دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ
۱۰
شمارهٔ مسلسل
۵۷
مرداد
۱۳۴۸

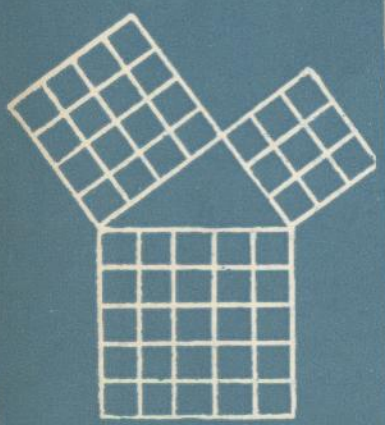
یکان

مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots + x^n$$

دراین شماره:

نهضت جهانی نوسازی برنامه‌های ریاضی	جهانگیر شمس آوری	۶۱۷
ناپیوستگی دوره های متوسطه و دانشگاه	علی عاطفی	۶۲۱
ساختمان شیمیائی ماده	عطاءالله بزرگ نیا	۶۲۳
تعمیمهای قضیه هـای استورم و لایب نیتز و پاپوس	احمد شرف الدین	۶۲۵
اثبات حالت کلی دو اتحاد مثلثاتی	مسعود حبیب‌الله زاده	۶۳۰
استفاده از بسط $\sin nx$ در اثبات بعضی از اتحادها	محمدرضا یزدان	۶۳۱
تعمیم یك پارادوکس	ترجمهٔ: آقابانی چاوشی	۶۳۲
مجموع قوای متشابه مقسوم علیه‌های یك عدد	محمود کاشانی	۶۳۴
محاسبهٔ توابع اولیهٔ بعضی از توابع	سید جمال آشفته	۶۳۵
چگونگی حل مسائل ریاضی	ترجمه	۶۳۸
راهنمای حل مسائل ترسیمی هندسه	«	۶۴۲
مسائل برای حل	—	۶۵۰
حل مسائل یکان شمارهٔ ۵۵ و ۵۶	—	۶۵۳
جدول اعداد	فرهنگ و صادقیان	۶۷۶
Problems & Solutions	—	۶۷۷
فهرست مندرجات مجلات دورهٔ پنجم	—	۶۷۸
دانش آموزان رتبهٔ اول و ممتاز	—	ماقبل آخر



بها : بیست و پنج ریال

فروشگاه بزرگ (شمارهٔ ۲)

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان شاهرضا ، روبروی دانشگاه تهران

محل فروش مجله وسایر انتشارات یکان

پایان دورهٔ پنجم مجله

باانتشاراین شماره ، دورهٔ پنجم مجله‌پایان می‌پذیرد طبق معمول ، در شهریورماه مجله منتشر نمی‌شود . شمارهٔ اول از دورهٔ ششم مجله در ابتدای مهرماه آینده در دسترس علاقمندان قرار خواهدگرفت .

رفع اشتباه

همانطورکه خوانندگان محترم مجله متوجه شده‌اند در صفحهٔ ۵۵۵ یکان شمارهٔ ۵۶ کـه چاپ شده است : «امتحان نهائی خرداد ۱۳۴۷» اشتباه می‌باشد . صحیح آن چنین است: «امتحان نهائی خرداد ۱۳۳۷» .

در مقالهٔ راههای تازه‌ای برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس نیز اشتباههایی به شرح زیر روی داده است :

صفحهٔ ۵۷۰ سطر ۷ به‌جای $h = \pm$ باید نوشته شود: $h = ۱$ وعبارت«مقدار $h = -۱$ که‌رابطهٔ $x^۲+y^۲=-z^۲$ را بدست می‌دهد قابل قبول نیست (زیرا مقدار سمت چپ این تساوی مثبت ومقدار سمت راست آن منفی است» اضافی است .

صفحهٔ ۶۰۵ سطر ۲۰ به‌جای چنانچه بخواهیم بایدنوشته شود چنانچه نخواهیم .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ دهم ـ شمارهٔ مسلسل : ۵۷

مرداد ۱۳۴۸

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانکه صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume V, number 10, Augu. 1969

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

تدریس ریاضیات دانشگاه و دبیرستان

فیزیك ـ شیمی و انگلیسی دبیرستان

توسط دانشجویان علوم دانشسرایعالی

بطور خصوصی یا در آموزشگاهها

تلفن : ۷۵۷۷۱۹ - یعقوب‌گنجی

کتابفروشی فخررازی

تهران ـ خیابان شاه‌آباد ـ تلفن : ۳۰۴۳۲۰

محل فروش انتشارات یکان

نهضت جهانی نو سازی برنامه‌های ریاضی

متن سخنرانی آقای جهانگیر شمس آوری در جلسهٔ ۴۸/۴/۱۱ کلاس‌کار آموزی دبیران ریاضی که با همکاری انجمن معلمان ریاضی و ادارهٔ کل تعلیمات متوسطه تشکیل شده بود.

همکاران گرامی :

همکاران محترم می‌دانند که ریاضیات تنها رشته‌ای از دانش بشری است که تمام نظریه‌های اصلی دو هزار سال پیش هنوز در آن زنده است و در ضمن نظریه‌های جدید بیش از پیش بر پهناوری عرصهٔ آن می‌افزاید. رشته‌های جدید ریاضیات، مانند نظریهٔ بازی (Game Theory) چنان بینشی در روابط بشری بوجود آورده است که دانشمندان در گذشته هرگز به این دقت و وضوح آن روابط را تحلیل و مطالعه نمی‌کرده‌اند. رشته‌های قدیم ریاضیات، مانند نظریهٔ احتمالات، مورد استعمال فراوانی در شئون مختلف زندگی، حتی در زمینهٔ جریان عبور و مرور و ارتباطات بدست آورده است. مسافرتهای فضائی ریاضیدانان را بر آن داشته است که فنون نوینی برای فضانوردی بسیار پیچیده‌تر و بغرنج‌تر از فنون دریاپیمایی و هواپیمایی بدست آورند.

شاید باشند کسانی که پهناوری عرصهٔ ریاضیات را در زمان حاضر درک نکرده باشند. می‌گویند که یادگرفتن همهٔ زبانهای متداول گیتی آسانتر از مهارت یافتن در همهٔ ریاضیات معاصر است. زیرا شاید ممکن باشد که در یک عمر طولانی همهٔ زبانها را آموخت ولی یادگیری ریاضیات، که قلمرو آن ثابت نیست و هرچه زمان می‌گذرد دامنهٔ آن نیز وسیعتر می‌شود عمر نوح می‌خواهد. حساب کرده‌اند که فی‌الحال اگر کسی بخواهد از آنچه در ریاضیات معاصر می‌گذرد آگاه باشد، باید روزانه در حدود بیست جزوه دست‌کم ده صفحه‌ای را بخواند که همهٔ آنها مشحون از تحقیقات و تتبعات تازه است.

باری، کشفیاتی را که ریاضیدانان در زمان معاصر انجام می‌دهند به اندازه‌ای تنوع دارد که موجب شده است تعریف ریاضیات به **«کاری که ریاضیدانان انجام می‌دهند»** تبدیل گردد.

این پیشرفت و حرکت به سوی تکامل تنها مربوط به ریاضیات نبوده است؛ بلکه از ۵۰ سال پیش به این طرف تمام رشته‌های مختلف علوم در جریان پیشرفت و توسعه بوده‌اند. گرچه علم همیشه در پیشرفت و توسعه بوده است اما سرعت این پیشرفت در قرن بیستم از سرعت آن در قرون گذشته بسیار بسیار افزونتر بوده است. به‌قول یکی از دانشمندان نود درصد اکتشافات علمی بشر، از آغاز تا زمان حال، در پنجاه سال اخیر بوقوع پیوسته است. البته فراموش نباید کرد که در این مسابقهٔ پیشرفت، ریاضیات از همهٔ علوم بیشتر دستخوش تغییرات اساسی بوده و در جهت تکامل سوق داده شده است، و همین تغییر و تکامل به نحوی بارز در پیشرفت صنعت و تکنولوژی مؤثر بوده است. ما اکنون در نیمهٔ دوم قرن بیستم، در دیار علم، با تحولات عمیقی روبرو شده‌ایم و در آستانهٔ مرحله‌ای از تاریخ قرار گرفته‌ایم که آن را به حق دورهٔ انقلاب علمی نام نهاده‌اند. به‌تدریج ضمن پیشرفتهای نظری و عملی که مؤثر در هوش عمومی بوده است بشر اینک آماده برای زیستن در این عصر شده است. در این دوران نه هرگز چون گذشته، به‌جایی رسیده‌ایم که احتیاج به ریاضیات و قدر شناسی از آن جزء ضروریات فرهنگی هر کشور شده است. دگرگونی در عرصهٔ صنعت و تکنولوژی بقسمی بظهور رسیده است که آینده‌ای بسیار وسیع و درخشان و شاید بتوان گفت دهشت‌آور برای جوامع بشری به ارمغان خواهد آورد. متخصصان فن، کتابهایی در زمینهٔ آیندهٔ تکنولوژی در سال ۲۰۰۰ تألیف کرده‌اند که کم یا بیش نقاب از چهرهٔ جهان در آن زمان برمی‌دارد. در سالهای آینده سیطرهٔ ماشینهای محاسبه (مغزهای الکترونیکی) بر امور جوامع

بشری گسترده خواهد شد و نیروی بیکران مغز و فکر را در اختیار آنها خواهد گذاشت . یك محقق را تصور بفرمایید که در خانهٔ خود ، در آزمایشگاه کوچکی که بوجود آورده است نشسته و احتیاج به محاسبه‌ای پیدا می‌کند که برای تحقیقش لازم است. گوشی تلفن را برمی‌دارد و با گرفتن شماره‌ای با مرکز ماشینهای محاسبه مرتبط می‌شود . آن مرکز برنامهٔ محاسبه‌ای را که مورد نیاز است می‌ریزد و به ماشین می‌دهد. ماشین در زمانی بسیار کوتاه نتیجهٔ محاسبه را اعلام می‌کند و مرکز محاسبه نتیجهٔ اعلام شده را به محقق می‌دهد . یا ماهواره‌ای را به نظر آورید که به دور زمین در حال گردش است و برنامه‌های آموزشی تلویزیونی پخش می‌کند و هر کشوری که بخواهد این برنامه‌ها را می‌گیرد و حتی به زبان ملی خودش پخش می‌کند . بنابراین در آینده ، بیش از پیش ، خواهی نخواهی تمدنهای کشورها در یکدیگر تأثیر خواهند داشت و تمدن هیچ کشور نمی‌تواند متأثر از تمدن سایر کشورها نباشد. از این گذشته سرعت محاسبهٔ ماشینهای الکترونیکی به اندازه‌ای است که هیچ مؤسسهٔ خصوصی یا دولتی نمی‌تواند از مزایای این ماشینها برخوردار نشود و آنها را بکار نگیرد . بدیهی است بکاربردن این ماشینها جز با استخدام کسانی که با ریاضیات آشنائی کامل داشته باشند، و به بیانی ریاضیدان باشند، امکان پذیر نیست .

این حقایق است که کلیهٔ کشورها را با مسئلهٔ تجدید نظر کردن و نوسازی برنامه‌های ریاضیات مدارس مواجه کرده است و می‌توان گفت که موضوع این تجدید نظر کردن جنبهٔ همگانی و بین‌المللی گرفته است .

اینك برای آنکه حضار محترم از سابقهٔ امر و کاری که در این باره درمقیاس جهانی انجام گرفته است آگاه شوند اجازه می‌خواهم که اشاره‌ای به تاریخچهٔ نهضت نوسازی برنامه‌های ریاضی دستگاههای آموزشی کشورها بکنم . تا سال ۱۹۵۸ در پاره‌ای از کشورهای پیشرفته بحثهایی دربارهٔ نوسازی برنامه‌های ریاضیات و علوم انجام می‌گرفت و اقداماتی می‌شد . این بحثها و اقدامات جنبهٔ محلی داشت و هنوز به صورت عمومی مطرح نشده بود . در اوت سال ۱۹۵۸ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در اسکاتلند منعقد گشت . نمایندگان کشور امریکا که از نقاط مختلف آن مملکت به این کنگره آمده بودند جلسه‌ای خصوصی تشکیل دادند و به تعاطی افکار دربارهٔ اصلاحاتی که در برنامهٔ ریاضی دبیرستانها و مدارس عالی و دانشگاههای امریکا صورت گرفته است پرداختند . بخصوص بحث این جلسه به علت پرتاب نخستین موشك بوسیلهٔ کشور شوروی که مقارن این ایام رخ داد فوق‌العاده به اصطلاح داغ شده بود . بحثهایی که در این جلسهٔ خصوصی انجام گرفت و نمایندگان سایر کشورها از آن آگاه شدند در تصمیمی که کشورها برای اقدام به ایجاد جنبشی جدی جهت اصلاح برنامه‌های ریاضی مدارس خود گرفتند فوق‌العاده مؤثر واقع شد و در حقیقت الهام بخش آن گشت . از این جا کار نوسازی برنامه‌های ریاضی مدارس در سطح وسیعتر و تماس بیشتر کشورها آغاز گشت .

به دنبال این کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات ، سازمان توسعه و همکاریهای اقتصادی دست به انعقاد جلساتی به مدت دو هفته برای بحث در بارهٔ برنامهٔ آموزش در فرانسه زد (از کودکستان تا دانشگاه) . از همهٔ کشورهای غربی دعوت شده بود که در این جلسات که در شهر سورفرانسه تشکیل می‌شود شرکت کنند و انتقادات خود را دربارهٔ این برنامه بیان کنند . یکی از دلایل برقرار شدن این کنفرانس آماده نبودن فارغ‌التحصیلان دبیرستانها برای ادامهٔ تحصیل از نظر برنامهٔ ریاضی در دانشگاه بود که در آن موقع **برنامهٔ بورباکی** در آن اجرا می‌شد . دلیل دیگر تشکیل این کنفرانس کمبود فوق‌العادهٔ ریاضیدان ، فیزیکدان و مهندس جهت برآورده کردن احتیاجات فنی بود . کمبودی که روز به روز فزونی می‌یافت و مسئله را حادتر می‌کرد.

نتیجهٔ هشیار دهندهٔ این کنفرانس نه تنها برای فرانسه بلکه برای همهٔ کشورها مفید واقع گشت و آن این بود که برنامهٔ ریاضی دبیرستانهای فرانسه گرچه بسیار محکم و تا اندازه‌ای سطح آن بالا است ، با این همه دیگر کهنه شده و توانایی آن را ندارد که دانش آموزان را برای تحصیل علوم جدید آماده کند .

هنگامی که این حقیقت آشکار گشت **سازمان توسعهٔ همکاری اقتصادی** سمیناری دربارهٔ تجدید نظر در آموزش ریاضیات در **Royaumont** فرانسه از تاریخ ۲۵ نوامبر تا چهارم دسامبر سال ۱۹۵۹ تشکیل داد . در این سمینار چهل و شش نماینده از بیست کشور با گزارشهای از پیش تهیه شده در بارهٔ برنامه‌های ریاضیات کشورهایشان شرکت کردند .

گزارش این سمینار به دو زبان فرانسه و انگلیسی تحت عنوان **«افکار نو در بارهٔ ریاضیات در مدرسه»** به وسیلهٔ همان سازمان در ۲۴۶ صفحه منتشر شد و این نشریه موجب ایجاد حرکتی همگانی در کشورهای مختلف گشت و هر کشوری کمیتهٔ ویژهٔ خود را برای تجدید نظر کردن در برنامهٔ ریاضیات متوسطه تشکیل داد .

در اوت ـ سپتامبر ۱۹۶۰ کنفرانس دیگری در **زاگرب**

دریوگسلاوی تشکیل شد و برنامه‌ای برای ریاضیات در متوسطه تدوین کرد. گزارش این کنفرانس نیز به دو زبان فرانسه و انگلیسی منتشر شده است واینك به چهارده زبان دیگر نیز ترجمه شده است.

چون آموزش هندسه همیشه مزاحم‌ترین مسئله در برنامهٔ متوسطه بوده‌است، دوجلسه نیز جهت مطالعه دربارهٔ نقش هندسه درآموزش متوسطه منعقد گشت. کوششهایی که برای تعیین نوع هندسه‌ای که باید در مدارس متوسطه تعلیم داده شود، چه در اغلب کشورها وچه در کنفرانسهای بین‌المللی به نتیجهٔ قطعی نرسیده وچنین به‌نظر می‌رسد که مسئله تاکنون بطور قطع حل نشده‌است. این دوجلسه یکی درکشور دانمارك درآخرمه سال ۱۹۶۰ ودیگری درایتالیا دراکتبرسال ۱۹۶۱ تشکیل گردید. نکتهٔ جالب توجه جلسهٔ اخیر این بود که **کارتان** یکی از ریاضیدانان پیرو **روش بورباکی** روش مشخص منجزی برای تدریس نوع جدیدی هندسه درمدارس متوسطه ارائه‌داشت که اغلب بانظراو موافق بودند. درواقع عقیدهٔ وی چنین بود که با هرروش نیل به مقصودی‌که هندسه را درسطح ابتدائی و دورهٔ اول متوسطه تدریس کرده باشند، دردورهٔ دوم بایدآن‌رااز راه بردار وبوسیلهٔ بکاربردن مختصات آموخت.

در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات منعقد در استکهلم، اوت ۱۹۶۲، گروه مربوط به آموزش و پرورش سه‌گزارش در موضوعهای متفاوت راجع به اقدامهایی‌که کشورهای‌عضواتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات درسه سال گذشته کرده بودند قرائت کرد این سه‌گزارش که درسه موضوع **« بکار بردن ریاضیات نوین در تعلیمات متوسطه »** و **« تربیت معلمان ریاضی »** و **« بنیادگزاری تعلیم جبر »** بوددرحقیقت مشحون ازاطلاعات جالب توجه ومقایسه‌ای است ازکوششهایی که برای پیشرفت آموزش ریاضیات درسراسر گیتی تاآن زمان انجام پذیرفته است.

کنفرانس بین‌المللی دیگری در بارهٔ آموزش ریاضیات در بوداپست از بیست وهفتم اوت تا هشتم سپتامبرسال ۱۹۶۲ تحت نظارت یونسکو با شرکت هفده‌کشور استرالیا، بلژیك، کانادا، دانمارك، اتازونی، سوئد، سوئیس، چکسلواکی، فرانسه، مجارستان، ایتالیا، ژاپن، هلند، لهستان، رومانی انگلستان، شوروی منعقدگشت. سه موضوع مورد بحث این کنفرانس عبارت بودند از: **« مواد درسی ریاضی »** و **«آموزش مواد درسی ریاضی »** و **« تربیت معلم و مطابق روزنگاهداشتن معلومات او »**.

چنانکه ملاحظه می‌فرمائید دراین نهضت نوسازی برنامه‌های ریاضی مدارس که جنبهٔ همگانی گرفته است ممالکی که اقداماتی دربارهٔ اصلاح برنامه‌های ریاضی‌خود نکرده‌یااقداماتی مختصر کرده باشندبسیار کمند.

ازگزارشهای فعالیتهای‌کشورها دربارهٔ تجدیدنظر کردن در برنامهٔ ریاضیات چنین مستفاد می‌شود که چهار مطلب از ریاضیات نوین در اغلب از برنامه‌های نوشده به چشم می‌خورد.

این چهارمطلب عبارتند از:

۱ـ نظریهٔ مقدماتی مجموعه

۲ـ منطق ریاضی بطور ساده

۳ـ موضوعهایی‌ازجبرنوین بویژه: گروه‌ها ـ حلقه‌ها ـ هیئت اعداد و بردارها.

۴ـ احتمالات و آمار

مجموعه واعمال دربارهٔ مجموعه‌ها درواقع‌اساس مشترك برای برداشت همهٔ رشته‌های ریاضی از دید جدید معاصراست. وبه‌همین دلیل شگفت‌آورنیست که نخستین موضوع نوین‌برنامه که همه دربارهٔ‌آن متفق‌الرأیند مجموعه‌ها باشد. تأکیدی که امروزهٔ در بارهٔ سازمان اکسیوماتیك همهٔ رشته‌های ریاضی می‌شود مستلزم وجود پایه‌ای منطقی است و بنابراین طبیعی است که منطق ریاضی‌نیز دومین موضوع مورد موافقت عمومی باشد. تعمیم این مفاهیم به‌گروه‌ها ـ حلقه‌ها وهیئتها به‌طور مستقیم و به‌سادگی انجام می‌پذیرد ونخستین روش مجزا ومتفاوت ازآن چیزی است که اقلیدس‌در ۲۰۰۰ سال پیش به‌وسیلهٔ هندسهٔ خود برای تحصیل ریاضیات اکسیوماتیك معرفی‌کرده است.

اما جایگیری احتمالات وآمار دربرنامهٔ جدید ریاضیات دبیرستان متکی به دلایلی‌است متفاوت ازدلایل نوکردن‌برنامهٔ جبروهندسه. گنجانده شدن این دوموضوع دربرنامه‌تنهابه‌علت کاربرد ومورد استعمال‌آنها درجامعهٔ تکنولژی معاصراست.

دامنهٔ بحث دربارهٔ تجدید نظر در برنامه‌های ریاضی دبیرستان به دورهٔ ابتدائی نیزکشیده شد. و در این باره نیز جلسات بین‌المللی تشکیل‌گردیده‌است که‌شایدذکردمطالب‌موربحث درآن جلسات ازحوصلهٔ این جلسه خارج باشد.

هنگام تنظیم برنامه‌های نظام نوین‌آموزش وپرورش در کشور ماکه هم‌اکنون برنامه‌های درسی دورهٔ ابتدائی و دورهٔ راهنمایی‌تحصیلی‌آن تدوین یافته‌است به این نهضتهای نوسازی و تغییرات و پیشنهادات آنان توجه کافی مبذول‌گشته است و برنامه‌های ریاضی‌نظام نوین ملهم ازآنها بوده‌است. هم‌اکنون

کتابهای ریاضی سالهای اول تا چهارم ابتدایی طی چهار سال گذشته ازچاپ خارج شده‌است. یك نگاه سطحی به‌این‌کتابها، بخصوص برای شما ریاضیدانان، تغییرات اساسی را کـه در آموزش‌ریاضیات در سطح ابتدائی رخ داده است آشکار خواهد ساخت. برنامهٔ ریاضی دورهٔ متوسطهٔ نظری هنوز تدوین نشده است، ولی بطورقطع بابرنامهٔ ۸ ساله‌ای‌که تهیه شده، برنامهٔ دورهٔ متوسطه نظری نیزتغییرات اساسی خواهد نمود و متأثـر از ایـن نهضت بین‌المللی نـو سازی بـرنامه هـای ریاضی خواهد بود.

اینك اگراجازه فرمایید چند مشخصهٔ جدید ازبرنامه‌های تجدیدنظر شده را به عرضتان برسانم. نخستین مطلب‌کـه کلیهٔ مسئولان امـر آموزش را بـه خود مشغول داشته است و مسئله‌ای دربرابرآنها مطرح‌کرده این است‌که باسرعت روز افزون پیشرفت درریاضیات‌امرنوسازی برنامه ومطابق‌روزکردن ومفیدیت‌آن به‌هیچ وجه با انعطاف پذیری دستگاههای‌آموزشی، ولـو آن دستگاهها از هر لحاظ مجهز و انعطاف پذیر باشند هماهنگی‌نتواند داشت. این مسئله مسئولان را متوجه هدفهای تدریس ریاضیات و توجه اساسی به آنها کرد. بدین معنی‌کـه اکنون معتقد شده‌اند که‌برنامهٔ‌ریاضیات هرچه‌باشد، بایددرتدریس آن متوجه **پرورش فکرریاضی** در متعلمان باشیم. **کسانی را تربیت‌کنیم‌که قابلیت خودیادگیری داشته‌باشند و بتوانند پس‌از فراغ از تحصیل کشفیات و تتبعات جدید را که بی‌شك درزندگی‌آن روز آنان مؤثـر خواهد بود شخصاً مطالعه ودرك‌کنند واحیاناًخود از پیشقدمان در ایـن تتبعات و کشفیات بـاشند.** بدیهی‌است‌که باچنین دیدی اگر برنامه‌هایی‌هم‌که تدریس می‌شوند تاحد امکان تازه باشندکمال مطلوب است.

مشخصهٔ دیگر برنامه‌های جدیدآن‌است‌که **دانش‌آموز رادارای فکرخلاق وانتقادی وروشنفکربارآوریم** بدین منظور دومثال از مطالبی را که در برنامه‌های نو وجود دارد و منعکس‌کنندهٔ دید تازه‌ای است‌که در تعلیمات جـدید ریاضیات مورد نظراست بازگو می‌کنم: مثال اول مربوط به عمل ضربی‌است‌که مستقل از ترتیب عوامل نیست. همه می‌دانید که ضرب اعداد حقیقی عملی‌است مستقل ازترتیب و مادرگذشته به‌این اصل به‌طورضمنی هنگام یاددادن قواعد اعمال اشاره می‌کردیم وشاید هرگزآن را بطور وضوح به‌عنوان یك اصل بیان نمی‌کردیم. اما اکنون این‌اصل را با وضوح چنان‌تعلیم‌می‌دهند که دانش‌آموز به‌راحتی می‌تواندآن را درجای مناسب بافهم و استادانه بکاربرد. و برای بهترفهمیدن موضوع سازمانهایی را به‌دانش‌آموزان می‌شناسانند، منظورم‌ماتریکسها است، که‌درآن عمل ضرب مستقل ازترتیب نیست، یعنی چنانچه جـای عوامل ضرب را عوض‌کنیم، حاصل ضرب تغییرمی‌کند. بدین ترتیب وقتی‌که دانش‌آموز با دوضرب، یکی‌مستقل ازترتیب ودیگری نامستقل ازترتیب مواجه‌گشت، به‌این نکته پی‌خواهد بردکـه دستگاههای معمولی وآشنا تنهادستگاههای برحق‌ومعقول نیستند واین یکی‌از درسهای مهم روشنفکری است.

مثال دوم مربوط به میدانهای محدوداست. همه‌می‌دانیم که رشتهٔ اعداد طبیعی واعمال مربوط به‌آنها وخواص‌آن‌اعمال تشکیل یك دستگاه یا یك میدان می‌دهند. این میدان درمورد رشتهٔ اعداد طبیعی‌نامحدود است. اما این تنها میدان مـوجود نیست. میدانهای محدودی وجود داردکه عناصرآن محدودند: همانطورکه میدان نامحدود اعداد را با یك خط مستقیم می‌نمایانیم‌که اعداد صحیح برروی‌آن وبه‌فاصله‌های متساوی قرار گرفته‌اند، میدان محدود رانیز می‌توان به‌وسیلهٔ دایره‌ای کـه اعداد بـه فاصله های متساوی از هـم برمحیط آن قرار دارند نمایاند. به‌این وسیله بآسانی می‌توان جدول جمع و جـدول ضرب چنین میدان محدودی را تشکیل داد واز‌آن‌نتیجه‌گرفت که مثلا دودوتا همیشه چهارتا نیست. یااگردرمیدانی ۳ به‌اضافهٔ ۴ برابر با ۷ است درمیدان دیگرممکن است۳ به‌اضافهٔ ۴ برابر ۱ باشد. ازاینجا می‌فهمیم‌که معادلهٔ $3x=0$ همیشه دارای جواب $x=0$ نیست؛ در بعضی از میدانها مثلا میدان به مدول ۶ جواب این معادله $x=2$ می‌باشد. بنابراین اصل «اگر $ab=0$ و $a\neq 0$ حتماً $b=0$» که درمیدانی قابل قبول است درمیدان دیگرقابل قبول نیست.

تعلیم چنین مباحثی به‌دانش‌آموزان موجب خواهد شدکه دریابندکه همهٔ اصول وقوانین حدود وثغوری دارند. فقط یك (یا چند) میدان است‌که قانونی درآن‌صادق است وقتی‌که پارا ازمرزآن میدان فـراتر نهادیم ممکن است‌که آن‌قانون‌صداقت خود را ازدست بدهد.

این مثالها که نمونه‌های کـوچکی از مطالب برنامه‌های جدید است‌علاوه برآنکه‌برداشت‌مفاهیم ریاضی‌راازدیدگاه جدید آشکار می‌سازد معلوم می‌کند تاچه حد تدریس ریاضیات درقالب برنامهٔ جدید سبب تهییج قوهٔ تصور وپرورش قوهٔ تفکر، فکری دقیق، نه‌سخت ونرم نشو می‌شود. بی‌شك این مطالب و نظایر آن به **پرورش مردان روشنفکر باجهان بینی‌منقدانه و فکرقابل انعطاف که توانایی زندگانی معتدل در**

(پائین صفحهٔ بعد)

ناپیوستگی دوران متوسطه و دانشگاه

نوشتهٔ : **علی عاطفی** دبیر دبیرستانهای تهران

مشکلی داریم ! دورهٔ متوسطه شش سال و دورهٔ دانشگاه تهران بطور متوسط چهار سال است که جمعاً می‌شود ده سال . باتوجه به‌این موضوع که دردانشگاه تهران فرصت کم است و اگر نظریات مسئولین جدید دانشگاه به‌مرحلهٔ اجرا درآید دیگر برای دانشجو وقت وساعت ودوره وکلاس مطرح نیست ، بلکه باید بخواند ، تحقیق وتتبع کند ، در آزمایشگاهها وکارگاهها وکتابخانه‌ها به جستجو مشغول باشد و درمملکت ما ودانشگاه ما این معجزه بوقوع بپیوندد و نوری در تاریکی بدرخشد : کتابی نوشته شود ، معادله‌ای برمعادلات افزوده شود، نظریه‌ای ارائه شود وحرفی به زبان جاری گردد که مراکز علمی کشورهای مترقی را به تفکر وتفحص در بارهٔ آن وادارد . دانشگاه تهران تشنهٔ چنین شاگردانی است و متأسفانه اگر چنین دانشجویانی یافته نشده‌اند دورهٔ متوسطه مقصر بوده است . ما مقصر بوده‌ایم ومن گناهکار بوده‌ام که بهترین دانش‌آموز هیچگاه بهترین دانشجو نبوده است ! شش سال وقت کمی نیست ؛ در کمتر ازاین مدت ودر شرایطی مناسب ، خیلی کارها می‌توان کرد . در مورد درس ریاضی ، ظرف شش سال آنچه را که دانستنش برای یك دانشجوی رشتهٔ فنی و ریاضی لازم است ، در بارهٔ آن به دانش‌آموز اشاره‌ای نمی‌کنیم اما دربارهٔ آنچه که تنها مستلزم اشاره‌ای است حکایتها می‌کنیم . دانش‌آموز باید کلمه به‌کلمهٔ نه مقالهٔ هندسه رابداند ، قضیهٔ منلائوس را بخوبی اثبات کند ولی از مکانیك عمومی حتی ضرب خارجی دو بردار بی‌اطلاع باشد و درمدت شش سال آنچنان آنها را تعلیم کرده باشیم که مستعدترین و بهترین آنهاکه به دانشگاه راه می‌یابند ، درسال اول تحصیل مثل این باشد که استاد به‌زبان دیگری سخن می‌گوید ! ازکارگاه وآزمایشگاه وحشت دارد ، می‌ترسد به‌چیزی حتی یك پیچ ساده دست بزند . بارها یاتاقان را رسم کرده‌است ولی اگر آنرا به‌دستش بدهند نمی‌شناسد؛درآزمایشگاه شیمی وقتی می‌خواهد مقداری اسید مثلا اسید اگزالیك را (که ترش مزه است) بوسیلهٔ پی‌پت ازظرف بالا بکشد ، وحشت دارد ، درحالی که شش سال تمام عکس پی‌پت ومورد استعمالش را دیده است. بارها سطح محصوروحجم حادث‌از دوران‌منحنی را حساب کرده ، مشتق پیچیده‌ترین توابع را درست و دقیق محاسبه کرده است ولی هنگامی که علامت **dx** را می‌بیند جا می‌خورد . این گناه دانشجو نیست که سخنان اساتید ارجمندی چون ..... را نمی‌فهمد ، خانه از پای بست ویران است. من که معلم دورهٔ متوسطه هستم به خاطر آنکه دستم بسته بوده و امکانات لازم‌موجود نبوده‌است ، یا آنکه به‌علت تقبل کارخارج ازحد توانائی نتوانسته یا نخواسته‌ام که‌آینده‌ای برتر ووالاتر از امتحانات آخرسال وامتحانات نهائی در نظرآورم . ممکن است این ایرادگرفته شودکه دانشگاه تهران برای همهٔ دانش‌آموزان یا اکثرآنها ، جا ندارد . بسیارخوب ! وقتی‌که چنین است ما از تعداد دانش‌آموزان می‌کاهیم . دورهٔ دبیرستان دورهٔ آمادگی ورود به دانشگاه است . هدف این بوده است که طی این فرصت شش سال آنچنان دانش‌آموز از بضاعت علمی توشه گیرد که دردانشگاه پس‌ازطی مدت کوتاه کار درسر کلاس تبدیل به **کار با خود** شود و اساتید ضمن سخنرانیهای مداوم وطی

بقیه از صفحهٔ قبل

جهان آینده را داشته باشند کمك شایانی خواهدکرد.

اما در پایان اجازه می‌خواهم اضافه کنم که ما نخواهیم توانست یك شبه ، اثرات جمع شدهٔ دهها سال عقب ماندگی را جبران کنیم . مانمی‌توانیم به جای انجام کار فقط آرزو کنیم . موفقیت خود به‌خود بدست نمی‌آید . تلاش بی‌امان لازم دارد . چنانچه بخواهیم تعلیم برنامهٔ جدید ریاضیات را بعهده بگیریم بامسائل ومشکلات فراوانی مواجه خواهیم گشت که بایدمدبرانه به‌حل آنها بپردازیم . باید بهترین روشهای تدریس را متناسب با رشدونبوغ دانش‌آموزان انتخاب کنیم، باید دروس خود را برحسب سابقهٔ آموزش و آمادگی دانش‌آموزان تهیه‌کنیم . اما این کار را باید بی‌آنکه از مطلب چیزی بکاهیم انجام دهیم . **باید راههای مؤثرتری برای تشجیع و به حرکت درآوردن دانش‌آموزان بیابیم تاآنها به میل خود کوشش بیشتری برای بهره برداری از تعلیمات و کسب علم ومعرفت مبذول دارند .**

جلساتی که برای بحث و گفتگو تشکیل می‌گردد وظیفهٔ هدایت وراهنمائی و معرفی کتب تازه ومطرح ساختن مباحث نوین علم وادب را انجام دهند. ولی بااقبال روزافزون دانش‌آموزان از رشته‌های علمی بخصوص ریاضی وانتخاب وتحصیل دراین رشته آنهم به‌استناد یك‌معدل دوازده ، **هدف** جای خودرا به **مدرك** داده‌است وخود شاهدیم کـه وضع امتحانات و مسابقات ورودی به چه صورت درآمده است . همانطور کـه قبلا هم عـرض شد دانشگاه تهران شاگرد می‌خواهد ، شاگرد خوب هم‌می‌خواهد. باوضع موجود انجام تقاضای دانشگاه مقدور نیست مگرآنکه مانند بسیاری ازکشورها ، کلیهٔ دبیرستانهای موجود به‌دوگروه تقسیم شوند درگروه بیشتر، همین برنامه‌های موجود منتها در سطحی پائین تا به‌آن اندازه‌که تنها جنبهٔ آشنائی بااین دروس مطحح نظر باشد تدریس‌گردد ، به‌علاوهٔ آموزش فنونی چـون حسابداری ، ماشین نویسی ، محاسبه باماشین حساب ، منشی‌گری ، رانندگی اتوموبیل . هرمدرسهٔ دولتی یا ملی می‌تواند دو یا چند از ایـن فنون را بیاموزد . دانش‌آمـوزانی که دورهٔ اینگونه دبیرستانها را به پایان می‌رسانند به‌آسانی موفق به‌اخذ دیپلم‌دورهٔ متوسطه شده‌اند ، وضمن‌آن‌در کاری هم سررشته دارندواین دسته ازدیپلمه‌هاحق ورود به‌دانشگاه رانخواهند داشت. درمقابل گروه اول ، باید درتهران ومراکز استانها وشهرهای مهم واحدهـای عظیم آموزشی و بطور مختلط تأسیس‌گـردد ، پذیرفتن دانش‌آموز دراین واحدها طی شرایطی انجام گیرد و وظیفهٔ معلمان و اداره‌کنندگان این واحدها ، تربیت شاگـرد برای دانشگاه باشد .

در این واحدهای آموزشی مغزهای متفکر آینده پرورش می‌یابند ـ وبا هیئت معلمینی‌متعلق به‌خود واحد، و اتخاذ یك سیاست‌آموزشی در همهٔ این واحدها ، جریان مسخرهٔ مسابقات ورودی و طرح سؤال وشبانـه در چاپخانه خوابیدن ، ازمیان خواهد رفت . ایـن واحدهای آموزشی ، شاگردان مستعد و هوشمندسرتاسرکشوررا به‌خودجذب‌می‌کنند وسپس‌تحویل‌دانشگاه می‌دهند. (البته به‌شرط آنکه هیچگونه‌تفاوتی بین‌واحدآموزشی یك شهر وشهر دیگر وجود نداشته واحساس نشود) . از لحاظ بـرنامه‌های علمی ، این واحدها باید باری از دوش دانشگاه بکاهند وشاگردی باچنان بضاعت علمی به‌دانشگاه تحویل دهند که‌آمادگی کافی برای تحقیق‌داشته باشد . تاعقیدهٔ صاحب‌نظران چه باشد .

یکان ـ تقسیم دبیرستانها به دوگروه که ضمن مقالـه به‌آن اشاره شد ، درنظام جدیدآموزش و پرورش کشور مورد توجه بوده‌است ؛ درنظام جدیدکه فعلا تاکلاس چهارم ابتدایی به مرحلهٔ اجرا درآمده است ، تحصیلات ابتدایی ومتوسطه به‌سه دوره تقسیم شده‌است :

دورهٔ پنجسالهٔ ابتدایی ، دورهٔ سه سالهٔ راهنمای تحصیلی ویك دورهٔ چهار ساله که شامل دو رشتهٔ عمده می‌باشد : دورهٔ متوسطهٔ نظری برای ورود به دانشگاه ودورهٔ حرفه‌ای وفنی .

تعمیم .... (دنباله ازصفحهٔ ۶۳۳)

$$u_n = \sqrt{H^2_{n-1} + H^2_{n+1}} \quad \text{و} \quad v_n = \sqrt{H^2_{n-2} + H^2_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) = \frac{1}{a^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n}{u_n}\right) = \frac{1}{a} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{H_n}{H_{n+1}}\right)$$

در مورد رشتهٔ H_n نیز عدد طلائی (مقطع زرین) مشاهـده می‌شود .

می‌توان در ازاء مقادیـر خاص p و q حالتهای خاص رشتهٔ $H_{p,q}$ را درنظر گرفته خواص‌آنرا بررسی‌کرد . مثلا در ازاء $p=3$ و $q=1$ خواهیم داشت $e=5$ و :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_{n+1}}{S_n}\right) = 1$$

بررسی بیشتر مسئله به خواننده واگذار می‌شود .

