قانون که با منحنی شکل (۲) تشریح شده تبعیت می‌نمایند .

** بنابراین بایستی‌میزان جذب را برای مشاهدات نجومی کاملا مشخص ساخت‌که آن هم به علت تغییرات‌سریع شرایط جوی که بطور تصادفی اتفاق می‌افتد آسان نیست.

*** در این اواخر اقمار مصنوعی که‌مجهز به دستگاههای کامل بودند توسط اتحاد جماهیر شوروی به مدار ۱۸۵۵ کیلومتری ، یعنی به مداری که عملا تأثیر جو ناچیز می‌باشد ، فرستاده شدند و تحقیقات نجومی وارد مرحلهٔ جدیدی شده است .

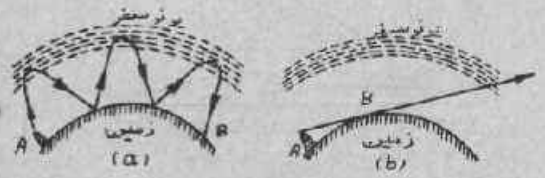
اشعهٔ مادون قرمز نیز بخصوص در جایی که بخار آب وجود داشته باشد بشدت جذب جو زمین می‌شود. شکل (۳) درجهٔ شفافیت جو زمین را برای تابشهای با طول موج مختلف نشان می‌دهد. به بیان مجازی و استعاره‌ای ، فلك را توسط یك «پنجرهٔ شفاف نوری» مشاهده می‌کنیم که منفذ کوچکی در جو ما دارد و تنها اشعهٔ ما فوق زمین که طول موج آنها بین‌حدود پنجرهٔ شفاف و کوچك فوق باشد، برای منجمین وپژوهندگان قابل وصول می‌باشد با توجه به شکل (۳) مشاهده می‌شود که پنجرهٔ شفاف و خیلی بزرگ‌دیگری نیز درجو ما وجوددارد. درحقیقت جو زمین پروانهٔ عبور برای تابشهایی صادر می‌کند که طول موج آنها از ۱/۲۵ سانتیمتر تا ۱۶/۳۰ متر باشد این‌پنجره البته در گام امواج هرتز قرار گرفته‌است. تابشهایی که طول موج آنها کمتر از ۱/۲۵ سانتیمتر باشد بوسیلهٔ مولکولهای اکسیژن و بخار آب جذب می‌شوند*



شکل ۳- شفافیت جو زمین برای امواج الکترومانتیك با طول موجهای مختلف. طول موج بر محور طولها نقل‌شده است و بر محور عرضها درصد انرژی تابشی که از جو عبور می‌کند ، برای هنگامی‌که زاویهٔ تابش موج الکترومانتیك‌صفر درجه است ، نقل شده است .

تابشهایی که طول موج آنها بیش از ۱۶/۳۰ متراست بوسیلهٔ لایه‌های فوقانی جو که هادی الکتریسیته‌اند جذب می‌شوند**. البته نمی‌توان طول موجی را مشخص کرد که‌تابش مربوط به آن به‌طور کامل توسط جو جذب می‌شود. این طول موج بحرانی بستگی دارد به زاویه‌ای که تحت آن موج‌هرتز از جو زمین عبور می‌کند البته حالت فیزیکی جو نیز در این زاویه تأثیر دارد . اشعهٔ با طول موج کمتر از ده متر از جو زمین بدون آنکه جذب شود عبور می‌کند. به همین علت است که این امواج، که در تلویزیون بکار می‌روند ، هرگز برای فواصل دورمورد استفاده واقع نمی‌شوند. در این حالت، علامت رادیوالکتریك به سادگی در فضای کیهانی ناپدید می‌شود . به همین علت است که تا امروز امواج تلویزیونی مگر در حدود افق قابل مشاهده فرستاده نمی‌شدند***

شکل (۴a) انتشار امواج منعکسه بوسیلهٔ جو و شکل (۴b) انتشار امواج بسیار کوتاه را که در تلویزیون بکار می‌روند نشان می‌دهد.



شکل۴- انتشار امواج کوتاه معمولی (a) و امواج کوتاهی که در تلویزیون بکار می‌رود (b) به طول اجمال

بنابراین در جو زمین دو «پنجره» شفاف وجود دارد : پنجرهٔ نوری که پروانهٔ عبور برای امواج نور مرئی وکمی‌از اشعهٔ فوق بنفش ، که طول موجشان نزدیك به امواج نوری، و جزئی از مادون قرمز مجاور به امواج نوری را صادرمی‌کند.

پنجرهٔ دوم یا پنجرهٔ رادیوآسترونومیك که برای‌امواج هرتز کیهانی شفاف می‌باشد . تا این اواخر پنجرهٔ دوم مورد استفاده واقع نشده بود و آن دو علت داشت : اول اینکه‌مقدار انرژیی که از پنجرهٔ رادیو آسترونومیك به ما می‌رسد خیلی کمتر ازمقدار انرژییی‌است که از پنجرهٔ نوری به ما می‌رسد . منحنی شکل (۲) نشان می‌دهد که قسمت بزرگ انرژیی که توسط ستارگان منتشر می‌شود درناحیهٔ‌امواج نور مرئی‌متمرکز است البته کمی هم در ناحیهٔ فوق بنفش ومادون‌قرمز نزدیك به مرئی متمرکز است . محاسبه نشان می‌دهد که ستاره‌ای که دمای سطح خارجی آن ۶۰۰۰درجه باشد جزء بسیارکوچکی از انرژی خودرا تحت تشکیل امواج الکترومانتیك‌که دارای طول موجی بیش از یك‌متر باشد می‌فرستد . بنابراین مقدار انرژیی که از پنجرهٔ رادیوآسترونومیك بما می‌رسد بسیارکم است . البته نه آنقدر کم که قابل تصور نباشد. دوم اینکه تا این اواخر ، جذب و دریافت اشعهٔ هرتز کیهانی بخصوص با حساسیت ضعیف آشکارسازها و آنتنهای کوچك جهتیاب بسیار مشکل بود .

البته اگر اشعهٔ هرتز کیهانی به قدر کفایت‌قوی بودند

---

* بخاطر داشته باشید که جو زمین برای امواج تقریباً ۸ میلیمتری نسبتاً شفاف است (شکل ۳ را نگاه‌کنید)

** باید اضافه کرد که اشعهٔ مافوق زمین‌که طول موج‌آنها بیش از۱۶/۳۰ متر باشدبشدت توسط‌یونکرهٔ(یونسفر) زمین منعکس می‌شوند .

*** فقط چند موج تلویزیونی می‌شناسیم‌که تا مسافتهای قابل ملاحظه‌ای فرستاده شدند .

آشکارکننده های به همان حساسیت قابل آشکار نمودن آنها بودند .

موفقیتهای جدید رادار به اضافه‌نمودن حساسیت پستهای آشکارساز امواج متریك ، دسیمتریك و سانتیمتریك و تکمیل آنتنها کمك شایانی نمود. البته با اصلاح این دستگاهها هرچند هم تابش از پنجرهٔ رادیوآسترونومی ضعیف باشد می‌توان اشعهٔ هرتز کیهانی را دریافت وآشکار نمود .

ما امروز ناظر پیدایش و پیشرفت سریع علم جدید رادیوآسترونومی و همچنین تلگراف بیسیم می‌باشیم. این دستگاه که اختراع خارق‌العاده **پوپوف** دانشمند بزرگ‌روسی است که مورد استعمال جدید وبسیار مهمی در رادیوآسترونومی دارد و وسیلهٔ بسیار گرانقیمتی است برای مطالعهٔ طبیعت اجسام آسمانی .

امروز رادیوآسترونومی به دورشته‌تقسیم شده است: اول مطالعهٔ اشعهٔ منتشر از اجسام آسمانی در گام امواج‌هرتز که به معنای حقیقی خود، یعنی‌علم رادیو آسترونومی ، موسوم‌است دوم علم رادار آسترونومی که مبتنی است برفرستادن علامت رادیوالکتریك به طرف یك‌جسم آسمانی و دریافت منعکسهٔ آن. رادارآسترونومی برخلاف رادیوآسترونومی‌که براساس مشاهده می‌باشد مبتنی برتجربه‌است .

گرچه علم راداراسترونومی منجر به یك‌سری موفقیتهای‌جالب (از قبیل‌انعکاس برروی ماه ، انعکاس‌برروی‌اختران) می‌شود، امکانات آن محدود است . حتی از نظر صنعتی ، تنها اجسام آسمانی منظومهٔ شمسی می‌توانند موج را دریافت‌کنند ، زیرا ستارگانی که بنظر نزدیك می‌رسند از نظر دریافت موج هرتز خیلی‌دورند. اصول موفقیتهای سالهای اخیر مبتنی برعلم رادیوآسترونومی است .

(بقیه از صفحهٔ ۴۹۲)

گرم	مل‌گرم گازمجهول
M'	۱
۰/۷	۰/۰۲۵

جرم‌مولکولی گازمجهول گرم $M' = ۲۸$

جرم مولکولی جسم آلی :

$$d = \frac{M}{M'} \quad \frac{۱۱}{۷} = \frac{M}{۲۸} \quad M = ۴۴ \text{ گرم}$$

جسم آلی ایزولوگ با اسید استیك است بنابراین در فرمول مولکولی این جسم آلی دو اتم کربن یافت می‌شود و فرمول مولکولی به صورت $C_۲H_xO_z$ نوشته می‌شود :

$$C_۲H_xO_z = ۴۴$$

$$۱۲ \times ۲ + x + ۱۶z = ۴۴$$

یا

$$z = \frac{۲۰ - x}{۱۶}$$

می‌دانیم که x و z اعداد صحیح هستند و بنابراین خواهیم داشت :

$x = ۲$ قابل‌قبول	$z = \frac{۹}{۸}$ قابل‌قبول نیست
$x = ۴$ قابل‌قبول	$z = ۱$
$x = ۳$ قابل‌قبول نیست	$z = \frac{۱۷}{۱۶}$
$x = ۱$ قابل‌قبول نیست	$z = \frac{۲۰}{۱۶}$

فرمول‌مولکولی $C_۲H_۴O$

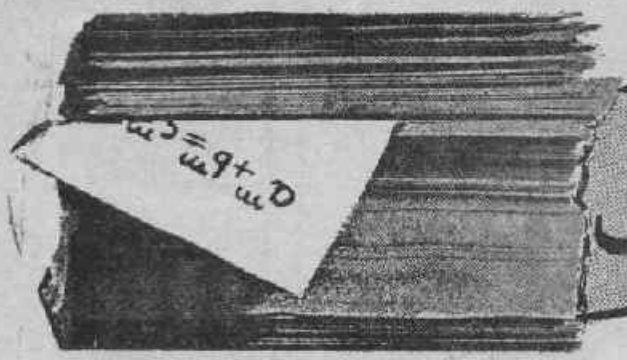
ایزومرها

- $CH_۳ - CHO$ اتانال
- $CH_۲ = CHOH$ الکل‌وینیلیك
- $CH_۲ - CH_۲$ (O) اکسیداتیلن

چون گاز مجهول با اکسید دوکربن ایزوستر می‌باشد بنابراین از نظر تعداد الکترون بایستی برابر باشدپس معلوم می‌شود که گاز مجهول گاز ازت است:

$CO = ۶ + ۸ - ۱۴$ الکترون

$N_۲ - ۲ \times ۷ = ۱۴$ »



مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف :
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ : ع . ه .

بخش پنجم ــ مسائل حساب

این سؤال پیش‌آمده‌است که چند عدد اول ازنوع :

$$\frac{۱۰^n - ۱}{۹}$$

وجود دارد . هرعدد ازاین نوع ازتکرار رقم یك تشکیل شده است. تاکنون پاسخ پرسش مزبور معین نشده است. فقط معلوم ساخته‌اندکه به ازاء چهارمقدار ۱ و۲ و ۱۹ و۲۳ازn عددهای نظیر،اول می‌باشند . این چهار عدد عبارتند از : ۱ و ۱۱ و عـددی که از ۱۹ رقم یك و عدد دیگری که از ۲۳ رقم یك تشکیل می‌شود . نسبت به بقیهٔ مقادیر n هنوز معلوم نیست‌که چند عدد اول وجود دارد ، البته این احتمال وجود دارد که تعداد عددهای اول ازاین نوع بینهایت باشد. اما غیر از آنچه گفته شد دربارهٔ عددهای مزبور اطلاعات بیشتری بدست نیامده است .

* * *

فرمول زیر تعدادی عددهای اول را بدست می‌دهد:

$$X = n^۲ - n + ۴۱$$

به ازاء مقادیر n کوچکتر از ۴۱ عـدد های نظیر همه اول هستند . اما به ازاء $n = ۴۱$ عدد نظیر $X = ۴۱^۲$ است‌که اول نبودن آن واضح است . به همین‌ترتیب محقق می‌شود که حاصل‌هرچند جمله‌ای برحسب n که درآن جملهٔ ثابت بزرگتر ازیك باشد حداکثر به‌ازاء مقادیرn برابر بایك عدد اول‌است.

در فرمول بالا عدد ثابت ۴۱ و عددی اول بود . اگر به جای ۴۱ عدد اول بزرگتر از آن انتخاب‌کنیم مثـلا چند جمله ی به شکل :

$$X = n^۲ - n + p$$

که درآن p عدد اول بزرگتر از ۴۱ باشد آیا عدد های اول بیشتری را بدست خواهیم آورد ؟ اگرچنین باشد می‌توانیم با بزرگ‌کردن عدد p به هرتعدادکه خواسته باشیم عددهای‌اول را تعیین‌کنیم . اما متأسفانه اینچنین نیست ، با مثالهای متعدد می‌توان خلاف این موضوع را ثابت‌کرد. مثلا درازاء $p = ۷$ داریم :

$$X = n^۲ - n + ۷$$

که به ازاء همهٔ مقادیر n کوچکتر از ۷ عددهای مربوط اول نیستند مثلا به ازاء $n = ۲$ داریم $X = ۹$ ، معلوم نیست به‌چه علت فقط تا $n = p$ وقتی که $p = ۴۱$ باشد فرمول از نوع فوق‌الذکر به ازاء همهٔ مقادیر $n < ۴۱$ عددهای اول را بدست می‌دهد.

* * *

ضریبهای عددی بسط $(a+b)^n$ ضـریبهای دوجمله‌ای نامیده می‌شوند ، بسط $(a+b)^۲$ را درنظرمی‌گیریم :

$$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

این فرمول را در $(a+b)$ ضرب می‌کنیم ، نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

برای تعیین قانون تشکیل ضرایب فرض می‌کنیم، $a = b = ۱$ دراین صورت حاصل‌ضرب :

$$(a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳)(a+b)$$

به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{array}{r} ۱۳۳۱ \times \\ ۱۱ \\ \hline ۱۳۳۱ \\ ۱۳۳۱ \\ \hline ۱۴۶۴۱ \end{array}$$

طبق قاعدهٔ بالا به سادگی می‌توانیم ازروی هرسطر، سطر بعدی را پیدا کنیم.

۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
---
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

باادامهٔ عمل می‌توانیم سطرهای مختلف **مثلث حسابی پاسکال** راتا سطر nام معلوم سازیم.

۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
. . . . . .

هرعدد ازجمع دو عدد فوقانی متوالی خود بدست می‌آید.

در بررسی عددهای اول به خاصیت جالبی از عددهای جدول بالا پی بردند: برای اینکه n همهٔ عدد های سطر nام (به استثنای اول وآخر) را بشمرد لازم وکافی است که n عددی اول باشد. این موضوع برای عددهای ۵ و ۷ صدق می‌کند. هرکدام ازآنها به‌ترتیب همهٔ عددهای غیرازاول وآخر سطرهای پنجم و هفتم را می‌شمرند. اما مثلا برای ۴ یا ۶ این خاصیت صادق نیست.

صحت این موضوع ازلحاظ تئوری کامل است اما عملا با اشکال مواجه می‌شود زیرا باید سطرهای جدول را برای عددهای بسیار بزرگ تشکیل داد.

قضیهٔ بالا به عددهای n مربوط می‌شود که اول هستند. اما آیا برای آنهاکه اول نیستند در هر حال صادق است؟ در سطرهای نظیر عددهای غیراول n یعنی عددها بر n قابل‌قسمت هستند درحالی‌که بقیهٔ عددهای سطر مضربی از n نمی‌باشند. این دودسته اعداد را چگونه باید از هم تمیز داد؟ پاسخ به‌این پرسش جالب هنوز معلوم نشده است.

***

چند عدد اول کوچکتر ازعدد مفروض وجود دارد؟ پرسشی است که هنوز کسی نتوانسته است پاسخ آن را بیابد، و همچنین هنوز نتوانسته‌اند فرمول مربوط به این پرسش را تعیین کنند. از ۱۸۹۶ تاکنون آنچه می‌دانند این است که اگر N عددی به اندازهٔ کافی بزرگ باشد تعداد عددهای اول کوچکتر از N تقریباً در حدود $\frac{N}{LogN}$ می‌باشد. (منظور از Log لگاریتم طبیعی یعنی لگاریتم به مبنای e است). این بدان معنی است که اگر N عددی بزرگ باشد احتمال اینکه یك عدد صحیح دلخواه «نزدیك به N» عددی اول باشد درفراوانی محاسبی برابر با $\frac{1}{LogN}$ قراردارد.

در ۱۷۴۲ **گلد باخ** از **اولر** تقاضاکرد که نسبت به حکم زیر تحقیق کرده دربارهٔ درستی یا نادرستی آن نظر بدهد. این حکم ازاین قرار است: هرعدد زوج بزرگتر از۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. مثلا ۳+۵=۸، برای این مثال یعنی عدد ۸ فقط یك حالت وجود دارد اما برای بعضی عددها چندین حالت وجود دارد. مثلا:

۴۸=۷+۴۱=۱۱+۳۷=۱۷+۳۱=۱۹+۲۹

اولر از اثبات صحت حکم مزبور عاجزماند ودرضمن نتوانست نمونه‌های خلاف آنرا ارائه دهد. مسئلهٔ گلد باخ همچنان بلاتکلیف باقی مانده است.

هردوعدد اولی که اختلاف آنها ۲ واحد باشد **عددهای اول دوقلو** نامیده می‌شوند. مثل ۱۱ و ۱۳ یا ۲۹ و ۳۱. به نظر می‌رسدکه از این نوع عددها به تعداد بینهایت وجود داشته باشد اما فعلا غیر از این چیزی نمی‌توان گفت.

تنها راه عملی برای تشکیل جدولی ازعددهای اول از ۱ تا N استفاده از «**غربال اراتستن**» می‌باشد: همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا N را متوالیاً می‌نویسند، مضربهای ۲ (غیراز ۲) راحذف می‌کنند، بعداز آن، ازمضربهای ۳ (غیرازخود۳) آنهایی راکه حذف نشده‌است حذف می‌کنند، بعدمضربهای ۵ وهمین‌طور مضربهای عددهای اول بعداز ۵ را متوالیاً حذف می‌کنند تا آنجاکه همهٔ عددهای غیر اول از ۱ تا N ازغربال خارج شده عددهای اول کوچکتر از N باقی بماند.

درسال ۱۹۵۶ چند نفر ازریاضیدانان از جمله **اولام** غربال دیگری تا اندازه‌ای متفاوت از غربال اراتستن تشکیل داده و جدولی از اعداد به نام «عددهای جلیل» تهیه کردند. درشکل زیر چگونگی تعیین این عدد ها محصور بین ۱ و ۵۰ نموده شده است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

طرز عمل از این قرار است : ابتدا ازیك عدد هارا دو به دو شمرده طرد می کنیم که درنتیجه همهٔ عددهای زوج حذف می‌شوند ، زیر این عددها که دردفعهٔ اول حذف شده‌اند یك خط رسم کرده‌ایم . اولین عدد حذف نشده (غیراز یك) عدد ۳است، از یك شروع کرده عددهای حذف نشده را۳ به ۳ شمرده حذف می کنیم عددهایی که به‌این وسیله حذف‌شده‌اند با دوخط مشخص کرده‌ایم. اولین عدد حذف نشده (غیر از یك) عدد ۷ است پس عددهای باقیمانده را ۷ به ۷ شمرده کنارمی گذاریم. این‌عددها را با ۳ خط متمایز ساخته‌ایم. عمل‌را به همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم عددهای باقیمانده یعنی ۱ ، ۳ ، ۷ ، ۹ ، ۱۳ و غیره عددهای جلیل می‌باشند .

بسیاری‌ازخواص‌مربوط‌به‌عددهای‌اول‌دربارهٔ‌عددهای‌جلیل محقق می‌باشد . مثلا فراوانی مجانبی حول $\frac{1}{LogN}$ برای هردورشته‌یکی‌است؛ توزیع عدد های‌دوقلوی‌اول ودوقلوی جلیل تا عدد :

$n=۱۰۰۰۰۰$

کاملا مشابه است . همچنین معلوم شده است که تا :

$n=۱۰۰۰۰۰$

هرعدد زوج برابراست با حداقل مجموع دوعدد جلیل .

این ملاحظات مسئلهٔ عددهای اول‌را ازدیدتازه‌ای مطرح ساخت. خواص‌جالبی که‌تاکنون تصورمی‌شد خاص عدد های اول است و اکنون دربارهٔ عدد های جلیل هم صدق می‌کرد مجدداً عددهای اول‌را هم ازلحاظ جالب بودن‌آنها وهم‌ازلحاظ اهمیتی که دارندموردتوجه قرارداد. اگرخواص عددهای اول ناشی‌از آنست که آنهاازنوعی‌غربال کردن‌اعداد بدست‌می‌آیندوهمین‌خواص برای عددهای‌دیگری هم‌حقیقت‌دارد که آنهاهم‌ازهمین راه‌حاصل می‌شوندامّا اول نیستند، دراین‌صورت می‌توان گفت که بسیاری‌از محققین‌ازمسیر صحیح‌منحرف‌شده‌اند. نقشی که‌اعداداول درمجموعهٔ اعداد صحیح ایفا می کنند انکارناپذیراست، بسیاری‌ازتئوریهای ارزنده ومهم برملاحظات مربوط به اعداد اول بنـاشده‌اند . اما باوجود این، یك قله تا زمانی رفیعترین قلل بحساب می‌آید که قله‌ای مرتفعتراز آن کشف نشده باشد .

رشتهٔ اعداد :

$۱،۲،۳،۴،۶،۸،۱۱،۱۳،۱۶،۱۸،۲۶،...$

نیز توجه اولام را به خود جلب‌کرد . این رشته اعداد طبق قاعدهٔ زیرتشکیل‌می‌شود: رشتهٔ اعداد طبیعی‌را درنظرمی گیریم، بعد از ۱ و ۲ عددهایی را نگاه می‌داریم که فقط به یك‌صورت برابر باشند با مجموع دوعدد قبلی مختلف ازرشته . عددی را که می‌توان به چند نوع بدست آورد طرد می‌کنیم (مثل۵) و همچنین‌بدیهی است عددی راکه به هیچ ترتیب نمی‌توان بدست آورد کنارمی گذاریم (مانند ۲۳) . فراوانی مجانبی این رشته به چه صورت می‌باشد ؟

بعضی حقتهای عددهای‌اول چنان هستندکه می‌توان یکی را تصویر دیگری دریك‌آینه دانست (مثلا۱۳ و ۳۱ یا ۱۲۲۹ و ۹۲۲۱). دراین میان بعضی ازآنها هم تصویر خودشان هستند مثل ۱۵۱. آیا ازاین نوع جفتها هم به تعداد نامحدود وجود دارد؟ اگرچنین است فراوانی مجانبی‌آنها چیست ؟

***

برای تبـدیل $\frac{۱}{۱۳}$ به‌کسراعشاری لازم‌است‌که یك را بر ۱۳ تقسیم کرد:

۱۰	۱۳
۱۰۰	۰/۰۷۶۹۲۳ . . . .
۹۰	
۱۲۰	
۳۰	
۴۰	
۱	
. . .	

کسر اعشاری حاصل متناوب است و دورهٔ تناوب‌آن ۶ رقمی است. زیرا دررشتهٔ باقیمانده‌های جزئی :

$(۱،۱۰،۹،۱۲،۳،۴،۱،...)$

بازهم باقیماندهٔ یك بدست آمده و درنتیجه بقیهٔ باقیمانده ها هم به ترتیب تکرار می‌شوند . در تقسیم فـوق تعدادباقیمانده‌های جزئی که تکرار می‌شوند برابر با ۶ است ، ممکن بود که غیر از این باشد اما مسلماً تعداد باقیمانده‌های جزئی از عدد ۱۳ کوچکتر خواهد بود . بطورکلی کسر اعشاری متناوبی که ازیك‌کسر $\frac{۱}{n}$ نتیجه می‌شود حداکثر می‌تواند دورهٔ تناوبی با $n-۱$ رقم داشته باشد. وقتی‌که اولین باقیمانده تکرارشد ارقام خارج قسمت تکرار می‌شوند.

مسئله‌ای به شرح زیررا مطرح می کنیم . آیاعددی مانند n وجود داردکه معکوس‌آن یعنی $\frac{۱}{n}$ مبـدل کسر اعشاری

بقیه پائین صفحهٔ ۴۷۷

درسی از فیزیک و مکانیک

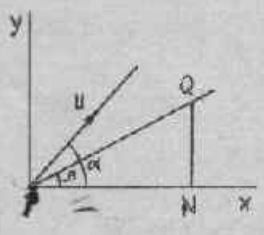
حرکت پرتابی *

۲۰

ترجمهٔ : هوشنگ شریفزاده

برد پرتابی برسطح شیبدار :

فرض می‌کنیم که گلوله‌ای بازاویهٔ α نسبت به افق، از نقطهٔ P واقع بر سطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق برابر β است چنان پرتاب شود که امتداد پرتاب در سطح قائمی باشد که‌مادبر PQ خط بزرگترین شیب سطح شیبدار است. فرض می‌کنیم که برد گلوله PQ و ارتفاع Q از صفحهٔ افقیی که از P می‌گذرد برابر PN باشد.



برای‌آنکه مدت زمان‌پرواز را بدست آوریم ، مؤلفهٔ حرکت را در امتداد عمود بر سطح شیبدار درنظر می‌گیریم .

مؤلفهٔ سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار:

$u\sin(\alpha-\beta)$

است. در این امتداد شتاب برابراست با $-g\cos\beta$

اگر مدت زمان پرواز T باشد می‌توان نوشت :

$$u\sin(\alpha-\beta).T-\frac{1}{2}g\cos\beta.T^2=0$$

$$T=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

مؤلفهٔ افقی سرعت در تمام مدت پرواز ثابت و برابر $u\cos\alpha$است و مسافت PN که در مدت T طی می‌شود برابر است با :

$$\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos\beta}$$

وچون $PQ=\frac{PN}{\cos\beta}$ است ، برد گلوله بر سطح شیبدار :

$$(1)\quad \text{بردگلوله}=PQ=\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

حداکثر برد گلوله به ازای مقدار معینی از u و β چنین بدست می‌آید :

$$(2)\quad R=\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta]$$

چون β و u مقادیر معینی هستند ، جملهٔ خارج از کروشه یعنی

---

* ۱ــ نامه‌هایی از خوانندگان مجلهٔ یکان دریافت شده است که ضمن اشاره به مقالاتی که تحت‌عنوان درسی‌از فیزیک و مکانیک در شماره‌های اخیر این مجله درج شده است ، حل بعضی از تمرینها را خواسته‌اند. تعداد این‌گونه تمرینها زیاد است و حل آنها جای زیادی را در مجله اشغال می‌کند و بعلاوه حل بسیاری از آنها در یک کتاب تألیف شده وتااواسط اردیبهشت‌ماه ۴۷ منتشر خواهد شد، به این دلایل از درج آنها در مجلهٔ یکان خودداری می‌شود. بعلاوه این تمرینها به‌این منظور نوشته شده که خواننده خود با توجه به‌حل مسائل نمونه به حل آنها بپردازد.

۲ــ نامه‌های متعدد دیگری از خوانندگان یکان دریافت شده است که ضمن آن خواسته‌اند تا مقالاتی در بارهٔ قوانین ماریوت ، گیلوساک ، ماشینهای ساده و قرقره‌های مرکب وتعادل مایعات در مجلهٔ یکان درج شود. مقالاتی دراین‌زمینه تهیه شده است و بتدریج در مجلهٔ یکان درج خواهد شد .

$\frac{u^2}{g\cos^2\beta}$ مقداری است ثابت.

و R هنگامی ماکزیمم می‌شود که عبارت داخل گروشه ماکزیمم شود. و این عبارت نیز هنگامی ماکزیمم می‌شود که :

$\sin(2\alpha-\beta)$

ماکزیمم شود، یعنی $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ شود.

بنابراین برای $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$ برد گلوله ماکزیمم است.

α هنگامی دارای این مقدار است که :

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

باشد. یعنی امتداد پرتاب نیمساز زاویهٔ بین امتداد سطح شیبدار و امتداد قائم باشد.

ماکزیمم برد برابر است با :

$$(3)\quad \frac{u^2}{g\cos^2\beta}(1-\sin\beta)=\frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

از رابطهٔ (۲) برای برد معین (غیراز برد ماکزیمم) با سرعت پرتاب معین، مقدار $\sin(2\alpha-\beta)$ بدست می‌آید.

برای سینوس معینی دوزاویهٔ کمتر از ۱۸۰ درجه وجود دارد، بنابراین برای زاویهٔ $2\alpha-\beta$ دومقدار بدست می‌آید. اگر θ یکی از آن دومقدار باشد، دیگری $\pi-\theta$ است.

پس $2\alpha-\beta=\theta$

یا $\alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}$

و $2\alpha-\beta=\pi-\theta$

یا $\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}$

پس برای یك برد معین دوزاویهٔ پرتاب وجود دارد. زاویهٔ پرتاب برای برد ماکزیمم برابر است با :

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

و نیز :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$$

یعنی امتداد پرتاب برای بردماکزیمم نیمساز دو امتداد پرتاب برای برد معین است.

در فوق امتداد پرتاب را بر حسب زاویه‌ای که باامتداد افقی می‌سازد بیان کردیم.

ممکن است زاویهٔ پرتاب را نسبت به سطح شیبدار بسنجیم درضمن حل مسائل باید توجه داشت که کدامیك اززوایا معلوم است.

اگر θ زاویهٔ امتداد پرتاب با خط بزرگترین شیب سطح شیبدار باشد، مؤلفه‌های سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار $u\sin\theta$ ودرامتداد موازی با سطح شیبدار $u\cos\theta$ است.

T مدت زمان پرواز از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$u\sin\theta\cdot T-\frac{1}{2}gu\cos\beta\cdot T^2=0$$

در نتیجه :

$$(4)\quad T=\frac{2u\sin\theta}{g\cos\beta}$$

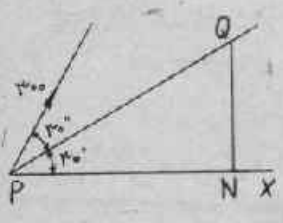
با توجه به‌اینکه مولفهٔ افقی سرعت $u\cos(\beta+\theta)$ است یا با توجه به مؤلفهٔ حرکت در امتدادسطح شیبدار می‌توان برد گلوله را تعیین کرد.

در مدت T گلوله مسافت (R) را در امتداد سطح‌شیبدار می‌پیماید. پس :

$$(5)\quad R=u\cos\theta\cdot T-\frac{1}{2}g\sin\beta\, T^2$$

روابط (۴) و(۵) برای حل مسائلی که در آن تعیین‌مدت زمان پروازبرای برد معینی مورد نظر است بسیار مفیدمی‌باشد از این دو معادله بسادگی می‌توان θ را حذف کرد.

مثال ۱ـ از پایین سطح شیبداری که زاویهٔ آن باافق ۳۰ درجه است، گلوله‌ای باسرعت ۳۰۰m/s و با زاویهٔ ۶۰ درجه نسبت به افق به طرف بالا پرتاب شده است. برد گلوله را برسطح شیبدار و مدت زمان پروازراتعیین کنید: $g=10m/s^2$



حل ـ فرض می‌کنیم که PQ معرف سطح شیبدار باشد و Q نقطه‌ای باشد که گلوله به سطح شیبدار می‌رسد. مؤلفهٔ سرعت اولیه در امتدادعمودبر سطح شیبدار :

$300\sin30^\circ=150m/s$

است. شتاب حرکت در امتداد عمود بر سطح شیبدار :

$$g\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}g=5\sqrt{3}m/s^2$$

t مدت زمان پرواز از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$۱۵۰t - \frac{۱}{۲} \times ۵\sqrt{۳}\, t^۲ = ۰$$

$$t = \frac{۳۰۰}{۵\sqrt{۳}} = ۲۰\sqrt{۳} \neq ۳۴/۶ s$$

مسافتی که در این مدت زمان گلوله به موازات امتداد افقی طی می‌کند برابراست با :

$$PN = ۲۰\sqrt{۲} \times ۱۵۰ = ۳۰۰۰\sqrt{۳}\ m$$

بنابراین برد گلوله برسطح شیبدار :

$$PQ = \frac{PN}{\cos ۳۰} = \frac{۳۰۰۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۶۰۰۰\ m$$

مثال ۴ـ گلوله‌ای با سرعت ۲۰m/s و با زاویهٔ ۴۵ درجه پرتاب می‌شود. برد این گلوله را بر سطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق ۳۰درجه است در دوحالت زیر پیدا کنید :

الف ـ گلوله بطرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌شود.

ب ـ گلوله بطرف پایین سطح شیبدار پرتاب می‌شود.

$(g = ۱۰ m/s^۲)$

حل ـ الف ـ مؤلفهٔ سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار برابر است با :

$$۲۰ \sin ۱۵^\circ\ m/s$$

مؤلفهٔ شتاب در امتداد عمود بر سطح شیبدار:

$$g\cos ۳۰^\circ = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}\ m/s^۲$$

است .

مدت زمان پرواز از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$۲۰ \sin ۱۵^\circ\, t - \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} t^۲ = ۰$$

در نتیجه :

$$t = \frac{۴۰ \sin ۱۵^\circ}{۵\sqrt{۳}} = ۸ \times \frac{۰/۲۵۸}{۱/۷۳} \neq ۱/۲ s$$

مؤلفهٔ افقی سرعت $۲۰\cos ۴۵^\circ = ۱۰\sqrt{۲}\ m/s$ است.

مسافتی که گلوله در مدت $\frac{۸\sin ۱۵^\circ}{\sqrt{۳}}$ ثانیه به موازات امتداد افقی طی می‌کند برابراست با $۱۰\sqrt{۳} \times \frac{۸\sin ۱۵^\circ}{\sqrt{۳}}$

بنابراین برد گلوله بر سطح شیبدار برابر است با :

$$R = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times ۸ \sin ۱۵^\circ \times \frac{۱}{\cos ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱۶۰\sqrt{۲}}{۳} \times \sin ۱۵^\circ$$

$$R = \frac{۱۶۰ \times ۱/۴ \times ۰/۲۵۸}{۳} = ۱۹/۲ m$$

ب ـ مؤلفهٔ سرعت اولیه درامتداد عمود بر سطح شیبدار:

$$۲۰ \sin ۷۵^\circ$$

است .

مدت زمان پرواز t ثانیه است بطوری که :

$$۲۰ \sin ۷۵ - \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} t = ۰ \Rightarrow t = \frac{۴۰ \sin ۷۵}{۵\sqrt{۳}}$$

$$t = ۸ \times \frac{۰/۹۶۶}{۱/۷۳} \neq ۴/۴ s$$

مؤلفهٔ افقی سرعت $۲۰\cos ۴۵^\circ = ۱۰\sqrt{۲}\ m/s$ است و فاصله‌ای که گلوله در مدت زمان t به موازات سطح افقی طی می‌کند :

$$\frac{۸\sin ۷۵}{\sqrt{۳}} \times ۱۰\sqrt{۲}\ m$$

بنابراین برد گلوله برسطح شیبدار :

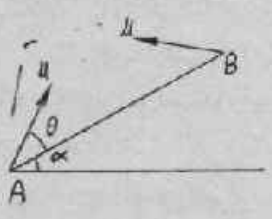
$$R = \frac{۸\sin ۷۵}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$= \frac{۱۶۰ \times ۱/۴ \times ۰/۹۶۶}{۳}$$

$$R \neq ۷۲ m$$

مثال۳ـ ثابت کنید که به‌ازای سرعت پرتاب معینی ، برد پرتاب برسطح شیبداری که باافق زاویهٔ α می‌سازد، بطرف پایین $\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}$ برابر بردپرتاب براین سطح بطرف بالاست .

