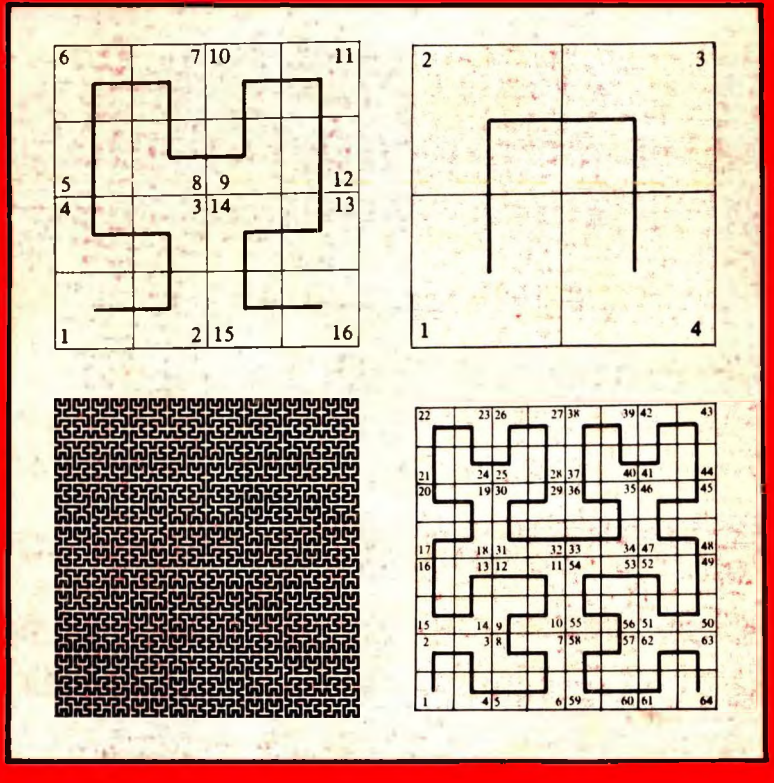
جنگ ریاضی دانشجو

جهاد دانشگاهی

دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران



جلد چهارم، مرداد ۱۳۶۸

جُنگ ریاضی دانشجو

□ جنگ ریاضی دانشجو به‌کوشش جمعی از دانشجویان گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، هرسال ۳ شماره منتشر می‌شود.

□ هدف از انتشار جنگ، ایجاد انگیزه و فراهم ساختن محیطی مناسب برای فعالیتهای فوق‌برنامهٔ دانشجویان و علاقه‌مندان ریاضی، غنی کردن منابع مقاله‌های توصیفی-آموزشی به‌زبان فارسی، معرفی فعالیتهای مستقل وجالب توجه دانشجویان رشتهٔ ریاضی، وایجادارتباط مؤثر میان دانشجویان این رشته است.

□ مقاله‌های جنگ بیشتر توصیفی‌انـد، و قالب «قضیه-لم- برهان» در وهلهٔ اول مورد نظر نیست. این مقاله‌ها زمینه‌های تخصصی ریاضیات همچون آنالیز، جبر، هندسه وتوپولوژی، و زمینه‌های عمومیتری چـون تاریخ، فلسفه، و آموزش ریاضیات را دربرمی گیرند.

□ مخاطبین جنگ دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی هستند.

□ در مورد مقاله‌های ارسالی توجه به‌نکته‌های زیر لازم است:

۱. مقالهٔ ارسالی بایدمطابق با چارچوب‌پیشگفته باشد.

۲. مقاله تألیفی و یاترجمهٔ دقیق متن اصلی‌باشد؛ ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود.

۳. متن اصلی مقالهٔ ترجمه‌ای همراه بـا ترجمه فرستاده شود. همچنین شرح شکلها درصفحهٔ جداگانه‌ای ترجمه شود.

۴. مقاله‌ها روی کاغذ A_4 ماشین شده یا به‌طور کاملاخوانانوشته شود. طول مقاله از ۳۰ صفحهٔ دست‌نوشت تجاوزنکند و درهرصفحه بیش‌از ۱۵ سطرنوشته نشود.

۵. هیئت تحریریه در رد، حك، واصلاح مقالهٔ ارسالی آزاداست، وهرگونه‌تغییری به‌اطلاع فرستندهٔ مقاله خواهد رسید، ودر هرصورت مقالهٔ ارسالی پس فرستاده نخواهد شد.

مدیرمسؤول: بهزاد منوچهریان

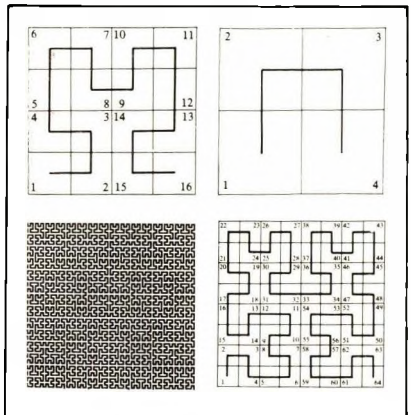
استاد مشاور: غلامرضا برادران خسروشاهی

زیرنظرهیأت تحریریه: شاهین آجودانی نمینی
امیر اکبری مجدآباد نو
ناصر بروجردیان
سعید ذاکری
فرشته ملك
بهزاد منوچهریان

مسؤول فنی وصفحه‌آرا: نادر کثیری

ناشر: جهاد دانشگاهی‌دانشکدهٔ علوم دانشگاه‌تهران
حروفچینی: عبدی
جلد چهارم، مرداد ۱۳۶۸
بها ۴۰۰ ریال

نقل مطالب با ذکرمأخذ آزاد است.



چند تقریب اولیه برای خم فضاپرکن هیلبرت

مقالهٔ«چندضلعیهای تقریبی برای...» را ببینید.

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

پس ازصدمین جلسه

مقاله‌ها

ترتیبهای جزئی وحدود مور-اسمیت	ادوارد جیمز ملک‌شین	۱
خمهای بیضوی	تونی هورووینس	۱۵
اتحادهای افرازی ـ از اویلر تا به‌حال	ه. ل. آلدر	۳۶
تاریخچهٔ کوتاهی ازتقلیل گاوس-یوردان	استیون آلتون و رنه‌مک‌لاگلین	۵۲
خط مماس، نه به‌منزلهٔ یك حد	ایرل بیونز	۶۸
آنالیز نااستاندارد	مارتین دیویس و روبن هرش	۸۲
آزمایشهای لایهٔ صابون برای نمایش رویه‌های مینیمال	ریچارد کورانت	۱۰۰
یك جبرتقسیم برای دنباله‌ها و حساب عملگرهای نظیرآن	لوئیس براند	۱۰۹
چند ضلعیهای تقریبی برای خمهای فضاپرکن لبگ وشولنبرگ	هانس ساگان	۱۲۱
ازهیچ تابینهایت: مسائل مبارزطلب در رده‌بندی اعداد اصلی	ریچارد فرانسیس	۱۳۱
روشی بهتر برای فشرده‌سازی تصاویر	مایکل بارنسلی وآلن اسلون	۱۳۹
حساب دیفرانسیل روی حلقه‌های مرتب	علیرضا رنجبرمطلق	۱۵۵

نکته‌ها

دو کاربردکوچك ازقضیهٔ مقدار میانگین	کامبیز محمودیان	۱۶۴
مضاعف‌کردن: حقیقی،مختلط،چهارگان، و بالاتر... خوب، شاید	روبرت مور	۱۶۷
مطلبی شگفت‌آور از هندسه	راس هانسبرگر	۱۷۱
برهانی برای تساوی رتبهٔ سطری و ستونی یك ماتریس	هانس لایبك	۱۷۴
مقسوم‌علیه‌های صفردرحلقهٔ چندجمله‌ایها	و. ر. اسکات	۱۷۵

دیدگاه

نامه‌ای سرگشاده		۱۷۷

گزارشها

گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی کشور	امیراکبری مجدآبادنو	۱۷۹
جایزهٔ عبدالسلام برای پژوهشگران جوان علوم پایه‌درجهان‌سوم		۱۸۴

فهرست موضوعی جلدهای ۱، ۲، و ۳ ۱۸۵

پس از صدمین جلسه

سلام برروح‌الله که به‌الله پیوست وامت اسلام را برای همیشه عزادارکرد. این مصیبت عظما را به‌نوبهٔ خود به‌تمام پیروان آن حضرت در سراسرجهان تسلیت عرض نموده ، باخدای خود عهد می‌کنیم که تا آخرین نفس در راهش پای بفشاریم.

شمارهٔ چهارم جنگ ریاضی دانشجو در شرایطی انتشار می‌یابد که در اردیبهشت‌امسال صدمین‌جلسهٔ هیئت‌تحریریهٔ جنگ به‌صورت‌ویژه‌ای‌باحضور تنی چند از مسؤولین جهـاد دانشگاهی دانشگاه تهران، معاونین پژوهشی و آموزشی دانشگاه و سردبیر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی و چند تـن از مدیران گروههای ریاضی دانشگاههای تهران تشکیل شد وضمن آن‌گزارشی مختصر از فعالیتهای انجـام شده تقدیم حضار شد، امیدواریم کـه نظیر این جلسات خصوصاً باحضورتمام دست‌اندرکاران نشریات ریاضی برای هماهنگی بیشتر بین‌آنها وتحکیم وتثبیت هرچه بیشتر، هرچند وقت یکبار، منعقد شود.

ازاین شماره بخشی به‌نام "دیدگاه" درمجله‌گشایش یافته‌که البته درهر شماره‌که مطلب‌داشته‌باشیم این‌بخش بارزخواهد بود. این‌بخش‌برای انعکاس نظرات مفید وسازنده درمورد مسائل آموزشی و پژوهشی ریاضیات ومسائلی از این‌باب است. همچنین دراین‌شماره فهرست موضوعی‌مطالبی‌که تاکنون در جنگهای ریاضی ۱و۲و۳ آمده است و از این پس در شماره‌های ۶و۹و مضارب ۳، فهرست موضوعی مطالب چند جنگ قبلی خواهدآمد.

با توجه به‌لزوم عاری از غلط بودن‌متون علمی هیئت تحریریه جنگ ریاضی دانشجو مُصراست‌که اغلاط چاپی مهمتر راگوشزدکند وامیدآن دارد که تمام نشریات علمی وخصوصاً ریاضی داخلی بـا محتوایی هر چه دقیق‌تر به‌خوانندگان مشتاق عرضه شوند.

در خاتمه لازم است از برادر گرامی آقـای مهندس هاشمی معاونت محترم اداری و مالی دانشگاه تهران کـه در تمام این چند شماره از بهترین مساعدت کنندگان ما در فراهم آمدن ایـن مجله بوده‌اند و همچنین ازجناب آقای میرزاده معاونت اجرایی نخست وزیرمحترم، تشکرفراوان نماییم.

من‌الله التوفیق
جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم
دانشگاه تهران

ادوارد جیمز مك‌شین

ترتیبهای جزئی و حدود مور-اسمیت•

ترجمهٔ سعید ذاکری

۱. مقدمه. بنیادی بودن مفهوم حد در آنالیز بر کسی پوشیده نیست. اما دانشجو، حدوداً وقتی که به‌مبحث حساب دیفرانسیل‌وانتگرال پیشرفته می‌رسد، ممکن‌است‌ازچهره‌های گوناگونی که مفهوم حد به‌خود می‌گیرد شگفت‌زده شود. قطع نظر از این حقیقت که متغیر وابسته، که عمل‌گراییدن را انجام می‌دهد، ممکن است عددی حقیقی یا مختلط یا بردار یا تابع یا هرچیزدیگری باشد، متغیرمستقل نیزمی‌تواند هریك ازچند صورت مختلف‌را اختیار کند. با این حساب، اگـر متغیر وابسته حقیقی هم باشد، باز باید همگرایی دنباله‌هایی از اعداد حقیقی، دنباله‌هـای چندگانه، توابعی از متغیرحقیقی x وقتی کـه x به x_0ای میل می‌کند، یا وقتی‌که x به‌بینهایت میل می‌کند، توابعی از چند متغیر حقیقی و... را درنظر بگیریم. البته جنبه‌ای هم در اینجا هست کـه از زحمت مـا می‌کاهد و آن اینکه همهٔ این تعاریف دسته‌بندی‌شده قویاً به‌یکدیگرشبیه‌اند. با وجوداین، هرگاه دانشجویی به‌خودبگوید که‌کاش کسی همهٔ این ایده‌های متفاوت اما مرتبط را به‌بخشهای کلیتری دسته‌بندی می‌کرد، به‌طوری کـه دیگرلازم نمی‌بود برای انواع گوناگون حد، هربار عمل تقریباً مشابهی را تکرارکرد، می‌توان او را به‌خاطر این‌فکرتبرئه‌کرد. این فکر، حتی اگردانشجوچیزی در باب دیدگاه موربه‌گوشش‌نخورده باشد، ممکن‌است برایش‌پیش‌آید؛ این دیدگاه می‌گوید که وجود تشابهات زیاد و قوی درهستهٔ نظریات گوناگون، دلالت بر وجود نظریه‌ای کلیتر داردکه همهٔ این‌نظریه‌های گوناگون را به‌عنوان حالاتی خاص دربرمی‌گیرد. لکن‌درچنین موقعیتهایی، باید نکته‌ای را علاوه برعمومیت نظریه درنظر داشت. آنچه‌که حقیقتاً در پی آنیم، روشی برای بررسی موضوع مورد بحث است‌که نه‌تنها یکپارچه، بلکـه ظریف و به‌سادگی قابل فهم باشد. حقیقت آن است‌که چنین نظریه‌ای ۲۹ سال‌است‌که پا به‌عرصهٔ وجودگذاشته‌است. شیوه‌ای‌که مور وشاگرد آن‌وقت او اسمیت برای بررسی‌حدود ابداع

• McShane E. J., "Partial orderings and Moore-Smith limits," *Amer. Math. Monthly*, 59 (1952) 1-11.

کردند[1]، توجه مرا از این‌جهت به‌خود جلب کرد که می‌توان آن‌را به‌آسانی در یك درس نظریهٔ توابع یك متغیر حقیقی یا درسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته گنجانید، به‌طوری که نه‌تنها محتوی را غنا بخشد، بلکه پیوندی مستمر میان موضوعهای مورد بحث ایجاد کند. علاوه براین، روش بررسی آنها واجد ویژگی دیگری نیز هست که برای مبتدیان مهم‌است و برای کسانی‌هم که دیگر مبتدی نیستند به‌هیچ‌وجه حقیر وکم‌اهمیت نیست: این روش خطوط کار ساده‌ترین نظریات حدی، یعنی نظریهٔ دنباله‌های همگرا، را به‌دقت دنبال می‌کند، ودر واقع، با چنان دقتی که بسیاری از برهانها را می‌توان تنها با تغییرات پیش‌پا افتاده‌ای در نمادها بازسازی کرد. بدین‌ترتیب، قضایای مربوط به‌فرایندهای حدی پیچیده‌تر همراه باقضایای ساده‌تر به‌دست می‌آیند وکوششی که برای حصول آنها لازم‌است، تنها کمی بیشتر از آن است که ساده‌ترین قضایا ایجاب می‌کند.

حال نظری به‌برخی از تعاریف حد، که ازیك دانشجوی دورهٔ کارشناسی انتظار دانستن آنها می‌رود، می‌افکنیم وسعی می‌کنیم بخشهای اساسی‌ای را که درمثالهای مختلف مشترك‌اند، مورد بررسی قراردهیم. از یك دیدگاه، می‌توانیم همهٔ تعاریف را به‌دو نوع عمده تقسیم کنیم. مثال نوع اول، حد یك تابع $f(x)$ است که برای هر x حقیقی تعریف شده، وقتی که x به x_0 میل می‌کند. به‌بیان غیردقیق، حد f برابر l است، هرگاه وقتی x نزدیك x_0 باشد، $f(x)$ به l نزدیك باشد. مثال نوع دیگر، حد یك دنباله‌است. حد f_n $(n = ۱, ۲, \ldots)$ وقتی که "n به‌بینهایت میل می‌کند" برابر l است، هرگاه برای هر n بزرگتر از n_0 معینی، f_n نزدیك l باشد. چنانچه نوع اول را تعمیم دهیم، باید ایدهٔ "x نزدیك x_0 است" را بررسی کنیم و در جستجوی مفهومی دقیق وکلی برای آن باشیم. بدین ترتیب به‌بررسی همسایگیهارهنمون می‌شویم وسرانجام به‌ایدهٔ فضای توپولوژیك می‌رسیم. تأکیدبراهمیت مطالعهٔ فضاهای توپولوژیك در اینجا کاملاً زائداست و ما فعلاً درآن مسیرپیش نخواهیم رفت. توجه ما معطوف به‌نوع دیگر حد است.

۲. مجموعه‌های جهتدار و تورها. اینك به این سؤال می‌رسیم که عناصر اساسی تعریف حد یك دنباله کدام‌اند؟ پیش ازهمه، این ویژگی که n عددی صحیح است، کاملاً بی‌اهمیت‌است؛ چراکه تعریفی ازهمان نوع را می‌توان برای حد $f(x)$، وقتی که x روی همهٔ اعداد حقیقی به ∞ میل می‌کند، به‌کاربست. اما رابطهٔ "n پس‌از n_0 است"، یا به‌زبان

---

1. Moore E. H., Smith. H. L., "A general theory of limits," *Amer. J. Math.*, 44(1922)102.

در اینجا باید از نظریهٔ حدود بسیا .جامعی هم‌که هانری‌کارتان براساس‌فیلترها ابداع‌کرده است، یادکنیم،

Cartan H., "Theorie des filtres," *C. R. Acad. Sci. Paris*, 205(1937)595-598, "Filtres et ultrafiltres," *ibid.*, 777-779.

همین نظریه را اسمیت نیز، ظاهراً به‌طور مستقل، شرح و بسط داده‌است،

"A general theory of limits," *Nat. Math. Mag.*, 12(1938)371-379.

نمادی $n_0 < n$، ازاهمیت برخورداراست. پیش ازهرچیز، این یك رابطهٔ دوتایی براعداد صحیح‌است. یعنی اگر عددی صحیح مانند n، و سپس نام $<$ برای رابطه، و بعد از آن عدد صحیح دیگری مانند m را بنویسیم، جملهٔ با معنی "$n < m$" را به‌دست می‌آوریم. دراینجا "n" مسند، "$<$" رابطه و "m" متمم‌است. این‌جمله ممکن‌است درست‌یا نادرست باشد، اما بیمعنی نیست. این‌آن چیزی‌است‌که یك رابطهٔ دوتایی برمجموعهٔ A می‌خوانیمش: R برمجموعهٔ A یك رابطهٔ دوتایی‌است، هرگاه به‌ازای عناصر a و b از A، "aRb" یك جملهٔ با معنی، خواه درست و خواه نادرست، باشد.

اما رابطه‌ای‌که بتوان آن‌را به‌مفهومی معقول به‌عنوان "پس از" درنظرگرفت، باید ویژگی دیگری هم داشته باشد. اگر a پس از b و b پس از c باشد، به‌یقین عقلانی‌است که بخواهیم a پس از c باشد. این خاصیت را "تعدی" می‌گویند. به‌طور صوری، رابطهٔ دوتایی R بر A متعدی‌است، اگرهرگاه a و b و c عناصری از A باشندکه aRb و bRc، آنگاه aRc. ما معتقدیم‌که رابطه‌های دوتایی R با این خاصیت آن‌قدرمهم هستندکه بانام "ترتیبهای جزئی" ممتاز شوند؛ بنابراین، از این‌پس یك "ترتیب جزئی" A عبارت خواهد بود از یك رابطهٔ دوتایی متعدی بر A. (ولی همهٔ ریاضیدانها برسرعبارت "ترتیب‌جزئی" روی این تعریف، یـا تعریفی دیگر، توافق ندارند.) همچنین، برای کمك به‌حافظه، تغییر کوچکی در نمادگذاری می‌دهیم: به‌جای نام مبهم و غیر مشخص R برای ترتیب جزئی، معمولاً از $<$، که یادآورخویشاوندیش با $<$ است، استفاده می‌کنیم. عبارت "$a < b$" را می‌توان "a درپی b است" خواند.

با تمام این حرفها، هنوز وظیفهٔ خود را درقبال یافتن‌همهٔ خواص اساسی به‌کار رفته درتعریف یك دنباله انجام نداده‌ایم. برای نشان دادن این مطلب، ملاحظه می‌کنیم که اگر $n < m$ را به‌معنی $m - n$ عدد زوج مثبتی‌است، تعریف کنیم، $<$ یك ترتیب جزئی‌خواهد بود. می‌توانیم تعریف حد دنباله را با جانشانی سادهٔ $<$ به‌جای $<$ تکرارکنیم و تعریفی ملموس به‌دست آوریم. اما اگر f_n را برای n زوج برابر ۰، و برای n فرد برابر ۱ تعریف‌کنیم، درمی‌یابیم‌که $f_n = 0$ برای $n < 2$، پس $\lim f_n = 0$؛ درحالی‌که $f_n = 1$ برای $n < 3$، پس $\lim f_n = 1$. این‌وضعیت به‌غایت نامطلوب است. پس بیایید به‌عقب برگردیم ونگاهی به‌برهان اینکه یك دنباله نمی‌تواند دوحد متفاوت داشته باشد، بیندازیم. فرض‌کنیم h و $k (\neq h)$ هر دو حد f_n باشند؛ ε را عدد مثبتی کوچکتر از تفاضل h و k می‌گیریم. برای هر n پس از n' معینی، فاصلهٔ f_n و h کوچکتر از $\varepsilon/2$، وبرای هر n پس از n'' معینی، فاصلهٔ f_n و k کوچکتر از $\varepsilon/2$ خواهد بود. اینك nای می‌گزینیم‌که پس‌از هردوی n' و n'' باشد. برای این n، فاصلهٔ f_n و h و نیز فاصلهٔ f_n و k کوچکتر از $\varepsilon/2$ خواهد بود و بنابراین فاصلهٔ h و k بایدکوچکتر از ε باشد؛ اما این‌با تعریف ε درتناقض است و لذا دنباله نمی‌تواند دو حد مختلف داشته باشد. چنانچه سعی‌کنیم این‌بحث را با رابطهٔ $<$ به‌جای $<$ انجام دهیم، می‌بینیم‌که گرهٔ‌کار درعبارتی‌است‌که با حروف خوابیده (ایرانیك)چاپ‌شده‌است: اگر n' زوج و n'' فرد باشد، nای نیست‌که $n < n'$ و $n < n''$. ترتیب جزئی‌ای‌که دربالا تعریف‌کردیم، دارای این خاصیت عجیب و غریب است‌که اگر

$n > m$، آنگاه n زوج است اگر m زوج باشد، و n فرد است اگر m هم فرد باشد.

بدین‌قرار، راه چاره برای اجتناب از مشکل یکتا نبودن حدود آن است که توجه خود رامعطوف به‌آن ترتیبهای جزئی‌ای کنیم که برای آنها این‌وضعیت هرگز پیش‌نمی‌آید. یعنی فرض کنیم که ترتیبهای جزئی‌مورد نظرمان واجد این خاصیت‌اندکه به‌ازای هرجفت (نه لزوماًمتمایز) ازعناصرمجموعهٔ موردنظر، عضوی در آن مجموعه هست که در پی‌هردوی آنهاست. مور و اسمیت نامی به‌این خاصیت دادندکه حالا دیگرمنسوخ شده‌است[1]، شاید به‌این‌جهت که این‌خاصیت تنها وقتی اهمیت داردکه با تعدی ترکیب شود. وقتی‌که رابطهٔ $<$ مجموعهٔ A را جزئاًمرتب‌می‌کند ونیزخاصیت فوق‌را دارد، مرسوم‌شده‌است که‌می‌گویند رابطهٔ $<$ مجموعهٔ A را "جهتدار می‌کند". بیان‌کامل آن به‌صورت زیراست:

مجموعهٔ A با رابطهٔ $<$ جهتدار می‌شود هرگاه $<$ یك رابطهٔ دوتایی بر A با خواص زیر باشد:

(۱) اگر a، b، و c عناصر A باشند، به‌طوری‌که $a < b$ و $b < c$، آنگاه $a < c$.

(۲) اگر a و b عناصر A باشند، عنصری از A چون c هست‌که $a < c$ و $b < c$.

اندکی دیگر بحث درباب اصطلاحات لازم است.ر تابعی‌که به‌هرعدد صحیح مثبت n، یك عدد حقیقی f_nرا به‌عنوان مقدار تابعی‌نسبت می‌دهد، مدتهاست‌که دنباله‌ای ازاعداد حقیقی‌نامیده می‌شود. به‌طورکلیتر، تابعی‌که به‌هر n مقدار تابعی f_n را ازمجموعه‌ای چون M نسبت می‌دهد، دنباله‌ای از عناصر M خوانده می‌شود. ما می‌خواهیم به‌تابعی‌که به هر عنصر a از یك مجموعهٔ جهتدار A، عدد حقیقی$f(a)$ را به‌عنوان مقدارتابعی نسبت‌می‌دهد، نامی بدهیم. کِلی[2] دراینجا نام "تور"ی[3] از اعداد حقیقی را پیشنهاد می‌کند؛ به‌طورکلیتر، هرگاه f تابعی باشدکه به‌هرعنصر a از یك مجموعهٔ جهتدار A، مقدار تابعی $f(a)$ را از مجموعه‌ای چون M نسبت دهد، می‌گوییم تابع f یك "تور" از عناصر M است.