ساختمان شیمیائی ماده (بقیه ازصفحهٔ ۶۲۴)

اسپین مخالف باشند . یعنی عدد کـوانتومی اسپین (s) آنها مخالف و سایر اعداد کوانتومی آنها یکسان باشد. بدیهی است که ممکن است اربیتالی فقط یك الکتـرون داشته باشد ، در این حالت امکان دارد که الکترون دیگری با اسپین مخالف با این الکترون جفت شوند وآشیانهٔ الکترونی پروکامل‌نمایند ازجهت تئوری، امکان دارد که اربیتالی خالی باشد . بطورکلی اربیتال را می‌توان به عنوان الگوی « احتمالی » یا «موجود» توزیع الکترون دانست . شکل (۱) نه فقط چگونگی شکل و جهت ابر الکترونی‌رامعرفی می‌کند بلکه همچنین اربیتالهارا که هرکدام از آنها حداکثر دو الکترون را شامل می‌شوند نشان می‌دهد . درشکل B(۱) جهات مختلف اربیتالهاکه باسه مقدار مختلف m مطابقت دارند بوسیلهٔ سه محورقائم x و y و z نشان داده شده‌است. هریك از این اربیتالها بوسیلهٔ نشانه‌های P_x و P_y و P_z مشخص شده‌اند .

ساختمان شیمیائی ماده

ترجمه و تنظیم از : عطاءالله بزرگ‌نیا

(دنباله از شمارهٔ پیش)

تعیین اعداد کوانتومی

بجای آنکه هیأت الکترونی و ساختمان اتم عناصر را بشکل مدارهای مدور (پوسته‌های اصلی) نمایش دهیم از الگوهای ریاضی که مبتنی بر اعداد کوانتومی می‌باشند و معنی ومفهوم روشنتری دارند می‌توان برای این منظور استفاده کرد. چنین الگوهائی باهمهٔ پیچیدگی این مزیت را دارند که حاوی اطلاعات بیشتری دربارهٔ جزئیات (تفصیل) زیرسطوح، و آرایش مداری الکترونها می‌باشد. انرژی و بنابراین سطح انرژی یك الکترون بوسیلهٔ دستگاهی از ۴ عدد مختلف کوانتومی وابسته به هم که به ترتیب با n و l و m و s معرفی می‌شوند مشخص می‌شود.

طبق «اصل انحصار» پولی (Pauli) هیچ دو الکترونی وجود ندارند که اعداد کوانتومی یکسان داشته باشند. بنابراین، شناخت هر الکترون بوسیلهٔ دستگاهی متشکل از ۴ عدد است که هریك از آنها معرف یك عدد کوانتومی می‌باشد. تنها الکترون اتم ئیدرژن در پایدارترین حالات (حالت اصلی) با دستگاه عددی زیر معرفی می‌شود: $+\frac{1}{2}$ ، ۰ ، ۰ ، ۱ و $-\frac{1}{2}$ ، ۰ ، ۰ ، ۱ . در این مثال $n=1$ ، $l=0$ ، $m=0$ ، $s=-\frac{1}{2}$. مدار مدور مربوط فقط نشان می‌دهد که الکترون در پوستهٔ اصلی است و عدد کوانتوم اصلی آن $n=1$ است.

الف- اصل ساختمانی (Aufbaw آوف باو) -

دراین بخش اصول و قواعدی که به منظور تعیین دستگاه اعداد کوانتومی برای هرالکترون بکار می‌روند مورد بحث قرار گرفته است. این اصول و قواعد در تعیین چنین دستگاههائی برای الکترونهای متمایز کنندهٔ اتمها صادق است. الکترونهای متمایز کننده به الکترونهائی گفته می‌شوند که موجب امتیاز اتم عنصری از اتم عنصر دیگر در جدول تناوبی می‌شود. نخستین دستگاه اعداد کوانتومی معرف به تنها الکترون اتم ئیدرژن، دستگاه بعدی معرف الکترون متمایز کنندهٔ $_2He$ از ئیدرژن است. به این الکترون می‌توان عنوان «واپسین» الکترون یا الکترون «ورودی» را داد. چون عدد اتمی عناصر پی درپی، با افزایش یك پروتون زیاد می‌شود تعداد الکترون «واپسین» یعنی آن الکترونی که بوسیلهٔ دستگاه اعداد کوانتومی مشخص می‌شود ازعنصری به عنصر دیگر افزوده می‌شود. برای عنصر هلیوم دستگاه اعداد کوانتومی شامل: $+\frac{1}{2}$ ، ۰ ، ۰ ، ۱ می‌باشد. اصل Aufbaw یعنی «ساختن» بحث می‌کند از اینکه الکترونها (واپسین الکترون) در زیر سطح موجود از پائینترین سطح انرژی که پایدارترین شرایط در حالت اصلی اتم است قرار می‌گیرند.

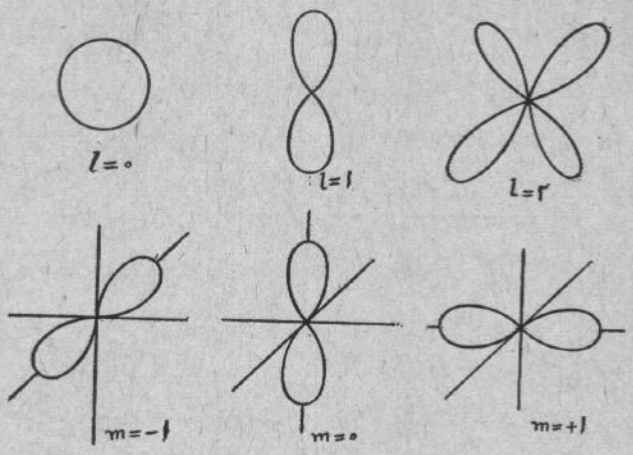
ب- اعداد کوانتومی و تعبیر فیزیکی آنها-

هریك از ۴ نوع عدد کوانتومی برخی از ویژگیهای الکترونی را نشان می‌دهد. عدد کوانتومی اصلی (n) اندازهٔ ابرالکترونی را نشان می‌دهد وهرچه این عدد بزرگتر باشد ابرالکترونی بزرگتر است. عدد کوانتومی دوم (l) شکل ابرالکترونی را که ممکن است کروی، دمبلی ویا شکلهای پیچیده‌ای داشته باشد نشان می‌دهد:

برای کمترین مقدار ($l=0$) ابرالکترونی شکل کروی، برای مقدار بعدی l ($l=1$) ابرالکترونی دمبلی شکل است. هرچه مقدار l بزرگتر شود شکل ابرالکترونی مفصلتر و پیچیده‌تر می‌شود (شکل ۱)

عدد کوانتومی مغناطیسی (m) موقعیت یا جهت ابر الکترونی را درفضا نشان می‌دهد. هنگامی که l برابر صفر است m نیز معادل صفر خواهد بود از آنجا که $-l$ شکل کروی را موجب می‌شود و شکل کروی درهمهٔ جهات فضا وضع یکسانی دارد ترکیب $l=0$ و $m=0$ چنین معنی می‌دهد که ابرالکترونی

دارای جهت معینی نیست .



A - شکل ابرالکترونی که مقادیر مختلف کوانتوم دوم(l) را نشان می‌دهد .

B- جهت ابرالکترونی در فضا که مقادیر کوانتوم مغناطیسی(m) را نشان می‌دهد.

هنگامی که $l=1$ است m دارای مقادیر -1 ، ۰ و $+1$ می‌باشد . هریك از این مقادیر با یکی از جهات وضعی ابر-الکترونی مطابقت دارد . اشکال B(۱) جهت ابر الکترونی دمبلی شکل را ($l=1$) که با مقادیر m مطابقت دارند نشان می‌دهند، کوانتوم اسپین فقط می‌تواند دو مقدار $-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}$ را اختیار کند. این دومقدار به ترتیب چرخش الکترون را در جهت مخالف و موافق گردش عقربه‌های ساعت نشان می‌دهند .

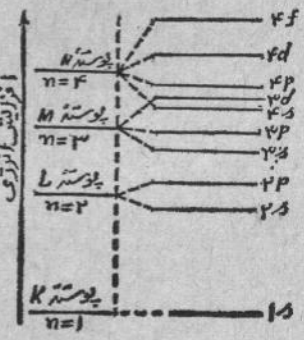
درجدول زیر ویژگیهای چهار نوع عدد کوانتومی خلاصه‌شده است:

نوع	نشانه	ویژگی الکترون
عدد کوانتومی اصلی	n	اندازهٔ ابر الکترونی
عدد کوانتومی دوم	l	شکل ابرالکترونی (کروی، دمبلی وغیره)
عدد کوانتومی مغناطیسی	m	جهت ابرالکترونی در فضا
عدد کوانتومی اسپین	s	جهت اسپین و یا چرخش الکترون حول محور خود

ج- اعداد کوانتومی و سطوح انرژی - عدد کوانتومی اصلی n عددی است صحیح و مثبت (۱و۲و۳...∞) که با سطوح اصلی انرژی مطابقت دارد . بطوری که قبلا گفته شد این سطوح بوسیلهٔ حروف K، L، M، N، O، P، Q و یا بوسیلهٔ اعداد مربوطه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و ۷ نمایش داده می‌شوند.

اطلاعات مربوط به طیف و تعیین انرژی یونیزاسیون نشان می‌دهند که هریك از سطوح اصلی انرژی ازسطوح فرعی که اختلاف انرژی کمی دارند تشکیل شده‌است. این سطوح فرعی با مقادیر عددی کوانتوم دوم یا بوسیلهٔ حروف انتخابی برای این کوانتوم مشخص می‌شود . این حروف با افزایش انرژی به‌ترتیب عبارت از: s و p و d و f و g و h وغیره می‌باشند اما تاکنون عنصری شناخته نشده است که بیش از ۴ سطح فرعی انرژی (f و d و p و s) درحالت اصلی (پایدارترین حالت) خود داشته باشد . مقادیر کوانتوم دوم و نشانه‌های مربوط به سطوح فرعی انرژی درجدول زیر نشان داده‌شده‌است:

نشانهٔ سطح فرعی انرژی	عدد کوانتومی دوم(l)
s	۰
p	۱
d	۲
f	۳



شکل (۲)
سطوح اصلی و شمول آنها از نظر سطوح فرعی

شکل(۲) نمودار ترتیب سطوح فرعی درهریك از سطوح اصلی انرژی است. هریك ازسطوح فرعی با نشانه‌ای متشکل از ازکوانتوم اصلی (n) وحرف مربوط به عدد کوانتوم دوم (l) معرفی می‌شود، بنابراین، نشانه‌های مزبور، رمزعدد کوانتومی کلی nl (مانند ۱s، ۲s، یا ۲p) می‌باشد.

هرسطح انرژی اصلی (پوستهٔ اصلی) وسطوح فرعی تشکیل دهندهٔ آن متشکل ازیك یا چند «اربیتال» یا «آشیانه‌الکترونی» می‌باشند، **تذکر این نکته لازم است که اربیتال مدار یا مسیر فیزیکی الکترون نیست بلکه الگوی احتمالی جنبش و یژه انرژی الکترون است.** هر اربیتال حداکثر می‌تواند دوالکترون داشته باشد ، این دوالکترون باید دارای

(دنبالهٔ پائین صفحهٔ ۶۲۲)

تعمیم‌های قضایای استورم و لایب نیتز و پاپوس [1]

طرح و اثبات از : **احمد شرف‌الدین**

۱ـ قضیهٔ استورم ـ اگر مجموع قوای pام فواصل یك نقطه از n ضلع یك n ضلعی منتظم مقداری ثابت و : $2<p<n-1$ باشد ، مکان این نقطه دایره است . قضیهٔ فوق به‌کمك ریاضیات عالی (متغیر مختلط) اثباط می‌شود .

۲ـ قضیهٔ لایب نیتز ـ نقاط A_1 و A_2 و .... و A_n و اعداد λ_1 و λ_2 و .... و λ_n مفروض‌اند .مکان‌نقاطی مانند M که برای آنهاعبارت :

$$\lambda_1\overline{MA_1}^2+\lambda_2\overline{MA_2}^2+\cdots+\lambda_n\overline{MA_n}^2$$

مقداری ثابت است اگر $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\neq 0$ باشد یك کره است و چنانچه $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0$ باشد یك صفحه است .

۳ـ قضیهٔ پاپوس ـ $2n$ ضلعی محاطی A_{2n} ..... $A_1A_2\ldots$ و نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ محیطی آن مفروض است . چنانچه H_1 و H_2 .... و H_{2n} تصاویر نقطهٔ M بر اضلاع چند ضلعی مذکور باشد ، رابطهٔ زیر مسلم است .

$$\overline{MH_1}\cdot\overline{MH_3}\cdots\cdots\overline{MH_{2n-1}}=\overline{MH_2}\cdot\overline{MH_4}\cdots MH_{2n}$$

***

ذیلا قضیهٔ استورم را در حالت $p=2$ با استلالی تازه اثبات می‌کنیم .

این‌طرزاستدلال ، امکان‌آنرا فراهم می‌آورد که‌قضایائی تازه طرح و اثبات نمائیم که قضیه‌های استورم و لایب نیتز و پاپوس **حالات خاص** آنها می‌باشند . اما چون در اثبات‌این قضایا از ریاضیات عالی استفاده شده است‌وازبرنامهٔ دبیرستان خارج می‌باشد ، فقط صورت این قضایا را در پایان مقاله ذکر می‌کنیم .

***

۴ـ اثبات قضیهٔ استورم در حالت $p=2$ ـ مطلوب است مکان هندسی نقاطی مانند M که مجموع مربعات فواصل آنها از اضلاع n ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_n$ مساوی مقدار معین l^2 باشد .

تصاویر نقطهٔ M را بر اضلاع A_1A_2 و A_2A_3 و...و $A_{n-1}A_n$ به ترتیب H_1 و H_2 و .... و H_n می‌نامیم . منحنی Γ ، مکان هندسی نقاطی مانند M را که فواصل آنها از اضلاع چند ضلعی منتظم مذکور ، در رابطهٔ زیرصدق می‌کند جستجو می‌کنیم .

$$\overline{MH_1}^2+\overline{MH_2}^2+\cdots\cdots+\overline{MH_n}^2=l^2 \quad (1)$$

معادلات خطوط A_1A_2 و A_2A_3 و ... و $A_{n-1}A_n$ را به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
.....
$$a_nx+b_ny+c_n=0$$

ازطرفی می‌دانیم که‌فاصلهٔ یك‌نقطهٔ $P(X\text{ و }Y)$ از خط‌به‌معادلهٔ $ax+by+c=0$ از دستور زیر بدست می‌آید :

$$d=\frac{aX+bY+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

بنابراین اگر مختصات نقطهٔ M را به $(x\text{ و }y)$ نمایش دهیم معادلهٔ منحنی Γ به شکل زیر می‌باشد .

$$\frac{(a_1x+b_1y+c)^2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{(a_2x+b_2y+c)^2}{a_2^2+b_2^2}+\cdots=l^2$$

معادلهٔ فوق پس از اختصارهای لازم به صورت زیر در می‌آید .

$$Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (3)$$

از طرفی می‌دانیم که منحنی نمایش هر معادلهٔ درجهٔ‌دوم به صورت فوق ، یك مقطع مخروطی است (دایره ، بیضی ، هذلولی ، سهمی) ـ رجوع کنید به پایان مقاله ، توضیح اول .

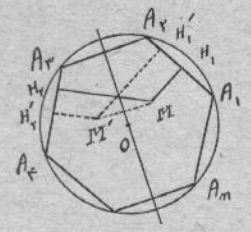
---

(۱) استورم (Steorm) ریاضیدان فرانسوی ، متولد سویس (۱۸۵۵-۱۸۰۳)

لایب‌نیتز (Leibnitz) ریاضیدان بزرگ آلمانی (۱۷۱۶-۱۶۴۹)

پاپوس (Pappus) ریاضیدان مشهور یونان باستان

اکنون ثابت می‌کنیم که منحنی Γ دارای **n محور تقارن** است اگر نقطهٔ M' قرینهٔ نقطهٔ M را نسبت به یکی ازمحورهای‌تقارن



شکل ۱

چند ضلعی منتظم تعیین‌کنیم ، فواصل نقاط M و M' از هر دو ضلعی‌که نسبت به محور مذکور قرینه‌اند . یکسان است ـ از شکل (۱) چنین‌برمی‌آید :

$$\overline{MH_1}=\overline{M'H'_2}$$
$$\overline{MH_2}=\overline{M'H'_1}$$
.....

و لذا :

$$\overline{MH_1}^2+\overline{MH_2}^2+\cdots+\overline{MH_n}^2=$$
$$=\overline{MH_1}'^2+\overline{MH_2}'^2+\cdots+\overline{MH_n}'^2$$

پس هر محور تقارن چند ضلعی منتظم مذکور، یك‌محور تقارن منحنی Γ می‌باشدوچون n ضلعی منتظم دارای n محور تقارن است بنابراین منحنی مذکور دارای n محور تقارن می‌باشد . $(n\geqslant 3)$

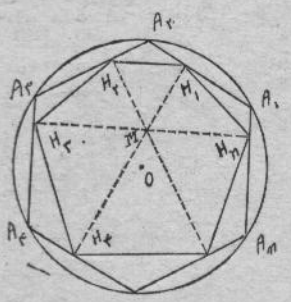
اکنون می‌گوئیم چون منحنی Γ ، یك مقطع مخروطی است‌که حد اقل دارای سه محور تقارن است پس این منحنی حتماً دایره است .

زیرا منحنی Γ سهمی نمی‌تواند باشد ، چون سهمی فقط یك محورتقارن دارد ـ منحنی مذکور بیضی وهذلولی نمی‌تواند باشد ، چون این منحنیها فقط دارای دو محور تقارن هستند. (رجوع‌کنید به پایان مقاله ، توضیح دوم)

***

طرز استدلالی که در بالا برای اثبات قضیهٔ استورم در حالت $p=2$ بکار بردیم، اجازه می‌دهد بعضی‌قضایا را بسرعت اثبات‌کنیم . به عنوان مثال حکم زیررا طرح و اثبات می کنیم (شمارهٔ ۵) . همین طرز استدلال را برای اثبات قضیهٔ لایب ـ نیتز درحالت چند ضلعی منتظم بکارمی‌بریم (شماره ۶)

۵ ـ نقاط H_1 و H_2 و.... و H_n تصاویر نقطهٔ‌دلخواه M ازصفحهٔ چند ضلعی منتظم $A_1A_2\cdots A_n$ بر اضلاع آن می‌باشند مطلوب است‌مکان‌هندسی نقطهٔ M برای آنکه اندازهٔ سطح چندضلعی منتظم $H_1H_2\cdots H_n$



شکل ۲

مساوی مقدار معین l^2 باشد . شکل (۲)

می‌توان نوشت :

$$S_{H_1H_2\cdots H_n}=S_{H_1MH_2}+S_{H_2MH_3}+\cdots$$
$$+S_{H_{n-1}MH_n}$$

از طرفی برطبق دستور اندازهٔ سطح مثلث :

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ، چنین می‌نویسیم :

$$S_{H_1MH_2}=\frac{1}{2}\overline{MH_1}\cdot\overline{MH_2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$S_{H_2MH_3}=\frac{1}{2}\overline{MH_2}\cdot\overline{MH_3}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$
.....

و لذا :

$$S_{H_1H_2\cdots H_n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}(\overline{MH_1}\cdot\overline{MH_2}+$$
$$+\overline{MH_2}\cdot\overline{MH_3}+\cdots+\overline{MH_{n-1}}\cdot\overline{MH_n})=l^2$$

اگر مقادیر $\overline{MH_1}$ و $\overline{MH_2}$ و...و$\overline{MH_n}$ را از دستور (۲) حساب‌کرده و در رابطهٔ فوق بگذاریم یك معادلهٔ درجهٔ دوم‌به صورت (۳) حاصل می‌شود . پس مکان هندسی مورد بررسی ، یك مقطع مخروطی است . به‌آسانی می‌توان ثابت کردکه این مکان دارای n محور تقارن است . $(n\geqslant 3)$

اکنون می گوئیم چون‌مکان یك‌مقطع‌مخروطی است‌که حداقل دارای سه محور تقارن است پس دایره است . (رجوع‌کنید به توضیح سوم : پایان مقاله)

۶ ـ اثبات قضیهٔ لایب نیتز در بارهٔ n ضلعی منتظم ـ مطلوب است منحنی Γ ، مکان هندسی نقاطی مانند M ازصفحهٔ چندضلعی‌منتظم $A_1A_2\cdots A_n$ که مجموع‌مربعات آنها از رؤس چند ضلعی مذکور مقدار معین l^2 باشد .

اثبات‌ـ مختصات رؤوس چند ضلعی مفروض راچنین‌فرض می‌کنیم : $A_1(\alpha_1$ و $\beta_1)$ و $A_2(\alpha_2$ و $\beta_2)$ و ..... و $A_n(\alpha_n$ و $\beta_n)$.

معادلهٔ منحنی Γ چنین است .

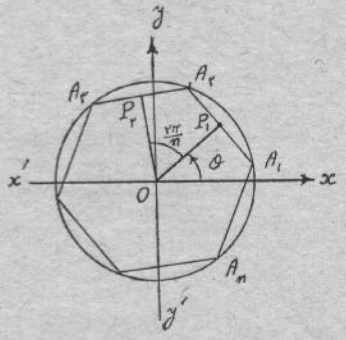
$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2$$
$$+\cdots+(x-\alpha_n)^2+(y-\beta_n)^2=l^2$$

ملاحظه می‌شودکه‌منحنی Γ از درجهٔ دوم است . به‌آسانی می‌توان ثابت‌کردکه این منحنی دارای n محور تقارن است چون منحنی Γ از درجهٔ دوم و دارای حداقل سه محور تقارن است پس دایره است .

اتحادهای مثلثاتی حاصل از فضایای فوق

۷ـ اتحادهای مثلثاتی حاصل ازقضیهٔ استورم

درحالت $p=۲$ ـدستگاه‌محورهای مختصات xOy راکه‌مبدأ آن‌مرکز چندضلعی‌منتظم $A_۱A_۲\dots A_n$ می‌باشددر نظر می‌گیریم. شکل (۳) . تصاویر نقطهٔ O را بر اضلاع $A_۱A_۲$ و $A_۲A_۳$ و .... و $A_{n-۱}A_n$ به‌ترتیب $P_۱$ و $P_۲$... و P_n می‌نامیم و چنین قرار می‌گذاریم :



شکل ۳

$$xOP_۱=\theta \quad و \quad \overline{OP_۱}=p$$

در این صورت معادلهٔ خط $A_۱A_۲$ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=۰ \quad (۴)$$

کافی‌است معادلهٔ‌خطی راکه‌از نقطهٔ $P_۱(p\cos\theta و p\sin\theta)$ می‌گذرد و برخط $OP_۱$ عمود است نوشته‌مختصر کنیم تا معادلهٔ (۴) بدست آید .

بدیهی‌است که‌معادلات‌خطوط $A_۲A_۳$ و... و $A_{n-۱}A_n$ به صورتهای زیر می‌باشند .

$$x\cos(\theta+\frac{۲\pi}{n})+y\sin(\theta+\frac{۲\pi}{n})-p=۰$$

.....

.....

$$x\cos(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})+$$

$$+y\sin(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})-p=۰$$

طبق دستور (۲) فاصلهٔ یك نقطهٔ $P(X و Y)$ از خط به معادلهٔ $x\cos\theta+y\sin\theta-p=۰$ چنین است :

$$d=X\cos\theta+Y\sin\theta-p$$

لذا معادلهٔ منحنی Γ ، مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل آنها از اضلاع n ضلعی منتظم $A_۱A_۲\dots A_n$ مساوی مقدار معین $l^۲$ باشد ، به صورت زیراست .

$$(x\cos\theta+y\sin\theta-p)^۲+[x\cos(\theta+\frac{۲\pi}{n})+$$

$$+y\sin(\theta+\frac{۲\pi}{n})-p]^۲+\dots+[x\cos(\theta+$$

$$+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})+y\sin(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})-p]^۲=l^۲$$

چنانچه معادلهٔ فوق را مختصر کنیم به صورت زیر در می‌آید :

$$Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=۰$$

که در آن :

$$A=\cos^۲\theta+\cos^۲(\theta+\frac{۳\pi}{n})+\dots+$$

$$\cos^۲(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})$$

$$B=۲\sin\theta\cos\theta+۲\sin(\theta+\frac{۲\pi}{n})\cos(\theta+\frac{۲\pi}{n})+$$

$$+\dots+۲\sin(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})\cos(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})$$

$$C=\sin^۲\theta+\sin^۲(\theta+\frac{۲\pi}{n})+\dots+$$

$$+\sin^۲(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})$$

$$D=-۲p[\cos\theta+\cos(\theta+\frac{۲\pi}{n})+\dots+$$

$$+\cos(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})]$$

$$E=-۲p[\sin\theta+\sin(\theta+\frac{۲\pi}{n})+\dots+$$

$$+\sin(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})]$$

چون قبلا ثابت‌کردیم (شمارهٔ ۴) که منحنی Γ یك دایرهٔ به مرکز O می‌باشد پس باید چنین داشته باشیم :

$$\begin{cases} A=C \\ B=۰ \\ D=۰ \\ E=۰ \end{cases}$$

و لذا اتحادهای مثلثاتی زیر حاصل می‌گردد :

$$\cos^۲\theta+\cos^۲(\theta+\frac{۲\pi}{n})+\dots+\cos^۲(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})=$$

$$=\sin^۲\theta+\sin^۲(\theta+\frac{۲\pi}{n})+\dots+\sin^۲(\theta+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})$$

***

$$\sin\theta\cos\theta+\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\cos(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+$$
$$+\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$$

با قرار دادن $\alpha=2\theta$ ، اتحاد فوق را می‌توان به صورت‌زیر نوشت :

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{n})+\dots+$$
$$+\sin(\alpha+\frac{4(n-1)\pi}{n})=0$$

* * *

$$\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+$$
$$+\cos(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$$

* * *

$$\sin\theta+\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+$$
$$+\sin(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$$

* * *

بالعکس می‌توان مستقیماً صحت اتحادهای فوق را ثابت‌کرد و ازآن نتیجه‌گرفت که معادله منحنی Γ به صورت :

$$x^2+y^2=l^2-np^2$$

می‌باشد پس منحنی مورد بررسی دایره است .

* * *

تمرین ـ مطالعهٔ اتحادهای حاصل ازقضایای شماره‌های ۵ و ۶ را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

* * *

تعمیم‌های قضایای استورم ولایب نیتزو پاپوس

تصویر نقطهٔ M ازصفحهٔ چندضلعی منتظم $A_1A_2\dots A_n$ را براضلاع آن H_1 و H_2 و ... و H_n می‌نامیم

۸ـ مکان هندسی نقاطی‌که فواصل آنها از اضلاع چند ضلعی منتظم مذکور ، در رابطهٔ زیر صدق‌کند ،

با شرطهای (۱) یا (۲) یا (۳) ، دایره است (مجموعهٔ دوایر متحدالمرکزیا دایرهٔ محیطی چند ضلعی منتظم یاد شده)

$$\overline{MH_1}^p\cdot\overline{MH_2}^q\dots\overline{MH_i}^t+\overline{MH_2}^p\cdot\overline{MH_3}^q\dots$$
$$\overline{MH_{i+1}}^t+\dots+\overline{MH_n}^p\cdot\overline{MH_1}^q\dots\overline{MH_{i-1}}^t=$$
$$=l^{p+q+\dots+t}$$

$$\begin{cases} p+q+\dots+t<\frac{n}{2} & (1)\\ 2(p+q+\dots+t)<n+1 & (2)\\ p=-1 \text{ و } q=\dots=t=0 & (3)\end{cases}$$

حالات خاص :

الف ـ چنانچه $t=0=\dots=q$ باشدحکمی حاصل می‌شودکه مشابه با قضیهٔ استورم است .

ب ـ چنانچه $p=q=1$ و $r=\dots=t=0$ باشد رابطه‌ای حاصل می‌شود که از ضرب دوطرف‌آن در $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ قضیهٔ مربوط به اندازهٔ سطح پودر (Podaire) یك نقطه نسبت به چند ضلعی منتظم بدست می‌آید .

(اثبات حالات $p=-1$ و $t=0=\dots=q$ ، در کتاب «چند قضیهٔ هندسه» تصنیف نگارنده مشروح است .)

* * *

۹ـ مکان هندسی نقاطی‌که فواصل آنها از اضلاع $2n$ ضلعی منتظم در رابطهٔ زیر صدق می‌کند، دایره است (مجموعهٔ دوایر)

$$\overline{MH_1}\cdot\overline{MH_3}\dots\overline{MH_{2n-1}}=\overline{MH_2}\cdot\overline{MH_4}\dots\overline{MH_{2n}}$$

حکم اخیر تعمیمی از قضیهٔ پاپوس است .

۱۰ـ مکان هندسی نقاطی‌که مجموع توانهای p آنهااز رؤوس یك n ضلعی منتظم مقدار ثابتی باشد ، با شرطهای :

$p<\frac{n}{2}$ ویا $2p<n+1$ ، دایره است (مجموعهٔ دوایر)

قضیهٔ فوق تعمیمی از قضیهٔ لایب نیتز می‌باشد.

۱۱ـ احکام فوق در مورد چند وجهیهای منتظم ، با شرطهای معینی، معتبر است.

از احکام فوق اتحادهای مثلثاتی متعددی حاصل می‌شود که پاره‌ای از آنها را ذکر می‌کنیم :

$$\cos^p\theta+\cos^p(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+$$
$$\cos^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=\sin^p\theta+\sin^p(\theta+\frac{2\pi}{n})+$$
$$+\dots+\sin^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$$

اگر p فرد باشد چنین داریم :

$$\cos^p\theta+\cos^p(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+\cos^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$$

$$\sin^p\theta+\sin^p(\theta+\frac{2\pi}{n})+\dots+\sin^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$$

$$\cos^p\theta\cdot\cos^q(\theta+\frac{2\pi}{n})\cdots\cos^t(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\cos^p(\theta+\frac{2\pi}{n})\cdot\cos^q(\theta+\frac{4\pi}{n})\cdots\cos^t(\theta+\frac{2(i+1)\pi}{n})+\dots+\cos^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})\cdot\cos^q\theta\cdots\cos^t(\theta+\frac{2(i-1)\pi}{n})=\sin^p\theta\sin^q(\theta+\frac{2\pi}{n})\cdots\sin^t(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\sin^p(\theta+\frac{2\pi}{n})\sin^q(\theta+\frac{4\pi}{n})\cdots\sin^t(\theta+\frac{2(i+1)\pi}{n})+\dots+\sin^p(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})\sin^q\theta\cdots\sin^t(\theta+\frac{2(i-1)\pi}{n})$$

چنانچه $(p+q+\dots+t)$ عددی فرد باشد ، هریك از عبارتهای سمت چپ و سمت راست اتحاد فوق مساوی صفر می‌باشند .

* * *

ازاحکام مربوط به چند سطحیهای منتظم نیز اتحادهائی با دو و سه متغیر حاصل می‌شود .

چند توضیح

توضیح اول ـ منحنی نمایش هر معادلهٔ به صورت :

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (1)$$

یك مقطع مخروطی است .

به عنوان مثال ، منحنی نمایش هندسی معادلهٔ زیر را مطالعه می‌کنیم :

$$5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0 \quad (2)$$

دستگاه مختصات $x'O'y'$ که‌محورهای آن موازی و هم‌جهت با محورهای دستگاه xOy می‌باشد درنظرمی‌گیریم و مختصات O'را $(\alpha\beta)$ فرض می‌کنیم ـ معادلات‌تبدیل مختصات چنین است :

$$x=x'+\alpha \quad y=y'+\beta$$

اگر در معادلهٔ (۲) به جای x و y مقادیر آنها را از رابطه‌های فوق بگذاریم حاصل می‌شود :

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2+(10\alpha+6\beta+22)x'+(6\alpha+10\beta-6)y'-32=0$$

$(\alpha$ و $\beta)$ را چنان اختیار می‌کنیم‌که ضریبهای x' و y' صفر شوند . برای این‌منظور دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی‌زیر را حل می‌کنیم :

$$\begin{cases}10\alpha+6\beta+22=0\\6\alpha+10\beta-6=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{vmatrix}\alpha=-4\\\beta=3\end{vmatrix}$$

بدین ترتیب معادلهٔ‌منحنی مفروض در دستگاه $x'O'y'$ به صورت زیر در می‌آید :

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2-32=0$$

اکنون دستگاه مختصات $XO'Y$ راکه محورهای آن بامحورهای $x'O'y'$زاویهٔ۴۵ درجه می‌سازند ، دستگاه جدید مختصات‌انتخاب‌می‌کنیم. فرمولهای‌تبدیل مختصات‌چنین‌است:

$$x'=\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \quad y'=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

که چون مقادیر فوق را درمعادلهٔ (۲) ببریم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1$$

و این معادلهٔ یك بیضی است‌که طول محور اطول آن ۴ وطول محور اقصر آن ۲ می‌باشد وکانونهایش بر روی محور Y ها قرار دارند .

به‌طورکلی برای تعیین‌منحنی نمایش معادلهٔ (۱) ،عبارت B^2-4AC را تشکیل می‌دهیم ، اگراین عبارت مخالف‌صفر بودمانند قبل عمل می‌کنیم (انتقال ودوران محورهای مختصات) معادلهٔ حاصل یك دایره ، بیضی یا هذلولی را نمایش می‌دهد.

مقدار زاویهٔ دوران از فرمول $tg2\theta=\frac{B}{A-C}$ بدست‌می‌آید.

اگر $B^2-4AC=0$ باشد ، محورها را به اندازهٔ زاویهٔ θ دوران می‌دهیم، معادله‌ای حاصل می‌شودکه یك سهمی را نشان می‌دهد .

ممکن است معادلهٔ (۱) دو خط متقاطع یا موازی را نمایش دهد .

* * *

توضیح دوم ـ ممکن است منحنی درجهٔ دوم دارای

(دنباله پائین‌صفحهٔ ۶۴۱)

اثبات دو اتحاد مثلثاتی در حالت کلی

تنظیم از : مسعود حبیب‌الله زاده

صحت اتحادهای زیررا اثبات کنید :

۱) $tg^{۲}\frac{\pi}{۲n+۱}+tg^{۲}\frac{۲\pi}{۲n+۱}+\ldots+tg^{۲}\frac{n\pi}{۲n+۱}=n(۲n+۱)$

۲) $tg\frac{\pi}{۲n+۱}\cdot tg\frac{۲\pi}{۲n+۱}\cdot tg\frac{۳\pi}{۲n+۱}\ldots tg\frac{n\pi}{۲n+۱}=\sqrt{۲n+۱}$

حل ـ ابتدا از معادلهٔ $tg(۲n+۱)x=۰$ استفاده می‌کنیم ، داریم :

$$tg(۲n+۱)x=۰ \Longrightarrow x=\frac{K\pi}{۲n+۱}$$

به‌ازاء مقادیرمختلف K (ازصفرتا $۲n$....) ریشه‌های بین (صفر و π) معادله بدست می‌آید.

$$\frac{۲n\pi}{۲n+۱} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{۲\pi}{۲n+۱} \text{ و } \frac{\pi}{۲n+۱} \text{ و } ۰$$

سپس معادلهٔ $tg(۲n+۱)x=۰$ رابسط می‌دهیم. برای بسط از بینم نیوتن استفاده می‌کنیم .

$$(۱+tgx)^{۲n+۱}=۱+(۲n+۱)tgx+$$
$$+n(۲n+۱)tg^{۲}x+\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}tg^{۳}x+\ldots+$$
$$+(۲n+۱)tg^{۲n}x+tg^{۲n+۱}x$$

$$tg(۲n+۱)x=۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{(۲n+۱)tgx-\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}tg^{۳}x+\ldots+}{۱-n(۲n+۱)tg^{۲}x+\ldots-(۲n+۱)tg^{۲n}x}+$$
$$\frac{\ldots+n(۲n+۱)tg^{۲n-۱}x-tg^{۲n+۱}x}{۱-n(۲n+۱)tg^{۲}x+\ldots-(۲n+۱)tg^{۲n}x}$$

کافیست صورت کسرمساوی صفر باشد .

$$tg^{۲n+۱}x-n(۲n+۱)tg^{۲n-۱}x+\ldots+$$
$$+\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}tg^{۳}x-(۲n+۱)tgx=۰$$

با حذف جواب $x=K\pi$ مربوط به $tgx=۰$ خواهیم داشت :

$$tg^{۲n}x-n(۲n+۱)tg^{۲n-۲}x+\ldots+$$
$$+\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}tg^{۲}x-(۲n+۱)=۰$$

بافرض $tg^{۲}x=z$ داریم :

$$z^{n}-n(۲n+۱)z^{n-۱}+\ldots+$$
$$+\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}z-(۲n+۱)=۰ \quad (۱)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۱) عبارتند از :

$$tg^{۲}\frac{n\pi}{۲n+۱} \text{ و } \ldots \text{ و } tg^{۲}\frac{۲\pi}{۲n+۱} \text{ و } tg^{۲}\frac{\pi}{۲n+۱}$$

با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

۱) $tg^{۲}\frac{\pi}{۲n+۱}+tg^{۲}\frac{۲\pi}{۲n+۱}+\ldots+tg^{۲}\frac{n\pi}{۲n+۱}=n(۲n+۱)$ و

۲) $tg\frac{\pi}{۲n+۱}\cdot tg\frac{۲\pi}{۲n+۱}\ldots\ldots tg\frac{n\pi}{۲n+۱}=\sqrt{۲n+۱}$

تمرین

تساویهای زیررا اثبات کنید .

۱) $tg^{۲}\frac{\pi}{۷}+tg^{۲}\frac{۲\pi}{۷}+tg^{۲}\frac{۳\pi}{۷}=۲۱$

۲) $tg^{۲}\frac{\pi}{۷}tg^{۲}\frac{۲\pi}{۷}+tg^{۲}\frac{۲\pi}{۷}tg^{۲}\frac{۳\pi}{۷}+tg^{۲}\frac{\pi}{۷}tg^{۲}\frac{۳\pi}{۷}=۳۵$

۳) $tg\frac{\pi}{۷}tg\frac{۲\pi}{۷}tg\frac{۳\pi}{۷}=\sqrt{۷}$

(پائین صفحهٔ بعد)

اثبات بعضی از اتحادهای مثلثاتی به کمک بسط تابع $\sin nx$

از محمد رضا یزدان
دانشجوی دانشکدهٔ صنعتی پلی‌تکنیک تهران

یکی ازراههای اثبات بعضی ازاتحادهای مثلثاتی استفاده بسط $\sin nx$ می‌باشد بـا شرط آنکه اولا : سینوس یا کسینوس کمانهای مـوجود در اتحاد مورد نظر به صورت حاصل ضرب باشند و یا بتوان آنها را به‌صورت حاصل‌ضرب درآورد.

ثانیاً ـ کمانهای موردنظرمعلوم بوده برحسب درجه و یا رادیان باشند.