حل ـ فرض می‌کنیم u سرعت پرتاب و θ زاویهٔ امتداد پرتاب با امتداد سطح شیبدار باشد . وقتی که گلوله از A به‌طرف بالا پرتاب می‌شود ، مدت زمان پروازازرابطهٔ زیر بدست می‌آید :



$$u \sin\theta \cdot t - \frac{۱}{۲} g\cos\alpha \cdot t^۲$$

$$t = \frac{۲u\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

برد گلوله بطرف بالا برابر است با:

$$R_1=\frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}\times u\cos(\theta+\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}=$$

$$-\frac{2u^2}{g}\times\frac{\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$-\frac{u^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(2\theta+\alpha)-\sin\alpha]$$

R_1 هنگامی ماکزیمم می‌شود که :

$$\sin(2\theta+\alpha)=1$$

شود دراین صورت :

$$\text{برد}=\frac{u^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha)$$

هنگامی که گلوله از B باهمان زاویه بطرف پایین پرتاب می‌شود، مدت زمان پروازهمان مقدار قبلی یعنی $\frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}$ است. اما مؤلفهٔ افقی سرعت $u\cos(\theta-\alpha)$ است، بنابراین مسافتی که در مدت زمان $\frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}$ طی می‌شود برابر :

$$\frac{2u^2\sin\theta\cos(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$$

وبرد گلوله برابر است با :

$$R_2=\frac{2u^2\sin\theta\cos(\theta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{u^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha]$$

R_2 هنگامی ماکزیمم است که $\sin(2\theta-\alpha)=1$ شود. دراین صورت :

$$\text{برد}=\frac{u^2}{g\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)$$

بنابراین نسبت این دو برد ماکزیمم برابر است با $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

مثال ۴ ـ اگر t_1 و t_2 کوتاهترین و درازترین مدت زمان پرواز برای رسیدن به برد معینی بریك سطح شیبدار باشد ثابت کنید که :

$$t_1^2+t_2^2+2t_1t_2\sin\alpha$$

مقداری است ثابت ومستقل از α (α زاویهٔ سطح شیبدار است با افق)، سرعت پرتاب معلوم است.

حل ـ فرض می‌کنیم که V سرعت پرتاب و θ زاویهٔ پرتاب نسبت به سطح شیبدار باشد.

مؤلفهٔ سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار $V\sin\theta$ ومدت زمان پرواز برابر است با t که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$(1)\quad V\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2=0$$

مؤلفهٔ سرعت اولیه در امتداد موازی با سطح شیبدار $V\cos\theta$ وشتاب به طرف پایین سطح $g\sin\alpha$ است، برد گلوله در مدت زمان t از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$(2)\quad R=V\cos\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود .

$$V\sin\theta\cdot t=\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2$$

$$V\cos\theta\cdot t=R+\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$$

دو رابطهٔ بالا را مربع کرده باهم جمع می‌کنیم :

$$V^2t^2=R^2+gR\sin\alpha\cdot t^2+\frac{g^2}{4}t^4$$

$$\frac{g^2}{4}t^4+t^2(gR\sin\alpha-V^2)+R^2=0$$

اگر t_1^2 و t_2^2 ریشه‌های این معادلهٔ دومجذوری باشند ،

$$t_1^2+t_2^2=-\frac{4R}{g}\sin\alpha+\frac{4V^2}{g^2}$$

و

$$t_1^2t_2^2=\frac{4R^2}{g^2}\Longrightarrow t_1t_2=\frac{2R}{g}$$

بنابراین :

$$t_1^2+t_2^2+2t_1t_2\sin\alpha=\frac{4V^2}{g^2}$$

این رابطه مستقل از α است،

مثال ۵ ـ ازپایین سطح شیبداری که با افق زاویهٔ β می‌سازد گلوله‌ای بطرف بالا چنان پرتاب می‌شود که امتداد پرتاب با امتداد سطح شیبدار زاویه‌ای برابر α می‌سازد. ثابت کنید که برد گلوله براین سطح برابر است با :

$$R\frac{1-tg\alpha tg\beta}{\cos\beta}$$

که درآن R برد همان گلوله برسطح افقی است، هنگامی که گلوله باهمان سرعت وزاویه α نسبت به سطح افقی پرتاب شود.

حل ـ (بطور خلاصه) باتوجه به حل مسائل قبلی ، برد گلوله براین سطح :

$$R'=\frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$$

وبرد گلوله برسطح افقی وقتی که با زاویهٔ α نسبت به‌افق پرتاب شود :

$$R=\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

پس

$$\frac{R'}{R}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos^2\beta}$$

$$R'=R\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}$$

تمرین

۱ـ ازنقطه‌ای واقع برسطح شیبداری که باافق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد گلوله‌ای باسرعت ۴۰۰ cm/s عمود برسطح شیبدار بطرف بالاپرتاب می‌شود. بردآن راتعیین کنید .

$g=9/8\,m/s^2$

جواب : ۲۱۷/۵ m

۲ـ حداکثر برد افقی گلوله‌ای که با سرعت معین پرتاب می‌شود برابر ۴۰۰۰ متراست. حداکثر برد این گلوله بطرف بالا ونیز بطرف پایین سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد چقدراست؟ سرعت گلوله به‌همان اندازهٔ قبلی است .

جواب : ۴۰۰۰ متر، ۶۰۰۰ متر

۳ـ اگرحداکثر برد گلوله‌ای برپک سطح شیبدار برابر R ومدت زمان پرواز برای رسیدن به این برد برابر T باشد ، ثابت کنید که :

$$R=\frac{1}{2}gT^2$$

۴ـ گلوله‌ای باسرعت ۱۰۰m/s وباانحراف ۶۰ درجه ازپایین سطح شیبداری که زاویهٔ شیب آن ۳۰درجه است پرتاب می‌شود. حرکت درصفحهٔقائمی انجام می گیرد که خط بزرگترین شیب سطح شیبداررا دربردارد. بردگلوله ونیزمدت زمان‌پرواز را پیداکنید . $g=9/8\,m/s^2$

۵ ـ گلوله‌ای باسرعت ۳۹۲m/s وبا انحراف ۷۵° پرتاب می‌شود. بردگلوله‌را برسطح شیبداری که‌باافق زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد در دوحالت پیداکنید :

الف ـ گلوله بطرف بالای سطح شیبدارپرتاب می‌شود :

ب ـ گلوله بطرف پایین سطح شیبدارپرتاب می‌شود .

$g=9/8\,m/s^2$

جواب : تقریباً ۸ کیلومتر، تقریباً ۱۴ کیلومتر

۶ـ ازپایین سطح‌شیبداری گلوله‌ای باسرعت ۶۱۲/۵m/s وزاویهٔ پرتاب ۶۰درجه پرتاب می‌شود. اگرزاویهٔ سطح‌شیبدار با افق ۳۰درجه یا ۴۵درجه باشد بردگلوله چقدرخواهدبود؟ حداکثربرد براین سطوح باسرعت اولیه داده شده چقدراست؟

$g=9/8\,m/s^2$

جواب : تقریباً ۲۵/۵km ، ۱۹ km ، ۲۵/۵km ، ۲۲ km

۷ـ ازنقطه‌ای واقع برسطح شیبداری که باقائم زاویهٔ 2β می‌سازد، گلولهٔ سنگینی بطرف بالای سطح شیبدارپرتاب‌می‌شود. حرکت در صفحهٔ قائم خط بزرگترین شیب سطح شیبدارانجام می گیرد. سرعت‌اولیهٔپرتاب برابر $u\cos\beta$ است‌وجهت‌اولیهٔ حرکت با امتداد قائم زاویهٔ β می‌سازد . ثابت کنید که مدت زمان پرواز گلوله $\frac{u}{g}$ ، بردگلوله $\frac{u^2}{2g}$ و سرعت گلوله هنگام برخورد با سطح شیبدار $u\sin\beta$ وامتداد حرکت در این هنگام افقی است .

۸ـ گلوله‌ای باسرعت u چنان پرتاب می‌شود که امتداد حرکت‌آن، هنگام برخورد باسطح شیبداری که با امتداد افقی زاویهٔ ۳۰درجه می‌سازد، عمودبرسطح‌شیبدارباشد. ثابت کنید که بردگلوله براین سطح برابراست با $\frac{4u^2}{7g}$

۹ـ درصفحهٔ قائم خط‌بزرگترین شیب‌سطح شیبداری که‌با افق زاویهٔ α می‌سازد ، گلوله‌ای باسرعت V وبا زاویهٔ پرتاب $\alpha+\theta$ پرتاب می‌شود. بردگلوله براین سطح چقدراست؟

اگرامتداد حرکت گلوله هنگام برخوردبه سطح شیبدار افقی باشد، ثابت کنید که

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

۱۰ـ دوسطح‌شیبدار AB و AC در A دارای‌یال‌مشترک می‌باشند. از B گلوله‌ای بطرف بالا پرتاب می‌شود بطوری که درست از A و C می گذرد. حرکت درصفحهٔ قائمی که خطوط بزرگترین شیب سطوح شیبداررادربرداردانجام می گیرد. اگر زوایای سطوح‌شیبدار باافق به‌ترتیب α و β وزاویهٔ‌پرتاب θ باشد، ثابت کنید که :

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$$

۱۱ـ بر سطح شیبداری که زاویهٔ آن باافق برابر α است گلوله‌ای با سرعت V پرتاب می‌شود. ثابت کنید که برد ماکزیمم گلوله براین سطح $R=\frac{V^2}{g}\times\frac{1}{1+\sin\alpha}$ است .

پائین صفحهٔ بعد

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

۱۳ الکتریسیتهٔ ساکن

STATIC ELECTRICITY

ELECTROSCOPE	الکتروسکوپ
INSULATOR	عایق
CONDUCTOR	هادی
FRICTION	اصطکاك
REPEL	دفع کردن
ATTRACT	جذب کردن
CONDENSER	خازن
INDUCTION	القاء

PRACTICE YOUR READING

Electricity is of two kinds, positive and negative. Like charges repel; unlik charges attract.

The electric charge resides on the outside of a conductor. It has its greatest density where the curvature is greatest.

۱۴. الکتریسیته

ELECTRICITY

CURRENT	جریان
DIFFERENCE OF POTENTIAL	اختلاف پتانسیل
RESISTANCE	مقاومت
SPECIFIC RESISTANCE	مقاومت مخصوص
OPEN CIRCUIT	مدار باز
TRANSFORMER	مبدل
ELECTRIC FIELD	میدان الکتریکی
COIL	سیم‌پیچ
SERIES GROUPING	بهم‌بستن بطورمتوالی
PARALLEL GROUPING	« « موازی
INTERNAL RESISTANCE	مقاومت داخلی

PROBLEMS

An electric current of one ampere will deposit 0.001118 g. of silver p r second. If 0.5 g. of silver were deposited in 5 min., what was the strength of the current?

The heating coils of an electric ironer use 6 amperes on a 220 – volt circuit. What is the resistance?

بقیه از صفحهٔ قبل

همچنین ثابت کنید که پس ازمدت زمانی برابر $\frac{۲}{۳}$ مدت زمان پرواز، فاصلهٔ قائم گلوله از سطح برابراست با $\frac{۲R}{۹}$

۱۲ـ از نقطه‌ای واقع بر سطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق برابر ۴۵ درجه است، گلوله‌ای با زاویهٔ θ پرتاب می‌شود، مسیر حرکت درصفحهٔ قائمی است که خط بزرگترین شیب صفحه را در بردارد . ثابت کنید که زاویه‌ای که گلوله با آن دوباره به سطح برخورد می‌کند برابر φ است بطوری که:

$$tg\varphi = \frac{۱ - tg\theta}{۳ - tg\theta}$$

گلوله را باچه زاویه‌ای پرتاب کنیم تاهنگامی که دوباره به‌سطح برخوردمی‌کند، حرکتش درامتداد افقی باشد.

جواب : $Arctg۲$

حل مسائل هندسه به کمک اعداد مختلط

از مجلهٔ The Mathamatics teacher

نوشتهٔ B . J . Garfunkel

ترجمهٔ : احمد قاضی‌زاده

دانشجوی رشتهٔ ریاضی دانشسرایعالی تهران

درریاضیات همواره سعی براین‌است که برای مسائل کهنه راه حلهای نوینی پیدا کنند ومسائل جدید را به‌راه حلهای‌قدیمی حل کنند امادربعضی موارد لازم می‌آید مسائل قدیمی راباهمان روش قدیمی حل کنند. تقریباً صدسال پیش C.A.Laltant وسایرریاضیدانان آن عصر به روش نمایش برداری در **صفحهٔ گوس** (صفحه‌ای که‌اعداد مختلط درآن نموده می‌شود) به‌حل مسائل بخصوصی‌درهندسهٔ مسطحه مبادرت ورزیدند. دراین‌مقال ضمن مقدماتی به یادآوری ایـن روش بـرای حـل چند مسئله می‌پردازیم.

اگر $\overrightarrow{P}$ پاره خط جهت‌داری درصفحهٔ‌گوس باشد که‌آنرا با **P** نمایش‌می‌دهیم: $\overrightarrow{pi}$ یا **Pi** نمایش همـان پـاره خط است هنگامی‌که **P** به‌اندازهٔ ۹۰ درجه‌درجهت مثلثاتی (خلاف‌حرکت عقربه های ساعت) دوران کند زیرا :

$$P=x+yi \Longrightarrow Pi=-y+xi$$

وحاصل‌ضرب شیبهای خطوط **P** و **Pi** برابر‌خواهد بود.

$$(\frac{y}{x})\ (-\frac{x}{y})=-1$$

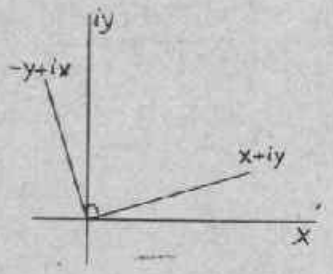
بهمین طریق اگر ω و ω^2 دوریشه‌ازریشه‌های‌سوم‌واحد باشند* $P\omega$ و $P\omega^2$ نمایش‌دوران‌یافته **P** به‌اندازه های ۱۲۰° و ۲۴۰° درجهت مثلثاتی خواهند بودزیرا :

$$P=x+yi \Longrightarrow$$

$$P\omega=-\frac{1}{2}(x+y\sqrt{3})+\frac{i(x\sqrt{3}-y)}{2}$$

واگرزاویهٔ بین **P** و $P\omega$ را θ فرض کنیم طبق فرمول زیر

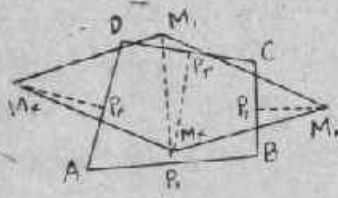
$$tg\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=-\sqrt{3} \Longrightarrow \theta=120^\circ$$



باستدلالی‌مشابه ثـابت می‌شود کـه $P\omega^2$ با **P** زاویهٔ ۲۴۰° درجهت مثلثاتی‌می‌سازد.

باتوجه‌به کیفیات اخیرواینکه $\omega^3=1$ و $1+\omega+\omega^2=0$ است ذیلا به‌حل مسائل می‌پردازیم:

قضیهٔ ۱ـ درهرچهارضلعی (محدب یامقعر) **ABCD** اگرعمودمنصفهای‌اضلاع **DC** و**AB**را ممتدبه‌طرف داخل‌سطح چهارضلعی‌وعمودمنصفهای **AD** و **BC**ممتد به طرف‌خارج‌سطح چهارضلعی رسم کنیم وروی‌این چهار عمودمنصف طـولهائی متناسب بااضلاع مربوطه جدا کنیم چهارنقطـه‌ای‌کـه به‌این ترتیب حاصل می‌شوندرأسهای یک‌متوازی الاضلاع‌اند.



حالت خاص : اگردریک چهارضلعی اوساط اضلاع‌را بهم وصل کنیم شکل حاصل متوازی‌الاضلاع خواهدبود.

برهان : اگر

$$AB=P \text{ و } BC=q \text{ و } CD=r \text{ و } DA=S$$

باشد خواهیم داشت :

$$P_1M_1=KPi \text{ و } P_2M_2=-Kqi \text{ و } P_3M_3=Kri$$

$$\text{و } P_4M_4=-KSi$$

(K عدد ثابت دلخواهی است)

بادرنظر گرفتن‌مسیر $AP_1M_1M_2P_4A$ خواهیم‌داشت:

$$\frac{P}{2}+KPi+M_1M_2+Kqi+\frac{S}{2}=0$$

واز آنجا

$$M_2M_1=\frac{P}{2}+\frac{S}{2}+KPi+Kqi$$

$$* \sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2K\pi}{3}+i\sin\frac{2K\pi}{3}$$

$$x_1=1 \text{ و } x_1=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega \text{ و } x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega^2$$

با در نظر گرفتن مسیر $P_1CP_2M_3M_4P_1$ خواهیم داشت:

$$\frac{q}{2}+\frac{r}{2}+Kqi+M_2M_4+kri=0$$

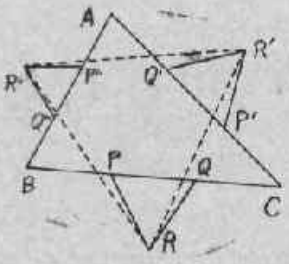
وازاین دو

$$M_2M_3=-\frac{q}{2}-\frac{r}{2}-Kqi-Kri$$

وباتوجه به $M_2M_1=M_3M_4$ داریم: $p+q+r+s=0$ وقضیه اثبات می گردد.

قضیه‌ای که درزیر بیان می‌شود منسوب به‌ناپلئون بناپارت می‌باشد.

قضیهٔ ۲ـ اگرهرضلع یك مثلث را به‌سه‌قسمت متساوی



تقسیم کـرده وبا قسمت وسطی هر ضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع بسازیم ازبه‌هم‌وصل کردن رأسهای مثلثهای بدست آمده یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود.

اگر P و Q ، P' و Q' ، P'' و Q'' نقاطی باشندکه اضلاع BC و CA و AB رابه ترتیب بـه‌سه قسمت متساوی تقسیم‌کرده باشند و مثلثهای PQR و P'Q'R' و P''Q''R'' متساوی‌الاضلاع باشند باید ثابت کنیم‌کـه مثلث RR'R'' نیز متساوی‌الاضلاع است.

برهان: با فرض $BC=P$ و $CA=q$ و $BA=p+q$ خواهیم داشت:

$$RR'=-\frac{p}{3}\omega^2+\frac{p+q}{3}-\frac{q}{3}\omega$$

$$R'R''=-\frac{q}{3}\omega^2+\frac{q}{3}-\frac{p}{3}-\frac{q}{3}+\frac{(p+q)\omega}{3}$$

$$R'R''=-\frac{p}{3}+\frac{(p+q)\omega}{3}-\frac{q\omega^2}{3}$$

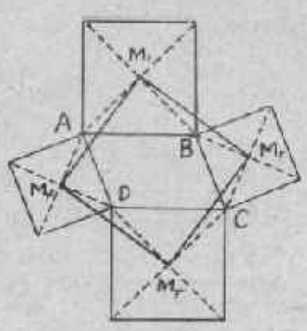
$$R''R=\frac{(p+q)\omega^2}{3}-\frac{p+q}{3}+\frac{p}{3}-\frac{p\omega}{3}$$

$$R''R=-\frac{q}{3}+\frac{p\omega}{3}+\frac{(p+q)\omega^2}{3}$$

بنابراین $R'R''=(RR')\omega$ و $R''R=(R'R'')\omega$

واین نشان دهندآنست که مثلث RR'R'' متساوی‌الاضلاع‌است.

قضیهٔ ۳: روی اضلاع‌متوازی‌الاضلاع ABCD مربع‌هائی درخارج سطح آن می‌سازیم. ثابت کنید که مراکز این مربعها خودرأسهای‌یك مربع می‌باشند (اثبات این قضیه به راههـای دیگر می‌اندازه طولانی است).



برهان: فرض می کنیم که:

$CB-DA=q$ و $DC=AB=P$

بنابراین:

$$DM_2=-\frac{P}{2}-\frac{P}{2}i \quad و \quad CM_2=-\frac{P}{2}-\frac{P}{2}i$$

$$CM_3=\frac{q}{2}-\frac{q}{2}i \quad و \quad BM_1=-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}i$$

$$AM_1=\frac{P}{2}+\frac{P}{2}i \quad و \quad BM_1=-\frac{P}{2}+\frac{P}{2}i$$

$$M_2M_3=\frac{P+q}{2}+\frac{P-q}{2}i$$

$$M_2M_1=\frac{-P+q}{2}+\frac{P+q}{2}$$

بنابراین:

$M_2M_3=M_2M_1$ و $(M_2M_3)i=M_2M_1$

ودرنتیجه: $M_2M_3 \perp M_1M_2$

بهمین طریق می‌توان نشان دادکه

$M_1M_4 \perp M_4M_3$ و $M_1M_4=M_4M_3$

قضیه اثبات می گردد.

بااین روش بسیاری ازمسائل جالب هندسه به‌کمك اعداد مختلط قابل حل‌می‌باشند.

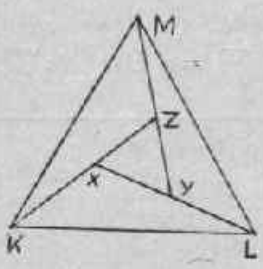
تمرین

مسئلهٔ ۱ـ ثابت‌کنیدکه اقطاریك مربع برهم‌عمودند.

مسئلهٔ ۲ـ در شکـل مقابل مثلث XYZ متساوی‌الاضلاع بوده و

$XK=YL=ZM$

می‌باشد. ثابت کنیدکـه مثلث KLM متساوی‌الاضلاع‌است.



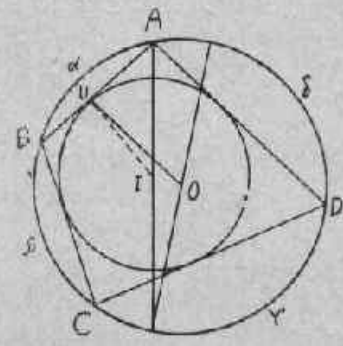
دنباله پائین صفحهٔ ۴۴۲

بحثی در چهارضلعی محیطی محاطی

نوشتهٔ : L. CARLITZ
مجلهٔ : Math. Magazine

ترجمهٔ : یعقوب گنجی
دانشجوی دانشسرای عالی تهران

فرض کنیم چهارضلعی ABCD در دایرهٔ به مرکز O و شعاع R محاط و بر دایرهٔ به مرکز I وشعاع r محیط باشد. برای سهولت طول اضلاع AB ، BC و CD و DA را به ترتیب با a ، b ، c و d و اندازهٔ کمانهای مقابلشان را به ترتیب با α ، β ، γ ، δ نشان می‌دهیم بافرض $OI=d$ می‌خواهیم فرمولی نظیر فرمول معروف اولر در مثلث (که به صورت $R^2-d^2=2Rr$ نوشته می‌شود) بدست آوریم. می‌خواهیم ثابت کنیم در چهارضلعیهای محیطی ـ محاطی رابطه‌ای به صورت :



$$(1)\quad R^2-d^2=2\lambda Rr$$

وجود دارد که در آن λ برحسب اندازهٔ زوایای چهارضلعی با رابطهٔ :

$$(2)\quad \lambda=\frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)}-\frac{\cos\frac{1}{4}(\beta+\delta)}{\cos\frac{1}{4}(\beta-\delta)}$$

و برحسب اضلاع با فرمول :

$$(3)\quad \lambda^2=\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}$$

مشخص می‌شود.

اثبات ـ نقطهٔ تلاقی AI با دایرهٔ محیطی را P نامیده و نیز قطر POQ از این دایره را رسم می‌کنیم . اگر از I عمود IU را بر AB فرود آوریم از تشابه مثلثهای BPQ و AIU نتیجه می‌شود $\frac{PQ}{AI}=\frac{BP}{IU}$ که چون $PQ=2R$ و $IU=r$ است این رابطه به‌صورت $AI\cdot BP=2Rr$ درمی‌آید که از مقایسهٔ آن با رابطهٔ $AI\cdot IP=R^2-d^2$ داریم :

$$(4)\quad R^2-d^2=2Rr\,\frac{IP}{BP}$$

از مقایسهٔ این رابطه با فرمول (۱) کافی‌است ثابت کنیم :

$$\frac{IP}{BP}=\lambda$$

و چون IP و BP اضلاع مثلث BIP هستند باید ثابت کنیم که : $\frac{\sin IBP}{\sin BIP}=\lambda$ و اما :

$$\angle BIP=\angle BAI+\angle IBA=\frac{1}{4}(\beta+\gamma)+\frac{1}{4}(\gamma+\delta)$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)=90^\circ-\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)$$

و در مثلث BIP :

$$\angle IBP=180^\circ-(\angle BPI+\angle BIP)$$

$$=180^\circ-\left[\frac{\alpha}{2}+90^\circ-\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)\right]$$

$$=90^\circ-\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)$$

و از آنجا :

$$\frac{IP}{BP}=\frac{\sin IBP}{\sin BIP}=\frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)}=\lambda$$

با توجه به این رابطه و رابطهٔ (۴) فرمول (۱) ثابت است.

حال برای اثبات رابطهٔ (۲) گوئیم که از رابطهٔ :

$$a+c=b+d$$

نتیجه می‌شود :

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\delta}{2}$$

و یا :

$$\sin\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)=$$

$$-\sin\frac{1}{4}(\beta+\delta)\cos\frac{1}{4}(\beta-\delta)$$

که چون $\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)$ و $\frac{1}{4}(\beta+\delta)$ متمم‌هستند این رابطه به صورت :

$$\lambda = \frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)} = \frac{\cos\frac{1}{4}(\beta+\delta)}{\cos\frac{1}{4}(\beta-\delta)}$$

در می‌آید که همان رابطهٔ (۲) است .

برای اثبات رابطهٔ (۳) چنین می‌نویسیم :

$$a=2R\sin\frac{\alpha}{2}\ ,\ b=2R\sin\frac{\beta}{2}\ ,\ c=2R\sin\frac{\gamma}{2}$$

و

$$d=2R\sin\frac{\delta}{2}$$

$$ab+cd=4R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$=2R^2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

$$=4R^2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$ad+bc=4R^2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$ac+bd=4R^2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$a+c=4R\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\gamma}{4}$$

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}=\frac{\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{4}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{4}}{\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{4}}=\lambda^2$$

بد نیست خاطرنشان کنیم که مقادیر $ab+cd$ و $ad+bc$ و $ac+bd$ مفهوم هندسی ساده‌ای دارند. بدین ترتیب که مجموع حاصل‌ضربهای انتخابی از سه چهارضلعی محیطی هستند که با تبدیل a ، b ، c و d حاصل می‌شوند .

یك نتیجهٔ جالب که از روابط (۱) و (۲) حاصل می‌شود نامساوی $R\geq r\sqrt{2}$ است که تساوی موقعی برقرار است که چهارضلعی مربع باشد. این حالت خاص از یك قضیه کلی‌تر است اما اثبات فرمول سادهٔ فعلی نیز از چند نظر نافع است.

این رابطه با توجه به فرمول (۱) با رابطهٔ $\lambda\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ معادل است. با توجه به اینکه $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$ یا $\alpha+\gamma<180^\circ$ یا $\beta+\delta<180^\circ$. درحالت اول داریم:

$$\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)>\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و از آنجا :

$$\lambda=\frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)}>\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و در حالت دوم از مقدار دیگر λ در رابطهٔ (۲) استفاده کرده و به همین نتیجه می‌رسیم .

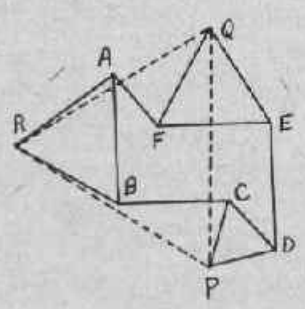
ضمناً از رابطهٔ اخیر نتیجه‌می‌شود که هنگامی λ می‌نیمم و مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است که $\alpha=\gamma=90^\circ$ که از آنجا با توجه به رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود $\beta=\delta=90^\circ$ و در نتیجه $a=c$ و $b=d$ می‌شود که با توجه به رابطهٔ $a+c=b+d$ حاصل می‌شود:

$$a=b=c=d$$

یعنی در این حالت چهارضلعی محیطی محاطی مربع می‌باشد .

دنباله از صفحهٔ ۴۴۰

مسئلهٔ ۳ـ اگر اضلاع متقابل یك شش‌ضلعی (محدب یا متقعر) مساوی و موازی باشند ثابت کنید که سه‌پاره‌خطهای مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که روی اضلاع یك در میان شش‌ضلعی بطرف خارج سطح آن ساخته می‌شوند رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع اند .

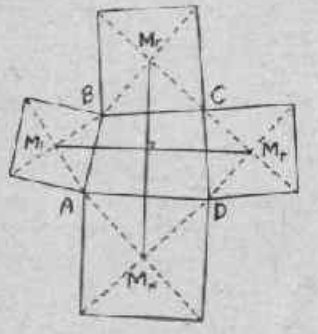


مسئلهٔ ۴ـ اگر روی اضلاع چهارضلعی محدب ABCD مربعهائی بسازیم و M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 مرکزهای این مربعها باشند ثابت کنید .

اولا ـ

$$M_1M_3=M_2M_4$$

ثانیاً ـ



$$M_1M_3\perp M_2M_4$$

تحویل رادیکال مرکب $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$

نوشتهٔ : KADIYTAN
مجلهٔ: Math. Magazine

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی
دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیر

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم به صورت :

$$x^3+px+q=0$$

عبارتند از :

$$x_1=A+B \quad و \quad x_2=A\omega+B\omega^2$$

و

$$x_3=A\omega^2+B\omega$$

که در آن :

$$\omega=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad و \quad D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \quad و \quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

اگر D مربع کامل باشد مقادیر A و B به آسانی حساب می‌شوند. اما اگر D مربع کامل نباشد چگونه باید مقادیر A و B را حساب کرد؟

ابتدا به ذکر یك مثال می‌پردازیم، می‌خواهیم:

$$\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}$$

را به رادیکالهای ساده تحویل کنیم، فرض می‌کنیم :

$$\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$$

$$\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$$

طرفین دو رابطهٔ بالا را عضو به عضو در هم ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{5184-5120}=x^2-y \qquad یا$$

$$4=x^2-y \qquad (1)$$

همچنین طرفین یکی از دو رابطه را به توان سوم می‌رسانیم:

$$72-32\sqrt{5}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$72=x^3+3xy \qquad (2)$$

از حذف y بین روابط (۱) و (۲) معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$x^3-3x-18=0$$

$$x^3-3x-27+9=0$$

$$(x^3-27)-3(x-3)=0$$

$$(x-3)(x^2+3x+6)=0$$

$$x=3 \Longrightarrow y=5$$

$$\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$$

در حالت کلی موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

I- فرض می‌کنیم که a و b و k و x و y عددهای منطق بوده و b و y مجذور کامل نباشند و داشته باشیم :

$$\sqrt[3]{a\pm k\sqrt{b}}=x\pm\sqrt{y}$$

طرفین را مکعب می‌کنیم :

$$a\pm k\sqrt{b}=x^3+3xy\pm(3x^2+y)\sqrt{y}$$

باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} y=b \\ 3x^2+y=k \end{cases} \Longrightarrow x=\sqrt{\frac{k-b}{3}}$$

مثال ۱- در تحویل رادیکال مرکب مثال قبل طبق روش بالا عمل می‌کنیم :

$$\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$$

خواهیم داشت :

$$y=5 \quad و \quad x=\sqrt{\frac{32-5}{3}}=\sqrt{9}=3$$

مثال ۲- درحل معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$x^3+3x-14=0$$

داریم :

$$D=(-\frac{14}{2})^2+(\frac{3}{3})^3=50$$

$$A=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=m+\sqrt{n}$$

$$n=2 \quad و \quad m=\sqrt{\frac{5-2}{3}}=1 \quad و \quad A=1+\sqrt{2}$$

$$B=\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=1-\sqrt{2}$$

ریشه‌های معادله عبارت خواهد شد از :

$$x_1=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$$

$$x_2=A\omega+B\omega^2=\ldots=-1+i\sqrt{6}$$

$$x_3=A\omega^2+B\omega=\ldots=-1-i\sqrt{6}$$

مثال ۳ـ در تحویل رادیکال مرکب :

$$\sqrt{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}$$

ابتدا آن را به صورت رادیکالی در می‌آوریم که فقط شامل یك جملهٔ اصم باشد و بعد به ترتیب بالا عمل می‌کنیم :

$$\sqrt{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\sqrt{50-19\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{50-19\sqrt{7}}=x-\sqrt{y}$$

$$y=7 \text{ و } x=\sqrt{\frac{19-7}{3}}=2$$

$$\sqrt{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}=-\sqrt{2}(2-\sqrt{7})$$
$$=-\sqrt{14}-2\sqrt{2}$$

مثال ۴ـ به ترتیب مثال قبل ، خواهیم داشت :

$$\sqrt{54\sqrt{3}+41\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{18+\frac{41}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$=\ldots=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

II ـ y مضربی از یك مجذور کامل باشد مثلا :

$$y=y'm^2$$

که y' مضربی از مجذور کامل نباشد. از رابطهٔ :

$$\sqrt{a\pm k\sqrt{b}}=x\pm m\sqrt{y'}$$

بنا به‌آنچه گذشت نتیجه می‌شود : $b=y'$ و از مکعب کردن طرفین خواهیم داشت:

$$a\pm k\sqrt{b}=x^3+3xm^2b\pm(3x^2m+m^3b)\sqrt{b}$$

$$a=x^3+3xm^2b$$

$$m=\sqrt{\frac{1}{3b}\left(\frac{a}{x}-x^2\right)}$$

به فرض اینکه a و b و x و m عددهای صحیح باشندمی‌توان با استفاده از نظریهٔ اعداد مقادیر مورد قبول آنها را بدست آورد .

مثال ۵ـ در مورد $\sqrt{99-70\sqrt{2}}$ طبق دستور بالا

اولا باید $\frac{99}{x}$ عدد صحیح باشد یعنی x برابر باشد با یکی از عددهای ۱ ، ۳ ، ۹ ، ۱۱ ، ۳۳ و ۹۹ .

ثانیاً باید $\frac{99}{x}-x^2$ مضربی از ۶ یعنی $3b=6$ باشد. با آزمایش هریك از مقسوم‌علیه‌های ۹۹ مقدار قابل قبول برای x عبارت خواهد شد از $x=3$ بنابراین $m=2$ بدست‌آمده و داریم :

$$\sqrt{99-70\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$

تبصره ـ می‌توانیم $70\sqrt{2}$ را بصورت $35\sqrt{8}$ نوشته مانند مورد I عمل کنیم ، یعنی :

$$y=8 \text{ و } x=\sqrt{\frac{35-8}{3}}=3$$

$$\sqrt{99-70\sqrt{2}}=3-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$$

III ـ بطور کلی فرض می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\sqrt{h\sqrt{a}\pm k\sqrt{b}}=l\sqrt{x}\pm m\sqrt{y}$$

که a و b و x و y عددهای منطق باشند. اگر x و y هیچیك مضربی از یك مجذور کامل نباشند $x=a$ و $y=b$ بوده‌واز مکعب‌کردن طرفین رابطه نتیجه خواهد شد :

$$h=al^2+3blm^2$$

$$m=\sqrt{\frac{1}{3b}\left(\frac{h}{l}-al^2\right)}$$

اگر مقادیر مورد نظر عددهای صحیح‌باشند بااستفاده ازنظریهٔ اعداد می‌توان آنهارا تعیین‌کرد.