۳. تعریف همگرایی. اینك در موقعیتی هستیم‌که تمامی‌نظریهٔ دنباله‌های‌همگرا را با تعویض واژهٔ "دنباله" با "تور"، علامت "$\geq$" با "$>$"، و اعداد صحیح با عناصر مجموعهٔ جهتدار A بازسازی‌کنیم. به‌عنوان مثال، تعریف حد چنین خواهد شد:

تعریف. فرض می‌کنیم $f(a)$، a در A، توری از اعداد حقیقی‌باشد و k را عددی حقیقی می‌انگاریم. در این صورت $\lim_{A \text{ در } a,\ >} f(a) = k$ بدان معنی‌است‌که به‌ازای هر ε مثبت، عنصر

---

۱. ترکیبی (compositive).

2. Kelley J. L., "Convergence in topology," *Duke Math. J.*,17(1950)277.

۳. کِلی درنامه‌ای به‌من نوشت‌که این‌واژه را نورمن استینراد، درگفتگویی میان آن‌دو و پال هالموس، پیشنهاد کرده است. خود کلی واژهٔ "گند" را می‌پسندید، که در آن صورت مشابه‌زیردنباله"زیرگذر"می‌شد! من به‌جای "تور" واژهٔ "رود" را می‌پسندم، زیرا رود با انشعابهایش مثال خوبی از یك سیستم جهتدار شده با رابطهٔ "به‌انتهای رود نزدیکتر است از" می‌باشد. اما مزیت بزرگ "تور" آن‌است‌که اول‌بار در نوشتارها ظاهر شده است.

a_εای از A هست که هرگاه $a > a_\varepsilon$، $|f(a)-k| < \varepsilon$.

برای تسهیل در امر نمادگذاری، علامتهای زیر lim را جایی که خطر اشتباه نباشد حذف خواهیم کرد. مثلاً اگر $<$ تنها ترتیب جزئی A باشد که در نظر گرفته‌ایم، از ذکر آن خودداری می‌کنیم؛ اگر همهٔ توابع مورد نظرمان در یك لحظهٔ مفروض، بر مجموعهٔ جهتدار یکسانی تعریف شده باشند، نماد را به $\lim_a f(a)$ یا حتی $\lim f$ تقلیل می‌دهیم. این شیوه برای همهٔ ما آشناست. با چنین تدابیر ساده‌ای همهٔ بخشهای اساسی نظریهٔ حدود را بازسازی می‌کنیم. مثلاً اگر $f(a)$ و $g(a)$ هردو برای هر a در یك مجموعهٔ جهتدار A تعریف شده و حقیقی و به‌ترتیب دارای حدود متناهی h و k باشند، آنگاه حد $f+g$ برابر $h+k$ خواهد بود. به‌عنوان یك قضیهٔ مهم دیگر، f را تورى از اعداد حقیقی بگیرید که بر یك مجموعهٔ جهتدار A تعریف شده و دارای این ویژگی است که هرگاه $a > a'$، $f(a) \geqslant f(a')$. (چنین تورهایی را می‌توان "یکنوای غیرنزولی" نامید، اما من فکر می‌کنم که اصطلاح "همنوا"، که از گرت بیرکاف است، ارجح باشد. نام متناظر برای تورهایی که به‌ازای $a > a'$، $f(a) \leqslant f(a')$، به‌عوض عبارت قدیمی "یکنوای غیرصعودی"، "ناهمنوا" خواهد بود.) برهان عادی برای دنباله‌ها را می‌توان در اینجا به‌کاربرد ونشان دادکه اگر f واجد خاصیت مذکور باشد، و یك کران بالای متناهی نیز داشته باشد، دارای حدی است و این حد همان کوچکترین کران بالای f خواهد بود.

می‌توانستیم اثبات محك کوشی برای همگرایی را نیز بازسازی کنیم، لکن روشی در اینجا اتخاذخواهیم کرد که می‌توان آن‌را درهرفضای متری، صرفاً باقراردادن فاصله به‌جای قدرمطلق تفاضل، به‌کار بست. فرض کنید بدانیم شرط کوشی برای همگرایی دنباله لازم و کافی‌است. $f(a)$، a در A، را تورى می‌گیریم که درشرط کوشی برای تورها صدق کند؛ یعنی برای هر ε مثبت، a_εای در A هست که هرگاه $a > a_\varepsilon$ و $a' > a_\varepsilon$ آنگاه $|f(a)-f(a')| < \varepsilon$. عناصر $a_1, a_2, \ldots$ را در A متوالیاً چنان می‌گزینیم که $a_n > a_{n-1}$ و هرگاه $a > a_n$ و $a' > a_n$، آنگاه $|f(a)-f(a')| < 1/n$. دراین‌صورت اعداد $f(a_n)$، $n = 1, 2, \ldots$، یك دنبالهٔ کوشی تشکیل می‌دهند و بنابراین دارای حدی مانند kاند. حال برای اینکه نشان دهیم حد تور نیز k است، ε را عددی مثبت و مفروض می‌گیریم و $n > 2/\varepsilon$ را چنان اختیار می‌کنیم که $|f(a_{n+1})-k| < \varepsilon/2$. اگر $a > a_n$، بنا به‌تعریف a_n خواهیم داشت $|f(a_{n+1})-f(a)| < 1/n < \varepsilon/2$، بنابراین $|f(a)-k| < \varepsilon$، و اثبات به‌انجام می‌رسد. این قضیهٔ بخصوص، کاملاً مناسب است، چه به‌یکباره همهٔ شکلهای گوناگون محك کوشی را برای همهٔ فرایندهای حدی مختلف که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و نظریهٔ توابع یك متغیرحقیقی پیش می‌آید، به‌دست می‌دهد.

اما بخشی از نظریهٔ عمومی هست که بررسی آن‌را اندکی به تعویق می‌اندازیم. منظورمان ایدهٔ زیردنباله و قضایای وابسته به‌آن است. پیش از این‌کار می‌خواهیم نظری بر چند حالت خاص بیفکنیم؛ چرا که نظریهٔ حدود را از حالت سادهٔ دنباله‌های معمولی

به‌چیزی کلیتر از آن تعمیم داده‌ایم و بنابراین طبیعی خواهد بود که لحظه‌ای بایستیم و قلمروی را که تسخیر کرده‌ایم نظاره‌گر باشیم.

۴. مثالها. برای اینکه نشان دهیم نظریهٔ مور-اسمیت فرایند حدی بخصوصی را به‌عنوان حالت خاص دربر دارد، الگوی ساده‌ای هست که اغلب از آن استفاده می‌کنیم. علامتی که برای حد استفاده می‌شود، معمولاً زیرحروف lim دارای نمادی است که به‌زبان تصویری مشخص می‌کند که متغیر مستقل در چه راستایی "می‌رود". مثلاً، حد یک دنباله، $\lim_{n\to\infty} f(n)$، حدی است که در آن "n به‌سمت بینهایت می‌رود". برای برگرداندن این نماد به‌نماد تورها، سعی می‌کنیم ترتیب جزئی‌ای برمتغیر مستقل تعریف کنیم که $a > b$ به‌معنای a از b "پیشتر رفته‌است" باشد. با این حساب، درمورد دنباله‌ها، $n > m$ باید بدین معنی باشد که m "نسبت به n به‌سوی بینهایت پیشتر رفته است"، یعنی $m < n$. در مورد حدی مثل $\lim_{x\to c} f(x)$، $x > x'$ باید چنین معنی بدهد که x نسبت به x' به c نزدیکتر شده‌است، یعنی $|x-c| < |x'-c|$. هرچند که در این مورد، این شرط معمول را که x و x' نباید برابر c باشند، اضافه می‌کنیم.

به‌عنوان نخستین آزمایشمان، تابع حقیقی fای را درنظر می‌گیریم که برمجموعهٔ A از اعداد حقیقی که کران بالای متناهی ندارد، تعریف شده است و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ را نظاره می‌کنیم، که البته در آن x به بودن در A مقید شده است. بنابرالگویی که در پاراگراف بالا به آن اشاره شد، $x > x'$ را بـه معنی $x' < x$ تعریف می‌کنیم. نشان دادن اینکه A با $<$ جهتدار می‌شود و حد مور-اسمیت $\lim_{A\ni x,\,x'<x} f(x)$ همان $\lim_{x\to\infty} f(x)$ است، به‌غایت ساده‌است. به‌عنوان نمونه‌ای کمتر بدیهی، دنبالهٔ مضاعف $f_{m,n}$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ از اعداد حقیقی را اختیار می‌کنیم. چون حد آن را وقتی که m و n، هردو، به‌بینهایت میل می‌کنند مدنظر داریم، $(m, n) > (m', n')$ را به‌معنی $m > m'$ و $n > n'$ تعریف می‌کنیم. به‌سادگی ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ همهٔ جفتهای اعداد صحیح مثبت، با این نسبت جهتدار می‌شود و حد مور-اسمیت در این حالت به $\lim_{m,n\to\infty} f_{m,n}$ تحویل می‌یابد. همین شیوه را می‌توان برای دنباله‌هایی با بیش از دو زیرنویس به‌کار بست.

فرض کنید A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی، و p عددی حقیقی باشد که در هر فاصلهٔ دلخواه از آن، اعداد $a(\neq p)$ در A وجود داشته باشد.[۱] f را تابعی حقیقی بر A می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم که $\lim_{x\to p} f(x)$ حالت خاصی از حد مور-اسمیت است. بدین‌لحاظ، $x > x'$ را به‌این معنی تعریف می‌کنیم که $|x-p| < |x'-p|$ و x و x' هیچیک برابر p نباشند. حد مور-اسمیت دراینجا به‌تعریف ε-δای معمولی تحویل می‌یابد، با این تفاوت که δها به‌شکل $|x-p|$، x در A، مقیدند. به‌سادگی دیده می‌شود که این‌محدودیت بی‌تأثیر

---

۱. به‌زبان ساده، یعنی p یک نقطهٔ انباشتگی (حدی) مجموعهٔ A باشد.ـم.

است، و لذا $\lim_{x \to p} f(x)$ مثال دیگری از نظریهٔ مور-اسمیت را می‌نمایاند. تدبیر مشابهی را می‌توان به‌همین خوبی درمورد فضاهایی با هرتعداد بعد، ودر واقع درهرفضای متری، به‌کار بست.

اینك مجموعهای بی‌ترتیب را به‌بحث می‌نشینیم، که از نظرگاه تاریخی اولین گام به‌سوی نظریهٔ مور-اسمیت است.[1] X را یك مجموعهٔ دلخواه و f را تابعی حقیقی بر X می‌گیریم. حتی در حالتی‌که X دارای یك رابطهٔ ترتیبی باشد، مثلاً وقتی که X مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است، می‌خواهیم با انتخاب تدریجی عناصر، بی‌توجه به ترتیب، مجموعهایی جزئی تشکیل‌دهیم. بدین‌لحاظ فرض می‌کنیم A مرکب ازهمهٔ زیرمجموعه‌های متناهی X باشد و به‌ازای هر a_1 و a_2 در A، $a_1 > a_2$ را بدین معنی تعریف می‌کنیم که a_1 شامل a_2 است، یعنی‌همهٔ نقاط متعلق به a_1 به a_2 نیز تعلق دارند. این مجموعه به‌وضوح جهتدار است، چه برای هر a و b در A، مجموعهٔ c مرکب از همهٔ نقاط a و همهٔ نقاط b چنان است کـه $c > a$ و $c > b$. هرگاه a در A و مثلاً مرکب از $x_1, \ldots, x_k$ باشد، $S(a)$ را برابر $f(x_1)+\ldots+f(x_k)$ تعریف می‌کنیم. این‌یك توراست، و $\lim S = k$ بدین معنی است که به هر ε مثبت، یك مجموعهٔ متناهی a_ε متناظر است، کـه هرگاه a زیرمجموعه‌ای متناهی از A شامل a_ε، و مثلاً متشکل از $x_1, \ldots, x_h$ باشد، آنگاه $|f(x_1)+\ldots+f(x_h)-k| < \varepsilon$. به‌سادگی می‌توان دیدکه درحالتی‌که X مرکب از اعدادصحیح مثبت است، $\lim S$ موجوداست، اگروتنها اگرسری $f(1)+f(2)+\ldots$ به‌طور نامشروط همگرا باشد،که دراین صورت $\lim S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

اکنون نوع دیگری ازتور را درنظرمی‌گیریم که از این‌هم جنبهٔ سنتی‌کمتری دارد. فرض‌کنید C یك خم‌مسطح باشدکه‌با معادلات $x = x(t)$، و $y = y(t)$، $a \leqslant t \leqslant b$تعریف شده‌است. می‌خواهیم به‌این ایده که طول C، به‌مفهومی، حد طول چندضلعیهای محاط در C است وقتی‌که تعداد رئوس‌آنها افزایش یابد، دقت بخشیم. از اینرو A را مجموعهٔ همهٔ چندضلعیهای محاط در C می‌گیریم. واژهٔ "محاط" به معنی زیر است. نقاط $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ را در $[a, b]$ انتخاب و نقاط $\{x(t_0), y(t_0)\}, \{x(t_1), y(t_1)\}, \ldots, \{x(t_n), y(t_n)\}$ رابه‌همین ترتیب با پاره‌خطهایی به‌یکدیگر وصل می‌کنیم. نتیجه عبارت است از یك چندضلعی محاط در C. اگر P و P' در A باشند، می‌گوییم $P' > P$ اگروتنها اگرتمام رئوس P' رئوس P نیز باشند. به‌آسانی دیده می‌شود که این، در بند (۱) تعریف جهت صدق می‌کند؛ اگر P' و P'' در A باشند، می‌توانیم یك‌چندضلعی محاطی P بسازیم‌که رئوسش‌عبارت‌باشد از همهٔ رئوس P' و P''، و با این ترتیب $P' > P$ و $P'' > P$، و بند (۲) تعریف هم برقرار خواهد بود. گیریم $L(P)$ طول P را نشان دهد. این‌یك تور ازاعداد حقیقی است. حدآن، درصورت وجود، طول خم C خوانده می‌شود. از آنجاکه وقتی $P' > P''$، $L(P') \geqslant L(P'')$. قضیهٔ کلّی

1. Moore E. H., "Definition of limit in general analysis," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1(1915)628-632.

در باب تورهای همنوا (یا غیرنزولی) به‌ما می‌گوید که حد مذکور همان کوچکترین کران بالاست و بنابراین، طول C نیز برابر کوچکترین کران بالای طول چندضلعیهای محاط در C خواهد بود.

۵. کاربرد در تعریف انتگرال. مثال بعدی مـا از اهمیت زیادی برخوردار است، چراکه غالباً آن را درکتابهای درسی به‌گونهٔ رضایت‌بخشی بررسی نمی‌کنند. فرض‌کنید f تابعی باشدکه بر بازهٔ $[a, b]$ از اعداد حقیقی تعریف شده وکراندار است؛ می‌خواهیم انتگرال (ریمان) آن را تعریف‌کنیم. نخست اعداد $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ و اعداد دیگری چون $\xi_1, \ldots, \xi_n$ را چنان برمی‌گزینیم که ξ_i بین x_i و x_{i-1} باشد. سپس مجموع $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$ راتشکیل‌می‌دهیم و به‌نوعی‌ازاین مجموع حد می‌گیریم. لکن‌مسئله اینجاست‌که چه نوع حدی؟ گاهی پاسخ را به‌شکل"حد را وقتی‌حساب می‌کنیم که تعداد زیربازه‌ها به‌بینهایت میل می‌کند" همراه با معرفی نکاتی درباب طول زیربازه‌ها می‌شنویم. اما باید توجه داشت‌که این مجموع تابعی‌تك‌مقداری از تعداد زیربازه‌ها نیست. پس، گسترشی‌ازمفهوم حد لازم است. یك راه دیگرآن‌است‌که با قیافه‌ای عبوس به‌دانشجو نگاه‌کنیم و بگوییم "اینکه خیلی واضح است، مگرنه؟" این همان چیزی‌است‌که مارك‌کك آن‌را "اثبات با تهدید" خوانده‌است. روش‌بهترآن‌است‌که نظریهٔ حدود را وسعت بخشیم تا توابع چند مقداری را نیز دربرگیرد، و سپس به‌مقدار مجموع موردنظربه‌عنوان تابعی چند مقداری از طول بزرگترین‌زیربازهٔ (x_{i-1}, x_i) نگاه‌کنیم. شیوهٔ سوم، که هم‌اینك آن را مطرح می‌کنیـم، بهره‌وری از حـد مـور ـ اسمیت اسـت. مجموعـهٔ نقـاط تقسیم $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ را بـه همـراه نقاط میانـی $\xi_1, \ldots, \xi_n$ کـه در $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ صدق می‌کنند، یك "افراز" می‌نامیم؛ "هنج" این افراز بزرگترین‌عدد از میان $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ خواهد بود. اگر P افرازی باشدکه هم‌اینك توصیف شد، ازآن برای تعیین مجموع $S(P) = \sum_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ استفاده می‌کنیم. این تابعی‌تك‌مقداری از افراز P است؛ در واقع، تنها به‌خاطرتك‌مقداری‌کردن این‌مجموع بودکه در تعریف، فرض‌کردیم P هم شامل نقاط تقسیم و هم شامل نقاط میانی باشد. حال می‌خواهیم انتگرال را به‌عنوان حد$S(P)$، وقتی‌که فرایندی رخ می‌دهد، تعریف‌کنیم. این فرایند را می‌توان دوگونه در نظر گرفت. ممکن است بگوییم که می‌خواهیم بزرگترین زیربازه در افراز به‌صفر میل‌کند، یا اینکه ممکن‌است بخواهیم حد را وقتی بیابیم که بازهٔ (a, b) را به‌قطعات بیشتر و بیشتری تقسیم‌کنیم. اگر دیدگاه نخست را اختیارکنیم، باید بگوییم که به‌ازای دوافراز P و P'، $P > P'$ به‌معنی آن‌است‌که هنج P کوچکترازهنج P' است. چنانچه نظرگاه دیگر رابگزینیم، بایدبگوییم که $P > P'$ به‌معنی‌آن است‌که هیهٔ نقاط تقسیم $x'_0, x'_1, \ldots, x'_m$ درافراز P'، جزو نقاط تقسیم $x_0, x_1, \ldots, x_n$ درافراز P نیز هستند. درهردو حالت، نقاط میانی ξ_i درتعریف ترتیب بی‌اهمیت‌اند. برای نوع انتگرالی که در اینجا مورد بحث است، تفاوتی نمی‌کند که کدامیك از این دو تعریف ترتیب را انتخاب‌کنیم: اگر با انتخاب یکی ازدوتعریف $>$، مجموع متناهی فوق حدی داشته باشد، با انتخاب دیگری نیـز همان حد را خواهد داشت و این حد بنا به‌تعریف برابر انتگرال

(ریمان) f خواهد بود. در این مورد، انتخاب فرایند حدی بسته به سلیقهٔ ماست و برای انتگرال ریمان در فضاهای با بعد بالاتر نیز چنین خواهد بود. لکن، گفتن این نکته لازم است که در بررسیهای عمیقتر آنالیز، هنگام مطالعهٔ انتگرال استیلیس، اینکه از کدام تعریف $<$ استفاده می‌کنیم، حائز اهمیت خواهد بود. البته منظور این نیست که یکی از آنها "درست" و دیگری "نادرست" باشد؛ دو تعریف به‌دو انتگرال مختلف منجر خواهند شد که هردوی آنها مورد پژوهش قرار گرفته‌اند.[1]

۶. زیرتورها. اکنون به‌مسئلهٔ زیرتورها، که چند صفحهٔ پیش مطرح شد، بازمی‌گردیم. تعریف معمولی زیردنباله تعمیم سر راستی دارد، ولی این تعمیم کاملاً رضایت‌بخش نیست. کِلی روش دیگری پیشنهاد می‌کند که از همان آغاز خود را مؤثر و کارگر می‌نمایاند، چه این روش صرفاً طرح دیگری برای تعمیم ایدهٔ زیردنباله که همه با آن آشناییم نیست، بلکه پیشنهادی است برای تعویض آن ایدهٔ آشنا و قدیمی با فکری جدید. فرض کنیم f_n، $n = ۱, ۲, \ldots$، یک دنباله باشد. عادت این است که بگوییم یک زیردنبالهٔ این، دنباله‌ای به‌شکل f_{n_j}، $j = ۱, ۲, \ldots$، است، که در آن زیرنویسهای n_j اعداد صحیح مثبتی هستند که $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \ldots$. اما اگر در برهان قضایای مربوط به زیردنباله‌ها به دقت بنگریم، درمی‌یابیم که از این شرط آخر چنانکه شایسته‌است، استفادهٔ کافی به‌عمل نمی‌آید. آنچه که به‌کار می‌رود، این نتیجه است که با میل j به ∞، n_j نیز به ∞ میل می‌کند. بدین قرار، کلی f_{n_j} را زیردنباله‌ای از f_n تعریف می‌کند، هرگاه n_jها چنان اعداد صحیح مثبتی باشند که وقتی j به ∞ میل می‌کند، n_j نیز به ∞ میل کند. تعمیم این مطلب به‌تورها واضح است. اگر $f(a)$، a در A، یک تور باشد، تور دیگری چون $g(b)$، b در B، زیر تور تور اولی است هرگاه تابعی چون $a = a(b)$، b در B، وجود داشته باشد به طوری که به ازای b در B، $g(b) = f\{a(b)\}$ و نیز به‌ازای هر a' در A، b'ای در B باشد به طوری که هرگاه $b > b'$ داشته باشیم $a(b) > a'$.

کاربردهای عمدهٔ زیردنباله‌ها از طریق این قضیه پیش می‌آید که اگر یک دنباله همگرا باشد، هر زیردنبالهٔ آن نیز به‌همان حد همگراست. این قضیه فوراً به‌تورها تعمیم می‌یابد. به‌عنوان کاربردی که علیرغم سادگیش، می‌تواند ما را متوجه این نکته کند که تورها علاوه بر نتایج مطلوب و قابل پیش‌بینی، ممکن است رفتاری عجیب و غیرمنتظره از خود بروز دهند، تابعی چون $f(x)$ در نظر می‌گیریم که بر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی تعریف شده است و می‌انگاریم $\lim_{x \to c} f(x)$ موجود و برابر k باشد. $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$ را دنباله‌ای از نقاط A می‌گیریم که همگی از c متمایز و وقتی $n \to \infty$، حدشان برابر c باشد. می‌توانستیم به‌طریق معمول ثابت کنیم که در چنین حالتی $f(x_n)$ وقتی $n \to \infty$، دارای حدی برابر k است. اما احتیاجی به‌این کار نیست؛ زیرا $f(x_n)$، $n = ۱, ۲, \ldots$، بنا به‌تعریف ما زیرتوری از تور $f(x)$، x در A، است (که در آن مانند پیش $a > a'$ را به‌معنی

1. Graves L. M., *Theory of Functions of Real Variables*, McGraw-Hill, 1946, 260-261.

$|a'-c|<|a-c|<0$ تعریف کرده‌ایم) و لذا این زیرتور باید حدی برابر k داشته باشد.

۷. رابطه‌هایی با توپولوژی. تاکنون منحصراً دربارهٔ مباحثی بحث کرده‌ایم که یك دانشجوی دورهٔ کارشناسی ممکن است با آنها سر وکار داشته باشد. اینك به‌طور خلاصه کاربردهایی از همگرایی مور-اسمیت را مطرح می‌کنیم که کمتر مقدماتی‌اند. ولی نخست یك عبارت اختصاری را معرفی می‌کنیم. اگر گزاره‌ای که شامل عناصر a از یك مجموعهٔ جهتدار A است، برای هر a در پی a' ای در A، درست باشد، می‌گوییم آن عبارت "مآلاً" درست است. بدین‌ترتیب مفهوم روشنی برای نشاندن به‌جای ایدهٔ "خاصیتی برقرار می‌شود و باقی می‌ماند" که اغلب در کتابهای درسی مقدماتی ذکر می‌شود، به‌دست می‌آوریم. در واقع، استفاده از این ایدهٔ "مآلاً" حتی در ابتدای بررسی حدود مور-اسمیت راحت و مناسب خواهد بود. چنانچه گزارهٔ P مآلاً (مثلاً برای $a>a'$) درست، و گزارهٔ Q هم مآلاً (مثلاً برای $a>a''$) درست باشد، a^* ای چنان انتخاب می‌کنیم که $a^*>a'$ و $a^*>a''$؛ در این‌صورت P و Q هردو برای $a>a^*$ درست‌اند و بنابراین گزارهٔ توأم "P, Q" مآلاً درست است.