می‌دانیم تابعهای $\sin 2x$ و $\sin 3x$ و $\sin 4x$ و ... را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\sin 2x = -2\sin x \sin(x-\frac{\pi}{2}) -$$

$$-(-2)^{2-1}\sin x \sin\left[x-\frac{(2-1)\pi}{2}\right]$$

$$\sin 3x = 4\sin x \sin(x-\frac{\pi}{3})\ \sin(x-\frac{2\pi}{3}) =$$

$$(-2)^{3-1}\sin x \sin\left[x-\frac{(3-2)\pi}{3}\right]\times$$

$$\times \sin\left[x-\frac{(3-1)\pi}{3}\right]$$

$$\sin 4x = (-2)^{4-1}\sin x \sin\left[x-\frac{(4-3)\pi}{4}\right]\times$$

$$\times \sin\left[x-\frac{(4-2)\pi}{4}\right]\sin\left[x-\frac{(4-1)\pi}{4}\right]$$

باروشی مشابه روش بالا می‌توان بسط $\sin nx$ را نتیجه گـرفت :

$$\sin nx = (-2)^{n-1}\sin x \sin(x-\frac{\pi}{n})\times$$

$$\times \sin(x-\frac{2\pi}{n}) \cdots\cdots \sin\left[x-\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

موارد استعمال :

مثال ۱ـ برای اثبات اتحاد مثلثاتی :

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

ازبسط $\sin 3x$ به‌ازاء $x = 20^\circ$ استفاده می‌کنیم .

$$\sin 60^\circ = 4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

$$\sin^2 60^\circ = 4\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ \Longrightarrow$$

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sin^2 60^\circ}{4} = \frac{3}{16}$$

مثال ۲ـ برای اثبات اتحاد :

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$$

ازبسط $\sin 5x$ استفاده می‌کنیم .

$$\sin 5x = 16\sin x \sin(x-\frac{\pi}{5})\ \sin(x-\frac{2\pi}{5})$$

$$\sin(x-\frac{3\pi}{5})\ \sin(x-\frac{4\pi}{5})$$

عبارت بالا را به صورت زیر نوشته و با استفاده از قضیهٔ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(دنباله درصفحهٔ ۶۷۵)

بقیه از صفحهٔ قبل

۴) $\mathrm{Sec}^4\frac{\pi}{7} + \mathrm{Sec}^4\frac{2\pi}{7} + \mathrm{Sec}^4\frac{3\pi}{7} = 416$

۵) $\mathrm{Sec}^6\frac{\pi}{7} + \mathrm{Sec}^6\frac{2\pi}{7} + \mathrm{Sec}^6\frac{3\pi}{7} = 32637$

۶) $\mathrm{Sec}^6\frac{\pi}{7}\,\mathrm{Sec}^6\frac{2\pi}{7}\,\mathrm{Sec}^6\frac{3\pi}{7} = 63^3$

۷) $\cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{2\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} = \frac{13}{16}$

۸) $tg^2\frac{\pi}{9} + tg^2\frac{2\pi}{9} + tg^2\frac{4\pi}{9} = 33$

۹) $\mathrm{Sec}^2\frac{2\pi}{9} + \mathrm{Sec}^2\frac{4\pi}{9} + \mathrm{Sec}^2\frac{8\pi}{9} = 192$

۱۰) $cotg^2\frac{\pi}{9} + cotg^2\frac{2\pi}{9} + cotg^2\frac{4\pi}{9} = 9$

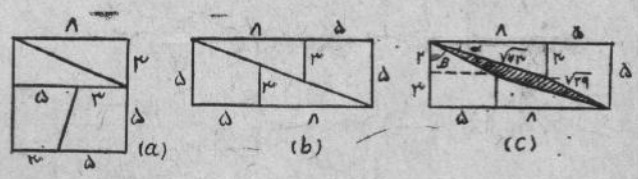
تعمیم یك پارادوکس با استفاده از رشتهٔ فیبوناچی

A. F. HORADAM
Mathematics Magazine

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

۱ـ پارادوکس ـ پارادوکس زیرکه نزد عموم معروف است نخستین بار توسط **روس بال** در سال ۱۹۶۸ در نشریهٔ سرگرمیهای ریاضی وفیزیك لایپزیگ ارائه شده‌است .

مربعی به ضلع ۸ واحد اختیار می‌کنیم . مطابق شکل a



آنرا به چهارقطعه بخش می‌کنیم. این قطعات را مطابق شکل b پهلوی هم قرار می‌دهیم ؛ مستطیلی به بعدهای ۵ و ۱۳ بدست می‌آید. مربع ومربع مستطیل مزبور با هم معادل‌اند درصورتی کـه مساحت مـربع ۶۴=۸×۸ و مساحت مربع مستطیل ۶۵=۱۳×۵ واحد سطح است. آیا ۶۵=۶۴ است؟ یااین که اشتباهی درکار بوده است ؟

جواب این سؤال به آسانی پیدا می‌شود ؛ زیرا اگـر قطعاتی راکه ازمربع جدا کرده‌ایم بادقت پهلوی هم قرار دهیم مستطیلی ایجاد می‌شودکه درداخل آن جای خالی وجـود دارد (مطابق شکل c) . این‌جای خالی متوازی‌الاضلاعی است به ـ ضلعهای $\sqrt{۲۹}$ و $\sqrt{۷۳}$ و به زاویهٔ رأس $\theta \neq ۱^\circ ۱۵'$ و

در پارادوکس مزبور سه عدد ۵ و ۸ و۱۳ بکار رفت که بین‌آنها رابطهٔ $۵\times۱۳-۸^۲=۱$ برقرار است. آیا غیر از عددهای $۵k$ و $۸k$ و $۱۳k$ عددهای دیگری هم وجوددارد که درموردآنها پارادوکس مزبور مطرح باشد ؟

عددهای ۵ و ۸ و ۱۳ سه‌جملهٔ متوالی ازرشتهٔ فیبوناچی می‌باشند . بنابراین ابتدا به یادآوری خواص رشتهٔ فیبوناچی می‌پردازیم .

۲ـ رشتهٔ فیبوناچی ـ این رشته‌که جمله‌های اولیهٔ آن چنین است :

(۱) ۱و۱و۲و۳و۵و۸و۱۳و۲۱و۳۴و۵۵و۸۹و...

با جملهٔ عمومی

(۲) $F_{n+۲}=F_{n+۱}+F_n$

وشرط

(۳) $F_۱=F_۲=۱$

تعریف می‌شود. اگرفرض کنیم:

(۴) $a=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $b=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

خواهیم داشت :

(۵) $F_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(a^n-b^n)$

وملاحظه می‌کنیم که :

$a+b=۱$ و $ab=-۱$ و $a-b=\sqrt{۵}$

$\lim_{n\to\infty} b^n=۰$

ازروابط بالا روابط زیر بدست می‌آید :

(۶) $F_nF_{n+۲}-F^۲_{n+۱}=(-۱)^{n+۱}$

(۷) $F_n^۲+F^۲_{n-۱}=F_{۲n-۱}$

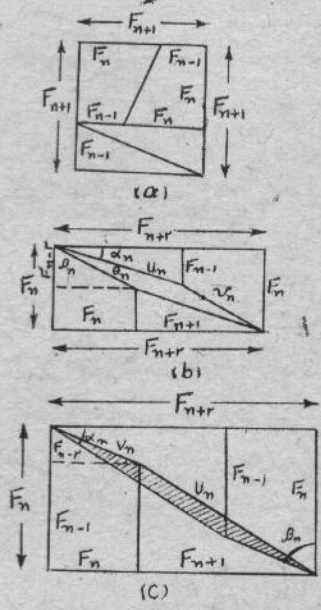
(۸) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n+۱}}\right)=\frac{۱}{a}\neq ۰/۶۱۸....$

که همان عدد معروف (مقطع زرین) منسوب بـه فیثاغورس می باشد .

۳ـ حل کلی پارادوکس ـ بـا ملاحظهٔ رابطهٔ (۵) می‌توان مربعی درنظر گرفت به ضلع $F_{n+۱}$ وطبق روش گفته شده آنرا به چهار قطعه تقسیم‌کرد و بعد این قطعه‌ها را چنان پهلوی هم قرار داد تا ظاهراً مستطیلی به‌ابعاد F_n و $F_{n+۲}$ تشکیل شود .

اگر n فرد باشد مساحت مربع ازمساحت مستطیل به ـ اندازهٔ یك واحد سطح بیشترخواهد بود و دراین حال داخـل مستطیل مـتوازی‌الاضلاعی به مساحت یك واحد سطح خالـی

می‌ماند (شکل ۲-b) . اگر n زوج باشد مساحت مربع یك واحد سطح کمتر از مساحت مستطیل است و در این حال داخل مستطیل متوازی‌الاضلاعی به‌مساحت یك واحدسطح زیاد می‌آید (شکل ۲-c) .



برای بررسی در وضع متوازی‌الاضلاع طول ضلع بزرگتر آن را u_n و طول ضلع کوچکتر آن را v_n و اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ آن‌را θ_n فرض می‌کنیم، مطابق با شکل (۲-b) در ازاء مقادیر فرد $n>3$ داریم :

$$\theta_n=\frac{\pi}{2}-(\alpha_n+\beta_n)$$

$$tg\theta_n=cotg(\alpha_n+\beta_n)=\frac{1-tg\alpha_n tg\beta_n}{tg\alpha_n+tg\beta_n}$$

$$tg\alpha_n=\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} \quad و \quad tg\beta_n=\frac{F_n}{F_{n-2}}$$

و خواهیم داشت :

$$tg\theta_n=\frac{1}{F_{2n-1}+2F_{n-2}F_{n+1}}$$

وقتی n زوج باشد مطابق شکل (۲-c) داریم :

$$\theta_n=\alpha_n+\beta_n-\frac{\pi}{2}$$

$$tg\theta_n=-cotg(\alpha_n+\beta_n)=\frac{-1}{F_{2n-1}+2F_{n-2}F_{n-1}}$$

اگرفرض‌کنیم $T_n=F_{2n-1}+2F_{n-2}F_{n-1}$ (۹)

برای تمام مقادیر $n>3$ می‌توانیم بنویسیم :

$$\theta_n=\mathrm{Arc}tg\left[\frac{(-1)^n}{T_n}\right] \quad (10)$$

طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع برابرخواهد شد با :

$$\begin{cases} u_n=\sqrt{F^2_{n-1}+F^2_{n+1}} \\ v_n=\sqrt{F^2_{n-2}+F^2_n} \end{cases} \quad (11)$$

باتوجه به رابطه‌های (۴) و (۵) و (۹) خواهیم‌داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_n}{T_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{2n-3}\left(a^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{a^{2n-1}\left(a^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}=1-\frac{1}{a}=0/382\ldots.$$

رشتهٔ $\frac{T_n}{T_{n+1}}$ محدب بوده و به سرعت به سمت حد خودش نزدیك می‌شود .

حد نسبت اضلاع متوازی‌الاضلاع برابراست با :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)=\ldots=\frac{1}{a}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)$$

$n\to\infty$: $\theta\to 0$

$v_n\to -b\sqrt{3}F_n$ و $u_n\to -b\sqrt{3}F_{n+1}$

۴- تعمیم : به جای رشتهٔ فیبوناچی رشتهٔ عمومی‌تر زیررا درنظر می‌گیریم :

$H_{p,q}$: p ، $p+q$ ، $2p+q$ ، $3p+2q$ ، . . .

با جملهٔ عمومی :

$$H_{n+2}=H_{n+1}+H_n$$

و با شرایط : $H_1=p$ و $H_2=p+q$ که p و q عدد-های صحیح می‌باشند .

در مورد این رشته خواهیم داشت :

$$H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n-mb_n)=pF_n+qF_{n-1}$$

که درآن :

$$l=2(p-qb) \quad و \quad m=2(p-qa)$$

اگرفرض کنیم :

$$\frac{lm}{4}=p^2-pq-q^2=e$$

خواهیم داشت :

$$H_nH_{n+2}-H^2_{n+1}=(-1)^{n+1}e$$

چنانچه طبق روش پارادوکس ، مربع به ضلع H_{n+1} و مستطیل به ابعاد H_n و H_{n+2} بسازیم تفاوت مساحتهای آنها برابر با e می‌باشد . مشخصات متوازی‌الاضلاعی که در این حالت تشکیل می‌شود عبارتست از :

$$\theta_n=\mathrm{Arc}tg\frac{1}{S_n}$$

$$S_n=\frac{(2p-q)H_{2n-1}-eF_{2n-1}+2H_{n-2}H_{n-1}}{e}$$

دنباله پائین صفحهٔ ۶۲۲

درسی از حساب

تنظیم از : محمود کاشانی

با استفاده از کتاب : Elements of number theory

مجموع قوای s ام مقسوم علیه‌های یك عدد

درکتاب درسی حساب استدلالی فرمول محاسبهٔ تعداد مقسوم علیه‌های یك‌عدد آمده و معلمین به‌این درس که می‌رسند غالباً دستور محاسبهٔ مجموع مقسوم علیه‌ها را نیز برآن اضافه می‌کنند ، دراین مقاله فرمول مجموع توانهای s ام مقسوم ـ علیه‌های یك عدد را ارائه می‌دهیم. بدین‌منظور حل مسأله را طی‌چند مرحله به‌انجام می‌رسانیم :

۱) فرض می‌کنیم a عددی باشد که به‌صورت زیر تجزیه شده باشد .

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

واضح است که در این صورت p_1 و p_2 و ... و p_k عوامل اول عدد a می‌باشند .

۲) ـ علامت $d\backslash a$ بدین معنی‌است که d مقسوم‌علیهی از a است بااین قرارداد آنچه مورد مطالعه است بایدبه‌صورت $\sum_{d\backslash a} d^s$ نشان داده شود مثلا اگر $a=6$ و $s=2$ باشد خواهیم داشت :

$$\sum_{d\backslash 6} d^2=1^2+2^2+3^2+6^2=50$$

۳)ـ ثابت می‌کنیم :

$$\sum_{d\backslash a} d^s=(1+p_1^s+p_1^{2s}+\cdots+p_1^{\alpha_1 s})\times$$

$$\times(1+p_2^s+p_2^{2s}+\cdots+p_2^{\alpha_2 s})\cdots\times$$

$$\times(1+p_k^s+\cdots+p_k^{\alpha_k s})$$

اثبات ـ هرمقسوم علیهی‌از a که آنرا d نامیده‌ایم‌مانند هرعدد دیگرقابل تجزیه است ودرتجزیهٔ آن هیچ عاملی غیراز p_1 و p_2 و ... و p_k وجود نخواهد داشت که البته‌ممکن‌است بعضی از این عوامل نیز در تجزیهٔ d نباشند بنابراین عدد d به صورت کلی :

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k} \quad (2)$$

قابل نمایش است که درآن :

$$0<\beta_1<\alpha_1 \text{ و } 0<\beta_2<\alpha_2 \text{ و } \cdots \text{ و } 0<\beta_k<\alpha_k$$

(وقتی β_i را مساوی صفر بگیریم به‌معنی‌آنست‌که درتجزیهٔ d عامل p_i مربوط به β_i وجود ندارد) .

ازضرب پرانتزهای طرف دوم رابطهٔ (۱) توان sام هر مقسوم علیهی‌از a به‌صورت تجزیه شده فقط یك‌بار پیدا می‌شود مثلا اگر d به‌صورت (۲) مورد مطالعه ومورد نظر باشدکه در آن صورت :

$$d^s=(p_1^{\beta_1})^s\cdot(p_2^{\beta_2})^s\cdots(p_k^{\beta_k})^s$$

خواهدبود، ازاین عدد d عامل $p_1^{\beta_1}$ در پرانتز اول و عامل $p_2^{\beta_2}$ درپرانتز دوم و... وعامل $p_k^{\beta_k}$ درپرانتز kام وجود دارد . بنابراین ازضرب طرف دوم (۱) مجموعی بدست‌می‌آید که همان $\sum_{d\backslash a} d^s$ است .

۴)ـ با استفاده ازفرمول مجموع جمل یك تصاعدهندسی رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر خلاصه‌می‌شود :

$$\sum_{d\backslash a} d^s=\frac{(p_1^s)^{\alpha_1+1}-1}{p_1^s-1}\times \quad (3)$$

$$\times\frac{(p_2^s)^{\alpha_2+1}-1}{p_2^s-1}\times\cdots\times\frac{(p_k^s)^{\alpha_k+1}-1}{p_k^s-1}$$

اگر دراین رابطه s را مساوی ۱ بگیریم همان فرمول مجموع بدست می‌آید که عبارت از :

$$S(\alpha)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times \quad (4)$$

$$\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

واگر دررابطهٔ (۱)، s را مساوی صفر بگیریم به منزلهٔ آنست‌که می‌خواهیم تعداد مقسوم‌علیه‌ها را حساب‌کنیم ودراین صورت باتوجه به‌اینکه تعداد مقسوم علیه‌ها را با علامت $t(a)$ نمایش می‌دهیم خواهیم داشت :

$$t(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1) \quad (5)$$

محاسبهٔ تابع اولیهٔ بعضی از توابع

تنظیم از : سید جمال آشفته

I- می‌دانیم که اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ باشد مشتق y نسبت به x ازرابطهٔ زیرمشخص می‌شود :

$$y_x' = y_u' \times u_x'$$

با استفاده از این رابطه می‌توانیم تابع اولیهٔ بعضی از توابع را تعیین کنیم . بهمثالهای زیرتوجه شود :

مثال ۱- برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع :

$$y = \frac{ax}{\sqrt{bx^2+c}}$$

به‌طریق زیر عمل می‌کنیم فرض می‌کنیم :

$$\sqrt{bx^2+c}=t \implies bx^2+c=t^2 \implies$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{b}t^2-\frac{c}{b}}$$

$$x'_t = \frac{t}{b\sqrt{\frac{1}{b}t^2-\frac{c}{b}}}$$

درتابع اصلی‌قرار می‌دهیم :

$$y=f(t)=\frac{a}{t}\sqrt{\frac{1}{b}t^2-\frac{c}{b}}$$

$$y'_t = x'_t \times f(t)$$

$$y_t' = \frac{t}{b\sqrt{\frac{1}{b}t^2-\frac{c}{b}}} \times$$

$$\times \frac{a\sqrt{\frac{1}{b}t^2-\frac{c}{b}}}{t} = \frac{a}{b}$$

$$Y=\frac{a}{b}t+C \quad \text{یا} \quad Y=\frac{a}{b}\sqrt{bx^2+c}$$

مثال ۲- مطلوبست محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع :

$$y=x\sqrt{2x+1}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{2x+1}=t$ پس

$$y=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t \quad \text{و} \quad x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$$

$$x'_t=t \text{ و } y'_t=f(t)\cdot x'_t \Rightarrow y'_t=\left(\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t\right)\cdot t$$

$$y_t'=\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow Y=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C$$

$$Y=\frac{1}{10}\left[\sqrt{(2x+1)^5}-\frac{10}{6}\sqrt{(2x+1)^3}\right]+C$$

مثال ۳-

$$y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$$

با فرض $\sqrt{x^2+1}=t$ داریم :

$$y=\frac{\sqrt{(t^2-1)^3}}{t} \quad \text{و} \quad x=\sqrt{t^2-1}$$

$$x'_t=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$y't=\frac{(t^2-1)}{t}\sqrt{t^2-1}\times\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}=t^2-1$$

$$Y=\frac{1}{3}t^3-t+c$$

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}-\sqrt{x^2+1}+c$$

تمرینات

توابع اولیهٔ توابع زیررا تعیین کنید .

۱) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ ۲) $y=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{2x+1}}$

۳) $y=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x+1}}$ ۴) $y=\dfrac{4x+5}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

۵) $y=\dfrac{2x+3}{x^2\sqrt{x+1}}$ ۶) $y=\dfrac{4x^3+4x+1}{(2x+1)^2}$

۷) $y=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$ ۸) $y=\dfrac{x^3+x}{\sqrt{x^2+4}}$

۹) $y=\frac{۱-x^۲}{\sqrt{x+۱}}$ ۱۰) $y=\frac{۳x+۲}{\sqrt{۲x+۱}}$

II- به عنوان مثال فرض کنیم مقصود تعیین تابع اولیهٔ تابع زیر باشد .

$$y=\frac{x+۳}{x^۲\sqrt{۲x+۳}}$$

$$\sqrt{۲x+۳}=t \Rightarrow x=\frac{t^۲-۳}{۲} \quad x'_t=t$$

$$y=\frac{\frac{t^۲-۳}{۲}+۳}{\frac{(t^۲-۳)^۲}{۴}\times t}=\frac{۲(t^۲+۳)}{t(t^۲-۳)^۲}$$

$$y'_t=f(t)\cdot x'_t \Rightarrow y'_t=\frac{۲(t^۲+۳)}{(t^۲-۳)^۲}$$

تابع اولیهٔ تابع اخیررا بهطریق تجسس تعیین می‌کنیم، یعنی فرض می کنیم که :

$$Y=\frac{at+b}{(t^۲-۳)} \Rightarrow Y'=\frac{-at^۲-۲bt-۳a}{(t^۲-۳)^۲}\equiv \frac{۲t^۲+۶}{(t^۲-۳)^۲}$$

$$a=-۲ \quad b=۰$$

$$Y=\frac{-۲t}{t^۲-۳}+C \quad \text{یا} \quad Y=\frac{-۲\sqrt{۲x+۳}}{۲x}+C$$

مثال۲-

$$y=\frac{x+۲}{x^۲\sqrt{x+۱}}$$

$$\sqrt{x+۱}=t \Rightarrow x'_t=۲t \Rightarrow x=t^۲-۱$$

$$y=\frac{t^۲-۱+۲}{(t^۲-۱)^۲\times t}=\frac{t^۲+۱}{t(t^۲-۱)^۲}$$

$$y'_t=\frac{t^۲+۱}{۲(t^۲-۱)^۲}$$

مانند مثال بالابهطریق نخستین‌عمل کرده‌وخواهیم‌داشت:

$$Y=-\frac{t}{۲(t^۲-۱)}+C \quad \text{یا} \quad Y=\frac{-\sqrt{x+۱}}{۲x}+C$$

مثال۳- مطلوبست محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع‌زیر:

$$y=\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}+\sqrt{(x^۲+۱)^۳}}$$

$$y=\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}+(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}=$$

$$=\frac{x^۲}{\sqrt{(x^۲+۱)(۱+\sqrt{x^۲+۱})}}$$

$$\sqrt{x^۲+۱}=t \Rightarrow x=\sqrt{t^۲-۱}$$

$$f(t)=y=\frac{t-۱}{t\sqrt{t+۱}} \Rightarrow y'_t=(t-۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$x'_t=\frac{t}{\sqrt{t^۲-۱}} \text{ و } y'_t=(t-۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$Y=\frac{۲}{۳}(t-۱)\sqrt{t-۱}$$

$$Y=\frac{۲}{۳}(\sqrt{x^۲+۱}-۱)\sqrt{\sqrt{x^۲+۱}-۱}+C$$

مثال۴- مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ تابع زیر :

$$y=\frac{x}{(۱+x^۲)\sqrt{۱-x^۴}}=$$

$$=\frac{x}{(۱+x^۲)\sqrt{(۱-x^۲)(۱+x^۲)}}$$

با فرض $\sqrt{(۱-x^۲)(۱+x^۲)}=t(۱+x^۲)$ داریم:

$$(۱-x^۲)=t^۲(۱+x^۲) \Rightarrow x^۲=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

$$x=\sqrt{\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}}$$

$$y=\frac{\sqrt{\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}}}{(۱+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲})\times t\times(۱+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲})}$$

$$x_t'=\frac{-۲t}{(۱+t^۲)^۲\sqrt{\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}}}$$

$$y'_t=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow Y=-\frac{۱}{۲}t \Rightarrow$$

$$Y=-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}+C$$

مثال۵-مطلوبست تعیین توابع اولیهٔ تابع زیر:

$$y=\frac{x}{\sqrt{(۱-x^۲)(۱+x^۲)^۳}}=$$

$$y=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}$$

بافرض $u=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ داریم $u'=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ و

$$y=\frac{-\frac{1}{4}u'}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{4}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$Y=-\frac{1}{2}\sqrt{u}\qquad Y=-\frac{1}{2}\sqrt{u}+C$$

$$Y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+C$$

III ـ چند تابع خاص

مثال۱ـ مطلوبست تابع اولیهٔ تابع زیر:

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اولا باید $-1<x<1$ باشد. پس x می‌تواند سینوس قوس‌مانند t باشد:

$$x=\sin t \quad و \quad x'_t=\cos t$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{1}{\cos t}$$

$$y'_t=f(x)\cdot x'_t=1\Longrightarrow Y=t$$

$$Y=\arcsin x+C$$

مثال۲ـ محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

باید $-2<x<2$ باشد پس می‌توانیم داشته باشیم:

$$x=2\sin t \Longrightarrow y=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$$

$$x'_t=2\cos t$$

$$y'_t=y\times x'_t=2\cos t\cdot 2\cos t=4\cos^2 t \quad و$$

$$y'_t=4\times\frac{1+\cos 2t}{2}=2(1+\cos 2t)$$

$$Y=2t+\sin 2t+C$$

$$Y=2\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C$$

مثال۳ـ مطلوبست محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع زیر:

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

$$x=tgt \quad و \quad y=\frac{1}{1+tg^2 t}\Longrightarrow x'_t=1+tg^2 t$$

$$y'_t=(1+tg^2 t)\left(\frac{1}{1+tg^2 t}\right)$$

$$y'_t=1\Longrightarrow Y=t+C$$

$$Y=\text{Arc}tgx+C$$

IV ـ تعیین تابع اولیه به‌طریق جزء به‌جزء

اگر تابعی مانند $y=uv$ داشته باشیم و از آن مشتق بگیریم. داریم:

$$y'=u'v+v'u\Longrightarrow(uv)'=u'v+v'u$$

$$u'v=(uv)'-v'u$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که تابع اولیهٔ $(u'v)$ برابر است با تفاضل uv بر تابع اولیهٔ $(v'u)$

مثال۱ـ مطلوبست تابع اولیهٔ تابع زیر:

$$y=x\sin x$$

فرض می‌کنیم $\sin x=u'$ و $x=v$ دراین صورت $v'=1$ و $-\cos x=u$ پس:

[تابع اولیهٔ $x\sin x$] =

$=[-x\cos x]-[$تابع اولیهٔ $(-\cos x)]$

$$Y=-x\cos x+\sin x+C$$

مثال۲ـ مطلوبست تابع اولیهٔ تابع:

$$y=3x^2\sin x$$

با فرض $\sin x=u'$ و $v=3t^2$ داریم:

$$v'=6t \quad و \quad u=-\cos t$$

$$[u'v]=[-3t^2\cos t]-[(-6t\cos t)$$ تابع اولیهٔ$]$

تابع اولیهٔ تابع $t\cos t$ مانند مثال قبل محاسبه می‌شود و بالاخره خواهیم داشت:

$$Y=-3t^2\cos t+6t\sin t+6\cos t+C$$

تمرینات

مطلوبست تعیین توابع اولیهٔ تابعهای زیر:

۱) $y=\frac{x^2+3x+4}{\sqrt{ax+b}}$ ۲) $y=\frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x^5}}$

۳) $y=\frac{5x^2+8x+14}{(x^2+x-2)^2}$

دنباله پائین صفحه ۶۷۴

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف : René Boinel

برای تعیین **یك مکان هندسی** ، می‌توان :

۱ـ نقطه‌ای راکه به دنبال مکان آن هستیم درحالتهای خاص در نظرگـرفته خواص و روابط آنرا نسبت به نقاط و خطوط ثابت معلوم‌کرده نسبت به حالتهای‌کلی نقطه آنها را مورد سنجش قرار داد .

(مثلا وقتی مکان قرینهٔ یك نقطه نسبت به یك خط یا یك نقطه مورد نظر است ، از این نقطه عمودهـایی برخطوط ثابت یا خطوطی به موازات آنها رسم‌کرد) .

یا اینکه وضع نقطه را در حالتهای خـاص نسبت به ـ ساختمانهای متغیر اصلی در نظر گرفت .

(مثلاوقتی‌که تغییرات شکل ازدوران خطوط متغیرحول یك نقطهٔ ثابت حاصل می‌شود می‌توان از نقطهٔ مورد نظرموازی با این خطوط رسم‌کرد یا اینکه عمودهایی برآنها فرودآورد. درحالت خاصی‌که خطوط متغیر بعضی با بعضی دیگر موازی باقی می‌مانند مناسبتر آنست‌که از نقطهٔ مورد نظر موازی بـا آنها رسم‌کرد ، زیرا ممکن است‌که خطوط موازی مزبور خط واصل بین نقطهٔ متحرك و مرکز دوران را به نسبت معین‌تقسیم کنند و در نتیجه خطی‌که از نقطهٔ مورد نظر رسم شده است‌از نقطهٔ ثابتی واقع براین خط بگذرد .)

یا اینکه خاصیت تازه‌ای را مشاهده‌کـرده از روی آن مکان را به سادگی مشخص‌کرد .

(مثلا اگر معلوم شود خط متغیری‌که از نقطهٔ مورد نظر می‌گذرد با سه خط متقارب ، خط دیگـری را به نسبت توافقی تقسیم‌کند مکان نقطه خطی است‌که برنقطهٔ تقارب سه خط مزبور می‌گذرد .)

یا اینکه یك مکان‌کلاسیك را به میان آورد .

(مثلامعلوم‌کرد که‌مجموع یا تفـاضل مربعات‌فواصل‌نقطه از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است) .

مخصوصاً باید حالتهای زیررا بررسی‌کرد :

وقتی‌که فاصلهٔ نقطه‌ااز یك نقطهٔ ثابت مقدار ثابت باشد (که دراین حالت مکان نقطه دایره‌ای است‌که نقطهٔ ثابت مرکز آن می‌باشد) ؛ وقتی‌که نقطه از دو خط ثابت به یك فاصله‌باشد (مکان ، نیمساز زاویهٔ دو خط است) ؛ وقتی‌که نقطه از یك خط ثابت به فاصلهٔ ثابت می‌باشد ؛ وقتی‌که نسبت فواصل نقطه از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت باشد (مکان نقطه یك دایره است ؛ وقتی‌که نقطه‌ازدونقطهٔ ثابت به یك فاصله باشد : وقتی‌که‌مجموع یـاتفاضل فواصل‌نقطه‌از دونقطهٔ‌ثابت‌مقدارثابت باشد(مکان بیضی یاهذلولی است) ؛ وقتی‌که نقطه از نقطهٔ ثابت وخط ثابت‌به یك فاصله است (مکان یك سهمی است) ؛

اگر از بررسی خواص نقطهٔ مورد نظر معلوم شودکه این نقطه فصل مشترك یك خط متغیر با یك خط ثابت است ، مکان نقطه همین خط ثابت خواهد بود ؛

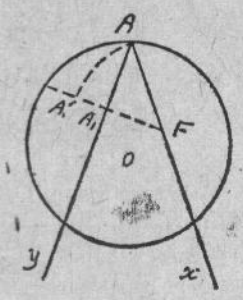
اگر قرینهٔ نقطهٔ مورد نظر نسبت به نقطهٔ ثابت یا خط ثابت بر خط ثابت معین واقع شود مکان نقطه قرینهٔ این خط ثابت می‌باشد ؛

اگر فاصلهٔ نقطه ازیك نقطهٔ ثابت با فاصلهٔ این نقطهٔ‌ثابت تا نقطهٔ متغیردیگری واقع برخط واصل بین نقطهٔ ثابت ونقطهٔ مورد نظر متناسب باشد در این صورت مکان مطلوب متجانس یك شکل معین خواهد بود . مثلا وقتی نقطهٔ مورد نظر روی قاطع متغیری باشدکه ازنقطهٔ ثابت می‌گذرد ، باید معلوم‌کرد که‌آیا مکان قرینهٔ این نقطهٔ ثابت‌نسبت به نقطهٔ متغیر به‌سادگی تعیین می‌شود؟ دراین صورت مکان مطلوب متجانس مکان‌اخیر خواهد بود .

در حالتی‌که خط واصل بین نقطهٔ مورد نظر و یك نقطهٔ ثابت منحنی‌ثابتی را قطع‌کند معلوم‌کردکه‌آیا نسبت بین‌فواصل این نقطه و نقطهٔ متغیر از نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است ؟ در این صورت مکان متجانس منحنی مزبور می‌باشد .

بطورکلی می‌توان از طـریقهٔ مزبور در مورد تبدیلات هندسی سادهٔ دیگر استفاده‌کرد. مثلا فرض می‌کنیم **A**رأس‌زاویه به اندازهٔ α دایرهٔ به مرکز **O** را چنان بپیمایدکه ضلع **Ax**

از آن از نقطهٔ ثابت F بگذرد . اگر A_1 تصویر قائم F روی Ay ضلع دیگر زاویه باشد مکان A_1 چه خواهد بود ؟ اندازهٔ زاویهٔ A_1FA معلوم



است . اگر A را به زاویهٔ $(90^\circ - \alpha)$ دوران دهیم تا به وضع A' درآید ، A' در امتداد FA_1 قرار داشته و داریم :

$$\frac{FA_1}{FA'} = \frac{FA_1}{FA} = \sin\alpha$$

یعنی A_1 متجانس A' درتجانس $(\sin\alpha$ و F) می‌باشد. اما مکان A' عبارتست از دایرهٔ O' که از دوران دایرهٔ O حول F به اندازهٔ $(90^\circ - \alpha)$ بدست می‌آید و مکان A_1 دایرهٔ دیگری است که مجانس دایرهٔ O' می‌باشد .

اگر نقطهٔ مورد نظر بعد از یك دوران حول نقطهٔ ثابت به نقطه‌ای واقع برخط ثابت بدل‌شود مکان مطلوب خطی خواهد بود که از دوران خط اخیر حول آن نقطهٔ ثابت بدست می‌آید . مثلا فرض می‌کنیم که A ثابت باشد و داشته باشیم $AB=AC$ و B برخط D_1 قرار داشته باشد . مکان C خطی خواهد بود که از دوران خط D_1 حول A بدست می‌آید .

مثال دیگر ـ اگر O نقطهٔ ثابت و M و N دو نقطهٔ متغیر باشند بقسمی که $OM.ON=k$ باشد وقتی M' را بر OM چنان اختیار کنیم که $OM.OM'=k$ باشد مکان M' از انعکاس مکان M بدست می‌آید و مکان N مبدل مکان M' در دوران حول O می‌باشد .

اگر نقطهٔ مورد نظر تصویر نقطهٔ ثابتی بر یك خط‌متغیر باشد می‌توان معلوم‌کرد که آیا این خط با دو خط دیگر مثلثی می‌سازد که‌دایرهٔ محیطی‌آن ازآن‌نقطهٔ ثابت می گذرد ؟ در این صورت مکان مطلوب خط سمسن این مثلث نسبت به آن نقطهٔ ثابت خواهد بود .

۲ـ اگر به‌ترتیب بالانتوان به‌نتیجه رسید می‌توان‌منعکس شکل را بدست آورده نسبت به‌آن به بررسی پرداخت . البته قطب وقوت انعکاس باید بقسمی انتخاب شود که تعیین منعکس مکان مطلوب به سادگی میسر باشد .

۳ـ به ردگیری شکل‌پرداخت . یعنی نوع‌شکل واوضاع نسبی اجزاء آن را نسبت به هم به دقت بررسی‌کرد . مثلا اگر گمان‌کنیم که مکان مطلوب‌یك خط راست است معلوم‌کنیم که‌آیا این خط از نقطهٔ ثابت می‌گذرد ؟ برخط ثابتی عمود است ؟ با خط‌ثابتی‌موازی‌است؟ باخط‌ثابتی زاویهٔ‌ثابت می‌سازد؟ اگر گمان کنیم که‌مکان‌مطلوب‌یك دایره است ، به دنبال مرکز وشعاع آن بگردیم ، یااینکه‌معلوم‌کنیم برچه نقاط ثابتی می‌گذرد و وضع این نقاط‌را نسبت‌به‌هم بسنجیم .

نباید فراموش‌کرد که ممکن است‌مکان مطلوب ازچندین خط تشکیل شده باشد .

وقتی به ترتیب بالا مکان حدس زده شدکافی است ثابت کرد که نقطهٔ مورد نظر برآن قرار دارد . مثلا اگر بنظر برسد که مکان مطلوب خط مستقیمی است‌که بردونقطهٔ ثابت‌می‌گذرد کافی است ثابت‌کرد که این دو نقطه ونقطهٔ مورد نظر بر یك خط راست واقع‌اند .

اگر بنظر برسد که‌مکان‌مطلوب‌خط‌راستی‌است که‌ازنقطهٔ‌ثابت می‌گذرد ، کافی است ثابت‌کرد که خط واصل بین نقطهٔ مورد‌نظر و نقطهٔ ثابت امتداد ثابت دارد مثلا با خط ثابتی ازشکل زاویهٔ ثابت می‌سازد، با خط ثابتی از شکل موازی است ، برخط‌ثابتی از شکل عمود است . در حالت خاص اگر تصویر مورد نظربر خط ثابتی نقطهٔ ثابت است مکان مطلوب خطی است‌که در این نقطهٔ ثابت براین خط ثابت‌عمود می‌باشد .

اگر بنظر برسد که مکان مطلوب یك خط راست است و علاوه برآن درشکل یك دایره یا یك چهارضلعی محاطی ثابت وجود داشته باشد بایدمعلوم کرد که‌آیا امکان‌دارد مکان‌مطلوب منعکس این دایره باشد؟

اگرمکان مطلوب احتمالا یك خط راست باشد ونقطه‌ای ازمکان برخط متغیری‌که حول نقطهٔ ثابت می‌گردد واقع باشد می‌توان دو وضعیت از این خط را در نظرگرفت ومعلوم‌کرد که خط واصل بین نقاط نظیر این دو خط ثابت است . به همین ترتیب وقتی‌که نقطهٔ مورد نظربرخطی واقع باشدکه موازی با خودش تغییر می‌کند .

اگر بنظر برسد که مکان‌مطلوب یك‌خط راست‌است‌می‌توان حالتهای زیررا بررسی‌کرد :

نقطهٔ مورد نظر از دو نقطهٔ ثابت به یك فاصله است یا اینکه تفاضل مربعات آن از دو نقطهٔ ثابت مقدارثابت است .

فاصلهٔ نقطه از خط ثابت مقدارثابت است .

مجموع یا تفاضل فواصل نقطه ازدوخط ثابت مقدارثابت است ، یا اینکه نقطهٔ موردنظرقطعه خط محصور بین دوخط‌ثابت را به‌نسبت ثابت تقسیم می‌کند .

نقطهٔ مورد نظر نسبت به دودایره دارای قوتهای برابر

باشد ، یا اینکه برقطبی یك نقطهٔ ثابت نسبت بـه یك دایرهٔ ثابت یا نسبت به دوخط متقاطع ثابت واقع باشد .

نقطهٔ موردنظر متجانس نقطه‌ای از خط ثابت باشد.

اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب یك دایره است که بر دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد ، می‌توان ثابت کردکه قطعه خط واصل بین دونقطهٔ مزبوراز نقطهٔ مورد نظر به زاویهٔ ثابت دیده می‌شود.

اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب دایره‌ای است کـه خط واصل بین دو نقطهٔ ثابت را در دونقطهٔ واقع در داخل و خارج دو نقطهٔ ثابت قطع می‌کند می‌توان ثابت کـردکه نسبت فواصل نقطهٔ مورد نظر ازدونقطهٔ ثابت مقدارثابت است .

اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب دایره‌ای است که مرکز آن وسط قطعه خط ثابتی واقع است می‌توان ثابت کردکه مجموع مربعات فواصل نقطهٔ مورد نظر از طرفین این قطعه خط مقدار ثابت است .

اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب دایره است می‌توان ثابت کردکه :

اگر A وB وC سه نقطهٔ ثابت و M نقطهٔ موردنظر باشد زاویه‌های ABM و ACM با هم برابرند .

اگر AوB دونقطهٔ ثابت و AC خط ثابت باشد خطوط MA وMB با خطوط AB وAC زاویه‌های برابر بسازند .

نقطهٔ مورد نظر دراوضاع مختلف متجانس نقاط یك دایرهٔ ثابت باشد .

نقطهٔ مورد نظر در اوضاع مختلف منعکس نقاط یك دایرهٔ ثابت باشد ، البته قطب انعکاس روی این دایره واقع نباشد .

۴ـ اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب نه خط مستقیم است و نه دایره دراین صورت :

الف ـ اگر بنظر برسدکه مکان بیضی است باید ثابت کردکه :

مجموع فواصل نقطهٔ مورد نظر از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است ،

یا اینکه، روی شکل دایرهٔ ثابتی یافت شودکه اگر از نقطهٔ مورد نظر عمودی برقطر این دایره رسم شود نسبت فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع عمود با دایره ازاین قطر به نسبت فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر ازهمین قطر امتداد ثابت باشد .

یا اینکه ، نسبت فاصلهٔ نقطه ازیك نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ آن ازیك خط ثابت برابر با مقدار ثابتی کوچکتر ازیك باشد .

یا اینکه، اگردستگاه محورهای مختصات مناسبی انتخاب شود مختصات نقطه در معادلهٔ یك بیضی صدق کند .

ب ـ اگر بنظر برسدکه مکان یك هذلولی است بایدثابت کردکه :

تفاضل فاصله‌هـای نقطهٔ مکان از دو نقطهٔ ثابت مقـدار ثابت است :

یا اینکه، نسبت فـاصلهٔ نقطه ازیك نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ آن ازیك خط ثابت برابربا مقدار ثابت بزرگتر ازیك باشد .

یا اینکه ، با انتخاب دستگاه محورهای مختصات مناسب مختصات نقطه درمعادلهٔ هذلولی صدق کند .

یا اینکه ، نقطهٔ مورد نظر رأس مثلث شبه قائمه‌ای باشد که دورأس دیگر آن نقطه‌های ثابت باشند .

ج ـ اگر بنظر برسدکه مکان مطلوب سهمی است باید ثابت کردکه :

نقطهٔ مکان از نقطهٔ ثابت و از خط ثابت به یك فاصله است .

یااینکه ، مربع فاصلهٔ نقطهٔ مکان ازیك خط ثابت متناسب باشد با فاصلهٔ پای عمودمرسوم ازنقطه براین خط تا نقطهٔ ثابتی واقع برهمین خط :

یااینکه ، باانتخاب دستگاه محورهای مختصات مناسب، مختصات نقطه درمعادلهٔ سهمی صدق کند .

۵ ـ مسئلهٔ مهم بعد ازتعیین نوع مکان این است که باید معلوم کرد آیا تمام نقاط یا فقط قسمتی از آن مکان مطلوب می‌باشد .

برای تعیین حدود مکان باید عواملی راکه تغییرات آنها موجب تعیین مکان شده است درنظر گرفت وحد اوضاع مختلف آنها را بررسی کرد .

طریقهٔ دیگر بررسی امکان رسم مکان است ؛ برای رسم یك ساختمان هندسی شرایطی لازم است ، باید معلوم کرد نسبت به‌چه بخشی ازمکان این شرایط برقرار است . یا اینکه نسبت به چه بخشی ازمکان شرایط مذکور درمفروضات برقرارمی‌باشند (مثلا اگرمنظور تعیین مکان مرکزیك بیضی باشد وبرای آن یك منحنی بدست آمده باشد قسمتی ازاین منحنی جزء مکان خواهد بودکه نسبت به‌آن 2c ، فاصلهٔ کانونی بیضی ، از 2a طول قطر اطول آن کوچکتر باشد) .

تعیین حدود مکان پس از درنظرگرفتن حالتهای خاص و تعیین نوع منحنی مکان انجام می‌گیرد .

تعیین حدود مکان درحالتی که نقاط مکان تمامی روی خطوطی محدود به یك نقطهٔ ثابت و یك منحنی مشخص واقع‌اند به سادگی انجام می‌گیرد (دراین حال کافی‌است که حد اوضاع این خطوط متغیر را معلوم کرد) . یا همچنین درحالتی که نقاط مکان از تقاطع دوخط بدست می‌آیند که یکی از آنها از نقطهٔ متغیر واقع بریك منحنی می گذرد و دیگری حول نقطهٔ ثابت می‌چرخد تعیین حدود مکان به سادگی میسر است .

۶ـ وقتی مکان به دقت معلوم شد بازهم ترجیح داردکه معلوم‌کرد آیا طریقهٔ دیگری وجود داردکه مستقیماً مکان را بدست دهد . مثلا اگربا استفاده از خاصیتهای نقطهٔ مورد نظر معلوم شده باشدکه مکان آن یك سهمی است بایدکانون و خط هادی این سهمی را معلوم‌کرده به جستجوی راهی پرداخت که ضمن‌آن ثابت شودهر نقطه ازمکان ازاین کانون وخط‌هادی به یك فاصله است .

برای **تعیین پوش یك خط** می‌توان :

۱ـ نقطهٔ ثابتی مانند **A** تعیین‌کردکه اگر ازآن‌برخط متغیر عمودکنیم طول عمود مقدار ثابت باشدکه در این صورت پوش خط دایره‌ای است به‌مرکز **A** .

اگر **A** نقطهٔ ثابت و **B** پای عمودمرسوم از **A** برخط بوده طول **AB** ثابت‌نباشد دراین‌صورت باید به‌جستجوی‌مکان **B** پرداخت . اگراین مکان :

الف ـ یك‌خط باشدپوش مطلوب سهمی است‌که **A** کانون آن‌بوده وخط هادی آن‌مکان قرینه‌های **A** نسبت‌به **B**می‌باشد.

ب ـ یك دایرهٔ به مرکز **O** باشد پوش مطلوب بیضی یا هذلولی به مرکز **O** می‌باشدکه **A** یك‌کانون وقرینهٔ **A** نسبت به **O** کانون دیگر آن است . پوش بیضی یا هذلولی است برحسب اینکه شعاع دایره بزرگتر یا کوچکتر از فاصلهٔ **OA** باشد .

۲ـ اگر خط متغیر با خط دیگری موازی باشدکه پوش خط اخیر به‌سادگی معین‌شود تجانسی‌پیداکردکه ازروی‌آن‌خط اول از روی اخیر بدست‌آید دراین‌صورت پوش مطلوب‌مجانس پوش خط اخیر خواهد بود .

تعمیمهای قضیه‌های ... (دنباله ازصفحهٔ ۶۳۰)

۴ محور تقارن باشد . مانند معادلهٔ زیر :

$$x^2-y^2+x-y=0 \quad (1)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت :

$$(x-y)(x+y+1)=0$$

این منحنی از دو خط به معادلات :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

تشکیل شده است . این خطوط و نیمسازهای آنها محورهای تقارن منحنی به معادلهٔ (۱) می‌باشند .

در اثبات قضیهٔ استورم در حالت $p=2$ ، اگر $n=4$ باشد ، چون منحنی مکان دراین‌حالت یك منحنی درجهٔ دوم است‌که‌دارای۴محور تقارن‌است، ممکن است‌تصور شود که مکان می‌تواند از دوخط عمود برهم تشکیل گردد . در زیر ثابت می‌کنیم‌که چنین نیست و مکان هندسی موردبررسی دراین‌حالت هم دایره است . نقاط H_1وH_2وH_3وH_4 را تصاویر نقطهٔ **M** براضلاع مربع $A_1A_2A_3A_4$ فرض می‌کنیم طبق قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت :

$$\overline{MH_1}^2+\overline{MH_4}^2=\overline{MA_1}^2$$
$$\overline{MH_2}^2+\overline{MH_3}^2=\overline{MA_3}^2$$

از جمع روابط فوق حاصل می‌شود :

$$\overline{MH_1}^2+\overline{MH_2}^2+\overline{MH_3}^2+\overline{MH_4}^2=$$
$$=\overline{MA_1}^2+\overline{MA_3}^2$$

پس باید $\overline{MA_1}^2+\overline{MA_3}^2=l^2$ باشد .

از طرفی طبق قضیهٔ مجموع مربعات دو ضلع مثلث می‌توان نوشت :

$$\overline{MA_1}^2+\overline{MA_3}^2=2\overline{OM}^2+\frac{\overline{A_1A_3}^2}{2}$$

پس باید :

$$\overline{OM}^2=\frac{1}{2}(l^2-\frac{\overline{A_1A_3}^2}{2})=\text{ثابت}$$

باشد . در نتیجه مکان **M** یك دایره است .

توضیح سوم ـ چنانچه $n=4$ باشد ، اندازهٔ سطح چهار ضلعی $H_1H_2H_3H_4$ همواره نصف اندازهٔ سطح مربع $A_1A_2A_3A_4$ می‌باشد .

اگر $l^2=2R^2$ باشد ، تمام نقاط صفحه جزء مکان خواهد بود .

اگر $l^2\neq 2R^2$ باشد ، هیچ نقطهٔ صفحه جزء مکان نمی‌باشد .



بخش سوم ـ فایده وموارد استعمال ترسیمات

فصل پنجم ـ حل هندسی مسائل جبری

I ـ نمایش هندسی مقادیر جبری

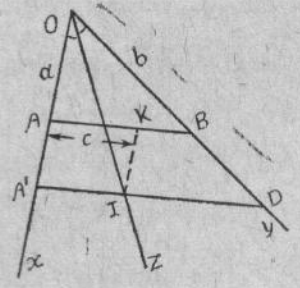
مسئلهٔ ۱ـ به فرض اینکه **a** و **b** و **c** سه طول معلوم باشد طول **x** را رسم کنید که در رابطهٔ $ax=bc$ سازگار باشد .

راه اول ـ زاویهٔ دلخواه **xOy** را رسم می‌کنیم و روی ضلع **Ox** از آن طولهای $OA=a$ و $AB=b$ و روی ضلع **Oy** طول $OC=c$ را جدا می‌کنیم . **AC** را وصل‌واز **B** موازی باآن رسم می‌کنیم تا **Oy** را در **D** قطع کند . بنابه‌قضیهٔ تالس طول **BD** همان طول مطلوب **x** است .

راه دوم ـ روی ضلع **Ox** از زاویهٔ **xOy** طولهای $OA=a$ و $OB=b$ وروی ضلع **Oy** طول $OC=c$ را جدا می‌کنیم . از **B** که موازی با **AC** رسم شود **Oy** را در **D** قطع کند و **OD** طول **x** می‌باشد .

راه سوم ـ روی **Ox** طولهای $OB=b$ و $OC=c$ وروی **Oy** طول $OA=a$ را جدا می‌کنیم . دایره‌ای که بر سه نقطهٔ **A** و **B** و **C** رسم شود **Oy** را درنقطهٔ دیگر **D** قطع می‌کند و طول **OD** برابر **x** می‌باشد زیرا داریم :

$$OA.OD=OB.OC$$



راه چهارم ـ روی ضلع **Ox** اززاویهٔ **xOy** طول $OA=a$ و روی **Oy** طول $OB=b$ را جدا می‌کنیم . بر **AB** نقطهٔ **K** را چنان تعیین می‌کنیم که $AK=c$ باشد و از **K** موازی با **Ox** رسم می‌کنیم که نیمساز زاویهٔ **O** را در **I** قطع می‌کند واز **I** موازی با **AB** رسم می‌کنیم که **Ox** و **Oy** را در A' و **D** قطع می‌کند . بنا به خاصیت نیمساز داخلی در مثلث $OA'D$ داریم :

$$\frac{A'I}{ID}=\frac{OA'}{OD}=\frac{OA}{OB}$$

$$\frac{c}{ID}=\frac{a}{b} \Longrightarrow ID=x$$

راه پنجم ـ درحالتی‌که **a** از **b** و **c** کوچکتر باشد ، مثلث قائم‌الزاویهٔ **BAH** را چنان رسم می‌کنیم‌که طول وتر آن $AB=c$ وطول ضلع‌آن $AH=a$ باشد ـ دایرهٔ‌به‌مرکز **A** وبه شعاع **b** با **BH** در **C** متلاقی می‌شود . عمود مرسوم بر **AB** در **B** باعمود مرسوم بر **AC** در **C** در **D** متلاقی می‌شود و **AD** طول مطلوب است. زیرا درچهارضلعی محاطی **ABCD** داریم :

$$AB.AC=2R.AH \quad \text{یا} \quad bc=a.AD$$

راه ششم ـ در حالتی‌که **a** از **b** و **c** بزرگتر باشد دایره‌ای به‌شعاع $\frac{a}{2}$ رسم می‌کنیم ونقطهٔ **A** را روی‌آن اختیار کرده به‌مرکز **A** و به‌شعاعهای **b** و **c** دودایره‌رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ اول را به‌ترتیب در **B** و **C** قطع می‌کنند. فاصلهٔ **A** از **BC** همان طول **x** است .

راه هفتم ـ روی ضلع Ox از زاویهٔ xOy طولهای $OB=b$ و $OC=c$ و روی ضلع Oy طول $OA=a$ را جدا می‌کنیم. درنقطهٔ C خطی رسم می‌کنیم که با Ox زاویه‌ای مساوی بازاویهٔ OAB بسازد. این خط Oy را در D قطع می‌کند و $OD=x$ می‌باشد. زیرا چهار ضلعی $ABCD$ محاطی است و داریم:

$$OB.OC=OA.OD$$

مسئلهٔ ۲ـ بامعلوم بودن طولهای a و b طول واسطهٔ هندسی آنها را تعیین‌کنید، به عبارت دیگر طول x را چنان معلوم کنید که دررابطهٔ $x^2=ab$ سازگار باشد.

راه اول ـ روی خط xy طولهای $OA=a$ و $OB=b$ را جدا می‌کنیم و دایرهٔ به قطر AB (به‌مرکز I) و همچنین دایرهٔ به‌قطر OI رارسم می‌کنیم. اگر S نقطهٔ تلاقی دودایره باشد طول OS برابر با x است.

راه دوم ـ روی خط xy طولهای $AB=a$ و $BC=b$ را جدا می‌کنیم (B بین A و C است). در B عمود BI را بر AC ومحدود به نیمدایرهٔ به قطر AC رسم می‌کنیم. طول این‌عمود برابر با x است.

راه سوم ـ با فرض $a>b$ روی خط xy طولهای $AB=a$ و $AC=b$ را جدا می‌کنیم. عمودی که در C بر AB اخراج شود نیمدایرهٔ به‌قطر AB را در I قطع می‌کند. طول AI برابر با x است.

مسئلهٔ ۳ـ بامعلوم بودن طولهای a و b طول x را رسم کنید که دررابطهٔ $ax=b^2$ سازگار باشد.

راه اول ـ روی ضلع Ox اززاویهٔ xOy طول $OB=b$ وروی Oy طول $OA=a$ را جدا می‌کنیم. در B خطی رسم می‌کنیم که با BO زاویهٔ برابر با زاویهٔ OAB بسازد. این خط ضلع Oy را در D قطع می‌کند و $OD=x$ می‌باشد. زیرا دومثلث OAB و OBD متشابه‌اند وازتناسب بین‌ضلع‌های آنها نتیجه خواهد شد:

$$OA.OD=OB^2$$

راه دوم ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ BHA قائمه درزاویهٔ H را رسم می‌کنیم که $BH=a$ و $AH=b$ باشد. درA عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا امتداد BH را در C قطع کند. طول $HC=x$ می‌باشد. زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AH^2=BH.HC$$

راه سوم ـ با فرض $a<b$ مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB قائمه در زاویهٔ H را رسم می‌کنیم که $AB=b$ و $BH=a$ باشد. عمودی‌که در A بر AB اخراج شود BH رادر C قطع می‌کند و $BC=x$ می‌باشد.

راه چهارم ـ با فرض $a>b$ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A را رسم می‌کنیم که $AB=b$ و $BC=a$ باشد: نقطهٔ A رادر H بر BC تصویرمی‌کنیم. طول BH برابر با x است.

مسئلهٔ ۴ـ بامعلوم‌بودن طول a طولی‌برابر با $x=\frac{1}{a}$ رسم کنید.

می‌توان این رابطه‌را به‌صورت $x\times a=1\times 1$ نوشت ومسئله منجرمی‌شود به‌تعیین چهارمین جزء ازتناسبی ازسه‌جزء آن معلوم است. به عبارت دیگر مسئله حالت خاصی است از مسئلهٔ ۳ و می‌توان با هر یك از چهار طریق فوق‌الذکر عمل کرد.

راه دیگر ـ دایرهٔ C به‌قطر $AB=1$ ودر A مماس D را برآن رسم می‌کنیم. دایرهٔ C' به‌مرکز B و به شعاع a را نیزرسم می‌کنیم. اگر $a>1$ باشد دایرهٔ C' درE بامماس D متلاقی می‌شود وخط BE دایرهٔ C را در F قطع می‌کند که BF به‌طول x می‌باشد. زیرا دایرهٔ C وخط D در انعکاس به‌قطب B وبه‌قوت $AB^2=1$ منعکس یکدیگرند وداریم:

$$\overline{BF}.\overline{BE}=\overline{BA}^2 \quad \text{یا} \quad a.\overline{BF}=1$$

اگر $a<1$ باشد دایرهٔ C' دایرهٔ C را در F' و BF' خط D را در F قطع می‌کند که BF برابر با x می‌باشد.

اگر $a=1$ باشد واضح است‌که $x=a=1$ (در این حال دایره‌های C و C' در A مماس می‌شوند).

واسطهٔ توافقی ـ اگر a و b دوطول معلوم و x طولی باشدکه معکوس‌آن واسطهٔ حسابی‌معکوسات طولهای a و b باشد یعنی داشته باشیم:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

طول x واسطهٔ توافقی‌بین‌طولهای a و b نامیده‌می‌شود. رابطهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x=\frac{2ab}{a+b}=\frac{(\sqrt{ab})^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ونتیجه می‌شود که واسطهٔ هندسی بین a و b درعین‌حال واسطهٔ هندسی بین واسطه‌های حسابی وتوافقی‌آنها نیزمی‌باشد وازاین

راه می‌توان طول x را بدست‌آورد .

تبصره ـ اگرمثلث ABC درزاویهٔ A قائمه و H پای ارتفاع وارد بروترو M وسط ضلع BC باشد چون H را در I بر AM تصویر کنیم ، AM ، AH و AI به ترتیب واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی وواسطهٔ توافقی‌طولهای BH و CH می‌باشند .

مسئلهٔ ۵ ـ سه نقطهٔ A و B و I واقع بر یك خط راست مفروض‌اند . I' مزدوج توافقی I رانسبت به A و B بدست‌آورید .

به‌مرکزهای A و B دایره‌های C و C' به‌شعاعهای AI و BI رارسم می‌کنیم. نقطهٔ M را بر C اختیارکرده‌خط MI را رسم‌می‌کنیم که C' رادر N قطع‌می‌کند. اگر N' نقطهٔ‌متقاطر N ازدایرهٔ C' باشد خط MN' خط AB رادر I' قطع می‌کند . درحقیقت I و I' مرکزهای تجانسهای مستقیم ومعکوس دودایره C و C' می‌باشند ومی‌دانیم‌که این دونقطه نسبت به ـ مرکزهای دودایره مزدوج توافقی یکدیگرمی‌باشند.

مسئلهٔ ۶ـ اگر a طول‌معلوم و n عددصحیح باشدطول $x=\frac{a}{n}$ رارسم‌کنید .

راه رسم خاص را مربوط به‌حالت $n=2$ یا اینکه n توانی‌از۲ باشد به‌کنارمی‌گذاریم. قطعه‌خط $AB=a$ ونیم‌خط Ax رارسم می‌کنیم . روی Ax ابتدا از A تعداد n طول برابر باهم جدا می‌کنیم . اگر I انتها و K طرف دیگر آخرین قطعه خط باشد چون IB راوصل‌کنیم و از K موازی با IB رسم‌کنیم تا AB رادر L قطع‌کند طول LB مطلوب x می‌باشد .

مسئلهٔ ۷ـ طول $x=\sqrt{2}$ رارسم‌کنید .

راه اول ـ داریم $x^2=2\times 1$ ومانند مسئلهٔ دوم عمل می‌کنیم .

راه دوم ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم‌می‌کنیم‌که طول هر ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن واحد باشد دراین صورت طول وترآن برابر $\sqrt{2}$ است .

مسئلهٔ ۸ـ با معلوم بودن طولهای a و b طول x را بقسمی رسم‌کنیدکه $x=\sqrt{2a^2+3b^2}$ باشد .

کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم‌کنیم‌که طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ‌آن به‌ترتیب $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{3}$ باشد ، دراین صورت طول وترآن برابر با x خواهد بود.

مسئلهٔ ۹ـ طول x را رسم‌کنیدکه داشته باشیم :

$$x=\sqrt{a^2-b^2}$$

راه اول ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم‌که طول وتر آن a و طول یك ضلع‌آن b باشد ، طول ضلع دیگرآن x می‌باشد .

راه دوم ـ می‌توانیم بنویسیم $x^2=(a+b)(a-b)$ و کافی است واسطهٔ هندسی طولهای $a+b$ و $a-b$ را رسم‌کنیم .

مسئلهٔ ۱۰ـ بامعلوم بودن طول aطول $x=\sqrt{a^3}$ را رسم‌کنید .

می‌توانیم بنویسیم $x\times 1=a\times\sqrt{a}$ پس x چهارمین جزء ازتناسبی‌است‌که سه جزءآن معلوم‌است .

مسئلهٔ ۱۱ـ رسم‌طول $x=\sqrt{a^4+b^2}$

می‌توانیم بنویسیم $x^2=(a^2)^2+b^2$ و x طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌باشدکه یك ضلع‌آن a^2 وضلع دیگرآن b است .

مسئلهٔ ۱۲ـ رسم‌طول $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$

داریم $(x^2)^2=(a^2)^2+(b^2)^2$ یعنی x^2 طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است‌که طول یك ضلعش a^2 و طول ضلع دیگرش b^2 است. بارسم x^2 وبعدازآن رسم‌واسطهٔ هندسی بین x^2 و ۱ طول x بدست می‌آید .

II ـ حل هندسی معادلات

معادلهٔ زیررادرنظر می‌گیریم:

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم‌که بتوانیم دومعادلهٔ

$$g(x,y)=0 \qquad (2) \qquad \text{و} \qquad h(x,y)=0 \qquad (3)$$

را چنان تشکیل دهیم‌که ازحذف y بین‌آنها معادلهٔ (۱) بدست آید. معادله‌های (۲) و (۳) در صفحهٔ محورهای مختصات منحنیهای C و C' را مشخص می‌کنند. ازحذف y بین معادله‌های (۱) و (۲) معادله‌ای بدست می‌آیدکه ریشه‌های آن‌طولهای نقطه‌های تلاقی دومنحنی C و C' می‌باشد. بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ (۱) عبارتند از طولهای نقطه‌های تلاقی دو منحنی C و C' واز این راه می‌توان معادلات جبری را از راه هندسی حل‌کرد .

معادلهٔ درجهٔ دوم ـ معادلهٔ درجهٔ دوم را به صورت زیر درنظر می‌گیریم :

$$x^2+px+q=0 \qquad (4)$$

۱) یکی‌از ریشه‌های این معادله عبارتست از:

$$x' = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

رسمی‌هندسی طول $\sqrt{p^2-4q}$ مشکل است و مناسبتر آنست‌که ازروش فوق‌الذکر استفاده‌کنیم .

۲) می‌توان دومعادلهٔ زیررا در نظرگرفت

$$y=x^2 \quad (5) \qquad \text{و} \qquad y=-px-q \quad (6)$$

که ازحذف y بین‌این دومعادله ، معادلهٔ (۴) حاصل می‌شود. معادلهٔ (۵) یك سهمی و معادلهٔ (۶) یك خط مستقیم را مشخص می‌کند. حل‌معادلهٔ درجهٔ دوم (۴) به‌تعیین نقطه‌های تلاقی یك سهمی ویك خط راست منجرمی‌شود .

کانون سهمی به‌معادلهٔ (۵) نقطهٔ F واقع برمحور $y'y$ و به‌عرض $+\frac{1}{4}$ می‌باشد . معادلهٔ D' خط هادی این سهمی عبارتست‌از $y=-\frac{1}{4}$. معادلهٔ (۴) وقتی‌دوریشهٔ حقیقی‌دارد که F' قرینهٔ F نسبت به‌خط D بالای خط D' واقع‌شود. اگر F' روی D' قرارداشته باشد دونقطهٔ تلاقی خط و سهمی منطبق هستند و معادلهٔ (۴) ریشهٔ مضاعف دارد . اگر F' زیرخط D' واقع باشد خط وسهمی‌نقطهٔ مشترك ندارند و معادلهٔ (۴) ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت.

مثال ۱ـ معادلهٔ زیررادرنظرمی‌گیریم :

$$x^2-3x+2=0 \qquad (1)$$

خط D به معادلهٔ $y=3x-2$ محور $y'y$ را درنقطهٔ به عرض -2 و محور $x'x$ را درنقطهٔ به طول $\frac{2}{3}$ وسهمی P به‌معادلهٔ $y=x^2$ رادردونقطهٔ متمایز قطع می‌کند : معادلهٔ (۱) دارای دوریشهٔ حقیقی می‌باشد .

مثال ۲ـ در مورد معادلهٔ $x^2-4x+4=0$ خط $y=4(x-1)$ برسهمی $y=x^2$ مماس‌می‌شودومعادلهٔ‌مفروض ریشهٔ مضاعف دارد .

مثال ۳ـ در مورد معادلهٔ $x^2+x+1=0$ خط $y=-x-1$ وسهمی $y=x^2$ نقطهٔ تلاقی‌ندارند پس معادلهٔ مفروض ریشهٔ حقیقی ندارد .

۳) می‌توان معادلات زیررا اختیارکرد

$$y=x^2+px \quad (A) \qquad \text{و} \qquad y=-q \quad (B)$$

سهمی P به‌معادلهٔ (A) ازمبدأ مختصات می‌گذرد واگر این معادله را به‌صورت‌زیر بنویسیم:

$$y=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}$$

ملاحظه می‌شودکه محور تقارن سهمی P خط به معادلهٔ $x=-\frac{p}{2}$ ورأس سهمی به مختصات $I(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4})$ می‌باشد. خط D به‌معادلهٔ $y=-q$ بامحور $x'x$ موازی‌است ودرنتیجه ازاین راه بهترازراه قبلی‌می‌توان معادلهٔ درجهٔ‌دوم را حل و بحث کرد : اگر خط D زیر I واقع باشد یعنی داشته باشیم :

$$-q<-\frac{p^2}{4} \implies p^2-4q<0$$

یعنی‌خط وسهمی‌متلاقی‌نباشند معادلهٔ‌درجهٔ دوم ریشهٔ‌حقیقی‌ندارد

اگر D بر I بگذرد یعنی :

$$-q=-\frac{p^2}{4} \quad \text{یا} \quad p^2-4q=0$$

خط و سهمی بریکدیگر مماس‌اند و معادلهٔ (۴) دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{p}{2}$ می‌باشد. اگر D بالای I واقع باشد یعنی داشته باشیم :

$$-q>-\frac{p^2}{4} \quad \text{یا} \quad p^2-4q>0$$

خط وسهمی در دو نقطه متلاقی‌اند ومعادلهٔ (۴) دارای دو ریشهٔ حقیقی‌است وازروی شکل به‌سادگی‌می‌توان علامت هریك ازاین دوریشه را معلوم‌کرد .

مثال ۱ـ در مورد معادلهٔ $x^2-5x+4=0$ سهمی به معادلهٔ :

$$y=x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

وخط به معادلهٔ $y=-4$ دردونقطهٔ به‌طولهای مثبت متلاقی‌اند (زیرا $-\frac{25}{4}<-4<0$) و معادلهٔ مفروض دو ریشهٔ مثبت دارد .

مثال ۲ـ معادلهٔ $x^2+2x\sqrt{3}+3=0$ ریشهٔ‌مضاعف $-\sqrt{3}$ دارد زیرا سهمی :

$$y=x^2+2x\sqrt{3}=(x+\sqrt{3})^2-3$$

وخط $y=-3$ در نقطهٔ $I(-\sqrt{3}, -3)$ بر یکدیگر مماس‌اند .

مثال ۳ـ معادلهٔ $x^2+3x+3=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد زیرا سهمی :

$$y=x^2+3x=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

وخط $y=-3$ نقطهٔ مشترك ندارند .

۴) می‌توان معادلات زیررا اختیار کرد

$$y=x^2+px+q \quad (A) \qquad \text{و} \qquad y=0 \quad (B)$$

معادلهٔ A سهمی P را مشخص می‌کند که معادلهٔ آن چنین نوشته می‌شود :

$$y=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q$$

ونمایش هندسی‌معادلهٔ (B) محور $x'x$ است. ریشه‌های معادلهٔ (۳) عبارت می‌شوند از طولهای نقطه‌های تلاقی سهمی (P) و محور $x'x$ و به سادگی می‌توان در تعداد ریشه‌های معادله بحث‌کرد .

۵) می‌توان‌دایرهٔ به‌معادلهٔ زیررا در نظر گرفت :

$$x^2+y^2+px+q=0 \qquad (C)$$

طولهای نقطه‌های تلاقی این‌دایره بامحور $x'x$، همان ریشه‌های معادلهٔ (۴) می‌باشد . این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x+\frac{p}{2})^2+y^2=\frac{p^2}{4}-q$$

مرکز دایره $I(-\frac{p}{2}\ \text{و}\ 0)$ است و شعاع آن از

$R^2=\frac{p^2}{4}-q$ بدست می‌آید. درحالی‌که :

$R^2=\frac{p^2}{4}-q>0$ است معادله حقیقی‌است ودردو نقطه‌محور $x'x$ را قطع می‌کند یعنی‌معادلهٔ (۴) دوریشهٔ حقیقی دارد . در حالت $\frac{p^2}{4}-q=0$ دایره به‌نقطهٔ I تبدیل می‌شودکه‌طول آن $-\frac{p}{2}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۴) است. درحالت $\frac{p^2}{4}-q<0$ دایره حقیقی‌نیست ومعادلهٔ (۴) ریشهٔ حقیقی ندارد .

مثال ۱ـ در مورد معادلهٔ $x^2+x+6=0$ معادلهٔ دایرهٔ مربوط عبارت می‌شود از :

$$x^2+y^2+x+6=0$$

یا

$$(x+\frac{1}{2})^2+y^2=-\frac{23}{4}$$

شعاع دایره حقیقی نیست و معادلهٔ مفروض ریشهٔ حقیقی ندارد .

مثال ۲ـ برای معادلهٔ $x^2+6x+9=0$ داریم :

$(x+3)^2+y^2=0$ یا $x^2+y^2+6x+9=0$

شعاع دایـره صفر است یعنی دایـره به صورت نقطهٔ $I(-3\ \text{و}\ 0)$ می‌باشد پس معادلهٔ مفروض ریشهٔ مضاعف -3 دارد .

مثال ۳ـ نسبت به‌معادلهٔ $x^2-6x+8=0$ داریم:

$(x-3)^2+y^2=1$ یا $x^2+y^2-6x+8=0$

دایره درنقطهٔ به‌طولهای ۴ و ۲ محور $x'x$ راقطع می‌کند پس معادلهٔ مفروض دارای دوریشهٔ ۴ و۲ می‌باشد .

مثال ۴ـ درمورد معادلهٔ $x^2-2x-5=0$ معادلهٔ دایرهٔ نظیر عبارت می‌شود از :

$$(x-1)^2+y^2=6$$

ونتیجه خواهد شدکه ریشه‌های معادلهٔ مفروض عبارتند از :

$$1+\sqrt{6} \qquad \text{و} \qquad 1-\sqrt{6}$$

معادلهٔ درجهٔ سوم ـ هرمعادلهٔ درجهٔ سوم کامل :

$$AX^3+BX^2+CX+D=0$$

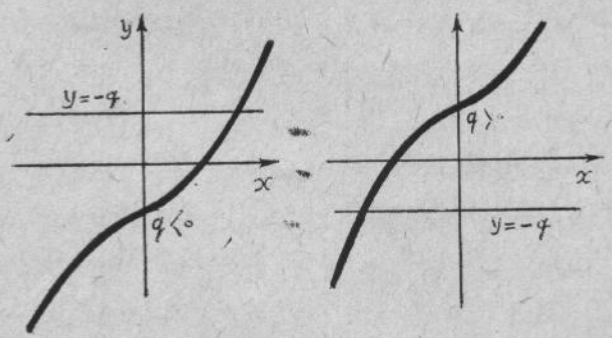
را می‌توان باتبدیل $X=x-\frac{B}{3A}$ به‌صورت زیردرآورد:

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

۱) ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) عبارتند از طـولهای نقطه های تلاقی منحنی $y=x^3$ و خط $y=-px-q$ به‌علت سادگی‌شکل‌منحنی درجهٔ سوم حل‌وبحث مسئله‌تا اندازه‌ای مشکل می‌باشد .

۲) منحنی C به‌معادلهٔ $y=x^3+px$ وخط $y=-q$ را درنظر می‌گیریم. منحنی C ازمبدأ مختصات می گذرد واین نقطه مرکز تقارن وهمچنین نقطهٔ عطف آن می‌باشد.

حالت اول: $p>0$ مشتق $y'=3x^2+p$ همواره مثبت است. منحنی‌همواره صعودی است وفقط دریك نقطه محور $x'x$ را قطع می‌کند. اگر $q<0$ باشد طول این نقطه مثبت است واگر $q>0$ باشد طول این‌نقطه منفی‌خواهد بود .



بنابراین در حـالت $p>0$ معادلهٔ (۱) فقط یك ریشهٔ حقیقی داردکه این ریشه با q مختلف‌العلامت می‌باشد .

حالت‌دوم: $-p<0$ مشتق تابع‌دارای دوجواب‌است.

$$x'=+\sqrt{\frac{-p}{3}} \quad , \quad x''=-\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

تابع دارای ماکسیمم $M=+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و می‌نیمم :

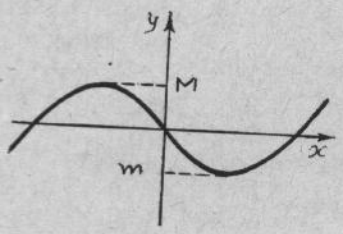
$m=-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ می‌باشد .

برای اینکه خط $y=-q$ منحنی را قطع‌کند لازم و کافی است‌که :

$$m<-q<M \quad \text{یا} \quad q^2<|Mm|$$

$$q^2<-\frac{4p^3}{27} \Longrightarrow 4p^3+27q^2<0$$

که در این حالت p الزاماً منفی خواهد بود . اگر $q>0$ باشد خط ومنحنی‌در یك نقطه به طول منفی ودردو نقطهٔ به طول مثبت یکدیگر را قطع می‌کنند . اگر $q<0$ باشد معادلهٔ



مفروض دو ریشهٔ منفی ویك ریشه مثبت دارد .

اگر $4p^3+27q^2=0$ باشد معادله یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده داردکه این دو ریشه مختلف‌العلامتند . وقتی q مثبت باشد ریشهٔ ساده منفی و وقتی q منفی باشد ریشهٔ ساده مثبت می‌باشد .

۳) معادله‌های زیررا اختیارمی‌کنیم .

$$(H) \quad xy+px+q=0 \quad \text{و} \quad (P) \quad y=x^2$$

که از حذف y بین این دومعادله ، معادلهٔ (۱) بدست می‌آید. منحنیهای P وH به ترتیب سهمی‌وهذلولی می‌باشندکه حداکثر درسه نقطه و حداقل دریك نقطه متلاقی می‌باشند و ازروی آن می‌توان نتایج قبلی را بدست آورد .

۴) طرفین رابطهٔ (۱) را در x ضرب می‌کنیم :

$$x^4+px^2+qx=0 \quad (1')$$

دو معادلهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم :

$$y=x^2 \quad (2) \quad \text{و} \quad y^2+py+qx=0 \quad (3)$$

از حذف y بین این دو معادله ، معادلهٔ (۱') بدست می‌آید . معادلهٔ (۲) یك سهمی مشخص می‌کندکه محور آن در امتداد Oy است ومعادلهٔ (۳) سهمی‌رامشخص‌می‌کندکه‌محورش درامتداد Ox است. طولهای چهار نقطهٔ‌تلاقی این دو سهمی ریشه‌های معادلهٔ (۱') را بدست می‌دهد واز روی آن ریشه‌های معادلهٔ (۱) مشخص می‌شود .

۵) چون محورهای دوسهمی به معادله‌های (۲) و (۳) بریکدیگر عمودند چهارنقطهٔ تلاقی آنها روی دایرهٔ به معادلهٔ زیرقراردارند .

$$x^2+y^2+(p-1)y+qx=0$$

و مسئله منجر به این می‌شود که نقاط تلاقی این دایره با یکی از سهمیها راتعیین‌کنیم .

۶) روش‌پنجم را تعمیم‌می‌دهیم ؛ نقطه‌های تلاقی دوسهمی (۲) و (۳) روی مقطع مخروطی به معادلهٔ زیر قرار دارند .

$$x^2-y+\lambda(y^2+py+qx)=0 \quad (A)$$

در ازاء $\lambda=1$ دایرهٔ مذکور در روش پنجم و در ازاء $\lambda=-1$ هذلولی متساوی‌القطرین زیر حاصل می‌شود :

$$x^2-y^2-(p+1)y-qx=0$$

۷) درمعادلهٔ (A) درازاء $\lambda=\frac{1}{p}$ خواهیم داشت :

$$px^2+y^2+qx=0 \quad (B)$$

و کافی است که طولهای نقطه‌های تلاقی این مقطع مخروطی و سهمی $y=x^2$ را معلوم‌کنیم . مرکز این مقطع مخروطی روی محور $x'x$ قرار دارد . درحالتی‌که $p>0$ باشد مقطع مخروطی بالا یك بیضی است‌که با سهمی (۲) غیر ازمبدأ فقط دریك نقطه متلاقی می‌باشند یعنی دراین حال معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد .

درحالت $p<0$ مقطع مخروطی بالا هذلولی است‌که‌یك شاخهٔ آن سهمی (۲) را دریك نقطه و شاخهٔ دیگر آن سهمی مزبوررا یا در دونقطه (متمایز یا منطبق) قطع می‌کند یا اینکه آنرا اصلا قطع نمی‌کند .