مثال ۶ـ در مورد $\sqrt{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}$ باید l مقسوم‌علیهی از ۵۴ اختیار شود بطوری که $\frac{54}{l}-54l^2$ مضربی از $3\times5=15$ باشد . $l=2$ در شرایط مزبور صدق‌می‌کند و خواهیم داشت :

$$\sqrt{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

تبصره ـ اگر a مضرب b باشد برای اینکه m عدد صحیح باشد باید h نیزمضرب b باشد یعنی :

$$h=h_1b \text{ و } a=a_1b$$

و در این صورت خواهیم داشت :

$$m=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{l}-a_1l^2\right)}$$

مثال ـ درمورد $\sqrt{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}$ داریم

$$a_1=14\overset{\circ}{.}2=7 \text{ و } h_1=38\overset{\circ}{.}2=19$$

مقسوم‌علیه‌های ۱۹ عبارتند از ۱ و ۱۹ . $l=1$ قابل قبول است و در ازاء آن $m=2$ بدست آمده داریم :

$$\sqrt{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}=\sqrt{14}-2\sqrt{2}$$

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

بخش سوم

فصل سوم ـ چگونگی اثبات یك رابطهٔ متری غیر مشخص

حل این نوع مسائل که قسمت عمدهٔ مسائل محاسبه‌ای را تشکیل می‌دهد منوط به شناختن روابط متری کلاسیك واستفاده از محاسبات جبری می‌باشد.

بعضی از روابط که اطلاع بر آنها در حل این نوع مسائل لازم است از این قرار می‌باشد:

۱) روابط بین اندازه‌های اجزاء یك مثلث قائم‌الزاویه و قضیهٔ فیثاغورس .

۲) روابط بین اندازه‌های اضلاع یك مثلث غیرمشخص: مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حاده یا زاویهٔ منفرجه .

مجموع مربعات دوضلع.

تفاضل مربعات دوضلع .

حاصل‌ضرب دوضلع .

طول قطعاتی که توسط نیمساز یا دایره‌های محاطی روی اضلاع جدا می‌شود .

۳) روابط متری در دایره، مثلا رابطهٔ مربوط به قوت نقطهٔ نسبت به دایره .

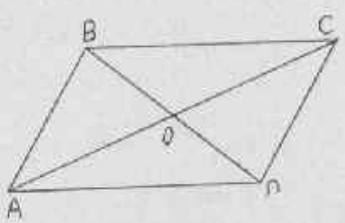
برای حل مسائل از نوع فوق دو روش در زیر ارائه می‌شود . این دو روش مشابه با روش اثبات اتحادها در جبر می‌باشد .

روش یکم ـ محاسبهٔ مستقیم اجزاء رابطه

با استفاده از روابط متری کلاسیك مقدار هر یك از جمله های یکی از طرفین را بدست آورده و عبارت حاصل را ساده وعمل می‌کنیم تاعبارت‌طرف دوم رابطه بدست آید.

مسئلهٔ ۵۳ـ

ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات‌چهار ضلع برابر است با مجموع مربعات دوقطر .



فرض: $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است .

حکم: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$

اثبات ـ قطرهای AC و BD در یك نقطهٔ O یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین BO میانهٔ مثلث BAC و DO میانهٔ مثلث DAC است و در هر یك از این مثلثها داریم :

$$AB^2+BC^2=2BO^2+\frac{AC^2}{2}$$

$$AD^2+CD^2=2DO^2+\frac{AC^2}{2}$$

ازجمع نظیربه‌نظیر طرفین دورابطهٔ بالا و با توجه به اینکه

$$2BO^2+2DO^2-\frac{BD^2}{2}+\frac{BD^2}{2}=BD^2$$

رابطهٔ مطلوب محقق می‌شود.

تمرینات

۲۷۳ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC به قاعدهٔ BC عمود CD را بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع مربعات سه‌ضلع مثلث برابر است با :

$$BD^2+2DA^2+2CD^2$$

۲۷۴ـ در مسئلهٔ قبل، وقتی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد رابطهٔ مزبور به چه صورت در می‌آید؟

۲۷۵ـ مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است. از نقطهٔ D وسط ضلع AB عمود DE را بر وتر رسم می‌کنیم ثابت کنید که :

$$EC^2-EB^2=AC^2$$

۲۷۶ـ ثابت کنید که در هر مثلث مجموع مربعات سه میانه برابر است با $\frac{3}{4}$ مجموع مربعات سه‌ضلع

۲۷۷ـ دو دایرهٔ متساوی O و O' عمود بر یکدیگر مفروض‌اند. از A یکی از نقاط تقاطع آنها قاطع MAN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که :

$$MA^2+NA^2=2OO'^2$$

۲۷۸ـ از نقطهٔ A واقع در داخل دایرهٔ O وتر دلخواه BAC را رسم می‌کنیم . ثابت کنید که :

$$AB\cdot AC+AO^2=OC^2$$

۲۷۹ـ ثابت کنید که درهر چهارضلعی مجموع مربعات دو قطر برابر است با دو برابر مجموع مربعات قطعه خطهایی که اوساط ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کنند .

۲۸۰ـ ثابت کنید که درهر چهارضلعی مجموع مربعات ضلعها برابر است با مجموع مربعات قطرها به اضافهٔ چهار برابر مربع قطعه خطی که اوساط دو قطر را به‌هم وصل می‌کند.

۲۸۱ـ مسئلهٔ قبل را در حالتی حل کنید که چهارضلعی مفروض ذوزنقه باشد .

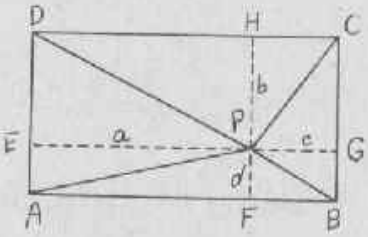
۲۸۲ـ ارتفاعهای AD و BE از مثلث ABC یکدیگر را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید که :

$$BE\cdot BF+BC\cdot DC=BC^2$$

روش دوم . تحقیق رابطه

هر یك از جمله‌های رابطه را بر حسب یك طول بدست آورده و محقق می‌کنیم که عبارتهای طرفین باهم متحدهستند.

مسئلهٔ ۵۳ـ ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل هر نقطهٔ واقع درداخل مستطیل از دو رأس مقابل برابراست با مجموع مربعات فواصل آن نقطه از دو رأس دیگر .



فرض: مربع مستطیل ABCD و نقطهٔ P واقع در داخل آن.

حکم: $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$

اثبات ـ از نقطهٔ P عمودهایی بر چهار ضلع رسم کرده و طول این عمودهارا a ، b ، c و d فرض می‌کنیم داریم:

$$PE=AF=DH=a \quad و \quad PG=BF=CH=c$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PAF ، PCH ، PBF و PDH به ترتیب می‌توانیم بنویسیم :

$$PA^2=a^2+d^2 \quad و \quad PC^2=b^2+c^2$$

$$PB^2=c^2+d^2 \quad و \quad PD^2=a^2+b^2$$

از جمع طرفین رابطه‌های بالا به ترتیب زیر خواهیم داشت:

$$PA^2+PC^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$PB^2+PD^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

و نتیجه می‌شود که :

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

تمرینات

۲۸۳ـ ثابت کنید که اگر دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه باشند، حاصل‌ضرب وترها برابراست با مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای متناظر .

۲۸۴ـ از نقطهٔ O واقع در صفحهٔ مثلث ABC عمودهای OF و OG و OH را بر AB و BC و AC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که :

$$AF^2+BG^2+CH^2=BF^2+CG^2+AH^2$$

۲۸۵ـ از نقطهٔ P واقع بر قطر AB از نیم‌دایرهٔ O نیم‌وتر OG را عمود بر قطر اخراج می‌کنیم و همچنین P را به نقطهٔ H انتهای شعاع عمود بر AB وصل می‌کنیم. ثابت

کنید که :

$$۲PC^۲+۲PH^۲=AB^۲$$

۲۸۶ـ در دایرهٔ O یك وتر AC چنان رسم شده است که قطر MN را در نقطهٔ B قطع کرده و با آن زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد ثابت کنید که :

$$۲AB^۲+۲BC^۲=MN^۲$$

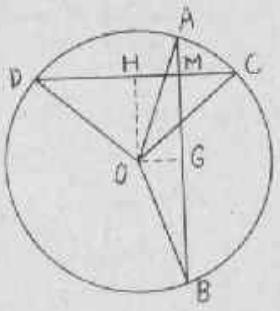
۲۸۷ـ درمربع ABCD ازرأس A خطی رسم می‌کنیم که BC را در M و CD را در I قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{AM^۲}+\frac{۱}{AI^۲}=\frac{۲}{AC^۲}$$

***

حالت خاص ـ دربعضی از مسائل، به جای آنکه اثبات یك رابطهٔ داده شده مورد نظر باشد، می‌خواهند تا ثابت شود که یك عبارت معین برابر با مقدار ثابت باقی می‌ماند هرچند که بعضی از اجزاء شکل مربوط به آن رابطه از لحاظ وضع یا از لحاظ طول متغیر باشد . در این حال هم روشهای سابق قابل استفاده است اما چون مقدار ثابت معلوم نیست روش دوم معمولا قابل اعمال نیست. در این حالت می‌توان با رسم خطوط تازه وضع خاصی از اجزاء مورد نظر را در نظر گرفته مقدار ثابت را معلوم ساخت و بعد مانند روشهای قبلی عمل کرد .

مسئلهٔ ۵۴ـ دووتر AB و CD از دایرهٔ O در نقطهٔ M بریکدیگر عمودند ثابت کنید که هرگاه نقطهٔ M با امتداد وترها تغییر کند مجموع مربعات چهار قطعه‌ای که توسط M روی وترها جدا می‌شود برابر مقدار ثابت باقی می‌ماند .



فرض : وتر AB بر وتر CD در M عمود است.

حکم: ثابت $= MA^۲+MB^۲+MC^۲+MD^۲$

اثبات ـ از O مرکز دایره به طرفین وترها وصل کرده و عمودهای OH و OG را بر CD و AB رسم می‌کنیم . مطابق با شکل داریم :

$$MA=AG-MG \text{ و } MC=CH-MH$$
$$MB=BG+MG=AG+MG$$
$$MD=DH+MH=CH+MH$$
$$MA^۲=AG^۲+MG^۲-۲AG.MG$$
$$MB^۲=AG^۲+MG^۲+۲AG.MG$$
$$MC^۲=CH^۲+MH^۲-۲CH.MH$$
$$MD^۲=CH^۲+MH^۲+۲CH.MH$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین تساویهای فوق خواهیم داشت:

$$MA^۲+MB^۲+MC^۲+MD^۲=$$
$$-۲AG^۲+۲MG^۲+۲CH^۲+۲MH^۲ \quad (۱)$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAG و OCH داریم :

$$AG^۲=OA^۲-OG^۲ \text{ و } CH^۲=OC^۲-OH^۲$$

چون MGOH مستطیل است داریم :

$$MG=OH \text{ و } MH=OG$$

و رابطهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید :

$$MA^۲+MB^۲+MC^۲+MD^۲$$
$$=۲(OA^۲-MH^۲)+۲MG^۲+۲(OC^۲-MG^۲)+$$
$$+۲MH^۲=۲OA^۲+۲OC^۲=۴R^۲$$

که R شعاع دایره مقدار ثابت می‌باشد.

تمرینات

۲۸۸ـ مسئلهٔ ۵۳ را با استفاده از تمرین ۵۹ حل کنید راه حل بسیار ساده خواهد بود.

۲۸۹ـ مسئلهٔ ۵۴ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که:

$$AC^۲+CB^۲+BD^۲+DA^۲=\text{ثابت}$$

۲۹۰ـ در مسئلهٔ ۵۴ اگر M ثابت مانده ووترها حول آن بچرخند ثابت کنید که $AB^۲+CD^۲$ برابر مقدار ثابت باقی می‌ماند .

۲۹۱ـ دودایرهٔ متحدالمرکز را در نظر می‌گیریم، از نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ کوچکتر وتر دلخواه PC را در دایرهٔ کوچکتر ووتر AB از دایرهٔ بزرگتر را عمود بر PC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که وقتی وترها حول P بچرخند اما همواره عمودبر هم باقی بمانند دو مجموع زیر برابر مقدار ثابت باقی می‌مانند .

$$PA^۲+PB^۲+PC^۲=\text{ثابت}$$
$$AC^۲+CB^۲+AB^۲=\text{ثابت}$$

۲۹۲ـ دودایرهٔ متحدالمرکز مفروض‌اند. نقطهٔ متغیر واقع بر یکی از آنها را به طرفین قطر AB از دیگری وصل می‌کنیم. ثابت کنید هرگاه M و AB تغییر کنند مجموع:

$$MA^۲+MB^۲$$

برابر مقدار ثابت باقی می‌ماند.

۲۹۳ـ دایرهٔ O و نقطهٔ A در خارج آن مفروض‌است قاطع متغیر ABC را نسبت به دایره رسم می‌کنیم ثابت کنید

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics Magazine. Volume 40, Number 4)

QUICKIES

30- Show that the inequality:

$$\left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| < a^2, (a \neq 0)$$

can be solved without including the condition $q(x)>0$ (or $(q(x)<0)$ when determining the solution interval(s).

31- Prove or disprove: If $\lim_{x \to x_0} f(x)$ exists for each x in [a, b], then $\int_a^b f(x)dx$ exists.

32- How many primes p exist such that:

p, p+2d, and p+4d

are all primes where d is not divisible by 3?

33- Show that if A is an n square matrix and each row (column) sums to c, then c is a characteristic root of A.

(Answers On page 472)

که AB·AC برابر مقدار ثابت است.

۲۹۴- نقطهٔ ثابت P را روی قطر AC از لوزی ABCD در نظر می‌گیریم. ثابت کنید هر گاه لوزی تغییر شکل بدهد بقسمی که طول ضلعهای آن برابر مقدار ثابت باقی بمانند و نقطه‌های B و D روی دایرهٔ به مرکز P تغییر مکان دهند حاصلضرب PA·PC برابر مقدار ثابت باقی می‌ماند.

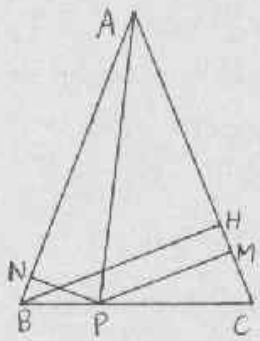
استفاده از مساحات

روش خاص اثبات بعضی روابط متری بر مبنای مقایسهٔ مساحتها قرار دارد. با توجه به‌اینکه مساحت یك شکل برابر است با مجموع مساحتهای قسمتهای آن، رابطه‌ای بدست می‌آید که از روی آن می‌توان رابطهٔ مفروض را نتیجه گرفت.

مسئلهٔ ۵۵ - از نقطهٔ P واقع بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC عمودهای PM و PN را بر AC و AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

PM+PN

برابراست با ارتفاع وارد بر یکی از دوساق:



فرض: $AB=AC$, $PM \perp AC$ و $PN \perp AB$, $BH \perp AC$

حکم: $PM+PN=BH$

اثبات - مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع مساحتهای دومثلث ABP و ACP بنابراین:

$$\frac{1}{2}AB \cdot PN + \frac{1}{2}AC \cdot PM = \frac{1}{2}AC \cdot BH$$

و نتیجه می‌شود:

$$PN+PM=BH$$

تمرینات

۲۹۵- ثابت کنید که مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابراست با طول ارتفاع مثلث.

۲۹۶- ثابت کنید که مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع در داخل n ضلعی منتظم از اضلاع برابر است با n برابر طول سهم n ضلعی:

۲۹۷- اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای AA'، BB' و CC' از مثلث ABC باشد ثابت کنید که:

$$\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}=1$$

تصاعد «عددی ـ هندسی»

Arithmetico–geometrical progression

ترجمهٔ : قوام نحوی

رشتهٔ :

$$a \text{ و } (a+d)x \text{ و } (a+2d)x^2 \text{ و } \ldots \text{ و } [a+(n-1)d]x^{n-1}$$

که در آن ضرایب a و $a+d$ و $a+2d$ و ... تصاعدعددی و جمله‌های 1 و x و x^2 و... تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند تصاعد «عددی ـ هندسی» نامیده می‌شود. مثل رشته‌های :

$$1 \text{ و } 3\times 2 \text{ و } 9\times 3 \text{ و } 27\times 4 \text{ و } \ldots \text{ و } n\times 3^{n-1}$$

$$1 \text{ و } 5x \text{ و } 13x^2 \text{ و } 17x^3 \text{ و } \ldots \text{ و } (1+4n)x^{n-1}$$

محاسبهٔ مجموع n جمله از تصاعد عددی ـ هندسی

مجموع n جملهٔ اول را به S_n نشان می‌دهیم :

$$S_n = a+(a+d)x+(a+2d)x^2+\cdots+[a+(n-1)d]x^{n-1}$$

طرفین را عضو به عضو در x ضرب می‌کنیم :

$$xS_n = ax+(a+d)x^2+(a+2d)x^3+\cdots+[a+(n-1)d]x^n$$

طرفین رابطهٔ دوم را از طرفین رابطهٔ اول عضو به عضو کم می‌کنیم ، نتیجه‌می‌شود:

$$(1-x)S_n = a+dx+dx^2+\cdots+dx^{n-1}-[a+(n-1)d]x^n$$

$$= a-[a+(n-1)d]x^n+dx(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2}) =$$

$$= a-[a+(n-1)d]x^n+\frac{dx(1-x^{n-1})}{1-x}$$

$$S_n = \frac{a-[a+(n-1)d]x^n}{1-x}+\frac{dx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$$

مثال ـ محاسبهٔ مجموع n جملهٔ :

$$S_n = 1+2\times 3+3\times 3^2+4\times 3^3+\cdots+n\times 3^{n-1}$$

داریم :

$$a=1 \quad , \quad d=1 \quad , \quad x=3$$

$$S_n = \frac{1-(1+n-1)3^n}{1-3}+\frac{3(1-3^{n-1})}{(1-3)^2}$$

$$= \frac{1-n\times 3^n}{-2}+\frac{3(1-3^{n-1})}{4}$$

$$= \frac{2n\times 3^n-3^n-2+3}{4} = \frac{1}{4}[3^n(2n-1)+1]$$



نمونه‌های جدید و آموزنده

مسائل حساب استدلالی

جهت استفادهٔ داوطلبان کنکور وسال ششم ریاضی

تألیف : جواد حریرچی

از انتشارات: کتابفروشی تهران

چاپ دوم ـ بها : ۴۵ ریال

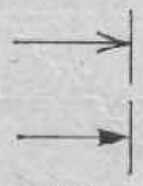
تنظیم از مهندس علی حاج شیرمحمدی

اندازه نویسی

بعداز ترسیم تصاویر مختلف یك جسم لازم است اندازهٔ قسمتهای مختلف جسم به‌صورتی روشن و قابل درك درروی نقشه نشان داده شوند. بدیهی است درصورتی که ابعاد و قسمتهای مختلف یك جسم در نقشه فاقد اندازه باشد استفاده عملی از آن نقشه غیر ممکن بوده و در نتیجه آن نقشه از نظر فنی بدون ارزش خواهد بود. برای نشان دادن اندازه‌ها درروی نقشه از علامات و قوانین مخصوصی استفاده می‌شود. با استفاده از این علامات و پیروی از دستورات مربوطه می‌توان نقشه را طوری آماده کرد که تجسم و درك آن برای عموم افرادی که با رسم فنی آشنائی دارند به‌راحتی امکان‌پذیر باشد.

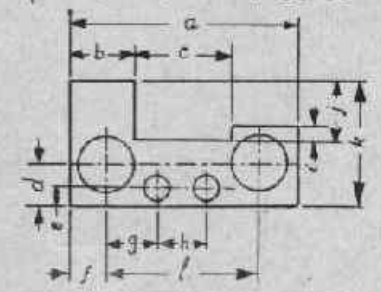
از جمله علاماتی که‌دررسم‌فنی برای اندازه نویسی از آنها استفاده می‌شود خطوط اندازه (دیمانسیون) و خطوط امتداد می‌باشد.

خطوط اندازه عبارت از پاره خطهائی هستند که بطور معمول موازی با امتداد بعد مورد نظر بین دوخط امتداد وعمود برآنها رسم می‌شوند. (شکل۱) ، در دو انتهای خطوط اندازه باید فلش یا سهمهائی رسم نمود. سهمهای خطوط اندازه را می‌توان به دوصورت مطابق آنچه که در شکل ۱ نشان داده شده رسم کرد. سهمهای پر (نوع A) بیشتر معمول است. این سهمها کاملا به شکل مثلث متساوی‌الساقین بوده و در دوطرف هیچگونه انحنائی ندارند.



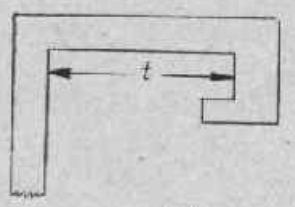
(۱)

اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث تقریباً ثلث‌طول دوضلع‌می‌باشد. مسلما کلیهٔ سهمهای روی یك نقشه باید از یك نوع بوده و تاحد ممکن‌یکنواخت و یك‌اندازه رسم شوند. ولی‌درصورتی که بعدی آن‌اندازه کوتاه باشد که جای کافی برای رسم سهمی یا اندازهٔ‌معمول روی‌آن نباشد می‌توان در انتهای خطوط‌اندازه سهمهای کوتاهتری رسم نمود. اندازهٔ سهمها نسبت به اندازهٔ کلی‌نقشه‌ممکن‌است تغییر کند، ولی‌معمولا برای نقشه‌های نسبتا کوچك طول‌سهم را درحدود ۳میلیمتر و برای نقشه‌های‌بزرگ ۴/۵میلیمتر انتخاب می کنندباید دقت کرد که انتهای سهمها کاملا در روی‌خط امتدادختم شود. سهمهادامعمولا بادست‌آزاد (بدون استفاده از خط‌کش و غیره) رسم می‌کنند. در رسم‌آنها بایددقت کافی بعمل آورد چون در غیر این‌صورت شکل ظاهری رسم‌به صورت نامطلوبی در می‌آید.



(۲)

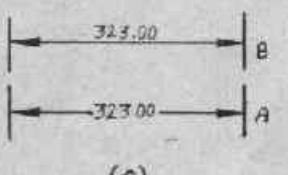
خطوط امتداد عبارت ازپاره خط‌های کوتاه و نازکی هستند که در طرفین بعدی‌که لازم است اندازه گذاری شود عمود بر امتداد آن بعد رسم می‌شوند. همانطورکه در شکل ۲ مشاهده می کنید خطوط امتداد برای اندازه نویسی هر بعدی که رسم‌شده‌است‌بعد مربوطه‌را قطع‌ننموده و نسبت به آن در فاصلهٔ کمی قرار دارند. خطوط امتداد باید به طریقی رسم شوند که تقریبا ۲ تا ۳ میلیمتر از انتهای سهم آخرین خط اندازه امتداد داشته باشند. در بعضی از موارد ممکن است از خط تقارن به عنوان خط امتداد استفاده‌نمود، (اندازه‌های g وh و d وغیره در شکل۲) همچنین ممکن است



(۳)

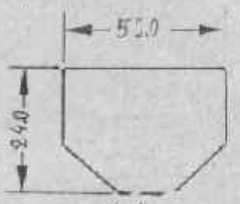
در بعضی حالات خطوط اندازه‌را بین دو خط اصلی جسم‌قرار داد. (شکل ۳)

ارقام را باید در وسط خطوط اندازه (معمولا باحروف لاتین) نوشت. برای این منظور ممکن است جای لازم برای نوشتن ارقام را بین دوقسمت خط اندازه باقی گذاشت (شکل ۴-A). همچنین‌ممکن است ارقام را در بالای خطوط اندازه نوشت (شکل ۴-B).



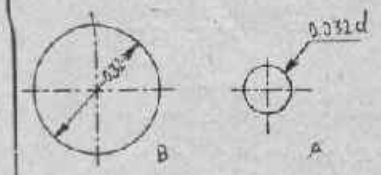
(۴)

در صورتی که مطابق شکل ۵ ، (ویا اندازه‌های e و d و غیره در شکل ۲) لازم باشد ارقام را در جهت عمودی بنویسیم باید ارقام را طوری نوشت که اگر صفحهٔ کاغذ را ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران بدهیم اندازهٔ مربوطه درست مقابل چشم قرار گیرد .



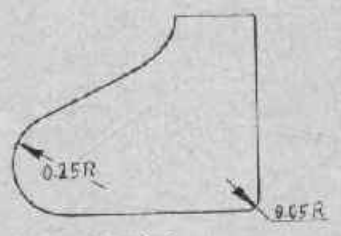
(۵)

در صورتی که بعضی از ابعاد آنقدر کوتاه باشند که جادادن سهمها و یا ارقام بین دو خط امتداد مربوطه ممکن نباشد می‌توان یکی از روشهائی



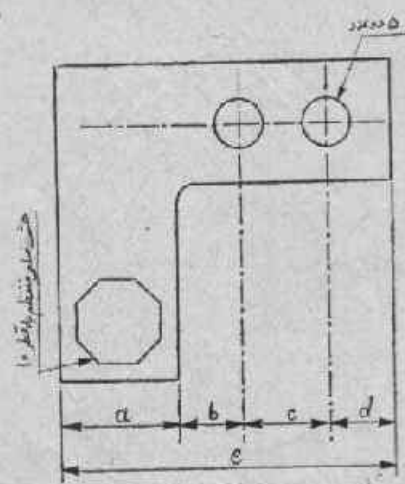
(۶)

که در نوشتن اندازه‌های e و f و i در شکل ۲ بکار رفته است بکار برد. برای نشان دادن اندازهٔ دوایر در صورتی که دایره بطور کامل رسم شده باشد معمولا اندازهٔ قطر دایره را مطابق شکل (۶-A و B) اندازه نویسی می‌کنند و درحالتی که فقط قوسی از دایره رسم شده باشد نوشتن اندازهٔ شعاع بیشتر معمول است (شکل ۷).



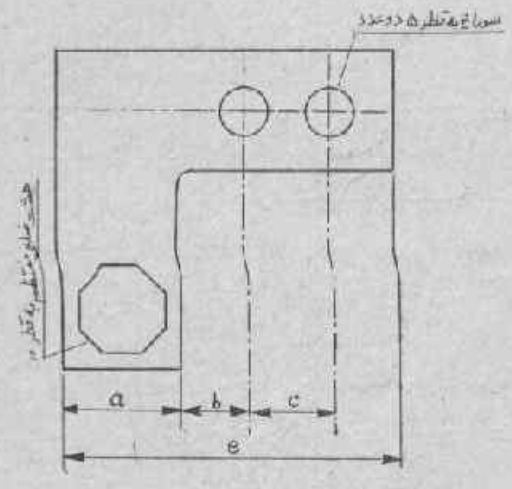
(۷)

نکتهٔ دیگری که باید در اندازه نویسی حتما مورد دقت قرار گیرد آنست که باید سعی نمود تا خطوط اندازهٔ اضافی و غیرلازم در روی رسم موجود نباشد مثلا شکل ۸



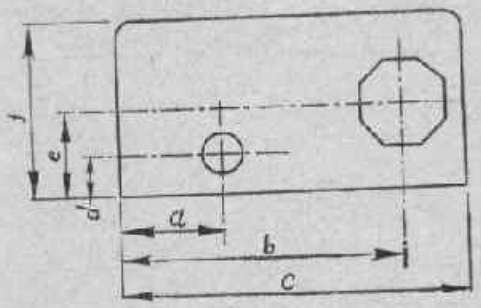
(۸)

را مورد نظر قرار می‌دهیم . و در این شکل یکی از اندازه‌ها (مثلا d) درروی نقشه اضافی نوشته شده چون باداشتن اندازه‌های a و b و c ، d و e قابل محاسبه است* . بنابراین



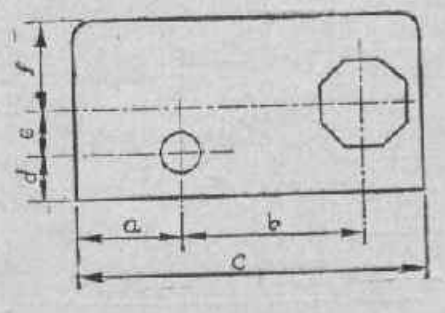
(۹)

بهتر است تصویر فوق را به صورت شکل ۹ اندازه نویسی نمود. اندازه ها را ممکن است نسبت به یك مبدأ ثابت و یا نسبت به یکدیگر نوشت. در شکل ۱۰ اندازه‌ها نسبت به ضلع چپ



(۱۰)

وضلع پائینی تصویر نوشته شده‌اند در صورتی که ممکن بود



(۱۱)

اندازه‌ها را مطابق شکل ۱۱ نسبت به یکدیگر نوشت. نوع اول (شکل ۱۰) از آنجهت که اگر در نوشتن یکی از اندازه‌ها

* دربعضی موارد برای آنکه اطمینان حاصل شود که در اندازه نویسی اشتباهی رخ نداده ممکن است یك اندازهٔ اضافی نیز در روی رسم نوشت درچنین صورتی بهتر است در کنار این اندازه عبارت «REF» که علامت اختصاری کلمهٔ: «REFERENCE» می‌باشد اضافه نمود (استاندارد امریکا)

اشتباهی رخ دهد در سایر اندازه‌ها تأثیری نخواهد داشت مطمئن تر به نظر می‌رسد ولی درعین حال همانطور که‌ملاحظه می‌کنید این نوع اندازه‌نویسی فضای بیشتری را اشغال می‌کند.

یادداشت ها ـ در بسیاری ازموارد لازم است درروی تصاویر توضیحات مختصری را نوشت. در چنین حالتی مطابق آنچه که در شکلهای ۸ و ۹ نشان داده شده از علامات فلش که معمولا تحت زاویهٔ ۶۰ درجه رسم شده و انتهای آنها به‌یك قطعه خط افقی ختم می‌شود استفاده می‌کنند. نوشته‌ها بایدهمیشه در امتداد افقی باشند.

اصولی را که باید در نوشتن اندازه ها رعـایت نمود

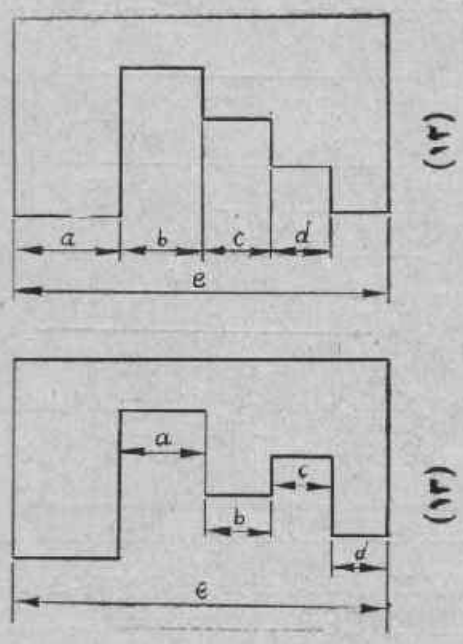
اندازه‌هارا باید تا حد امکان طوری نوشت که بین دو تصویر قرارگیرند (دربالای تصویر افقی، پائین و طرف‌راست تصویر قائم و طرف چپ تصویر نیمرخ).

ـ تا آنجا که ممکن است باید خطوط اندازه درخارج تصاویر رسم‌شوند.

ـ ابعادی که در یك یا چند تصویر نمایان می‌شوند باید فقط در یکی از تصاویر اندازه نویسی شوند.

ـ فاصلهٔ خطوط اندازهٔ نسبت به بعد مربوطه در حدود ۱۰ تا ۱۲ میلیمتر می‌باشد. در صورتی‌که درجائی به چندخط اندازه به موازات یکدیگر رسم شوند باید فاصلهٔ اولیـن خط اندازه نسبت به بعد مربوطه در حدود ۱۰ تا ۱۲ میلیمتر بوده و فاصلهٔ سایر خطوط اندازه نیز حداقل ۱۰ میلیمتر باشد.

ـ اندازه‌هارا باید روی تصاویری گذاشت که ابعاددرآن تصاویر دارای طول حقیقی می‌باشند (چنین ابعادی با صفحهٔ تصویر مربوطه موازی هستند).



(۱۲) (۱۳)

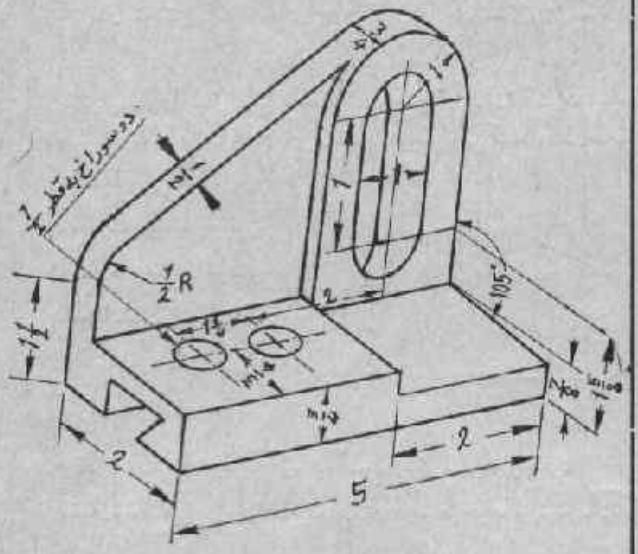
اگر خطوط اندازه مطابق شکل ۱۲ پشت سر هم قرار می‌گیرند بهتر است که آنها را در امتداد یکدیگر قرار داد ولی‌اگرانجام این کارمشکل باشداندازه‌نویسی به صورت شکل ۱۳ نیز قابل قبول است.

ـ خطوط اندازهٔ بزرگتر باید همیشه در خارج ازخطوط اندازه کوتاهتر قرارگیرند. در غیر این‌صورت خطوط‌اندازهٔ بلندتر خطوط امتداد اندازه‌های کوچکتررا قطع نموده وباعث ایجاد اشتباه می‌شوند.

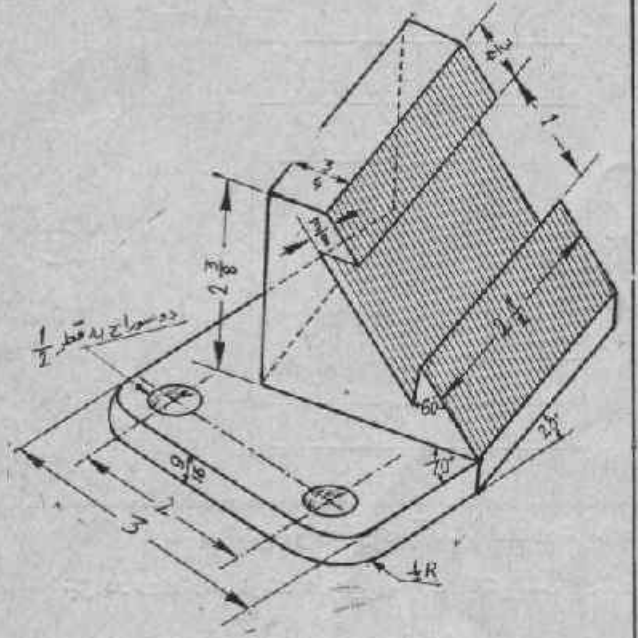
ـ هرگز خطوطی مثل خط تقارن و خطوط اصلی جسم نباید به عنوان خط اندازه مورد استفاده قرارگیرد.

تمرینات

از تصاویر افقی، قائم و نیمرخ چپ اشکال ۱۴ و۱۵ را رسم نموده و اندازه‌های مربوطه‌را روی تصاویر نشان دهید.



(۱۴)



(۱۵)

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات آخر سال کلاسهای چهارم و پنجم دبیرستانها

(خرداد ۱۳۴۶)

کلاس چهارم طبیعی

شیمی

دبیرستان بزرگ مجرد کازرون

دبیر: جواهری

۱- برای خنثی کردن مخلوطی از سولفات سدیم وجوهر گوگرد به جرم ۱ گرم ۲۰cc محلول سود سوزآور مصرف می‌شود. فرمول معادلهٔ واکنش انجام گرفته را نوشته ومقدار هریك از اجزاء مخلوط راحساب کنید.

۲- فاکتور محلول ۳/۶۵ گرم در لیتر جوهرنمك، ۳۶/۵ گرم در لیتر اسید کلریدریك، ۹۸ گرم در لیترجوهر گوگرد و ۸ گرم در لیتر سود سوزآور را حساب کنید.

۳- حجم گاز حاصل از ترکیب ۰/۶۵ گرم روی را با جوهر گوگرد رقیق در دمای ۲۷/۳ درجهٔ سانتیگراد وفشار یك اتمسفر حساب کنید.