یك فضای توپولوژیك عبارت‌است از مجموعه‌ای چون X، همراه با گردایهٔ معینی از زیرمجموعه‌های آن به‌نام "مجموعه‌های باز"، به‌قسمی که اجتماع هر تعداد دلخواه مجموعهٔ باز، و اشتراك هرتعداد متناهی مجموعهٔ باز، و مجموعهٔ تهی و خود X، باز باشد. یك همسایگی نقطهٔ x از X مجموعهٔ بازی است که حاوی x باشد. تور $x(a)$، a در A، از نقاط X به‌نقطهٔ x' از X همگراست هرگاه به‌ازای هرهمسایگی x'، $x(a)$ مآلاً در آن همسایگی باشد. نقطهٔ x' نقطهٔ انباشتگی تور $x(a)$، a در A، خوانده می‌شود هرگاه به‌بیانی نادقیق، $x(a)$ در هرهمسایگی x' "دخالت کند"؛ به‌بیان دقیق[1]، به‌ازای هرهمسایگی U از x' و هر a' در A، $x(a)$ برای a ای که $a>a'$ در U باشد.

حکم مشهوری می‌گوید که اگر X زیرمجموعه‌ای از یك فضای اقلیدسی باشد، یا هر سه خاصیت زیر را دارد و یا اینکه واجد هیچیك از آنها نیست:

I. از هر پوشش باز X می‌توان زیر پوششی متناهی برای X انتخاب کرد.
II. هر دنباله از نقاط X دارای نقطهٔ انباشتگی در X است.
III. هر دنباله از نقاط X شامل زیردنباله‌ای است که به‌نقطه‌ای از X همگراست.

این سه خاصیت در بعضی فضاهای کلیتر از زیرمجموعه‌های فضاهای اقلیدسی نیز هم‌ارز خواهند بود، مثلاً وقتی که X یك فضای کاملاً تفکیك‌پذیر باشد.[2] اما اینها در هر فضای توپولوژیك هم‌ارز نیستند؛ با این حال به‌مجرد تعویض دنباله با تور می‌توان این‌هم‌ارزی

---

۱. هالموس برای این رابطه بین U و تور $x(a)$، a در A، اصطلاح "x اغلب در AU است" را پیشنهاد می‌کند.

۲. یعنی فضایی که توپولوژی آن پایه‌ای شمارش‌پذیر داشته باشد. ـم.

را دوباره بازگرداند. یعنی اگر بنویسیم

II'. هر تور از نقاط X دارای نقطهٔ انباشتگی در X است،

III'. به ازای هر تور $x(a)$، a در A، از نقاط X، زیر توری هست که بـه نقطه‌ای از X همگراست،

آنگاه هر فضای توپولوژیك X یا هرسه خاصیت (I) و (II') و (III') را داراست یا هیچیك را ندارد. فرض کنید X واجد خاصیت (I) باشد، و $x(a)$، a در A، را توری از نقاط X بینگارید. اگر این تورهیچ نقطهٔ انباشتگی در X نداشته باشد، برای هر x در X می‌توان یك همسایگی $U(x)$ را چنان یافت که $x(a)$ مآلاً خارج از $U(x)$ قرار بگیرد. تعدادی متنـاهی از ایـن همسایگیها، مثـلاً $U(x_1), \ldots, U(x_n)$، X را می‌پـوشانند. بـه ازای a_j معین $< a$، $x(a)$ در $U(x_j)$ نیست. a را چنـان انتخـاب می‌کنیم کـه $a > a_1, \ldots, a_n$. در این‌صورت، $x(a)$ خارج از همهٔ $U(x_j)$ هاست ولی هنوز در X است، که ممکن نیست. پس، X خاصیت (II') را داراست. به‌عکس، فرض کنید X خاصیت (I) را نداشته باشد. در این صورت، گردایهٔ K ای از مجموعه‌های باز هست که X را می‌پوشانند اما هیچ زیرگردایهٔ متناهی آن X را نمی‌پوشاند. فرض کنید A مرکب از همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی K باشد، و A را با تعریف $a > a'$ به‌معنی اینکه همهٔ مجموعه‌های متعلق به a' به a نیز تعلق دارند مرتب کنید. A با این $<$ جهتدارمی‌شود، چه اگر a' و a'' در A باشند، مجموعهٔ a متشکل‌ازهمهٔ مجموعه‌های موجود در a' به‌انضمام همهٔ مجموعه‌های موجود در a''، در $a > a'$ و $a > a''$ صدق می‌کند. برای هر چنین aای، نقطه‌ای از X هست که در هیچیك از مجموعه‌های سازندهٔ a نیست، زیرا این مجموعه‌ها یك زیرگردایهٔ متناهی از K تشکیل می‌دهند و بنا به فرض، X را نمی‌پوشانند. چنین نقطه‌ای را انتخاب کرده، آن‌را $x(a)$ می‌نامیم. چون A جهتدار است، این $x(a)$ها برای a در A، یك تور تشکیل می‌دهند. حال برای هر x' در X و هرمجموعهٔ U از خانوادهٔ K که شامل x' باشد، a' را زیرمجموعه‌ای از K می‌گیریم که تنها متشکل‌از U باشد. اگر $a > a'$، $x(a)$ خارج از همهٔ مجموعه‌های موجود در a، و به‌ویژه خارج از U قرار دارد. بنابراین، x' نقطهٔ انباشتگی تور ما نخواهد بود. این مطلب برای هر x' در X درست است، و لذا X فاقد خاصیت (II') است.

خاصیت (III') به‌وضوح (II') را ایجاب می‌کند. برای نشان دادن عکس این مطلب[1]، فرض کنید $x(a)$، a در A، توری ازنقاط X باشدکه x' نقطهٔ انباشتگی آن‌است. همچنین فرض کنید B شامل همهٔ جفتهای (U, a) باشدکه در آن، U یك همسایگی x' و a نقطه‌ای از A است به‌طوری‌که $x(a)$ در U قراردارد. B را با تعریف $(U, a) \gg (U', a')$ به‌معنی اینکه U در U' قرار دارد و $a > a'$، مرتب می‌کنیم. این رابطه به‌وضوح متعدی است. هرگاه (U', a') و (U'', a'') در B باشند، U را اشتراك U' و U'' می‌گیریم. این یك همسایگی x' است و لذا aای در A هست به‌طوری که $a > a'$ و $a > a''$ و $x(a)$

---

۱. کِلی، همان مقاله.

در U باشد. پس بنا به‌تعریف $(U, a) \gg (U', a')$ و $(U, a) \gg (U'', a'')$، و B با $\gg$ جهتدار می‌شود. برای هر $b = (U, a)$ در B، $a(b)$ را برابر مؤلفهٔ دوم b تعریف می‌کنیم، یعنی $a(b) = a$. نخست باید ثابت کنیم که $x\{a(b)\}$، b در B، زیرتوری از $x(a)$، a در A، است و دوم آنکه این زیرتور به x' همگراست. هردوکار را یکجا به‌طریق زیر انجام می‌دهیم. فرض کنید a' عضو دلخواهی از A، و U' همسایگی دلخواهی از x' باشد. a''ای در A هست که $a'' > a'$ و $x(a'')$ در U' است. تعریف می‌کنیم $b' = (U', a'')$. به‌ازای هر $b = (U, a)$ که $b \gg b'$، اولاً داریم $a > a'' > a'$، یعنی $a(b) > a'$ که از آنجا معلوم می‌شود $x\{a(b)\}$، b در B، زیرتوری از $x(a)$، a در A، است و ثانیاً U در U' قراردارد، بنابراین هرگاه $b \gg b'$، $x\{a(b)\}$ به‌دلیل بودن در U، در U' نیز خواهدبود و ازاین‌رو x' حد $x\{a(b)\}$، b در B، است و برهان به‌انجام می‌رسد. به‌این‌نکته توجه کنید که تعریف کلی از زیرتور دقیقاً همان چیزی‌است که لازم است: تحت تعاریف قبلی زیرتور، اثبات قضیه میسر نیست.

درمواردی که با زیرفضاهای فضاهای با بعد متناهی سروکار داریم، می‌توانیم به‌راحتی و بدون دردسر بین خاصیت (I) در بحثهای "هاینه-بورل"ی، و خاصیتهای (II′) و (III′) در بحثهای "بولتسانو-وایرشتراس"ی، ماهرانه رفت و برگشت کنیم. برهانی که هم‌اکنون عرضه شد، نشان می‌دهد که حتی در کلیترین فضاهای توپولوژیك، همین سهولت حاصل است، مشروط برآنکه از قبل توافق کنیم که به‌جای دنباله از تور استفاده کنیم و تعریف کلی از زیردنباله را بپذیریم.

۸. همگرایی در فضاهای جزئاً مرتب. درصفحه‌های پیشین این نوشتار بامجموعه‌ها و تورهایی از اعداد حقیقی سروکار داشتیم. اعداد حقیقی از یك توپولوژی طبیعی برخوردارند و چنانچه آنها را به‌عنوان فضایی از نقاط مجهز به این توپولوژی در نظر آوریم، به‌طور طبیعی به‌فضاهای توپولوژیك قابل تعمیم‌اند. از سوی دیگر، اعداد حقیقی یك مجموعهٔ جزئاً مرتب، و درحقیقت جهتدار، نیز تشکیل می‌دهند. بنابراین معقول‌است که از حجم نتایجی که می‌توانند از نسبت ترتیب به‌دست آید شگفت‌زده شویم و مجموعه‌های جزئاً مرتب و تورهایی از نقاط مجموعه‌های جزئاً مرتب را بررسی کنیم. پس، فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای از نقاط باشد که با رابطهٔ $<$ جزئاً مرتب شده‌است. برای جلوگیری از دردسر، فرض‌خواهیم کرد که $<$ یك ترتیب جزئی سره است، که بنا به‌تعریف بدین‌معنی‌است که اگر x و x' دونقطهٔ متمایز X باشند، رابطه‌های $x < x'$ و $x' < x$ نمی‌توانند همزمان درست باشند. مثلاً، وقتی که دربارهٔ انتگرالها بحث می‌کنیم، افرازها را به‌کمك تعریف $P > P'$ به‌معنی هنج $P \leqslant P'$ جزئاً مرتب می‌کنیم، که این‌نمونه‌ای از ترتیب جزئی ناسره را به‌دست می‌دهد. اما اگر به‌جای این کار، $P > P'$ را به‌معنی هنج $P < P'$ تعریف می‌کردیم، آنگاه ترتیب جزئی ما سره می‌شد.

تعاریف کرانهای بالا و پایین و کوچکترین کران بالا (یا سوپریموم) و بزرگترین کران پایین (یا اینفیموم) را می‌توان از حالت اعداد حقیقی بلافاصله استنتاج کرد. برای اعداد حقیقی، دو روش هم‌ارز برای تعریف کمال وجود دارد. وقتی می‌گوییم اعـداد حقیقی

به‌مفهوم کوشی کامل‌اند، به‌این‌معنی است که هردنباله ازاعداد حقیقی که درشرط کوشی صدق کند به‌حدی حقیقی همگراست. اعداد حقیقی به‌مفهوم ددکیند نیز کامل‌اند، یعنی هرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد، یك کوچکترین کران بالا خواهد داشت، وهمین‌طور درموردکرانهای پایین. البته نخستین تعریف بالا در فضاهای متری بیشترمورد استفاده قرار می‌گیرد؛ لکن اکنون ما تعریف دوم را در نظر می‌گیریم. روشن است که می‌توانیم این تعریف راکلمه به‌کلمه بازسازی کنیم و بگوییم که یك مجموعهٔ جزئاً مرتب سره، کامل ددکیندی است هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن که کران بالایی داشته باشد، دارای سوپریموم هم باشد. اما دراین‌صورت، مجموعهٔ جهتداری که ازاین خاصیت بهره‌مند باشد، برای هردو نقطه یك سوپریموم و یك اینفیموم خواهد داشت و می‌دانیم که چنین مجموعه‌ای بنا به‌تعریف یك‌شبکه خوانده می‌شود. هرکس که به‌کتاب بیرکاف درباب شبکه‌ها[1] نگاهی انداخته باشد، می‌داند که آنها موجودات جالبی برای مطالعه‌اند. با وجود این، فعلاً نمی‌خواهیم توجه خود را به‌آنها معطوف کنیم. پس، فرمولبندی دیگری را می‌پذیریم که درمورد اعداد حقیقی با آنچه قبلاً گفتیم یکسان است، اما درموارد دیگر تفاوت مطلوب ما را دارد. می‌گوییم X کامل ددکیندی[2] است هرگاه هرزیرمجموعهٔ ناتهی S از X که با $<$ جهتدار(شده واز بالاکراندار باشد، یك سوپریموم، وهر زیرمجموعهٔ ناتهی S از X که با $<$ جهتدارشده و از پایین‌کراندار باشد، یك اینفیموم نیز داشته باشد. بدین‌ترتیب، مثلاً اگر $<$ به‌معنی $\subset$، یعنی "حاوی . . . است" باشد، مجموعهٔ نواحی دایره‌ای صفحه به‌شکل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqslant r^2$، $r \geqslant 0$، کامل ددکیندی است؛ لکن این دایره‌ها یك شبکه تشکیل نمی‌دهند.

هرگاه $f(a)$، a در A، توری از اعداد حقیقی باشد، این گزاره را که حد $f(a)$ برابر k است، برحسب ترتیب می‌توان بدین‌گونه بیان‌کرد: برای هرعددحقیقی $m(<k)$، گزارهٔ $f(a)>m$، و برای هر عدد حقیقی $n(>k)$، گزارهٔ $f(a)<n$، مآلاً درست است. این‌مطلب، تعریف زیر از همگراییرا درمجموعه‌های جزئاًمرتب به‌ما الهام می‌کند: هرگاه $f(a)$، a در A، توری از نقاط یك مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد، این تورهمگراست هرگاه مجموعه‌های M و Nای در X باشند به‌طوری‌که به‌ترتیب با $<$ و $>$ جهتدارشده، سوپریموم M همان اینفیموم N باشد و برای هر m در M و هر n در N، گزارهٔ $n>f(a)>m$ مآلاً درست باشد. به‌سادگی می‌توان دیدکه این‌حد، درصورت وجود،

---

1. Birkhoff G., *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. vol XXV(1948).

۲. (بعدالتحریر) از زمان نوشتن این مقاله، متوجه شده‌ام که این مفهوم، برحسب دنباله‌های همنوا به‌جای مجموعه‌های جهتدار، پیش از این بررسی شده‌است؛ مقاله‌های زیر را ببینید: Stone M. H., "A general theory of spectra," *I. Proc. Nat. Acad. Sci.*, **26** (1940) 281; Bochner.S.,"Completely monotone functions," *Duke Math. J.* 9(1942)520.

یکتاست. از تعریف حد می‌توان به‌تعریف پیوستگی و مطالعهٔ توابع پیوسته رسید. این را که چنین مطالعه‌ای دقیقاً ما را به کجا می‌کشاند، هنوز نمی‌دانیم. من دربارهٔ مجموعه‌های جزئاً مرتب و توابع پیوسته بر روی آنها پژوهشهایی انجام داده‌ام، و امیدوارم که نتایج آن‌را به‌زودی منتشرسازم. اما هنوز خیلی کارها مانده که باید آنها را انجام داد.[۱]

۱. یك سال بعد، مک‌شین مقاله‌ای در همین ارتباط، و به‌ویژه با تأکید بر کاربرد در نظریهٔ انتگرال، منتشر کرد. نام و نشان مقاله چنین است:

"Order-Preserving maps and integration processes", *Ann. of Math. Studies*, 31,(1953)

همچنین برای ملاحظهٔ یك بحث فشرده اما فوق‌العاده زیبا رجوع کنید به‌فصل۲ کتاب

Kelley J. L. *General Topology*, Van Nostrand Co., 1955.

و نیز منابع اشاره شده در آنجا. ـم.

تونی هورورویتس

خمهای بیضوی*

ترجمهٔ حسن حقیقی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تهران

۱. مقدمه

مبحث خمهای بیضوی به‌دلایل گوناگون یکی ازمباحث بسیار جالب ریاضیات است. یکی از دلایل آن این است که مبحث خمهای بیضوی محلی است که ایده‌هایی از هندسه، نظریهٔ اعداد، توپولوژی، نظریهٔ گروهها و آنالیز مختلط درآنجا گردهم می‌آیند و به‌نحوی‌غنی و رضایت‌بخش بریکدیگر اثر می‌گذارند. دلیل دیگر آنکه، دراین مبحث مسائل حل‌نشدهٔ فراوانی وجود داردکه بسیاری ازآنها برای ریاضیدانان تازه‌کار غیرقابل دسترسی است.

دو تحول تازه خمهای بیضوی را مورد توجه جامعهٔ ریاضیدانان قرار داده است، یکی اثبات اخیر فالتینگز از انگارهٔ موردل است که با سه نوع خم سروکار دارد: خمهای گویا (گونهٔ[1] ۰)، خمهای بیضوی(گونهٔ ۱) و خمهایی که حداقل گونهٔ ۲ دارند و دیگری به‌کارگیری خمهای بیضوی در مسئلهٔ تجزیهٔ اعداد بزرگ و تعیین اول بودن یا نبودن آنهاست و این به‌نوبهٔ خود کاربردهای مهمی در ساختن کدهای کلیدی همگانی دارد [۱].

این‌مقاله پیش‌درآمدی مقدماتی برخمهای بیضوی است که خواننده را قادر می‌سازد تا دریابد، این خمها در دو زمینهٔ ذکرشده در بالا چگونه مطرح می‌شوند. ارائهٔ مطلب به‌نحو اجتناب‌ناپذیری ازلحاظ شرح جزئیات ناقص است، امیدوارم که این‌خود خواننده را برای کاوش بیشتر درموضوع ترغیب کند. منابعی برای مطالعهٔ بیشتر موضوع درسطوح مختلفی از پیچیدگی، درفهرست مراجع پایان مقاله آمده است.

بحث خود را با معرفی‌خمهای بیضوی درآشناترین زمینهٔ ممکن یعنی‌صفحهٔ اقلیدسی شروع می‌کنیم.

---

* Horowitz Tony, "Elliptic curves," *The UMAP Journal* 82(1987) 161-180.

1. genus

۲. خمهای بیضوی روی میدان اعداد حقیقی

فرایند قاطع و مماس

یك معادلهٔ چند جمله‌ای به‌شکل زیر درنظر بگیرید

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad (1)$$

کـه در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند. فرض کنید چند جمله‌ای درجهٔ سوم x^3+ax+b ریشهٔ مضاعف ندارد. دراین صورت، یا سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد و یا یك ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ مختلط مزدوج. نمودار ایـن معادلـه، $\mathcal{E}$، در دستگاه مختصات معمولی XY صفحه $\mathbf{R}^2$، یك خم بیضوی روی $\mathbf{R}$ نامیده می‌شود. (شرح مختصری از منشأ این نام در پیوست آمده است). نمودار $\mathcal{E}$ همانند یکی‌ازنمودارهایی‌است که درشکل ۱ آمده است.

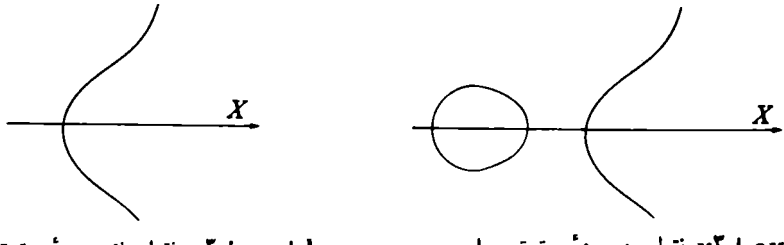
به موازات آنکه x به سمت بینهایت میل می‌کند، خم $\mathcal{E}$ به حالت قائـم نزدیك و نزدیکتر می‌شود. مناسب است که یك نقطهٔ اضافی $\mathcal{O}$، موسوم به "نقطهٔ قائم در ∞" به $\mathcal{E}$ بیافزاییم. اگر صفحه اقلیدسی $\mathbf{R}^2$ را بـا افزودن یك "نقطه دربینهایت" به‌ازای هر دسته خطوط موازی در $\mathbf{R}^2$، به‌صفحهٔ تصویری $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ تبدیـل‌کنیم، این عبارت معنای دقیقی می‌یابد. ولی ما برای مقاصد خودمان فقط به‌حقایق زیر دربارهٔ $\mathcal{O}$ نیاز داریم:

۱. $\mathcal{O}$ روی هرخط قائم درصفحه واقع است. این‌نقطه را باید به‌طور همزمان بینهایت دور دربالا و بینهایت دور درپایین هرخط قائم درنظر گرفت.
۲. $\mathcal{O}$ قرینهٔ خود نسبت به‌محور x هاست.

نقطه $\mathcal{O}$، وضعیت حدی نقطه‌ای است‌که نسبت به‌انتهای "باز" $\mathcal{E}$ یا به‌طرف بالا و یا به‌طرف پایین بینهایت دور می‌شود. بنابراین $\mathcal{O}$ این قسمت باز خم را "می‌بندد" و خم را تبدیل به‌یك حلقه، یعنی یك خم بستهٔ ساده، می‌کند.

حال عمل تعویض‌پذیر $\oplus$ روی $\mathcal{E}$ را تعریف می‌کنیم‌که دیده خواهد شد یك قانون ترکیب‌گروه است.

اگر P و Q نقاط متمایزی روی $\mathcal{E}$ باشند، خط PQ باید $\mathcal{E}$ را درنقطهٔ سومی‌چون R قطع کند (دلیل آن بـه‌زودی روشن می‌شود). $P \oplus Q$ را به‌صورت قرینهٔ R نسبت

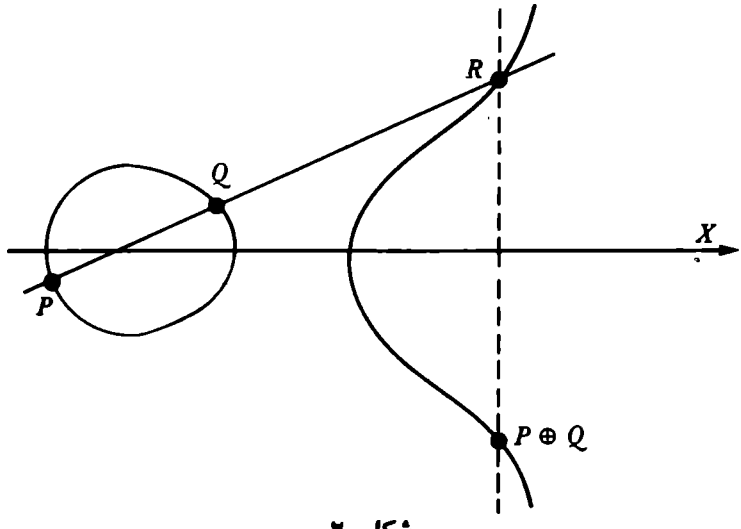


x^3+ax+b فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد — x^3+ax+b فقط سه ریشهٔ حقیقی دارد

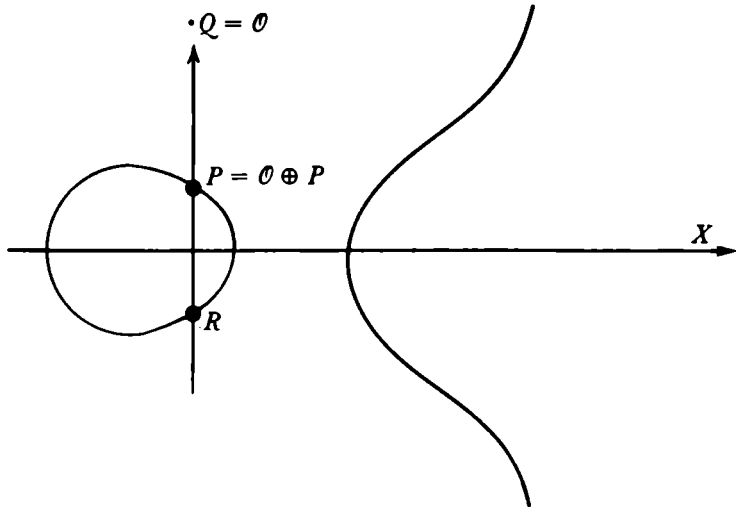
شکل ۱

به‌محور X ها تعریف می‌کنیم (شکل ۲).

توجه کنید که $P \oplus Q = Q \oplus P$. زیرا خطوط PQ و QP برهم منطبق‌اند. در حالت $Q = \mathcal{O}$، $PQ = P\mathcal{O}$ خط قائم گذرنده از P است؛ بنابراین، R قرینهٔ P است، و درنتیجه $P \oplus \mathcal{O} = P$، زیرا P قرینهٔ R است (شکل ۳).