معادلهٔ درجهٔ چهارم ـ معادلهٔدرجهٔ چهارم درحالت کلی به صورت زیراست :

$$AX^4+BX^3+CX^2+DX+E=0$$

با تبدیل $X=x-\frac{B}{4A}$ این معادله به صورت زیر درمی‌آید :

$$x^4+px^2+qx+r=0 \quad (1)$$

۱) می‌توان منحنی Γ و خط D به معادله‌های زیر را درنظر گرفت :

$$y=x^4+px^2 \quad \text{و} \quad y=-qx-r$$

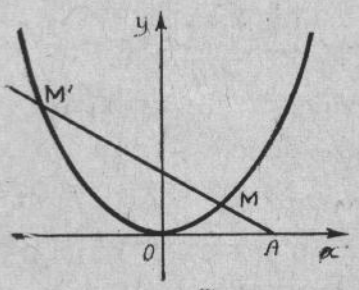
طولهای نقطه‌های تلاقی‌این خط ومنحنی ریشه‌های‌معادلهٔ

(۱) می‌باشد . محور Ox محور تقارن منحنی Γ است .مشتق تابع منحنی Γ عبارتست از :

$$y' = 4x^3 + 2px = 2x(2x^2 + p)$$

حالت ۱ـ اگر $p > 0$ باشدمشتق درازاء $x = 0$ صفر شده درازاء مقادیر کوچکتر ازصفرمنفی ودرازاء مقادیر بزرگتر ازصفر مثبت‌می‌باشد.مشتق ثانی تابع یعنی $y'' = 12x^2 + 2p$ همواره مثبت است .

منحنی Γ نقطهٔ عطف ندارد و شکل آن نزدیك به یك سهمی است . خط D وقتی بر Γ مماس است که ضریب‌زاویهٔ‌آن $-q$ با مشتق تابع برابر باشد :



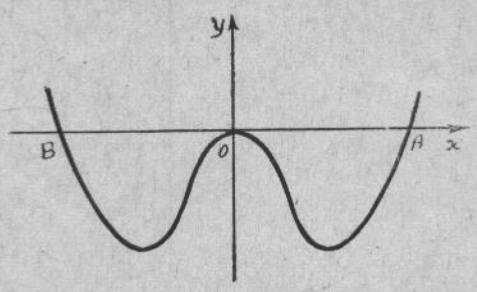
$$y' = 4x^3 + 2px = -q \quad \text{یا} \quad 4x^3 + 2px + q = 0$$

بنابه‌فرض p مثبت است پس معادلهٔ اخیر فقط یك ریشه دارد .

حالت ۲ـ اگر $p < 0$ باشد منحنی Γ به شکل زیراست خط D وقتی $x'x$ رابین A و B قطع‌کند منحنی Γ را نیز قطع می‌کند ودراین حال داریم :

$$r^2 + pq^2 < 0 \quad \text{یا} \quad \left|\frac{r}{q}\right| < \sqrt{-p}$$

دراین حالت اگر نقطهٔ تلاقی D با $y'y$ بالای O واقع



باشد D و Γ دو نقطهٔ تلاقی دارندواین درموقعی است‌که $r < 0$ باشد . اگر $r > 0$ باشد نقطهٔ تلاقی D با $y'y$ زیر (۱) قرار داشته وخط D می‌تواند Γ را درچهارنقطه قطع‌کند. درحالتی که نقطهٔ تلاقی D با $x'x$ خارج AB باشد ممکن است‌که D با Γ اصلامتلاقی نباشندیااینکه فقط‌یك‌نقطهٔ تلاقی‌داشته‌باشند یا اینکه مماس بوده وعلاوه برآن دردو نقطهٔ دیگر متلاقی‌باشند یا درچهارنقطه متقاطع باشند .

۲) می‌توانیم معادله‌های زیر را درنظربگیریم :

$$y = x^2 \quad \text{و} \quad y^2 + py + qx + r = 0$$

و از روی‌آنها تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۱) را معلوم‌کنیم .

۳) می‌توان سهمی و دایرهٔ زیررا درنظرگرفت :

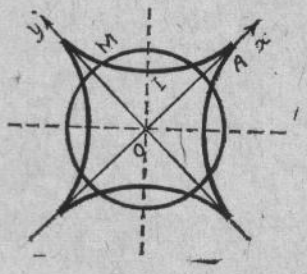
$$y = x^2$$
$$x^2 + y^2 + (p-1)y + qx + r = 0$$

III ـ حل هندسی دستگاههای معادلات و نامعادلات

دستگاه معادلات ـ جوابهای یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی E و E' مختصات نقطه‌های تلاقی منحنیهای‌نمایش هندسی دو معادلهٔ مزبور می‌باشد . اگرمنحنیهای مزبوربادقت رسم شوند و مختصات نقطه‌های تلاقی آنها با دقت اندازه‌گیری شود جوابهای تقریبی دستگاه مفروض بدست می‌آید .

مثال ـ حل دستگاه دومعادلهٔ زیر :

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{و} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$$



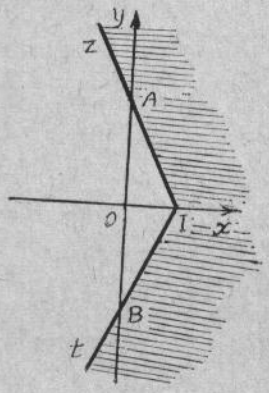
نمایش هندسی‌معادلهٔ اول دایره‌ای است بـه مرکز مبدأ مختصات و بـه شعاع ۵ و نمایش هندسی معادلهٔ دوم هیپوسیکلوئید چهارگوشه می‌باشد . چون محورهای مختصات و همچنین نیمسازهای زاویه‌های آنها محورهای تقارن دو منحنی می‌باشند ، اگر M نقطهٔ مشترك دومنحنی خارج ازخطوط مزبورباشد قرینهٔ آن نسبت به هر- یك از محورهای مزبور نیز دردو منحنی مشترك است ودرنتیجه دو منحنی در هشت نقطه مشترك بوده دستگاه معادلات مفروض دارای هشت دسته جواب می‌باشد .

اگر r شعاع دایره و I نقطه‌ای از هیپوسیکلوئید واقع برنیمساز ربع اول و A رأس آن واقع بر Ox باشد درحالت $r < OI$ یا $r > OA$ دو منحنی نقطهٔ مشترك ندارند ودستگاه دارای جواب نیست . درحالت $OA > r > OI$ دستگاه‌هشت دسته جواب دارد . درحالتهای $r = OI$ یا $r = OA$ دستگاه چهاردسته جواب دارد .

دستگاه نامعادلات ـ برای حل دستگاه نامعادلات ابتداعلامت $=$ راجایگزین‌علامتهای $<$ یا $>$ کرده منحنیهای نمایش هندسی هریك از معادله‌های حاصل را رسم می‌کنیم واز ناحیه‌های حاصل آنهایی راکه مختصات نقطه‌های آنها در نامعادلات مربوط صدق نمی‌کند بـا هاشور مشخص می‌کنیم . ناحیه‌هایی که هاشور نخورده باشد مشخص جوابهای دستگاه می‌باشند .

مثال ۱ـ حل هندسی نامعادلهٔ :

$$۲x+|y|<۱$$



این نامعادله در حقیقت ازدودستگاه نامعادله‌های زیر تشکیل شده است .

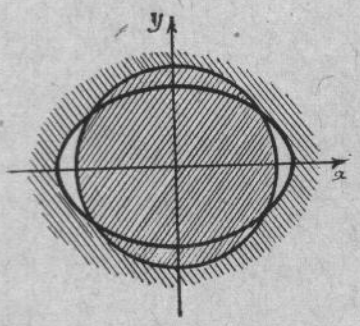
$$\begin{cases} ۲x+y<۱ \\ y>۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x-y<۱ \\ y<۰ \end{cases}$$

نمایش هندسی $۲x+y=۱$ با شرط $y>۰$ نیم خط Iz و نمایش هندسی $۲x-y=۱$ با شرط $y<۰$ نیم خط It می‌باشد . مختصات مبدأدرهریك از دودستگاه صدق می‌کند پس ناحیهٔ داخلی‌زاویهٔ zIt جواب می‌باشد .

مثال ۲ـ حل هندسی دستگاه نامعادلات زیر :

$$\begin{cases} ۴x^۲+۴y^۲-۲۵>۰ \\ ۴x^۲+۹y^۲-۳۶<۰ \end{cases}$$

نمـایش هندسی معادلهٔ $۴x^۲+۴y^۲-۲۵=۰$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات وبه شعاع $\frac{۵}{۲}$ کـه مختصات نقطه‌های ناحیهٔ داخلـی آن در نامعادلـهٔ اول دستگاه مفروض صدق‌نمی‌کنند.



نمایش هندسی معادلهٔ $۴x^۲+۹y^۲-۳۶=۰$ بیضی است به‌مرکزمبدأ مختصات و به طولهای قطرهای اطول و اقصر ۶و۴ وناحیهٔ خارجی آن جواب نیست ناحیهٔ جواب دستگاه نامعادله‌های مفروض دو ناحیه‌ای ازشکل است که هاشور نخورده است .

تمرینات :

۱ـ طول $x=\sqrt{۱۴}$ را رسم کنید .

۲ـ با معلوم بودن طولهای aوbوc طول x را ازرابطهٔ زیر رسم کنید :

$$x^۲=a^۲+b^۲-۲c^۲$$

۳ـ طول $x=\frac{a^۲-b^۲}{۲c}$ را رسم کنید .

۴ـ طول x را ازرابطهٔ زیررسم‌کنید :

$$x=\sqrt{\frac{b^۲+c^۲}{۲}-\frac{a^۲}{۴}}$$

(مثلث به ضلعهای aوbوc راکه رسم کنید x طول میانهٔ آن می‌باشد .)

۵) $x=\frac{۲\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ $\quad (۲p=a+b+c)$

۶) $x=\frac{۲\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{b-c}$

۷) $x=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$

(طول قطرچهارضلعی محاطی به‌اندازه‌های ضلعهای aوbوcوd)

۸) $x=R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ و $y=R\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$

۹) $x=R\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ و $y=R\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

۱۰) $x=\frac{a\sqrt{۵}-۱}{۲}$ و $y=\frac{a\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$

۱۱) $x=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}-\sqrt{۵-\sqrt{۵}})$

$(x=\sin ۹^\circ)$

۱۲) $x=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۵+\sqrt{۵}}-\sqrt{۳-\sqrt{۵}})$

۱۳) $x=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$

۱۴) $x=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ و

$$y=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$z=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

۱۵ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+px+q=۰$

(دنباله پائین صفحهٔ ۶۵۲)

مسائل برای حل

خواهشمند است از فرستادن حل مسائل خودداری شود. حل این مسائل در یکان شمارهٔ بعد چاپ خواهد شد.

مسائل متفرقه

۵۷/۱ ـ ترجمهٔ : **محمد حسین احمدی**

اگر عبارت جبری زیر مربع کامل باشد.

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$$

ثابت کنید که a و b و c تشکیل تصاعد توافقی می‌دهند.

۵۷/۲ ـ از **مجید خشنودی**

صحت رابطهٔ زیر را برای اجزاء مثلث ثابت کنید

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{abc}{R(a+b+c)^2}$$

۵۷/۳ ـ از **داوید ریحان**

نوع مثلثی را معلوم کنید که بین اندازه‌های ضلعهای آن رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}$$

۵۷/۴ ـ از **داوید ریحان**

نقطهٔ S را داخل مثلث ABC اختیار می‌کنیم و از آن به رأسهای A و B و C وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلعهای مقابل را به‌ترتیب در P و Q و R قطع کنند.

اولا ثابت کنید که :

$$\frac{PS\cdot QS\cdot RS}{PA\cdot QB\cdot RC}<\frac{1}{27}$$

ثانیاً اگر داشته باشیم :

$$\frac{PS}{PA}=\frac{QS}{QB}=\frac{RS}{RC}$$

موضع نقطهٔ S را مشخص کنید.

۵۷/۵ ـ ترجمه از مجلهٔ تربیت ریاضی

دایرهٔ (O) به‌مرکز O و به‌شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع درداخل آن مفروض است. M نقطهٔ متغیری است که دایرهٔ (O) را می‌پیماید.

۱) اگر K وسط AM باشد مکان K را بیابید.

۲) عمود منصف AM دایرهٔ (O) را در P و Q قطع می‌کند اگر H تصویر قائم O بر PQ باشد ثابت کنید که مکان H برمکان K منطبق است.

۳) اگر O' قرینهٔ O نسبت به PQ باشد، ثابت کنید که O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ است و مکان O' را تعیین کنید.

۵۶/۶ ـ ترجمه از فرانسه

مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است. نقطهٔ M را برخط BC اختیار می‌کنیم. تصاویر M را بر AB و AC به‌ترتیب P و Q و وسط BC را O می‌نامیم. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که :

الف ـ PQ بر AO عمود باشد

ب ـ PQ بر BC عمود باشد.

۵۷/۷ ـ ترجمه از فرانسه

مثلث متساوی‌الساقین ABC را که در آن $AB=AC$ در نظر می‌گیریم. نقطهٔ M را بر AB و نظیر آن نقطهٔ N را بر AC چنان انتخاب می‌کنیم که $AM=CN$ باشد و متوازی‌الاضلاع $AMNP$ (به‌قطر AN) را می‌سازیم.

۱) وقتی M ضلع AB را بپیماید مکان P چیست؟

۲) نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $AMNI$ ،

الف ـ مربع مستطیل باشد.

ب ـ لوزی باشد.

۵۷/۸ ـ از **فیروز نیکخواه**

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$1+2\sin x+2\sin^2 x+\cdots+2\sin^{n-1}x+\sin^n x=0$$

۵۷/۹ ـ از فیروز نیکخواه

مقادیر x و y و z را از سه معادلهٔ سه مجهولی زیر بدست آورید :

$$x\sin\alpha+y\sin 2\alpha+z\sin 3\alpha=\sin 4\alpha$$
$$x\sin\beta+y\sin 2\beta+z\sin 3\beta=\sin 4\beta$$
$$x\sin\gamma+y\sin 2\gamma+z\sin 3\gamma=\sin 4\gamma$$

۵۷/۱۰ ـ از محمد حسین احمدی

ثابت کنیدکه اگر a و b دوعدد حقیقی و $a^2+b^2=1$ باشد ،ازاء هر کمان x نامساوی زیر برقراراست :

$$a\sin x+b\cos x<1$$

و تساوی فقط وقتی برقرار است که $a=\sin x$ و $b=\cos x$ باشد .

۵۷/۱۱ ـ ترجمه ازمجلهٔ ریاضیات مقدماتی

تابع زیرمفروض است :

$$y=a|x+1|+|x-1|+(2-a)x-a-1$$

۱) بااستفاده ازنمودار تابع حدود a راتعیین کنید برای آنکه در ازاء هرمقدار از y برای x فقط یك مقدار بدست آید.

۲) فرض می کنیم که شرط (۱) برقرار باشد. درصورتی که ازتابع بالا مقدار x بصورت زیر بدست آمده باشد:

$$x=\alpha|y+1|+\beta|y-1|+\gamma y+\delta$$

مقادیر α و β و γ و δ را برحسب a حساب کنید.

۵۷/۱۲ ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

الف ـ اگر داشته باشیم :

$$f(x+y,x-y)=xy+y^2$$

$f(x,y)$ را تعیین کنید .

ب ـ اگر $y>0$ وداشته باشیم :

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

تابع $f(x)$ را مشخص کنید .

ج ـ اگر $z=xf(\frac{y}{x})$ و به ازاء $x=1$ داشته باشیم $z=\sqrt{1+y^2}$ تابع $f(x)$ را بیابید .

۵۷/۱۳ ـ از محمد رضا یزدان

حاصل جمع زیررا بدست آورید :

$$S_n=\cos(2\operatorname{Arc}\sin x)+\cos(2\operatorname{Arc}\sin 2x)+$$
$$+\cdots+\cos(2\operatorname{Arc}\sin nx)$$

۵۷/۱۴ ـ ترجمه ازفرانسه

مجموع زیر را درنظر می گیریم:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

ثابت کنیدکه مجموع کسرهای داخل هریك ازپرانتزها از $\frac{1}{2}$ بزرگتراست وازآنجا نتیجه بگیریدکه :

$$S_n>1+\frac{n}{2}$$

۵۷/۱۵ ـ ترجمه ازفرانسه

۱) نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=-1+|x+1|-2|x|+|x-1|$$

۲) نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$|x+1|+|x-1|>2|x|+\frac{2x+4}{5}$$

۵۷/۱۶ ـ ترجمه ازفرانسه

عدد مثبت x را چنان پیداکنیدکه اگر به خارج قسمت صحیح تقسیم یك برآن مقدار $\frac{1}{2}$ را اضافه کنیم عکس آن عدد بدست آید .

۵۷/۱۷ ـ ترجمه ازمجلهٔ ریاضیات مقدماتی

دایرهٔ ثابت (I) به مرکز I ودایرهٔ متغیر (ω) که بردو نقطهٔ ثابت P و O می گذرد ودایرهٔ (I) را دردونقطهٔ A و B قطع می کند مفروض است. مکان نقاط M ازدایرهٔ (ω) راپیدا کنیدکه دستهٔ اشعهٔ O(A,B,M,P) توافقی باشد.

۵۷/۱۸ ـ ترجمه از فرانسه

دوخط D و Δ غیرواقع در یك صفحه مفروض است . زاویهٔ این دوخط α وطول عمود مشترك آنها a است . دوصفحهٔ متغیر عمود برهم بر Δ گذشته و D را در M و M′ قطع می کنند .

۱ـ ثابت کنیدکه روی D نقطهٔ ثابت I وجوددارد بقسمی که $\overline{IM}\cdot\overline{IM'}=k$ باشد. k مقداری است ثابت که مقدارآنرا برحسب a و α حساب خواهیدکرد .

۲ـ ثابت کنید که کرهٔ به قطر MM′ بر دایرهٔ ثابت C می گذرد وخط Δ را به زاویهٔ ثابت قطع می کند ودایرهٔ ثابت C را مشخص کنید .

۵۷/۱۹ ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

اگر P محل برخورد قطرهای AC و BD از چهار ـ

ضلعی محدب ABCD بوده وفاصله‌های P ازضلعهای $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ به‌ترتیب x و y و z و t باشد ثابت کنید که :

$$x+y+z+t<\frac{۳}{۴}(a+b+c+d)$$

۵۷/۲۰ ـ ترجمه از ماهنامهٔ ریاضیات آمریکا

اگر d_a و d_b و d_c طولهای نیمسازهای داخلی ، m_a و m_b و m_c طولهای میانه‌ها و r و R شعاعهای دایره های محاطی داخلی ومحیطی و p نصف محیط یك مثلث باشد ثابت کنید که :

$$\Sigma d_a^{۶} < p^{۴}(p^{۲}-۱۲rR) < \Sigma m_a^{۶}$$

مسائل فیزیك

۵۷/۲۱ ـ از حسین خبازیان

جسمی به‌جرم یك کیلوگرم روی سطح بدون اصطکاك تحت تأثیر نیروی F چنان حرکت می‌کندکه همیشه بین نیرو وسرعت وزمان حرکت رابطهٔ :

$$F=\frac{۱۸t^{۳}}{v}\ (MKS)$$

برقراراست.مطلوب‌است معادلهٔ حرکت ، سرعت وشتاب جسم و معادلهٔ کار انجام‌شده‌توسط نیروی F .

۵۷/۲۲ ـ از سید جلال آشفته

ازسه نقطهٔ A و B و C که به‌فاصلهٔ a از یکدیگرقرار دارند سه متحرك باسرعتهای ثابت v_1 و v_2 و v_3 دریك لحظه در جهتهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$ وبرهمان امتداد آغاز به‌حرکت می‌کنند . دریك لحظه سطح محاصره شدهٔ توسط سه‌متحرك به‌کمترین مقدارخود می‌رسد. این لحظه را حساب‌کنید و مکان مرکز ثقل مثلث به رأسهای سه متحرك را درهرلحظه پیداکنید.

مسائل شیمی

ترجمه وانتخاب توسط : عطاءالله بزرگ‌نیا

۵۷/۲۳ ـ تجزیهٔ عنصری کیفی یك مایع شربتی‌شکل با مزهٔ شیرین تنها وجود عناصر C و H و O را در این جسم ثابت‌کرده است . تجزیهٔ عنصری کمی همین جسم نتایج زیر را داده است :

درصد کربن : ۳۸/۹۸ ، درصد ئیدرژن : ۸/۹۱

جرم ملکولی این جسم‌که با استفاده ازروش نزولی نقطهٔ انجماد بدست‌آمده درحدود ۹۱ می‌باشد . ازطرف دیگرمطالعهٔ خواص شیمیائی‌آن نشان داده است‌که این جسم شامل سه عامل الکلی می‌باشد. فرمول‌گستردهٔ جسم مزبوررا رسم‌کنید .

۵۷/۲۴ ـ تجزیهٔ عنصری یك مایع آلی نتایج زیر را داده است :

کربن: ۷۴/۱ درصد، ئیدرژن : ۸/۶ درصد، ازت ۱۷/۳ درصد ، چگالی به حالت بخار جسم ۵/۶ می‌باشد

الف ـ فرمول این جسم چیست ؟

ب ـ چه حجمی ازهوا برای‌سوختن یك‌گرم آن‌لازم‌است؟

راهنمای حل ... (دنباله ازصفحه ۶۴۹)

را با استفاده از طولهای نقطه‌های تلاقی سهمی $y=x^{۲}+q$ وخط $y=-px$ بدست آورید وبحث کنید .

۱۶ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم :

$x^{۲}+px+q=۰$ از روی تعداد نقطه‌های تلاقی منحنیهای: $y=x^{۲}+p$ و $xy+q=۰$ بحث کنید .

۱۷ـ مسئلهٔ قبل که تعداد نقطه‌های تلاقی $y=x^{۳}+px+q$ با محورطولها مورد استفاده واقع شود .

۱۸ـ بازهم مسئله قبل که منحنی $y=x^{۲}+q$ و خط $y=-px$ مورد استفاده باشند .

۱۹ـ مطلوبست حل هندسی دستگاه :

$x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $y=\frac{۱}{۲}(e^{x}+e^{-x})$

۲۰) $(۲a-x)y^{۲}=x^{۳}$ و $۲x+۱=۱$

۲۱) $(x^{۲}+y^{۲})^{۲}=۲a^{۲}(x^{۲}-y^{۲})$ و $۲y+x=۳$

۲۲ـ $(x^{۲}+y^{۲}+c^{۲})^{۲}-۴c^{۲}x^{۲}-a^{۴}=۰$ و $x=y$

۲۳) $y=۲x$ و

$$(x^{۲}+y^{۲}-ax)^{۲}-r^{۲}(x^{۲}+y^{۲})=۰$$

۲۴) $y^{۲}(a-x)=x^{۲}(a+x)$ و $۲x+y=۳$

۲۵) $x^{۳}-۳axy+y^{۳}=۰$ و $x-۲y=-۴$

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۵۵ و ۵۶

* * * *

۵۵/۱ ـ ازرابطهٔ (۱) رابطهٔ (۲) رابدست‌آورید :

$$(۱)\quad \frac{p+q\sin x}{p+q}=\frac{p-q}{p-q\sin y}$$

$$(۲)\quad (p+q)\,tg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{y}{۲}\right)=$$

$$=(p-q)tg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)$$

حل ـ رابطهٔ (۱) بعدازطرفین ووسطین کردن واختصار به صورت زیر درمی‌آید :

$$pq(\sin x-\sin y)=q^{۲}(\sin x\sin y-۱)$$

$$\frac{q}{p}=\frac{\sin x-\sin y}{\sin x\sin y-۱}$$

$$\frac{p+q}{p-q}=\frac{\sin x-\sin y+\sin x\sin y-۱}{\sin x\sin y-۱-\sin x+\sin y}$$

$$=\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin y)}{(۱+\sin x)(۱-\sin y)}=$$

$$=tg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)cotg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{y}{۲}\right)$$

$$(p+q)tg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{y}{۲}\right)=(p-q)tg^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)$$

۵۵/۲ ـ دودیوار قائم‌که ارتفاع آنها مساوی است و با هم زاویهٔ α می‌سازند. بوسیلهٔ خورشید دو سایه روی زمین افقی ایجاد کرده‌اند. فاصلهٔ لبهٔ سایهٔ هردو دیوار از پای‌آن دیوار به‌ترتیب b و c است و ازنقطهٔ R سایهٔ رأس فصل مشترك دو دیواراین فصل مشترك به‌زاویهٔ θ دیده می‌شود. ارتفاع‌دیوارها رابرحسب bو c و θ و α حساب‌کنید.

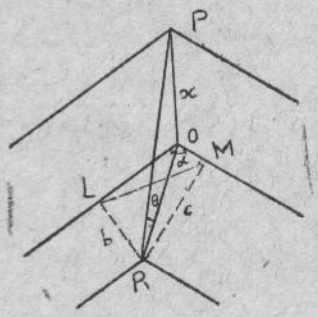
حل ـ درمثلث LMR داریم :

$$LM^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos(\pi-\alpha)$$

$$=b^{۲}+c^{۲}+۲bc\cos\alpha$$

درمثلث LMO داریم :

$$LM=۲R\sin\alpha-OR\sin\alpha=x\sin\alpha\,cotg\theta$$



$$x^{۲}\sin^{۲}\alpha\,cotg^{۲}\theta=b^{۲}+c^{۲}+۲bc\cos\alpha$$

$$x=\frac{\sqrt{b^{۲}+c^{۲}+۲bc\cos\alpha}}{\sin\alpha\,cotg\theta}$$

۵۵/۳ ـ دریك صفحه دایرهٔ C به مرکز O ونقطهٔ P واقع درخارج آن مفروض است. از P خطی رسم می‌کنیم‌که دایره را در A و B قطع می‌کند.

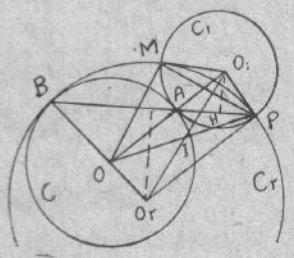
۱) $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را پیدا کنیدکه از P گذشته و به ترتیب در A وBبر دایرهٔCمماس می‌باشند واین دایره‌ها را رسم‌کنید.

۲) ثابت‌کنیدکه چهارضلعی $OO_۱PO_۲$ متوازی‌الاضلاع است.

۳ـ دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ علاوه بر P در نقطهٔ دیگر M مشترك هستند. وقتی‌قاطع PAB حول P حرکت‌کند مکان M را پیدا کنید.

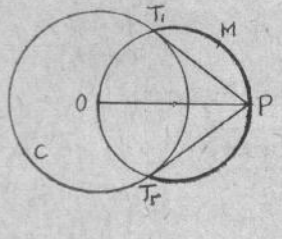
حل ـ ۱) $O_۱$ ازیك طرف روی عمود منصف PA و از طرف دیگر در امتداد OA واقع است و A بدین وسیله مشخص می‌شود. از تلاقی عمود منصف PB با OB نقطهٔ $O_۲$ بدست می‌آید.

۲) دو مثلث متساوی‌الساقین OAB و O_1AP متشابه‌اند و از آن تساوی دوزاویهٔ ABO و APO_1 یعنی توازی دو خط BO و PO_1 نتیجه می‌شود. ازتشابه دومثلث متساوی‌الساقین OAB و O_2BP



توازی دوخط OA و O_2P نتیجه می‌شود. بنابراین چهارضلعی OO_1PO_2 متوازی‌الاضلاع است.

۳) اگر H و I به‌ترتیب نقطه‌های تلاقی PM با O_1O_2 و OP باشد چون H وسط MP (خط‌المرکزین O_1O_2 عمود مشترك وترمشترك PM است) و I وسط OP است (مرکز متوازی‌الاضلاع) خط IH با OM موازی است و چون IH بر PM عمود است پس زاویهٔ OMP قائمه می‌باشد یعنی M بر دایرهٔ به‌قطر PO قراردارد. اماچون دودایرهٔ C_1 و C_2 به تمامی در خارج دایرهٔ C واقع‌اند نقطهٔ M نیزخارج دایرهٔ C قرار داشته مکان آن کمانی از دایرهٔ به‌قطر PO است که در خارج



دایرهٔ C قراردارد. اگر T_1 و T_2 نقاط تماس مماسهای‌رسوم از P بردایرهٔ C باشدکمان مکان M به نقاط مزبور محدود می‌باشد.

۵۵/۴ ـ اگر a و b و c ضلعهای یك مثلث و h_a و h_b و h_c ارتفاعهای نظیر آنها باشد ثابت کنیدکه :

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{h_a^4+h_b^4+h_c^4} \geq \frac{16}{9}$$

حل ـ اگر m_a و m_b و m_c میانه‌های مثلث باشد با فرض $a^2+b^2+c^2=q^2$ خواهیم داشت :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$m_a^4 = \frac{4q^2-12a^2q+9a^4}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4+c^4}{m_a^4+m_b^4+m_c^4} = \frac{16}{9}$$

ازاین رابطه وباتوجه به نامساوی

$$m_a^4+m_b^4+m_c^4 > h_a^4+h_b^4+h_c^4$$

نامساوی مطلوب محقق خواهد شد،

۵۵/۵ ـ الف ـ سلسلهٔ اعداد طبیعی راطوری‌دسته‌بندی می‌کنیم که هردسته به‌عددی مربع‌کامل ختم شود :

(۱) ، (۲و۳و۴) ، (۵و۶و۷و۸و۹) ، ...

ثابت‌کنید که دستهٔ nام شامل $2n-1$ جمله است و مجموع جمله‌های این دسته را بدست آورید.

ب ـ اگر سلسلهٔ اعداد طبیعی را به‌ترتیب فوق قسمی دسته‌بندی‌کنیم که آخرین جملهٔ هردسته مکعب‌کامل باشد تعداد جمله‌های دستهٔ n ام ومجموع جمله‌های‌آن را حساب‌کنید.

حل ـ دستهٔ اول به 1^2، دستهٔ دوم به 2^3 و بالاخره دستهٔ nام به n^2ختم‌می‌شود. چون‌دستهٔ ماقبل‌آخر به $(n-1)^2$ ختم می‌شودپس جمله‌های دستهٔ n ام عبارتند از :

$$n^2 \ , \ \ldots \ , \ (n-1)^2+2 \ , \ (n-1)^2+1$$

از تصاعد حسابی که این جمله‌ها می‌سازند جملهٔ اول، جملهٔ آخر و قدر نسبت معلوم است و از روی آن تعداد جمله‌ها برابر با $2n-1$ و مجموع آنها برابر با مقدار زیرحساب خواهد شد.

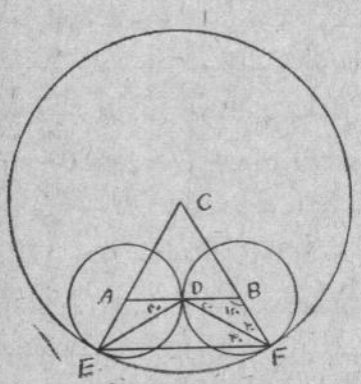
$$S=(2n-1)(n^2-n+1)$$

ب ـ در این حالت دستهٔ n ام به n^2 ختم شده تعداد جمله‌ها ومجموع‌آنها به‌ترتیب برابر است با :

$$3n^2-3n+1 \qquad \text{و}$$

$$\frac{1}{2}(3n^2-3n+1)(2n^3-3n^2+3n)$$

۵۵/۶ ـ سه دایره دو به دو چنان برهم مماس‌اند که مرکزهای‌آنها مثلثی متساوی‌الاضلاع و نقاط تماس‌آنها مثلثی غیرمتساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند. نسبت بین شعاعهای‌سه‌دایره وهمچنین نسبت بین ضلعهای مثلثی راکه ازنقاط تماس‌تشکیل می‌شود بدست‌آورید.



حل ـ سه دایره نمی‌توانند هرسه دوبه‌دو مماس خارج باشند زیرا در این صورت مرکزهای آنها مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل خواهند داد. شرایط مسئله وقتی‌حاصل است که‌مطابق‌شکل دودایره

باهم مماس خارج و با دایـرهٔ سوم مُماس داخل باشند . مثلث DAE متساوی‌الساقین بوده ودرآن اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۱۲۰ درجه است درنتیجه اندازهٔ هریك از دو زاویهٔ دیگر آن برابر ۳۰ درجه می‌باشد. همچنین اندازهٔ هریك از زاویه‌های D و F از مثلث BDF برابر ۳۰ درجه می‌باشد و چـون DE=DF پس دومثلث ADE و BDF متساوی‌اند و دو دایرهٔ به مرکز های A و B باهم برابر می‌باشند . نقطهٔ D وسط AB واقع است ونتیجه می‌شود که شعاع هریك ازدایره ـ های به مرکزهای A و B ثلث شعاع دایرهٔ به مرکز C می ـ باشد. درمثلث DEF اندازهٔ زاویه‌ها به ترتیب ۱۲۰ و ۳۰ و ۳۰ درجه‌است و از روی‌آن به سادگی معلوم خواهد شد کـه $EF=DE\sqrt{3}$ می‌باشد .

۵۵/۷ ـ مربع مستطیل ABCD به‌ابعاد $AB=m$ و $AD=n$ مفروض است‌که m و n عددهای صحیح‌می‌باشند. ضلع AB را به m قسمت و ضلع AD را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنیم وازنقاط حاصل خطهایی موازی ضلعهای مستطیل ومحدود به ضلع مقابل رسم می‌کنیم. تعداد همهٔ مربع مستطیل ـ هایی را که تشکیل می‌شود برحسب m و n بدست‌آورید .

حل ـ تعداد مستطیلهای حاصل برابر است با حاصل ـ ضرب تعداد قطعه خطهایی کـه روی ضلع AB تشکیل می‌شود درتعداد قطعه خطهایی‌که روی ضلع AD پدید می‌آید. تعداد قطعه خطهای مزبور به‌ترتیب برابر است با :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+m=\frac{m(1+m)}{2}$$

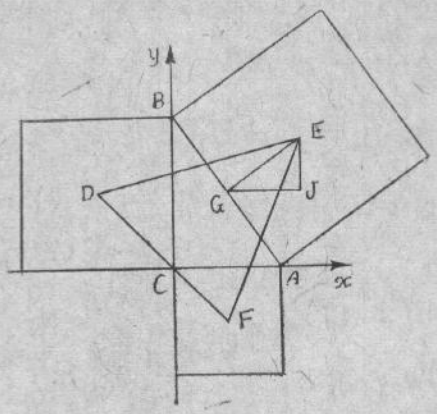
تعداد تمام مستطیلهاکه ABCD نیز یکی ازآنها است برابر می‌شود با :

$$\left[\frac{n(1+n)}{2}\right]\left[\frac{m(1+m)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}mn(1+m)(1+n)$$

۵۵/۸ ـ روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض و در خارج‌آن سه‌مربع می‌سازیم . اگر اندازه‌های ضلعهای زاویـهٔ قائمه ازمثلث a و b باشد فاصلهٔ مرکزهای مربعهای مزبور را ازیکدیگر دوبه دو برحسب a و b بدست‌آورید .

حل ـ اگر ABC مثلث مفروض و زاویهٔ C از آن قائمه باشد رأس C را مبدأ مختصات ومحورهای طولهاوعرضها را منطبق بر CA و CB اختیار می‌کنیم در این صورت اگر D و E و F به‌ترتیب مرکزهای مربعهای روی ضلعهای CB و BA و AC باشد داریم :



$$D\left(x=-\frac{a}{2}\ y=\frac{a}{2}\right)\ \text{و}\ F\left(x=\frac{b}{2}\ \text{و}\ -\frac{b}{2}\right)$$

$$E\left(x=\frac{a+b}{2}\ \text{و}\ y=\frac{a+b}{2}\right)$$

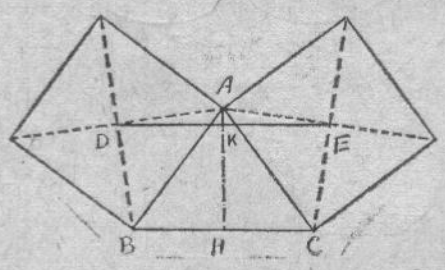
(برای تعیین مختصات E از E به G وسط AB وصل کرده واز E و G موازی با محورها رسم می‌کنیم تا J بدست آید. مثلث EGJ به‌نسبت $\frac{1}{2}$ با مثلث ABC متشابه است و داریم $GJ=\frac{a}{2}$ و $EJ=\frac{b}{2}$ وازطرف دیگر طول وعرض G به‌ترتیب $\frac{b}{2}$ و $\frac{a}{2}$ می‌باشد). بامعلوم بودن‌مختصات‌نقطه‌های E و F و D فاصلهٔ آنها ازیکدیگر به‌سادگی‌حساب خواهدشد:

$$DF=\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}\ \text{و}\ ED=\frac{\sqrt{4a^2+4ab+2b^2}}{2}$$

$$EF=\frac{\sqrt{2a^2+4ab+4b^2}}{2}$$

۵۵/۹ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC به ضلعهـای $BC=6$ و $AB=AC=5$ مفروض است . روی ضلعهـای AB و AC ودرخارج مثلث مربعهایی‌می‌سازیم. فاصلهٔ مرکز ـ های این دومربع را از یکدیگر بدست‌آورید .

حل ـ می‌توان نظیرمسئلهٔ قبل ازمختصات نقاط استفاده کرد ومی‌توان مسئله را به ترتیب زیرحل‌کرد : اگر D و E



به‌ترتیب مرکزهای مربعهای روی ضلعهای AB و AC و H تصویر A برضلع BC باشد داریم:

$$BH=HC=۳ \text{ و } AH=۴$$

$$\sin HAB=\frac{۳}{۵} \text{ و } \cos HAB=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin DAB=\cos DAB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin HAD=\sin(HAB+BAD)=$$

$$=\frac{۳}{۵}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۴}{۵}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

AH بر DE عمود است ودرمثلث قائم‌الزاویهٔ AKD داریم:

$$DK=AD\sin KAD=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{۷}{۲}$$

$$DE=۲DK=۷$$

۵۵/۱۰ـ معادلهٔ دودایره عبارتست از:

$$(C) \quad : \quad x^۲+y^۲-۲ax-b^۲=۰$$

$$(C') \quad : \quad x^۲+y^۲+۲ax-b^۲=۰$$

اولا با شرط $a^۲-b^۲=۲ab$ مساحت سطح محصور بین دو دایره را برحسب a و b بدست‌آورید.

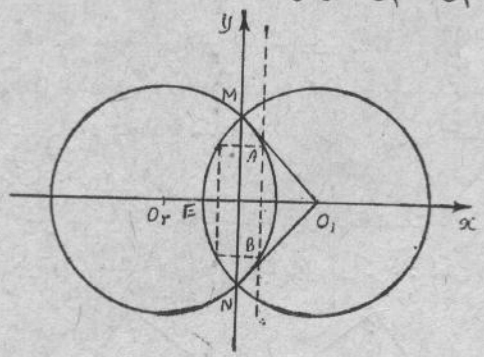
ثانیاً در سطح محصور بین دو دایره مربع مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کنید.