۴- ۸ گرم اکسید مس پس از ترکیب با اسیدسولفوریك چند گرم سولفات مس متبلور تولید می‌کند؟

۵- ۱۰cc گاز نیتروژن با چه حجم گاز ئیدرژن در شرائط متعارفی ترکیب می‌شود و حجم گاز حاصل در همین شرائط چقدر است؟

دبیرستان شاپور اسکو

دبیر: تقی‌زاده ماکوئی - فرستنده: علائی

۱- ۰/۶۴ گرم مس خالص با اسید سولفوریك غلیظ حرارت می‌دهیم معین کنید:

الف - اگر گاز متصاعد شده را از محلول پرمنگنات $\frac{1}{25}$ ملکول گرم دولیترعبور دهیم چه حجم آن را بی رنگ می‌کند.

ب - همان حجم پرمنگنات در مجاورت اسیدسولفوریك با چه حجم آب اکسیژنهٔ ۲۰ حجم بی رنگ می‌شود.

ج- نمك تولید شده فعل و انفعال اول را متبلورمی‌کنیم ۲/۵ گرم نمك متبلور بدست می‌آید تعداد ملکولهای آب متبلور آن را حساب کنید.

داوطلبان متفرقهٔ کازرون

طراح: جواهری

۱- الف - جسمی شامل ۹۲/۳ درصد کربن و ۷/۷ درصد هیدرژن است. ساده‌ترین فرمول این جسم را بیابید.

ب- جسمی به فرمول $(CH)_n$ و جرم ملکولی ۷۸ است n را بیابید.

۲- جرم اتمی کلر معمولی را ۳۵/۵ فرض می‌کنند. اگر این کلر مخلوطی از ۲۵٪ ایزوتوپ ۳۷ باشد. درصد ایزوتوپ ۳۵ را پیدا کنید.

۳- محلولی است از روی و اکسید روی که چون در جوهر گوگرد رقیق حل شود حجم گاز حاصل در شرائط متعارفی ۰/۲۲۴ لیتر خواهدبود. پیدا کنید مقدار روی را در مخلوط. در ضمن فرمول معادلهٔ واکنشهای انجام یافته را بنویسید.

۴- چه حجم هوا در شرائط متعارفی برای تشویهٔ کامل ۱۶۰ گرم زغال ۷۵٪ خالص لازم است.

۵- ۱۰cc محلول سود سوزآور یك ملکول گرم در لیتر چه حجم محلول نرمال جوهرنمك را خنثی می‌کند.

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان اسرار سبزوار

دبیر: فامیلی - فرستنده: محمد خسروجردی

۱- رادیکال مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ مفروض است. چه

شرطی بین A و B برقرار باشد تا بتوانیم دوعدد منطق x و y را چنان تعیین کنیم که داشته باشیم :

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

با استفاده از رابطهٔ مطلوب مقدار رادیکال مرکب زیر را بیابید:

$$S=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

۲ـ عبارت $x^4+2x^3+6x^2+5x+19$ را برحسب قوای نزولی x^2+x+1 مرتب کنید .

۳ـ در کثیرالجملهٔ زیر مقدار k را چنان پیدا کنید که عبارت $x^2+y^2+z^3+2kxyz$ بر $x+y+z$ بخش‌پذیر باشد.

۴ـ اگر $F(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و $F(z)=F(x)$ مقدار z را برحسب y تعیین کنید .

دبیرستان الهی

فرستنده: حسین یعقوب‌پور ، مجید خوشنودی

۱ـ نقطه‌ای مانند M را روی ارتفاع AH از مثلث ABC چنان پیدا کنید که اگر از آن نقطه خطی به موازات BC رسم نمائیم تا AC و AB را به ترتیب در K و D قطع کند و از K و D عمودهائی بر BC وارد کنیم و پای آنها را F و E بنامیم. محیط مستطیل DEFK برابر ۱۸ سانتیمتر باشد درصورتی که طول ارتفاع AH برابر ۶ سانتیمتر و اندازهٔ BC مساوی ۱۵ سانتیمتر است.

۲ـ اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد حاصل عبارت $\frac{ff(x)-1}{fff(x)+1}$ را پیدا کنید.

۳ـ مطلوبست محاسبهٔ $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2$ بدون اینکه آنها را به‌توان برسانید :

دبیرستان امیر کبیر یزد

دبیر: علی امینیان ـ فرستنده: جلیل روحانی‌فرد

۱ـ مطلوبست محاسبهٔ S و P از روابط زیر :

$$S=(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{37+20\sqrt{3}})(2\sqrt{3}-4)$$

$$P=(7-4\sqrt{3})(\sqrt{7+4\sqrt{3}})+$$
$$+(7+4\sqrt{3})(\sqrt{7-4\sqrt{3}})$$

۲ـ ثابت کنید که اگر معادلهٔ :

$$ax^2+2bx+c=0$$

دارای دوریشهٔ موهومی باشد معادلهٔ :

$$a^2x^2+2abx-ac+2b^2=0$$

دارای ریشه‌های حقیقی است.

۳ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}x-y-xy=29\\xy(y-x)=180\end{cases}$$

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر : گلستانی ـ فرستنده : حسینی علمداری

۱ـ مخرج کسر $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

۲ـ دستگاه زیر را حل و بحث کنید .

$$\begin{cases}x+my=3m\\mx-y=m^2-2\end{cases}$$

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: بهمن ازگمی ـ فرستنده: فقیهی مقدم ، جواددربندی، حسن امیدی

۱ـ عبارت زیر را به دوعامل ضرب تجزیه کنید :

$$x^4-6x^3+16x^2-21x+12$$

۲ـ به فرض اینکه $a\neq b$ باشد ثابت کنید :

$$a^8+b^8>a^2b^2(a^4+b^4)$$

۳ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش جوابهای این دستگاه باشد :

$$\begin{cases}xy^2+yx^2-xy=8\\x+y=3\end{cases}$$

۴ـ معادلهٔ اصم زیر را از راه تبدیل به معادلهٔ درجه دوم حل نمائید :

$$\sqrt[4]{\frac{x^2+2x^2+1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{2x^2+2}{x}}+\sqrt[2]{4}=0$$

۵ـ معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$x^2-(m+2)x+2m-1=0$$

مفروض است :

اولاً ـ ثابت کنید به‌ازاء جمیع مقادیر m معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ متمایز است .

ثانیاً ـ اگر m واسطهٔ هندسی مابین ریشه‌های معادله باشد مقدار عددی m را بدست آورید .

دبیرستان حافظ

دبیر : ترابی زاده ـ فرستنده : حسن سلیمانی

۱ـ حدود x را طوری تعیین کنید که کسر :

$$\frac{x^2-3x-2}{x^2+x-2}$$

بین اعداد ۱− و ۱+ محصور باشد .

۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3-3x^2+x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-2x-1}}$$

۳ـ دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{\sqrt{xz}}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{\sqrt{zy}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

دبیرستان خسروی مشهد

دبیر: تجلی ـ فرستنده: غلامحسین شافعی

۱ـ حاصل عبارت زیررا بدست آورید :

$$\left[\frac{\sqrt{2}\times 4^{y-\frac{1}{2}}\times\sqrt{2^{x}}}{2\times\sqrt{2^{-y}}}\right]^{-\frac{1}{y}}=?$$

۲ـ معادلهٔ : $(m-1)x^2-(m-1)x-m=0$ مفروض است :

اولاً ـ m را چنان تعیین کنید که تفاضل مربعات ریشه‌ها برابر ۳ باشد خواهید دید برای m دوجواب بدست می‌آید . بوسیلهٔ محاسبه جواب قابل قبول آن را تعیین کنید.

ثانیاً ـ حدود m را چنان تعیین کنید که سه‌جمله‌ای زیر همواره منفی باشد .

$$(m-1)x^2-(m-1)x-m$$

گروه فرهنگی خوارزمی

۱ـ اولا اگر $x+\frac{1}{x}=y$ فرض شود حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ و $x^3+\frac{1}{x^3}$ را برحسب y بدست آورید .

ثانیاً ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$6x^6+5x^5-38x^4+10x^3-38x^2+5x+6=0$$

۲ـ اولا عبارت $x^3-(2+\sqrt{2})x+2$ را بصورت ضرب یك عامل درجهٔ اول ویك عامل درجهٔ دوم تجزیه کنید:

ثانیاً معادلهٔ $x^3-(2+\sqrt{2})x+2=0$ را حل کنید .

دبیرستان خیام

دبیر: کریمی ـ فرستنده : محمود حقانی

۱ـ p و q را چنان تعیین کنید که عبارت زیرمکعب کامل شود :

$$x^3+(p+q)x^2+(p-q)x+1$$

۲ـ حدود x را چنان معین کنید که :

$$\frac{x}{x+1}<\frac{x+1}{x+2}<\frac{x+2}{x+3}$$

دبیرستان رازی تبریز

۱ـ دستگاه زیررا حل نمائید :

$$\begin{cases}x+y=10\\ (x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=24\end{cases}$$

مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$(x^2+x-1)^2-17x^2(x^2+x-1)^2+16x^2=0$$

دبیرستان دکتر خانعلی

دبیر: عزت خواه ـ فرستنده: محمد واحدی

۱ـ a و b و c را طوری تعیین کنید که عبارت :

$$x^3+ax^2+bx+c$$

بر $(x-1)^3$ قابل قسمت باشد .

۲ـ مخرج کسر زیررا گویا کنید :

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

۳ـ m را بطریقی تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر (۲ −) باشد پس از تعیین m ریشه‌های معادله را حساب کنید :

$$2x^5+(m+1)x^4+(1+8m)x^3-$$
$$(7+m)x^2-(6m-1)x+6=0$$

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر: ترقی ـ فرستنده: حسن پناهیان ، پرویز احتشامی

۱ـ معادلهٔ اصم زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$$

۲ـ سه‌جمله‌ای x^2+mx+m مفروض است. مقدار m را طوری تعیین کنید که عبارت مفروض به ازاء جمیع مقادیر x بزرگتر از $\frac{3}{16}$ باشد .

دبیرستان دکتر هوشیار

دبیر: صدیق آراء ـ فرستنده: کیومرث تقی‌زاده هوشنگ امیرشکاری

۱ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{12}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$$

۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{25}$$

دبیرستان سلطانی (نو) شیراز

دبیر: حسین سلطانی

۱ـ اولا حدود m را طوری تعیین کنید که سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم پارامتری زیر همیشه منفی باشد :

$$(m-1)x^2-(2m+1)x+3m$$

ثانیاً ـ در وجود م علامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$(m-1)x^2-(2m+1)x+3m=0$$

برحسب مقادیر مختلف پارامتر m بحث کنید :

ثالثاً ـ m را طوری تعیین کنید که بین ریشه‌های معادلهٔ فوق $(x'$و$x'')$ رابطهٔ $\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{13}{16}$ برقرار باشد و سپس به ازاء $m=2$ مقدار عبارت $x'^3x''+x'x''^3$ را تعیین کنید .

۲ـ معادلهٔ اصم زیررا حل و بحث کنید :

$$\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{a}=0$$

۳ـ کسر زیررا به ساده‌ترین شکل خود تبدیل کنید :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\ (\text{نامحدود})}{\sqrt[4]{\sqrt{x^2y^2}+\sqrt{z^2}-\sqrt{xyz}}}$$

دبیرستان علمیه

دبیر : عطارنژاد ـ فرستنده: حمید برنوش

۱ـ دومعادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^2-px+q=0 \text{ و } x^2+px+q=0$$

مفروض‌اند. p و q را طوری تعیین کنید که اگر یك واحدبر هریك از دوریشهٔ معادلهٔ اول اضافه کنیم یك ریشهٔ معادلهٔ دوم حاصل گردد .

۲ـ مطلوب است تعیین مقدار a و b بطوری‌که یکی‌از ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ زیر $x=2$ باشد :

$$ax^4+bx^3-5x^2+bx+a=0$$

و ریشه‌های معادله را پس از تعیین a و b محاسبه کنید.

دبیرستان محمدرضاشاه

دبیر: محمود غفاری ـ فرستنده: شهریارلطیفی

۱ـ عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت خود در آورده سپس مقدار حاصل را به ازاء $x=-(\sqrt{2}+1)$ حساب کنید :

$$(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

۲ـ معادلهٔ زیر را حل کرده و جوابهای آن را بدست آورید :

$$6x^2(x^2-6)-7x(x^2-1)+6=0$$

دبیرستان منصور (تبریز)

دبیر: عزیز حسینی ـ فرستنده : احمد پارسیان

۱ـ m را چنان تعیین‌کنید که معادلهٔ :

$$(x+1)(x^2+2mx+m+12)=0$$

دارای ریشهٔ مضاعف باشد .

۲ـ در معادلهٔ :

$$x^4+8x^3+ax^2+bx-400=0$$

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که عدد (-4) ریشهٔ مضاعف معادله باشد و سپس دو ریشهٔ دیگر معادله را بدست آورید .

۳ـ ثابت کنید که معادلهٔ :

$$x^4+8x^3+19x^2+12x+2=0$$

دارای چهارریشه است که مجموع دو ریشه‌ازآن‌بامجموع دو ـ دو ریشهٔ دیگر برابر است و ریشه‌ها را پیدا کنید .

دبیرستان مهر (تبریز)

دبیر : حسینی ـ فرستنده: قادر افتخاری

۱ـ ثابت کنید که اعداد $\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند و دوریشهٔ دیگر معادله را بدست آورید :

$$x^4+7x^3-23x^2-175x-50=0$$

۲ـ کسر زیررا گویا کنید .

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}$$

دبیرستان مهرگان (لاهیجان)

دبیر: آذرپرستان ـ فرستنده: حمید اکرامی

۱ـ چند جمله‌ای درجهٔ سوم $f(x)$ راچنان پیداکنیدکه به ازاء $x=0$ برابربا (-9) بوده و بعلاوه داشته‌باشیم :

$$f(x)-f(x-2)=6x^2+32x-6$$

۲ـ در معادلهٔ $x^2+px+q=0$ ضرایب p و q را را چنان پیدا کنید که اگر یك واحد به هریك از ریشه‌های

معادلهٔ فوق اضافه کنیم اعداد حاصل ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2 - p^2x + pq = 0$$

گردد .

متمم حساب

دبیرستان اسرار سبزوار

دبیر : سغائی

۱ـ مطلوبست تعیین x از معادلهٔ :

$$(\sqrt[3]{x})^{\log_8 x + 2} = 8$$

۲ـ مطلوبست حل معادلهٔ :

$$\sqrt[x]{8^{x+1}} = \sqrt[x+1]{4^{2x+4}}$$

۳ـ m را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادلهٔ زیر مجذوری باشد :

$$a^4 - \frac{5}{2}a^2 + m = 0$$

تشکیل تصاعد عددی دهند .

دبیرستان الهی

دبیر : مهندس ادیبی

مطلوبست حل معادلهٔ :

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x + \dots = 2$$

دبیرستان اندیشه

دبیر : رنگچی

۱ـ مطلوبست مجموع عبارت زیر :

$$(1+2\sqrt{2}) + (3+4) + (5+4\sqrt{2}) + \\ + \dots + (13+16\sqrt{2}) + \dots$$

۲ـ اگر S_m و S_n مجموع m و n جمله اولیهٔ یک تصاعد حسابی باشند بطوری که داشته باشیم :

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

نسبت l_m به l_n را پیدا کنید :

$$\frac{l_m}{l_n} = ?$$

۳ـ معادلات زیر را حل کنید :

(الف)

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$$

(ب)

$$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$$

(ج)

$$\log_x 2 + \log_{2^2} x = 2/5$$

برای حل این معادله از رابطهٔ $\log_b a \times \log_a b = 1$ می‌توانید استفاده کنید :

(د)

$$x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$$

۴ـ شخصی ۱۰۰۰۰ ریال سرمایه را با نرخ مجهولی به مرابحهٔ مرکب می‌گذارد اگر بمدت معامله یکسال اضافه شود اصل و سود آن شخص ۶۷۴/۱۶ ریال زیاد می‌شود و اگر مدت معامله یکسال کم شود از اصل و سود ۶۳۶ ریال کم می‌شود نرخ و مدت معامله را پیدا کنید .

دبیرستان ملی ۲۵ شهریور آبادان

دبیر : گلشن ـ فرستنده : پیروز بینش

۱ـ تعدادی کودک به ترتیب ورودشان به کودکستان گل چیدند و بعد گلها را در یک سبد جمع کرده بطور مساوی بین خود تقسیم کردند بهر کودک ۵ عدد گل رسید مطلوبست تعداد کودکان :

۲ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1 \\ \log_{xy}(x+y) = 0 \end{cases}$$

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر : ازگمی ـ فرستنده : جواد دربندی ، حسین فقیهی مقدم

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{x}^{2\log_a x} + \sqrt[3]{x}^{3\log_a x} + \dots + \\ + \sqrt[n+1]{x}^{(n+1)\log_a x} = na$$

۲ـ هرگاه در یک تصاعد حسابی مجموع سه جملهٔ اول و مجموع سه جملهٔ دوم و مجموع جملات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ تشکیل تصاعد هندسی بدهند ثابت کنید جملهٔ سوم و هشتم و بیست و سوم این تصاعد همواره تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

دبیرستان حاج قوام شیراز

دبیر : سلطانی

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$125^{\frac{2-x}{x+7}} = 0/008^{\frac{2x+3}{3x+1}}$$

۲ـ ثابت کنید جملهٔ $n+1$ ام تصاعد هندسی که جملهٔ اولش a و جملهٔ سومش p است مساوی با جملهٔ $n+1$ ام تصاعد هندسی است که جملهٔ اول آن a و جملهٔ پنجمش p می‌باشد

دبیرستان خسروی (مشهد)

دبیر: احمدزاده ـ فرستنده : غلامحسین شافعی

۱ـ دریك تصاعد عـددی مجموع سه‌جملهٔ اول آن ۱۵ و مجموع سه‌جملهٔ آخر آن ۵۷ ومجموع تمام جملات ۱۲۰ است.

اولاً ـ تصاعدرا مشخص کنید .

ثانیاً ـ بین جمله های سوم وچهارم آن ۴ واسطهٔ عددی درج کنید .

۲ـ اگر $\log a = \bar{1}/۵۲۲۷۱$ و $\log b = \bar{1}/۳۲۵۱۲$ باشد مطلوبست محاسبهٔ :

$$\log \frac{a\sqrt[۴]{b}}{b}$$

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده : محمدحسین نظامی نراقی

۱ـ اگر $a^۲+b^۲=۶ab$ باشد ثابت کنید:

$$\log(a+b)+\operatorname{co}\log(a-b)=\frac{۱}{۲}\log ۲$$

۲ـ دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^{۱۲} \\ y^{x+y}=x^{۳} \end{cases}$$

دبیرستان دکترخانعلی

دبیر: عزت خواه ـ فرستنده : محمد واحدی

۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\log(x-۳)+\log\frac{\sqrt{x+۳}+\sqrt{x^۲-۷x+۱۲}}{\sqrt[۴]{۱۰۰}}=۲\log\sqrt{(x-۴)}$$

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : ایزدی ـ فرستنده : حسن پناهیان ، پرویز احتشامی ، عبدالله نقی

۱ـ مجموع چهارجمله از یك تصاعد هندسی $\frac{۲۰}{۹}$ ونسبت مجموع دوجملهٔ اول وسوم به مجموع دوجملهٔ دوم وچهارم مساوی ۳ است تصاعدرا مشخص کرده و حد مجموع جمله های آن را بدست آورید .

۲ـ ازرابطهٔ :

$$\log_x z\times\log_z y+\log_z x=\log_y xy\times\log_z y-\log_x y\times\log_z y$$

رابطهٔ $x=yz$ را بدست آورید .

دبیرستان ششم بهمن (بندرپهلوی)

دبیر: نوری ـ فرستنده : سلیمان روشندل

۱ـ اگر سه‌جملهٔ $\log_a x$ و $\log_b x$ و $\log_c x$ تشکیل تصاعد هندسی بدهند ثابت کنید :

$$\log_b x=\log_c x\times\log_a b$$

۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\log_۲ x+\log_{۲x}۴+\log_{۱۶}۲x=\frac{۵}{۲}$$

۳ـ دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} y\log_a x=\frac{b}{a}(۱-\log_a b) \\ a(y+\log_b x)=b-a+a\log_b x \end{cases}$$

دبیرستان محمد رضاشاه

دبیر: ایرج شفا ـ فرستنده: شهریارلطیفی

۱ـ دریك تصاعد هندسی تفاضل جملهٔ اول‌ازجملهٔ‌چهارم مساوی ۵۲ ومجموع سه‌جملهٔ اول و دوم و سوم آن مساوی ۲۶ است تصاعد رامعین کنید .

دبیرستان منصور از تبریز

دبیر: عزیزحسینی ـ فرستنده احمد پارسیان

۱ـ به فرض آنکه $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$ باشد از رابطهٔ $\log x=-۱/۶۹۸۹۷$ مقدار x رابدست آورید .

دبیرستان مهر (تبریز)

دبیر : پشمینه‌آذر ـ فرستنده : قادر افتخاری

۱ـ یك تصاعد عددی تشکیل دهیدکه جملات اول وسوم ونهم‌آن تشکیل یك تصاعدهندسی‌بدهند و مجموع همین جمله‌ها ۲۶ باشد .

مسائل هندسه

دبیرستان اسرار (سبزوار)

دبیر: رستمی ـ فرستنده : محمد خسرو جردی

۱ـ مثلثی باداشتن‌محل‌تلاقی ارتفاع‌ومیانه ونیمساززاویهٔ رأس A بادایرهٔ محیطی مثلث مفروض می‌باشد رسم کنید .همین مسئله‌راحل کنید درصورتی که‌منصف زاویهٔ A وضلع b وقطعه‌ای ازضلع c محصور بین‌رأس C وموقع‌منصف‌زاویهٔ A دردست‌است.

۲ ـ مطلوبست محاسبهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که فواصل مرکزدایرهٔ محاطی‌آن ازدوانتهای وتربرابر $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۱۰۴}$ باشد .

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده : محمد حسین نظامی نراقی

۱ـ نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ مفروض‌است. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر نیمدایره مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا مماسهای مرسوم در نقاط A و B را در C و D قطع کند.

اولاً ـ ثابت کنید $BC+AD=CD$

ثانیاً ـ ثابت کنید $AD\times BC=R^2$

ثالثاً ـ اگر $BC=\frac{R}{2}$ باشد طول اضلاع و قطرهای ذوزنقهٔ ABCD را برحسب R حساب کنید (برای اثبات این فرض از رابطهٔ ثانیاً می‌توانید استفاده کنید).

رابعاً ـ ثابت کنید عمودی که از M بر AB وارد می‌شود از نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه می‌گذرد و در آن نقطه نصف می‌شود.

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : هدایتی ـ فرستنده : محرمعلی خرندی ـ حسن پناهیان ـ پرویز احتشامی

اولاً ـ مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$) را که محیط و نیمساز زاویهٔ رأسش معلوم است بسازید.

ثانیاً ـ به‌فرض اینکه مثلث رسم شده باشد دایرهٔ محیطی آن را رسم کنید. اگر M نقطهٔ دلخواهی از قاعدهٔ BC باشد نقطهٔ تلاقی AM و دایره را E می‌نامیم ثابت کنید:

مقدار ثابت $=AE\times AM$

ثالثاً ـ از رأس C عمود CH را بر AM فرود آورده و امتداد می‌دهیم تا امتداد BE را در F قطع کند ثابت کنید F قرینهٔ C نسبت به AM می‌باشد.

رابعاً ـ مکان هندسی نقطهٔ F را وقتی M روی BC حرکت می‌کند تعیین کنید.

دبیرستان علوی

دبیر : رحیمی‌فرد ـ فرستنده : محمود نیک‌پنجه

۱ـ با استفاده از C_A سینوس $22°30'=\frac{\pi}{8}$ را حساب نموده وسپس خطوط $\frac{\pi}{8}$ رااز روی آن محاسبه نمائید.

۲ـ نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ مفروض است. از نقطهٔ A و B دو مماس بر آن رسم کرده در نقطهٔ اختیاری M از نیمدایره مماس دیگری رسم می‌کنیم تا دو مماس اول را در نقاط C و D قطع کند از نقطهٔ M عمود ME را بر AB فرود می‌آوریم ثابت کنید:

الف ـ این عمود از نقطهٔ تلاقی اقطار چهارضلعی ABCD می‌گذرد و در این نقطه نصف می‌شود.

ب ـ $\frac{2}{ME}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{AC}$

ج ـ اگر نقطهٔ M روی نیمدایره تغییر کند همواره $ME\times CD$ مقداریست ثابت.

د ـ اگر امتداد CD با AB زاویهٔ $45°$ بسازد طول اضلاع واقطار چهارضلعی ABCD را برحسب R حساب کنید.

دبیرستان فیروز بهرام

دبیر : شاهدی ـ فرستنده : گورک قراخانیان ـ فریبرز رادفر

۱ ـ دو دایرهٔ متخارج O و O' به‌شعاعهای R و R' وخط D درخارج آنها مفروض است قطعه خطی بطول معلوم l موازی با D به دودایره متکی کنید.

دبیرستان مهر تبریز

دبیر: پوررضا ـ فرستنده : قادرافتخاری

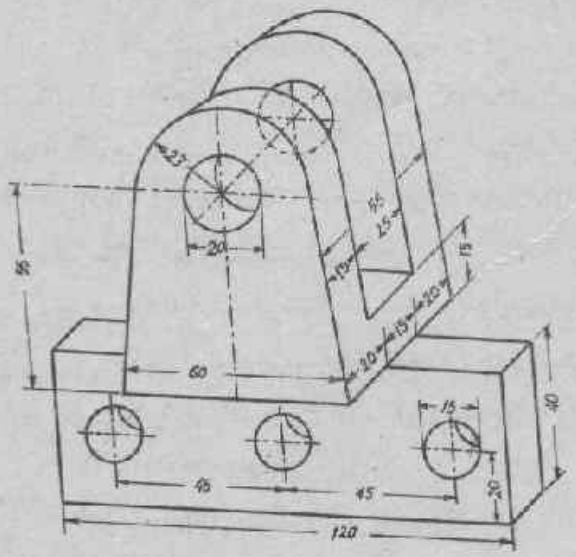
دودایره در نقاط A و B متقاطع‌اند. قاطع AC را طوری رسم کنید که اگر دوایر را در C و D قطع کند داشته باشیم :

$DA+CA=l$

رسم فنی

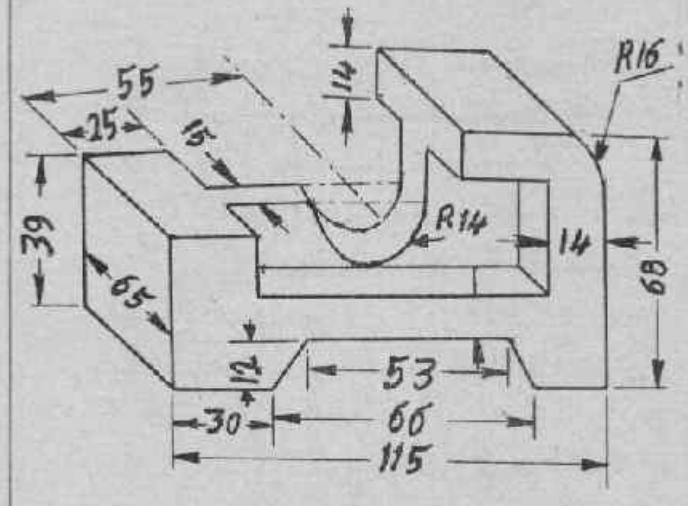
دبیرستان مهر تبریز

دبیر: مهندس طاعی ـ فرستنده : قادرافتخاری



دبیرستان مهران زاهدان

دبیر: مهندس بهبهانی ـ فرستنده: عالم کفعمی



فیزیك

گروه فرهنگی آرش

دبیر: مرتضی کرالی

۱ـ جسمی است بشکل استوانه به ارتفاع ۲۳ سانتیمتر که ۲۰ سانتیمتر آن ازجنس چوب به وزن مخصوص ۰/۴ گرم نیرو بر سانتیمترمکعب و $2cm$ آن ازجنس مس به وزن مخصوص ۸ گرم نیرو بر سانتیمترمکعب وقائم درمایعی به وزن مخصوص ۲ گرم نیرو بر سانتیمترمکعب شناور می کنیم معین کنید ارتفاع قسمت غوطه ور آن را .

دبیرستان پهلوی اراك

دبیر: آقشاهی ـ فرستنده: مصطفی راستگردانی

۱ـ بالنی است به حجم یك لیتر، آن را پراز اتر صفر درجه می کنیم. آن را تا چه دمائی گرم کنیم تا ۲۹/۴۶ سانتیمترمکعب اتر از آن بیرون بریزد . ضریب انبساط حجمی مطلق اتر ۱۵×۱۰^{-۴} وضریب انبساط حجمی بالن ۲۷×۱۰^{-۶} است.

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر: جاویدان ـ فرستنده: عبدالرسول شکوری

۱ـ مکعبی است ازچوب به ضلع $۱۰cm$ ، روی آب شناور است بطوری که $۵cm$ آن خارج ازآب است معلوم کنید :

اولا ـ وزن مخصوص چوب را .

ثانیاً ـ حداقل چند گرم آهن باید به آن ببندیم تا در آب غوطه ور شود وزن مخصوص آهن ۷/۸ .

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر: دیانت ـ فرستنده: رحمن حسینی علمداری

۱ـ دریك ظرف مسی به جرم ۶۰۰ گرم مقدار ۴۰۰ گرم آب موجود و یك قطعه یخ به وزن ۵۰ گرم روی آن شناور می باشد. ۲۰ گرم بخار آب صددرجه درظرف واردمی کنیم دمای تعادل را تعیین کنید درصورتی که گرمای ویژهٔ مس ۰/۱ و گرمای ویژهٔ آب یك و گرمای ذوب یخ ۸۰ کالری و گرمای تبخیر آب درصددرجه ۵۴۰ کالری ونقطهٔ جوش آب ۱۰۰° فرض می شوند (از تلفات حرارتی صرف نظر می شود) .

۲ـ استوانه ای است به ارتفاع ۲۵ سانتیمتر که ۳ سانتیمتر آن آهن و بقیهٔ آن چوبی است. استوانه را درمایعی به وزن مخصوص d واردمی کنیم . استوانه درمایع شناور شده وفقط ۵ سانتیمتر آن خارج ازمایع قرارمی گیرد تعیین کنید وزن مخصوص مایع رادرصورتی که وزن مخصوص آهن ۷/۸ گرم نیرو برسانتیمتر مکعب ووزن مخصوص چوب ۰/۶ گرم نیرو برسانتیمتر مکعب باشد .

دبیرستان خسروی مشهد

دبیر: دارا ـ فرستنده: غلامحسین شافعی

لکوموتیوی به وزن ۵۰ تن درسطح شیب داری به شیب ۰/۰۲ باسرعت ثابت ۵۴ کیلومتر درساعت حرکت می کند .

اولا ـ نیروی موتور.

ثانیاً ـ قدرت موتور را برحسب اسب بخار پیدا کنید.

ثالثاً ـ اگر موتور آن دارای دواستوانه باشد وسطح مقطع هر پیستون $۱۵cm^{۲}$ وفشار بخار دیگ ۳/۵ کیلوگرم برسانتیمتر مربع وماشین بدون چگالنده باشد طول هر استوانه چندسانتیمتر است (موتوردرهر دقیقه ۶۰۰ دورمی زند وفشارهوا یك کیلوگرم برسانتیمتر مربع است) .

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده: محمدحسین نظامی نراقی

۱ـ در استوانه ای به سطح مقطع ۱۰۰ سانتیمتر مربع پیستون بی وزنی تاارتفاع $۳۰cm$ ازانتهای استوانه قرار دارد استوانه محتوی گاز کاملی به درجهٔ حرارت $t=۲۷^{\circ}$ سانتیگراد وفشاریك اتمسفر است .

الف ـ پیستون راده سانتیمتر بالا می بریم ودرارتفاع ۴۰ سانتیمتری ازسطح قاعده نگه می داریم ودرجهٔ حرارت استوانه را به $t=۱۲۷^{\circ}$ سانتیگراد می رسانیم فشارجدیدچقدراست .

ب ـ سپس درجهٔ حرارت راهمان ۱۲۷° ثابت نگهداشته پیستون راازمحل جدیدبه جای اول برمی گردانیم فشار را در این حالت حساب کنید .

دبیرستان مهر تبریز

دبیر: لامعی ـ فرستنده : قادر افتخاری

نقطهٔ جوش آب در پائین ودر بالای کوهی به ترتیب °۱۰۰ و °۹۸ سانتیگراد است . تعیین کنید :

اولاً ـ فشار هوا را در بالای کوه وارتفاع کوه .

ثانیاً ـ تعیین کنید مقدار حرارت لازم برای اینکه یك لیتر آب صفر درجه را کاملا در قلهٔ کوه به حالت بخار درآورد . (وزن مخصوص متوسط هوا ۱/۵ گرم در لیتر فرض می‌شود .

مسائل شیمی

گروه فرهنگی آرش

دبیر: رئوف درویش

۱ ـ ۲ گرم سولفور طبیعی آهن (پیریت) به درجهٔ خلوص ۶۰٪ را برشته می کنیم .

اولا ـ حجم هوای لازم برای ۳ عمل را بدست آورید.

ثانیاً ـ گاز حاصل چندسانتیمتر مکعب سود ۰/۲ نرمال را خنثی می کند .

ثالثاً ـ اگر گاز حاصل را وارد آب اکسیژنه کنیم اسید حاصل چندسانتیمتر مکعب آمونیاك با مشخصات زیر را خنثی می کند.

D = ۰/۸۸ (٪۳۵ N)

دبیرستان بواسحق کازرون

دبیر: جواهری

۱ ـ اولا ـ فرمول معادلات شیمیائی تبدیل کربورکلسیم را به آمونیاك بنویسید .

ثانیاً ـ به کمك روابط زنجیری نشان دهید که از ۶۴۰۰ کیلوگرم کربورکلسیم چند کیلوگرم گاز آمونیاك بدست می آید .

۲ ـ مخلوطی از سولفات وسولفیت پتاسیم ۳/۳۲ گرم جرم دارد واز ترکیب آن با اسید سولفوریك ۰/۶۴ گرم گاز تولید می‌شود .

اولا ـ فرمول معادلهٔ شیمیائی واکنش انجام یافته را نوشته.

ثانیاً ـ مقدار هریك از دونمك را حساب کنید .

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده : محمدحسین نظامی نراقی

۱ ـ برای خنثی نمودن کامل ۵۰cc محلول اسید سولفوریك ۰/۵۶ گرم کربنات سدیم و ۰/۴ گرم سود مصرف شد. حساب کنید غلظت معمولی وغلظت ملکولی اسید را.

O = ۱۶ Na = ۲۳ Mn = ۵۵ K = ۳۹

Ba = ۱۳۷ C = ۱۲ H = ۱ S = ۳۲

کلاس پنجم طبیعی

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دبیر : شاملو

۱ ـ معادلات زیر را حل کنید .

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

$$2\sin x \cos\frac{\pi}{8} + 2\cos x \sin\frac{\pi}{8} = 2$$

$$2(\sin^4 x - \sin^2 x) = \sqrt{3}$$

دبیرستان سلطانی (نو) شیراز

۱ ـ جوابهای عمومی وجوابهای بین صفر و π معادلهٔ زیر را تعیین کنید :

$$\cot g^2 x - (2 - \sqrt{3})\cot g x - 2\sqrt{3} = 0$$

۲ ـ حاصل کسر زیر را بدست آورید :

$$\frac{3\cos 108^\circ + \sin 342^\circ + \cos(-72^\circ)}{\sin 162^\circ + 2\sin 18^\circ - \sin(-18^\circ) - 2\sin 198^\circ} = ?$$

۳ ـ درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{1}{\sin x \cos x} + tg^2 x + \cot g^2 x = \frac{tg^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot g^2 x}{\cos^2 x}$$

شیمی

دبیرستان بزرگ مجرد کازرون

دبیر : جواهری

۱ ـ ۶/۶۹ گرم از اکسید سرب را با اکسید کربن ترکیب کردیم. کاهش جرم ۰/۴۸ گرم گردید. فرمول اکسید سرب را پیدا کنید .

۲ ـ بر ۱۰cc از محلول یکی از نمکهای باریم بقدر کافی سولفات سدیم افزودیم، رسوبی به وزن ۰/۵۸۲۵ گرم تولید گردید غلظت Ba درمحلول چقدر بوده است .