شکل ۲



شکل ۳

برای تعریف $P \oplus P$، وضعیت حدی $P \oplus Q$ را وقتی $Q \to P$ درنظر می‌گیریم. این به‌معنای آن است که خط مماس بر $\mathcal{E}$ در P را گرفته، و نقطهٔ R، محل تلاقی مجدد این خط با خم، را بیابیم و $P \oplus P$ را به‌عنوان قرینهٔ آن تعریف کنیم (شکل ۴).

$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ را به دلخواه برابر $\mathcal{O}$ تعریف می‌کنیم (در صفحهٔ تصویری، $\mathcal{O}$ نقطهٔ عطفی روی $\mathcal{E}$ است و خط مماس بر $\mathcal{E}$ در $\mathcal{O}$ خط واقع در ∞ است. بنابراین، سومین نقطهٔ برخورد خط مماس بر $\mathcal{E}$ در $\mathcal{O}$ دوباره خود $\mathcal{O}$ است و $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ قرینهٔ $\mathcal{O}$ نسبت به محور X هاست که خود $\mathcal{O}$ است).

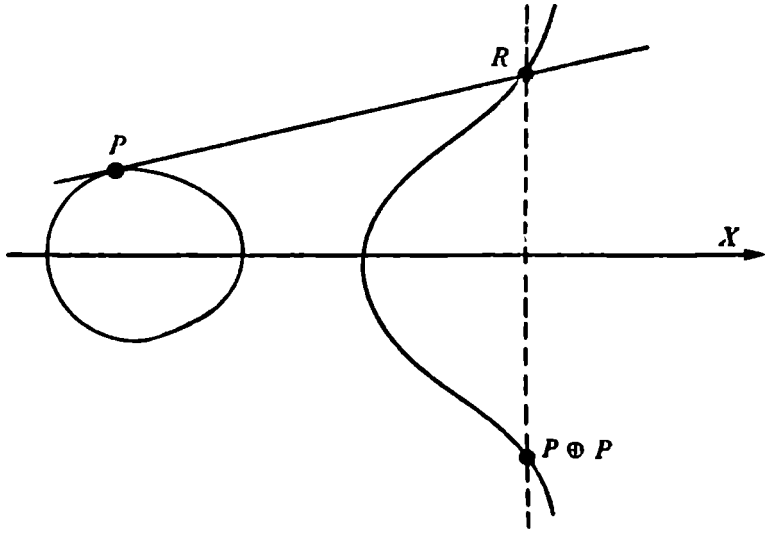
نکته. با این تعریف ($\oplus$ و $\mathcal{E}$) یک گروه تعویض‌پذیر با عنصر بی‌اثر $\mathcal{O}$ تشکیل می‌دهد.

وارون جمعی هر نقطهٔ P، قرینهٔ آن نسبت به‌محور X هاست. بنابراین تنها چیزی که باید بررسی شود، شرکت‌پذیری $\oplus$ است. این‌کار با استفاده از فرمولهایی که در زیر برای $\oplus$ آورده می‌شود، هرچند خسته‌کننده، ولی امکانپذیر است. دو رهیافت روشنگر دیگر نیز وجود دارند که یکی ازطریق قضیهٔ ریمان-راخ درهندسهٔ جبری [۶، IV. ۴] و دیگری ازطریق $\mathcal{P}$-توابع وایرشتراس در آنالیز مختلط است [۱۱، I. ۱۰].

بیایید لحظه‌ای به‌عقب برگردیم و ببینیم چرا خط گذرنده از P و Q باید $\mathcal{E}$ را در نقطهٔ سومی قطع کند. فرض کنید $P=(x_1, y_1)$، $Q=(x_2, y_2)$ و نیز $x_1 \neq x_2$. دراین صورت، خط قاطع PQ دارای معادلهٔ

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad (۲)$$

است که در آن



شکل ۴

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \qquad (۳)$$

مختص x نقطهٔ برخورد این خط با خم ما باید درمعادلهٔ

$$(m(x-x_۱)+y_۱)^۲=x^۳+ax+b \qquad (۴)$$

صدق کند، به‌عبارت دیگر باید ریشهٔ چندجمله‌ای درجهٔ سوم

$$c(x)=x^۳-(m(x-x_۱)+y_۱)^۲+ax+b \qquad (۵)$$

باشد. اما ازپیش می‌دانیم که $c(x_۱)=۰$ و $c(x_۲)=۰$ زیرا P و Q هم روی‌خط و هم روی خم قرار دارند. بنابراین $x-x_۱$ و $x-x_۲$ عوامل $c(x)$ هستند، در نتیجه $x_۳$ یی هست که برای آن

$$c(x)=(x-x_۱)(x-x_۲)(x-x_۳) \qquad (۶)$$

بنابراین $(x_۳,\ m(x_۳-x_۱)+y_۱)$ نقطهٔ سوم و تنها نقطهٔ برخورد دیگر خط و خم است و

$$P\oplus Q=(x_۳,\ -m(x_۳-x_۱)-y_۱) \qquad (۷)$$

با توجه به‌اینکه ضریب $x^۲$ در $c(x)$ ،طبق‌رابطهٔ (۵) برابر $-m^۲$ و طبق رابطهٔ (۶) برابر $-(x_۱+x_۲+x_۳)$ است، می‌توانیم $x_۳$ را برحسب $x_۱$ و $x_۲$ محاسبه کنیم. در نتیجه $m^۲=x_۱+x_۲+x_۳$ و بنابراین

$$x_۳=-x_۱-x_۲+\left(\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\right)^۲ \qquad (۸)$$

برای محاسبهٔ $x'_۳$ ، طول $P\oplus P$ ، می‌توانیم $x_۲$ را به $x_۱$ میل دهیم، حاصل کار عبارت است از

$$x'_۳=-۲x_۱+\left(\frac{dy}{dx}\Big|_P\right)^۲ \qquad (۹)$$

توجه کنید که $\left.\frac{dy}{dx}\right|_P$ را می‌توانیم با مشتق‌گیری ضمنی از تابع $y^۲=x^۳+ax+b$ محاسبه کنیم

$$۲y\frac{dy}{dx}=۳x^۲+a \qquad (۱۰)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P=(۳x_۱^۲+a)/(۲y_۱) \qquad (۱۱)$$

(اگر $y_1 = 0$ ، آنگاه خط مماس بر P قائم است و به‌دست می‌آوریم $P \oplus P = \mathcal{O}$).

درمورد یافتن $P \oplus Q$ برای دو نقطهٔ متمایز $P = (x_1, y_1)$ و $Q = (x_2, y_2)$، فرض کرده‌ایم $x_1 \neq x_2$. اما، اگر P و Q متمایز باشند ولی $x_1 = x_2$ آنگاه $y_2 = -y_1$ ، و Q قرینهٔ P است. دراین حالت PQ قائم و نقطهٔ سوم برخورد PQ و $\mathcal{E}$ ، $\mathcal{O}$ است، و درنتیجه $P \oplus Q$ قرینهٔ $\mathcal{O}$ ، که باز، $\mathcal{O}$ است، خواهد بود. این امر ادعای پیشین را که وارون P نسبت به قانون $\oplus$ ، قرینهٔ آن نسبت به محور طولهاست، تأیید می‌کند.

شایان توجه است که اگر x_1 ، y_1 ، x_2 ، y_2 مختصات Q و P در یك زیر میدان $\mathbf{F}$ از $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که مختصات $P \oplus Q$ نیز در همان میدان خواهند بود. بنابراین، به‌ازای هر زیرمیدان $\mathbf{F}$ از $\mathbf{R}$ ، یك زیرگروه

$$\mathcal{E}(\mathbf{F}) = \{\mathcal{O}\} \cup \{(x, y) \in \mathcal{E} : x, y \in \mathbf{F}\}$$

از $\mathcal{E}$ به‌دست می‌آید. حالت $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$ مخصوصاً مورد توجه است؛ نقاط $\mathcal{E}(\mathbf{Q})$ را "نقاط گویا"ی $\mathcal{E}$ می‌نامند و آنها را دربخش ۵ بیشتر مورد رسیدگی قرار خواهیم داد.

۳. خمهای بیضوی روی $\mathbf{Z}_p$

هدف ما در این بخش تحویل معادلهٔ $y^2 = x^3 + ax + b$ به‌پیمانهٔ p و به‌دست آوردن معادلهٔ همنهشتی (پیمانهٔ p) $y^2 \equiv x^3 + ax + b$ است. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم مجموعهٔ جوابهای (x, y) از $y^2 = x^3 + ax + b$ راکه x و y درحلقهٔ $\mathbf{Z}_p$ ، حلقهٔ اعدادهمنهشت به‌پیمانهٔ p ، تغییر می‌کنند، مورد بررسی قرار دهیم. فرمولهای بخش ۲ دراین حوزه نیز به‌همان اندازه معتبرند. زیرا وقتی p اول باشد، $\mathbf{Z}_p$ یك میدان است. و نتایج ما دربخش ۲ تنها با استفاده ازخواص چندجمله‌ایها با ضرایب در یك میدان به‌دست آمده‌اند.

یادآوری می‌شود که منظور از میدان بودن $\mathbf{Z}_p$ ، این است که برای هرعدد صحیح و مثبت $r_0 < p$ یك عدد صحیح و مثبت $s < p$ وجود دارد به طوری که (پیمانهٔ p) $r_0 s \equiv 1$. می‌توانیم s را به شیوه‌ای نسبتاً سریع به شکل زیر (الگوریتم اقلیدسی) محاسبه کنیم.

می‌نویسیم $p = q_1 r_0 + r_1$ ، $0 \leqslant r_1 < r_0$. از آنجا که p اول است، داریم $r_1 \geqslant 1$. علاوه براین، r_0 و r_1 نسبت به‌هم اول هستند زیرا اگر مقسوم علیه مشترکی داشته باشند این مقسوم علیه باید p را نیز عاد کند. داریم

$$r_1 = 1p - q_1 r_0$$

حال می‌نویسیم $r_0 = q_2 r_1 + r_2$ ، $r_1 > r_2 \geqslant 0$. ازآنجاکه r_0 و r_1 نسبت به‌هم اول هستند داریم $r_2 \geqslant 1$ ، و r_1 و r_2 نسبت هم اول هستند

$$r_2 = r_0 - q_2 r_1 = r_0 - q_2(1p - q_1 r_0) = -q_2 p + (1 + q_1 q_2) r_0$$

با ادامهٔ استقرایی این عمل می‌نویسیم $r_k > r_{k+1} \geqslant 0$ و $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1}$. در هر مرحله داریم $r_k > r_{k+1} \geqslant 1$؛ r_k و r_{k+1} نسبت به‌هم اول هستند و r_{k+1} به‌صورت ترکیبی‌خطی از p و a به‌شکل‌صریحی نوشته می‌شود. از آنجا که $r_0 > r_1 > r_2 > \dots$، در نهایت باید داشته باشیم $r_m = 1$ و $px + r_0 y = 1$. تقلیل y به‌پیمانهٔ p، همان عدد مطلوب ما، s است. یعنی وارون ضربی r_0 به‌پیمانهٔ p.

توجه کنید که اگر الگوریتم اقلیدسی را برای عدد مرکب n به‌جای عدد اول p، و عدد صحیح و مثبت r_0 که نسبت به n اول نیست به‌کار بریم، عددی چون $r_m > 1$ به‌دست می‌آوریم که هم r_0 و هم n را عاد می‌کند. بنابراین الگوریتم اقلیدسی یا وارون ضربی r به‌پیمانهٔ n را به‌دست می‌دهد و یا به‌طور صریح یك مقسوم علیه نابدیهی n را.

صفحهٔ آفین $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$ نظیر پیمانهٔ p صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{R}^2$ است. $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$ به‌عنوان یك مجموعه، عبارت از $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{Z}_p\}$ است. خطوط $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$ زیرمجموعه‌هایی به‌شکل $\{(x, y) : Ax + By = C\}$ هستند که در آن $A, B, C \in \mathbf{Z}_p$ و حداقل یکی از A و B غیرصفر است. هرخط غیرقائم را می‌توان به‌صورت آشنای $y = mx + k$ نوشت که در آن $m = -B^{-1}A$ و $k = B^{-1}C$. خطوط $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$ همان خواص آشنای خطوط $\mathbf{R}^2$ را دارا هستند. به‌ویژه دو نقطهٔ (x_2, y_2) و (x_1, y_1) بافرض $x_1 \neq x_2$ خطی به‌شیب m را معین می‌کنند که $m = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$؛ دوخط با شیب مساوی یا برهم منطبق‌اند و یا جدا از یکدیگرند؛ دوخط با شیبهای متفاوت، یکدیگر را در یك نقطهٔ یکتا قطع می‌کنند.

هر گاه $\mathcal{E}$ (همانند بخش ۲) خمی بیضوی روی $\mathbf{R}$ با معادلهٔ $y^2 = x^3 + ax + b$ باشد و a و b اعداد صحیح باشند، آنگاه خم نظیر آن روی $\mathbf{Z}_p$ به‌صورت

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p) = \{(x, y) \in \mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p) : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\} \qquad (۱۲)$$

است که $\mathcal{O}$ نقطهٔ در ∞ صفحهٔ $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$ است. باز می‌توان با ساختن $\mathbf{P}^2(\mathbf{Z}_p)$، کامل‌شدهٔ تصویری $\mathbf{A}^2(\mathbf{Z}_p)$، معنای دقیقی برای این مفهوم قائل شد.

هر گاه $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ و $Q = (x_2, y_2) \in \mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$، آنگاه فرمول محاسبهٔ $P \oplus Q$ در بخش ۱ تعریف زیر را به‌دست می‌دهد

$$P \oplus Q = (x_3, y_3) \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$x_3 = -x_1 - x_2 + m^2; \qquad y_3 = -m(x_3 - x_1) - y_1 \qquad (۱۴)$$

$$m = (x_2 - x_1)^{-1}(y_2 - y_1) \qquad (۱۵)$$

به‌همین ترتیب $P \oplus P$ را به‌صورت

$$P \oplus P = (x_3', y_3') \qquad (۱۶)$$

تعریف می‌کنیم که در آن

$$x_3' = -2x_1 + m^2; \qquad y_3' = -m(x_3' - x_1) - y_1 \tag{۱۷}$$

$$m = (2y_1)^{-1}(3x_1^2 + a) \tag{۱۸}$$

در اینجا، دیگر تعریف خط مماس بر $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ در P به‌صورت فرایندی حدی معنا ندارد. با این حال می‌توانیم $dy/dx|_p$ را به‌صورت جبری به‌عنوان جواب معادلهٔ $2y_1(dy/dx)|_p = 3x_1^2 + a$ که با مشتق‌گیری ضمنی ازمعادله $y^2 = x^3 + ax + b$ به‌دست می‌آید، تعریف کنیم. حال خط مماس بر $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ در P، یگانه خط گذرنده از P با شیب $dy/dx|_p$ است. با این توضیح، فرمولهای ما برای $\oplus$ تعبیرهای هندسی مشابه بخش ۲ را دارند.

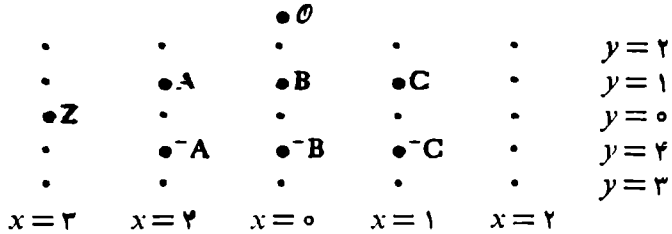
حال در یک مثال، محاسبات را انجام می‌دهیم. فرض کنید $p = 5$ و $a = 4$، $b = 1$، می‌توانیم نقاط $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ را ازجدول زیر به‌دست آوریم

x	۰	۱	۲	۳	۴
$x^3 + 4x + 1$	۱	۰	۴	۱	۱

y	۰	۱	۲	۳	۴
y^2	۰	۱	۴	۴	۱

$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p) = [\mathcal{O}, (3, 0), (4, 4), (4, 1), (0, 4), (0, 1), (1, 4), (1, 1)]$. این نقاط را به‌صورتی که در شکل ۵ دیده می‌شود، نمایش می‌دهیم، و سپس جدول گروه را به‌صورتی که درجدول ۱ دیده می‌شود به‌دست می‌آوریم.

مثلاً $A \oplus B = -C$، زیرا خط AB، $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ را مجدداً درنقطه C قطع می‌کند. همین‌طور $B \oplus Z = C$ زیرا BZ خط $y = 3x + 1$ است که $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ رامجدداً درنقطهٔ $-C = (1, 4)$ قطع می‌کند. خط $y = x + 2$ تنها نقاط Z و A از $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ را در بر دارد؛ بنابراین این خط باید خط مماس بر $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ درنقطهٔ A باشد زیرا خط مماس بر $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ در Z قائم است. در نتیجه، $A \oplus A = Z$ و $A = -A$ و $Z \oplus A = A$ (زیرا نقطهٔ سوم



شکل ۵

جدول ۱

$\oplus$	$\mathcal{O}$	Z	A	B	C	$-A$	$-B$	$-C$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	Z	A	B	C	$-A$	$-B$	$-C$
Z	Z	$\mathcal{O}$	$-A$	C	B	A	$-C$	$-B$
A	A	$-A$	Z	$-C$	$-B$	$\mathcal{O}$	B	C
B	B	C	$-C$	A	$-A$	$-B$	$\mathcal{O}$	Z
C	C	B	$-B$	$-A$	A	$-C$	Z	$\mathcal{O}$
$-A$	$-A$	A	$\mathcal{O}$	$-B$	$-C$	Z	C	B
$-B$	$-B$	$-C$	B	$\mathcal{O}$	Z	C	$-A$	A
$-C$	$-C$	$-B$	C	Z	$\mathcal{O}$	B	A	$-A$

روی ZA همان A است). تمام این نتایج‌را می‌توان با استفاده از رابطه‌های (۱۳) الی (۱۸) به‌صورت عددی نیز به‌دست آورد. مثلاً برای محاسبهٔ $B \oplus B$ ملاحظه می‌کنیم که $dy/dx|_B = (۲\times۱)^{-۱} \times (۳ \times ۰^۲ + ۲) = ۲$، بنابراین خط‌مماس بر $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ در B عبارت‌است‌از $y = ۲x + ۱$. این‌خط‌مجدداً $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ را درنقطهٔ $A = -(۴, ۴)$ قطع‌می‌کند. بنابراین $B \oplus B = A$. به‌شکل دیگر، (رابطه‌های ۱۳ الی ۱۸)

$$x'_۳ = -۲ \times ۰ + ۲^۲ = ۴, \qquad y'_۳ = -۲(۴ - ۰) - ۱ = -۳ - ۱ = ۱$$

در نتیجه

$$B \oplus B = (۴, ۱) = A$$

در این حالت خاص $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_p)$ گروهی دوری از مرتبهٔ ۸ است (هریك از نقاط B، $-B$، C و $-C$ یك مولـد است). همچنین ممکن است گروههایـی غیردوری نیز به‌دست آیند.

۴. آزمون اول بودن یك عدد n

اگر n عدد اولی باشد آنگاه عناصر غیرصفر $\mathbf{Z}_n$، تحت قانون ضرب، گروهی دوری از مرتبهٔ $n - ۱$ تشکیل می‌دهند. این به‌معنای آن است‌که

(۱۹) به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}_n$، $a \neq ۰$، داریم $a^{n-۱} = ۱$

و

(۲۰) عنصری مانند $b \in \mathbf{Z}_n$ ازمرتبهٔ دقیقاً $n - ۱$ وجود دارد؛ یعنی $n - ۱$ کوچکترین عدد مثبت k است‌که برای آن $b^k = ۱$

از طرف دیگر، اگر n عدد مرکبی باشد، آنگاه فقط اعدادی‌که نسبت به n اول

هستند دارای وارون ضربی‌اند، بنابراین عناصر وارونپذیر $\mathbf{Z}_n$ تشکیل گروهی با مرتبهٔ کمتر از $n-1$ می‌دهند (مرتبهٔ این گروه با $\phi(n)$ نمایش داده می‌شود). پس در این حالت، هرگاه $a \in \mathbf{Z}_n$ و a^{n-1} برابر ۱ باشد، آنگاه برای یك مقسوم علیه نابدیهی $n-1$ چون k داریم $a^k = 1$. درنتیجه، برای همهٔ مضارب k چون j داریم $a^j = 1$، یعنی برای همهٔ مقسوم‌علیه‌های به "اندازهٔ کافی بزرگ" $n-1$ نیز چنین رابطه‌ای برقرار است.

قضیهٔ زیر می‌گوید هرگاه بتوان a را به‌گونه‌ای پیدا کرد که $a^{n-1} = 1$ و برای مقسوم‌علیه‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ $n-1$ چون k، $a^k - 1$ و n نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم که n در واقع اول است. قبل از بیان و اثبات این قضیه ذکر چند نکته‌ای لازم است.

قبل از هر چیز، ممکن است این‌گونه به‌نظر آید که محاسبهٔ توانهای بزرگ عدد a به‌پیمانهٔ n عملی وقتگیر است، اما در واقع این کار نسبتاً آسان است

$$a^1,\ a^2,\ a^4,\ a^8,\ a^{16},\ \ldots$$

را می‌توان با به‌توان ۲ رساندنهای پیاپی و تحویل به‌پیمانهٔ p به‌دست‌آورد. برای یافتن a^k می‌توان k را درمبنای ۲ نوشت و سپس اعداد مناسب ازفهرست فوق را درهم ضرب کرد. کل این کار مستلزم حداکثر $2\log_2 k$ عمل ضرب به‌پیمانهٔ n است.

برای بررسی اول بودن نسبی، می‌توان ازالگوریتم اقلیدسی که دربخش قبل تشریح شد، استفاده‌کرد. این روش نیز به‌نحو شگفت‌انگیزی سریع است.

قضیه [۱۵]. فرض کنید n یك عدد صحیح بزرگتر از ۱ و s یك مقسوم‌علیه $n-1$ باشد. تصور کنید بتوانیم عددی چون a پیدا کنیم که در هر دو شرط زیر صدق کند:

۱. $a^{n-1} \equiv 1$ (پیمانهٔ n).

۲. برای هرمقسوم علیه اول s مانند q، $a^{(n-1)/q} - 1$ نسبت به n اول است. در این‌صورت هر مقسوم‌علیه مثبت p از n همنهشت با ۱ به‌پیمانهٔ s است. به‌ویژه، اگر $s > \sqrt{n}$ آنگاه n اول است.

اثبات. کافی است گزاره را برای حالتی که p اول است ثابت کنیم، زیرا حاصلضربهای اعدادهمنهشت با ۱ به‌پیمانهٔ s خودشان‌همنهشت با ۱ به‌پیمانهٔ s خواهند بود.

عدد $b = a^{(n-1)/s}$ را به‌عنوان‌عنصری از $\mathbf{Z}_p^*$، گروه ضربی‌عناصر غیرصفر به‌پیمانهٔ p، درنظرمی‌گیریم؛ (پیمانهٔ p) $b^s = a^{n-1} \equiv 1$، بنابراین (پیمانهٔ p) $b^s \equiv 1$، اما ادعا می‌کنیم هیچ‌توان کوچکتری‌از b همنهشت با ۱ به‌پیمانهٔ p نخواهدبود. چنین‌توانی، باید یك مقسوم‌علیه s باشد، اما اگر (پیمانهٔ p) $b^{s/r} \equiv 1$، آنگاه برای هر مقسوم‌علیه اول q از s داریم

$$b^{s/q} \equiv 1 \pmod{p}$$

بنابراین p ، $a^{(n-1)/q}-1$ را عاد خواهد کرد که با فرض دوم در تناقض است.

بدین ترتیب نشان داده‌ایم که b عنصری از مرتبهٔ s در $\mathbf{Z}_n^*$ است که $p-1$ عنصر دارد. پس s عدد $p-1$ را عاد می‌کند و درنتیجه(پیمانهٔ s) $p\equiv 1$ و اثبات تمام است.

به‌عنوان یك مثال، با استفاده از ایـن قضیه نشان می‌دهیم ۱۳۰۰۱ اول است. در اینجـا $n-1=13000$ ، می‌تـوانیم s را برابر $s>\sqrt{13001}>200$ انتخاب کنیم. مقسوم‌علیه‌های اول ۲۰۰ فقط ۲ و ۵ هستند. بنابراین ما فقط نیاز داریم یك عدد a بیابیم به‌گونه‌ای کـه (پیمانهٔ ۱۳۰۰۱) $a^{13000}\equiv 1$ و $a^{6500}-1$ و $a^{2600}-1$ نسبت بـه ۱۳۰۰۱ اول باشند.