حل ـ معادله‌های بالا به‌صورتهای زیر نوشته‌می‌شوند:

$$(x-a)^۲+y^۲=a^۲+b^۲$$

$$(x+a)^۲+y^۲=a^۲+b^۲$$

$O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دو دایره برمحور $x'x$ واقع



بوده‌طولهای آنها به‌ترتیب a و $-a$ وشعاع هریك از دودایره برابر با $R=R'=\sqrt{a^۲+b^۲}$ می‌باشد. مطابق شکل داریم:

$$tg\alpha=\frac{b}{a} \Longrightarrow tg۲\alpha=\frac{۲ab}{a^۲-b^۲}$$

$$a^۲-b^۲=۲ab \Longrightarrow tg۲\alpha=۱ \text{ و } ۲\alpha=۴۵^\circ$$

مساحت قطاع $O_۱MN$ برابر می‌شود با:

$$\pi.\frac{(a^۲+b^۲)\times۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{\pi(a^۲+b^۲)}{۸}$$

مساحت مثلث $O_۱MN$ برابر است با ab و از آنجامساحت قطعهٔ MEN برابر خواهد شد با:

$$\frac{\pi(a^۲+b^۲)}{۸}-ab$$

و مساحت سطح محصور بین‌دودایره برابر است با:

$$S=\frac{\pi(a^۲+b^۲)}{۴}-۲ab=$$

$$=\frac{\pi}{۴}(a^۲+b^۲)-(a^۲-b^۲)$$

$$S=a^۲(\frac{\pi}{۴}-۱)+b^۲(\frac{\pi}{۴}+۱)$$

ثانیاً اگر معادلهٔ ضلع AB از مستطیل $x-\alpha>۰$

فرض‌شود از روی معادلهٔ دایره خواهیم‌داشت:

$$AB^۲=۴(b^۲-\alpha^۲-۲a\alpha)$$

اگر z مربع مساحت مستطیل باشد داریم:

$$z=AB^۲\times۴\alpha^۲=۱۶\alpha^۲(b^۲-\alpha^۲-۲a\alpha)$$

$$z'=-۳۲\alpha(۲\alpha^۲+۳a\alpha-b^۲)$$

از معادلهٔ $z'=۰$ با توجه به اینکه α مثبت است نتیجه خواهد شد:

$$\alpha=\frac{-۳a+\sqrt{۹a^۲+۸b^۲}}{۴}$$

۵۵/۱۱ـ با فرض $a>b>۰$ کدام یك از دوکسر زیر بزرگتراست

$$A=\frac{۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}}{۱+a+a^۲+\cdots+a^n}$$

$$B=\frac{۱+b+b^۲+\cdots+b^{n-۱}}{۱+b+b^۲+\cdots+b^n}$$

حل ـ داریم:

$$\frac{۱}{A}=۱+\frac{a^n}{۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}}$$

$$\frac{۱}{A}=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۱}{a^n}+\cfrac{۱}{a^{n-۱}}+\cdots+\cfrac{۱}{a}}$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b}}$$

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\ ,\ \frac{1}{a^n}<\frac{1}{b^n}\Rightarrow\frac{1}{A}>\frac{1}{B}\ ,\ A<B$$

۱۲/۵۵ـ اولا منحنیهای C و C′ نمایش هندسی دو تابع زیر را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید :

$$C\ :\ y=\frac{x^3+16}{4x}\quad و\quad C'\ :\ y=\frac{4}{x}$$

ثانیاً مساحت سطح محصور بین دومنحنی‌وخطوط $x=2$ و $x=k$ $(0<k<2)$ را برحسب k بدست آورید وحد آنرا وقتی $k\to 0$ پیدا کنید .

حل‌ـ منحنی C′ هذلولی است که محورهای مختصات مجانبهای‌آن بوده دربخشهای اول وسوم محورها واقع است .

نسبت به‌تابع دوم داریم:

$$y'=\frac{x^3-8}{2x^2}\ ,\ y'=0\Rightarrow x=2$$

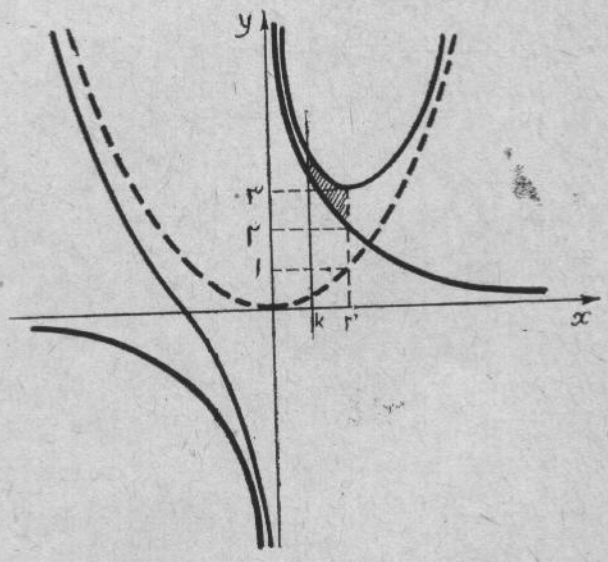
$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x}$$

$x\to\pm\infty$	$x\to 0$
$y\to+\infty$	$y\to\pm\infty$

منحنی Γ به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{4}$ مجانب منحنی C می‌باشد.

جدول‌تغییرات وشکل‌منحنی به‌قرارزیر است:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$



(دومنحنی C و C′ درفاصلهٔ محدود نقطهٔ مشترك ندارند)

ثانیاً برای تعیین‌سطح محصوربین دومنحنی ابتدا تفاضل دوتابع را تعیین می‌کنیم وبعد تابع اولیهٔ آنرا حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^3+16}{4x}-\frac{4}{x}=\frac{x^2}{4}$$

$$y=\frac{x^2}{4}\ ,\ Y=\frac{X^3}{12}+C$$

$$S=\frac{8}{12}-\frac{k^3}{12}=\frac{8-k^3}{12}$$

$$k\to 0\ ,\ S\to\frac{2}{3}$$

۱۳/۵۵ـ تابع‌اولیهٔ تابع‌زیررا پیدا کنید:

$$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})(1+\cot g^2 x)^2$$

حل‌ـ تابع‌را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$y=\frac{\sin 2x\cos 45^\circ-\cos 2x\sin 45^\circ}{\sin^4 x}$$

$$y=\frac{2\sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x)}{(1-\cos 2x)^2}$$

$$y=\frac{2\sqrt{2}\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}-\frac{2\sqrt{2}\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2}$$

$$y_1=\frac{2\sqrt{2}\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}=\frac{\sqrt{2}u'}{u^2}$$

$$Y_1=\frac{\sqrt{2}}{u}+C_1=\frac{\sqrt{2}}{1-\cos 2x}+C_1$$

$$y_2=\frac{2\sqrt{2}\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cot g^2 x-1)$$

$$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cot g^2 x(1+\cot g^2 x)-(1+\cot g^2 x)]$$

$$Y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}[-\frac{1}{3}\cot g^3 x+\cot g x]+C_2$$

۱۴/۵۵ـ اگر r شعاع‌دایرهٔ محاطی‌داخلی و a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث ABC باشد می‌نیمم عبارت زیر بیابید .

$$y=\frac{a}{r}\cot g A+\frac{b}{r}\cot g B+\frac{c}{r}\cot g C$$

حل‌ـ عبارت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=\frac{2R}{r}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

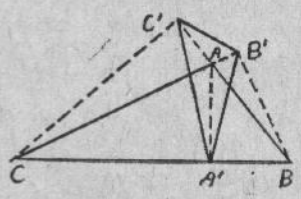
$$y=\frac{2R}{r}\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$y=\frac{2R}{r}\left(1+\frac{r}{R}\right)=\frac{2R}{r}+2$$

$$R>2r \Longrightarrow y>6$$

۵۵/۱۵ـ مثلثی منفرجه‌الزاویه تعیین کنید که با مثلث ارتفاعیهٔ خود متشابه باشد.

حل ـ اگر $A'B'C'$ مثلث ارتفاعی مثلث ABC باشد و بافرض $A>90^\circ>B>C$ دو مثلث متشابه باشند خواهیم داشت:



$$A'=C \quad و \quad B'=A \quad و \quad C'=B$$

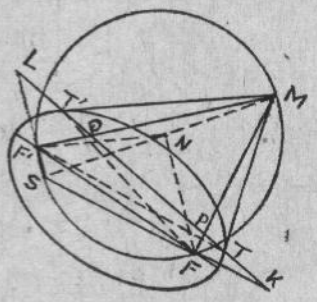
با توجه به اینکه چهارضلعیهای $AA'CC'$ و $AA'BB'$ محاطی هستند و ارتفاعهای مثلث نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث ارتفاعی هستند نتیجه خواهد شد:

$$A-B'=2B \text{ و } B-C'=2C \Longrightarrow A=2B-4C$$

$$A=\frac{4\pi}{7} \text{ و } B=\frac{2\pi}{7} \text{ و } C=\frac{\pi}{7}$$

۵۵/۱۶ـ از نقطهٔ M خارج بیضی مماسهای MT و MT' را برآن رسم می‌کنیم. خطهای MF و MF' خط TT' را در P و Q تلاقی می‌کنند. مزدوجهای توافقی P و Q را نسبت به T و T' به‌ترتیب K و L و نقطهٔ تلاقی FK و $F'L$ را S می‌نامیم. ثابت کنید که چهار نقطهٔ F و F' و M و S روی یك دایره واقع‌اند و مکان مرکز این دایره را وقتی M تغییر کند پیدا کنید.

حل ـ بنابه‌قضیهٔ پونسله FP نیمساز زاویهٔ $T'FT$ است و چون K مزدوج توافقی P نسبت به T و T' است پس KF نیمساز خارجی زاویهٔ $T'FT$ است و زاویهٔ KFP قائمه بوده خط MF بر FS عمود است. به‌همین دلیل زاویهٔ $MF'S$ قائمه است و در نتیجه چهار ضلعی $MFF'S$ محاطی می‌باشد.



اگر N مرکز دایرهٔ محیطی چهار ضلعی بالا باشد از تساوی $NF=NF'$ نتیجه خواهد شد که مکان N عمودمنصف FF' می‌باشد (N وسط MS واقع است)

۵۵/۱۷ـ رشته اعدادی را در نظر می‌گیریم که با شرایط زیر معین می‌باشد:

$$u_0=2 \quad و \quad 2u_n=u_{n-1}+1$$

۱) ثابت کنید که رشتهٔ با جملهٔ عمومی $v_n=u_n-1$ یك تصاعد هندسی است.

۲) مقدار u_n را برحسب n حساب کنید.

۳) وقتی n بینهایت بزرگ شود حد u_n چه می‌باشد؟

۴) مجموع زیر را برحسب n حساب کنید:

$$U=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

حل ـ ۱) داریم:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{u_n+1}{2}-1=\frac{u_n-1}{2}=\frac{v_n}{2}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$$

رشتهٔ v_n تصاعد هندسی است با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ و جملهٔ اول آن برابر است با:

$$v_0=u_0-1=2-1=1$$

۲) ابتدا v_n را برحسب n حساب می‌کنیم. طبق فرمول مربوط به‌محاسبهٔ جملهٔ $(n+1)$ام تصاعد هندسی داریم:

$$v_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

$$u_n=v_n+1=\frac{1}{2^n}+1$$

۳) وقتی $n\to\infty$ مقدار $\frac{1}{2^n}$ به سمت صفر میل کرده حد u_n برابر با یك می‌شود.

۴) داریم:

$$U=(v_0+1)+(v_1+1)+\cdots+(v_n+1)=$$

$$=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+(n+1)$$

$$U=\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right]+(n+1)=\left(2-\frac{1}{2^n}\right)+(n+1)$$

$$=3+n-\frac{1}{2^n}$$

۵۵/۱۸ـ درمثلثی شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی تصاعدعددی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که درچنین مثلثی نامساوی $p^2>ac$ برقرار می‌باشد.

حل ـ داریم:

$$2r_b=r_a+r_c \quad \text{یا} \quad \frac{2S}{p-b}=\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-c}$$

$$2(p-a)(p-c)=(p-b)(2p-a-c)=(p-b)b$$

$$b^2+pb+2ac-2p^2=0$$

وقتی b وجود داردکه این معادله ریشهٔ مثبت داشته باشد:

$$\Delta=p^2-8ac+8p^2>0 \implies 9p^2>8ac$$

$$b=\frac{-p+\sqrt{9p^2-8ac}}{2}>0$$

$$\sqrt{9p^2-8ac}>p \implies p^2>ac$$

وقتی شرط اخیر برقراربـاشد شرط $\Delta>0$ نیز برقرار خواهد بود.

۵۵/۱۹ـ روی ضلعهای مثلث ABC مربعهایی می‌سازیم و مساحتهای آنها را به ترتیب به S_1 و S_2 و S_3 نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$S_2+S_3-S_1=S'$$
$$S_3+S_1-S_2=S''$$
$$S_1+S_2-S_3=S'''$$

صحت رابطهٔ زیررا ثابت کنید:

$$16S^2=S'S''+S''S'''+S'''S'$$

حل ـ داریم:

$$S_1=a^2 \quad و \quad S_2=b^2 \quad و \quad S_3=c^2$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$S_2+S_3-S_1=2bc\cos A=4S\cot g A$$

$$tgA=\frac{4S}{S'} \text{ و } tgB=\frac{4S}{S''} \text{ و } tgC=\frac{4S}{S'''}$$

$$tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$$

$$\frac{4S}{S'}+\frac{4S}{S''}+\frac{4S}{S'''}=\frac{64S^3}{S'S''S'''}$$

$$S'S''+S''S'''+S'''S'=16S^2$$

۵۵/۲۰ـ چه شرطی باید برقرار باشد تا مقدار:

$$y=\frac{Ax^3}{x+a}+\frac{Bx^3}{x+b}+\frac{Cx^3}{x+c}$$

وقتی x به‌سمت بینهایت میل می‌کند محدودباقی بماند.

حل ـ تابع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=\frac{(A+B+C)x^5+[A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)]x^4+\cdots}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

لازم وکافی است شرطی برقرار باشد که درجهٔ صورت ازدرجهٔ مخرج بزرگتر نباشد یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\ A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)=0\end{cases}$$

۵۵/۲۱ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و O′ و به‌شعاعهای R و R′ وبه طول خط‌المرکزین $OO'=d$ مفروض است. اگر D قطبی O نسبت به دایرهٔ (O′) و H پای آن و D′ قطبی O′ نسبت به دایرهٔ (O) و H′ پای آن باشد طول HH′ راحساب کنید ومعلوم کنید چه‌وقت H و H′ برهم منطبق می‌شوند.

حل ـ روی OO′ جهت از O به O′ را جهت مثبت اختیار می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\overline{HH'}=\overline{OH'}-\overline{OH}=\overline{OH'}-(\overline{OO'}+\overline{O'H})$$

$$\overline{O'O}\cdot\overline{O'H}=R'^2 \quad ، \quad \overline{O'H}=\frac{R'^2}{\overline{O'O}}=-\frac{R'^2}{d}$$

$$\overline{OO'}\cdot\overline{OH'}=R^2 \quad ، \quad \overline{OH'}=\frac{R^2}{d}$$

$$\overline{HH'}=\frac{R^2}{d}-\left(d-\frac{R'^2}{d}\right)=\frac{R^2+R'^2-d^2}{d}$$

$$HH'=\frac{|R^2+R'^2-d^2|}{d}$$

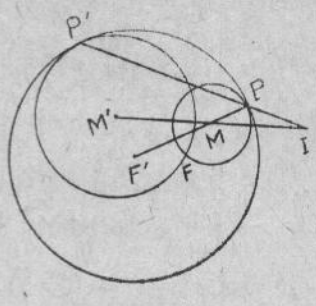
وقتی H و H′ برهم منطبق‌اندکه $d^2=R^2+R'^2$ یعنی دو دایره برهم عمود باشند.

۵۵/۲۲ـ روی بیضی E که با کانونهای F و F′ و دایرهٔ هادی Γ نظیر کانون F′ مشخص می‌باشد دونقطهٔ M و M′ درنظر می‌گیریم. نقاط تماس دایره‌های به مرکزهای M و M′ ومار بر F را با دایرهٔ Γ به ترتیب P و P′ می‌نامیم.

۱) ثابت کنید که خط PP′ بر I مرکز تجانس مستقیم دودایرهٔ مزبور می‌گذرد ودر انعکاسی به قطب I و به‌قوت IF^2 این دودایره منعکس یکدیگراند.

۲) وقتی M و M′ روی بیضی به دلخواه تغییرمکان دهندمکان نقاط I را پیدا کنید.

حل ـ ۱) نقطهٔ P'



مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ (M) و (F') و نقطهٔ P' مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ (M') و (F') می‌باشد. می‌دانیم که مرکزهای تجانسهای مستقیم دوبه‌دو سه دایره بریك خط مستقیم واقع‌اند بنابراین PP' از I می‌گذرد.

نقطهٔ I مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ (M) و (M') در عین حال قطب انعکاس این‌دو دایره می‌باشد و چون F نقطهٔ مشترك این دو دایره است یعنی در انعکاس مزبور بر خودش منطبق است پس قوت این انعکاس برابر است با $\overline{IF}^2$

۲) درّ انعکاس بالا دو نقطهٔ P و P' نظیر یکدیگراند یعنی داریم :

$$\overline{IP}\cdot\overline{IP'}=\overline{IF}^2$$

از این رابطه معلوم می‌شود که قوت I نسبت به دایرهٔ (F') برابر است با قوت‌آن نسبت به دایرهٔ به مرکز F و به شعاع صفر(نقطهٔ F) پس I بر Δ محوراصلی این دو دایره‌قرار دارد. اگر Gپای قطبی F نسبت به دایرهٔ (F') باشد Δعمود منصف FG خواهد بود.

۵۵/۲۳ ـ به فرض اینکه a و k عددهای صحیح و $a>k>0$ باشد ثابت کنیدکه به‌ازاء هرمقدار صحیح ومثبت n از رابطهٔ زیر برای b مقداری صحیح بدست می‌آید :

$$[\sqrt{a}-\sqrt{a-k}]^n=\sqrt{b}-\sqrt{b-k^n}$$

حل ـ عددی مانند α وجود دارد بقسمی که داشته باشیم:

$$[\sqrt{a}+\sqrt{a-k}]^n=\alpha(\sqrt{b}+\sqrt{b-k^n})$$

از ضرب نظیر به‌نظیر طرفین این تساوی مفروض نتیجه خواهد شد.

$$(k)^n=\alpha k^n \Longrightarrow \alpha=1$$

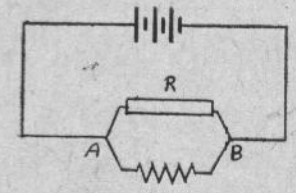
$$[\sqrt{a}+\sqrt{a-k}]^n=\sqrt{b}+\sqrt{b-k^n}$$

طرفین‌این رابطه‌رانظیر به‌نظیر با طرفین رابطهٔ‌مفروض جمع‌کرده وطرفین رابطهٔ حاصل را به‌توان دو می‌رسانیم :

$$4b=[\sqrt{a}-\sqrt{a-k}]^{2n}+[\sqrt{a}+\sqrt{a-k}]^{2n}+2k^n$$

عبارت‌طرف دوم بعد ازبسط و اختصاربه‌صورت یك‌عبارت صحیح مضرب ۴درمی‌آید ودرنتیجه b عدد صحیح می‌باشد.

۵۵/۲۴ ـ بین دونقطهٔ A و B یك لولهٔشیشه‌ای به طول ۱۰۶ سانتیمتر ویك مقاومت چهاراهمی بطورانشعاب بسته شده است. بوسیله‌ای هر ثانیه ۵/۳ سانتیمتر مکعب جیوه در لولهٔ شیشه‌ای ریخته می‌شود . اگر دونقطهٔ A و B به دوسریك مولد



به‌نیروی محرکهٔ ۲۰ولت وصل شوند مطلوبست :

۱) مقاومت مدار درلحظهٔ t.

۲) شدت جریان دراین لحظه.

۳) گرمای ایجاد شده در R در دو ثانیهٔ اول.

حل ـ مقاومت داخلی‌مولد ناچیز ودرلحظهٔ $t=0$ لوله خالی است . مقاومت ستونی از جیوه به سطح مقطع $1cm^2$ و طول $106cm$ یك اهم است :

حجم‌جیوه درلحظهٔ t : $V=5/3t$

سطح‌مقطع‌مقاومت $S=\dfrac{V}{l}=\dfrac{5/3t}{106}=\dfrac{t}{20}cm^2$

مقاومت R درلحظهٔ t: $\rho=\dfrac{1}{106}\Longrightarrow R=\dfrac{1}{106}\times\dfrac{106}{\frac{t}{20}}=\dfrac{20}{t}$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Longrightarrow\frac{1}{R}=\frac{t}{20}+\frac{1}{4}=\frac{t+5}{20}$$

$$R=\frac{20}{t+5}$$

۲) $I=\dfrac{E}{R}\Longrightarrow I=t+5$ شدت درمداراصلی A

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}\Longrightarrow\frac{I_1}{I_2}=\frac{4}{\frac{20}{t}}=\frac{t}{5}\Longrightarrow$$

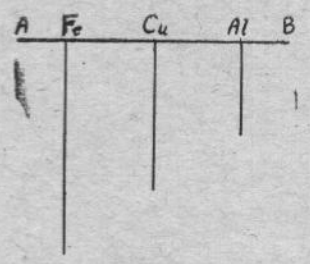
$$I_1=t \quad و \quad I_2=5$$

۳)

$$dQ=KRI^2dt\Longrightarrow dQ=0/24\times\frac{20}{t}\times t^2\times dt$$

$$dQ=4/18tdt\Longrightarrow Q=4/8\int_0^2 tdt=9/6cal$$ حرارت

۵۵/۲۵ـ روی یك میلهٔ افقی AB سه میلهٔ آهنی ومسی وآلومینیمی را لحیم می‌کنیم بطوری که درتمام درجات‌حرارت اختلاف طول میله‌های مجاور از هم مساوی ۲ سانتیمتر است. مطلوبست طول‌میله‌های مزبور و ضریب انبساط خطی‌آهن‌درصورتی‌که:



$\lambda_{Al}=۲۴\times۱۰^{-۶}$ و $\lambda_{Cu}=۱۶\times۱۰^{-۶}$

حل‌ـ چون دومیلهٔ مس و آلومینیم را با هم مقایسه کنیم به سادگی معلوم می‌شودکه باید افزایش طول هر دو میله به‌ازاء تمام درجات حرارت مساوی باشد بنابراین داریم:

$$\Delta l_{Cu}=\Delta l_{Al} \quad و \quad \Delta l_{Cu}=l_{Cu}\lambda_{Cu}t$$

$$\Delta l_{Al}=l_{Al}\lambda_{Al}t$$

$$(l_{\circ Al}+۲)\times۱۶\times۱۰^{-۶}=l_{\circ Al}\times۲۴\times۱۰^{-۶}$$

$$l_{\circ Al}=۴^{Cm}$$

پس طول اولیهٔ مس وآهن به‌ترتیب $l_{\circ Cu}=۶^{Cm}$ و $l_{\circ Fe}=۸^{Cm}$ است.

برای محاسبهٔ ضریب انبساط آهن رابطهٔ فوق را مجدداً برای‌آهن ویکی ازدومیله مثلاآلومینیم می‌نویسیم:

$$l_{\circ Fe}\lambda_{Fe}t=l_{\circ Al}\lambda_{Al}t$$

ویا $۸\lambda_{Fe}=۴\times۲۴\times۱۰^{-۶} \Longrightarrow \lambda_{Fe}=۱۲\times۱۰^{-۶}$

۵۵/۲۶ـ دوقطب مولدی را یك بار به‌مقاومت‌خارجی R وباردیگر به‌مقاومت خارجی R' می‌بندیم مقاومت داخلی مولد را برحسب R و R' طوری تعیین کنید که گرمای حاصل در دوتجربهٔ فوق برای مدتهای‌مساوی برابر باشند.

حل‌ـ مقدار گرمای حاصله در دومقاومتهای R و R' که با مجذورشدتهای مربوط متناسبند می‌نویسیم:

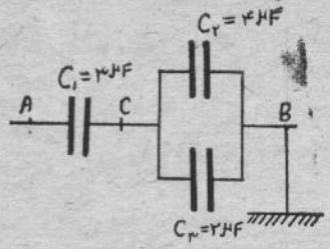
$$Q=KRI^{۲}t \quad و \quad Q=KR'I'^{۲}t \Longrightarrow \frac{R}{R'}=\left(\frac{I'}{I}\right)^{۲}$$

و شدت‌جریان درهردوحالت از فرمولهای $I=\frac{E}{R+r}$ و $I'=\frac{E}{R'+r}$ بدست می‌آید پس

$$\frac{R}{R'}=\left(\frac{R+r}{R'+r}\right)^{۲} \quad \text{ویا} \quad \frac{R+r}{R'+r}=\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R'}}$$

$$r=\frac{R\sqrt{R'}-R'\sqrt{R}}{\sqrt{R}-\sqrt{R'}}$$

۵۵/۲۷ـ مداری مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم.



هرگاه‌نقطهٔ B به‌زمین وصل باشد ونقطهٔ A را به‌پتانسیل ۲۰۰۰ ولت وصل کنیم، مطلوبست محاسبهٔ میزان باردروی هریك از خازنها و پتانسیل نقطهٔ C.

حل‌ـ ظرفیت معادل دو خازن $C_۲$ و $C_۳$ مساویست با:

$$C'=C_۲+C_۳=۴+۲=۶\mu F$$

وظرفیت‌کل مساویست با:

$$\frac{۱}{C}=\frac{۱}{C'}+\frac{۱}{C_۱} \Longrightarrow C=\frac{C'C_۱}{C'+C_۱}=\frac{۳\times۶}{۳+۶}=۲\mu F$$

میزان بار روی خازن معادل وهمچنین برای خازن $C_۱$ مساوی است با:

$$Q=CV=۲\times۱۰^{-۶}\times۲۰۰۰=۴\times۱۰^{-۳}$$ کولن

$$V_{AC}=\frac{Q}{C_۱}=\frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۳\times۱۰^{-۶}}=\frac{۴۰۰۰}{۳}$$ ولت

$$V_A-V_C=\frac{۴۰۰۰}{۳} \quad و \quad V_A=۲۰۰۰ \Longrightarrow V_C=\frac{۲۰۰۰}{۳}$$

$$V_{CB}=V_C-V_B=\frac{۲۰۰۰}{۳}-۰=\frac{۲۰۰۰}{۳}$$ ولت

$$Q_۲=C_۲\cdot V_{CB}=۴\times۱۰^{-۶}\times\frac{۲۰۰۰}{۳}=\frac{۸}{۳}\times۱۰^{-۳}$$ کولن

$$Q_۳=C_۳\cdot V_{CB}=۲\times۱۰^{-۶}\times\frac{۲۰۰۰}{۳}=\frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۳}$$ کولن

۵۵/۲۸ـ دومتحرك A وB به‌فاصلهٔ ۹۰۰ متر ازهم قراردارند و در یك لحظه به‌سمت هم حرکت می‌کنند. سرعت متحرك A طوری است که می‌تواند فاصلهٔ BC را در مدت ۳ دقیقه بپیماید وسرعت متحرك B چنان است‌که می‌تواندمسافت AC را در مدت ۱۲ دقیقه طی‌کند. اگر C روی AB و بین A وB واقع باشد موقعیت آن و سرعت هریك از دومتحرك را پیدا کنید.

حل‌ـ چون زمان حرکت‌دومتحرك مساوی‌است وسرعت حرکت هرمتحرك را می‌توان ازمدت لازم برای پیمودن‌مسافت متحرك دوم بدست‌آورد داریم:

$$V_۱=\frac{x_۲}{۳} \quad و \quad V_۲=\frac{x_۱}{۱۲}$$

برای متحرك اول $t = \frac{x_1}{V_1} = \frac{3x_1}{x_2}$

برای متحرك دوم $t = \frac{x_2}{V_2} = \frac{12x_2}{x_1}$

$$\frac{3x_1}{x_2} = \frac{12x_2}{x_1} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 900 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 600^m \text{ و } x_2 = 300^m$$

$$V_1 = \frac{300}{3} = 100 m/min \text{ ، } V_2 = \frac{600}{12} = 50 m/min$$

۵۵/۲۹ـ جسم خالص A مایعی است با بوی آمونیاکی و واکنش بازی که تحت فشار یك‌جو در 50° می‌جوشد. برای مشخص کردن آن به‌طریق زیر آزمایش می‌کنیم.

الف‌ـ برای خنثی کردن یك گرم از این جسم $13/6 cc$ محلول اسید کلریدریك دسی نرمال لازم است. تجزیهٔ عنصری آن نتایج زیر داده است:

$C\% : 66/5$ ، $H\% : 14/8$ ، $N\% : 19/0$

چگالی بخار آن نسبت به‌هوا ۲/۶ است.

فرمول خام جسم A وگستردهٔ تمام ایزومرهای آن را بنویسید.

ب‌ـ جسم A را با مقدادزیادی یدورمتیل درلوله‌سربسته گرم می‌کنیم. مخلوطی از چند یدور که‌شامل یك نمك‌آمونیوم چهاراستخلافی نیز می‌باشد بدست می‌آید. چگونه می‌توان‌جسم اخیررا از سایر یدورها جداکرد؟ تجزیهٔ عنصری نمك‌آمونیوم چهار استخلافی نتایج‌زیررا داده‌است.

$C\% : 31$ ، $H\% : 7$ ، $N\% : 6$ $I\% : 56$

فرمول خام یدور چهار استخلافی چیست؟ آمین A چه نوع‌آمینی‌است؟ گستردهٔ ایزومرهای آن را بنویسید. آیا روش دیگری برای تعیین‌نوع آمین A می‌شناسید؟

ج‌ـ به‌کمك‌یدور آمونیوم چهاراستخلافی حاصل درقسمت (ب) ئیدروکسیدمربوطرا تهیه می‌کنیم. روش‌عمل را بیان کنید. هرگاه این‌ئیدروکسید را درحدود 150° سانتیگراد گرم کنیم به تری متیل‌آمین، آب ویك ئیدروکربور تجزیه می‌شود این ئیدروکربور چیست؟

حل‌ـ الف‌ـجرم ملکولی آمین برابر است با:

$M = 29d$ ، $M = 29 \times 2/6 = 75/4$

$$\frac{m}{M} = \frac{m_C}{12x} = \frac{m_H}{y} = \frac{m_N}{14z}$$

$$\frac{100}{75} = \frac{66/5}{12x} = \frac{14/8}{y} = \frac{19/0}{14z}$$

$x \# 4$ $y \# 11$ $z \# 1$

بنا براین فرمول جسم $C_4H_{11}N$ و جرم ملکولی آن ۷۳ است. چون هرملکول گرم آن $13/6 \times 73 \# 1000 cc$ اسیدکلریدریك نرمال‌را خنثی می‌کند با توجه‌به سایر خواصی که درصورت مسئله ذکرشده است جسم A یك‌آمین یك ظرفیتی می‌باشد و ایزومرهای‌آن از این قرار است.

آمینو۱بوتان $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-NH_2$

آمینو۲بوتان $CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-CH_3$

آمینو۱متیل۲پروپان $CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_2-NH_2$

متیل‌آمینو پروپان $CH_3-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{\overset{\displaystyle CH_2}{\overset{|}{C}}}}-CH_3$

متیل‌پروپیل‌آمین $CH_3-NH-CH_2-CH_2-CH_3$

متیل ایزوپروپیل‌آمین $CH_3-NH-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$

دی‌اتیل‌آمین $CH_3-CH_2-NH-CH_2-CH_3$

دی‌متیل‌اتیل‌آمین $CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{N}}-CH_2-CH_3$

یعنی دارای ۸ ایزومر است.

ب‌ـ برای جداکردن نمك آمونیوم چهار استخلافی، به مخلوط حاصل‌سود افزوده وجریان بخارآب از آن‌عبورمی‌دهند. کلیهٔ آمینها بوسیلهٔ بخار آب کشیده وخارج می‌شود و تنها نمك آمونیوم چهار استخلافی بدون‌تجزیه درمحیط باقی می‌ماند. برای‌یافتن فرمول نمك‌آمونیوم از نتایج تجزیه استفاده می‌کنیم.

$$\frac{31}{12x} = \frac{7}{y} = \frac{6}{14z} = \frac{56}{127}$$

$x \# 6$ و $y = 16$ و $z = 1$

فرمول‌خام این نمك $C_6H_{16}NI$ است. یعنی‌دواتم‌کربن بیش ازآمین A دارا می‌باشد بنابراین‌آمین A بناچار بایدیکی ازسه‌آمین نوع‌دوم زیررا باشد.

$CH_3-NH-CH_2-CH_2-CH_3$

$CH_3-NH-CH(CH_3)_2$ و

$CH_3-NH-CH_2-CH_3$ و

ج- به‌کمك اکسید نقرهٔ آبدار (ئیدروکسید نقره)

$$\begin{matrix}R\\R'\\R''\\R'''\end{matrix}\!\!>\!N-I+AgOH\rightarrow IAg+\begin{matrix}R\\R'\\R''\\R'''\end{matrix}\!\!>\!N-OH$$

برای آنکه چنین نتایجی از تجزیهٔ ئیدروکسید مزبور بدست‌آید آمین A باید یکی ازدوفرمول زیررا داشته باشد:

$CH_3-NH-CH_2-CH_2-CH_3$ (۱)

$CH_3-NH-CH(CH_3)_2$ (۲)

مثلا اگر آمین به‌فرمول(۱) باشد واکنش چنین است:

$$CH_3-NH-CH_2-CH_2-CH_3+ICH_3\rightarrow$$
$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{N}}-CH_2-CH_2-CH_3\ و\ IH$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{N}}-CH_2-CH_2-CH_3\ و\ IH+NH_3\rightarrow$$

$$INH_4+CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{N}}-CH_2-CH_2-CH_3$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{N}}-CH_2-CH_2-CH_3+ICH_3\rightarrow$$

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\end{matrix}\!\!>\!N-I$$

$$CH_3-CH_2-CH_2$$

فرمول ئیدروکسیدنمك‌آمونیوم چهار استخلافی خواهد شد :

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\\CH_3-CH_2-CH_2\end{matrix}\!\!>\!N-OH$$

این ئیدروکسید مانندئیدرکسید آمونیوم در اثرحرارت تجزیه می‌شود :

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\\CH_3-CH_2-CH_2\end{matrix}\!\!>\!N-OH\rightarrow$$

$$(CH_3)_3N+H_2O+CH_3-CH=CH_2$$

۵۵/۳۰- از کلراسیون‌منواسید A مشتق مونوکلرB بدست‌آمده‌است . از اثرپتاس الکلی برB جسم C تولید شده است . بالاخره از اکسیداسیون مولکول C اسید استیك واسید پیرووِیك بدست آمده است. ساختمان احتمالی جسم A را مشخص کنید درصورتی‌که بدانیم برای خنثی کردن ۰/۲۰۴ گرم این اسید ۲۰cc سود $\frac{N}{10}$ لازم‌است.

حل- چون‌جسم‌یك مونواسید است‌بنابراین جرم‌ملکولی وفرمول‌آن خواهد شد :

$$\frac{10000\times 0/204}{20}\# 102$$

$$C_nH_{2n+1}-COOH=102$$

$$14n=56\quad و\quad n=4\qquad C_4H_9-COOH$$

برای‌آنکه محصول‌اکسیداسیون، جسم حاصل ازاثرپتاس الکلی برمشتق‌کلره‌جسمA . اسید استیك CH_3-COOH و اسید پیرووِیك $CH_3-CO-COOH$ باشد باید اسید A دارای فرمول $CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-COOH$ باشد

درنتیجه جسمB دارای فرمول $CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}}}-COOH$

و از اثرپتاس الکلی برآن ، جسم C به فرمول

$$CH_3-CH=\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}-COOH\quad (\text{اسید اتیلنی})$$

بدست می‌آید. محصول‌اکسیداسیون این جسم اخیرطبق واکنش زیراسیداستیك و اسیدپیرووِیك است.

$$CH_3-CH=\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}-COOH+3[O]\rightarrow$$

$$CH_3-COOH+CH_3-\underset{\displaystyle O}{\underset{\|}{C}}-COOH$$

۵۵/۳۱ـ مونو اسید A که دارای فعالیت نوری است فقط شامل C و H و O می‌باشد و دراثر تجزیه نتایج زیر را داده است:

$$C\ 58/82\ \%\quad ،\quad H\ 9/80\ \%$$

مونواسید A را به‌صورت نمک‌نقره درآوردیم، ازتکلیس ۰/۲۲۹۹ گرم این نمک ۰/۱۱۸ گرم نقره بدست آمده است. ساختمان احتمالی اسید A را مشخص‌کنید و سنتز آن را شرح شرح‌دهید.

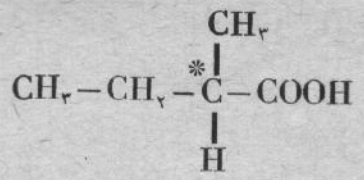
حل‌ـ جرم‌مولکولی منواسید A برابراست با :

$$\frac{M-1+108}{108}=\frac{0/2299}{0/118}\quad ،\quad M\neq 102$$

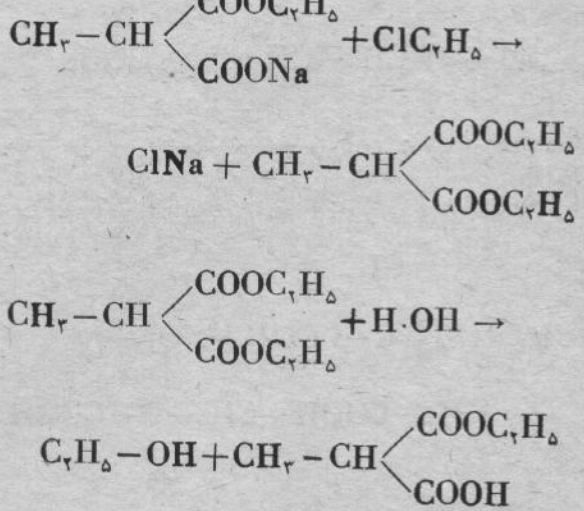
فرمول‌اسید A: $C_nH_{2n+1}-COOH=102$

$$14n=56\quad و\quad n=4\quad ،\quad C_4H_9COOH$$

وچون این اسید دارای فعالیت نوری است بناچارفرمول گستردهٔ آن چنین خواهدبود:



جسم A ازترکیب کلروراتیل یا متیل‌مالونات‌مضاعف اتیل و سدیم وسپس ئیدرولیزو گرفتن CO_2 از جسم حاصل بدست می‌آید .