دبیرستان بهبهانی کازرون

دبیر: جواهری

۱ ـ ۱/۰۴۴ گرم از نیترات یك فلز دوظرفیتی توسط سولفات

سفید ۰/۹۳۲ گرم رسوب داده است. پیدا کنید جرم اتمی فلز.

۲ـ سولفات روی متبلور ٪۲۲/۶۴ روی دارد. جرم تقریبی روی را پیدا کنید درصورتی که بدانیم این جسم بازاج سبز (زاغ سیاه) همشکل (Isomorphe) است.

داوطلبان متفرقهٔ شهرستان کازرون

طراح: جواهری

۱ـ ۲/۵ گرم بلورهای کات کبودرا حرارت می‌دهیم، در نتیجه ۱/۶ گرم جسم بدون آب بجا می‌ماند. پیدا کنید فرمول سولفات مس متبلوررا.

۲ـ ۱۰^{cc} ازیك محلول جوهر نمك توسط 5^{cc} ازیك باز ۲ نرمال (۲N) خنثی شده است. پیدا کنید غلظت معمولی جوهر نمك را.

۳ـ PH یك محلول دسی نرمال بازرا حساب کنید.

۴ـ ۱۰^{cc} آب اکسیژنهٔ ۱۱/۲ حجم، چند گرم سولفات فروبی‌آب رادرمحیط اسیدسولفوریك اکسیدمی کند؟

۵ـ ۱ گرم آلیاژطلاومس رادرجوهرشوره معمولی انداخته ومی‌جوشانیم، ۰/۷۵ گرم آن حل نمی‌شود.

اولاً ـ فرمول معادلهٔ واکنش انجام گرفته رانوشته.

ثانیاً ـ عیارطلارا به رسم بازارحساب کنید.

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستانهای آذر

فرستنده: غلامحسین فلاحی

۱ـ $A(۰ \text{ و } -۲)$ و $B(۲ \text{ و } ۲)$ و $C(۳m+۱ \text{ و } ۳m^۲+۹m)$ رؤوس مثلث ABC می‌باشند. مختصات محل تلاقی سه میانهٔ مثلث رابدست آورید ومعادلهٔ مکان هندسی آنرا وقتی پارامتر m تغییر می‌کند بدست آورید.

۵ـ مشتق تابع $y=\sqrt[۴]{۳tg^۲۴x^۳}$ راحساب کنید.

دبیرستان ادیب

دبیر: آذرهوشنگ ـ فرستنده: سیدحسین بی‌باك

اولاً ـ درتابع $y=\frac{mx+n}{x+p}$ مقادیر m و n و p را رابقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش آن محور x هارا درنقطهٔ A به‌طول ۳ قطع نماید ونقطهٔ $\omega(۱ \text{ و } ۱)$ مرکز تقارن آن باشد وسپس جدول ومنحنی $(C_۱)$ نمایش تغییرات $y_۱=\frac{x-۳}{x-۱}$ رارسم کنید.

ثانیاً ـ در تابع $y=ax^۲+bx+c$ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش آن منحنی $(C_۱)$ را درروی محور x ها قطع نموده ودرنقطهٔ B واقع برمحور y ها بر آن مماس باشد. سپس جدول ومنحنی $(C_۲)$ نمایش تغییرات تابع $y_۲=-x^۲+۲x+۳$ رادرهمان دستگاه منحنی $(C_۱)$ رسم نمائید.

ثالثاً ـ معادلهٔ مماس مشترك دو منحنی فوق (BT) را نوشته وآنرا رسم نمائید ضمناً تانژانت زاویهٔ مابین مماسهای بردو منحنی فوق رادرنقطهٔ A واقع برمحور x ها بدست آورده وفاصلهٔ A رااز مماس مشترك BT بدست آورید وثابت کنید اگر نقطه‌ای مانند D قرینهٔ B نسبت به ω باشد برمنحنی $(C_۱)$ واقع می‌شود.

رابعاً ـ نقطه‌ای مانند M ازخط $y=۲x+۳$ را چنان پیدا کنید که بتوان ازآن نقطه دومماس عمودبرهم برمنحنی $(C_۲)$ رسم نمود سپس معادلهٔ یك مماس که ضریب زاویه‌اش منفی است نوشته و مختصات نقطهٔ تماس واقع برآنرا بدست آورید.

دبیرستان بحرالعلوم بروجرد

دبیر: جوادی ـ فرستنده: حسین نوری

۱ـ معادلهٔ خطی را تعیین کنید که منحنی:

$$y=\frac{۳x^۲-۲mx}{x-m}$$

در ازاء جمیع مقادیر m بر آن مماس شود.

۲ـ مشتق تابع $y=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ مستقیماً از روی تعریف مشتق حساب کنید و مشتق تابع:

$$y=tg^۲۲x+\cos\sqrt{x}$$

را با استفاده از قواعد مشتق‌گیری حساب کنید.

دبیرستان حاج قوام شیراز

دبیر: حسین سلطانی

۱ـ تابع $y=(m-۱)x^۲-mx$ مفروض است:

اولا ثابت کنید منحنیهای نمایش تابع‌فوق به ازاءجمیع مقادیر m از سه نقطهٔ ثابت که مختصاتشان را تعیین خواهید کرد می‌گذرند. به چه دلیل این سه نقطه بریك استقامتند.

ثانیا ـ معادلهٔ مماس بر منحنی را دریك نقطهٔ اختیاری واقع بر منحنی که طولش (a) است بنویسید ثابت کنید این

مماس منحنی رادر یك نقطهٔ دیگر که طولش مساوی (-2α) است قطع می‌کند .

۲- نقاط A و B به ترتیب به طولهای (۱) و (۲) بر محور طولها واقع‌اند دو خط متغیر یکی از A و دیگری از B می‌گذرد بطوری که نقطهٔ تلاقی آنها همواره روی محور عرضها قرار دارد. از A و B دو خط دیگر بر خطوط مذکور عمود شده‌اند. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی این دو خط .

دبیرستان خیام

دبیر: مشکانی ـ فرستنده: مهدی غرویان

خط D به معادلهٔ $y-2mx-m=0$ مفروض است:

اولا ثابت کنید که خط D به ازاء جمیع مقادیر m بر نقطهٔ ثابت A مرور می‌کند .

ثانیاً معادلهٔ :

$$(1-2m)x^2+(1-4m)x-m=0$$

را در نظر می‌گیریم و بر خط D نقاط P و Q را بقسمی انتخاب می‌کنیم که طولهای آنها به ترتیب مساوی x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند . ثابت کنید که نقاط P و Q به ازاء مقادیر m نسبت به نقطهٔ $A(-\frac{1}{2}$ و $0)$ قرینهٔ یکدیگرند .

دبیرستان دکتر هوشیار

دبیر: صدیق آراء ـ فرستنده: طهمورث تقی‌زاده

۱ـ مقدار حقیقی تابع $\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+6}}$ را به ازاء $x=2$ تعیین کنید .

۲ـ در نقطهٔ $A(5و1)$ و $B(-3$ و $-7)$ و خط D به معادلهٔ $3x-2y=6$ مفروض است:

اولا ـ مختصات A' قرینهٔ A را نسبت به D تعیین کنید.

ثانیاً ـ بر D نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که :

$$MA+MB$$

کمترین مقدار ممکنه را اختیار نماید .

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: دستغیبی ـ فرستنده: محجوب

۱ـ نقاط $A(5و2)$ و $B(1و-1)$ مفروض است . روی خط $y=x-2$ نقطه‌ای بدست آورید که فاصلهٔ آن نقطه تا خط AB برابر ۲ واحد طول باشد. (دوجواب)

۲ـ دوتابع زیر مفروضند :

$$y=(m+1)x^2+mx$$

و

$$y=\frac{3x}{4x+4}$$

مقدار m را طوری تعیین کنید که منحنی دو تابع فوق یکدیگر را در مبدأ مختصات به زاویهٔ $45°$ قطع کنند (زاویهٔ بین دو مماس در مبدأ $45°$ شود) و سپس منحنی تابع $y=\frac{3x}{4x+4}$ را بدون استفاده از مشتق رسم کنید .

۳ـ تابع $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو کثیرالجمله از x هستند ، اگر صورت و مخرج دارای یك ریشهٔ مشترك باشند ثابت کنید معادلهٔ $y'[Q(x)]^2=0$ حد اقل دارای دوریشهٔ مساوی است .

دبیرستان فردوسی

دبیر : پرتوی ـ فرستنده : حسن فیضی آذر

۱ـ فاصلهٔ مرکز تقارن منحنی :

$$xy-2y-4x-1=0$$

را از خط D به معادلهٔ $y-x-8=0$ پیدا کنید .

۲ـ تابع $y=x^2+\cos 4x$ مفروض است. نشان دهید بین مشتق دوم وسوم تابع رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\left(\frac{y''-2}{16}\right)^2+\left(\frac{y'''}{64}\right)^2=1$$

دبیرستان فرگام

دبیر : محمد نوری ـ فرستنده : حمید نیکجو

۱ـ جدول و منحنی (α) نمایش هندسی تابع :

$$y=\frac{3x-3}{x+1}$$

را رسم کنید .

۲ـ در عدهٔ نقاط تلاقی خط Δ به معادلهٔ :

$$y=\lambda x+1$$

با منحنی α به ازاء مقادیر مختلف λ بحث کنید.

۳ـ درحالتی که خط Δ منحنی α را در دو نقطه قطع می‌کند نقاط تلاقی را M و N می‌نامیم. مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین طولهای نقاط M و N که به مقدار λ بستگی نداشته باشد.

۴ـ تصاویر M و N را بر محور $x'x$ نقاط M' و N' می‌نامیم. تحقیق کنید که نقطه‌ای مانند P روی منحنی (α) وجود دارد که اگر تصویر آن را روی محور $x'x$ ، P' بنامیم مقدار $\overline{P'M'}\times\overline{P'N'}$ برابر عدد ثابتی می‌گردد. مختصات نقطهٔ P و مقدار ثابت را بدست آورید .

دبیرستان فیروز بهرام

فرستنده: اردشیر گشتاسبی

۱ـ نقطهٔ $A(۱و۳)$ رأس مثلثی است که خطوط :

$$۵y-۳x=۱ \quad و \quad ۴y+۳x-۴=۰$$

معادلات دو ارتفاع این مثلث ، شکل را رسم و مختصات دو رأس دیگر و معادلهٔ BC را بدست آورید :

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر : مزیدی ـ فرستنده: محسن مخملی

۱ـ تحقیق کنید به ازاء جمیع مقادیر a منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(a-۱)x+۲}{x+a}$ از دو نقطهٔ ثابت A و B که مختصات آنهارا تعیین خواهید کرد می گذرد .

۲ـ به ازاء چه مقادیری از a تابع فوق همواره صعودی یا نزولی است. a را طوری تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطهٔ D واقع بر محور y ها با نیمساز ربع اول موازی باشد .

دبیرستان گلشن راز دبستر

دبیر: باهمت ـ فرستنده : پریچهره

۱ـ مشتق تابع زیررا بدست آورید :

$$y=\sin^۳۳x-۲\cos^۲\sqrt{x}+x\,tg^۲۲x$$

۲ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ محورهای مختصات را بیابید که مختصات نقاط آن ناحیه در نامساوی زیر صدق کنند .

$$y<\sqrt{(x+۳)^۲}$$

دبیرستان محمدرضاشاه کرمان

۱ـ مقدار حقیقی کسرزیررا به ازاء $x=-۲$ بدست آورید :

$$y=\frac{x+\sqrt{x+۶}}{x+۲}$$

۲ـ مشتق تابع زیررا حساب کنید :

$$y=\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲+\sqrt{(x^۲+۱)^۳}}}$$

دبیرستان مهران (زاهدان)

فرستنده: عالم کفعمی

۱ـ تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مفروض است. a و b و c و d را بقسمی تعیین کنید که نقطهٔ ماکزیمم منحنی تابع روی محور $y'y$ و عرض آن ۴ باشد و نقطهٔ می‌نیمم تابع روی محور $x'x$ واقع و طول آن ۲ باشد .

۲ـ مطلوبست معادلهٔ قائم بر منحنی $y=\frac{۳\sin x}{۴x+۲}$ در نقطه‌ای به طول $x=-\frac{\pi}{۶}$

۳ـ دو محور Ox و Oy مفروض است. خط D محور Ox را در نقطهٔ A و محور Oy را در نقطهٔ B قطع می‌کند بطریقی‌که $OA=OB=۱$ می‌باشد. خط دیگر D' موازی Ox محور Oy را در نقطهٔ C بطریقی قطع می‌کند که:

$$OC=۲$$

می‌باشد. حالا از نقطهٔ O خطی باضریب زاویهٔ m رسم‌می‌کنیم فرض می‌کنیم که D را در نقطهٔ P و خط D' را در نقطهٔ Q قطع کند :

اولا مطلوبست محاسبهٔ OQ .

ثانیاً مکان هندسی وسط PQ وقتی m تغییر کند .

دبیرستان نمازی شیراز

دبیر : خلیل همت ـ فرستنده : همایون دبیری

۱ـ تابع $y^۲=x^۲-x+۱$ مفروض است . از مبدأ مختصات خطی چنان مرور نموده که بر منحنی تابع قائم است مختصات نقطهٔ برخورد آن را با منحنی پیداکنید .

۲ـ دومعادلهٔ درجهٔ دوم:

$$ax^۲+bx+c=۰ \quad و \quad a'x^۲+b'x+c=۰$$

مفروضند روی محور $x'Ox$ نقاط A و B و C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که به ترتیب طولهای آنها ریشه‌های این دو معادله باشند. مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین ضرائب این دو معادله بطوری که این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی بدهند.

۳ـ ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=a(x^۲-۱)^۲+\frac{x^۲}{۲}$$

به ازاء جمیع مقادیر در دو نقطهٔ ثابت بر دو خط ثابت مماس است مختصات این دو نقطه و معادلات این دو خط را بدست آورید .

دبیرستان نمونه اصفهان

دبیر: امام جمعه زاده ـ فرستنده: حسین خبازیان

۱ـ تابع :

$$y=x^۲-۲(۳m+۵)x+۳m+۲۵$$

مفروض است:

اولا ـ به ازاء چه مقادیری از m منحنی تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند .

ثانیاً ـ رابطهٔ مستقلی از m بین ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^۲-۲(۳m+۵)x+۳m+۲۵=۰$$

تعیین کنید و ثابت کنید وقتی منحنی تابع محور x ها را در

دو نقطهٔ M' و M'' قطع می‌کند m هرچه باشد روی محور x ها نقطه‌ای مانند A وجود دارد بطوری‌که :

$$AM' \times AM'' = \frac{K^2}{4}$$

(K مقداری است ثابت که تعیین می‌کنید).

دبیرستان نوبخش (رشت)

دبیر: میرمشعشعی ـ فرستنده: سیدرضامیرزنده‌دل

۱ـ نقاط $B(b+a, b-a)$ و $A(2a-b, 2a-b)$ و $C(b-a, 2a+b)$ رؤوس مثلثی فرض می‌شوند.

الف ـ درصورتی‌که G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC برروی خط $x=\frac{4}{3}$ واقع و زاویهٔ بین ضلع AC و خط $D \equiv 3x-5y=0$ برابر $45°$ باشد a و b و مختصات سه رأس مثلث را بیابید. (جوابی را اختیار کنید که مختصات رؤوس کسری نباشد).

ب ـ اگر $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, 4)$ فرض شود مثلث ABC را رسم و طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC و مساحت این مثلث را حساب کنید.

مثلثات

دبیرستانهای آذر

فرستنده: غلامحسین فلاحی

۱ـ به فرض آنکه انتهای کمان x در ناحیهٔ اول باشد از رابطهٔ $tgx - cotgx = 2$ ابتدا tgx و سپس نسبتهای مثلثاتی x را بدست آورید.

۲ـ اگر $\frac{b}{a} = tg\alpha$ باشد عبارت :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

را قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم نمائید.

۳ـ اگر بین زوایای مثلث ABC رابطهٔ :

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \sin A + \cos A \cot g B$$

برقرار باشد ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است.

دبیرستان ادب اصفهان

دبیر: گوهری ـ فرستنده: محمود مسعود

۱ـ عبارت زیررا قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم نموده و مقدار آن را به ازاء $x = 20'$ و $x = 40°$ بدست آورید.

۲ـ در صورتی که داشته باشیم :

$$k^2 \sin^2(x+y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y \cos(x-y)$$

ثابت کنید داریم :

$$tgx = \frac{1 \pm k}{1 \mp k} tgy$$

دبیرستان ادیب

دبیر: دانا ـ فرستنده: سیدحسین بی‌باك

۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = \frac{3}{2}$$

دبیرستان بابك

دبیر: میرزاطاهری ـ

فرستنده: اسماعیل اسماعیلی

۱ـ اگر $\sin x$ واسطهٔ هندسی بین $\sin y$ و $\cos y$ باشد رابطهٔ زیررا بدست آورید :

$$\cos 2x = 2\cos^2(45° + y)$$

۲ـ درصورتی‌که A و B و C زوایای یك مثلث باشند حاصل کسر زیررا پیدا کنید :

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: سروری ـ فرستنده: علی‌اصغر فقیهی‌مقدم

۱ـ با فرض اینکه $\sin x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ و x زاویهٔ حاده و $a > 0$ و $b > 0$ باشد مقدار این عبارت را حساب کنید:

$$a^2 \sin^2 \frac{x}{2} + b^2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

دبیرستان خیام

دبیر: مشکانی ـ فرستنده: مهدی غرویان

۱ـ ثابت کنید که : $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$ مربع کامل است.

۲ـ از رابطهٔ :

$$(1 + m\cos x)(1 - m\cos y) = 1 - m^2$$

رابطهٔ زیررا نتیجه بگیرید :

$$tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1+m}{1-m} tg^2 \frac{y}{2}$$

دبیرستان دارالفنون

دبیر: دوست حقیقی ـ فرستنده: منصور شکری

۱ـ معادلهٔ مثلثاتی:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = m$$

مفروض است:

اولاً ـ m را بطریقی تعیین کنید که یك ریشهٔ معادله $\frac{\pi}{4}$ باشد.

ثانیاً ـ به فرض آنکه $m = -\frac{1}{2}$ باشد معادله را حل کنید و جوابهای بین صفر و 2π را تعیین کنید.

۲ـ در صورتی که x و y و z زوایای مثلثی باشند درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin x + \sin y - \sin z} = \cot g \frac{x}{2} \cdot \cot g \frac{y}{2}$$

دبیرستان رضاشاه کبیر (همدان)

دبیر: کاوه ـ فرستنده: عنایت‌الله قره خانلو

۱ـ اگر $\sin x + \cos y = a$ و $\cos x + \sin y - b$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $\sin(x+y)$ و $\cos(x+y)$

دبیرستان شاهپور رشت

دبیر: مظفری

۱ـ اگر $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ و α حاده باشد از رابطهٔ زیر x را بر حسب α محاسبه نمائید:

$$\tg x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}$$

۲ـ عبارت زیر را قابل محاسبه به لگاریتم ومقدار عددی آن رامحاسبه کنید.

$$S = 1 + \cos 72 + \cos 144 + \cos 72 \cos 144$$

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: اشرف ـ فرستنده: محجوب

۱ـ اگر $x + y + a + b = \pi$ و $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos a}{\cos b}$ باشد. ثابت کنید:

$$\tg x \tg b + \tg a \tg y = 2$$

۲ـ هرگاه $\tg 3x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ باشد به فرض $\tg\varphi = \frac{b}{a}$ عبارت را قابل محاسبه به لگاریتم نموده وزاویهٔ x را برحسب φ حساب کنید.

دبیرستان صمصامی (ادراك)

دبیر: ناظمی ـ فرستنده: مهدی داوری

۱ـ معادلهٔ زیررا حل کرده جوابهای بین صفر و 2π آنرا تعیین کنید:

$$\tg x = 2\sqrt{3}(1 - \cos x)$$

۲ـ درصورتی که $\cos x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ باشد مطلوبست مقدار $\cos 4x$ و از آنجا کمان حادهٔ x را تعیین کنید.

دبیرستان علم

دبیر: شریفی ـ فرستنده: حسن بلوری

۱ـ از رابطهٔ زیر مقدار k و نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ φ را چنان تعیین کنید که تساوی زیر همواره برقرار باشد:

$$4\sin x + 3\cos x = k\sin(x + \varphi)$$

۲ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که بین زوایای آن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

دبیرستان فردوسی رضائیه

دبیر: دیلمقانی ـ فرستنده: حسن فیضی آذر

۱ـ هرگاه A و B و C زوایای مثلثی باشند عبارت زیررا قابل محاسبه به لگاریتم کنید:

$$\sin A + \sin B - \sin C$$

دبیرستان فرگام

دبیر: طاهری ـ فرستنده: حمید نیکجو

۱ـ ثابت کنید اگر:

$$\mathrm{Arc}\tg x + \mathrm{Arc}\tg(1 - x) = 2\,\mathrm{Arc}\tg\sqrt{x - x^2}$$

۲ـ تحقیق کنید اگر رابطهٔ:

$$\tg^2\alpha = 1 + 2\tg^2\beta$$

برقرار باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos 2\beta = 1 + 2\cos 2\alpha$$

۳ـ تحقیق کنید در رابطهٔ:

$$(b^2 + c^2)(\cos x - \cos a)^2 + b^2(\sin x - \sin a)^2 = c^2(2 + \cos x + \cos a)^2$$

می‌توان رابطهٔ $\tg\frac{x}{2} = \tg\frac{a}{2} \pm \frac{2c}{b}$ را نتیجه گرفت:

دبیرستان فیروز بهرام

فرستنده: اردشیر گشتاسبی

۱ـ تحقیق کنید اگر در مثلثی رابطهٔ:

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

باشد یکی از زوایا 60° می‌باشد.

۲ـ معادلهٔ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ را حل و جوابهای کلی را بدست آورید.

دبیرستان فیوضات‌مشهد

دبیر: مزیدی ـ فرستنده: محسن مخملی

۱ـ عبارت زیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید:

$$\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a+b)$$

دبیرستان گلشن راز شبستر

دبیر: باهمت ـ فرستنده: یعقوب پریچهره

۱ـ اگر کمان x ریشهٔ معادلهٔ:

$$\cos 2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

باشد $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

اولاً ـ $\sin x$ و $\cos 4x$ را حساب کنید:

ثانیاً ـ اندازهٔ زاویهٔ x را بدست آورید.

دبیرستان مهران (زاهدان)

فرستنده: عالم کفعمی

۱ـ هریك از مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ را حساب کنید:

$$m \sin x + \cos x = m$$

۲ـ مقدار حقیقی X را حساب کنید:

$$X = \sqrt{1 + \sin a + \cos a + \sin a \cos a}$$

دبیرستان نمازی شیراز

دبیر: همت ـ فرستنده: همایون دبیری

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائم در A) داریم:

$$m = \frac{b+a}{c}$$

اولاً ـ مطلوبست محاسبهٔ $tg\frac{B}{2}$ برحسب m.

ثانیاً ـ اگر $tg\frac{B}{2} = \frac{m-1}{m+1}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی زوایای B و C.

ثالثاً ـ به ازاء چه مقدار از m زاویهٔ B کوچکترین زاویهٔ مثلث می‌شود.

دبیرستان نمونهٔ اصفهان

دبیر: افضل ـ فرستنده: حسین خبازیان

۱ـ ثابت کنید اگر در مثلثی رابطهٔ:

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = 0$$

برقرار باشد مثلث قائم‌الزاویه است.

دبیرستان نوربخش (رشت)

دبیر: آخوندزاده ـ فرستنده: سیدرضا میرزنده‌دل

۱ـ a و b را طوری تعیین کنید که عبارت زیر به ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$\frac{a \sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x - \sin x} = 1 + tg 2x$$

دبیرستان هاتف

دبیر: افضل ـ فرستنده: احمد صفالی پور

۱ـ از رابطهٔ: $tg^2\alpha = 1 + 2tg^2\beta$ رابطهٔ:

$$\cos 2\beta = 1 + 2\cos 2\alpha$$

را نتیجه بگیرید.

۲ـ $\sin 5x$ را برحسب $\sin x$ حساب کرده و به کمك آن معادلهٔ زیررا حل کنید.

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x$$

و جوابهای بین صفر و 2π را مشخص کنید.

مسائل هندسه

دبیرستانهای آذر

فرستنده: غلامحسین فلاحی

۱ـ صفحهٔ P و دونقطهٔ A و B در خارج آن طوری قرار دارند که نسبت فواصل آنها از صفحهٔ P برابر m است:

$$\left(\frac{AA'}{BB'} - m\right)$$

مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحهٔ P که نسبت فواصل آنها از دونقطهٔ A و B ($\frac{MA}{MB}$) برابر m باشد.

۲ـ اولا ثابت کنید مکان هندسی نقاط تماس مماسهائی که ازنقطهٔ A واقع درخارج کره بر آن رسم می‌شوند دایره‌ای است که مرکز آن روی خط AO (O مرکز کره) قراردارد.

ثانیاً اگر شعاع کره مساوی ۴ سانتیمتر وسطح عرقچینی که صفحهٔ مکان فوق‌الذکراز کره جدا می‌کند برابر ۵۰٫۲۴ سانتیمتر مربع باشد شعاع قطبی عرقچین را تعیین کنید.

ثالثاً اگر AM یکی از مماسهای مرسوم از نقطهٔ A به کره باشد حجم جسم حاصل از دوران مثلث AMO حول OA را تعیین کنید.

دبیرستان ادب (اصفهان)

دبیر: خاتون‌آبادی ـ فرستنده: محمود مسعود

۱ـ صفحه‌ای از یك خط راست می‌گذرد وکره‌ای را قطع می‌کند. مطلوبست تعیین مکان هندسی مراکز مقطعهای

حاصل .

۲ـ اگر حجم حاصل ازدوران متوازی‌الاضلاع ABCD را حول دوضلع متوالی AB و AD به ترتیب V_1 و V_2 باشد ثابت کنید .

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AD}{AB}$$

دبیرستان بابك

دبیر: واجد سمیعی ـ فرستنده: اسماعیل اسماعیلی

۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ $A = 105^\circ$ و $B = 45^\circ$ و ضلع $AB = a\sqrt{2}$ مفروض است و خط عمود AM برصفحهٔ مثلث رسم شده است.

اولا طریقهٔ تعیین نقطهٔ M از عمود AM بطوری که $CMB = 90^\circ$ باشد شرح دهید .

ثانیاً بفرض آنکه فرض فوق حل‌شده باشد طول AM را حساب کنید . (برحسب a).

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: زمانیان ـ فرستنده : محبوب

۱ـ دوخط متنافر عمود برهم Ax و By مفروض‌اند و $AB = l$ عمود مشترك آنها است پاره خط MP بطول ثابت $K > l$ طوری تغییر می‌کندکه همواره M بر Ax و P بر By واقع است ثابت کنید زاویهٔ MP و AB ثابت می‌ماند.

ثانیاً ـ مکان هندسی نقطهٔ O وسط MP را تعیین کنید .

دبیرستان فردوسی

دبیر: قهرمان صولتی ـ فرستنده : حسن فیضی آذر

۱ـ منشور مایلی است که مقطع قائم آن یك‌شش ضلعی منتظم به ضلع ۸ سانتیمتر وطول یال جانبی‌آن ۲۰ سانتیمتراست و باصفحهٔ قاعده زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد پیدا کنید مساحت قاعده و سطح کل و ارتفاع و حجم‌منشور را .

دبیرستان فرهنگ

دبیر : خضرالی ـ فرستنده: حمید نیکجو

۱ـ دوصفحهٔ متعامد P و Q مفروضند وخط $AB = 2x$ قسمتی از فصل‌مشترك این‌دوصفحه می‌باشد. مثلث‌متساوی‌الساقین ABC را روی صفحهٔ P و مثلث متساوی‌الساقین ABD را روی صفحهٔ Q می‌سازیم بطوری‌که :

$$a = BC = CA = AD = BD$$

باشد اگر M وسط CD و N وسط AB باشد :

۱ـ ثابت کنید خط MN عمود مشترك دو خط AB و CD است .

دبیرستان گلشن‌راز شمیرزاد

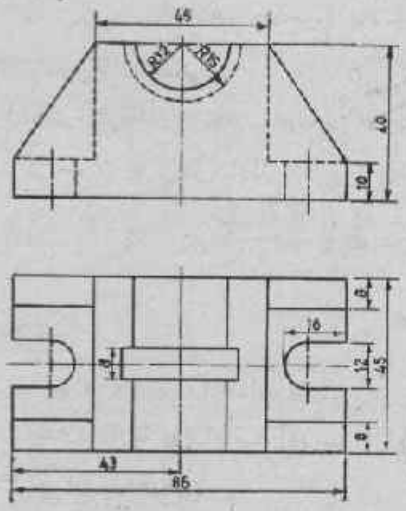
دبیر : باهمت ـ فرستنده: پریچهره

۱ـ دو دایرهٔ O و O' مماس خارج هستند و AA' یك مماس مشترك خارجی آنها است . ثابت کنید اگر شکل‌حول خط OO' دوران کند مساحت سطح حاصل از دوران AA' واسطهٔ هندسی است مابین مساحات حاصل از دوران دودایره.

رسم فنی

دبیرستان آذر شمارهٔ ۱

دبیر : مهندس پازوکی ـ فرستنده: غلامحسین فلاحی



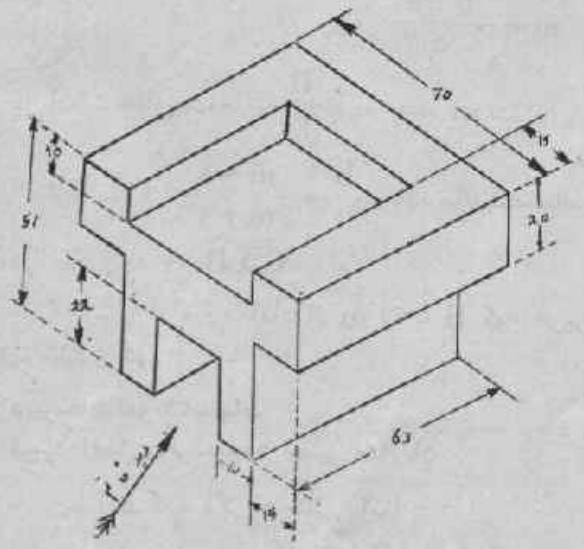
تصاویرزیررابا مقیاس ۱ ۰ ۱ رسم کرده واندازه گذاری کنید :

۱ـ برش تصویر جلو (به جای تصویر جلو)

۲ـتصویر چپ . ۳ـ تصویر بالا.

دبیرستان ابن‌سینا رضائیه

فرستنده: هوشنگ امیر فتحی

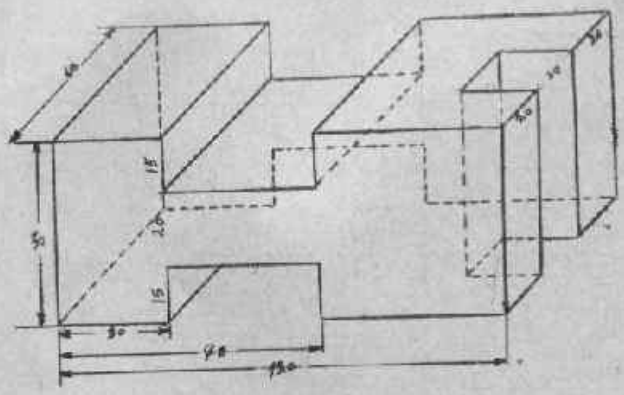


مطلوبست رسم تصاویرزیر با مقیاس ۱ ۰ ۱

۱ـ تصویرقائم ۲ـ تصویرافقی ۳ـ تصویر نیمرخ‌راست.

دبیرستان دارالفنون

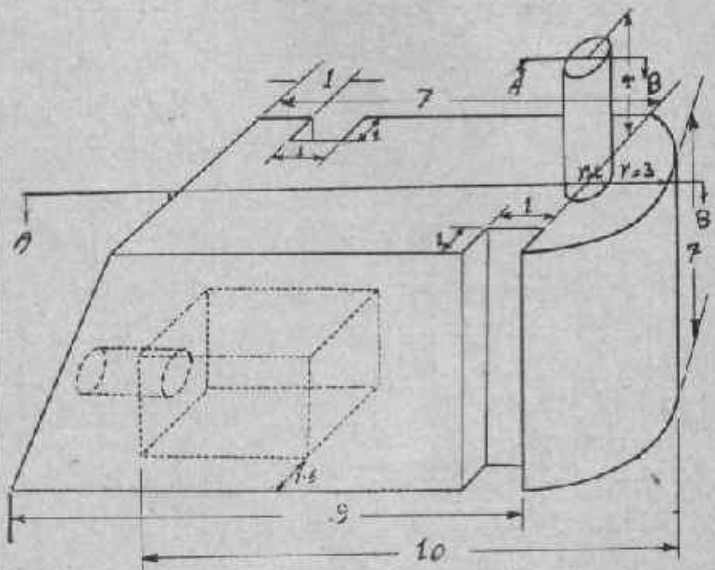
دبیر: شهنالی ـ فرستنده : منصور شکری



تصاویر افقی، قائم و نیمرخ چپ را بدست آورید.

دبیرستان شاهپور شیراز

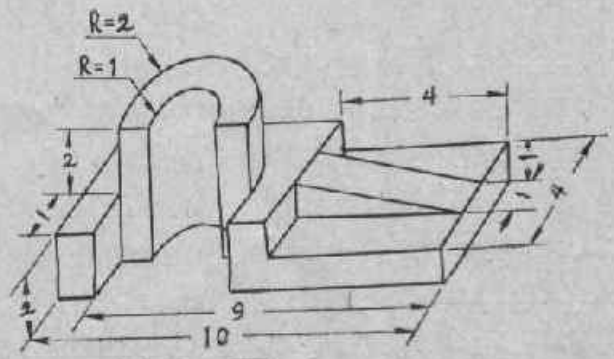
دبیر: زمانیان



رسم تصاویر (نیمرخ چپ) ونمایش مقطع AB درتصویر قائم و اندازه گذاری کامل، در جسم سوراخی است مرکب از مکعبی به ضلع ۳ و استوانه‌ای به قطر۲ .

دبیرستان صنعتی اراک

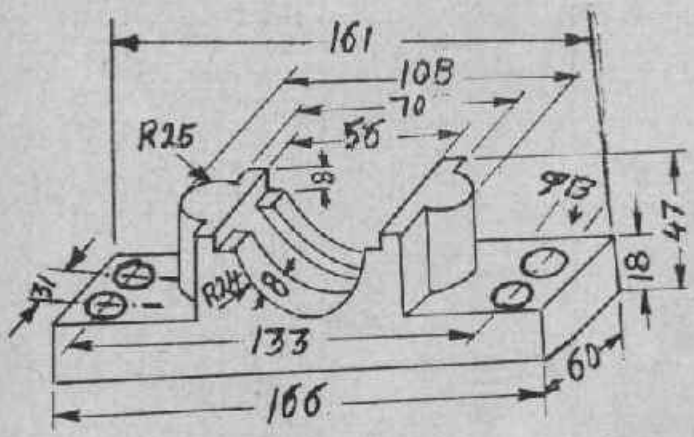
دبیر: محمدی ـ فرستنده : مهدی داوری



مقیاس ۱ : ۱ مطلوبست رسم تصاویر قائم، افقی و نیمرخ راست .