ابتدا $a=2$ را آزمایش می‌کنیم، 2^{13000} در واقع همنهشت ۱ به‌پیمانهٔ ۱۳۰۰۱ است. امـا متأسفانـه 2^{6500} نیز چنین است. بنابـراین $a=3$ را انتـخاب می‌کنـیم (پیـمانـهٔ ۱۳۰۰۱) $3^{13000}\equiv 1$ و (پیمانـهٔ ۱۳۰۰۱) $3^{6500}-1\equiv 2$ و (پیمانهٔ ۱۳۰۰۱) $3^{2600}-1\equiv 10478$ روشن است کـه ۲ — نسبت به ۱۳۰۰۱ اول است ومی‌توان با استفاده از الگوریتم‌اقلیدسی بررسی کرد که ۱۰۴۷۸ نسبت به ۱۳۰۰۱ اول است. (بعد از ۶ مرحله فقط باقیمانده‌های ۲۸ و ۱۱ بدست می‌آیند که آشکارا هیچ مقسوم‌علیه مشترکی ندارند.) بنابراین عدد ۱۳۰۰۱ اول است.

توجه داشته باشید که اگر a^{n-1} همنهشت ۱ به‌پیمانهٔ n نباشد بلافاصله با استفاده از (۱۹) نتیجه می‌گیریم که n اول نیست. ممکن است به‌نظر آید جستجوی مقدار درست n هنگامی کـه n اول است بسیار وقتگیر است، اما به‌طورکلی این مشکلی نیست. با این حال تعداد عناصر مرتبهٔ بالا در $\mathbf{Z}_n^*$ ، برای n اول بسیار بیشتر ازعناصر مرتبهٔ پایین است!

ضعف این‌روش دراین است که ما باید بتوانیم به‌اندازهٔ‌کافی عوامل اولی از $n-1$ را پیداکنیم که مقسوم‌علیهی چون s از $n-1$ با شرط $s>\sqrt{n}$ به‌دست آید که بتوانیم آن را به‌طورکامل به‌عوامل‌اول تجزیه کنیم. اگر $n-1$ تعداد زیادی عوامل اول کوچك نداشته باشد یافتن s ممکن است از حل مسئله‌ای که از آن شروع کردیم مشکلتر شود!

اینجاست که خمهای بیضوی به‌کمك می‌آیند. به‌جای توجه به $\mathbf{Z}_n$ تحت‌قانون‌ضرب، اعداد صحیح a و b را انتخاب می‌کنیم و همانند بخش قبل مجموعهٔ

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_n)=\mathcal{O}\cup\{(x,\ y)\in\mathbf{Z}_n\times\mathbf{Z}_n:\ y^2=x^3+ax+b\}$$

را درنظر می‌گیریم. برای نقطه‌ای مانند $A\in\mathcal{E}(\mathbf{Z}_n)$ تعریف می‌کنیم

$$1\cdot A=A,\ 2\cdot A=A\oplus A,\ 3\cdot A=2A\oplus A,\ \ldots,\ k\cdot A=(k-1)\ A\oplus A$$

اینها شبیه توانهای a در $\mathbf{Z}_n$ هستند. منظور از $\oplus$ همان عملی است که توسط رابطه‌های (۱۳) الی (۱۸) تعریف می‌شود. توجه کنید کـه هرگاه دراستفاده ازاین فرمولها، مجبور شویم وارون اعداد x_2-x_1 یا $2y_1$ را که نسبت به n اول نیستند، حساب کنیم، $A\oplus B$ تعریف نمی‌شود، اما دراین حالت می‌توانیم نتیجه بگیریم n اول نیست. بهتر ازاین، در جریـان نشان‌دادن اینکه x_2-x_1 یـا $2y_1$ نسبت به n اول نیست (از طریق الگوریتم

اقلیدسی) مقسوم‌علیهی از n را می‌سازیم.

فرض کنید m تعداد عناصر مجموعهٔ $\mathcal{G}(\mathbf{Z}_n)$ باشد، m با انتخابهای متفاوت a و b تغییر می‌کند. اما به‌طور معمول نسبتاً به n نزدیك است. سعی می‌کنیم a و b را چنان اختیار کنیم که m مقسوم‌علیه بزرگی چون s داشته‌باشد و بتوانیم آن‌را کاملاً تجزیه کنیم. قضیه‌ای مشابه قضیه‌ای که دراین بخش ثابت شد، آزمونی برای اول بودن n، با محاسبهٔ A و $m \cdot A$ (m/q) به‌ازای همهٔ عوامل اول q از s، به دست می‌دهد. جزئیات این قضیه را می‌توان در [۷] پیدا کرد.

۵. معادلات دیوفانتی و نقاط گویای خمها

انگارهٔ موردل با تعداد نقاط گویا (نقاط با مختصات گویا)ی خمهایی سروکار دارد که به‌وسیلهٔ معادلات چند جمله‌ای تعریف می‌شوند. به‌یك معنا این انگاره مسئلهٔ اساسی‌حوزه‌ای است موسوم است به‌هندسهٔ حسابی، که از مجموعهٔ مسائلی به‌نام مسائل دیوفانتی، منسوب به دیوفانتوس اسکندرانی(۲۷۵ میلادی)، پدید آمده‌است. قبل از بیان خود انگاره، نگاهی به‌مثالهایی ازاین نوع مسائل مفید خواهد بود.

مسئلهٔ دیوفانتی به‌طورکلی به شکل زیر است. اگر یك یا چند معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح داده شده باشد، جوابهایی را که در آنها هرمتغیر، مقداری صحیح دارد بیابید. ما قبلاً با یکی از این‌گونه مسائل مواجه شده بودیم. مسئلهٔ یافتن وارون ضربی $a \in \mathbf{Z}_p$، معادل است با حل‌کردن معادلهٔ دیوفانتی

$$ax - py = 1 \qquad (۲۱)$$

وقتی x و y را یافتیم، a^{-1} همان تقلیل x به‌پیمانهٔ p خواهد بود. قابل توجه است که خود معادلهٔ (۲۱) یا هیچ جوابی ندارد (اگر a و p نسبت به‌هم اول نباشند) و یا جوابهای بیشماری دارد. اگر (x_0, y_0) یك جواب این معادله باشد، آنگاه به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که مجموعهٔ کلیهٔ جوابها دقیقاً مجموعهٔ

$$\{(x_0 + kp,\ y_0 + ka) : k \in \mathbf{Z}\}$$

است.

یك مسئلهٔ آشنای دیگر از این دست، مسئلهٔ یافتن همهٔ سه تاییهای فیثاغورسی است. یعنی سه‌تاییهای a و b و c از اعداد صحیح مثبت به‌گونه‌ای که

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (۲۲)$$

برای نشان دادن ارتباط بین مسائل دیوفانتی و موضوعاتی که انگارهٔ موردل در بر دارد، یك راه‌حل مسئلهٔ سه تاییهای فیثاغورسی را به‌اختصار دراینجا می‌آوریم.

قبل از هرچیز، مشاهده می‌کنیم که هرگاه $a^2 + b^2 = c^2$ و یك عدد m، هردوعدد از اعداد a، b، c را عاد کند آنگاه باید سومی را نیز عاد کند. بنابراین کافی است تمام

سه تاییهای "اولیهٔ" فیثاغورسی‌را پیداکنیم. یعنی سه‌تاییهای a، b، c که‌دو به‌دو نسبت به‌هم اول هستند.

فرض کنید a، b، و c یك سه‌تایی فیثاغورسی باشد. قرار می‌دهیم $x=a/c$ و $y=b/c$ در این صورت (x, y) نقطه‌ای در ربع اول، روی دایره یکهٔ $x^2+y^2=1$ است که هردو مختص آن گویا هستند. به‌آسانی می‌توانیم نشان دهیم که عکس این حکم نیز درست است. بنابراین، سه‌تاییهای فیثاغورسی در تناظری یك‌به‌یك با نقاط مجموعهٔ

$$\{(x, y): x, y \in \mathbf{Q}, x, y > 0, x^2+y^2=1\}$$

قرار می‌گیرند.

حال، مشاهده می‌کنیم که هرگاه (x, y) نقطه‌گویایی روی $x^2+y^2=1$ باشد آنگاه t، شیب خطی که نقطهٔ $(0, -1)$ را به‌نقطهٔ (x, y) وصل می‌کند، عددی است گویا (شکل ۶). برعکس، هرگاه t عدد گویایی باشد آنگاه خطی به‌شیب t که ازنقطهٔ $(0, -1)$ می‌گذرد دایره را درنقطهٔ دیگری قطع می‌کندکه هردو مختص آن گویا هستند. برهان این امر یادآور استنتاجات بخش ۲ است. معادلهٔ این خط

$$y=t(x+1) \qquad (۲۳)$$

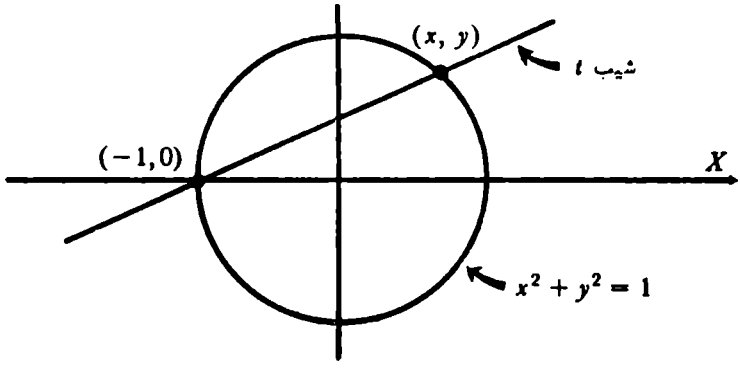
است. با قرار دادن این‌مقدار در $x^2+y^2=1$ و مشاهدهٔ اینکه $x=-1$ باید یك ریشهٔ معادلهٔ حاصل باشد، به‌دست می‌آوریم

$$x^2+t^2(x+1)^2=1 \qquad (۲۴)$$

یا

$$(x+1)[(x-1)+t^2(x+1)]=0 \qquad (۲۵)$$

در نتیجه



شکل ۶

$$x=-۱ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲} \tag{۲۶}$$

حال وقتی که $x=(۱-t^۲)/(۱+t^۲)$ معادلهٔ (۲۳) نتیجه می‌دهد

$$y=\frac{۲t}{۱+t^۲} \tag{۲۷}$$

ما علاقه‌مند به‌حالتی هستیم که t گویا و $۰<t<۱$ باشد. با نوشتن $t=p/q$ که p و q نسبت به‌هم اول هستند، نتیجه می‌شود

$$x=\frac{q^۲-p^۲}{q^۲+p^۲}, \qquad y=\frac{۲pq}{q^۲+p^۲} \tag{۲۸}$$

هر گاه از p و q یکی زوج و دیگری فرد باشد، آنگاه کسرهای x و y تحویل‌ناپذیر هستند و می‌نویسیم $n=p$ و $m=q$. اگر هردو فرد باشند، می‌نویسیم $m=(p+q)/۲$ و $n=(q-p)/۲$. در هر حالت نتیجه این است که x و y سه تایی اولیهٔ فیثاغورسی را به‌دست می‌دهند[۱]

$$m^۲-n^۲, \quad ۲mn, \quad m^۲+n^۲ \tag{۲۹}$$

بنابراین، هر سه‌تایی فیثاغورسی به‌این شکل است.

مرحلهٔ اصلی در این استنتاج، این بود که توانستیم یك نمایش پارامتری $(x(t), y(t))=((۱-t^۲)/(۱+t^۲), ۲t/(۱+t^۲))$ برای دایرهٔ یکه پیدا کنیم که توابع آن گویا (نسبت دو چند جمله‌ای) بودند. چنین نمایش پارامتری از یك خم را یك نمایش پارامتری گویا، و خمی را که یك نمایش پارامتری گویا دارد، یك خم گویا می‌نامند.

شیوهٔ بالا برای ساختن یك نمایش پارامتری گویای $x^۲+y^۲=۱$ را می‌توان مستقیماً برای هر مقطع مخروطی (هر خمی که با یك معادلهٔ چندجمله‌ای برحسب x و y ازدرجهٔ ۲ تعریف می‌شود) تعمیم داد. در واقع هر گاه $f(x, y)$ یك چند جمله‌ای درجه دوم، و $(x_۰, y_۰)$ یك ریشهٔ $f(x, y)$، و $y=t(x-x_۰)+y_۰$ یك خط گذرنده‌از $(x_۰, y_۰)$ باشد، آنگاه $f(x, t(x-x_۰)+y_۰)$ یك چند جمله‌ای درجهٔ دوم برحسب x است که یکی از ریشه‌هایش $x_۰$ است. بنابراین، این چند جمله‌ای درجهٔ دوم باید به صورت $(x-x_۰)(q(t)x-p(t))$ تجزیه شود که در آن p و q چند جمله‌ایهایی از t اند؛ و به این ترتیب، نمایش پارامتری $(p(t)/q(t), t(p(t)/q(t)-x_۰)+y_۰)$ برای خم فوق پدید می‌آید. درنتیجه تمام مقاطع مخروطی خمهایی گویا هستند و مسئلهٔ یافتن نقاط گویا روی یك مقطع مخروطی به‌مسئلهٔ یافتن یك نقطهٔ گویا تقلیل می‌یابد. اگر یك نقطهٔ گویا وجود داشته باشد، آنگاه بینهایت نقطهٔ گویا روی مقطع مخروطی وجود خواهد داشت،

---

۱. درتمام این استدلالات نیازی به اولیه بودن سه‌تاییهای فیثاغورسی a، b، c نبوده است. ـ م.

یعنی یك نقطهٔ گویا به‌ازای هرمقدار گویای پارامتر t.

خم $y^2=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ نیز یك خم گویاست (توجه داشته باشیدکه این خم دقیقاً یك خم بیضوی نیست زیـرا $(x-\alpha)^2(x-\beta)$ یك‌ریشهٔ مضاعف $x=\alpha$ دارد). دلیل این امر آن است کـه خط $y=t(x-\alpha)$ در نقطهٔ $(\alpha, 0)$ "خم را دوبار قطع" می‌کند و نقطهٔ برخورد دیگر را می‌توان بر حسب t نوشت تا یك نمایش پارامتری گویا ازخم به‌دست آید. ازلحاظ‌هندسی، خط $y=t(x-\alpha)$ خم‌را دوبار درنقطهٔ $(\alpha, 0)$ قطع می‌کند. زیرا دراین‌نقطه خم "خود را قطع می‌کند" و خط هر "شاخهٔ" خم را یك‌بار قطع می‌کند. از لحاظ جبری، $(t(x-\alpha))^2-(x-\alpha)^2(x-\beta)$ دارای یك ریشهٔ مضاعف $x=\alpha$ و ریشهٔ سوم $x=t^2+\beta$ است‌که منجر به‌نمایش پارامتری گویای

$$(t^2+\beta,\ t(t^2+\beta-\alpha))$$

می‌شود.)

شاید تعجب‌آور باشدکه "بیشتر" خمها گویا نیستند. به‌ویژه تمام خمهای بیضوی‌که دربخش ۲ بررسی‌کردیم ناگویا هستند(هیچ نمایش پارامتری‌گویایی ندارند). برای‌حکم اخیر می‌توان یك‌اثبات مستقیم ارائه‌کرد، اما چنین اثباتی ازنظر محاسباتی‌کسل‌کننده‌بوده و چندان هم روشنگرانه نخواهد بـود (از طرف دیگر، شافارویچ اثبات مستقیم و بسیار ظریفی ازاین حکم‌کـه خمهای $x^n+y^n=1$ برای $n\geqslant 3$ همگی ناگویا هستند ارائـه می‌دهـد [۱۲]. اینها خمهایی هستندکه در انگارهٔ فرما، که در بخش بعد مورد بحث واقع خواهد شد، مطرح می‌شوند). دلیل واقعی اینکه خمهای بیضوی و اکثرخمهای دیگر گویا نیستند در ارتباط بـا یکی از ناورداهای خمها، به‌نام گونه است. در بخش بعدی یکی از روشهای تعریف گونـهٔ یك خم و چگونگی ارتباط گونه با مسئلهٔ گویـا بودن شرح داده می‌شود.

۶. رویه‌های ریمان، گونه، و انگارهٔ موردل

در بخش ۳، معادلهٔ $y^2=x^3+ax+b$ را اختیارکردیم و جوابهای (x, y)ی از آن را که (x, y) در میدان متناهی $\mathbf{Z}_p$ بودند، در نظرگرفتیم. دراین‌بخش در "جهت‌عکس" حرکت خواهیم‌کرد و مجموعهٔ جوابهای (x, y) را کـه x و y اعداد مختلط‌هستند، در نظر خواهیم گرفت.

فرض‌کنید $\mathbf{C}=\{a+bi: a, b\in\mathbf{R}\}$ میدان اعداد مختلط باشد. طبق معمول بـا متناظر قرار دادن $a+bi$ به‌نقطهٔ $(a, b)\in\mathbf{R}^2$، $\mathbf{C}$ را به‌صورت یك صفحهٔ دو بعدی در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})=\mathbf{C}^2=\{(x, y): x, y\in\mathbf{C}\}$ را می‌تـوان به‌عنوان یك شیء چهار بعدی در نظر گرفت که هر مختص یك نقطهٔ آن با دو عدد حقیقی مشخص می‌شود. یك خم بیضوی در $\mathbf{C}$ مجموعه‌ای به‌صورت

$$\mathcal{E}(\mathbf{C})=\{(x, y)\in\mathbf{C}^2: y^2=x^3+ax+b\}\cup\{\mathcal{O}\}$$

است که در آن b, a همانند بخش ۲ هستند، و ∞ نقطهٔ قائم در ∞ است.

تصور "خم مختلط" $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ به‌طور مستقیم نسبتاً مشکل است. زیرا $\mathbf{C}^2$ چهار بعدی است، اما ارائهٔ یك توصیف خوب از "شکل" کلی آن (یعنی توپولوژی آن) امکانپذیر است.

اگر برای یك لحظه به‌خم حقیقی $\mathcal{E}$ در $\mathbf{R}^2$ که در بخش ۱ تعریف شد برگردیم، یك راه تصور شکل آن به‌صورت زیر است: نزدیك هر نقطهٔ $P \in \mathcal{E}$ یك قطعهٔ کوچك $\mathcal{E}$ شبیه یك قطعهٔ کوچك از خط حقیقی $\mathbf{R}$ است، فقط کمی خمیده است. به‌علاوه با افزودن نقطهٔ ∞ در ∞، "خم $\mathcal{E}$ را بسته‌ایم". نتیجه می‌شود که $\mathcal{E}$ باید اجتماعی از خمهای بستهٔ ساده (خمهایی که درهیچ‌نقطه، خودرا قطع نمی‌کنند و "انتهای باز" ندارند) باشد. به‌همین ترتیب، در نزدیکی هر نقطهٔ P از $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ یك قطعهٔ کوچك $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ شبیه یك قطعهٔ کوچك خمیده از صفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ است. این حاکی از آن است که کل $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ چیزی است که ما آن را به‌عنوان یك رویه تصور می‌کنیم. می‌توان نشان داد که در واقع $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ یك چنبره است که شکل آن شبیه رویهٔ یك دونات[1] است.

برنهارد ریمان چنین رویه‌هایی را به‌عنوان وسیله‌ای برای فهم توابع "چندمقداری" مورد مطالعه قرار داد: در اینجا، "تابع" $y = \sqrt{x^3 + ax + b}$ که برای هر مقدار x، به‌استثنای ریشه‌های چند جمله‌ای درجهٔ ۳، دو مقدار مختلط دارد. برای ملاحظهٔ یك مدخل بسیار عالی بر این مطلب به [۱۵، ص ۱-۱۱] مراجعه کنید که به‌صورت بصری و بسیار زیبایی نشان می‌دهد که چرا این رویهٔ ریمانی یك چنبره است.

به‌طور کلی اگر $f(x, y)$ یك چند جمله‌ای دومتغیره باشد، می‌توانیم مجموعهٔ

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : f(x, y) = 0\}$$

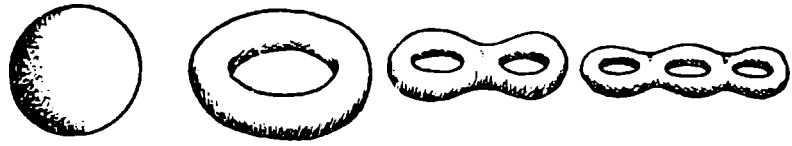
را در نظر بگیریم؛ این یك شیء دو بعدی درفضای چهار بعدی $\mathbf{C}^2$ است. اگر f دارای این خاصیت باشد که در هیچ نقطه‌ای از C هر دو مشتق جزئی f_x و f_y همزمان صفر نشوند (در حالت خمهای بیضوی، این شرط معادل این است که چند جمله‌ای درجهٔ سوم ریشهٔ تکراری نداشته باشد)، آنگاه C درنزدیکی هر نقطهٔ آن شبیه قطعهٔ کوچکی ازصفحه است. ما به C تعداد متناهی نقطه در ∞ می‌افزاییم. نتیجهٔ عمل، یك "رویهٔ بسته" (به‌طور دقیقتر، یك خمینهٔ دو بعدی جهت‌پذیر فشرده) است.

همهٔ رویه‌های بسته "شبیه" یکی از رویه‌های زیر هستند. یك کره (سطح یك توپ)، یك چنبره (رویهٔ یك دونات)، یا یك "چنبرهٔ g سوراخه" (رویهٔ مرکب از g تا دونات که در یك ردیف به یکدیگر چسبانیده شده‌اند) "تعداد سوراخها" g (صفر برای کره و یك برای چنبره) به‌عنوان گونهٔ رویه شناخته می‌شود (شکل ۷). ما گونهٔ خم $f(x, y) = 0$ را به‌عنوان گونهٔ رویه‌ای که به‌صورت بالا ساخته می‌شود، تعریف می‌کنیم.

برای مقاصد ما، مهمترین نکته دربارهٔ گونهٔ یك خم این است: یك خم $f(x, y) = 0$

---

۱. یك نوع کیك حلقه‌ای شکل. ـ م.

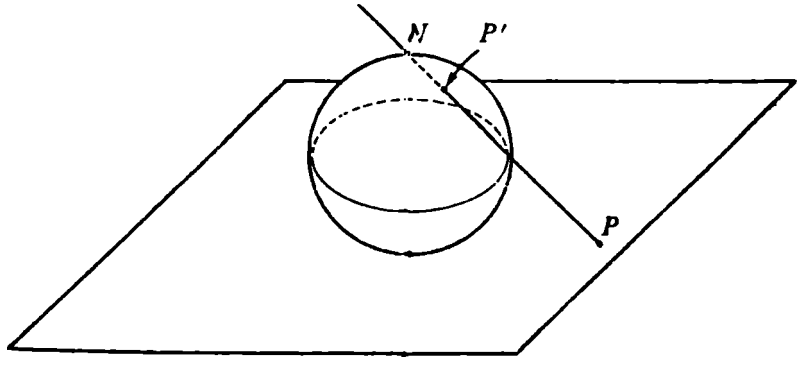


شکل ۷

گویاست اگر و فقط اگر ازگونهٔ صفر باشد. نقطهٔ آغاز ما این است که ببینیم چرا یك خم گویا ازگونهٔ صفر است.

اگر ازصفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ شروع کنیم و با افزودن یك نقطه در ∞ "آن را ببندیم"، رویهٔ بستهٔ حاصل یك کره خواهد بود. روش معمول برای ملاحظهٔ این مطلب، این است: یك کره را روی صفحه می‌نشانیم، و نقطهٔ بالای کره را N می‌نامیم. برای هر نقطهٔ P بر روی صفحه، خط NP را رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با کره را در نظر می‌گیریم (شکل ۸). این عمل یك تناظر یك به‌یك، موسوم به تصویر گنجنگاری؛ بین نقاط P از صفحه و نقاط P' ازکره، به‌استثنای N، ایجاد می‌کند. آن نقاط P ازصفحه، که ازمبدأ ۰ خیلی دورند، متناظر نقاطی چون P' از کره هستند که خیلی نزدیك به N می‌باشند. بنابراین، می‌توانیم N را به‌عنوان "وضعیت حدی" هرنقطهٔ متحرك P در $\mathbf{C}$ که به‌طور بیکران از مبدأ دور می‌شود درنظر بگیریم (وقتی این نقطه در ∞ به $\mathbf{C}$ افزوده می‌شود، شیء حاصل برای آنالیز مختلط‌دانان به‌عنوان کرهٔ ریمان و برای هندسه‌دانان به‌عنوان خط تصویری مختلط، $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$، شناخته می‌شود).