۵۶/۱ـ ازمعادلهٔ زیرمقدار x را بدست آورید:

$$(\log_a x)^4+(\log_x a)^4=34$$

حل‌ـ فرض می‌کنیم :

$$\log_a x=y \implies \log_x a=\frac{1}{y}$$

$$y^4+\frac{1}{y^4}=34 \quad یا \quad \left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)^2-2=34$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}=6 \quad یا \quad \left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2=6$$

$$y+\frac{1}{y}=\pm 2\sqrt{2} \quad یا \quad y^2\pm 2\sqrt{2}y+1=0$$

$$y=\pm(\sqrt{2}\pm 1) \quad و \quad x=a^{\pm(\sqrt{2}\pm 1)}$$

تعمیم حل مسئله‌با استفاده ازاتحاد زیر انجام می گیرد:

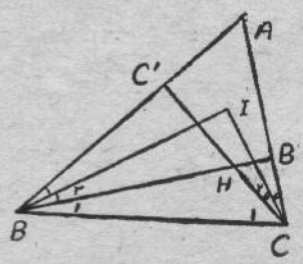
$$y^{2n}+\frac{1}{y^{2n}}=\left(y^{2n-1}+\frac{1}{y^{2n-1}}\right)^2-2$$

۵۶/۲ـ زاویهٔ A ازمثلث ABC برابر ۶۰ درجه‌است. دو ارتفاع BB' و CC' از این مثلث را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ ABB' و ACC' را I می‌نامیم . اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث باشد ثابت کنید که :

$$BI^2+CI^2=BH^2+CH^2+BH\cdot CH$$

حل‌ـ ازچهارضلعی محاطی AB'HC' نتیجه می‌شود که زاویهٔ BHC برابر ۱۲۰ درجه است و درنتیجه در مثلث BHC خواهیم داشت :

$$BC^2=BH^2+CH^2+BH\cdot CH$$



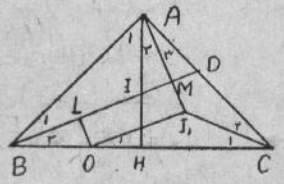
مجموع دو زاویهٔ B و C از مثلث ABC برابر ۱۲۰ درجه و مجموع دو زاویهٔ B_1 و C_1 از مثلث BHC برابر ۶۰ درجه است نتیجه خواهد شد که:

$$2C_2+2B_2=60^\circ \quad \text{یا} \quad B_2+C_2=30^\circ$$

$$I=90^\circ \text{ و } BC^2=BI^2+CI^2$$

که‌چون این مقدار دررابطهٔ قبل منظورشود رابطهٔ‌مطلوب بدست می‌آید.

۵۶/۳ـ درمثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم و روی BH نقطهٔ O را چنان انتخاب می‌کنیم که $BO=OH\sqrt{2}$ باشد . ثابت کنید خطی‌که از O موازی با نیمساز زاویهٔ B رسم شود از I_1 مرکز دایرهٔ‌محاطی داخلی مثلث AHC می‌گذرد.



حل ـ اندازهٔ هریك از زاویه های A_1 و A_2 و B_1 به ترتیب 45° و $22/5^\circ$ و $22/5^\circ$ است . مجموع این زاویه‌ها 90° درجه بود.

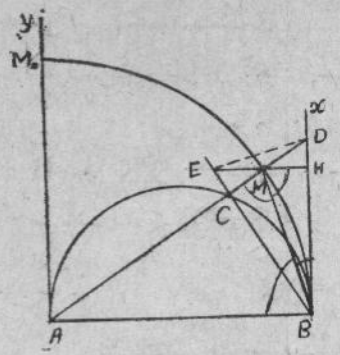
وزاویهٔ AMB قائمه می‌باشد . عمود OL را بر نیمساز BD فرود می‌آوریم . داریم :

$$\frac{AI}{IH}=\frac{AB}{BH}=\sqrt{2} \rightarrow \frac{AI}{IH}=\frac{BO}{OH}$$

خط OI با ضلع AB موازی است و از آن نتیجه می‌شود که $BO=AI$ و دو مثلث AMI و BLO متساوی می‌باشند و در نتیجه $OL=IM$ و چون اندازهٔ زاویهٔ MIC برابر 45° است پس مثلث IMI_1 متساوی‌الساقین است و نتیجه می‌شود که $I_1M=OL$. پس چهار ضلعی $OLMI_1$ مربع مستطیل بوده OI_1 با BM موازی می‌باشد . به‌عبارت دیگر خطی که از O موازی با BD رسم شود از I_1 می‌گذرد .

۵۶/۴ـ نیمدایرهٔ به قطر AB ومماس Bx برآن‌مفروض است. نقطهٔ دلخواه C را روی نیمدایره در نظر می‌گیریم و نقطهٔ تلاقی AC را با Bx به D نشان می‌دهیم. روی خطی‌که B را به C وصل می‌کند نقطهٔ E را چنان انتخاب می‌کنیم که $BE=BD$ باشد واز E موازی‌با AB رسم می‌کنیم‌که AD را در M قطع‌کند . وقتی C نیمدایره را می‌پیماید مکان M چیست .

حل ـ اگر H نقطهٔ تلاقی EM با Bx باشد چون EH بر BD و DC بر BC عمود‌است پس M نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث BDE می‌باشد وچون این‌مثلث‌متساوی‌الساقین



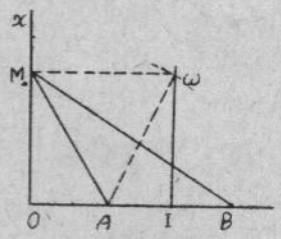
است پس دو زاویهٔ AMB و BMH متساوی‌اند . دو زاویهٔ HMB و ABM متساوی‌اند، پس‌دو زاویهٔ ABM و AMB با هم برابراندوخواهیم داشت $AM=AB$. نقطهٔ M بردایرهٔ به‌مرکز A وبه‌شعاع AB قرار دارد . وقتی C روی نیمدایره به A نزدیك شود AC به‌وضع Ay مماس بر نیمدایره درمی‌آید واگر M_0 نقطهٔ تلاقی دایرهٔ به مرکز A وبه‌شعاع AB با Ay باشد ربع دایرهٔ BM_0 از دایرهٔ مزبورمکان M می‌باشد .

۵۶/۵ـ سه نقطهٔ O و A و B به‌همین‌ترتیب بر یك خط راست واقع‌اند و Ox نیم خطی است عمود بر OA و فرض می‌کنیم $OA=a$ و $OB=b$

۱) نقطهٔ M را بر Ox چنان انتخاب کنید که از آن قطعه‌خط AB با بزرگترین زاویهٔ ممکن دیده شود.

۲) مقدار b را برحسب a تعیین‌کنید برای آنکه زاویهٔ ماکزیمم مزبور برابر ۳۰ درجه باشد.

حل ـ اگر I وسط AB و M نقطه‌ای از Ox و ω مرکز دایرهٔ‌محیطی مثلث AMB باشد، زاویهٔ AMB نصف زاویهٔ $A\omega B$ می‌باشد . زاویهٔ AMB وقتی ماکزیمم است که‌زاویهٔ $A\omega B$ ماکزیمم باشد واین درموقعی است‌که A می‌نیمم باشد. اما داریم $\omega A=\omega M$ و ωM یا ωA وقتی می‌نیمم است‌که دایرهٔ AMB بر Ox مماس باشد. اگر M_0 نقطهٔ تماس مزبور باشد خواهیم‌داشت:



$$\omega M_0=\omega A=OI$$

برای تعیین M_0 وضع مطلوب M ابتدا به مرکز A و به شعاع OI دایره‌ای رسم

می‌کنیم تا عمود منصف AB را در ω قطع کند و از ω بر Ox عمود می‌کنیم تا M_0 بدست آید.

۲) وقتی زاویهٔ AM_0B برابر ۳۰ درجه باشد زاویهٔ $A\omega B$ برابر ۶۰ درجه بوده مثلث $A\omega B$ متساوی‌الاضلاع می‌باشدوداریم $AB=OI$ یا:

$$b-a=\frac{a+b}{2} \Longrightarrow b=3a$$

۵۶/۶ـ نوع مثلثی را معلوم کنیدکه بین a و b و c اندازه‌های ضلعهایش رابطهٔزیر برقرار باشد:

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab=6$$

حل ـ رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\log b+\log c}{\log a}+\frac{\log c+\log a}{\log b}+\frac{\log a+\log b}{\log c}=6$$

$$\left(\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}\right)+\left(\frac{\log c}{\log b}+\frac{\log b}{\log c}\right)+\left(\frac{\log a}{\log c}+\frac{\log c}{\log a}\right)=6$$

امّا می‌دانیم که برای هر سه عدد A و B و C

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)+\left(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\right)\geq 6$$

وتساوی فقط وقتی برقراراست‌که داشته باشیم:

$$A=B=C$$

بنابراین داریم :

$$\log a=\log b=\log c \Longrightarrow a=b=c$$

مثلث مربوط متساوی‌الاضلاع می‌باشد .

۵۶/۷ـ حد حاصلضرب زیر را وقتی $n\to\infty$ بدست آورید :

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

حل ـ اتحاد زیررا درنظر می گیریم :

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$$

درازاء مقادیر متوالی n از۲تا n خواهیم‌داشت:

$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$$

$$1-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$$

$$1-\frac{1}{4^2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}$$

. . . . . .

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$$

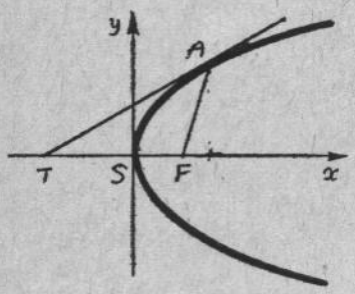
از ضرب نظیربه‌نظیر طرفین رابطه‌های بالا در یکدیگر نتیجه خواهد شد:

$$P_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

$$n\to\infty \quad , \quad \lim P_n=\frac{1}{2}$$

۵۶/۸ـ در نقطهٔ A واقع برسهمی P مماسی‌برآن رسم می‌کنیم‌که محور سهمی را درT قطع می‌کند. اگرF کانون و Sx محور سهمی باشد ثابت‌کنید که زاویهٔ $AFx=\beta$دو برابر زاویهٔ $ATx=\alpha$ است .

حل ـ رأس سهمی را مبدأ مختصات و محور سهمی را محور طولها وجهت مثبت را جهت ازS بهF اختیار می‌کنیم . نسبت به‌این دستگاه مختصات معادلهٔ سهمی به صورت:



$y^2=2px$ می‌باشد . اگر $A(a\ و\ b)$ فرض شود چون $y'=\frac{p}{y}$. است پس .

$$tg\alpha=\frac{p}{b} \quad و \quad tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2pb}{b^2-p^2}=$$

$$=\frac{2pb}{2pa-p^2}=\frac{2b}{2a-p}$$

ازطرف دیگرضریب‌زاویه‌ای خط AF برابراست‌با:

$$tg\beta=\frac{2b}{2a-p}$$

پس: $tg\beta=tg2\alpha \Longrightarrow \beta=2\alpha$

۵۶/۹ـ تابع زیر مفروض است :

$$y=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

اولامعلوم‌کنید به‌ازاء چه‌مقادیرازx تابع معین است:

ثانیاً ثابت کنیدکه :

$$2<x<3 \Longrightarrow y^2=4$$

$$x>3 \Longrightarrow y^2=4(x-2)$$

ثانیاً منحنی نمایش تابع را رسم‌کنید

حل ـ داریم :

$$x-1+2\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}+1)^2$$

$$x-1-2\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}-1)^2$$
$$y=|\sqrt{x-2}+1|+|\sqrt{x-2}-1|$$

بنابراین تابع وقتی معین است که :

$$x-2\geq 0 \quad \text{یا} \quad x\geq 2$$

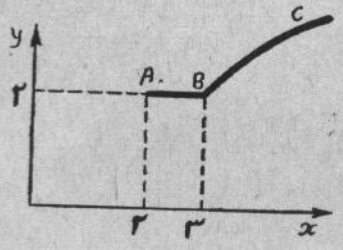
ثانیاً ـ وقتی $2<x<3$ باشد داریم:

$$\sqrt{x-2}+1>0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x-2}-1<0$$
$$y=(\sqrt{x-2}+1)-(\sqrt{x-2}-1)=2 \quad \text{و} \quad y^2=4$$

وقتی $x\geq 3$ باشد داریم :

$$\sqrt{x-2}+1>0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x-2}-1\geq 0$$
$$y=\sqrt{x-2}+1)+(\sqrt{x-2}-1)=2\sqrt{x-2}$$
$$y^2=4(x-2)$$

ثالثاً ـ با توجه به‌اینکه y نمی‌تواند منفی باشد نمایش هندسی تابع مرکب است از قطعه‌خط AB به‌معادلهٔ $y=2$ و $2<x<3$ وکمان BC با عرضهای مثبت از سهمی به‌معادلهٔ:



$$y^2=4(x-2) \quad \text{و} \quad x\geq 3$$

۵۶/۱۰ـ تابع زیرمفروض است :

$$y=\frac{|x-1|x+(x-1)|x|}{x^2-1}$$

اولا وقتی x به ازاء مقادیر کوچکتر از یك و به ازاء مقادیر بزرگتر ازیك بسمت یك میل کند حد تابع چه می‌باشد؟

ثانیاً منحنی نمایش تابع را رسم کنید.

حل ـ تابع به‌ازاء همهٔ مقادیر x غیراز $x=\pm 1$ معین می‌باشد. با توجه به مفهوم قدرمطلق سه فاصلهٔ زیر را برای x درنظرمی گیریم :

الف ـ اگر $x<0$ باشد داریم :

$$|x-1|=1-x \quad \text{و} \quad |x|=-x$$
$$y=\frac{(1-x)x-(x-1)x}{x^2-1}=\frac{-2x}{x+1}$$

دراین فاصله نمایش هندسی تابع قسمتی از هذلولی با مجانبهای $x=-1$ و $y=-2$ می‌باشدکه سمت‌چپ محور عرضها قرار دارد .

ب ـ اگرداشته‌باشیم $0<x<1$ خواهیم داشت:

$$|x-1|=1-x \quad \text{و} \quad |x|=x$$

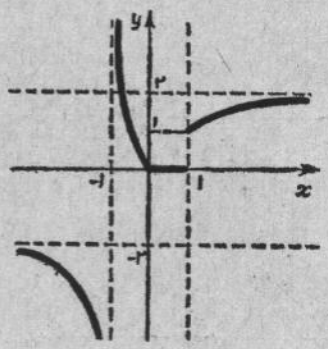
$$y=\frac{x(1-x)+x(x-1)}{x^2-1}=0$$

دراین فاصله نمایش هندسی تابع قطعه‌ای از محور $x'x$ است که بین طولهای ۱ و ۰ محصور می‌باشد . همچنین معلوم می‌شود وقتی x با مقادیر کوچکتر از یك به‌سمت یك میل‌کند y برابربا صفر می‌باشد.

ج ـ اگر $x\geq 1$ باشد داریم :

$$|x-1|=x-1 \quad \text{و} \quad |x|=x$$
$$y=\frac{x(x-1)+(x-1)x}{x^2-1}=\frac{2x}{x+1}$$

نمایش هندسی تابع قسمتی‌ازهذلولی با مجانبهای $y=2$ و $x=-1$ است که سمت راست خط $x=1$ قرار دارد .



دراین حال در ازاء $x=1$ داریم $y=1$ یعنی وقتی x به ازاء مقادیر بزرگتر از یك به‌سمت یك میل‌کندحد y برابربا یك می‌باشد از روی شکل منحنی نمایش تابع نیز معلوم می‌شودکه‌درازاء $x=1$ برای تابع دومقدار $y=0$ و $y=1$ وجود دارد.

۵۶/۱۱ـ نامعادلهٔ زیررا حل و بحث‌کنید :

$$\big||x|-1\big|<|x-m|$$

حل ـ با درنظرگرفتن دو تابع زیر برای حل مسئله‌از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم:

$$y_1=\big||x|-1\big| \quad \text{و} \quad y_2=|x-m|$$

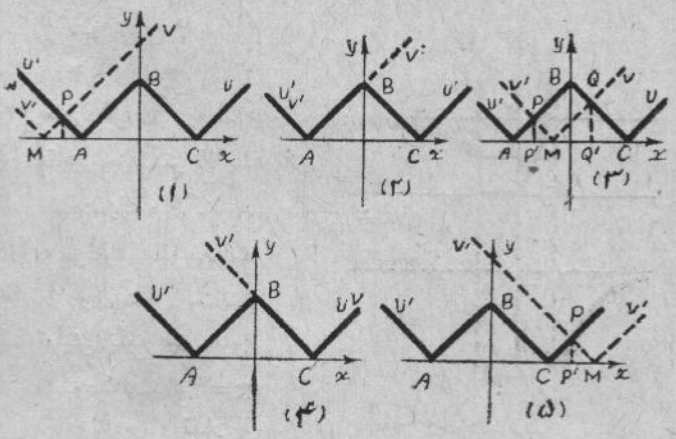
جوابهای نامعادله طولهایی از نقاط نمایش هندسی تابع y_1 است که‌عرض آنها از نقاط نظیر درتابع y_2 کمتر باشد . آبا توجه‌به مفهوم قدرمطلق مقادیر تابعهای بالا وجهت‌تغییرات نها درفاصله‌های مختلف به‌شرح جدولهای زیراست:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y_1	$-x-1$	0	$x+1$	1	$-x+1$	0	$x-1$		
y_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y_2	$-x+m$	0	$x-m$		
y_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نمایش هندسی تابع y_1 عبارتست از خط شکستهٔ $u'ABCu$ که $u'A$ با نیمساز ربع دوم محورها و Cu با نیمساز ربع اول آنها موازی بوده $A(-1,0)$ و $B(0,1)$ و $C(1,0)$ می‌باشد.

نمایش هندسی تابع y_2 خطشکستهٔ $v'Mv$ است که $v'M$ با نیمساز ربع دوم و Mv با نیمساز ربع اول موازی بوده $M(m,0)$ می‌باشد. حل و بحث مسئله به تعیین اوضاع مختلف M برمحور $x'x$ منجرمی‌شود. برای این کار پنج شکل زیررا درنظر می‌گیریم. دراین‌شکلها نمایش هندسی تابع y_1 با خطپر وازتابع y_2 با خطچین مشخص شده است.



۱) اگر $m<-1$ باشد دونمایش هندسی تنها در یك نقطهٔ P متقاطع‌اند که طول آن برابر است با:

$$\overline{OP'}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OM})=\frac{m-1}{2}$$

دراین‌حالت جوابهای نامعادله عبارتند از:

$$x>\frac{m-1}{2}$$

۲) اگر $m=-1$ باشد نقطهٔ M بر A منطبق است وجوابهای نامعادله $x>0$ می‌باشد.

۳) اگر $-1<m<1$ باشد دونمایش هندسی در دو نقطهٔ P و Q متقاطع‌اند که طولهای آنها عبارتند از:

$$\overline{OP'}=\frac{m-1}{2}\quad,\quad \overline{OQ'}=\frac{m+1}{2}$$

و جوابهای نامعادله عبارتند از:

$$x<\frac{m-1}{2}\quad \text{یا}\quad x>\frac{m+1}{2}$$

۴) درحالت $m=1$ نقطهٔ M بر C منطبق‌است و $x<0$ جواب نامعادله می‌باشد.

۵) در حالت $m>1$ مشابه با حالت(۱) نتیجه خواهد شد که $x<\frac{m+1}{2}$

۵۶/۱۲ـ اگر r و r_a و r_b و r_c شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی و p نصف محیط مثلث ABC باشد وداشته باشیم:

$$f(x)=(x+r_a)(x+r_b)(x+r_c)$$

نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$y=\frac{f(r_a)f(r_b)f(r_c)}{[f(r)]^2}<\frac{p^6}{8r^3}$$

حلـ داریم:

$$r_a+r_b=\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}=\frac{Sc}{(p-a)(p-b)}$$

$$r_b+r_c=\frac{Sa}{(p-b)(p-c)}\quad \text{و}$$

$$r_c+r_a=\frac{Sb}{(p-c)(p-a)}$$

$$f(r_a)=\frac{S^2bc\times 2r_a}{(p-a)^2(p-b)(p-c)}=\frac{2pbcr_a}{p-a}$$

$$f(r_b)=\frac{2pcar_b}{p-b}\quad ,\quad f(r_c)=\frac{2pabr_c}{p-c}$$

$$f(r_a)f(r_b)f(r_c)=8p^3a^2b^2c^2.\frac{r_ar_br_c}{(p-a)(p-b)(p-c}$$

$$=\frac{8p^4a^2b^2c^2}{r}$$

$$f(r)=\ldots=\frac{r(a+b)(b+c)(c+a)}{p}$$

$$y=\frac{8p^4a^2b^2c^2}{r^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$$

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}<\frac{1}{64}\Rightarrow y<\frac{p^6}{8r^3}$$

۵۶/۱۳ـ حاصل‌عبارت زیررا بدست آورید:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})}\times$$

$$\times\frac{(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

حلـ داریم:

$$f(x)=\frac{a_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}+$$
$$\frac{a_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}+$$
$$+\cdots+\frac{a_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که :

$f(a_1)=a_1$ و $f(a_2)=a_2$ و ... و $f(a_n)=a_n$

اکنون معادلهٔ $g(x)=f(x)-x$ را در نظر می‌گیریم . این معادله برحسب x ازدرجهٔ $n-1$ بوده و به‌ازاء $x=a_1$ جملهٔ n و $x=a_2$ و ... و $x=a_n$ مساوی با صفر می‌شود. درنتیجه عبارت $g(x)$ متحدبا صفراست یعنی داریم $g(x)\equiv 0$ ودرنتیجه

$$f(x)=x$$

۵۶/۱۴ـ مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای راتعیین‌کنیدکه‌درآنها مربع‌طول‌وتر برابر باشد با مجموع‌طولهای دو ضلع دیگر.

حلـ مقصود تعیین دوعدد b و c است که مجموع آنها با مجموع مربعاتشان برابر باشد

$$b^2+c^2=b+c \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم‌که $b=x+y$ و $c=x-y$،دراین‌صورت رابطهٔ بالا بعد ازاختصار به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2-x+y^2=0$$

این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

می‌توانیم‌داشته باشیم:

$$x=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2} \quad و \quad y=\frac{1}{2}\cos\alpha$$

با فرض $tg\frac{\alpha}{2}=t$ خواهیم‌داشت:

$$x=\frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \quad و \quad y=\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}$$

$$b=\frac{1+t}{1+t^2} \quad و \quad c=\frac{t^2+t}{1+t^2} \Longrightarrow a=\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}$$

مثال عددی. درازاء $t=1$ داریم:

$$a=\sqrt{2} \quad و \quad c=1 \quad و \quad b=1$$

در ازاء $t=2$ داریم :

$$b=\frac{3}{5} \quad و \quad c=\frac{6}{5} \quad و \quad a=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

یادآوریـ راه حلی که در بالا ارائه شد ممکن است غیراز راه‌حل مورد نظرطرح‌کنندهٔ مسئله باشد. زیرا طرح‌کننده فقط صورت مسئله وجواب آنرا به‌شرح زیرمطرح ساخته است:

$$b=\frac{m+\sqrt{m}}{1+m} \quad و \quad c=\frac{m-\sqrt{m}}{1+m}$$

۵۶/۱۶ـ چهار وجهی $ABCD$ متساوی‌الساقین است یعنی در آن داریم :

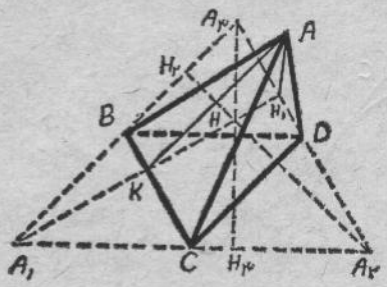
$$AB=CD \quad و \quad AC=BD \quad و \quad AD=BC$$

اگر h طول یکی از ارتفاعهای چهاروجهی‌باشدومرکز ارتفاعی یکی ازوجوه یکی از ارتفاعهای این‌وجه را به دوقطعه به‌طولهای h_1 و h_2 تقسیم‌کند، ثابت کنید که :

$$h^2=4h_1h_2$$

حل ـ یکی از رأسها مثلا رأس Aرا در نظر می‌گیریم که طول ارتفاع نظیرآن $AH=h$ باشد . وجوه ABC و ACD و ADB را به‌ترتیب حول یالهای BC وCDوDB دوران می‌دهیم تا برصفحهٔ وجه BCD منطبق شده به ترتیب به‌وضع مثلثهای A_1BC و A_2CD و A_3BD درآنندداریم:

$$A_1B=A_3B=AB=CD$$
$$A_2C=A_1C=AC=BD$$
$$A_3D=A_2D=AD=BC$$



نتیجه خواهد شد که هریك‌ازچهارضلعیهای A_2CBDوA_1BDC وA_3DCB متوازی الاضلاع بوده‌نقطه‌های B و C و D اوساط ضلعهای‌مثلث $A_1A_2A_3$ می‌باشند . ارتفاعهای A_1H_1 و A_2H_2 و A_3H_3 از مثلث $A_1A_2A_3$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقارب آنهارا H می‌نامیم. A_1H_1 در نقطهٔ K بر BC عمود است پس A_1K تسطیح ارتفاع AK از وجه ABC بوده صفحهٔ AA_1H_1 برضلع BC عمود بوده ارتفاع نظیر رأس A از چهار وجهی دراین صفحه قرارداشته پای آن بر A_1H_1 قرار دارد. به‌ترتیب مشابه ثابت می‌شودکه پای ارتفاع نظیررأس A ازچهاروجهی بایدبر A_2H_2 و A_3H_3 نیز قرارداشته باشد. پس Hپای ارتفاع مزبور می‌باشد. از طرف دیگر از تساویهای $A_1K=KH_1=AK$ نتیجه می‌شود که زاویهٔ AA_1H_1 قائمه است ودرنتیجه داریم :

$$\overline{AH}^2=h^2=A_1H\cdot HH_1 \qquad (1)$$

مثلث $A_1A_2A_3$ با هریك از مثلثهای BCD و A_1BC و A_2CD و A_3DB یعنی با هریك از وجهای چهار وجهی به‌نسبت ۲ بریك متشابه می‌باشد . اگر طولهای دو قطعه از ارتفاعهای یکی از وجوه چهاروجهی h_1 و h_2 باشد ، طولهای دوقطعه از ارتفاع نظیرآن ازمثلث $A_1A_2A_3$ برابر با $2h_1$ و $2h_2$ خواهد بودوچون داریم:

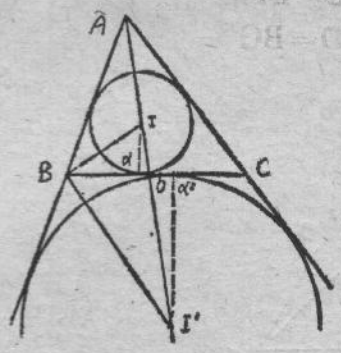
$$HA_1 \cdot HH_1 = HA_2 \cdot HH_2 = HA_3 \cdot HH_3$$

پس هریك ازاین‌حاصلضربها برابراست با حاصلضرب $2h_1 \times 2h_2$ وازآنجا با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$h^2 = 4h_1h_2$$

۵۶/۱۷ـ بین r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس برضلع BC از مثلث ABC و a طول‌ضلع مزبور چه رابطه برقراربا‌شد تا دایرهٔ به‌قطر BC بردایرهٔ محاطی داخلی مثلث مماس گردد ؟

حل‌ـ مرکزدایرهٔ محاطی داخلی را به I و نقطهٔ تماس آنرا با ضلع BC به α، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس برBC را به I' ونقطهٔ تماس آنرا با BC به α' و بالاخره وسط BC را به O نمایش دهیم. نقطهٔ α بر BC و در نتیجه داخل دایرهٔ به قطر BC قرارداشته و دو دایرهٔ (I) و (O) اگرمماس باشند مماس داخلی خواهندبود و برای این کارکافی است‌که داشته باشیم:



$$OI = \frac{a}{2} - r \qquad (1)$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ $O\alpha I$ داریم:

$$OI^2 = r^2 + O\alpha^2 \qquad (2)$$

ازتشابه دومثلث $B\alpha I$ و $B\alpha'I'$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{\alpha I}{B\alpha'} = \frac{B\alpha}{\alpha' I'} \quad \text{یا} \quad B\alpha \cdot B\alpha' = rr_a \qquad (3)$$

O وسط $\alpha\alpha'$ است و داریم:

$$B\alpha \cdot B\alpha' = (BO + O\alpha)(BO - O\alpha) =$$

$$= BO^2 - O\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4} - O\alpha^2$$

$$O\alpha^2 = \frac{a^2}{4} - rr_a \qquad (4)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۴) نتیجه خواهد شد :

$$r^2 + \frac{a^2}{4} - rr_a = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$$

وبعد ازاختصار خواهیم داشت : $r_a = a$

۵۶/۱۸ـ دو دایرهٔ C و C' به مرکزهای O و O' و بشعاعهای R و R' $(R > R')$ در A مماس خارج می‌باشند و M نقطهٔ مفروض واقع برمماس مشترك داخلی آنها است.

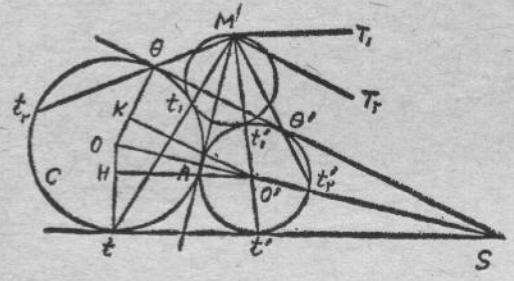
۱) ثابت‌کنید دودایرهٔ Γ_1 و Γ_2 وجود دارد که هردو ازM گذشته بردایره‌های C و C' مماس می‌باشند. یك راه ترسیم این دودایره را معلوم کنید.

۲) R و R' به چه‌نسبت باشند تا دو دایرهٔ Γ_1 و Γ_2

الف‌ـ یکدیگررا به زاویهٔ ۶۰ درجه قطع کنند.

ب‌ـ برهم عمود باشند .

حل‌ـ انعکاس به‌قطب M و به‌قوت $\overline{MA}^2$ را در نظر می‌گیریم . دراین انعکاس ، دایره‌های C و C' تغییر نمی‌کنند و منعکس دایرهٔ ماربر M و مماس بر دایره‌های C و C'



یکی ازمماسهای مشترك این دو دایره (غیرازMA) می‌باشد. دو دایرهٔ C و C' غیر از MA دارای دو مماس مشترك tt' و $\theta\theta'$ می‌باشند بنابراین دو دایرهٔ Γ_1 و Γ_2 وجود دارد که برM گذشته و بردایره‌های مزبور مماس می‌باشند .

خطوط Mt و Mt' دایره‌های C و C' را در t_1 و t_1' قطع می‌کنند و دایرهٔ Γ_1 با سه نقطهٔ M و t_1 و t_1' مشخص می‌شود. ازتلاقی خطوط $M\theta$ و $M\theta'$ با دایره‌های مزبورنقاط t_2 و t_2' بدست می‌آید و این دو نقطه با نقطهٔ M دایرهٔ Γ_2 را مشخص می‌کنند .

۲ـ اگر MT_1 و MT_2 به‌ترتیب بردایره‌های Γ_1 و Γ_2 مماس باشند این مماسها به ترتیب با tt' و $\theta\theta'$ موازی می‌باشند . درنتیجه زاویهٔ بین دو دایرهٔ Γ_1 و Γ_2 برابر است با زاویهٔ بین مماسهای مشترك خارجی دودایرهٔ C و C' وبرابر است‌بازاویهٔ $KO'H$ که K و H تصویرهای O' روی $O\theta$ و Ot می‌باشند .

الف ـ وقتی زاویهٔ $HO'K$ برابر با ۶۰ درجه باشد زاویهٔ $OO'H$ برابر با ۳۰ درجه بوده و در نتیجه : $OO'=۲OH$ می‌باشد ، یعنی داریم :

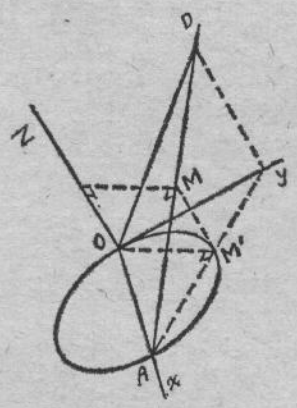
$$R+R'=۲(R-R')\Longrightarrow R=۳R'$$

ب ـ درحالتی‌زاویهٔ $HO'K$ قائمه‌باشد زاویهٔ $OO'H$ برابر ۴۵° بوده وداریم :

$$OO'=OH\sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad R+R'=(R-R')\sqrt{۲}$$

$$\frac{R}{R'}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲$$

۵۶/۱۹ـ کنج سه قائمه (OzوOyوOx) ونقطهٔ ثابت A واقع بر Ox مفروض است. خط متغیر D از A می‌گذرد همواره درصفحهٔ نیمساز فرجهٔ به یال Ox قرار دارد . اگر M پای عمودمشترك دوخط DوOZ رویD باشدمکان نقطهٔ M را تعیین کنید .



حل ـ اگر HM عمود مشترك دو خط : Oz و D بـاشد M' تصویر M را بر صفحهٔ xOy بدست می‌آوریم چون MH با صفحهٔ xOy موازی است و زاویهٔ AMH قائمه است پس زاویهٔ $AM'O$ قائمه بوده نقطهٔ M' بر دایرهٔ Γ به قطر OA قرار دارد . نقطهٔ M ازیك طرف در صفحهٔ منصف فرجهٔ به یال Ox و ازطرف دیگر براستوانهٔ به قاعدهٔ Γ قرار دارد . پس مکان آن بیضی فصل مشترك صفحه واستوانهٔ مزبور می‌باشد . قطر اقصر این بیضی OA و قطر اطول آن به‌طول $OA\sqrt{۲}$ می‌باشد .

۵۶/۲۰ ـ رشتهٔ نا محدود :

$$S=A_۱+A_۲+A_۳+\cdots+A_n+\cdots$$

را معین‌کنید بنابرآنکه هریك از جمله‌های آن مربع‌کامل‌بوده ونیزمجموع S_n از رشتهٔ مزبور در ازاء هرمقدار از n مربع کامل باشد .

حل ـ فرض می‌کنیم‌که $A_۱$ و$A_۲$ و... و A_n بین‌هم اول باشند چه درغیر این‌صورت می‌توان از عامل مشترك آنها فاکتورگرفت . فرض می‌کنیم‌که :

$$A_۱=a_۱^۲ \text{ و } A_۲=a_۲^۲ \text{ و } \cdots \text{ و } A_n=a_n^۲$$

بدیهی است‌که $a_۱$و$a_۲$ و... و a_n بین هم اول می‌باشند ؛

$$a_۱^۲+a_۲^۲=b_۲^۲$$

$$a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=b_۳^۲\Longrightarrow b_۲^۲+a_۳^۲=b_۳^۲$$

و بطورکلی خواهیم داشت :

$$b_n^۲+a_{n+۱}^۲=b_{n+۱}^۲$$

با فرض $b_{n+۱}=a_{n+۱}+c$ خواهیم داشت :

$$(a_{n+۱}+c)^۲-a_{n+۱}^۲=b_n^۲\Longrightarrow a_{n+۱}=\frac{b_n^۲-c^۲}{۲c}$$

لازم‌است‌که‌درازاء مقادیرمختلفc،n مقسوم‌علیهb_n ودر نتیجه مقسوم علیه a_n باشد پس $c=۱$ بوده و داریم :

$$a_{n+۱}=\frac{b_n^۲-۱}{۲}=\frac{a_n^۲+۲a_n}{۲}$$

برای اینکه $a_{n+۱}$ عدد صحیح باشد لازم است که a_n عدد زوج باشد اما چون همهٔ جمله‌هـای رشته نمی‌توانند زوج باشند بنابراین باید $a_۱$ را عدد اول بزرگتر از ۲ اختیارکرد و طبق دستور تعیین عددهای فیثاغـورسی $a_۲$ را بدست آورده بعد طبق دستوربالا جمله‌های بعدی رشته راحساب‌کرد.مجموع S_n از n جملهٔ مطلوب برابر خواهد بود با :

$$S_n=(a_n+۱)^۲$$

مثال عددی : با فرض $a_۱=۳$ خواهیم داشت $a_۲=۴$و

$$a_۳=\frac{۱۶+۸}{۲}=۱۲ \text{و} a_۴=\frac{۱۴۴+۲۴}{۲}=۸۴ \text{ و } \cdots$$

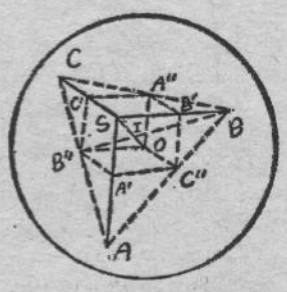
با فرض $a_۱=۵$ خواهیم داشت :

$$a_۲=۱۲ \text{ و } a_۳=۸۴ \text{ و } \cdots$$

با فرض $a_۱=۷$ خواهیم داشت :

$$a_۲=۲۴ \text{ و } a_۳=۳۱۲ \text{ و } \cdots$$

۵۶/۲۱ ـ برکرهٔ به مرکز O نقطهٔثابت S را انتخاب می‌کنیم وکنج سه قائمهٔ متغیر به رأس S رادر نظرمی‌گیریم‌که یالهای آن‌کره را غیر از S به‌ترتیب درنقاط A و B و C قطع می‌کنند. ثابت‌کنیدکه صفحهٔمثلث ABC از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .



حل ـ صفحهٔ عمود منصف هریك ازقطعه خطهای SAو SB و SC از O مرکزکره وبراوساط دوضلع مقابل از مثلث ABC می‌گذرد. پس اگر A'وB'وC' به‌ترتیب اوساط SA

وSBوSCو"A و"B و"C به ترتیب اوساط BC وCA وAB باشد شکل "SA′B"C′B′C"OA مکعب مستطیل می‌باشد که SO قطری از آن است . دو خط SO و "BB در یك صفحه واقع بوده‌در نقطهٔ I متقاطع می‌باشند وداریم :

$$\frac{IS}{IO}=\frac{IB}{IB''}=\frac{SB}{OB''}=\frac{SB}{SB'}=۲$$

یعنی I نقطهٔ ثابتی از SO می‌باشدواز طرف دیگرچون صفحهٔ ABC شامل خط "BB است پس این صفحه شامل نقطهٔ ثابت I می‌باشد (درضمن I مرکز ثقل مثلث ABC است .)