دبیرستان مهران زاهدان

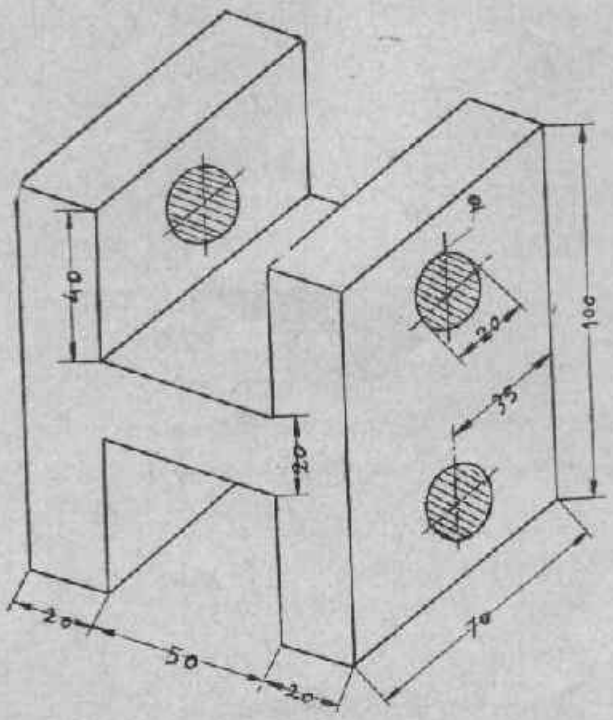
دبیر: مهندس بهبهانی ـ فرستنده : عالم کفعمی



مطلوبست رسم تصاویر : قائم ، افقی ، برش جانبی

دبیرستان نمونه اصفهان

دبیر: شاهسیا ـ فرستنده : حسین خیازیان



نمای اصلی و نمای سطحی و نمای جنبی با اندازه‌های کامل ترسیم گردد.

فیزیك

دبیرستانهای آذر

فرستنده: غلامحسین فلاحی

۱ـ زاویهٔ رأس منشوری ۴۵° است. اگر یك شعاع نورانی ساده عمود بر یك وجه این منشور بتابد معاس بر وجـه دیگر آن خارج می‌شود.

اولاً ـ ضریب شکست منشور را پیدا کنید.

ثانیاً ـ اگر این منشور عدسی محدب مقعری که شعاع سطح محدب آن ۱۰ سانتیمتر است وسطح مقعر آن ۱۵ سانتیمتر است درست کنیم تقارب آن چه می‌شود.

ثالثاً ـ اگر طرف گود عدسی را از آب خالص به‌ضریب شکست $\frac{۳}{۲}$ پر کنیم تقارب دستگاه چند دیوپتری است؟

$\sqrt{۲}=۱/۴$

دبیرستان شاهپور

دبیر: نیکنامی، موریس ـ

فرستنده: سید هدایت‌الله نظری‌نژاد

۱ـ جسمی است به طول ۲ سانتیمتر روبـروی عـدسی همگرائی واقع شده‌است. تصویر حقیقی آن در فاصلهٔ ۳۰ سانتیمتری عدسی و به طول ۴ سانتیمتر تشکیل می‌شود.

اولاً ـ محل جسم را پیدا کنید.

ثانیاً ـ فاصلهٔ کانونی عدسی را بدست آورید و همگرائی آن را تعیین کنید. اگر شعاع انحنای طرفین عدسی $R_۱=R_۲=۱۰cm$ باشد ضریب شکست عدسی را حساب کنید.

دبیرستان فردوسی رضائیه

دبیر: سحابی ـ فرستنده: حسن فیضی آذر

۱ـ بین دو نقطهٔ A و B که اختلاف پتانسیل ثابت ۴۲ ولت برقرار بوده و جریان همیشه از A به سوی B مـی‌باشد دو انشعاب وجود دارد. انشعاب اول شامل یك مولد به نیروی محرکهٔ E و مقاومت داخلی $۲/۵^{\omega}$ ویك آمپرسنج به‌مقاومت $a=۳^{\omega}$ بطور متوالی با آن می‌باشد و در انشعاب دوم یك موتور به نیروی ضد محرکهٔ ۱۲ ولت و مقاومت داخلی یك‌اهم و یك مقاومت ۳^{ω} بطور متوالی با آن بسته شده و آمپرسنج عدد ۳A را نشان می‌دهد.

اولاً ـ نیروی محرکهٔ مولد را حساب کنید.

ثانیاً ـ توان کلی مصرفی را در مدار دوم برحسب کیلووات بدست آورید.

۲ـ درختی به ارتفاع ۲۰ متر ودرفاصلهٔ ۴ کیلومتر از دوربین گالیله‌قرار گرفته درحالیکه چشم ناظر روی کانون عدسی چشمی است تحت زاویهٔ $\frac{۱}{۲۰}$ رادیان بوسیلهٔ دوربین رؤیت می‌شود. اگر فاصلهٔ کانونی عدسی چشمی ۵ سانتیمتر و فاصلهٔ دوعدسی ۴۲ سانتیمتر باشد فاصلهٔ آخرین تصویر را از عدسی چشمی محاسبه نمائید و مسیر اشعهٔ نوررا بکشید.

دبیرستان فیوضات

دبیر: فکرت ـ فرستنده: محسن مخملی

۱ـ دو مولد مشابه که نیروی محرکه و مقاومت‌داخلی هرکدام ۴ ولت و ۲ اهم است بطور موازی بهم بسته شده وبه یك موتور به مقاومت داخلی یك اهم و نیروی ضد محرکهٔ E' و یك مقاومت خارجی $R_۱=۲\Omega$ بطور متوالی بسته شده‌اند در موقعی که موتور نچرخد شدت جریان دوبرابر حالتی می‌شود که موتور درحال گردش باشد نیروی ضد محرکه و شدت و توان کل موتوررا پیدا کنید.

دبیرستان گلشن‌راز شبستر

دبیر: جوانی ـ فرستنده: پریچهره

۱ـ سیمی به طول ۳۱/۴ متر وبه‌قطر ۲ میلیمتر و به‌مقاومت مخصوص ۳۵×۱۰^{-۶} اهم سانتیمتر موجود است:

اولا مقاومت سیم را پیدا کنید.

ثانیا به فرض اینکه مقاومت سیم ۳ اهم باشد آن را به صورت یك بوبین حلقوی، شکل که شعاع هرحلقهٔ آن ۵ سانتیمتر است در آورده با یك مولد به نیروی الکتروموتوری ۷۸ ولت و مقاومت داخلی ۱/۵ اهم و یك موتور M به نیروی ضد محرکهٔ نا معلوم و مقاومت داخلی ۲/۵ اهم بطور سری بهم بسته و بوبین را در داخل کالریمتری که محتوی ۳۰۰ گرم آب است قرار می‌دهیم.

۱) در مدت ۱۳ دقیقه و ۵۶ ثانیه درجهٔ حرارت آب کالریمتر ۳۲ درجهٔ سانتیگراد بالا می‌رود شدت جریان‌رادر مدار حساب کنید.

۲) نیروی ضد الکتروموتوری موتوررا تعیین کنید.

۳) توان مکانیکی موتوررا بدست آورید.

۴) اختلاف پتانسیل دوسر موتور و دوسر مولد را حساب کنید.

ثالثا ـ بوبین را از داخل کالریمتر خارج ساخته‌سطح آن را بر سطح نصف‌النهار مغناطیسی زمین‌منطبق می‌کنیم‌اندازهٔ شدت میدان‌را درمرکز حلقه بدست آورید. اگر عقربهٔ مغناطیسی

کوچك در مرکز حلقه قرار بگیرد. زاویهٔ چرخش آن را بدست آورید (مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین ۱۲ ارستد فرض شود).

شیمی

دبیرستانهای آذر

فرستنده : غلامحسین فلاحی

۱- محلولی دارای سولفات سدیم و سولفیت سدیم است. بر 100^{cc} از این محلول کلرور باریم زیاد می‌ریزیم رسوبی به‌وزن ۴/۵ گرم تولید می‌شود که اگر این رسوب را در اسید کلرئیدریك بریزیم ۲/۱۷ گرم از وزن رسوب کم می‌شود غلظت و فاکتور هر یك از دونمك را در محلول اولیه حساب کنید.

۲- مقداری جدن را که دارای ۹۶ درصد آهن است در اسید سولفوریك رقیق حل می‌کنیم و حجم محلول حاصل را با آب مقطر به یك لیتر می‌رسانیم. بر 100^{cc} آن قطره قطره پرمنگنات پتاسیم دسی‌نرمال می‌ریزیم مشاهده می‌شود که 90^{cc} از این محلول پرمنگنات پتاسیم بی‌رنگ می‌شود معین کنید:

اولا- وزن جدن مورد آزمایش را.

ثانیا- 100^{cc} دیگر محلول (سولفات فرو) با چه حجمی از آب اکسیژنه ۲۸ حجمی ترکیب می‌شود.

$Ba=137$ و $H=1$ و $O=16$ و $S=32$
$Mn=55$ و $K=39$ و $Fe=56$

گروه فرهنگی آرش

دبیر: محمد رئوفی درویش

۱- آلیاژی از مس و قلع را در اسید نیتریك رقیق حل می‌کنیم. حجم محلول حاصله را با آب مقطر به 500^{cc} می‌رسانیم.

اولا 50^{cc} از محلول را با مقدار کافی آهك مخلوط و حرارت می‌دهیم گاز را وارد 50^{cc} اسید سولفوریك دسی‌نرمال می‌کنیم مشاهده می‌شود که برای خنثی کردن کامل اسید 20^{cc} سود $\frac{2}{10}$ نرمال لازم است.

ثانیاً برروی 50^{cc} دیگر ازاین محلول ئیدرژن سولفوره تا حد اشباع عبور می‌دهیم رسوب حاصل را پس ازصاف وشستشو خشك می‌کنیم ملاحظه می‌شود که ۲/۵۲۴ گرم بر وزن کاغذ صافی افزوده می‌گردد در صورتی که از فلزات را در آلیاژ حساب کنید.

ثالثاً اگر بخواهیم کاتیون Cu^{++} و Sa^{++} را در محلول فوق جدا کنیم طریقهٔ عمل را با ذکر فرمولهای مربوطه بنویسید.

دبیرستان بواسحق کازرون

دبیر: جواهری

۱- مقداری کلر زادر مجاورت چسب نشاسته وارد محلول یدور پتاسیم نمودیم برای زایل شدن رنگ آبی 20^{cc} محلول دسی‌نرمال تیوسولفات سدیم (هیپوسولفیت سدیم) مصرف گردید پیدا کنید جرم ید را که در عمل اول آزاد شده است.

۲- می‌خواهیم ۴۱۴ کیلوگرم سرب را به ماسیکو: **Masicot** تبدیل کنیم.

اولا- شرائط عمل را بنویسید.

ثانیاً- درصورتی که راندمان عمل ۹۰٪ باشد مقدار ماسیکو تهیه شده چقدر است.

دبیرستان دارالفنون

دبیر: مشرف، حنالی - فرستنده : منصور شکری

۱- آلیاژی از سه فلز سرب آهن و مس را در اسید سولفوریك گرم وغلیظ حل کرده‌ایم چون محیط عمل سرد گردد مقداری آب مقطر اضافه شود رسوبی به وزن ۱۵/۱۵ گرم بر جای می‌ماند که صاف نموده وجدا می‌کنیم سپس به حجم محلول باقیمانده آنقدر آب اضافه می‌کنیم تا یك لیتر شود 50^{cc} از این محلول صاف شده را با 100^{cc} پرمنگنات پتاسیم دسی نرمال در مجاورت اسید سولفوریك اکسید می‌شود. در آزمایش دیگر 100^{cc} از محلول صاف شده را با سولفور سدیم ترکیب می‌کنیم رسوبی به وزن ۳/۶۸ گرم بدست می‌آید پیدا کنید وزن آلیاژ را.

دبیرستان رازی تبریز

فرستنده: غلامحسین زادگان

۱- آلیاژی از مس و روی آهن به‌وزن ۱/۹ گرم موجود است آن را ابتدا در اسید سولفوریك رقیق و سپس در اسید سولفوریك غلیظ حل می‌کنیم حجم گازهای بدست آمده ۰/۶۷۲ لیتر می‌باشد پس از عمل تبخیر نمکهای حاصل ۸/۳۸ گرم نمك متبلور بدست می‌آید. پیدا کنید وزن هریك از فلزها و حجم هریك از گازها ووزن هریك از نمکهای متبلور را در صورتی که بدانیم سولفات آهن و سولفات روی هرکدام با ۷ ملکول آب و سولفات مس با ۵ ملکول آب متبلور می‌شوند.

$O=16$ و $H=1$ و $Fe=56$ و $Zn=65$ و $Cu=64$
و $S=32$

دبیرستان فردوسی رضائیه

دبیر: مرادخان ـ فرستنده: حسن فیضی آذر

۱ـ بعداز حل کردن قطعه‌ای از آلیاژ مس و روی در اسید سولفوریك غلیظ و گرم حجم حاصل را به ۲۰۰ سانتیمتر مکعب رسانده و در 20^{cc} از آن محلول گازئیدرژن سولفوره وارد می‌کنیم ۰/۴۸ گرم رسوب تولید می‌شود و چون 100^{cc} دیگر محلول را تبخیر کنیم وزن نمکهای متبلور حاصل دویهم ۱۱/۹۹ گرم می‌گردد پیدا کنید عیار هریك از دو فلز را (سولفات مس با ۵ ملکول آب و سولفات روی با ۷ ملکول آب متبلور است).

$Cu=64$ و $Zn=65$ و $O=16$ و $S=32$

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر: مدرسی ـ فرستنده: محسن مخملی

۱ـ ۸/۴ گرم از یك فلز دو ظرفیتی مجهول را در اسیدسولفوریك غلیظ و گرم حل کرده محلول حاصل را تبخیر نموده‌ایم تا بطور کامل متبلور شود اگر در این عمل ۴۱/۷ گرم نمك بلورین با ۷ ذره آب تبلور ایجاد شود تحقیق کنید جرم اتمی فلز مجهول را.

ثانیاً اگر فرض کنیم که این نمك در آب تبلور خود حل شده باشد محلول دارای چه فاکتور و غلظت ملکولی خواهد بود.

دبیرستان مهران (زاهدان)

طراح: پرویز اعلم ـ فرستنده: عالم کنعمی

۱ـ مخلوطی از کلرورسدیم و کلرور پتاسیم ۱۳/۳ گرم وزن دارد آن را در مقداری آب حل کرده، حجم آن را به یك لیتر می‌رسانیم بر 100^{cc} آن چند قطره کرومات پتاسیم محلول افزود و تا تولید رنگ قرمز آجری محلول نیترات نقره نرمال افزوده‌ایم (کرومات پتاسیم معرف است). حجم نیترات نقره نرمال مصرف شده 20^{cc} شده است نسبت درصد دوجسم را در مخلوط پیدا کنید.

$Na=23$ و $K=39$ و $Cl=35/5$

دبیرستان نوربخش (رشت)

دبیر: صفوی زاده

۱ـ یك گرم چدن را در اسید سولفوریك رقیق حل کرده و حجم محلول را به 50^{cc} می‌رسانیم. بر روی 10^{cc} از آن محلول پرمنگنات پتاسیم $\frac{1}{5}$ نرمال قطره قطره اضافه می‌کنیم. پس از افزودن $17/2^{cc}$ پرمنگنات، دیگر رنگ پرمنگنات پتاسیم زایل نمی‌شود تعیین کنید درجهٔ خلوص چدن را.

ANSWERS (Quickies on page 448)

30– It has often been assumed that the solution leads to three conditions namely:

(1) $q(x)<0$

(2) $-a^2q(x)>p(x)$ and

(3) $p(x)>a^2q(x)$

However, conditions (2) and (3) imply (1) for $a^2q(x)<-p(x)$ and: $a^2q(x)<p(x)$

Adding these inequalities gives $2a^2q(x)<0$ which is equivalent to (1). A similar argument holds when $q(x)>0$

31– The statement is true and follows from a result of E. W. Chittenden which states that under the hypotheses of the statement, the set of discontinuities of f is countable.

32– Now p must be of the form 3, 3m+1 or 3m+2, while d must be of the form 3m+1 or 3m+2. Going through the six possibilities, we find there is only one prime, $p=3$.

33– If the argument of the characteristic function of A is set equal to c, adding the first n−1 rows (columns) to the nth row (column) yields a determinant whose nth row (column) is zero. Thus c is a characteristic root of A.

مسائل برای حل

دانش‌آموزان هر کلاس می‌توانند راه‌حل مسائل مربوط به کلاس خود را که شمارهٔ مسئله با علامت «*» مشخص شده است به ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال حل مسائل فاقد علامت * وهمچنین ازارسال حل مسائل مربوط به کلاسهای پائین‌تر خودداری شود روی ورقهٔ حل مسئله نام وکلاس ودبیرستان مربوط به‌صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۳۹۴ ـ ازعبدالله آویج دانشجوی دانشگاه آریامهر

دومعادلهٔ زیر دارای یك ریشهٔ مشترك هستند.

$$x^m - ۴x + ۳ = ۰$$

$$x^m - x^۲ - ۲ = ۰$$

ریشهٔ مشترك را بدست آورده سپس مقدار m را پیدا کنید.

۴۳۹۵ ـ درمثلث قائم الزاویهٔ ABC مجموع دوضلع AB و AC برابراست با $b+c=۱۴$ وفاصلهٔ M وسط وتر BC از K نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی باوتر برابراست با $MK=۱$، مطلوبست محاسبهٔ طولهای: وتر، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی وتعیین نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ α نصف زاویهٔ B .

کلاس چهارم ریاضی

۴۳۹۶ ـ از: کاظم حافظی دبیر دبیرستان درخشانی بنیس .

دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} a^۲b^۲\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)=a^۲c^۲\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}\right)-b^۲c^۲\left(\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right) \\ xy+yz+zx=a^۲+b^۲+c^۲ \end{cases}$$

۴۳۹۷ ـ ترجمهٔ : قوام نحوی

اگر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ و... و S_p به ترتیب حد مجموع بینهایت جمله‌از تساعدهای هندسی باشد که جملهٔ اول آنها به‌ترتیب برابرباشد با ۱ و ۲ و ۳ و ... و p وقدرنسبت آنها به ترتیب برابرباشد با $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و...و $\frac{۱}{p+۱}$ ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است .

$$S_۱+S_۲+S_۳+\cdots+S_p=\frac{p(p+۳)}{۲}$$

۴۳۹۸ ـ از : حسن خجسته‌پی

مربع ABCD بطول ضلع a وبه مرکز O مفروض است. مربعهای $A_۱B_۱C_۱D_۱$ و $A_۲B_۲C_۲D_۲$ و ... راچنان رسم می‌کنیم که همه با مربع مفروض هم مرکز بوده $A_۱$ وسط OA ، $A_۲$ وسط $OA_۱$ ، $A_۳$ وسط $OA_۲$ و ... باشد. و دایره های محیطی همهٔ این مربعها رانیز رسم می‌کنیم . مطلوبست محاسبهٔ حدمجموع مساحتهای محصوربین ضلعها وکمانهای AB و $A_۱B_۱$ ، $A_۲B_۲$ و ...

۴۳۹۹ ـ از : یدالله ارضی (۴۴/۱/۱۱)

درمثلث ABC که زاویهٔ A ازمجموع دوزاویهٔ B وC بزرگتراست نقطه های D و F را برضلع BC چنان انتخاب می‌کنیم که زاویهٔ BAF بازاویهٔ C وزاویهٔ CAD باراویهٔ B برابرباشد وعمودهای DM و FN و AH رابه ترتیب بر AC و AB و BC رسم می‌کنیم . روابط زیررا ثابت کنید.

$$\frac{CH}{BH}=\frac{CM}{AM}=\frac{AN}{BN}$$

$$AM^۲+AB^۲+CH^۲+DM^۲=AN^۲+AC^۲+BH^۲+AF^۲$$

$$\frac{AM\cdot CM-DM^۲}{CD\cdot AD}=\frac{BN\cdot AN-NF^۲}{BF\cdot AF}=\cos(B+C)$$

ومعلوم کنید درچه صورت امتداد MD و NF یکدیگررا روی AH قطع می‌کنند .

کلاس پنجم طبیعی

۴۴۰۰ ـ فرمول کلی توابع درجهٔ دومی را بنویسید که منحنی نمایش تغییرات آنها ازدونقطهٔ $A(-۱و۳)$ و $B(۱-و۱)$

بگذرند. ازبین این توابع آن را معلوم کنید که اگر P نقطهٔ تلاقی منحنی نمایش آن با نیم محور Ox باشد زاویهٔ BPA قائمه باشد. معلوم کنید که در حالت اخیر خطی که ازمبدأ مختصات گذشته و برمنحنی مزبور مماس باشد با BC موازی است.

۴۴۰۱ ـ فرستنده: **سعید فرشاد** دانشجوی دانشکدهٔ علوم تبریز.

معادلهٔ زیررا حل کنید.

$$\mathrm{Arc}\cos 2x = \mathrm{Arc}\sin x$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۴۰۲ـ فرستنده: **نادر بزرگی** دانش‌آموز دبیرستان البرز

تابع $y=\frac{a}{x}$ مفروض است. مماس درهر نقطه برمنحنی محورطولها رادر A ومحورعرضها رادر B قطع می‌کند. اگر O مبدأ مختصات باشدثابت کنید که مساحت مثلث OBC مقداری است ثابت وبستگی به‌نقطهٔ تماس ندارد واین مقدارثابت راتعیین کنید. به‌ازاء چه‌مقادیراز a مساحت مثلث مزبور برابر با یك واحد سطح می‌باشد؟

۴۴۰۳ ـ از: **بختیار علیمدد سلطانی**

معادلهٔ زیر راحل کنید.

$$\cos 2(n+1)x+\sin(n+3)x-\sin(n-1)x+1=0$$

۴۴۰۴ ـ از: **حسین خبازیان** دانش‌آموزششم ریاضی دبیرستان نمونه اصفهان

نوع مثلثی راتعیین کنید که بین زاویه های آن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

۴۴۰۵ ـ ترجمه ازفرانسه

سه‌نقطهٔ A و B و C واقع دریك صفحهٔ P وغیر واقع بریك خط مستقیم مفروض است.

۱ـ ثابت کنید که اگریك قطعه خط MM′ از هریك از سه نقطهٔ A و B و C تحت زاویهٔ قائمه رؤیت شود ازهرنقطهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC به زاویهٔ قائمه دیده خواهدشد.

۲ـ نظیر هر نقطهٔ فضائی M نقطه‌ای مانند M′ وجود داردکه قطعه خط MM′ ازهریك ازنقطه های A و B و C به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. ثابت کنید جز درحالت استثنائی نقطهٔ M′ منحصر به فرداست.

۳ـ مکان نقطهٔ M′ را دردوحالت زیر تعیین کنید.

الف ـ M خطی عمودبرصفحهٔ P رابپیماید.

ب ـ M خطی متقاطع بادایرهٔ ABC رابپیماید امااین خط درصفحهٔ P واقع نبوده ونیزبرآن عمودنمی‌باشد.

کلاس ششم طبیعی

۴۴۰۶ ـ فرستنده: **پرویزخواجه خلیلی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

سطحی راکه بین سهمی $y^2=2x$ ومحور x ها وخطوط $x=2$ و $y=1$ محصوراست حول‌محورOx دوران می‌دهیم. مقدارحجم حادث راحساب کنید.

۴۴۰۷ ـ از: **بختیار علیمدد سلطانی**

معادلهٔ زیررا درحالت $a^2+b^2=c^2+d^2$ حل کنید:

$$a\cos mx+b\sin mx+c\cos nx+d\sin nx=0$$

کلاس ششم ریاضی

۴۴۰۸ ـ ترجمهٔ: **قوام نحوی**

تابع زیرمفروض است.

$$(I)\quad y=\frac{(x-a)(ax+1)}{1+x^2}$$

۱ـ به ازاء دو مقدار قرینهٔ a_1 و $-a_1$ از a وضع دو منحنی نظیررا نسبت به‌هم معلوم کنید.

۲ـ ثابت کنید به‌ازاء جمیع‌مقادیر a (غیراز ± 1) تابع (I) دارای یك ماکزیمم ویـك مینیمم است. مقادیر ماکزیمم و مینیمم‌وهمچنین مقادیر x نظیرآنها نسبت به‌هم چه‌وضعی‌دارند؟

۳ـ به‌فرض $a\geq 0$ جدول تغییرات‌تابع رادرازاء مقادیر $a>1$ و $a=1$ و $a<1$ ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع‌رادر ازاء مقادیـر ۲ و ۱ و $\frac{1}{2}$ و ۰ و $a=-1$ رسم کنید.

۴ـ اگر α و φ دو زاویه باشند بقسمی‌که $tg\alpha=a$ و $tg\varphi=x$ باشد تابع (I) را می‌توان به فرم زیرنوشت:

$$y=A\sin 2(\varphi-\alpha)$$

که A تابعی است از α

۵ـ اگر φ_1 و x_1 به ترتیب مقادیرغیرمشخصی از φ و x و M_1 نقطهٔ نظیرآنهارا ازمنحنی تـابع y و M_2 و M_3

نقاط متناظر منحنی تابع (I) برای مقادیر

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{3} \quad و \quad \varphi_3=\varphi_1-\frac{\pi}{3}$$

باشد ثابت کنید که عرض نقطهٔ مرکز ثقل مثلث $M_1M_2M_3$ مستقل از φ_1 است وطول نقطهٔ G را برحسب φ_1 حساب کرده تغییرات آن را وقتی φ_1 ازصفر تا π تغییر کند بدست آورید .

۶- بافرض $\frac{2a}{1-a^2}=m$ ثابت کنید که جوابهای معادلهٔ $y''=0$ (y'' مشتق دوم تابع (I) است) همان جوابهای معادلهٔ $tg3\varphi=tg2\alpha$ می‌باشد و ازروی آن نتیجه بگیرید که منحنی تابع (I) دارای سه نقطهٔ عطف می‌باشد .

۴۴۰۹ ـ از: **ناصر شامیر** پنجم ریاضی دبیرستان هدایت سنندج

معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\cos(x-\alpha)-\sin 4\alpha=\frac{1}{3}\sin 2(x+\alpha)$$

۴۴۱۰ ـ کسر غیر ممکن التحویل $\frac{a}{b}$ به چه صورت باشدتا $\frac{a+b}{b-a}$ برابر با یك عددصحیح وکسر $\frac{a}{a+b}$ برابر با یك کسرمولد اعشاری تحقیقی باشد. ثابت کنید که در این صورت کسر $\frac{a}{b}$ مولد کسراعشاری متناوب ساده است .در صورتی که $\frac{a}{a+b}$ مولد کسراعشاری باسه رقم اعشار باشد کسر $\frac{a}{b}$ را مشخص کنید .

۴۴۱۱ ـ ترجمه از فرانسه

چهارنقطهٔ A ، B ، C ، D بهمین ترتیب بریك خط مستقیم واقع‌اند. انعکاسی راتعیین کنید که A' ، B' ، C' ، D' میدانهای نقاط مفروض درانعکاس مزبور چهار رأس یك مستطیل باشند. به چه شرطی این مربع مستطیل یك مربع می‌باشد؟

۴۴۱۲ ـ ترجمه از فرانسه

دونقطهٔ A و B برشاخهٔ هذلولی (H) بامجانبهای Ox و Ox' مفروض است. متوازی‌الاضلاع AMBN راچنان‌رسم می‌کنیم که ضلعهایش با مجانبهای هذلولی موازی باشند . ثابت کنید که قطر MN از O می‌گذرد .

مورد استعمال ـ بامعلوم بودن سه‌نقطه وامتدادمجانبهای یك هذلولی مرکز آن راازطریقهٔ ترسیم بیابید .

مسائل متفرقه

۴۴۱۳ ـ از: **بختیار علیمحمد سلطانی**

ثابت کنید که اگرداشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin mx+\sin nx=a\\ \cos mx+\cos nx=b\\ \sin 2mx+\sin 2nx=c\end{cases}$$

خواهیم داشت :

$$(a^2+b^2)(2ab-c)=4ab$$

۴۴۱۴ ـ از : **حسین خبازیان**

معادلهٔ $x^3-6x+4=0$ وعبارت

$$f(x)=x^4-6x^2+5x-1$$

مفروض است . اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه های معادله باشند بدون حل معادله ، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ باشد .

۴۴۱۵ ـ فرستنده: **اسحق باورساد** دبیردبیرستانهای مسجد سلیمان

هرگاه عددهای α ، β ، γ و δ چنان‌باشند که:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}=0$$

باشد تساوی زیررا ثابت کنید :

$$64\alpha\beta\gamma\delta-[4\Sigma\alpha\beta-(\Sigma\alpha)^2]^2=0$$

۴۴۱۶ ـ از : **مسعود حبیب‌الله زاده** پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۱

در معادلهٔ $x^3+(a-2)x^2+x-1=0$

اولا ـ مقدارپارامتر a راچنان تعیین کنید که بین‌ریشه ها رابطهٔ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ برقرار باشد.

ثانیاً ـ a راچنان‌تعیین کنید که‌مقدار $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ می‌نیمم باشد .

۴۴۱۷ ـ از . **حسین فقیهی مقدم** پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی همدان

مجموع n جملهٔ اول ازیك رشته برابراست با :

$$S_n=\frac{n}{3n+1}$$

جملهٔ nام این رشته وبقیهٔ جمله‌های آن رابدست‌آورید.

۴۴۱۸ ـ از : **حسین علوی** پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی ساری

درمثلث ABC از A خطی رسم‌می کنیم که ضلع BC را

در M قطع کند وزاویهٔ MAC سه‌برابرزاویهٔ MAB باشد.

به فرض $k = \frac{CM}{BM}$ زاویهٔA رابرحسب b و c و k بدست آورید .

مثال عددی : $k=۴$ و $c=۱$ و $b=۲$

۴۴۱۹ ـ فرستنده : **اسماعیل بابلیان** دبیر دبیرستانهای خمین

مطلوبست تعیین مکان هندسی اوساط وترهایی که دربیضی مفروض از A انتهای قطربزرگتررسم می‌شوند .

۴۴۲۰ـ از: **محمدمهدی عابدی نژاد** ششم‌ریاضی دبیرستان سخن

دربیضی مفروض وتر 'MM راچنان رسم کنید که‌طول آن می‌نیم بوده ازمرکزبیضی به‌زاویهٔ قائمه دیده شود.

۴۴۲۱ ـ فرستنده : **نادر بزرگی** دبیرستان البرز

دودایرهٔ مماس خارج‌مفروض است مکان هندسی نقاطی راتعیین کنید که نسبتهای مماسهای مرسوم‌ازآن نقاط بردودایره به‌نسبت شعاعهای دودایره باشد.

۴۴۲۲ ـ ترجمهٔ : **محمدمهدی عابدی نژاد**

نقطهٔ N برضلع AC ونقطهٔ M برضلع AB ازمثلث ABC واقع بوده رابطهٔ $CN\cdot CA = BM\cdot BA$ برقرار است . عمودمرسوم در N بر AC باعمود مرسوم در M بر AB یکدیگررا در D تلاقی می‌کنند . مکان هندسی نقطهٔ D راتعیین کنید .

۴۴۲۳ ـ از: **سیدحسن نبوی** پنجم‌ریاضی دبیرستان هدف ۱

زاویهٔ xOy ، نقطهٔ A واقع درداخل آن ونقطهٔ Pواقع درخارج آن مفروض است. از P خطی چنان رسم کنید که‌اگر Ox رادر B و Oy رادر C قطع کند خط OA نیمساز زاویهٔ BAC باشد.

۴۴۲۴ـ فرستندگان: **آلبرت رهبان، محمدمهدی عابدی نژاد**

دوخط متوازی Δ و Δ' و دو نقطهٔ A و B واقع دریک صفحه مفروض‌اند. از A خطی چنان رسم کنید که Δ و Δ'رادر C و D قطع کرده قطعه خط DC ازنقطهٔ B بزاویهٔ معین α دیده شود.

۴۴۲۵ ـ ترجمه ازفرانسه

دونقطهٔ ثابت A و H مفروض است. مثلث متنیرABC را درنظر می‌گیریم که A یك رأس آن و H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای آن بوده شعاع دایرهٔ محیطی آن با ارتفاع وارد از رأس A برابرباشد.

الف ـ مکان هندسی نقطهٔ M وسط ضلع BC را تعیین کنید .

ب ـ پوش دایرهٔ محیطی مثلث مزبور را تعیین کنید .

مسائل فیزیك

انتخاب توسط : هوشنگ شریفزاده

برای کلاسهای چهارم

۴۴۲۶ ـ فرستنده : **یوسف کشاورز** ، چهارم طبیعی دبیرستان کورش کبیر گچساران

دومیلهٔ فلزی A و B یك‌سانتیمتراختلاف طول دارندکه ضریب انبساط طولی‌آنها به‌ترتیب عبارتست از :

$\lambda_A = ۱۲\times۱۰^{-۶}$ و $\lambda_B = ۱۶\times۱۰^{-۶}$

طول اولیهٔ آنهارا طوری تعیین کنیدکه اختلاف طول‌این دومیله درتمام درجات ثابت وبرابربا یك سانتیمترباقی بماند.

۴۴۲۷ ـ فرستنده : **یوسف کشاورز**

دومیلهٔ آهنی به‌طولهای $AB = l_1$ و $AC = l_2$ باهم زاویهٔ قائمه تشکیل داده اند . ضریب‌انبساط میلهٔ BC وترمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC راچنان تعیین کنیدکه درتمام درجات‌زاویهٔ A قائمه باقی بماند.

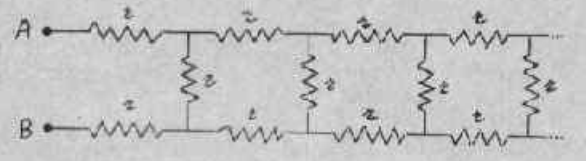
برای کلاسهای پنجم

۴۴۲۸ ـ از : **عالم کفعمی** دبیرستان مهران زاهدان

سه مقاومت چنان تعیین کنیدکه اگربه طور انشعابی ببندیم مقاومت معادل دهاهم شود و اگربه طور متوالی ببندیم مقاومت‌کل برابر ۱۱۰ اهم گردد. به‌فرض اینکه شدت جریان دریکی از انشعابهای مذکور دوبرابرشدت جریان در انشعاب دیگری است .

۴۴۲۹ ـ فرستنده : **رسول آژیری** دبیردبیرستانهای گچساران

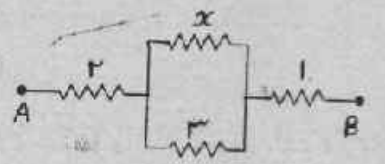
درشکل زیر تعدادی مقاومت r بین دو نقطهٔ A و B



بسته شده‌است . اگر تعداد مقاومتها بینهایت فرض شود مقاومت معادل بین دونقطهٔ A و B رابدست آورید.

۴۴۳۰ ـ فرستنده : **رسول آژیری**

درشکل زیر مقاومت x را طوری تعیین کنید که مقاومت معادل بین دونقطهٔ A و B برابر باهمان مقاومت x باشد.



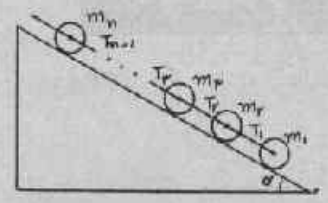
برای کلاسهای ششم و داوطلبان کنکور

۴۴۳۱ ـ فرستنده: **محمدصادق ابریشمی** دانشجوی وزارت پست و تلگراف

دونفر به وزنهای P_A و P_B درقایقی به‌وزن P به‌فاصلهٔ l ازیکدیگر نشسته‌اند. اگراین دوشخص جای خودرا بایکدیگر عوض کنندجهت ومقدار تغییرمکان قایق راحساب کنید. ازاصطکاک آب‌صرفنظرشود .

۴۴۳۲ ـ از: **حسین خبازیان ـ** ششم‌ریاضی‌دبیرستان نمونه اصفهان

تعداد n جسم به‌جرمهای m_1 و m_2 و m_3 و ... و m_n متوالیاً روی سطح‌شیبداری قرار گرفته وبوسیلهٔ نخی به‌یکدیگر متصل شده‌اند . اگر ضریب اصطکاک بین آنها و سطح به‌ترتیب K_1 و K_2 و K_3 و ... و K_n باشد.



اولا ـ کشش نخ‌های T_1 و T_2 و ... و T_{n-1} را حساب کنید .

ثانیاً ـ اگر

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3 = \dots = T_{n-1}$$

باشد شتاب را برحسب $K = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n}$ و کشش مساوی نخها راحساب کنید .

۴۴۳۳ ـ از : **کاظم تشکری** ششم ریاضی دبیرستان پهلوی همدان

به‌انتهای یک‌میلهٔ نازک و بی وزن‌فلزی‌به طول l گلوله‌ای به‌جرم m و به وسط‌آن نیز گلولهٔ دیگری به‌جرم m متصل‌است انتهای دیگرمیله به نقطهٔ O آویزان است . زمان تناوب این پاندول ازچه رابطه‌ای بدست می‌آید ؟

۴۴۳۴ ـ فرستنده : **مسعود فاخری** دانشجوی پلی‌تکنیک

یک مقاومت ویک‌خازن بطورسری‌برای فرکانس متغیری وصل شده‌اند. ولتاژدوسراین مدار V ولت می‌باشد.