در بخش قبل، تناظر یك به‌یکی را بین اعداد حقیقی t و نقاط دایرهٔ یکه $x^2+y^2=1$ ازطریق نمایش پارامتری $(x, y)=((1-t^2)/(1+t^2),\ 2t/(1+t^2))$ برقرار کردیم. به‌یاد آورید که t بیانگر شیب خط گذرنده ازنقطهٔ $(-1, 0)$ از دایره است. وقتی



شکل ۸

$t \to \infty$ آنگاه $(x, y) \to (-۱, ۰)$. اگر اجازه دهیم t همهٔ مقادیر مختلط، به‌اضافهٔ ∞، را اختیار کند، آنگاه تناظر یك به‌یکی بین نقاط کرهٔ ریمان و نقاط خم مختلط $x^۲ + y^۲ - ۱ = ۰$ به‌دست می‌آوریم (توجه داشته باشید که وقتی $t = \pm i$، $۱ + t^۲$ درمخرج نمایش پارامتری صفر می‌شود، اینها دونقطه در ∞ هستندکه لازم است به‌این‌خم اضافه شوند) به‌همین ترتیب، هرنمایش پارامتری گویای یك خم مختلط منجر به‌تناظری یك به‌یك و پوشا از کرهٔ ریمان به‌رویهٔ ریمان خم می‌شود. این نگاشت پیوسته است (در واقع، تحلیلی مختلط است که شرطی بسیار قویتر است).

استدلال بالا روشن می‌سازدکه چرا ارائهٔ یك نمایش پارامتری گویا برای خمی از گونهٔ بزرگتر از صفر امکانپذیر نیست. مثلاً، اگر گونهٔ خم یك باشد ما روشی لازم داریم که با استفاده ازآن کره را به‌دور یك دونات به‌گونه‌ای بپیچانیم که هرنقطهٔ دونات دقیقاً یك بار پوشانده شود. این عمل به‌طور پیوسته (خیلی ضعیفتر از تحلیلی بودن) امکانپذیر نیست. توجه کنید که در نظر گرفتن مجموعه جوابهای مختلط یك خم اطلاعاتی دربارهٔ مجموعهٔ نقاط حقیقی خم، که ابتدا ازآنها شروع کردیم، به‌دست دادا برای روشنترشدن مطلب، فرض‌کنید با یك چندجمله‌ای $f(x, y)$ با ضرایب حقیقی شروع کنیم و خم مختلط متناظر $f(x, y) = ۰$، گونه‌ای بزرگتر از صفر داشته باشد؛در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که خم حقیقی $\{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ : f(x, y) = ۰\}$ را نمی‌توان به‌وسیلهٔ توابع گویا پارامتری‌کرد. زیرا اگرچنین‌نمایش پارامتری وجود داشته‌باشد، به‌نمایشی پارامتری ازخم مختلط توسعه خواهد یافت، که می‌دانیم غیرممکن است.

حال می‌توانیم انگارهٔ موردل (قضیهٔ فالتینگز) را بیان‌کنیم:

هر خم از گونهٔ ناکمتر از ۲، حداکثر تعدادی متناهی نقطهٔ گویا دارد.

لازم به‌یادآوری است که کلمهٔ "خم" در اینجا از اشیایی‌که ما دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم، معنای وسیعتری دارد. خمهای ما همگی مسطح بودند، یعنی مجموعه جوابهای یك چندجمله‌ای دو متغیره، یك تعریف مناسب از خم جبری، خمهایی را نیز که از محل برخورد دو رویه درفضای ۳ بعدی تشکیل می‌شوند، در بر دارد (مجموعهٔ جوابهای‌مشترك دو چندجمله‌ای ۳ متغیره) و این تعریف، در واقع بسیار کلیتر است.

ما قبلاً دیده‌ایم که خمهای گویا (خمهای با گونهٔ $g = ۰$) بینهایت نقطهٔ گویادارند. خمهای بیضوی که‌آنها را بررسی کرده‌ایم همگی از گونهٔ ۱ هستند (در واقع، این تعریف "صحیح"، بیضوی بودن خم است). به‌یاد آورید که نقاط گویای روی یك خم بیضوی تحت قانون ترکیب $\oplus$ یك‌گروه تعویضپذیر تشکیل می‌دهند. کاملاً ممکن است که یك نقطهٔ گویای p از یك خم بیضوی مرتبه‌اش نامتناهی باشد (یعنی هیچیك از نقاط P، $P \oplus P$، $P \oplus P \oplus P$، $P \oplus P \oplus P \oplus P$، ... برابر $\mathcal{O}$ نشوند و درنتیجه همگی آنها متمایز باشند). برای ملاحظهٔ یك مثال صریح به [۶، مثال ۴.۲۳.۸، ص ۳۳۵–۳۳۶] مراجعه کنید. انگارهٔ موردل می‌گوید هیچ خمی بجز خمهای‌گویا و خمهای بیضوی نمی‌توانند بینهایت نقطه با

مختصات گویا داشته باشند.

یکی از کاربردهای این قضیهٔ جدید، ارائه یك پاسخ جزئی به‌انگارهٔ فرماست که محرك بیشتر پیشرفتها درهندسهٔ حسابی بوده است. (انگارهٔ فرما، اگرچه هنوز هیچ اثباتی برای آن شناخته نشده، گاهی اوقات "قضیهٔ آخر فرما" نیز نامیده می‌شود.) فرما سه‌تاییهای فیثاغورسی را در نظر گرفت و این پرسش را مطرح کرد که هرگاه توان از ۲ بیشتر باشد وضع از چه قرار خواهد بود؛ یعنی اگر n عددی صحیح و بزرگتر از ۲ باشد، آیا اعداد صحیح و مثبت a، b، c وجود دارند به‌گونه‌ای که $a^n+b^n=c^n$؟ پاسخ فرما به‌این سؤال منفی بود. اما هیچ‌کس نمی‌داند که اثبات وی چگونه بوده؛ و عموماً اعتقاد براین است که احتمالاً اثبات او اشتباهی در بر داشته است. درحال حاضر می‌دانیم که برای بسیاری از مقادیر n (مثلاً برای همهٔ $n<۱۲۵۰۰۰$؛ [۱۶]) حق با فرما بوده، اما هنوز برای بینهایت مقدار دیگر n پاسخ این سؤال نامعلوم است.

همان طور که در مورد سه‌تاییهای فیثاغورسی عمل کردیم، می‌توانیم سؤال فرما را به‌سؤالی دربارهٔ وجود نقاط گویا روی یك خم برگردانیم: معادلهٔ $a^n+b^n=c^n$ دارای جواب a، b، c است، که هر سه صحیح و مثبت‌اند، اگر و فقط اگر یك نقطهٔ گویا روی خم "فرما" یعنی $x^n+y^n=۱$ غیر ازنقاط برخورد خم با محورها، وجود داشته باشد؛ در حالت $n=۳$ این خم ازگونهٔ ۱ است. اما عدم وجود جواب صحیح و مثبت برای $a^۳+b^۳=c^۳$ با روشهای مقدماتی نظریهٔ اعداد قابل اثبات است. گونهٔ $x^n+y^n=۱$ در حالت کلی برابر $g=(n-۱)(n-۲)/۲$ است. بنابراین برای $n\geqslant ۴$ گونهٔ خم بیش‌از ۱ است. درنتیجه، قضیهٔ‌فالیتنگز به‌کار می‌آید ومی‌توانیم نتیجه بگیریم که به‌ازای هرمقدار n حداکثر تعداد متناهی جواب وجود دارد.

می‌توان تعاریفی از گونهٔ یك خم ارائه دادکه به‌هیچ وجه به توپولوژی خم مختلط متناظر بستگی نداشته باشند. مثلاً به‌بحثهایی درقضیهٔ ریمان و قضیهٔ ریمان‌ـراخ در [۴] و یا [۶] مراجعه کنید.

پیوست

هدف ازاین پیوست تشریح وجه تسمیهٔ "خمهای بیضوی" است. توجه کنیدکه بیضی یك خم بیضوی نیست، زیرا به‌وسیلهٔ یك معادلهٔ چند جمله‌ای از درجهٔ ۲ تعریف می‌شود و بنابراین خمی گویاست.

منشاء این اسم در مسئلهٔ یافتن طول قوس قسمتی از یك بیضی است. اگر بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

را درنظر بگیریم و ds، جزء طول قوس را، بنویسیم، داریم

$$ds=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\,dx=\frac{((b^2-a^2)x^2+a^4)\,dx}{a\sqrt{((b^2-a^2)x^2+a^4)(a^2-x^2)}}$$

دراینجا با درنظر گرفتن عمل ریشهٔ دوم گیری به‌عنوان یکی از "توابع چندمقداری" ریمان، ds را می‌توان به‌بهترین وجه به‌عنوان موجودی "سکنی گرفته" روی رویهٔ ریمانی خم $y^2=((b^2-a^2)x^2+a^4)(a^2-x^2)$ فهمید.

برای مقایسه، توجه کنید که وقتی جزء طول قوس دایرهٔ $x^2+y^2=1$ را می‌نویسیم خواهیم داشت $ds=dx/\sqrt{(1-x^2)}$، که انتگرال آن تابع وارون تابع سینوس است. کاملاً معلوم شده است که وقتی تابع وارون سینوس را به‌فهرست "توابع مقدماتی" خود بیافزاییم، (ازلحاظ نظری) انتگرالهای تمامی توابع به‌شکل $Q(x, \sqrt{1-x^2})$ را که Q نسبت چندجمله‌ایهای دو متغیره است، می‌توان به‌کمک توابع مقدماتی بیان کرد.

به طور مشابه، اگر $p(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ ۳ یا ۴ باشد (مثلاً، $p(x)$ چندجمله‌ای $(a^2-x^2)(a^4+(b^2-a^2)x^2)$ باشد که در بالا درنظر گرفته شد)، فرض کنید به‌مجموعهٔ توابع مقدماتی خود یك تابع اولیهٔ $1/\sqrt{p(x)}$ را بیافزاییم، دراین‌صورت، انتگرالهای توابعی به‌شکل $Q(x, \sqrt{p(x)})$ برحسب این توابع مقدماتی قابل بیان‌اند. این‌گونه انتگرالها به‌نام "انتگرالهای بیضوی" شناخته شدند، زیرا آنها مسائلی بودند که از لحاظ دشواری، به‌معنایی، معادل مسئلهٔ یافتن طول قوس قطعه‌ای از بیضی بودند. خمهای کمکی $y^2=p(x)$ که برای بررسی این‌گونه انتگرالها به‌کار برده می‌شوند همگی ازگونهٔ یك هستند (با فرض اینکه $p(x)$ ریشهٔ مضاعف ندارد)؛ این خمها به‌خمهای بیضوی معروف‌اند.

چند شرح بسیار جالب از تاریخچه مسئلهٔ انتگرالهای بیضوی وجود دارد از جمله: [۳، ۱۲، ۱۳]. صرف‌نظر از زیبایی نابی که ریاضیات این مسئله در بر دارد و احتمالاً به‌بهترین وجه توسط زیگل بررسی شده است، این مسئله ازجمله مسائل بسیار مهم و انگیزه بخشی بود که درتعیین مسیر هندسه و آنالیز درقرن بیستم نقش داشت.

حالت خاص $y^2=x^3+ax+b$ به‌صورت نرمال وایرشتراس معروف است. روی هرمیدان دلخواهی، هر خم بیضوی را می‌توان به‌عنوان مجموعه جواب معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ‌سوم $f(x, y)=0$ درصفحه جا داد. اگرمشخصهٔ میدان ۲ یا ۳ نباشد ($\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ مشخصهٔ صفر دارند و $\mathbf{Z}_p$ دارای مشخصهٔ p است). آنگاه یك تعویض مختصات خطی (تصویری) می‌تواند $f(x, y)=0$ را به‌صورت نرمال وایرشتراس درآورد.

مراجع

1. Ahlfors L., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966, chapter 7.
2. Deneen L., "Secret encryption with public keys," *The UMAP Journal*, (1)8(1987)9-29.

3. Dieudonné J., *History of Algebraic Geometry*, CA: Wadsworth, Monterey, 1985, chapter 5.
4. Fulton W., *Algebraic Curves*, Benjamin - Cummings, Reading, MA, 1974.
5. Gelfond A. O., *The Solution of Equations in Integers*, Freedman and Co, New York, 1961.
6. Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
7. Lenstra H. W., "Efficient Algorithms in Number Theory," *International Congress of Mathematics: Abstracts*, CA: ICM-86, Berkley, 1986.
8. Mazur B., "Arithmetic on curves," *Bulletin of the American Mathematical Society*, (2)14(1986)207-259.
9. Olds C. D., *Continued Fractions*. New Mathematical Library, 9, Random House, New York, 1963.
10. Pocklington H. C., *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 18(1915)29-30.
11. Robert A., *Elliptic Curves*, Lecture Notes in Mathematics 326, Springer-Verlag, New York, 1973.
12. Shafarevitch I., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New-York, 1977, pp. 3-8, 411-419.
13. Siegel C. L., *Topics in Complex Function Theory*, Vol 1. Pure and Applied Mathematics Series, John Wiley and Sons, New-York, 1969.
14. Silverman J., *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag, 1985.
15. Springer G., *Introduction to Riemann Surfaces*, Chelsea, Application, New York, 1981.
16. Wagstaff S., "The irregular primes of 125000," *Mathematics of Computation*, 32(1978)583-591.
17. Walker R. J., *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1978.

ه. ل. آلدر

اتحادهای افرازی ـ از اویلر تا به‌حال*

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

۱. مقدمه. یك افراز از عدد صحیح مثبت n به عنوانَ روشی برای نمایش n به صورت مجموع اعداد صحیح مثبت تعریف می‌شود. دو روش نمایش n که تنها تفاوتشان ترتیب نوشتن بخشها باشد، افراز یکسانی را نمایش می‌دهند. تعداد افرازهای n را با $p(n)$ نشان می‌دهیم. پس، برای مثال، از آنجا که روشهای نمایش ۵ به‌صورت مجموع اعداد صحیح مثبت عبارت‌اند از: ۵، $۱+۴$، $۲+۳$، $۱+۱+۳$، $۱+۲+۲$، $۱+۱+۱+۲$، و $۱+۱+۱+۱+۱$، داریم $p(۵)=۷$. برای $p(n)$ در ۱۹۳۷ فرمول صریحی به‌وسیلهٔ رادماخر کشف شد که به ازای هرعدد صحیح مثبت درست است، اما ازآنجاکه این فرمول از یك رشتهٔ نامتناهی پیچیده تشکیل شده‌است و برای اهداف این مقاله نیازی به‌آن نیست، در اینجا نمی‌آید. از طرف دیگر، تابع مولد ساده‌ای برای $p(n)$ موجود است، یعنی تابعی که، هنگامی به‌صورت یك سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n x^n$ بسط داده شود، ضریب عمومی‌اش $c_n=p(n)$ باشد.

قضیهٔ ۱. تابع مولد $p(n)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f(x)=\frac{۱}{\prod_{r=۱}^{\infty}(۱-x^r)} \quad ، \text{که } |x|<۱ \qquad (۱)$$

برهان قضیهٔ ۱. باید نشان دهیم هنگامی‌که عبارت سمت راست (۱) به‌صورت یك سری توانی بسط داده شود، ضریب عمومی آن $p(n)$ خواهد بود. بدین منظور، عبارت سمت راست (۱) را به‌این‌صورت بازنویسی می‌کنیم

---

* Alder H. L., "Partition identities-from Euler to the present," *Amer. Math. Monthly*, 76(1969)733-746.

$$(۱+x^{۱}+x^{۱۰۲}+x^{۱۰۳}+x^{۱۰۴}+\cdots)$$
$$\cdot(۱+x^{۲}+x^{۲۰۲}+x^{۲۰۳}+x^{۲۰۴}+\cdots)$$
$$\cdot(۱+x^{۳}+x^{۳۰۲}+x^{۳۰۳}+x^{۳۰۴}+\cdots) \qquad (۲)$$
$$\cdot(۱+x^{۴}+x^{۴۰۲}+x^{۴۰۳}+x^{۴۰۴}+\cdots)$$
$$\cdot(۱+x^{۵}+x^{۵۰۲}+x^{۵۰۳}+x^{۵۰۴}+\cdots)\cdots$$

اگر این عبارت‌را درهم ضرب کنیم وضریب، مثلاً $x^{۵}$ را محاسبه کنیم درمی‌یابیم که جملهٔ $x^{۵}$ به‌روشهای زیر به‌دست می‌آید

$$۱\cdot۱\cdot۱\cdot۱\cdot x^{۵}\cdot۱, \qquad x^{۱}\cdot۱\cdot۱\cdot x^{۴}\cdot۱, \qquad ۱\cdot x^{۲}\cdot x^{۳}\cdot۱\cdot۱\cdot۱,$$
$$x^{۱۰۲}\cdot۱\cdot x^{۳}\cdot۱\cdot۱, \quad x^{۱}\cdot x^{۲۰۲}\cdot۱\cdot۱, \quad x^{۱۰۳}\cdot x^{۲}\cdot۱\cdot۱, \quad x^{۱۰۵}\cdot۱\cdot۱$$

هریك ازاین حاصلضربها با افرازی از۵متناظراست، در واقع به‌همان ترتیبی‌که افرازهای ۵ درفهرست بالا آمدند. ازآنجا که تناظری یك به‌یك بین تعداد دفعاتی‌که جملهٔ x^{n} در حاصلضرب (۲) به دست می‌آید و تعداد افرازهای n برقرار است، ضریب x^{n} در (۲) همان $p(n)$ است.

گاهی برای تأکید براینکه هیچ قیدی در مورد نحوهٔ افراز n به‌بخشهایش گذاشته نشده است، تابع $p(n)$ را تعداد افرازهای نامقید n نیز می‌نامند. یکی از مباحث جالب ـ و شاید جالبترین مبحث ـ نظریهٔ افرازها به افرازهای مقید مربوط می‌شود، یعنی، افرازهایی که درآنها قیدی روی بخشها گذاشته شده است. جذابیت این مبحث از این حقیقت ناشی می‌شود که اتحادهای شگفت‌انگیز متعددی وجود دارندکه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت برقرارند وکلاً به‌شکل

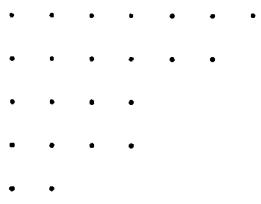
$$p'(n)=p''(n) \qquad (۳)$$

می‌باشندکه $p'(n)$ تعداد افرازهایی از n است‌که درآن، شرطی روی بخشهای n گذاشته شده است و $p''(n)$ تعداد افرازهایی از n است که درآن، شرطی کاملاً متفاوت روی بخشهای n گذاشته شده‌است. هدف این‌مقاله، بررسی وجود یاعدم وجود چنین اتحادهایی، تا آنجا که تاکنون معلوم شده، است.

شاید ساده‌ترین اتحاد از نوع فوق همین باشدکه در قضیهٔ زیر می‌آید.

قضیهٔ ۲. تعداد افرازهای n به دقیقاً μ بخش (μ یك عدد صحیح مثبت مفروض) برابر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی است که بزرگترین آنها μ است.

برهان قضیهٔ ۲. یك‌افراز n به‌دقیقاً μ بخش را می‌توان به‌طورتصویری با μ سطر از نقاط نشان داد، که تعداد نقاط در هر سطر با یك بخش مساوی است. پس، افراز ۲۳ به ۵ بخش $۲+۴+۴+۶+۷$ را می‌توان با شکل زیر، نشان داد



اگر نمودار را به طور عمودی و ستون بـه ستون بخوانیم، افـرازی از ۲۳ بـه شکل ۱+۲+۲+۴+۲+۵+۵ را نشان می‌دهد، که عبارت است از افرازی از ۲۳ که بزرگترین بخش‌آن ۵ است. پس به هرافراز n به μ بخش، افرازی از n به‌بخشهایی که بزرگترین آنها μ است، نظیرمی‌شود، و، ازآنجا که این تناظر یك به‌یك است، قضیه را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ زیرنتیجهٔ بلافاصلهٔ قضیهٔ ۲ است.

قضیهٔ ۳. تعداد افرازهای n به‌حداکثر μ بخش (μ یك عدد صحیح مثبت مفروض) برابر تعداد افرازهایی از n است که هیچیك از بخشها از μ تجاوز نمی‌کنند.

قضیهٔ ۲ به‌روشی مستقیم وبا برهانی ترکیبیاتی ثابت شد،یعنی، تناظری یك‌به‌یك بین دونوع افرازمقید برقرارشد. تعدادی ــ یا شاید بسیاری ــ ازاتحادهایی‌که دونوع افراز مقید را دربردارند، بـا برهانهای تحلیلی بسیار ساده‌تر ثابت می‌شوند و حتی برخی از حالات تنها با این برهانها می‌توانند ثابت شوند. یعنی، با نشان دادن اینکه تابع مولد دو نوع افراز مقیدی که در اتحاد ظاهر می‌شوند، یکی هستند. حال به بررسی برخی از این اتحادها می‌پردازیم.

۲. توابع افراز مقید. به منظور آنکه بتوانیم اتحادهایی ازنوع (۳) را با استفاده ازتوابع مولد به‌اثبات برسانیم، باید بدانیم که چگونه توابع مولد افرازهای مقید معینی را به‌دست آوریم. درجدول زیرچندتایی راکه بعداً به‌آنها نیاز داریم، فهرست‌کرده‌ایم.

افراز به	تابع مولد
بخشهای متمایز	$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu})$
بخشهای فرد	$1/\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-x^{2\nu+1})$
بخشهایی‌که از μ تجاوز نمی‌کنند	$1/\prod_{\nu=1}^{\mu}(1-x^{\nu})$
بخشهایی‌که از مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots\}$ گرفته شده‌اند	$1/\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^{a_\nu})$

این توابع مولد را به‌سادگی می‌توان با اصلاحات مناسبی در برهان قضیهٔ ۱ به‌دست آورد. پس، از آنجا که درحالت افراز به‌بخشهای متمایز، هیچ‌عدد صحیح مثبتی بیش از یک بار مجاز نیست، هریك ازمجموعهای متناهی (۲) باید به‌دوجملهٔ نخست خود تقلیل یابد. مشابهاً برای افرازهای بـا بخشهای فرد، مجموعهای نامتناهی دوم، چهارم، ششم، و ... از (۲) باید حذف شوند کـه بلافاصله تابع مولد قرارگرفته در سطر دوم جدول فوق، به دست می‌آید.

۳. اتحادهای اویلر و راجرز-رامانوجان[1]. مشهورترین اتحادی که با استفاده از توابع مولد به سادگی اثبات می‌شود، منسوب به اویلر [۱۱] است، که در ۱۷۴۸ آن را ثابت کرد.

قضیهٔ ۴ (اویلر). تعداد افرازهای n به بخشهای متمایز برابر تعداد افرازهای n به بخشهای فرد است.

برهان قضیهٔ ۴. باید نشان دهیم که تابع مولد افراز به بخشهای متمایز، که درسطر ۱ از جدول فوق آمده است، همان تابع مولد افراز به‌بخشهای فرد، که درسطر ۲ ازجدول فوق آمده است، می‌باشد. این امر به‌سادگی وبا استدلال زیرانجام می‌شود

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu})=(1+x)(1+x^{2})(1+x^{3})\cdots=\frac{1-x^{2}}{1-x}\,\frac{1-x^{4}}{1-x^{2}}\,\frac{1-x^{6}}{1-x^{3}}\cdots$$

$$=\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-x^{2\nu+1})}$$

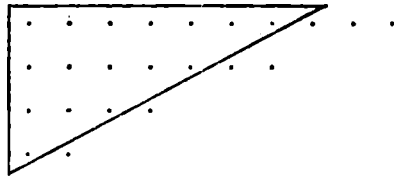
اثبات این نتیجه با استفاده از روشهای ترکیبیاتی ـ هرچند به‌طرز قابل ملاحظه‌ای مشکلتر است ـ امکان‌پذیر است. برای مثال [۲۶] را ببینید.

از آنجا که اتحاد اویلر افرازهای به بخشهای متمایز را دربردارد، یعنی افرازهایی که اختلاف بخشهای آنها باید دست‌کم ۱ باشد، طبیعی است که بپرسیم آیا مشابهاً اتحادی وجود دارد کـه شامل افرازهایی باشد کـه اختلاف بخشها باید دست‌کم ۲ باشد؟ چنین اتحادی توسط راجرز و رامانوجان در اوایل قرن کشف شد.

قضیهٔ ۵ (راجرز-رامانوجان). تعداد افرازهای n به‌بخشهایی کـه اختلافشان دست کم ۲ است، برابر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که همنهشت با ۱ یا ۴ به‌پیمانهٔ ۵ هستند، است.