۵۶/۲۲ ـ به‌انتهای یك استوانهٔ توخالی به مقطع ۲۵ سانتیمترمربع یك وزنهٔ آهنی به وزن ۳۹۰ گرم می‌آویزیم . این مجموع درداخل‌آب‌طوری‌شناورمی‌ماندکه۱۶ سانتیمتر از استوانه درداخل آب قراردارد . حال وزنه رااز‌ته استوانه‌جدا کرده و درداخل آن قرار می‌دهیم . اولا وزن استوانه را پیدا کنید وبگوئید استوانه درآب پائین‌تر می‌رود یا بالا می‌آید . ثانیاً وزن مخصوص‌مایعی راتعیین‌کنید که‌درحالت اخیر ارتفاع قسمت داخل مایع همان ۱۶ سانتیمتر باشد (وزن مخصوص‌آهن ۷/۸ گرم‌برسانتیمترمکعب)

حل ـ چون استوانه و وزنهٔ مربوطه درداخل آب‌شناور هستند باید وزن‌مجموع مساوی وزن‌آب هم حجم قسمت‌غوطه‌ور باشد یعنی اگر وزن خود استوانه رابه m نمایش دهیم داریم:

$$m+m'=(V+V')d$$

$$m+۳۹۰=(۲۵\times۱۶+\frac{۳۹۰}{۷/۸})$$

$$m+۳۹۰=۴۵۰gr\Rightarrow m=۶۰gr$$

وقتی وزنهٔ آهنی را از استوانه جداکرد در داخل آن نرار می‌دهیم وزن مجموع همان ۴۵۰ گرم‌است وحجم آبی که استوانه آنرا اشغال‌می‌کند ۴۵۰ سانتیمترمکعب می‌شودوارتفاع قسمت غوطه‌ورمساوی سانتیمتر $\frac{۴۵۰}{۲۵}=۱۸$ می‌گردد یعنی استوانه پائین می‌رود . برای پیداکردن وزن مخصوص مایعی که با وجود وزنه داخل استوانه‌همان ۱۶ سانتیمتر داخل آن گردد داریم :

$$۴۵۰=(۲۵\times۱۶)d'\Rightarrow d'=۱/۱۲۵gr/Cm^۳$$

۵۶/۲۳ ـ فوتبالیستی توپ فوتبالی را با ضربه‌ای که سرعت ۲۰m/s به توپ می‌دهد در امتدادی‌که با افق زاویهٔ ۳۷° می‌سازد پرتاب می‌کند . ازفاصلهٔ ۱۲ متری فوتبالیست اول نفر دومی درهمان لحظهٔ پرتاب شروع به دویدن به طرف توپ می‌کند . معین‌کنید سرعت دویدن نفردوم چقدر باشد تابه موقع به‌توپ برسد . ($sin۳۷°=۰/۶$)

حل ـ حرکت توپ یك حرکت پرتابی است وباچشم‌پوشی ازمقاومتها، برد توپ ازرابطهٔ زیرمعلوم می‌شود :

$$x=\frac{V_۰^۲ sin۲\alpha}{g}$$

$$x=\frac{۲V_۰^۲ sin\alpha\cdot cos\alpha}{g} \quad و \quad sin\alpha=۰/۶$$

$$cos\alpha=\sqrt{۱-sin^۲\alpha}=۰/۸$$

$$x=\frac{۲\times۴۰۰\times۰/۶\times۰/۸}{۱۰}=۳۸/۴m$$

فاصلهٔ نفر دوم از محل برخورد توپ با زمین مساوی است‌با :

$$۳۸/۴-۱۲=۲۶/۴m$$

زمان حرکت توپ را از روی معادلات حرکت پرتابی می‌توان محاسبه نمود :

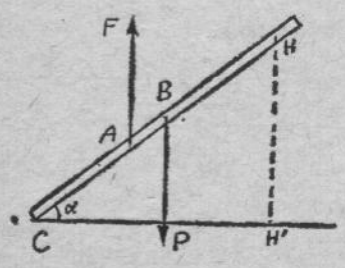
$$t=\frac{x}{V_۰cos\alpha}=\frac{۳۸/۴}{۲۰\times۰/۸}=۲/۴sec$$

$$V=\frac{۲۶/۴}{۲/۴}=۱۱m/s$$

۵۶/۲۴ ـ عصای چوبی به شکل استوانه‌که قطرآن ۲ سانتیمتر وطولش ۱۰۰ سانتیمتراست ۱۵۰ گرم وزن دارد .در انتهای آن قطعه برنجی به وزن ۱۰۰ گرم‌پیچ شده است .این عصا رادرحوضی به عمق ۵۰سانتیمتر می‌اندازیم ،عصادرحالی‌که انتهای آن به‌کف حوض تکیه دارد مایل می‌ایستد . اولا چه طولی ازعصا درآب قرار دارد ثانیاً زاویه‌ای که امتداد عصا با سطح آزاد آب می‌سازد چه اندازه است .

(ازضخامت برنج صرف‌نظرمی‌شود و $\pi=۳$)

حل ـ چون عصا درحال تعادل است‌وزن جسم ونیروی ارشمیدس نسبت به تکیه‌گاه نقش نیروی‌کارگر و مقاوم را در اهرم داردیعنی :



$$CA\times F=CB\times P$$

$$F=۲AC\times S\times d' \quad و \quad S=\pi r^۲\Rightarrow$$

$$F=۲AC\times۱\times\pi\times۱=۶ACgr \quad و \quad P=۱۵۰gr$$

$$AC\times۶AC=۱۵۰\times۵۰\Rightarrow AC=۲۵\sqrt{۲}$$

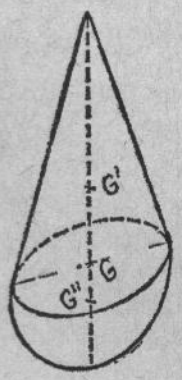
طولی از عصا که در آب قرار می‌گیرد مساوی است با :

$$2AC = 50\sqrt{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{HH'}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = 45^\circ$$

۵۶/۲۵ـ سطح دایرهٔ عظیمهٔ نیمکرهٔ فلزی به شعاع r و به وزن ۵۰۰ گرم به سطح قاعدهٔ مخروطی به شعاع r و ارتفاع $h = 2r$ چسبیده است . اگر وزن مخروط ۳۷۵ گرم و تعادل جسم حاصل از تمام نقاط نیمکره که در افق تکیه کند بی تفاوت باشد مرکز ثقل نیمکره از مرکز کره چه فاصله‌ای خواهد داشت ؟

حل ـ چون تعادل جسم نسبت به جمیع نقاط کره بی‌تفاوت است یعنی در همه حال امتداد وزن بر شعاعی که از نقطهٔ تماس میگذرد منطبق است، بنابراین محل تقاطع شعاعها که گرانیگاه کل جسم است، در مرکز



قاعدهٔ مخروط یا مرکز کره قرار دارد وچون در حال تعادل حاصل ضرب وزن هر قسمت در فاصلهٔ مرکز ثقل آن قسمت تا مرکز ثقل کل مساوی است پس :

$$GG'' \times P'' = GG' \times P'$$

$$GG' = \frac{1}{4}h = \frac{1}{4} \times 2r = \frac{r}{2}$$

$$GG'' \times 500 = \frac{r}{2} \times 375$$

$$GG'' = \frac{375 \times 1}{2 \times 500} r \Longrightarrow GG'' = \frac{3}{8} r$$

۵۶/۲۶ ـ دوجسم کروی به شعاعهای مساوی که مقاومت هوا درحین حرکت برای آنها برابر است ولی وزن یکی n برابر دیگری است، با هم ازیك ارتفاع رها می‌شوند. ثابت کنید گلولهٔ سنگینتر زودتر به زمین می‌رسد .

حل ـ فرمول اساسی دینامیك را برای حرکت سقوطی جسم با درنظرگرفتن نیروهای مقاومت هوا و رانش می‌نویسیم برای جسم سبکتر داریم :

$$P - (R + Va) = \frac{P}{g}\gamma$$

(Va نیروی رانش و R مقاومت هواست و γ شتاب سقوطی جسم)

برای جسم سنگینتر داریم :

$$nP - (R + V\alpha) = \frac{nP}{g}\gamma'$$

(نیروی رانش به علت مساوی بودن حجم هر دو جسم مساویست)

مجموع مقاومت هوا و رانش را R' می‌نامیم پس :

$$(1) \quad P - R' = \frac{P}{g}\gamma \Longrightarrow \gamma = g\left(1 - \frac{R'}{P}\right)$$

$$(2) \quad nP - R' = \frac{nP}{g}\gamma' \Longrightarrow \gamma' = g\left(1 - \frac{R'}{nP}\right)$$

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) معلوم می‌شود که $\gamma' > \gamma$ و بنابراین شتاب عملی جسم سنگینتر بیشتر از جسم سبك است و زودتر می‌رسد .

۵۶/۲۶ ـ ازاثر ازن برمحلولی ازیدور پتاسیم مقداری گرما تولید می‌شود. ازواکنش پراکسید ئیدرژن بریدور پتاسیم مقدار گرمای کمتری تولید می‌شود . اختلاف مقدار گرمای این دو واکنش برای یك ملکول گرم یدورپتاسیم ۴ کالری و گرمای تجزیهٔ پراکسید ئیدرژن ۲۱/۶ کالری می‌باشد .

گرمای تشکیل ازن را محاسبه کنید .

حل ـ ازن یدورپتاسیم را طبق واکنش زیر اکسیدمی کند:

$$O_3 + 2KI + H_2O \rightarrow \quad (1)$$
$$2KOH + I_2 + O_2 + \alpha \text{ کالری}$$

واکنش پراکسید ئیدرژن با یدورپتاسیم نیز چنین است :

$$H_2O_2 + 2KI \rightarrow 2KOH + I_2 + \beta \text{ کالری} \quad (2)$$

درهریك ازاین دوواکنش دوملکول گرم یدورپتاسیم شرکت دارد بنابراین خواهیم داشت :

$$\alpha - \beta = 4 \times 2 = 8 \text{ کالری}$$

هرگاه گرمای تشکیل ازن با x نشان دهیم خواهیم داشت:

$$O_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow O_3 + x$$

برای محاسبهٔ x ، خاطرنشان می‌سازیم که واکنشهای (۱) و (۲) ازنظر تئوری دردومرحله انجام می‌شوند :

$$\begin{cases} O_3 \rightarrow O_2 + \frac{1}{2}O_2 - x \\ O_2 + \frac{1}{2}O_2 + 2KI + H_2O \rightarrow \quad (4) \\ \qquad (2KOH + I_2 + O_2) + y \end{cases}$$

در آنجا :

$$\alpha = y - x$$

به همین ترتیب درمورد واکنش (۲) می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} H_2O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2 + ۲۱/۶ \text{ کالری} \\ H_2O + \frac{1}{2}O_2 + 2KI \rightarrow (2KOH + I_2) + y \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت : $\beta = ۲۱/۶ + y$

از معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که :

$x = -۲۱/۶ - (\alpha - \beta)$ یا $\alpha - \beta = -x - ۲۱/۶$

$\alpha - \beta = ۸$ یا $x = -۲۹/۶$

۵۶/۲۷ ـ گرمای خنثی شدن یك مولکول گرم اسید نیتریك بوسیلهٔ سود ۱۳/۷ کیلوکالری و گرمای خنثی شدن یك مولکول گرم اسید دی‌کلرواستیك بوسیلهٔ همین باز ۱۴/۸ کیلوکالری است . هرگاه یك مولکول گرم سود را به محلول رقیقی که شامل یك اکی والان گرم از هریك از این دو اسید است بیفزائیم ۱۴ کیلوکالری گرما تولیدمی‌شود . تعیین کنید که سود به چه نسبتی بین این دو اسید تقسیم می‌شود .

حل ـ یك اکی والان‌گرم $NaOH$ معادل است با یك ملکول‌گرم آن :

یك اکی والان گرم HNO_3 معادل است با یك ملکول گرم آن .

یك ملکول گرم ازهریك از سه جسم مزبوررا با یکدیگر مجاور می کنیم. یك اکی والان‌گرم سود درمقابل‌دواکی‌والان‌ـ گرم اسید قرار می‌گیرد . وبین آندوتقسیم می‌شود .

هرگاه x معرف کسری ازملکول گرم سودباشدکه بوسیلهٔ HNO_2 خنثی می‌شود، $(۱ - x)$ کسری ازملکول گـرم سود خواهد بودکه بوسیلهٔ $HOOC - CHCl_2$ خنثی می‌شود.

مقدارگرمای حاصل ازواکنش :

$$HNO_2 + NaOH \rightarrow NaNO_2 + H_2O$$

برابر $۱۳/۷x$ کیلو کالری وگرمای حاصل از واکنش :

$$HOOC - CHCl_2 + NaOH \rightarrow NaOOC - CHCl_2 + H_2O$$

برابر $۱۴/۸(۱ - x)$ کیلوکالری‌می‌باشدچون‌مقدارکل گرما ۱۴ کیلوکالری‌است ازاینرو می‌توان نوشت .

$$۱۳/۷x + ۱۴/۸(۱ - x) = ۱۴$$

از آنجا : $x = \frac{۰/۸}{۱/۱} = ۰/۷۳$

رابطهٔ بین تعداد ملکول گرم سودکه بوسیلهٔ این دواسید خنثی شده است برابراست با :

$$P = \frac{x}{۱ - x} = \frac{۰/۷۳}{۰/۲۷} = ۲/۷$$

توابع اولیهٔ (بقیه ازصفحهٔ ۶۳۷)

۴) $y = \frac{۴x^3 - ۳x^2 - ۲}{(x+۱)^2(x^2 - x + ۱)^2}$

۵) $y = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^2}}$ ۶) $y = \sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$

۷) $y = \frac{x^5 + ۲}{x^3 - ۱}$ ۸) $y = \frac{۱}{x^2 - a^2}$

۹) $y = \frac{۱}{ax^2 + bx + c}$ ۱۰) $y = \frac{۲(x^2+۱)}{(x-۱)(x^2-۱)}$

۱۱) $y = \frac{x^4 + x^3 - ۲x^2 + ۲x + ۳}{x^3 + x^2 - ۲x}$ ۱۲) $y' = \frac{x^3 + y^2}{xy}$

۱۳) $y = x \sin x$ ۱۴) $y = \sin\sqrt{x}$ ۱۵) $y = \sin\sqrt[3]{x}$

۱۶) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + ۱ + \sqrt{(x^2+۱)^3}}}$

(بقیه ازصفحهٔ ۶۷۷)

Solutions : The wording of the problem implies that we consider the surface to be fixed and the cylinder and ruler to be moving. But since we are considering only the relative positions of points on these three objects, we may suppose that the cylinder is fixed but able to rotate about O, and that the surface and ruler are moving. If the cylinder rotates and point A on the ruler moves x units relative to O, then the surface must also move x units relative to O, but in the opposite direction. Thus, while the displacement between O and the surface is x units, that between A and the surface is 2x units, or twice as much.

حد طرفین را به‌ازاء $x=0$ حساب می‌کنیم .

$$\lim_{x\to 0} \sin(x-\frac{\pi}{5})\sin(x-\frac{2\pi}{5})\sin(x-\frac{3\pi}{5})\times$$

$$\times \sin(x-\frac{4\pi}{5}) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{16\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\frac{\sin 5x}{5x}}{16\frac{\sin x}{x}} = \frac{15}{16}$$

$$(-1)^4 \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$$

مثال ۳ـ درستی اتحاد زیررا تحقیق کنید :

$$\sin 5^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 85^\circ = \frac{1}{64}$$

حل ـ بااستفاده ازبسط $\sin 6x$ به‌ازاء $x=5$ ورابطهٔ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin 6x = -32\sin x \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(x-\frac{3\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{4\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\sin 30^\circ = -32\sin 5\sin -25^\circ \sin -55^\circ \sin -85^\circ$$

$$\sin -115^\circ \sin -145^\circ$$

$$\sin 115^\circ = \sin 65^\circ \quad \text{و} \quad \sin 145^\circ = \sin 35^\circ$$

$$\sin 5\sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 85^\circ = \frac{1}{64}$$

مثال ۴ـ مطلوبست محاسبهٔ مقدار عددی A از رابطهٔ زیر :

$$A = \frac{1}{8}(2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - 2\cos 60^\circ \cos 80^\circ -$$

$$-2\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \cos 160^\circ + 1)$$

$$A = \frac{1}{4}(\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \cos 80^\circ -$$

$$-\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \cos^2 80^\circ)$$

$$A = \frac{1}{4}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)(\cos 20^\circ - \cos 80^\circ) =$$

$$= \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

با استفاده از بسط $\sin 3x$ به ازاء $x=10^\circ$ خواهیم داشت :

$$\sin 3x = 4\sin x \sin(x-60)\sin(x-120^\circ)$$

$$\sin 30^\circ = 4\sin 10^\circ \sin -50^\circ \sin -110^\circ$$

$$\sin^2 30^\circ = 4\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{16}$$

تمرین

درستی اتحادهای زیررا تحقیق کنید .

۱) $\sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 85^\circ = \frac{1}{16}$

۲) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{17\pi}{24} = \frac{1}{16}$

۳) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30} = \frac{1}{16}$

۴) $\sin 3^\circ \sin 33^\circ \sin 42^\circ \sin 57^\circ \sin 78^\circ \sin 87^\circ = \frac{1}{64}$

۵) $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7} = \frac{7}{64}$

۶) $\cos 20 + \cos 100 - \cos 40 - \cos 20\cos 100 +$

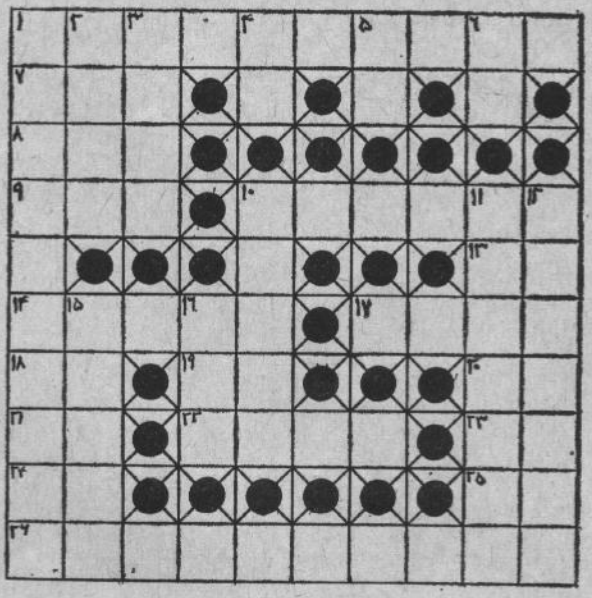
$$+\cos 20\cos 40 + \cos 100\cos 40 - \cos 20\cos 40\cos 100 = \frac{7}{8}$$

۷) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} =$

$$= \frac{n}{(-2)^n - 1}$$

جدول اعداد

طرح از: بهروز فرهنگ، سروش صادقیان



افقی: ۱ـ پنج برابر مجموع ۸۵۴ جمله ازسری:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

۷ـ رقمهایش متوالی‌اند واگررقم یکانش را ازآن‌کم‌کنیم عدد حاصل‌مجموع ۳۹جمله ازسری زیر می‌باشد:

$$1+2+3+\ldots+n$$

۸ـ اگر ۷ واحد از آن کم‌کنیم جملهٔ بازدهم سری با جملهٔ عمومی $4n(n+1)$ بدست‌آید. ۹ـ توان‌چهارم‌یك‌عدد زوج است واگررقم سدگان آنرا حذف‌کنیم درمقدار عدد تغییری حاصل نشود. ۱۰ـ عددی است به صورت $\overline{aabaab}$ که‌اگر مقلوب‌شود پنج رقمی گردد وچون‌بین عددیك وعدد ۹۰ به‌تعداد $\overline{aa}$ واسطهٔ حسابی درج کنیم سلسلهٔ اعداد طبیعی بدست‌آید.

۱۳ـ مقلوب عدد۲۰ افقی. ۱۴ـ چون با عدد۴۹۸۹۴جمع‌شود عددی‌شش‌رقمی‌بدست‌آیدکه درنوشتن‌آن فقط یك رقم‌بکارمی‌رود. ۱۷ـ متمم‌حسابی عددمابعدآن ۴۰۰۴است. ۱۸ـ مقلوبش شمارهٔ دهگان عدد۷ افقی است. ۱۹ـ مقلوبش جذرعدد۹ افقی‌است. ۲۰ـ توان چهارم عددی است و ازعدد ۹ افقی بزرگتر است. ۲۱ـ مقلوب مجموع رقمهای عدد۱ افقی. ۲۲ـ جملهٔ هشتم از سری زیر:

$$2\times4\times6+4\times6\times8+6\times8\times10+\ldots$$

۲۳ـ اگر ده واحد از آن کم‌کنیم $\frac{5}{8}$ عدد۲۵ افقی بدست‌آید.

۲۴ـ حاصل‌جمع‌عدد ۲۰ افقی با جذر آن. ۲۵ـ تکراریك‌رقم ۲۶ـ مجموع۳۸۰ جمله‌ازسری:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

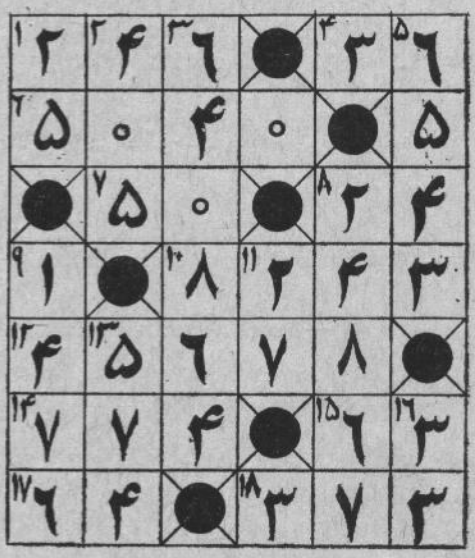
قائم: ۱ـ مجموع $\overline{aba}$ جمله‌ازسری:

$$1\times3\times5+3\times5\times7+5\times7\times9+\ldots$$

۲ـ مقلوبش‌ده برابر توان هفتم یك‌عدد است. ۳ـ مجموع عددهای طبیعی ازیك تا عدد ۴ قائم. ۴ـ همان‌عدد ۲۵ افقی. ۵ـ توان پنجم عددی است. ۶ـ مجموع رقمهایش باعدد۹افقی برابراست. ۱۰ـ مجموع رقمهایش ۳۱است. ۱۱ـ ده برابر جملهٔ‌چهل‌وپنجم ازسری:

$$1\times6\times10+3\times8\times12+5\times10\times14+\ldots$$

۱۲ـ رقم یکان‌آن مضرب‌کلیهٔ اعداد است و درعین حال عددی است متقارن‌که مجموع‌رقمهایش۲۷است ۱۵ـ پنج‌رقم‌اول عدد ۱قائم. ۱۶ـ اگر۲۴ واحد ازآن کم‌کنیم با اینکه ۲۴واحد به‌آن اضافه‌کنیم درهردوحال‌عددی مربع‌کامل بدست‌آید.



حل جدول شمارهٔ پیش

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 48 – Prove that a positive integer greater than nine, all of whose digits are alike, cannot be a perfect square. Tables of squares may be used.

Solution 1: Of numbers of more than one digit, those made up entirely of 2's, 3's, 7's, or 8's cannot be squares because of their last digits. Numbers made up entirely of 1's, 5's, or 9's cannot be squares because they are of the form 4n–1. This can be shown by adding 1 in each case and observing that the last two digits form a multiple of 4.*

Numbers made up entirely of 6's cannot be squares because they contain the factor 2 just once, whereas in a square a prime factor must be contained an even number of times. This leaves numbers made up entirely of 4's, which cannot be squares because $4\cdot111\cdots$ is the product of a square by a non-square.

* Editor's comment: Every odd number is of the form $2a+1$. Its square is $4(a^2+a)+1$, which cannot be of the form $4n-1$.

Any number can be represented by $a+10b+100c+\cdots$, in which $100c+\cdots$ is at once seen to be divisible by 4. Hence if $a+10b$, that is, the number formed from the last two digits, is divisible by 4, the entire number is divisible by 4.

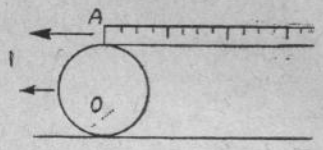
Solution 2: A table of squares shows that except for 00, 44 is the only ending of a square with two final digits that are alike, and that the numbers whose squares end in 44 must have final digits: 12, 38, 62, or 88. The square of a number ending in 12 is obtained thus:

$$\begin{array}{r} \cdots x12 \\ \cdots x12 \\ \hline \cdots(2x)\,24 \\ \cdots\quad 1\;\underline{2} \\ \cdots\;2x \\ \cdots \\ \hline (4x+1)44 \end{array}$$

Since $4x+1$ cannot end in 4, the number $(\cdots12)^2$ cannot end in all 4's.

Editor's comment: The other cases —not all as easy as the above—are left to the reader.

Problem 49: Place a ruler and a cylindrical object, such as a spool or pencil, on a flat surface, as in Fig. 6. Move the ruler to the left keeping it parallel to the surface, thus rolling the cylinder also to the left. Compare the distance that A on the ruler and center O of the circle move. Do this for various distances and radii. What formula relating these distances is suggested by your data? Explain how you might have predicted this on mathematical grounds.



(دنباله پائین صفحهٔ ۶۷۴)

فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ پنجم

سرمقاله‌ها

برنامهٔ نو، کتاب نو، اماروش تدریس کهنه ۱
پرونده‌ای درشورای عالی آموزش وپرورش ۶۵
انجمن‌ملی پیگیری درنوسازی برنامه‌های آموزشی ۱۲۹
پیشنهاد تشکیل انجمن ریاضی ۲۰۹
اجابت دعوت استاد ۲۷۳
استقبال ازتشکیل انجمن ریاضی ۳۳۷
گفتگوها ۵۵۳

مباحث آموزشی

نقدی برروش آموزش شیمی ۷۰
لزوم حذف‌قسمتهائی‌ازبرنامهٔ‌ریاضی ۴۱۷
نقدی برانتقاد ۴۸۹
حذف ترسیمی ازکنوردانشگاه ۵۵۵
نهضت جهانی نوسازی برنامه‌های ریاضی ۶۱۷
ناپیوستگی دوره‌های متوسطه و دانشگاه ۶۲۱

مقالات تحقیقی

دربارهٔ مسائل حل نشده ۶۷
پژوهشی درمسئلهٔ چهاررنگ ۷۱
دربارهٔ یك مسئلهٔ می‌نیمم ۲۷۹
دربارهٔ حل‌معادلهٔ $x^a + y^b = z^c$ ۴۲۵
راههای تازهٔ اثبات قضیهٔ فیثاغورس ۵۶۹
تعمیمهای قضیه‌های استورم ولایب نیتزوپاپوس ۶۲۵
معادلهٔ شکلهای مختلف هندسی ۳۴۴-۴۳۰-۴۹۸-۵۶۳

بررسی وانتقادکتاب

دربارهٔ انتقاد از کتابهای درسی ۳
بررسی کتاب سرگرمیهای هندسه ۲۱۰
بررسی کتاب مسابقات فیزیك شوروی ۴۲۲

گوشه‌هایی از تاریخ ریاضیات

روش‌خیام درحل معادلات درجهٔ سوم ۱۰
راههای اثبات فرمول هرن ۲۶
محاسبهٔ محیط دایره ۷۵
زنان ریاضیدان ۲۷۴

ریاضی مدرن ومطالب برنامه‌های جدید

هندسهٔ مقدماتی ۵۴-۱۲۲-۲۰۱-۲۶۲-۳۲۵-۶۰۹
دایرةالمعارف ریاضی‌جدید ۴۱۹-۴۹۲-۵۵۷
مقدمات آمار ۵۷-۱۲۵-۲۰۳-۲۶۵-۳۲۹-۴۸۵-۵۴۶-۶۰۷

مقاله‌های گوناگون

اعداد مصور ۱۵
ترسیم با خط‌کش تنها ۲۲۹
محاسبهٔ π به‌کمك سریها ۲۳۰
دستگاههای مثلثاتی نوین ۲۸۳
کاربرد عددنویسی درپایهٔ ۲ در پیامهای رمزی ۲۸۷
منحنیهای باعرض ثابت ۴۲۸
استخراج ریشهٔ nام اعداد ۴۳۶
تبدیلات تشابهی ۵۷۲
تعمیم یك پارادوکس مشهور ۶۳۲

مقالات علوم تجربی

تشعشعات کیهانی ۴
ساختمان شیمیائی‌ماده وخواص ماده ۸۱-۱۳۲-۲۱۳-۳۴۱-۴۹۵-۵۶۱-۶۲۳
تعریف محلول تامپون ۱۴۲
حرکات سادهٔ یك جسم صلب ۲۲۱

درحاشیهٔ برنامهٔ ریاضیات متوسطه

چند نامساوی در مثلث ۲۳
قضایائی درمورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث ۸۵
خواص چند ضلعی‌کامل ۸۶
راههای مختلف اثبات قضیه‌ای درمورد چهارضلعی محیطی-

محاطی ۱۳۹
نمایش هندسی تابع قدرمطلق ۱۴۴
نتایجی ازقضیهٔ بطلمیوس ۲۲۷
معادلهٔ متوازی‌الاضلاع ۲۳۱
معادلهٔ چهارضلعی ۲۸۵
دربارهٔ محاسبهٔ تعداد جمل تصاعد حسابی ۲۸۸
محاسبهٔ تفاضل قوای متشابه ریشه‌ها ۲۸۹
حالتهای خاص قضیهٔ استورم ۳۴۸
نامساویها بین ضرایب وریشه‌های معادلات ۴۲۶
محاسبهٔ توابع اولیهٔ بعضی ازتوابع ۵۰۵-۶۳۵
اثبات حالت کلی دواتحاد مثلثاتی ۶۳۰
اثبات بعضی اتحادهای مثلثاتی با استفاده ازبسط $\sin nx$ ۶۳۱

درسی از حساب

قضایائی درنظریهٔ اعداد. ۲۴
دربارهٔ مقسوم‌علیه‌های یك عدد ۲۱۸
بخش‌پذیری بر $\overline{a1}$ ۲۴۰
ه جموع قوای متشابه مقسوم‌علیه‌های یك عدد ۳۶۴

چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی

۲۹-۸۸-۱۴۶-۲۳۵-۲۹۱-۳۵۰-۵۷۵-۶۳۸

راهنمای حل مسائل ترسیمی هندسه

۳۲-۹۱-۲۳۸-۲۹۵-۳۵۳-۴۳۷-۵۱۱-۵۷۸-۶۴۲

پرسش و پاسخ

۱+۴۱۶-۱۳۸-۱۱

از میان نامه‌های رسیده

۶۱۲-۳۳۹-۲۱۷-۱۴۲-(۱-۲۷۳)

کتابخانهٔ یکان

۱+۶۱۶-۴۶۵-۳۶۰-۳۴۱-(۲+۳۳۶)-۲۳۷-۱۳۱-۱۴

جدول اعداد

۶۲-۱۲۸+۱-۲۰۸+۱-۲۷۲+۱-۳۳۵-۴۱۵
۴۸۷-۵۵۱-۶۱۵-۶۷۶

Problems & solutions

۶۴-۲۰۸-۲۷۲-۳۳۶-۴۱۶-۴۸۸-۵۵۲-۶۱۶-۶۷۷

مسائل

مسائل از استاد هشترودی برای دانش‌آموزان

۱۰۶-۱۵۰-۲۴۲-۳۰۴-۳۵۶

مسائل مشهور و مسائل نمونه

مسئلهٔ بز و چراگاه ۳۷
مسئلهٔ اصلی مالفاتی ۲۲۲
میدان چرخان ۳۹
خط منصف محیط و مساحت چهارضلعی ۱۰۴
خاصیتی از دایرهٔ محیطی مثلث ۱۵۲
یك مسئلهٔ مسابقهٔ بین آمریکا و کانادا ۲۴۵
مسئلهٔ لوکاس ۳۰۸
مسئلهٔ اردوس ۳۵۹
تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم ۴۶۵
مسئلهٔ هرمیت ۵۲۲

مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

سه‌ماههٔ اول سال تحصیلی ۴۷-۴۶ ۱۵۳
سه‌ماههٔ دوم » » » ۳۶۱
سه‌ماههٔ سوم » » » ۴۴۵

مسائل برای حل

۴۱ - ۱۰۸ - ۱۸۴ - ۲۴۶ - ۳۰۹ - ۳۹۴ - ۴۶۶-۵۲۳-
۵۸۶ - ۶۵۰

حل مسائل

یکان شمارهٔ ۴۶ ۴۵
» » ۴۷ ۱۱۳
» » ۴۸ ۱۸۸
» » ۴۹ ۲۵۱
» » ۵۰ ۳۱۳
» » ۵۱ ۳۹۹
» » ۵۲ ۴۷۱
» » ۵۳ ۵۲۷
» » ۵۴ ۵۸۹
» » ۵۵ ۶۵۳
» » ۵۶ ۶۶۴

فهرست مندرجات یکان سال ۱۳۴۷

شرط لازم وکافی برای توفیق درامتحانات ۱
نقدی برسؤالهای امتحانی ۳

حل مسائل ریاضی ، فیزیك وشیمی امتحانات نهائی ۱۳۴۷

کلاس ششم طبیعی ، خرداد ۶
کلاس ششم طبیعی ، شهریور ۱۲
کلاس ششم ریاضی، خرداد ۱۸
کلاس ششم ریاضی، شهریور ۳۱

حل مسائل ریاضی ، فیزیك وشیمی امتحانات ورودی سال ۱۳۴۷

دانشگاه تهران ۴۴
دانشگاه صنعتی آریامهر ۶۳
دانشکدهٔ پلی‌تکنیك ، تیرماه ۷۳
دانشکدهٔ پلی‌تکنیك ، دی‌ماه ۷۶
دانشگاه تبریز ۹۱
دانشگاه مشهد ۹۷
دانشسرای عالی ۱۰۵
هنرسرای عالی ۱۱۰
دانشکدهٔ نفت‌آبادان ۱۲۶
نیروی دریائی شاهنشاهی ۱۲۷
مدرسهٔ عالی پارس ۱۲۹
مدرسهٔ عالی بازرگانی ۱۳۵
دانشکدهٔ معماری دانشگاه ملی ۱۳۶
مؤسسهٔ آب شناسی ۱۳۸

نمونه‌ای از سؤالهای امتحانات نهائی

کشور فرانسه ۱۳۹
انستیتو تکنولژی اسرائیل ۱۶۴
دومسئله از باکالورآ فرانسه ۱۶۶
مسائل مثلثات G.C.E انگلستان ۱۶۹
مسائل فیزیك » » » ۱۷۲

فهرست مندرجات ضمیمه یکان سال ۱۳۴۷ برای دانش‌آموزان سال‌سوم دبیرستانها

دانستنیها از ریاضی جدید ۱
خاطرات یك دانش‌آموز فرانسوی ۳
بازی با اعداد ۳
مراحل تاریخی اثبات یك قضیه ۴
شکل جای رقم ۵
بازی با اشکال ۵
یك مربع وفقی و خواص آن ۶
چند راهنمائی درحل مسائل ۷
مسائل برای حل ۱۰
خرگوش پرجوش وخروش ۱۲
مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات داخلی دبیرستانها ۱۳
مسائل کنکور دانشسراهای مقدماتی‌فرانسه ۲۹
خواندن اعداد بزرگتر از میلیون ۳۱

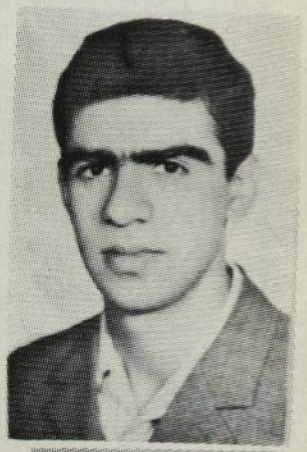
فهرست مندرجات مجموعهٔ علمی یکان سال

که در تاریخ فروردین ۱۳۴۴ منتشرشده واکنون نسخه‌هایی‌ازآن با بهای ۶۰ ریال برای فروش‌موجود است

پرورش ریاضیدان	جهانگیرشمس‌آوری	شیمی	ترجمهٔ مهندس نهورای
ریاضیات	ترجمهٔ جهانگیرشمس‌آوری	مسائل فکری	دکترمحسن هشترودی
بنیان ریاضیات جدید	دکترمحسن هشترودی	تقویم قمری دائمی	–
دومسئلهٔ فکری	–	نوبل	ترجمهٔ محمود روح‌الامینی
نجوم	ترجمهٔ احمدبیرشك	فهرست‌اسامی برندگان جایزهٔ نوبل	»
اخترهای متناوب	دکترمحسن هشترودی	بازی با اعداد	–
چهاردقیقه مبارزه	ترجمهٔ دکترعلاء کیائی	حل‌مسائل‌نمونه	رزاقی– شیخان– قراگزلو –مصحفی
مربعهای سحری ممتاز	دکترمحسن‌هشترودی	مسائل برای حل	ترجمهٔ مدغم
فیزیك	ترجمهٔ پرویز نیکخواه	مسائل برای تحقیق	–
علائم فیزیکی بین‌المللی	هوشنگ شریف‌زاده	یادداشتهایی از التفهیم	–
آیا اززمین پرت می‌شویم	ترجمه	امیرمقتدر	ترجمهٔ مصحفی

دانش‌آموزان رتبهٔ اول و دوم امتحانات نهائی کلاسهای ششم

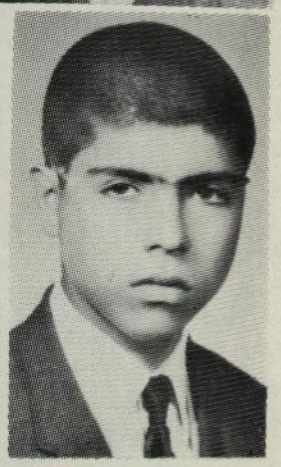
استان اصفهان



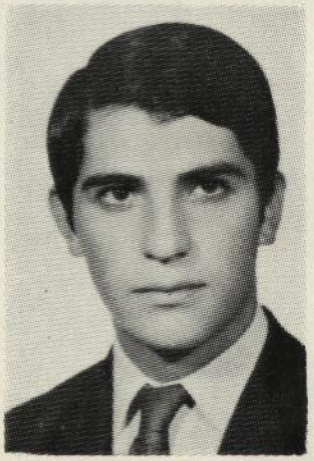
سیدمحمد حسین فاطمیه
رتبهٔ اول ششم ریاضی
معدل کتبی ۱۸٫۷۹
معدل کل ۱۸٫۹۲
از دبیرستان ادب اصفهان



فریبرز حکمی
رتبهٔ اول ششم طبیعی
معدل کتبی ۱۹٫۰۶
معدل کل ۱۹٫۱۵
از دبیرستان سعدی اصفهان



مهدی عطریان
رتبهٔ دوم ششم ریاضی
معدل کتبی ۱۸٫۶۱
معدل کل ۱۹٫۵۸
از دبیرستان ابن سینا اصفهان



حمیدرضا مدرس‌صادقی
رتبهٔ دوم ششم طبیعی
معدل کتبی ۱۸٫۸۸
معدل کل ۱۸٫۹۶
از دبیرستان سعدی اصفهان

نمایندگی فروش یکان دراصفهان : کتابفروشی امید

انتشارات یکان (آنچه فعلا برای فروش موجود است)

مجموعهٔ علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل مسائل ممتاز ریاضی ومطالب دیگر
۶۰ ریال

روش سادهٔ

حل مسائل شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
۲۰ ریال

مسائلی از حساب استدلالی

تألیف محمود کاشانی

جلد اول : مسائل جمع و تفریق — چاپ دوم ۱۲ ریال
جلد دوم : مسائل ضرب — چاپ دوم ۱۵ ریال
جلد سوم : مسائل تقسیم — ۱۵ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ : پرویز شهریاری
۶۰ ریال

مقدمه بر تئوری مجموعه‌ها

تألیف : علی‌اصغر هومانی
۵۰ ریال

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف : دکتر محسن هشترودی

نسخه‌های محدودی فقط برای تکفروشی ۱۲۰ ریال

معماهای ریاضی ـ راهنمای ریاضیات متوسطه فعلا برای فروش موجود نیست

چاپ دوم یکان سال ۴۶

بها : ۵۰ ریال

یکان سال ۴۷

بها : ۷۰ ریال

ضمیمهٔ یکان سال برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم

بها : ۱۲ ریال