۱) ثابت‌کنید که مقدار ولتاژ دوسرخازن برابراست با

$$V_c = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N}{N_0}\right)$$

که N فرکانس و $N_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ می‌باشد.

۲) ثابت‌کنید مقدار ولتاژ دو سر مقاومت به‌صورت

$$V_R = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N_0}{N}\right)$$

می‌باشد .

مسائل حل نشده (بقیه از صفحهٔ ۴۳۲)

متناوب با دورهٔ تناوب $n-1$ رقم (حداکثر) باشد ؟ اولین عدد ازاین اعداد ۷ است:

۷	۱۰
۰/۱۴۲۸۵۷۰۰۰۰	۳۰
	۲۰
	۶۰
	۴۰
	۵۰
	۱
	۰۰۰

ملاحظه می‌شود که کلیهٔ باقیمانده‌هایی که امکان دارد (عددهای ۱ تا ۶) درعمل تقسیم ظاهرشده‌اند ودورهٔ تناوب ۶ رقمی است. تاکنون طریق کلی عددهای ازنوع فوق تعیین نشده است. لازم است که عدد مورد نظراول باشد اما این شرط کافی نیست (مثلا $n = ۱۳$). توزیع اینچنین عدد هایی بین عدد های اول طبق قاعدهٔ معین نیست . وقتی n ترقی کند چگونه فواصلی دررشتهٔ اعداد طبیعی ایجاد می‌کند ؟ باید امیدوار بودکه بتوانند این فواصل‌را اندازه بگیرند.آیا این اعداد به ندرت وجود دارند؟ اطلاعات فعلی ما برای پاسخ دادن به این سؤال کافی نیست . تقریباً ثلث اولین عددهای اول این چنین خاصیتی را دارند و این نسبت بین عدد های اول کوچکتر از ۱۰۰۰ تقریباً ثابت باقی می‌ماند.آیا وقتی این خاصیت برای عددهای اول بزرگتر هم صادق باشد بین تعداد همهٔ عدد های اول وآنهایی که این خاصیت را دارند چه نسبتی برقرار است ؟آیا این‌نسبت به‌سمت حدمعینی‌مخالف باصفرمیل‌می‌کند؟طبقه‌ای‌ازاعداد وجود دارد که فراوانی‌مجانبی‌آنها با $\frac{1}{\mathrm{Log}N}$ برابر نیست ، اما این موضوع نسبی است .

حل مسائل یکان شماره ۴۲

کلاس چهارم طبیعی

۴۳۰۹ـ به ازاء چه مقدار از زاویهٔ u $(u<90^\circ)$ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر دارای جواب است و این جواب را معلوم کنید :

$$x^2+2(1-\cos u)x+2(1-\cos u)=0$$

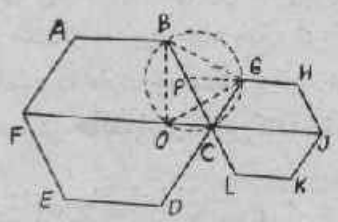
حل ـ مبین معادله را تشکیل می‌دهیم :

$$\Delta'=(1-\cos u)^2-2(1-\cos u)$$
$$=(1-\cos u)(1-\cos u-2)$$
$$\Delta'=(1-\cos u)(-1-\cos u)$$
$$=-(1-\cos u)(1+\cos u)$$
$$\Delta'=-(1-\cos^2 u)=-\sin^2 u$$

مقدار $\sin^2 u$ هیچگاه منفی نیست بنابراین غیر از $u=0$ که در ازاء آن $\Delta=0$ است به ازاء سایر مقادیر u مقدار Δ منفی بوده معادله جواب نخواهد داشت . تنها در یك حالت $u=0$ معادله جواب دارد. و در این حالت معادله چنین می‌شود :

$$x^2=0 \Longrightarrow x_1=x_2=0$$

۴۳۱۰ـ دوشش‌ضلعی منتظم و نامساوی ABCDEF و CGHJKL (رأسهای آنها درجهت‌حرکت عقربه‌های‌ساعت حرف‌گذاری شده است) در خارج یکدیگر واقع بوده اما در رأس C مشترك هستند و نقاط D ، C و G بر یك استقامت واقع‌اند. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث BCG خط FJ را درنقطهٔ O وسط آن قطع می‌کند و مثلث BOG متساوی‌الاضلاع است .



حل ـ درمثلث متوازی‌الاضلاع PCG داریم $CP=CG$ و چون هریك از دو کمان BG و OG به اندازهٔ ۱۲۰ درجه هستند پس $BG=OG$ و از تساوی دو مثلث BPG و OCG نتیجه می‌شود $OC=BP$ بنابراین داریم :

$$OC=BC-CG$$

$$OJ=BC-CG+CJ=\frac{FC}{2}-\frac{CJ}{2}+CJ$$
$$=\frac{FC+CJ}{2}=\frac{FJ}{2}$$

و چون هریك از کمانهای BG و OG و BO از دایرهٔ BCG به اندازهٔ ۱۲۰ درجه است پس: $BO=OG=BG$.

کلاس چهارم ریاضی

۴۳۱۱ـ اگر داشته باشیم :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

سه‌جمله‌ای زیر نسبت به x مربع کامل می‌باشد.

$$(a^2+c^2+e^2)x^2+2(ab+cd+ef)x+$$
$$+b^2+d^2+f^2$$

حل ـ باید داشته باشیم :

$$\Delta'=(ab+cd+ef)^2-(a^2+c^2+e^2)(b^2+$$
$$+d^2+f^2)=0$$

این رابطه بعداز اختصار می‌شود :

$$\Delta'=-(af-be)^2-(ad-bc)^2-(cf-ed)^2$$

با توجه به رابطهٔ مفروض $\Delta'=0$ بوده و درنتیجه سه‌جمله‌ای مزبور مربع کامل می‌باشد.

۴۳۱۲ـ دو معادلهٔ درجهٔ دوم چنان تعیین کنید که ریشه‌های هریك‌از آنها به ترتیب برابر باشندبامجموع وحاصل‌ـ ضرب ریشه‌های معادلهٔ دیگر.

حل ـ دو معادله را به صورت زیر فرض می‌کنیم :

$$(E)\quad x^2-px+q=0$$
$$(E')\quad x^2-p'x+q'=0$$

باید p و q ریشه‌های معادلهٔ (E') و p' و q' ریشه‌های معادلهٔ (E) باشند. بنابراین باید داشته باشیم :

$$(۱)\quad \begin{cases} p'+q'=p \\ p'q'=q \end{cases}$$

$$(۲)\quad \begin{cases} p+q=p' \\ pq=q' \end{cases}$$

از جمع عضو به‌عضو رابطه‌های (۱) و (۳) با هم و (۲) و (۴) با هم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q+q'=0 \\ p'q'+pq=0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} q+q'=0 \\ q(p-p')=0 \end{cases}$$

اگر $q=0$ باشد معادله‌های (۱) و (۳) به یك معادلهٔ $p=p'$ تبدیل شده و معادله‌های مطلوب عبارت می‌شوند از :

$$(E_۱)\quad x^۲-px=0$$

و

$$(E_۱')\quad x^۲-px=0$$

اگر $p-p'=0$ باشد از معادله‌های (۱) و(۳)نتیجه می‌شود $q=0$ و $q'=0$ و باز هم همان معادله‌های $(E_۱)$ و $(E_۱')$ بدست می‌آید .

۴۳۱۳ـ اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلثی بوده و تصاعد حسابی با قدر نسبت d تشکیل دهند، نامساویهای زیررا محقق کنید :

۱) $d<c$

۲) $d<\frac{b}{۲}$

۳) $d<\frac{a}{۳}$

۴) $d<\frac{۳a-c}{۸}$

۵) $d<\frac{a+۳c}{۶}$

۶) $d<\frac{۷a+۴b+۱۱c}{۴۰}$

حل- به ترتیب داریم :

۱) $a-b<c \Longrightarrow d<c$

۲) $a-c<b$ یا $۲d<b$ و $d<\frac{b}{۲}$

۳) $a<b+c$ یا $a<(a-d)+(a-۲d)$

$$\Longrightarrow d<\frac{a}{۳}$$

۴) $d<\frac{b}{۲}=\frac{a+c}{۴}$ یا $۲d<\frac{a+c}{۴}+\frac{a-c}{۲}$

$$\Longrightarrow d<\frac{۳a-c}{۸}$$

از جمع عضو به‌عضو نامساویهای (۱) و (۳) نامساویهای (۵)و از جمع طرفین پنج نامساوی از(۱) تا ۵ نامساوی (۶)بدست می‌آید .

۴۳۱۴ـ G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC است . ثابت کنید که اگر رابطهٔ $b^۲+c^۲=۲a^۲$ بین اندازه‌های ضلعها برقرار باشدنیمساز زاویهٔ BAC و نیمساز زاویهٔ BGC روی ضلع BC یکدیگررا قطع می‌کنند .

حل- با توجه به روابط :

$$m_b^۲=\frac{۲a^۲+۲c^۲-b^۲}{۴}=\frac{۳c^۲}{۴}$$

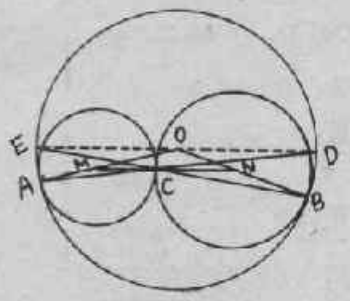
$$m_c^۲=\frac{۲a^۲+۲b^۲-c^۲}{۴}=\frac{۳b^۲}{۴}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{GB}{GC}=\frac{m_b}{m_c}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}$$

و بنا به قضیه مربوط به نیمساز حکم ثابت است .

۴۳۱۵ـ سه دایره به مرکزهای M و N و O غیر واقع بر یك خط مفروض است.دایره‌های (M) و (N) درنقطهٔ C مماس خارج هستند. دایره‌های (M)و(O) در A مماس داخل می‌باشند و دایره‌های (N) و (O) نیز در B مماس داخل می‌باشند



خطوط AC وBC را رسم می‌کنیم که دایرهٔ (O) را به‌ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید سه نقطهٔ D و O و E بر یك خط مستقیم واقع اند .

حل- OD و OE را رسم می‌کنیم ، داریم :

$$\text{ز}ADO=\text{ز}DAO=\text{ز}ACM$$

$$\text{ز}BEO=\text{ز}EBO=\text{ز}NCB$$

دوخط OD وOE با MN موازی بوده دریك امتدادواقع‌اند

کلاس پنجم طبیعی

۴۳۱۶ـ تابع زیررا در نظر می‌گیریم :

$$y=x^2-2(2a+1)x+8a-4$$

می‌نیمم تابع خود تابعی است برحسب a ، ماکزیمم‌این تابع‌را تعیین کنید .

حل‌ـ اگر m مقدار می‌نیمم باشد طبق فرمول مربوطه داریم :

$$m=\frac{4(8a-4)-4(2a+1)^2}{4}$$

$$=-4a^2+4a-5$$

و مقدار ماکزیمم تابع اخیر برابراست با :

$$\frac{4(-5)(-4)-16}{-16}=-4$$

۴۳۱۷ ـ اولا ثابت کنید که اگر $a=b+c$ باشد خواهیم داشت :

$$tga-tgb-tgc=tgatgbtgc$$

ثانیاً معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$tg3x=tg2x+tgx$$

حل‌ـ از رابطهٔ مفروض داریم :

$$tga=tg(b+c)=\frac{tgb+tgc}{1-tgbtgc}$$

و از این‌رابطه، رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود:

ثانیاً ـ چون $3x=2x+x$ بنابراین داریم:

$$tg3x-tg2x-tgx=tg3xtg2xtgx=0$$

یا

$$tgx=0 \Longrightarrow x=k\pi$$

$$tg2x=0 \Longrightarrow x=\frac{K_1\pi}{2}$$

$$tg3x=0 \Longrightarrow x=\frac{K_2\pi}{3}$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۳۱۸ـ اگر دومنحنی بامعادلات :

$$y=ax^2+bx+c \text{ و } y=a'x^2+b'x+c'$$

در دونقطه متقاطع باشند معادلهٔ خطی را تعیین کنیدکه برنقاط تقاطع آنها می‌گذرد .

حل‌ـ معادلهٔ خط را به صورت $y=mx+n$ فرض می‌کنیم بنابراین دومعادلهٔ زیر :

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=mx+n\\ a'x^2+b'x+c'=mx+n\end{cases}$$

$$\begin{cases}ax^2+(b-m)x+c-n=0\\ a'x^2+(b'-m)x+c'-n=0\end{cases}$$

دارای دوریشهٔ مشترك هستند و خواهیم داشت :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b-m}{b'-m}=\frac{c-n}{c'-n}$$

$$\Longrightarrow m=\frac{ab'-ba'}{a-a'} \text{ و } n=\frac{ac'-ca'}{a-a'}$$

و معادلهٔ خط قاطع مشخص می‌شود .

۴۳۱۹ـ تابع $y=x^2+x-1$ مفروض است. اگر منحنی (C) نمایش تابع ، خط Δ به معادلهٔ $y=ax+b$ را در دونقطه به طولهای x' و x'' قطع کند فرمول کلی توابع درجهٔ دومی را تعیین کنیدکه منحنی نمایش آنها خط Δ را در دونقطهٔ به طولهای $-x'$ و $-x''$ قطع می‌کنند. درامکان این مسئله بحث کنید. از بین این توابع آن را مشخص کنید که ضریب جملهٔدرجهٔ دوم آن برابر با یك بوده و منحنی(C') نمایش هندسی آن با (C) دارای مماس مشترکی به معادلهٔ:

$$y=3x-2$$

باشد. نقاط تماس هریك از منحنیهای (C) و (C') را باخط مماس مشترك بدست آورید.

حل‌ـ طولهای نقاط تلاقی (C) با Δ یعنی x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$(1)\quad x^2+(1-a)x-1-b=0$$

و معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $-x'$ و $-x''$ باشد عبارتست از :

$$(2)\quad k(x^2-(1-a)x-1-b)=0$$

که در آن k عدد ثابت می‌باشد. این معادله را به‌صورت زیر درمی‌آوریم :

$$kx^2-k(1-a)x-k(1+b)+ax+b$$

$$=ax+b$$

$$kx^2+(ak-k+a)x+b-bk-k-ax+b$$

و فرمول کلی تابع مطلوب عبارت می‌شود از :

$$(3)\quad y=kx^2+(ak-k+a)x+$$

$$+b-bk-k$$

شرط امکان مسئله آنست که معادلهٔ (1) دارای جواب باشد یعنی :

$$\Delta=(1-a)^2+4(1+b)\geq 0$$

یا

$$a^2-2a+4b+5\geq 0$$

ثانیاً $k=1$ است و تابع (3) عبارت می‌شود از .

$$(4)\quad y=x^2+(2a-1)x-1$$

برای اینکه این تابع برخط $y=3x-2$ مماس باشد باید معادلهٔ :

$$x^2+(2a-1)x-1=3x-2$$

یا

$$x^2+2(a-2)x+1=0$$

ریشهٔ مضاعف داشته باشد :

$$\Delta'=(a-2)^2-1=0 \Longrightarrow a=1 \text{ و } 3$$

در ازاء $a=1$ همان تابع مفروض بدست می‌آید تابع مطلوب در ازاء $a=3$ بدست می‌آید و عبارتست از :

$$y=x^2+5x-1$$

بسادگی معلوم خواهد شد که تابع مفروض در نقطهٔ $(1$ و $1)$ و تابع اخیر در نقطهٔ $(5-$ و $1-)$ برخط $y=3x-2$ مماس می‌باشند.

۴۳۲۰ـ در تابع $y=\sqrt{\sec 2x}$ ثابت کنید که :

$$y''=3y^5-y$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{\cos 2x}} \quad \text{و} \quad y'=\frac{\tg 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x}}$$

$$y''=\frac{2+\sin^2 2x}{\sqrt{\cos^5 2x}}-\frac{3-\cos^2 2x}{\sqrt{\cos^5 2x}}$$

$$y''=3\left[\sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}\right]^5-\sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}=3y^5-y$$

۴۳۲۱ـ اگر داشته باشیم :

$$A=\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$$

$$B=\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha$$

$$k=\frac{A^2}{\sin^2 3\alpha}+\frac{B^2}{\cos^2 3\alpha}$$

حل‌ـ داریم :

$$\cos 2\alpha=\cos(3\alpha-\alpha)=\cos 3\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin\alpha$$

$$A=\sin 3\alpha\sin\alpha$$

و

$$B=\cos 3\alpha\cos\alpha$$

$$k=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

۴۳۲۲ـ دو خط عمود برهم $x'x$ و $y'y$ که در O مشترک هستند مفروض است . بر $x'x$ دو نقطهٔ A و A' به فاصله‌های

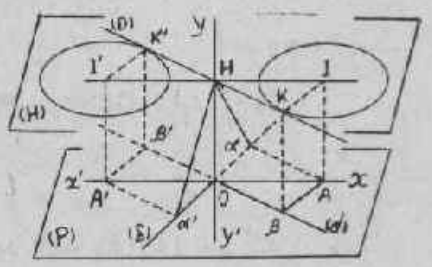
$$OA=OA'=a$$

از O تعیین کرده خط غیر مشخص (D) را در نظر می‌گیریم بقسمی‌که درنقطه‌ای مانند H بر $y'y$ عمود بوده و دوصفحهٔ $[(D)$ و $A]$ و $[(D)$ و $A']$ بر یکدیگر عمود باشند . صفحات (P) و (H) را به ترتیب در O و H عمود بر $y'y$ مرور داده و تصویر قائم (D) را بر (P) به (d) نمایش می‌دهیم .

۱) ثابت کنید که (d) مماس مشترک داخلی دودایرهٔ به مرکزهای A و A' و با شعاعهای مساوی OH واقع درصفحهٔ (P) می‌باشد. درصفحهٔ (H) دودایرهٔ به شعاع مساوی با OH وجود دارد که (D) مماس مشترک آنها می‌باشد. I و I' مرکزهای این دو دایره را تعیین کنید.

۲) اگر k و k' نقاط تماس (D) با دایره‌های (I) و (I') باشد طولهای Ok و Ok' را برحسب a حساب کنید .

حل‌ـ درصفحهٔ (P) خط (δ) را از O عمود بر (d) رسم می‌کنیم . (D) و (d) متوازی‌اند. صفحهٔ $[(\delta)$ و $H]$ بر (D) و بر (d) عمود است و بنابراین صفحهٔ مسطحهٔ فرجهٔ بهپال (D) می‌باشد که وجوه آن یکی بر A و دیگری بر A' می‌گذرد این وجوه صفحهٔ P را در خطوطی قطع می‌کنند که به ترتیب از A و A' گذشته با (d) موازی و در نتیجه بر (δ) در نقاطی مانند α و α' عمود می‌باشند. زاویهٔ $\alpha H\alpha'$ قائمه است و از تساوی $OA=OA'$ نتیجه می‌شود که $O\alpha=O\alpha'$



پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $H\alpha'$، میانهٔ HO با نصف وتر یعنی با $O\alpha$ و $O\alpha'$ برابر است. اگر β و β' به‌ترتیب تصویرهای A و A' بر (d) باشد از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که :

$$A'\beta'=O\alpha'=OH \quad \text{و} \quad A\beta=O\alpha=OH$$

یعنی (d) مماس مشترک دودایره به مرکزهای A و A' و به شعاع برابر با OH واقع در صفحهٔ (P) می‌باشد.

اگر دوایر مزبور و (d) را بر صفحهٔ (H) تصویر کنیم به سادگی نتیجه خواهد شد که (D) مماس مشترک دودایرهٔ به مرکزهای I و I' و به شعاع برابر با OH واقع در صفحهٔ (H) می‌باشد. I و I' به ترتیب تصویرهای قائم A ، A' بر (H) می‌باشند .

۲) در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $O\beta K$ و $O\beta'K'$ داریم:

$$OK'=O\beta'+\beta K'=O\beta'+A\beta'=OA'=a'$$

$$\Longrightarrow OK'=OK=a$$

نقطه‌های K و K' بر کرهٔ به مرکز O و بشعاع a قراردارند.

کلاس ششم طبیعی

۴۳۲۳ـ معادلهٔ هذلولی را تعیین کنید که رأسهایش روی کانونهای بیضی به معادلهٔ :

$$۹x^۲+۱۶y^۲-۱۴۴=۰$$

قرارداشته در رأسهای بیضی نیز روی کانونهای هذلولی واقع باشد.

حل ـ معادلهٔ بیضی را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$$

$$a=۴ \ ، \ b=۳ \ و \ c=\sqrt{۷}$$

و برای هذلولی خواهیم داشت :

$$a'=\sqrt{۷} \ و \ c'=۴ \ و \ b'=۳$$

و معادلهٔ آن عبارت خواهد شد از :

$$\frac{x^۲}{۷}-\frac{y^۲}{۹}=۱$$

یا

$$۹x^۲-۷y^۲-۶۳=۰$$

۴۳۲۴ـ منحنیهای نمایش دوتابع :

$$y=\sin\frac{\pi x}{۲} \ و \ y=\frac{۱}{x}$$

را وقتی x در فاصلهٔ (۰و۱۰) تغییر کند در یك‌شکل رسم کنید و از روی آن معلوم کنید که معادلهٔ $x\sin\frac{\pi x}{۲}=۱$ در فاصلهٔ مزبور دارای چندجواب است وکوچکترین جواب‌را تعیین کنید.

حل ـ تابع مثلثاتی با دورهٔ تناوب ۴ است، منحنی‌آن را در فاصلهٔ (۴و۰) رسم‌کرده آن را انتقال میدهیم.

مشتق دوتابع برابراست با :

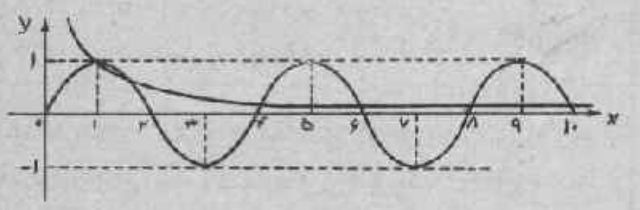
$$y'=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲} \ و \ y'=\frac{-۱}{x^۲}$$

جدول تغییرات و شکل دومنحنی به‌قرارزیر است:

x	۰		۱		۲		۳		۴
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y	۰	↗	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰

x	۰		+∞
y'		−	
y	+∞	↘	۰

و



در فاصلهٔ مزبور دومنحنی دارای ۶ نقطهٔ تقاطع می‌باشند. پس معادلهٔ مفروض‌در این فاصله‌دارای۶ جواب است که‌کوچکترین آنها ۱ = x می‌باشد .

کلاس ششم ریاضی

۴۳۲۵ـ دوتابع زیررا درنظر می‌گیریم :

$$y_۱=ax\sqrt{x^۲+۱} \quad و \quad y_۲=\frac{bx}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

۱ـ خط Δ به معادلهٔ $x=k$ منحنی($C_۱$) نمایش‌هندسی تابع $y_۱$ را در M و منحنی ($C_۲$) نمایش هندسی تابع $y_۲$ را در N قطع می‌کند. اگر مثلث MNO درراس O شبه قائمه بوده و ($C_۱$) و ($C_۲$) در نقطهٔ O مبدأ مختصات بریکدیگر مماس باشند مقادیر a و b را تعیین‌کنید به شرط آنکه مقادیر طول و عرض هریك از نقاط M و N هم‌علامت‌باشند. (مثلث ABC به رأس A شبه قائمه نامیده می‌شود هرگاه تفاضل دوزاویهٔ B و C برابر ۹۰درجه باشد).

۲ـ به فرض $a=b=۱$:

اولا منحنیهای ($C_۱$) و($C_۲$) را دریك دستگاه‌محورهای مختصات رسم کرده وضع نسبی آنها را در O تعیین‌کنید .

ثانیاً معلوم‌کنید به‌ازاء چه مقادیراز λ خط(D) به‌معادلهٔ:

$$y=\lambda x$$

با هریك از منحنیهای $C_۱$ و $C_۲$ علاوه بر O متقاطع‌می‌باشد. اگر ($D_۱$) و ($D_۲$) دو وضع از (D) باشند که نسبت‌به‌نیمساز ربع اول و سوم محورها قرینهٔ یکدیگر باشند و ($D_۱$) منحنی

منحنی (C_1) را در M و (D_2) منحنی (C_2) را در N قطع کند ثابت کنید که M و N روی خطی عمود بر $x'x$ قرار دارند.

ثالثاً ـ مساحت سطح محصور بین دو منحنی و مبدأ مختصات و خط $x=k>0$ را حساب کنید.

حل ـ چون x و y طول و عرض هر یك از نقطه‌های M و N هم‌علامت هستند a و b هر دو مثبت می‌باشند. مشتق دو تابع بعد از اختصار می‌شود:

$$y_1' = \frac{2ax^2+a}{\sqrt{x^2+1}} \quad و \quad y_2' = \frac{b}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

دو منحنی در مبدأ برهم مماس‌اند پس:

$$m_1 = m_2 \;:\; a=b$$

اگر H نقطهٔ تلاقی Δ با $x'x$ باشد چون مثلث OMN در O شبه قائمه است و OH ارتفاع نظیر رأس O است بنابراین:

$$\overline{OH}^2 = \overline{HN}\cdot\overline{HM}$$

$$x^2 = y_1 \cdot y_2 = abx^2 \Longrightarrow ab=1$$

$$\begin{cases} a=b>0 \\ ab=1 \end{cases} \Longrightarrow a=b=1$$

۲ـ هریك از دو تابع دارای جمیع مقادیر x معین و اتصالی است. مشتق هریك از دو تابع:

$$y'_1 = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad و \quad y'_2 = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

دارای جمیع مقادیر x مثبت است پس هریك از دو تابع همواره صعودی می‌باشد. وقتی $x \to \pm\infty$ در تابع اول داریم:

$$y_1 \to \pm\infty$$

اما در تابع دوم:

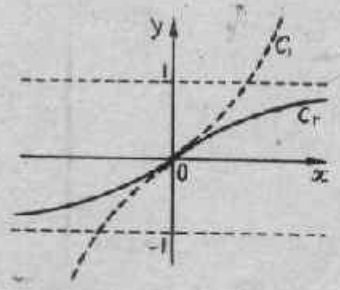
$$\begin{cases} x \to +\infty \\ y_2 \to 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x \to -\infty \\ y_2 \to -1 \end{cases}$$

جدول تغییرات و شکل دو منحنی به قرار زیر است:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'_1		$+$		$+$	
y_1	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'_2		$+$		$+$	
y_2	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

دو منحنی در O بر یکدیگر مماس هستند و هم از یکدیگر می‌گذرند نیمساز اول و سوم مماس مشترك آنهاست. وقتی $x \to +\infty$ حد $\frac{y_1}{x}$ برابر با $+\infty$ و حد $\frac{y_2}{x}$ برابر 1 صفر است پس تحدب (C_1) در شاخهٔ با طولهای مثبت آن به سمت yهای منفی و از (C_2) به سمت yهای مثبت است و در شاخهٔ با طولهای منفی به ترتیب عکس. مبدأ مختصات برای هر دو منحنی نقطهٔ عطف می‌باشد.



ثانیاً ـ از معادلات:

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+1} = \lambda x \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lambda x \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x^2+1} = \lambda \\ \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که λ باید مثبت باشد و با این شرط داریم

$$(1)\quad x^2 = \lambda^2 - 1 \quad و \quad (2)\quad x^2 = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}$$

خط (D) غیر از مبدأ وقتی با منحنی (C_1) متقاطع است که $\lambda > 1$ باشد و این شرط برای منحنی (C_2) می‌شود $0<\lambda<1$. (D_1) و (D_2) که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند دارای معادله‌های به صورت:

$$y = \lambda x \quad و \quad y = \frac{1}{\lambda} x$$

می‌باشند طولهای نقاط M و N نقاط تقاطع خطوط مزبور با منحنیهای C_1 و C_2 به ترتیب برابر می‌شود با:

$$x_M = \sqrt{\lambda^2-1} \quad و \quad x_N = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^2}}} = \sqrt{\lambda^2-1}$$

نقاط M و N معطول می‌باشند.

ثالثاً ـ در تابع y_1 اگر فرض کنیم $u = x^2+1$ داریم $u' = 2x$ و:

$$y_1 = \frac{1}{2}u' u^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow Y_1 = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$Y_1 = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C_1$$

$$y_2=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Longrightarrow Y_2=\sqrt{u}+C_1$$

$$Y_2=\sqrt{x^2+1}+C_2$$

$$S_1=\left[\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right]_0^k$$

$$S_1=\frac{1}{3}\left[(k^2+1)\sqrt{k^2+1}-1\right]$$

$$S_2=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^k=\sqrt{k^2+1}-1$$

$$S=S_1-S_2=\dots$$

۴۳۲۶ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زاویهٔ A قائمه بوده طول وتر $BC=a$ وحاصلضرب BD و CE نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C برابر l^2 می‌باشد. اولا صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید.

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{3a^2}$$

ثانیاً ـ زاویه‌های B و C را یافته بحث کنید.

ثالثاً ـ اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد صحت رابطهٔ زیررا محقق کنید:

$$BI\cdot CI=\frac{l^2}{2}$$

حل ـ طبق فرمولهای مربوط و با توجه به اینکه:

$$\sin A=1$$

است داریم:

$$BD=\frac{a\sin C}{\cos\frac{B}{2}} \quad , \quad CE=\frac{a\sin B}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$BD\cdot CE=\frac{a^2\sin B\sin C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{4a^2}$$

ثانیاً ـ ازرابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]=\frac{l^2}{4a^2}$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{l^2}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

باید داشته باشیم:

$$0<\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{B-C}{2}<1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{l^2}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Longrightarrow l^2<(2-\sqrt{2})a^2$$

با شرط اخیر داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{B-C}{2}=\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{l^2}{2a^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ \dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

و زاویه‌های B و C تعیین می‌شوند.

ثالثاً ـ زاویهٔ BIC برابر است با:

$$\pi-\frac{B+C}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

ودر مثلث BIC طبق روابط سینوسها داریم:

$$BI=\frac{a\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad CI=\frac{a\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}}$$

$$BI=a\sqrt{2}\sin\frac{C}{2} \quad , \quad CI=a\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$BI\cdot CI=2a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{2}$$

۴۳۲۷ـ عددهای صحیح a واقع بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را تعیین کنید برای آنکه معادلهٔ $ax^2+x-6=0$ دارای دو جواب منطق باشد.

حل ـ در معادلهٔ مفروض باید داشته باشیم:

$$\Delta=1+24a=N^2 \Longrightarrow a=\frac{N^2-1}{24}$$

a عدد صحیح است پس N اولا باید فرد باشد مثلا فرض می‌کنیم:

$$N=2M+1$$

$$a=\frac{(2M+1)^2-1}{24}=\frac{M(M+1)}{6}$$

حاصلضرب $M(M+1)$ باید بر ۶ بخش‌پذیر باشد و علاوه بر آن در شرط:

$$100<a<200 \Longrightarrow 600<M(M+1)<1200$$

صدق کند. مضارب ۶ محصور بین ۶۰۰ و ۱۲۰۰ را درنظر گرفته، ازروی آن مقادیر قابل قبول M را تعیین می کنیم ونتیجه می‌شود :

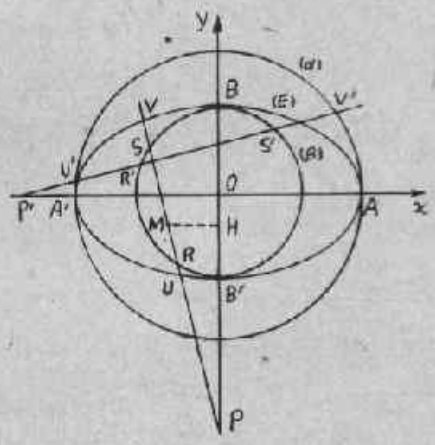
$$M=۲۴ \text{ یا } ۲۷ \text{ یا } ۳۰ \text{ یا } ۳۲ \text{ یا } ۳۳$$

$$a=۱۰۰ ، ۱۱۷ ، ۱۲۶ ، ۱۴۵ ، ۱۵۵ ، ۱۷۶ ، ۱۸۷$$

۴۳۲۸ـ بیضی (E) به قطر اطول AA' و به قطر اقصر BB' مفروض است . به قطرهای AA' و BB' دایرمعای (α) و (β) را رسم می کنیم . درامتداد BB' نقطهٔ P را انتخاب کرده از آن قاطعی رسم می کنیم که بیضی را در U و V و دایرهٔ (β) را در R و S قطع بکند. اگر M مزدوج توافقی P نسبت به R و S باشد ثابت کنید که مزدوج توافقی P نسبت به U و V نیز همان M می‌باشد .

حکم مزبور را درحالتی ثابت کنید که P' را در امتداد AA' اختیار کرده قاطعی رسم کنید تا (α) را در R' و S' و بیضی را در U' و V' قطع کند .

حل ـ محورهای $x'x$ و $y'y$ منطبق بر AA' و BB' انتخاب کرده $AA'=۲a$ و $BB'=۲b$ را اختیار کرده و فرض می کنیم :



$$P\begin{vmatrix}۰\\ y_۱\end{vmatrix} \text{ و } M\begin{vmatrix}x_۲\\ y_۲\end{vmatrix} \text{ و } R\begin{vmatrix}x_۳\\ y_۳\end{vmatrix} \quad S\begin{vmatrix}x_۴\\ y_۴\end{vmatrix}$$

$$U\begin{vmatrix}x_۵\\ y_۵\end{vmatrix} \text{ و } V\begin{vmatrix}x_۶\\ y_۶\end{vmatrix}$$

اگر H تصویر M بر BB' باشد MH قطبی P نسبت به دایرهٔ (β) است و داریم :

$$\overline{OP}\cdot\overline{OH}=b^۲ \Longrightarrow y_۱\cdot y_۲=b^۲$$

ضریب زاویهٔ خط PM را m فرض می کنیم پس معادلهٔ آن می‌شود:

$$y=mx+y_۱$$

مختصات نقاط U و V از حل دستگاه معادلات بیضی و خط PM بدست می‌آید.

$$\begin{cases} b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲ \\ y=mx+y_۱ \end{cases}$$

$$(a^۲m^۲+b^۲)x^۲+۲a^۲my_۱x+a^۲(y_۱^۲-b^۲)=۰$$

$x_۵$ و $x_۶$ جوابهای این معادله می‌باشند پس :

$$x_۵+x_۶=-\frac{۲a^۲my_۱}{a^۲m^۲+b^۲} \text{ و } x_۵x_۶=\frac{a^۲(y_۱^۲-b^۲)}{a^۲m^۲+b^۲}$$

$x_۲$ طول نقطهٔ M از دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y_۲=mx_۲+y_۱ \\ y_۱y_۲=b^۲ \end{cases} \Longrightarrow x_۲=\frac{b^۲-y_۱^۲}{my_۱}$$

برای اینکه ثابت کنیم M مزدوج توافقی P نسبت به U و V است کافی است رابطهٔ زیررا محقق کنیم :

$$\frac{۲}{x_۲}=\frac{۱}{x_۵}+\frac{۱}{x_۶}=\frac{x_۵+x_۶}{x_۵x_۶}$$

بنا به روابطی که بدست آورده‌ایم داریم :

$$\frac{۲my_۱}{b^۲-y_۱^۲}=\frac{-۲amy_۱}{a^۲m^۲+b^۲}\times\frac{a^۲m^۲+b^۲}{a^۲(y_۱^۲-b^۲)}$$

$$=\frac{۲my_۱}{b^۲-y_۱^۲}$$

یعنی رابطهٔ مزبور برقرار می‌باشد .

نسبت به نقطهٔ P' به طریق مشابه با طریق بالا حکم مربوط ثابت خواهد شد.