بیان این قضیه به صورت تساوی توابع مولد دو نوع افراز مقیدی که دربر دارد، مستلزم یافتن تابع مولد تعداد افرازهای n به بخشهایی کـه تفاضلشان دست‌کم ۲ است، می‌باشد. چنین افرازی را به‌طور تصویری نشان می‌دهیم، برای مثال، $۲۳=۱۰+۷+۴+۲$، چنین نشان داده می‌شود

1. Rogers-Ramanujan



ازآنجا که بخشها باید دست‌کم به‌اندازهٔ ۲ اختلاف داشته باشند، هرسطرحداقل دو نقطه بیش از سطر قبل دارد. پس اگر افراز دقیقاً μ بخش داشته باشد، نمودار باید دست‌کم $\mu^2=(1-2\mu)+\cdots+5+3+1$ نقطه داشته باشد. (درشکل ما، آنها به صورت نقاط درون مثلث نشان داده شده‌اند.) نتیجتاً می‌توان افراز n را به μ بخش که اختلافشان دست‌کم ۲ است به‌طورتصویری توسط مثلثی با μ^2 نقطه وافرازی از $n-\mu^2$ به‌حداکثر μ بخش‌نشان داد. برای یافتن تعداد افرازهای n به μ بخش به‌تابع مولد تعداد افرازهای $n-\mu^2$ به‌حداکثر μ بخش نیاز داریم که بنابر قضیهٔ ۲ برابر است با تعداد افرازهای $n-\mu^2$ به‌بخشهایی‌که از μ تجاوز نمی‌کنند. با توجه به سطر ۳ جدول فوق، می‌دانیم که تابع مولد برای تعداد افرازهای n به‌بخشهایی‌که از μ تجاوز نمی‌کنند، عبارت است از

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\mu)}$$

نتیجتاً ضریب x^n در

$$\frac{x^{\mu^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\mu)} \qquad (4)$$

با تعداد افرازهای $n-\mu^2$ به‌بخشهایی‌که از μ تجاوز نمی‌کنند، برابراست. برای یافتن تعداد کل افرازهای n به بخشهایی که اختلافشان دست‌کم ۲ است، باید مجموع ضرایب x^n در (۴) را به‌ازای $\mu=1, 2, \cdots$ بیابیم؛ یعنی، ضریب x^n در

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x^{\mu^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\mu)} \qquad (5)$$

را تعیین کنیم.

نتیجتاً، قضیهٔ ۵ به‌عنوان تساوی توابع مولد به‌این شکل بیان می‌شود

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{x^{\mu^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\mu)}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5\nu+1})(1-x^{5\nu+4})} \qquad (6)$$

برهان (۶) و در نتیجه برهان قضیهٔ ۵، قدری طولانیتر از برهان اتحاد اویلراست. اساس این اثبات، تحویل حاصلضرب نامتناهیی که در سمت راست (۶) ظاهر می‌شود به مجموع سمت چپ است که با استفاده از اتحاد ژاکوبی

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-y^{2\nu+2})(1+y^{2\nu+1}z)(1-y^{2\nu+1}z^{-1})=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}y^{\mu^2}z^{\mu} \qquad (۷)$$

و تابعی کمکی که معادله‌ای بازگشتی برای آن استنتاج می‌شود، انجام می‌شود.

جزئیات برهان دراینجا نمی‌آید، اما در [۱۷، فصل ۱۹] و [۲۵] آمده است.

راجرز و رامانوجان اتحاد دومی نیز یافتند که درآن، بخشها نه‌تنها ملزم بودند که اختلافشان دست‌کم ۲ باشد بلکه هریك می‌بایست دست‌کم ۲ باشد.

قضیهٔ ۶ (راجرز-رامانوجان). تعداد افرازهای n به بخشهایی که اختلافشان دست‌کم ۲ است و هر بخش بزرگتر یا مساوی ۲ است، برابر تعداد افرازهای n به بخشهایی است که همنهشت با ۲ یا ۳ به‌پیمانهٔ ۵ هستند.

برای بیان این قضیه به صورت تساوی توابع مولد دو افراز مقیدی که دربردارد، دقیقاً همان روش قضیهٔ ۵ را پیش می‌گیریم. تنها تفاوت دراین است‌که به جای مثلث آن نمودار یك ذوزنقه در نظر می‌گیریم، که سطر انتهایی آن شامل ۲ نقطه است، سطر بعدی ۴ نقطه، و غیره، بنابراین درون ذوزنقه کلاً $\mu+\mu^2=2+4+6+\cdots+2\mu$ نقطه دربر دارد. نتیجتاً، قضیهٔ ۶ به‌صورت تساوی توابع مولد به‌شرح زیر بیان می‌شود

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{x^{\mu^2+\mu}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{\mu})}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5\nu+2})(1-x^{5\nu+3})} \qquad (۸)$$

۴. عدم وجود اتحاد دیگری از نوع اویلر ـ راجرز ـ رامانوجان. اگر تعداد افرازهای n را به بخشهایی که اختلافشان دست‌کم d است و هر بخش بزرگتر یا مساوی m است با $q_{d,m}(n)$ نشان دهیم، آنگاه اتحادهای اویلر و راجرز-رامانوجان به‌شکل کلی

$$q_{d,m}(n)=p_{d,m}(n) \qquad (۹)$$

خواهند بود که $p_{d,m}(n)$ عبارت است ازتعداد افرازهای n به‌بخشهایی‌که دریك مجموعهٔ ثابت $S_{d,m}$ هستند. پس درحالت اتحاد اویلر $(d=1,\ m=1)$ مجموعهٔ $S_{1,1}$ مجموعهٔ اعداد صحیح فرد است؛ و در حالت اتحاد اول راجرز-رامانوجان، $S_{2,1}$ مجموعهٔ اعداد همنهشت با ۱ یا ۴ به‌پیمانهٔ ۵ است.

طبیعتاً این سؤال پیش می‌آیدکه آیا اتحاد دیگری ازنوع (۹) وجود دارد؟ به‌ازای $d=1$، چنین اتحادی به‌ازای هر m وجود دارد. یعنی، برای اتحاد اویلر تعمیم زیر را داریم.

قضیهٔ ۷. تعداد افرازهای n به‌بخشهای مجزا، که هر بخش بزرگتر یامساوی m است، برابر است با تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که در مجموعهٔ

$$\{m,\ m+1,\ \ldots,\ 2m-1,\ 2m+1,\ 2m+3,\ \ldots\}$$

قرار دارند.

برهان این قضیهٔ نظیر برهان قضیهٔ ۴ است.

سوای این تعمیم قضیهٔ اویلر و دو اتحاد راجرز-رامانوجان، هیچ اتحاد دیگری از نوع (۹) نمی‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین قضیهٔ زیررا داریم.

قضیهٔ ۸. $q_{d,m}(n)$ یعنی تعداد افرازهای n به بخشهایی که اختلافشان دست‌کم d است و هر بخش بزرگتر یا مساوی m است، نمی‌تواند برابر تعداد افرازهای n به بخشهایی که در مجموعهٔ دلخواهی از اعداد صحیح قرار دارند باشد، مگرآنکه $d=1$ یا $d=2$ و $m=1,2$.

این قضیه، در حالت $m=1$ در ۱۹۴۶ توسط لهمر[1] [۱۸] ثابت شد، وحالت کلی آن نیزدر ۱۹۴۸ توسط نگارنده [۱] به‌اثبات رسید. برای اثبات آن توجه‌کنیدکه تعمیم ساده‌ای از بحثی‌که برای یافتن تابع مولد (۵) پیش‌گرفتیم نتیجه می‌دهد که تابع مولد $q_{d,m}(n)$، تعداد افرازهای n به‌بخشهایی‌که اختلافشان دست‌کم۲ است وهربخش بزرگتر یا مساوی m است، با رابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{m\mu+d\mu(\mu-1)/2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\mu)} \qquad (۱۰)$$

در حالی که تابع مولد برای تعداد افرازهای n به بخشهایی که از یك مجموعهٔ ثابت $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ گرفته شده‌اند در سطر آخر جدول فوق آمده است. پس، برهان عبارت است ازاینکه نشان دهیم به‌هرطریقی که a_iها انتخاب شده باشند، تابع مولد اخیر نمی‌تواند مساوی (۱۰) باشد.

بدین طریق، ثابت می‌شودکه در واقع اتحاد اویلروتعمیمش‌که درقضیهٔ ۷ داده شد، همراه با دو اتحاد راجرز-رامانوجان کلیهٔ اتحادهای ممکن ازنوع (۹) هستند.

ممکن است این سؤال پیش بیایدکه هرگاه $q_{d,m}(n)$ تعداد افرازهای n به‌بخشهای مجزایی باشدکه ازمجموعهٔ ثابت $S_{d,m}(n)$ گرفته شده‌اند. آیا اتحادهای دیگری ازنوع (۹) امکان‌پذیرند؟ با توجه به‌قضیهٔ زیر این نیز ممکن نیست.

قضیهٔ ۹. به‌استثنای حالت $d=1$، $q_{d,m}(n)$، یعنی تعداد افرازهای n به بخشهایی که اختلافشان دست کم d است و هر بخش بزرگتر یا مساوی m است، نمی‌تواند برابر تعداد افرازهای n به‌بخشهای مجزایی که از مجموعه‌ای از اعداد صحیح گرفته شده‌اند، باشد.

برهان این قضیه که در [۱] نیز آمده است، عبارت است از اینکه نشان داده شود به ازای هیچ انتخابی از عناصر a_i از مجموعهٔ $S_{d,m}(n)$، تابع مولد تعداد افرازهای n به‌بخشهایی متمایزکه ازاین مجموعه گرفته شده‌اند، یعنی

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-x^{a_\nu})$$

نمی‌تواند برابرتابع مولدی باشدکه با (۱۰) معین می‌شود.

1. Lehmer

۵. نخستین تعمیمهای ترکیباتی اتحاد اویلر. هرچند بنابر بخش ۲ ردهٔ معینی از تعمیمهای اتحاد اویلر نمی‌توانند موجود باشند، بـا این حال مثلاً ثابت شده است کـه تعمیمهای دیگری وجود دارند. در این راستا، نخستین نتیجهٔ قابل توجه در ۱۸۳۳ توسط گلایشر [۱۲] ثابت شد.

قضیهٔ ۱۰ (گلایشر). تعداد افرازهای n به بخشهایی که بر d بخش‌پذیر نیستند برابر تعداد افـرازهـای n بـه شکل $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ است کـه در آن $n_i \geq n_{i+1}$، و $n_i \geq n_{i+d-1}+1$.

قضیهٔ ۱۰ به‌ازای $d=2$ به‌وضوح به‌قضیهٔ اویلر تقلیل می‌یابد، زیرا نامساوی آخر به‌این معنی است که اگر بخشهای افراز را به‌ترتیب ناافزایشی بنویسیم، هر بخش دست‌کم یکی بیشتر از قبلی است. به‌ازای $d=3$ نامساوی آخر به‌این معنی است که به‌ازای هـر مجموعه ازسه بخش متوالی افراز، اولی دست‌کم ۱ واحد بیشتر از آخری‌است. پس، در این حالت تساوی دو بخش مجاز است.

در ۱۸۸۲ تعمیم دیگری ازقضیهٔ اویلرو در راستایی کاملاً متفاوت توسط سیلوستر [۲۶] کشف شد.

قضیهٔ ۱۱ (سیلوستر). تعداد افرازهای n به‌بخشهای فردی که دقیقاً k بخش متمایز در آنها ظاهر می‌شود، با تعداد افرازهای n به‌بخشهای متمایزی که دقیقاً k دنباله از اعداد صحیح متوالی در آنها ظاهر می‌شود، برابر است.

توجه‌کنید دراین قضیه دنباله‌ای از k عدد صحیح متوالی به‌ازای $k=1$ می‌تواند تنها از یك عدد صحیح تشکیل شده باشد.

حال، برای $n=13$، افرازهای آن به بخشهای فردی که دقیقاً سه بخش متمایز در آنهـا ظاهر می‌شوند عبـارت‌اند از: $1+3+9$، $1+5+7$، $1+1+1+3+7$، $1+1+3+3+5$، $1+1+1+1+1+3+5$، بنابراین ۵ افراز از این نوع داریم، درحالی‌که افرازهای ۱۳ به‌بخشهایی‌که دقیقاً ۳ دنباله از اعداد صحیح متوالی در آنها ظاهرمی‌شوند عبارت‌اند از: $1+3+9$. (که در آن هریك ازسه دنباله دقیقاًیك‌عدد صحیح دارد)، $1+4+8$، $1+5+7$، $2+4+7$، $1+2+4+6$ (که دو دنباله هریك تنها از یك عدد صحیح و یك دنباله از دو عدد صحیح متوالی، یعنی، ۱ و ۲ تشکیل شده است.) بنابراین بازهم ۵ افراز ازاین نوع داریم.

قضیهٔ اویلر نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۱۱ است که با جمعبندی روی مقادیرمختلف k به‌دست می‌آید.

سیلوستر این قضیه ــ و نتیجتاً قضیهٔ اویلر را ــ بـا روشی حسابی ثابت‌کرد [۲۶، بخش ۴۶]. در ۱۹۶۶ اندروز آن را با استفاده از توابع مولد نیز ثابت‌کرد [۵].

۶. تعمیمهای تحلیلی اتحادهای راجرز-رامانوجان. چنانچه اتحادهای راجرز-رامانوجان را تنها به عنوان معادلات تابعی بررسی کنیم و از تعبیر آنها برحسب افرازها

چشم‌پوشی کنیم، آنگاه تعمیم اتحادهای راجرز-رامانوجان امکان‌پذیر است. از آنجا که اتحاد ژاکوبی (۷) که نقشی حیاتی در برهان اتحادهای راجرز-رامانوجان دارد، یك حاصلضرب نامتناهی متشکل از سه جملهٔ متمایز را به رشتهٔ نامتناهی معینی تبدیل می‌کند، طبیعی است مجموعه‌ای را که دراتحاد اول راجرز-رامانوجان ظاهر شد به‌عنوان مجموعهٔ اعدادی که همنهشت با ۰، ۲ $\pm$ (پیمانهٔ m) نیستند، و نه به‌عنوان مجموعهٔ اعداد همنهشت با ۱ یا ۴ (پیمانهٔ ۵)، در نظر بگیریم. حال اتحاد اول راجرز-رامانوجان (۶) که در برگیرندهٔ حالتی است که بخشها همنهشت با ۰، ۲ $\pm$ (پیمانهٔ ۵) نیستند، می‌تواند به حالتی که بخشها همنهشت با ۰، $k \pm$ (پیمانهٔ $2k+1$) نیستند، تعمیم یابد.

قضیهٔ ۱۲. اتحاد زیر برقرار است

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-x^{(2k+1)\nu+k})(1-x^{(2k+1)\nu+k+1})}{(1-x^{(2k+1)\nu+1})(1-x^{(2k+1)\nu+2})\cdots(1+x^{(2k+1)\nu+2k})}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x)}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{\mu})} \qquad (11)$$

که سمت چپ، تابع مولد افرازها به بخشهایی‌که همنهشت با ۰، $k \pm$ (پیمانهٔ $2k+1$) نیستند، است و $G_{k,\mu}(x)$ چندجمله‌ایهایی برحسب x هستندکه به‌ازای $k=2$، یعنی‌برای حالت راجرز-رامانوجان به‌یك جمله‌ای x^{μ^2} تقلیل می‌یابند.

اتحاد دوم راجرز-رامانوجان (۸) که دربردارندهٔ حالتی است که بخشها همنهشت با ۲ یا ۳ (پیمانهٔ ۵) هستند، یا مشابهاً، بخشهایی که همنهشت با ۰، ۱ $\pm$ (پیمانهٔ ۵) نیستند، می‌تواند به حالتی که بخشها همنهشت با ۰، ۱ $\pm$ (پیمانهٔ $2k+1$) نیستند، تعمیم یابد.

قضیهٔ ۱۳. اتحاد زیر برقرار است

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{(2k+1)\nu+2})(1-x^{(2k+1)\nu+3})\cdots(1-x^{(2k+1)\nu+(2k-1)})}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x)x^{\mu}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{\mu})} \qquad (12)$$

که $G_{k,\mu}(x)$ همان چندجمله‌ایهایی هستند که در قضیهٔ ۱۲ ظاهر شدند.

به‌طورکلیتر، می‌توان نشان دادکه به‌ازای هر r درمحدودهٔ $0 \le r \le k-1$، اتحادی وجود دارد که دربردارندهٔ تابع مولد تعداد افرازها به بخشهایی که همنهشت با ۰، $(k-r) \pm$ (پیمانهٔ $2k+1$) نیستند، است. بنابراین برای یك پیمانهٔ مفروض $2k+1$ همواره kتا از این اتحادها وجود دارد. این امر با این حقیقت‌که برای پیمانهٔ ۵ دوتا از این اتحادها وجود دارد، مطابقت دارد.

قضایای ۱۲ و ۱۳ در ۱۹۵۴ و با استفاده از تعمیم برهان اتحادهای راجرز-رامانوجان توسط نگارنده ثابت شده و در اثبات، بازهم اتحاد ژاکوبی (۷) و تعمیمی از تابع کمکی که در برهان اتحادهای راجرز-رامانوجان به‌کار رفت، لازم آمد. این تابع کلیتر و رابطهٔ بازگشتی آن اساساً در ۱۹۳۶ توسط سلبرگ معرفی شد [۲۲، ص۴، معادلهٔ ۳]. در ۱۹۵۷ سینگ برهان دیگری برای قضایای ۱۲ و ۱۳ به‌دست داد [۲۳]. برخی از خواص چندجمله‌ایهای $G_{k,\mu}(x)$ در [۲] ارائه شد. تعدادی از دیگر خواص این چندجمله‌ایها را سینگ در دومقاله درسالهای ۱۹۵۷ [۲۴] و ۱۹۵۹ [۲۵] استنتاج کرد. در ۱۹۶۰ کارلیتز فرمول صریحی برای این چندجمله‌ایها ارائه کرد [۹]. درحالی‌که قضایای ۱۲ و ۱۳ نشان می‌دهد که تعمیم اتحادهای راجرز-رامانوجان امکان‌پذیر است، تعبیر عبارات سمت راست (۱۱) و (۱۲) به‌عنوان تابع مولد ردهٔ خاصی ازافرازهای مقید تاکنون امکان‌پذیر نبوده‌است.

۷. تعمیمهای ترکیباتی اتحادهای راجرز-رامانوجان. درپی تلاش برای تعمیم اتحادهای راجرز-رامانوجان به‌گونه‌ای که بیانگر تساوی دو نوع افراز مقید باشد، در ۱۹۶۱ نخستین کامیابی نصیب گوردون شد [۱۵]. این تعمیم اتحادهای راجرز-رامانوجان را همان‌گونه توسعه می‌دهدکه قضیهٔ گلایشر اتحاد اویلر را توسعه داد.

قضیهٔ ۱۴ (گوردون). گیریم $p_{k,r}(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که همنهشت با r به پیمانهٔ $2k+1$ $(\pm r)$ نیستند که در آن $1 \le r \le k$. گیریم $q_{k,r}(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به صورت $n_1+n_2+\cdots+n_s$ باشد که $n_i \ge n_{i+1}$ و $n_i \ge n_{i+k-1}+2$، $1 \le r \le k$. آنگاه حداکثر $r-1$ بار به‌عنوان یک بخش ظاهر شود.

$$p_{k,r}(n) = q_{k,r}(n) \qquad (۱۳)$$

این قضیه به‌ازای $k=2$، $r=2$ به اتحاد اول راجرز-رامانوجان و به ازای $k=2$، $r=1$ به اتحاد دوم آنها تقلیل می‌یابد. مانند حالت تعمیمهای تحلیلی اتحاد راجرز-رامانوجان که در بخش ۶ شرح داده شد، دراین حالت نیز به‌ازای پیمانهٔ مفروض $2k+1$ دقیقاً k اتحاد وجود دارد.

گوردون درمقاله‌اش [۱۵] برهانی ترکیباتی از قضیهٔ ۱۴ ارائه کرد که، بنابراین، در حالت خاص شامل برهانی از اتحاد راجرز-رامانوجان نیز است. در ۱۹۶۶، اندروز [۶] برهانی تحلیلی از قضیهٔ ۱۴ در راستای برهان رامانوجان از اتحادهایش [۲۰] به‌دست داد که در آن، از تابع کمکی و فرمول بازگشتی آن، که توسط سلبرگ معرفی شد [۲۲] و در برهانهای قضایای ۱۲ و ۱۳ نیز به‌کار رفت، استفاده کرد.

برای برخی از اهداف، باید توجه کرد که $q_{k,r}(n)$ را می‌توان به عنوان تعداد افرازهای n به‌صورت زیر انگاشت

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot i$$

که در آن f_i تعداد دفعاتی‌است که بخش i درافراز ظاهر می‌شود و $f_i + f_{i+1} \le k-1$

و ۱ بـه عنوان یك بخش حداکثر $r-1$ بار ظاهر می‌شود. شرط $f_i+f_{i+1}\leq k-1$ ایجاب می‌کند که تعداد دفعات ظهور دوعدد صحیح متوالی i و $i+1$ در افرازحداکثر $k-1$ باشد، بنابراین درهرمجموعه از k بخش متوالی یك افراز، که به‌ترتیب ناافزایشی مرتب شده‌اند اختلاف دوبخش اول و آخر باید دست‌کم ۲ باشد، یعنی، $n_i\geq n_{i+k-1}+2$.

اندروز در ۱۹۶۵ توانست با استفاده از تعمیم اخیر، قضیهٔ گوردون را به صورت زیر تعمیم دهد [۴]:

قضیهٔ ۱۵ (اندروز). گیریم $p_{d,k,r}(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که همنهشت با $\pm dr$، ۰ (پیمانهٔ $d(2k+1)$) نیستند، که در آن $d\geq 1$ و $1\leq r\leq k$، ۰. گیریم $q_{d,k,r}(n)$ نمایشگر تعـداد افرازهای n بـه صورت $\sum_{i=1}^{\infty} f_i\cdot i$ باشد کـه اگر (پیمانهٔ d) $f_i\equiv\alpha$ $(0\leq\alpha\leq d-1)$ آنگاه $f_i+f_{i+1}\leq dk+\alpha-1$، و ۱ به‌عنوان یك بخش حداکثر $dr-1$ بار ظاهر شود. در این صورت $p_{d,k,r}(n)=q_{d,k,r}(n)$.

اگر $d=1$، قضیهٔ ۱۵ به‌قضیهٔ ۱۴ گوردون تقلیل می‌یابد. نتیجتاً، این‌قضیه نخستین قضیه‌ای است کـه هم اتحاد اویلر و هم اتحادهای راجرز-رامانوجان را به عنوان حالات خاص دربرمی‌گیرد.

۸. اتحاد شور[1]. اگر در اتحاد اویلر (قضیهٔ ۴ را ببینید) "بخشهایی که به پیمانهٔ ۴ همنهشت با ± 1 هستند" را جایگزین "بخشهای فرد" و دراتحاد اول راجرز-رامانوجان (قضیهٔ ۵ را ببینید) "بخشهایی کـه به پیمانهٔ ۵ همنهشت بـا ± 1 هستند" را جایگزین "بخشهایی که به پیمانهٔ ۵ همنهشت با ۱ یا ۴ هستند" کنیم، شباهت ایـن دو اتحاد بسیار شگفت‌انگیز خواهد بود. بنابراین، $p_d(n)$ را به‌صورت تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که به‌پیمانهٔ $d+3$ همنهشت ± 1 هستند، تعریف می‌کنیم؛ حال اتحاداول اویلر را به‌صورت $q_{1,1}(n)=p_1(n)$ و اتحاد اول راجرز-رامانوجان را بـه صورت $q_{2,1}(n)=p_2(n)$ می‌توان نوشت. به‌عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ ۸، $q_{3,1}(n)$ نمی‌تواند برابر $p_3(n)$ باشد، اما به‌وضوح این سؤال پیش می‌آیدکه آیا ارتباطی بین این دو وجود دارد؟ شور ثابت‌کرد که $q_{3,1}(n)-p_3(n)$ تعداد افرازهای n بـه بخشهایی است که دست‌کم ۳تا اختلاف دارند وشامل دست‌کم دو مضرب متوالی ۳ است. بنابراین قضیهٔ زیر را داریم‌که به‌شکل کمی متفاوت بیان شده است:

قضیهٔ ۱۶ (شور). تعداد افرازهای n به بخشهایی که اختلافشان دست کم ۳ است و هیچ دو مضرب متوالی ۳ در آنها ظاهر نمی‌شود برابر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی است که به پیمانهٔ ۶ همنهشت با ۱ یا ۵ هستند.

پس، برای مثال، افرازهای ۱۵ به‌بخشهایی‌که اختلافشان دست‌کم ۳ است و شامل هیچ دومضرب متوالی ۳ نیستند عبارت‌اند از ۱۵

$$8+5+2,\ 9+5+1,\ 10+4+1,\ 10+5,\ 11+4,\ 12+3,\ 13+2,\ 14+1$$

1. Schur

بنابراین تعداد این‌نوع افرازها ۹ است که با (۱۵)$q_{۳,۱}$، تعداد افرازهای ۱۵ به‌بخشهای همنهشت با ۱ یا ۵ به‌پیمانهٔ ۶، برابراست.

قضیهٔ ۱۶ در ۱۹۲۶ و با استفاده از لمی در ارتباط با روابط بازگشتی برای چند-جمله‌ایهای معینی توسط شور به‌اثبات رسید. در۱۹۲۸، گلایزبرگ [۱۳] برهان پیچیده‌ای ازاین قضیه‌ارائه داد. در۱۹۶۷ اندروز[۸] برمبنای قضیهٔ مقایسه‌ای آپل برهان کوتاهتری ارائه داد [۱۰، ص ۱۰۱].