مسائل متفرقه

۴۳۲۹ـ معادلات زیررا حل کنید :

$$۵۰\times\frac{۲^{x^۲}}{۱۲۵^x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸^x}{(۵^x)^x}$$

$$(a^x-۳)a^{۲x}-a^{-x}+۳=۰$$

حل ـ معادلهٔ اول را به صورت زیرمی‌نویسیم :

$$۵^۲\times۲\times۲^{x^۲}\times۲\times۵^{x^۲}=۲^{۳x}\times۵^{۳x}$$

$$۱۰^{x^۲+۲}=۱۰^{۳x} \Longrightarrow x^۲+۲=۳x$$

$$x^۲-۳x+۲=۰ \Longrightarrow x=۱ \text{ و } ۲$$

با فرض $a^x = A$ معادلهٔ دوم به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$(A-3)A^2 - \frac{1}{A} + 3 = 0$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A - 1 = 0$$

$$(A^2-1)(A^2+1) - 3A(A^2-1) = 0$$

$$(A^2-1)(A^2-3A+1) = 0$$

$$A = a^x = \pm 1 \quad \text{یا} \quad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{به} \quad \log a$$

۴۳۳۰ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6} - (x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x} - \sqrt[5]{x-6}} = 30$$

حل ـ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}} - (x-6)}{1 - \sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}} = 30$$

با فرض $u^5 = \frac{x-6}{39-x}$ و بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$\frac{33u(1-u^3)}{(1+u^5)(1-u)} = 30$$

$$10u^4 - 21u^3 + 10u^2 - 21u + 10 = 0$$

معادله‌ای است درجهٔ چهارم کامل معکوسه، طبق قاعدهٔ مربوط عمل می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$u = 2 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 7 \quad \text{و} \quad 38$$

۴۳۳۱ـ اگر داشته باشیم:

$$f(n) = f(n-1) + 2n - 1 \,,\; n > 1 \quad f(1) = 1$$

مقدار $f(2n)$ را برحسب n بدست آورید.

حل ـ روابط زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = f(1) + 3$$

$$f(3) = f(2) + 5$$

. . . . . .

$$f(2n-1) = f(2n-2) + 4n - 3$$

$$f(2n) = f(2n-1) + 4n - 1$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$f(2n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 4n - 1$$

طرف دوم مجموع $2n$ جمله از رشتهٔ اعداد فرد می‌باشد بنابراین:

$$f(2n) = (2n)^2 = 4n^2$$

۴۳۳۲ـ مقصود از $\prod_{n=1}^{n} f(n)$ یعنی حاصل ضرب n عامل:

$$f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)f(n)$$

مطلوبست تعیین حاصل‌ضربهای زیر:

$$P = \prod_{n=0}^{n} (4^{3^n} - 2^{3^n} + 1)$$

حل ـ داریم:

$$P = (4-2+1)(4^3-2^3+1)(4^9-2^9+1)(4^{3^n}-2^{3^n}+1)\cdots$$

با توجه به روابط:

$$3(4-2+1) = 2^2+1$$

$$(2^2+1)(4^2-2^2+1) = 2^6+1$$

$$(2^6+1)(4^6-2^6+1) = 2^{12}+1$$

. . . . . .

$$(2^{3^n}+1)(4^{3^n}-2^{3^n}+1) = 2^{3^{n+1}}+1$$

خواهیم داشت:

$$P = \frac{1}{3}(2^{3^{n+1}}+1)$$

۴۳۳۳ـ ابعاد مستطیلهایی را تعیین کنید که در آنها مقدار عددی محیط با مقدار عددی مساحت مساوی بوده و برابر باعدد صحیح مفروض باشد. مسئله را برای مثلث قائم‌الزاویه و برای مربع بررسی کنید.

حل ـ ابعاد مستطیل را با x و y و عدد مربوط به مساحت ومحیط را با N نمایش می‌دهیم.

$$xy = 2(x+y) = N \Longrightarrow y = \frac{N}{x}$$

$$2x^2 - Nx + 2N = 0 \quad \text{و} \quad x = \frac{N \pm \sqrt{N^2 - 16N}}{4}$$

شرط امکان مسئله آنست که $N \geq 16$ باشد.

در ازاء مقادیر ۲۵ و ۱۸ و $N = 16$ ابعاد مستطیلهای مربوط عبارت خواهد شد از:

(۲/۵ و ۱۰) و (۳ و ۶) و (۴ و ۴)

در مورد مثلث قائم‌الزاویه داریم :

$$\frac{1}{2}xy = x+y+\sqrt{x^2+y^2} = N$$

$y=\frac{2N}{x}$ را در معادلهٔ دوم منظور می‌کنیم. پس از اختصار نتیجه خواهد شد:

$$2x^2-(N+4)x+4N=0$$

از روی این معادله x بر حسب N حساب می‌شود. شرط امکان جواب $N\geq 24$ خواهدبود.

در مورد مربع داریم $x^2=4x=N$ و فقط یك جواب $x=4$ وجود دارد.

۴۳۳۴ـ رأسهای مقابل یك چهارضلعی کامل‌را به‌ترتیب A, A', B, B', C, C' می‌نامیم. ثابت کنید :

$$\frac{AB\cdot AB'}{A'B\cdot A'B'}=\frac{AC\cdot AC'}{A'C\cdot A'C'}$$

حل‌ـ در هریك ازچهار مثلثی‌که در چهارضلعی کامل وجود دارد بنا به روابط سینوسها خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B} \text{ و } \frac{AB'}{AC'}=\frac{\sin C'}{\sin B'}$$

$$\frac{A'C'}{A'B}=\frac{\sin B}{\sin C'} \text{ و } \frac{A'C}{A'B'}=\frac{\sin B'}{\sin C}$$

و رابطهٔ داده شده به صورت زیر نوشته شده محقق می‌باشد:

$$\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\sin C'}{\sin B'}\cdot\frac{\sin B}{\sin C'}\cdot\frac{\sin B'}{\sin C}=1$$

۴۳۳۵ـ از نقطهٔ P واقع در داخل مثلث ABC عمودهای PH ، PK و PL را به ترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$(BH^2-CH^2)+(CK^2-AK^2)+$$
$$+(AL^2-BL^2)=0$$

حل‌ـ با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلثهای‌قائمه‌ای که تشکیل می‌شود عبارت طرف اول تساوی بالا عبارت خواهد شد از :

$$(PB^2-PC^2)+(PC^2-PA^2)+$$
$$+(PA^2-PB^2)=0$$

۴۳۳۶ـ مثلثی رسم‌کنید که در آن $BC=a$

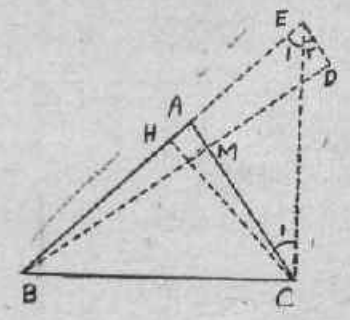
و $b+c=l$ و $h_b+h_c=k$

معلوم‌است. همچنین مثلثی رسم‌کنید که از آن :

$BC=a$ و $|b-c|=l$ و $|h_b-h_c|=k$

معلوم باشد .

حل‌ـ اگر مثلث رسم شده باشد ارتفاع BM را به‌اندازهٔ $MD=CH$ امتداد داده و از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. داریم :



$$BE=b+c=l \text{ و } BD=h_b+h_c=k$$

زاویهٔ AED با زاویهٔ A از مثلث برابر است و هر یك از دوزاویهٔ E_1 و E_2 بازاویهٔ C_1 برابر بوده خط EC نیمساز زاویهٔ BED می‌باشد و راه حل زیر نتیجه می‌شود:

مثلث قائم‌الزاویهٔ BDEرا با معلوم‌بودن وتر$BE=l$ و یك ضلع $BD=k$ رسم می‌کنیم. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a نیمساز زاویهٔ BED را در C قطع می‌کند و از تلاقی عمود منصف EC با BE نقطهٔ A را بدست می‌دهد . مسئله حداکثر دوجواب دارد .

در مورد معلوم‌بودن تفاضل دوضلع با تفاضل دو ارتفاع راه ترسیم مشابه می‌باشد با این تفاوت MD را روی MB به اندازهٔ CH جدا می‌کنیم .

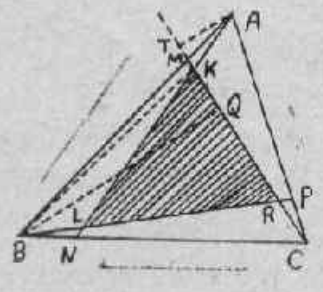
۴۳۳۷ـ مطلوبست رسم مثلثی با معلومات زاویهٔ A ، ضلع BC و مجموع دو ارتفاع BE و CF .

حل‌ـ راه ترسیم نظیر مسئلهٔ قبل است با این تفاوت که مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE با معلوم بودن وتر و یك زاویهٔ حاده رسم می‌شود .

۴۳۳۸ـ روی ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABC نقطه‌های M ، N و P را به ترتیب چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=\frac{1}{4}$$

خطوط AN ، BP وCMرا رسم‌می‌کنیم از تلاقی آنها مثلث KLRبوجودمی‌آید مساحت این مثلث را برحسب مساحت مثلث ABC بدست آورید .



حل- AT و BQ را عمود بر CM رسم می‌کنیم. مساحتهای دومثلث AKC و BKC را به ترتیب S_2 و S_3 فرض می‌کنیم داریم :

$$\frac{S_2}{S_3}=\frac{KC\cdot QB}{KC\cdot AT}=\frac{BQ}{AT}$$

از تشابه دو مثلث BQM و ATM داریم :

$$\frac{BQ}{AT}=\frac{BM}{MA}=4 \Longrightarrow \frac{S_2}{S_3}=4$$

و اگر مساحت مثلث AKB را S_4 فرض کنیم به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{S_4}{S_3}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_4}{S_3}=\frac{S_2+S_4}{S_3}=4+\frac{1}{4}$$

$$\frac{S_2+S_3+S_4}{S_3}=4+\frac{1}{4}+1$$

به فرض اینکه S مساحت مثلث ABC و S_1 مساحت مثلث KLR باشد رابطهٔ اخیر برابر می‌شود با :

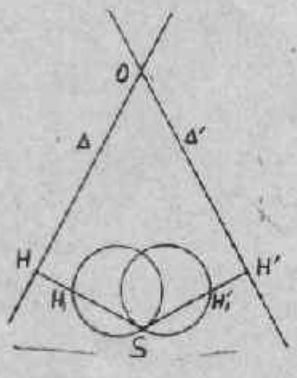
$$\frac{S}{S_3}=\frac{21}{4} \text{ یا } S_3=\frac{4}{21}S$$

سه مثلث AKC و BRC و CLA با هم معادل هستند. بنابراین :

$$S_1=S-3\times\frac{4}{21}S=\frac{3}{7}S$$

۴۳۳۹- ۱) مکان هندسی قطبهای انعکاسهایی را تعیین کنید که دو خط متقاطع مفروض را به دو دایرهٔ متساوی تبدیل می‌کنند.

۲) قطبهای انعکاسهایی را تعیین کنید که در آنها سه ضلع یك مثلث مفروض به سه دایرهٔ متساوی تبدیل شوند. ثابت کنید که در این انعکاسها مبدل دایرهٔ محیطی مثلث دایره‌ای است متساوی با سه دایرهٔ دیگر.



حل- ۱) فرض می‌کنیم Δ و Δ′ دو خط و S نقطه‌ای از صفحه بوده تصویرهای آن بر Δ و Δ′ به ترتیب H و H′ باشد. در انعکاس به قطب S و به قوت p منعکسهای Δ و Δ′ دو دایره است به قطرهای SH_1 و SH'_1 که از رابطهٔ زیر معین می‌شوند :

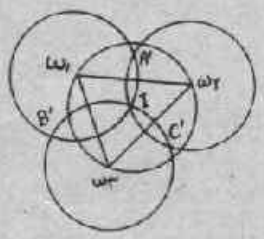
$$\overline{SH}\cdot\overline{SH_1}=\overline{SH'}\cdot\overline{SH'_1}=p$$

اگر دو دایره مساوی باشند $SH_1=SH'_1$ بوده و در نتیجه می‌شود :

$$SH=SH'$$

بنابراین مکان S عبارتست از نیمسازهای زاویه‌هایی که دو خط Δ و Δ′ با هم می‌سازند. نقطهٔ O محل تلاقی دو خط از این مکان مستثنی است.

۲) بنابر آنچه قبلا ثابت شد قطبهای انعکاسهای مطلوب مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث می‌باشد. یکی از این انعکاسها مثلا انعکاس به قطب I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را در نظر می‌گیریم. در این انعکاس منعکسهای سه ضلع مثلث سه دایرهٔ متساوی می‌شود به مرکزهای ω_1 و ω_2 و ω_3 که هر سه در I مشترکند و دو به دو در سه نقطهٔ A′ و B′ و C′ متقاطع می‌باشند این نقاط منعکسهای نقاط A و B و C می‌باشند؛ پس منعکس دایرهٔ O محیطی مثلث دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ می‌باشد.



نقطهٔ I مرکز دایرهٔ O′ محیطی مثلث A′B′C′ است اما دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ عبارتست از مجانس دایرهٔ اولر (نه نقطه) مثلث $\omega_1\omega_2\omega_3$ در تجانس به مرکز I و به نسبت ۲ بنابراین دایرهٔ O′ با دایرهٔ محیطی مثلث $\omega_1\omega_2\omega_3$ و در نتیجه با هریك از سه دایرهٔ ω_1 و ω_2 و ω_3 برابر می‌باشد.

مسائل فیزیك

۴۳۴۰- شعاع بالن را محاسبه کنید که اگر m حجم از گاز A به جرم مولکولی a و n حجم از گاز B به جرم مولکولی b در آن وارد نمائیم و آنرا در گاز C به جرم مولکولی c قرار دهیم در شرائط متعارفی بالن به حالت غوطه‌ور باقی بماند درصورتی که جرم هر مترمکعب لفاف بالن درشرایط متعارفی p کیلوگرم باشد.

حل- برای آنکه بالن به حالت غوطه‌ور در گاز C باقی بماند باید وزن آن با وزن گاز هم‌حجمش مساوی باشد و

اگر شعاع کره R باشد داریم :

$$V_A=\frac{۴\pi mR^۳}{۳(m+n)} \text{ و } V_B=\frac{۴\pi nR^۳}{۳(m+n)}$$

$$M_A=a\times\frac{۴\pi mR^۳}{۳(m+n)}\times\frac{۲۲/۴}{۱۰۰۰}$$

$$=\frac{۴۰۰۰\pi amR^۳}{۳\times۲۲/۴(m+n)}$$

به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$M_B=\frac{۴۰۰۰\pi bnR^۳}{۳\times۲۲/۴(m+n)}$$

وزن لفاف $m=۴\pi R^۲\times۱۰۰۰\times p=۴۰۰۰\pi pR^۲$

وزن گاز هم‌حجم :

$$M_H=\frac{۴۰۰۰\pi cR^۳}{۳\times۲۲/۴}$$

باید داشته باشیم :

$$M_A+M_B+m=M_H$$

$$\frac{۴۰۰۰\pi amR^۳}{۳\times۲۲/۴(m+n)}+\frac{۴۰۰۰\pi bnR^۳}{۳\times۲۲/۴(m+n)}+۴۰۰۰\pi pR^۲=\frac{۴۰۰۰\pi cR^۳}{۳\times۲۲/۴}$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$R=\frac{۳\times۲۲/۴(m+n)p}{(c-a)m+(c-b)n}$$

۴۳۴۱ـ وزن ظاهری یك جسم درمایعی به‌وزن‌مخصوص $d_۱$ برابر $P_۱$ و در مایعی به وزن مخصوص $d_۲$ برابر $P_۲$ و در مایعی به وزن مخصوص $d_۳$ برابر $P_۳$ است. ثابت کنید که

$$(d_۲-d_۳)P_۱+(d_۳-d_۱)P_۲+(d_۱-d_۲)P_۳=۰$$

حل‌ـ اگر حجم جسم V و وزن آن در خلاء برابر P باشد می‌توان به ترتیب چنین نوشت :

$$P-P_۱=d_۱V \text{ و } P-P_۲=d_۲V$$

و $P-P_۳=d_۳V$

از این روابط نتیجه می‌شود:

$$d_۱-d_۲=\frac{P_۲-P_۱}{V} \text{ و } d_۲-d_۳=\frac{P_۳-P_۲}{V}$$

$$d_۳-d_۱=\frac{P_۱-P_۳}{V}$$

بنابراین می‌توان رابطهٔ مورد اثبات را چنین نوشت :

$$\frac{P_۲-P_۳}{V}\times P_۱+\frac{P_۱-P_۳}{V}\times P_۲+\frac{P_۲-P_۱}{V}\times P_۳$$

که برابر است با صفر .

۴۳۴۲ـ در مایعی به‌وزن مخصوص $S_۱$ وزن ظاهری جسمی $W_۱$ است و در مایعی به‌وزن مخصوص $S_۲$ وزن ظاهری آن $W_۲$ است:

۱ـ وزن واقعی جسم چقدر است؟

۲ـ وزن ظاهری این جسم در مایعی به وزن مخصوص $\frac{۱}{۲}(S_۱+S_۲)$ چقدر خواهد بود ؟

حل‌ـ ۱ـ می‌توان نوشت :

$$(۱)\quad W_۱=W-VS_۱$$

$$(۲)\quad W_۲=W-VS_۲ \quad \text{و}$$

از تفاضل این دو رابطه V، حجم جسم ، بدست می‌آید :

$$V=\frac{W_۱-W_۲}{S_۲-S_۱}$$

بنابراین W وزن واقعی جسم :

$$W=W_۱+VS_۱=W_۱+\frac{W_۱-W_۲}{S_۲-S_۱}\times S_۱$$

$$W=\frac{S_۲W_۱-S_۱W_۲}{S_۱-S_۲}$$

۲ـ وزن ظاهری جسم در مایعی به وزن‌مخصوص

$$S_۳=\frac{۱}{۲}(S_۱+S_۲)$$

برابر است با $W_۳$ بطوری‌که :

$$(۳)\quad W_۳=W-VS_۳$$

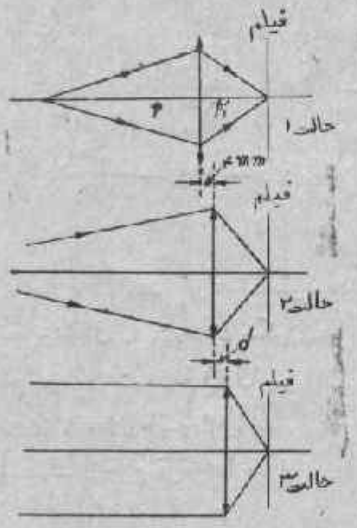
از روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$W_۳=W_۱+V(S_۱-S_۳)$$

$$W_۳=W_۱+\frac{W_۱-W_۲}{S_۲-S_۱}(S_۱-\frac{۱}{۲}S_۱-\frac{۱}{۲}S_۲)$$

$$W_۳=\frac{۱}{۲}(W_۱+W_۲)$$

۴۳۴۳ـ یك دستگاه عکسبرداری طوری میزان شده‌است که از جسمی که در فاصلهٔ ۱/۵ متری عدسی دستگاه قرار دارد تصویر واضحی بر فیلم تشکیل می‌دهد اگر بخواهیم از جسمی که در فاصلهٔ ۴متری از عدسی قرار دارد تصویر واضحی برفیلم تشکیل دهیم ، باید دستگاه را چنان میزان کنیم که عدسی



۴ میلیمتر به فیلم نزدیک شود. تعیین کنید اگر بخواهیم این دستگاه را روی بینهایت میزان کنیم، چقدر دیگر باید عدسی را به فیلم نزدیک کنیم.

حل- برای حالت اول می‌توان نوشت :

حالت اول $\quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'_1}=\frac{1}{f}$

$$(1)\quad \frac{1}{150}+\frac{1}{p'_1}=\frac{1}{f}$$

برای حالت دوم می‌توان نوشت :

حالت دوم $\quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{p'_2}=\frac{1}{f}$

$$(2)\quad \frac{1}{400}+\frac{1}{p'_1-0/4}=\frac{1}{f}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{150}-\frac{1}{400}=\frac{1}{p'_1-0/4}-\frac{1}{p'_1}$$

$$\frac{5}{1200}=\frac{0/4}{p'_1(p'_1-0/4)}$$

$$p'^2_1-0/4p'_1-96=0$$

برای p'_1 دوجواب بدست می‌آید :

$$p'_1=-9/6\text{cm}\ ,\ p'_1=10\text{cm}$$

اما می‌دانیم تصویری که بر فیلم تشکیل می‌شود، تصویری حقیقی است. پس جواب منفی p'_1 قابل قبول نیست. با بکاربردن جواب مثبت p'_1 دررابطهٔ (۱) :

$$f=\frac{150\times10}{150+10}=\frac{150}{16}\text{cm}$$

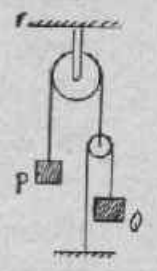
وقتی که دوربین عکاسی برای بینهایت میزان شده است تصویر در کانون عدسی تشکیل می‌شود و بنابراین فاصلهٔ عدسی تا فیلم برابر فاصلهٔ کانونی عدسی خواهد بود. دراین‌صورت می‌توان نوشت :

$$d=p'_2-f=p'_1-0/4-\frac{150}{16}$$

$$=(10-0/4-\frac{150}{16})\text{cm}$$

$$d=2/25\text{mm}$$

۴۳۴۴- اگر دستگاه قرقره مطابق شکل را از حالت سکون رها نمائیم. سرعت وزنهٔ Q را پس از $h=72\text{cm}$ سقوط بیابید. از اصطکاک و جرم قرقره‌ها صرف‌نظر



می‌شود و فرض می‌کنیم :

$$P-Q=10\text{kgf}$$

ضمناً کشش نخ را نیز پیدا کنید.

حل- اگر کشش نخ برای وزنهٔ Q ، T باشد برای وزنهٔ P، 2T بوده وشتاب وزنهٔ P نصف شتاب وزنهٔ Q می‌باشد

$$\begin{cases} Q-T=\frac{Q}{g}\gamma \\ 2T-P=\frac{\gamma}{2}\times\frac{P}{g} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ 2Q-P=\gamma(\frac{2Q}{g}+\frac{P}{2g})$$

$$2\times10-10=\gamma(2\cdot10/5)\Longrightarrow\gamma=4\text{m/s}^2$$

$$V^2=2\gamma x\ \text{یا}\ V^2=2\times4\times0/72=5/76$$

$$\Longrightarrow V=2/4\text{m/s}$$

$$Q-T=\frac{Q}{g}\gamma\ \text{یا}\ T=10-\gamma$$

$$\Longrightarrow T=10-4=6\text{kg-f}$$

$$T'=2T=12\text{kg-f}\quad \text{و}$$

۴۳۴۵- از نقطهٔ A روی سطح شیب‌داری که با افق زاویهٔ α می‌سازد، جسمی را برروی این سطح‌ها می‌کنیم. در همین لحظه از نقطهٔ A جسم دیگری را تحت زاویهٔ β (نسبت به صفحهٔ افق) و باسرعت اولیهٔ v_0 پرتاب می‌نمائیم، پس از t^{sec} دوجسم به یکدیگر برخورد می‌کنند، ثابت کنید :

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

است و سرعت اولیهٔ جسم از دستور :

$$v_0=\frac{1}{2}gt\cos\alpha$$

بدست می‌آید.

حل- معادلات پارامتری حرکت پرتابی :

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\beta \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\beta \end{cases}$$

شتاب حرکت روی سطح شیب دار :

$$\gamma=g\sin\alpha$$

مسافت طی شده روی سطح شیب دار :

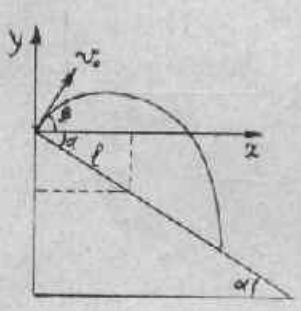
$$l=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$$

معادلات پارامتری حرکت روی سطح شیب دار:

$$\begin{cases} x=l\cos\alpha \\ y=-l\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}gt^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha \end{cases}$$

برای تلاقی دو متحرك نظر به آنکه مبدأزمان و مکـان بـرای هر دو یکسان است کافی است داشته باشیم :



$$\begin{cases} \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha = v_0 t\cos\beta \\ -\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0\cos\beta = \frac{1}{2}gt\sin\alpha\cos\beta \\ -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt^2\cos^2\alpha = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\beta \end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} v_0\cos\beta = \frac{1}{2}gt\sin\alpha\cos\alpha \\ v_0\sin\beta = \frac{1}{2}gt\cos^2\alpha \end{cases}$$

و

از تقسیم دو رابطه برهم نتیجه می‌شود:

$$\cot g\beta = tg\alpha = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

و یا :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

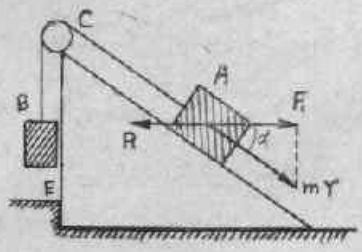
برای تعیین v_0 کافی است معادلات دستگاه (۱) را مربع کرده با هم جمع کنیم :

$$v_0^2 = \frac{1}{4}g^2t^2(\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$$

$$v_0^2 - \frac{1}{4}g^2t^2\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{1}{4}g^2t^2\cos^2\alpha$$

$$v_0 = \frac{1}{2}gt\cos\alpha$$

۴۳۴۶ـ جسم A به وزن P روی سطح شیبدار D که باافق زاویهٔ α می‌سازد در حال پائین آمدن است و به وسیلهٔ نخی که ازقرقرهٔ C عبور می‌کند به جسم B به وزن Q متصل است



(ازجرم نخ صرف‌نظرمی‌شود) فشار تولیدشده از سطح شیب‌دار D به لبهٔ E را حساب کنید :

حل-

$$\Sigma F = (P+Q)\frac{\gamma}{g}$$

$$P\sin\alpha - Q = (P+Q)\frac{\gamma}{g}$$

$$\gamma = g\frac{P\sin\alpha - Q}{P+Q}$$

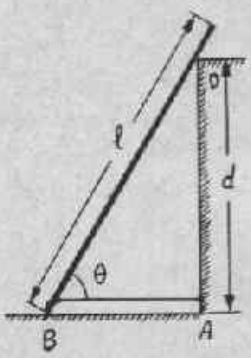
$$R = F_1 \text{ و } F = m\cdot\gamma$$

$$F = P\frac{P\sin\alpha - Q}{P+Q}$$

$$F_1 = P\cos\alpha\cdot\frac{P\sin\alpha - Q}{P+Q}$$

$$R = P\left(\frac{P\sin\alpha - Q}{P+Q}\right)\cos\alpha$$

۴۳۴۷ـ میلهٔ BC به طول l و به وزن W بر سطح افقی بدون اصطکاك و نقطهٔ D مطابق شکل زیر متکی است بطوری که زاویهٔ BC_0^1 با افق برابر θ و نقطهٔ B بـوسیلهٔ ریسمانی به موازات سطح افقی بـه A_0^1 وصل شده است . فاصلهٔ AD = d

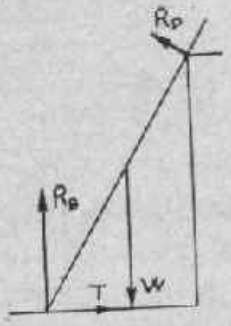


۱ـ نیـروهای مـؤثـر را مشخص کنید .

۲ـ شرط تعادل‌را بنویسید و بوسیلهٔ آن روابط نیروهای مؤثر مجهول را برحسب θ و W و d و l بدست آورید؛ $\theta = 60^\circ$ و $W = 18^{lb}$ و $l = 10^{ft}$ و $d = 13^{ft}$

حل- (شکل الف) صورت مسئله با مفروضات آنـرا نشان می‌دهـد و در شکل (ب) نیروهای مؤثر مشخص شده است بطوری که:

۱ـ نیروی W که وزن‌میله



است و بر وسط آن وارد می‌شود در امتداد قائم است.

۲ـ نیروی عکس‌العمل نقطهٔ D که با جهت مثبت‌محور xها زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\theta$ می‌سازد.

۳ـ نیروی کشش ریسمان در امتداد جهت مثبت xها .

۴ـ نیروی عکس‌العمل سطح افقی شرط تعادل آنست که تصاویر نیروهای مؤثر بر هریك از دومحور صفر شود . و همچنین گشتاور نیروها نسبت به یك نقطه مثلا B صفر باشددر این‌صورت :

$$\Sigma F_x = ۰ \Longrightarrow T - R_D \sin\theta = ۰$$

$$\Sigma F_y = ۰ \Longrightarrow R_D \cos\theta + R_B - W = ۰$$

$$\Sigma M_B = ۰ \Longrightarrow \frac{d}{\sin\theta} \times R_D - \frac{l}{۲}\cos\theta \times W = ۰$$

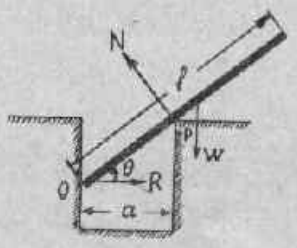
$$\Longrightarrow R_D = \frac{W l \sin ۲\theta}{۴d} \quad , \quad T = \frac{W l \sin^۲\theta \cos\theta}{۲d}$$

$$R_B = \frac{W(۲d - l \sin\theta \cos^۲\theta)}{۲d}$$

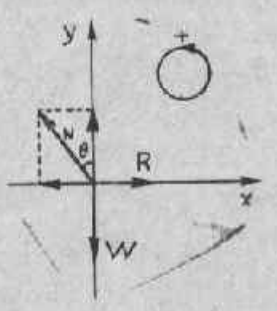
و چون مقادیر عددی رادر روابط فوق قرار دهیم‌خواهیم‌داشت:

$$R_D = ۵/۴۶^{lb} \quad T = ۴/۷۲^{lb} \quad R_B = ۱۵/۳^{lb}$$

۴۳۴۸ـ یك میله به طول l و به‌وزن W مطابق شکل زیر در داخل حفره‌ای قرار دارد . وضع تعادل آنرا با یافتن نیروهای مؤثر مشخص کنید در صورتی که دیوارهٔ طرف چپ حفره بدون اصطکاك می‌باشد و در این حالت زاویهٔ θ را بر حسب a و b بیابید .



حل‌ـ نیروهای مؤثر بر میله عبارت‌است از نیروی W میله که بر وسط آن و به موازات خطوط قائم مشخص می‌شود. دوم نیروی عکس‌العمل سطح که R می‌باشد و درجهت مثبت محور xها وارد می‌شود و نیروی سوم عکس‌العمل N در نقطهٔ D می‌باشد.



می‌دانیم شرط تعادل آنست که تصاویر نیروها بر هریك از دو محور مجموعاً صفر شود و همچنین مجموعهٔ گشتاور نیروهای مؤثر نسبت به نقطهٔ O صفر شود پس :

$$\Sigma F_x = ۰ \Longrightarrow R - N\sin\theta = ۰$$

$$\Sigma F_y = ۰ \Longrightarrow N\cos\theta - W = ۰$$

$$\Sigma \overrightarrow{M_O} = ۰ \Longrightarrow \frac{a}{\cos\theta} \times N - \frac{l}{۲} \times W\cos\theta = ۰$$

$$N = \frac{W l \cos^۲\theta}{۲a} \quad , \quad R = \frac{W l \cos^۲\theta \sin\theta}{۲a}$$

$$N = \frac{W}{\cos\theta} \quad , \quad \frac{l\cos^۲\theta}{۲a} = \frac{۱}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \sqrt[۳]{\frac{۲a}{l}} \qquad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود درحالتی که $\theta = ۰$ باشد $۲a = l$ خواهد بود یعنی میله از وسط در نقطهٔ D قرار می‌گیرد و به صورت افقی در می‌آید.

۴۳۴۹ـ تکاثف نسبی بخار جسمی مرکب از کربن و هیدروژن و اکسیژن و ایزولوك با اسید استیك نسبت به گاز D برابر $\frac{۱۱}{۷}$ است. هرگاه ۰/۷ گرم از گاز مجهول D را با ۰/۱۲ گرم گاز هیدروژن مخلوط کرده در ظرف ۴لیتری تخلیه شده وارد کنیم و به‌صددرجهٔ حرارت سانتیگرادبرسانیم فشار مخلوط برابر ۰/۶۵ اتمسفر می‌شود .

اولا فرمول مولکولی این جسم را تعیین کنید .

ثانیا تحقیق کنید این‌جسم‌آلی دارای سه ایزومرمی‌باشد فرمول تفسیری هر کدام را بنویسید .

ثالثاً نام گاز D را پیدا کنید درصورتی که بدانیم‌این گاز مجهول با گاز اکسید دوکربن ایزوستر می‌باشد.

حل‌ـ داریم :

$$PV = nRT$$

در رابطهٔ فوق R ثابت همگانی گازها بوده و مقدار آن برابر ۰/۰۸۲ لیتر اتمسفر می‌باشد.

$$۰/۶۵ \times ۴ = n \times ۰/۰۸۲(۱۰۰ + ۲۷۳)$$

مولکول گرم گاز مجهول و گاز هیدروژن $n = ۰/۰۸۵$

	گرم	مل گرم هیدروژن
	۲	۱
x = ۰/۰۶	۰/۱۲	

مل گرم گاز مجهول: $۰/۰۸۵ - ۰/۰۶ = ۰/۰۲۵$

دنباله پائین صفحهٔ ۴۲۹

نمونه های جدید و آموزنده

مسائل حساب استدلالی

جهت استفاده داوطلبان کنکور و سال ششم ریاضی

تألیف : جواد حریرچی

دبیر علوم ریاضی دبیرستانهای تهران

چاپ دوم ، با تجدید نظر کلی و اضافات

۱۲۰۰ مسئله

شامل جالب ترین مسائل جبر و مثلثات و حساب استدلالی

برای داوطلبان کنکور دانشکده ها و قابل استفاده

دانش آموزان دوره دوم دبیرستانها

جواد حریرچی

تألیف حسین امین الهی

مهداد تقوی

از انتشارات

کتابفروشی تهران

تهران ـ ناصرخسرو

پاساژ مجیدی ـ کوچه حاج نایب

تبریز بازار شیشه گرخانه

تلفن ۲۷۳۲

علاقمندان می توانند از کلیهٔ کتابفروشیهای معتبر تهران و شهرستانها ابتیاع فرمایند

ضمیمهٔ : یکان سال ۱۳۴۶

برای دانش آموزان کلاس سوم دبیرستانها

شامل :

مسائل امتحانات داخلی سال تحصیلی ۴۶-۱۳۴۵ کلاسهای سوم دبیرستانهای مختلف،

مسائل تفننی و تفریحی و در عین حال ریاضی .

مقالات و مطالبی که علاوه بردانش آموزان کلاسهای سوم برای دانش آموزان کلاسهای پائینتر و دیگران هم قابل استفاده است.

این مجله چاپ شده و با بهای ۱۲ ریال در دسترس علاقمندان می باشد.

کتابفروشی فخررازی ـ خیابان شاه آباد ـ تلفن ۳۰۴۳۲۰

مرکز فروش انتشارات یکان

گروه فرهنگی خرداد

برای کلاسهای جدید کنکور

فنی ـ پزشکی ـ علوم ـ کشاورزی ـ حقوق ـ ادبیات

همه روزه ثبت نام می کند.

سازمان آموزشی کلاسهای شبانهٔ خرداد به شرح زیر است:

ریاضیات

ادبیات
آزرم
بحرانی
بحری
مهندس پارکی
پور فتحی
زاوشی
صدری
عطار نژاد
فاضلی
قراگزلو
لاهیجی
مسعود محمدی
مدغم
مرتضوی
نقیه
واجد سمیعی

فیزیک
آیت‌اللهی
اسدی
انصاریان
حمیدی
صمدی
فرساد
مبین
ملیح
میرفتاحی
هنجنی

اسلامی
بزازی
بیسوده
رسولی
رضوانی
دکترزادپرور
زیانفر
مجدی

شیمی
بزرگ‌نیا
دکتر رسولی
قادسی
گلبابایور
مظلومی
مظفرزاده
علی نعیمی
نعمت

طبیعی
ابو
پاکروان
صابر
میرزاده
مطیعا
نصیری انصاری

زبان خارجه
اصغری
بقائی
دادگر
رکنی
دهگان
معاونی

نشانی: چهارراه سیدعلی

دبیرستان خرداد

تلفن ۳۰۵۴۵۸ / ۳۳۱۶۹۸