۹. عدم وجود تعمیمهای معینی از اتحاد شور. بـا استفاده از نمادهای بخش ۸، می‌دانیم که تفاضل $q_{d,۱}(n)-p_d(n)$ به ازای $d=۱$ (اتحاد اویلر) و $d=۲$ (اتحاد اول راجرز-رامانوجان) برابر صفر است و به‌ازای $d=۳$ ایـن تفاضل نمایانگر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی است که اختلافشان دست‌کم ۳ است و دست‌کم دومضرب متوالی ۳ را دربردارند. اما، به‌ازای $d\geq ۴$ به‌نظرمی‌رسد حتی اگر بتوانیم نشان دهیم که تفاضل $q_{d,۱}(n)-p_d(n)$ نامنفی‌است، این‌تفاضل بازهم هیچ تعبیرساده‌ای نداشته‌باشد. درحالت خاص، قضیهٔ زیرنشان می‌دهدکه تعبیری شبیه به‌حالت $d=۳$ وجود ندارد.

قضیهٔ ۱۷. چنانچه $d>۳$، تعداد افرازهای n بـه بخشهایی کـه اختلافشان دست‌کم d است و در بین آنهـا هیچ دو مضرب متوالی d ظاهـر نمی‌شود، نمی‌تواند بـرابر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی باشد که از مجموعهٔ معینی گرفته شده‌اند.

این قضیه در ۱۹۴۸ توسط نگارنده ثابت شد [۱]. روشی راکه درآن برهان به‌کار رفت همچنین می‌توان برای اثبات‌اینکه دوگانی برای اتحاد شور نمی‌تواند موجود باشد به‌کاربرد، دوگان به‌این مفهوم که اتحاد دوم راجرز-رامانوجان دوگانی برای اتحاد اول است، بنابراین قضیهٔ زیر را ثابت‌کرده‌ایم.

قضیهٔ ۱۸. تعداد افرازهای n به‌بخشهایی‌که اختلافشان دست‌کم۳ است، هیچ بخشی مساوی ۱ نیست، و در میان آنهـا هیچ دو مضرب متوالی ۳ ظاهر نمی‌شود، بـرابر تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که از مجموعهٔ معینی گرفته شده‌اند، نیست.

به‌ازای $d\geq ۴$. هیچ نتیجه‌ای در مورد $q_{d,۱}(n)-p_d(n)$ در دست نیست، حتی پاسخ بـه این سؤال که آیا این تفاضل همواره نامنفی است داده نشده است، هرچند این پرسش به‌وسیلهٔ نگارنده به‌عنوان یك مسئلهٔ تحقیقی در پولتن انجمن ریاضی آمریکا مطرح شد [۳].

۱۰. تعمیمهای ترکیباتی اتحاد شور برای حالتی‌که $d=۲$. در۱۹۶۰ گولنیتس [۴] و در ۱۹۶۵ گوردون [۱۶] مستقلاً دو قضیه کشف کردند که ماهیت آنها شباهت بسیاری به‌قضیهٔ شور داشت، بدین لحاظ کـه آنها افرازهای n بـه بخشهایی را بررسی می‌کردند که اختلافشان دست‌کم ۲ است و درمیان آنهـا هیچ دومضرب متوالی ۲ ظاهر نمی‌شود. (که ۲ جانشین ۳ درقضیهٔ شور شده است.)

قضیهٔ ۱۹ (گولنیتس-گوردون). تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که اختلافشان دست‌کم۲

است و در میان آنها هیچ دو عدد زوج متوالی ظاهر نمی‌شود برابر است با تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که همنهشت با ۱، ۴، ۷در پیمانهٔ ۸ هستند.

پس، برای مثال، افرازهای ۱۱ به بخشهایی که اختلافشان دست‌کم ۲ است و هیچ دوعدد زوج متوالی‌را دربرندارد،عبارت‌اند از ۱۱، ۱+۱۰، ۲+۹، ۳+۸، ۴+۷، و ۱+۳+۷، بنابراین ۵ افراز ازاین نوع داریم، در حالی‌که افرازهای ۱۱ به‌بخشهایی که همنهشت با ۱ یا۴ یا۷ هستند عبارت‌اند از:۱+۱+۹، ۴+۷، ۱+۱+۱+۷، ۱+۱+۱+۴+۴، و۱+...+۱+۱،که باز هم ۵ افراز ازاین نوع وجود دارد.

قضیهٔ ۲۰ (گولنیتس-گوردون). تعداد افرازهای n به‌بخشهایی که اختلافشان دست‌کم ۲ است و در میان آنها هیچ دو عدد صحیح زوج متوالی ظاهر نمی‌شود و هر بخش دست‌کم ۳ است، برابر است باتعداد افرازهای n به‌بخشهایی‌که هر یك همنهشت با ۲، ۴، ۵ در پیمانهٔ ۸ باشند.

۱۱. یك تعمیم ترکیبیاتی از اتحادهای گولنیتس-گوردون. همان‌گونه که قضیهٔ ۱۴ گوردون اتحادهای راجرز-رامانوجان را تعمیم داد، در۱۹۶۷ اندروز [۷] نیز اتحادهای گولنیتس-گوردون را تعمیم داد.

قضیهٔ ۲۱ (اندروز). گیریم $p_{k,r}(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که همنهشت با ۲ (پیمانهٔ ۴) و همنهشت با ۰، $(1-2r)\pm$ (پیمانهٔ $4k$) نیستند، که در آن $1\le r\le k$. گیریم $q_{k,r}(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به‌شکل $n=\sum_{i=1}^{\infty} f_i\cdot i$ باشدکه $f_1+f_2\le r-1$ و به‌ازای هر $i\ge 1$

$$f_{2i-1}\le 1 \quad و \quad f_{2i}+f_{2i+1}+f_{2i+2}\le k-1$$

آنگاه

$$p_{k,r}(n)=q_{k,r}(n) \qquad (14)$$

قضیهٔ ۲۱ به‌ازای $k=2$، $r=2$ به قضیهٔ ۱۹ و به‌ازای $k=2$، $r=1$ به قضیهٔ ۲۰ تقلیل می‌یابد. حال بیایید حالت $k=3$، $r=3$ را بررسی کنیم. افرازهایی از ۷ که با $p_{3,3}(7)$ شمره می‌شوند عبارت‌اند از: ۱+۶، ۲+۵، ۳+۴، ۱+۳+۳، و ۱+۱+۱+۱+۳، بنابراین $p_{3,3}(7)=5$ در حالی که افرازهایی که با $q_{3,3}(7)$ شمرده می‌شوند عبارت‌اند از: ۷، ۱+۶، ۲+۵، ۳+۴، و ۱+۲+۴، بنابراین $q_{3,3}(7)=5$.

۱۲. اتحادهای دیگری ازنوع شور. در۱۹۶۷ اندروز [۸] قضیه‌ای ثابت‌کردکه به‌اتحاد شور شباهت داشت، اما به‌عنوان پیمانه مضربی از ۴ را دربرداشت.

قضیه ۲۲ (اندروز). گیریم $p_r(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که هر یك یا زوج بوده و همنهشت با $2-4r$ (پیمانهٔ $4r$) نباشند یا فرد بوده و همنهشت با $1-2r$ یا $1-4r$(پیمانهٔ $4r$) باشد، که $r\ge 2$. گیریم $q_r(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای

n به شکل $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ باشد، که به‌ازای $1\le i\le s$، $n_i\ge n_{i+1}$ و اگر n_i فرد باشد $n_i-n_{i+1}\ge 2r-1$، که در آن تعریف می‌کنیم $n_{s+1}=0$. سپس

$$p_r(n)=q_r(n) \qquad (15)$$

در برهان این قضیه، روش اندروز تعمیمی بود از روشی که در برهانش از قضیهٔ شور به‌کار برده بود. در ۱۹۶۸ یك دانشجوی نگارنده، المومور [19]، ثابت کرد که قضیهٔ ۲۲ به‌ازای $r=1$ نیز درست است. بنابراین قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲۳ (مور). گیریم $p_1(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که هر یك یا فرد یا بر ۴ بخش‌پذیر باشد. گیریم $q_1(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای به شکل $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ باشد که به‌ازای $1\le i\le s$، $n_i\ge n_{i+1}$ و اگر n_i فرد باشد $n_i-n_{i+1}\ge 1$، سپس

$$p_1(n)=q_1(n) \qquad (16)$$

بنابراین، برای مثال، به‌ازای $n=8$ افرازهای n به‌بخشهایی که هریك یا فرد یا بر بر ۴ بخش‌پذیر باشد، عبارت‌اند از: 8، $7+1$، $5+3$، $5+1+1+1$، $4+4$، $4+3+1$، $4+1+1+1+1$، $3+3+1+1$، $3+1+1+1+1+1$، و $1+1+1+1+1+1+1+1$، بنابراین $p_1(8)=15$، درحالی که افرازهایی که با $q_1(8)$ شمرده می‌شوند عبارت‌اند از: 8، $7+1$، $6+2$، $5+3$، $5+2+1$، $4+4$، $4+3+1$، $4+2+2$، $4+2+1+1$، $3+3+2$، و $3+2+2+1$، بنابراین $q_1(8)=15$.

اندروز دریافت [8] که قضیهٔ ۲۲ به‌ازای $r=2$ به‌نتیجهٔ جالب زیر می‌انجامد.

قضیهٔ ۲۴ (اندروز). گیریم $p_2(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به بخشهایی باشد که همنهشت با ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ (پیمانهٔ ۸) هستند. گیریم $q_2(n)$ نمایشگر تعداد افرازهای n به شکل $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ باشد که $n_i\ge n_{i+1}$ و $n_s\ge 2$ و اگر n_i فرد باشد $n_i-n_{i+1}\ge 3$، سپس

$$p_2(n)=q_2(n) \qquad (17)$$

۱۳. اختتام. بحث فوق نشان می‌دهد که، پس از یك دوره رکود، در دههٔ ۱۹۶۰ علاقه به اتحادهای افرازی رشد چشمگیری داشته است، و انواع جدیدی از این اتحادها کشف شده‌اند، منجمله آنها که در بخش ۱۲ آمدند، واتحادهایی که تعمیمهایی از اتحادهای قبلی هستند، ازقبیل قضیهٔ ۱۵ متعلق به‌اندروز که هم اتحاد اویلر و هم اتحادهای راجرز-رامانوجان را به‌عنوان حالات خاص دربرمی‌گیرد.

نشانه‌هایی وجود دارد که تحقیقات بیشتر در هر یك ازاین دو مسیر به‌نتایج شگفت‌انگیزی می‌انجامد. شاید هدف نهایی عبارت باشد از کشف اتحادی که همه یا اغلب اتحادهای افرازیی را، که دراین مقاله شرح داده شد، به عنوان حالات خاص دربرگیرد،

یا اگر هدف را فروتنانه‌تر بگیریم، دست‌کم اتحادهای اویلر، راجرز-رامانوجان، و شور را همزمان تعمیم دهد.

مراجع

1. Alder H. L., "The nonexistence of certain identities in the theory of partition and compositions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54(1948)712-722.
2. Alder H. L., "Generalizations of the Rogers-Ramanujan identities," *Pacific J. Math.*, 4(1954)161-168.
3. Alder H. L., "Research problems," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 62 (1956)76.
4. Andrews G. E., "Partition theorems related to the Rogers - Ramanujan identities (abstract)," *Notices Amer. Math. Soc.*, 12 (1965)694.
5. Andrews G. E., "On generalizations of Euler's partition theorem," *Michigan Math. J.*, 13(1966)491-498.
6. Andrews G. E., "An analytic proof of the Rogers-Ramanujan identities," *Amer. J. Math.*, 87(1966)814-846.
7. Andrews G. E., "A generalization of the Göllnitz-Gordon partition theorems," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18(1967)945-952.
8. Andrews G. E., "On Schur's second partition theorem," *Glasgow Math. J.*, 8(1967)127-132.
9. Carlitz L., "Note on Alder's polynomials," *Pacific J. Math.*, 10 (1960)517-519.
10. Dienes P., *The Taylor Series*, Dover, New York, 1957.
11. Euler L., "Introductio analysin infinitorium," *Lausanne*, 1(1748) 253-275.
12. Glaisher J. W. L., *Messenger of Mathematics*, 12(1883)158-170.
13. Gleissberg W., "Über einen Satz von Herrn J. Schur," *Math. Zeit.*, 28(1928)372-382.
14. Göllnitz H., *Einfache Partitionen* (unpublished), Diplomarbeit W. S. Göttingen 1960, 65 pp.
15. Gordon B., "A combinatorial generalization of the Rogers-Ramanujan identities," *Amer. J. Math.*, 83(1961)393-399.

16. Gordon B., "Some continued fractions of the Rogers-Ramanujan type," *Duke J. Math.*, 31(1965)741-748.
17. Hardy G. H., Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Oxford University Press, Oxford, 1960.
18. Lehmer D. H., "Two nonexistence theorems on partitions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52(1946)538-544.
19. Moore Elmo, *Unpublished Result* (1938).
20. Ramanujan S., "Proof of certain identities in combinatorial analysis, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 19(1919)214-216.
21. Schur I. J., *Zur additiven Zahlentheorie, S.B.- Aked Wiss. Berlin*, (1926)488-495.
22. Selberg A., *Über einige Arithmetische Identitäten*, Norske Vid-Akad, Avhandlinger (1936), No. 8, 1-23.
23. Singh V. N., "Certain generalized hypergeometric identities of the Rogers-Ramanujan type," *Pacific J. Math.*, 7(1957) 1011-1014.
24. Singh V. N., "Certain generalized hypergeometric identities of the Rogers-Ramanujan type (II)," *Pacific J. Math.*, 7(1957) 1691-1699.
25. Singh V. N., "A note on the computation of Alder's polynomials, "*Pacific J. Math.*, 9(1959)271-275.
26. Sylvester J. J., "A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion," *Amer. J. Math.*, 5 (1882)251-330; 6(1884)334-336(or pp. 1-83 of *The Collected Mathematical* (Papers of James Joseph Sylvester, Vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1912).

استیون آلتون و رنه مك‌لاگلین

تاریخچهٔ کوتاهی از تقلیل گاؤس-یوردان*

ترجمهٔ مهران جمشیدیان دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

تاکر [۲۸] گفته است که ابداع کنندهٔ روش معروف تقلیل در حل دستگاه معادلات خطی ویلهلم یوردان (۱۸۴۲-۱۸۹۹) مساح بوده است نـه کامی ژوردان (۱۸۳۸-۱۹۲۲) ریاضیدان. گرایش طبیعی این است که این روش به کامی ژوردان نسبت داده شود، که موضوع دیگری درجبرخطی، صورت نرمال ژوردان، به‌درستی منسوب به‌اوست. یادآوری می‌کنیم کـه در قاعدهٔ حذف گاؤس، ماتریس ضرایب با عملیات سطری بـه یك ماتریس بالامثلثی تبدیل می‌شود. سپس باجایگذاری مقادیر، که از آخرین معادلهٔ دستگاه تحویل‌یافته شروع می‌شود وتا معادلهٔ اول ادامه می‌یابد، جواب را به‌دست می‌آوریم. درتقلیل گاؤس-یوردان از عملیات سطری، برای قطری کردن ماتریس ضرایب استفاده می‌شود و جوابها مستقیماً به‌دست می‌آیند.

این مقاله دربارهٔ ویلهلم یوردان و معرفی روش اوست.

۱. از کجا می‌دانیم او ویلهلم یوردان بوده است؟ درمورد هویت یوردان که در اصطلاح "تقلیل گاؤس-یوردان" از او نـام برده می‌شود اندکی شك وجود دارد. به نظر می‌آید که این نامها را دست‌اندرکاران آنالیز عددی روی ایـن روش گذاشته‌اند. مثلاً هاوس‌هولدر [۱۳، ص۱۴] می‌گوید:

> به‌نظرمی‌رسد روش گاؤس-یوردان، تحت همین نام، اولین بار توسط کلاسن توصیف شده باشد [۷]. ازآنجاکه این روش را می‌توان شکل دیگری ازقاعدهٔ حذف‌گاؤسی دانست، نام‌گاؤس به‌درستی به‌کاربرده شده، اما آوردن نام یوردان ظاهراً اشتباه است، زیرا این روش فقط درمتن‌چاپ سوم‌کتاب او موسوم‌به راهنمای مساحی که بعد از مرگش تنظیم و منتشرشد، تشریح شده است.

این ارجاع درست است، اما این واقعیت هم روشن است‌که متن چاپ سوم‌کتاب یوردان

---

* Althoen S. C., McLaughlin R., "Gauss-Jordan reduction: a brief history," *Amer. Math. Monthly*, (1987)130-142.

را خود او قبل از مرگش تهیه کرده است. تاریخ پیشگفتار چاپ سوم مه ۱۸۸۸ است و یوردان آن را امضا کرده است. علاوه براین، در بررسی و نقدی که مولر [۲۳] نوشته، آمده است که یوردان خودش متن چاپ چهارم را که در ۱۸۹۵ منتشرشد تهیه وتنظیم کرده است. درضمن عکس روی جلد این چاپ مخصوص، تصویری از گاؤس است، زیرا گاؤس در مساحی نیز به‌اندازهٔ ریاضیات و فیزیك مشهور بود. همچنین باید توجه شود که، چون مقالهٔ کلاسن [۷] درهمان سالی انتشار یافت که چاپ سوم کتاب یوردان منتشرشد، به‌نظر می‌رسد که کشفیات آنها مستقل از یکدیگر بوده است.

جانسون [۱۵، ص۶۶] می‌گوید:

> تا آنجا که من می‌دانم، این شیوهٔ نگرش به‌معادلات نرمال تحویل‌یافته در هیچ مقاله‌ای تحت عنوان هیئیموم مربعات، پیش از چاپ سوم کتاب مساحی یوردان، به‌صراحت مطرح نشده است.

باید خاطرنشان کرد که گرچه در اولین چاپ هیچ‌گونه اشاره‌ای به تقلیل گاؤس-یوردان نشده، نطفهٔ ایده درمثال صفحات ۳۴ و ۳۵ چاپ دوم کتاب (۱۸۷۷) حضور داشته است.

کتاب کانز [۱۸، ص ۲۲۱] فصلی دارد که عنوان آن، "روش گاؤس-یوردان"، دارای این پانویس است که خواننده را به کتاب راهنمای مساحی یوردان ارجاع می‌دهد. هم بارتلیت [۵] و هم لیلاند [۱۹] نیز در فهرست مراجع خود ازاین کتاب نام می‌برند. در کتاب جیویرتز[1]، سیتومر[2]، و تاکر [۱۵، ص۲۴۶] می‌خوانیم که:

> ویلهلم‌یوردان (۱۸۱۹–۱۹۰۴) الگوریتم تقلیل محوری را که به‌نام روش حذف گاؤس-یوردان شناخته می‌شود، به‌خاطر کاربرد در مساحی ابداع کرد.

نویسندگان امروزی متون جبرخطی عموماً نام "تقلیل گاؤس-یوردان" را بدون اشاره به مأخذ آن به‌کار می‌برند. درهرحال، ازطریق کتاب راهنمای مساحی ویلهلم یوردان بود که تقلیل گاؤس-یوردان به جهان عرضه شد. امروز کلاسن، کسی که در زیر درباره‌اش بحث خواهیم کرد، تا حد زیادی از یادها رفته است.

۲. ویلهلم یوردان کیست؟ اطلاعات ما راجع به‌ویلهلم‌یوردان ازطریق چندآگهی ترحیم به‌دست می‌آید که درآنها شرح احوال او آمده است. [۲۶، ۱۶، ۲۴] (همچنین به [۱۱] و [۲۵] مراجعه کنید). او در اول مارس ۱۸۴۲ در شهر الوانگن[3] در جنوب آلمان متولدشد و پس‌از دورهٔ دبیرستان، به‌آنچه که امروز در اشتوتگارت کالج مهندسی می‌گویند وارد شد. او به‌مدت دوسال به‌عنوان دستیارمهندس در پروژهٔ مقدماتی ساختن راه‌آهن کار می‌کرد و به‌عنوان نقشه‌بردار به‌اندازه‌گیری فزازای نقاط می‌پرداخت. وی دوسال دیگررا تحت عنوان "دستیار" در رشتهٔ مساحی درکالج اشتوتگارت گذراند ودر ۱۸۶۸، هنگامی که تنها ۲۶ سال داشت، استاد مساحی درکالج صنعتی کارلسروهه شد.

یوردان به‌طورفعال درگیرنقشه‌برداری از چند منطقهٔ آلمان شد. در ۱۸۷۳ سردبیر

---

1. Gewirtz 2. Sitomer 3. Ellwangen

مجلهٔ نقشه‌برداری[1] شد و تا آخرعمردراین سمت باقی ماند. یوردان نویسنده‌ای پرکار بود. کاراساسی‌اش در ۱۸۷۳ باعنوان کتاب جیبی هندسهٔ عملی[2] منتشرشد. این کتاب درچاپهای بعدی، به کتاب راهنمای مساحی[3] تبدیل‌شد. تازمان مرگ یوردان پنج چاپ از آن انتشار یافت و به‌زبانهای فرانسوی، ایتالیایی، و روسی نیز ترجمه‌شد. توانایی یوردان در ارائه مفاهیم مجرد به‌روشهای زنده و دلچسب موجب انتشار گستردهٔ این کتاب شد.

درسال ۱۸۸۲ یوردان، کارلسروهه را ترك کرد و به‌دانشگاه صنعتی هانور رفت. او همچنان به‌فعالیت خود درنقشه‌برداری و به‌چاپ آثارش ادامه داد. وی ظاهراً معلمی درجه یك بوده‌که استعداد خاصی درنشان دادن ارتباطات بین نظریه ومسائلی از دنیای واقعی‌که با آنها روبرو می‌شده، داشته است. گردشهای علمی او با شاگردان به عنوان نمونه‌ای از روش درست تدریس تمجید شده است.

اگرچه یوردان به ظاهر سالم بود، اما سالها از بیماری قلبی و دیگر بیماریها رنج می‌برد. او درسال ۱۸۹۹ در سن ۵۷ سالگی در حالت افسردگی چشم از جهان فروبست.

۳. مسئله چه بود؟ گاؤس روش مینیموم مربعات را برای پیداکـردن بهترین تابع خطی‌که داده‌های مشاهده شده را تقریب بزند ابداع کرد. این روش طبیعتاً برای مساحان جالب بود. دراینجا توضیح مختصری از ریاضیات موجود درمسئله رابه‌همراه قضیهٔ جالبی که اولین‌بار توسط گاؤس به‌صراحت بیان شده می‌آوریم.

فرض‌کنید m مشاهده انجام می‌دهیم کـه هرکدام از آنها به n ورودی (= مقدار اولیه) بستگی‌دارد. به‌پیروی از یوردان مقادیر مشاهده‌شده‌را $-l_1, \cdots, -l_m$ می‌نامیم اما باتوجه به‌آنالیز جدید بهتر آن است‌که بردارهای ورودی را شماره‌گذاری‌کنیم

$$(a_{i1}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

m مقدار مشاهده شده l_i تابعی از بردارهای ورودی هستند. مطلوب است‌که تقریب خطی خوبی از این تابع داشته باشیم. فرض می‌کنیم

$$y = L(y_1, \cdots, y_n) = y_1x_1 + \cdots + y_nx_n$$

نمایانگر یك نگاشت خطی کلی با ضرایب $x_1, \cdots, x_n$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم v_i مقدارخطایی باشدکه ازفرض خطی بودن ناشی می‌شود

$$\begin{aligned} v_i &= L(a_{i1}, \cdots, a_{in}) - (-l_i) \\ &= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + l_i, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned} \qquad (1)$$

$x_1, \cdots, x_n$ را طوری انتخاب می‌کنیم‌که مجموع مربعات خطاها

---

1. *Zeitschrift für Vermessungs Wesen*
2. *Taschenbuch der Praktischen Geometrie*
3. *Handbuch der Vermessungskunde*

$$E=v_1^2+\cdots+v_m^2$$

مینیموم بشود. به این ترتیب، روش مینیموم مربعات به یك مسئلهٔ سادهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره تبدیل می‌شود که در آن ما دستگاه معادلات نرمال زیر را حل می‌کنیم

$$\partial E/\partial x_j=0,\quad j=1,\cdots,n$$

قرار می‌دهیم $A=(a_{ij})$ ، $v=\mathrm{col}\,(v_1,\cdots,v_m)$ ، $l=\mathrm{col}\,(l_1,\cdots,l_m)$ ، و $x=\mathrm{col}\,(x_1,\cdots,x_n)$ که col به معنای بردار ستونی است. در نتیجه دستگاه (۱) را می‌توان به‌صورت $v=Ax+l$ نوشت. عبارت زیر با ضرب مستقیم به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}E&=v_1^2+\cdots v+_m^2\\&=\sum_i a_{i1}a_{i1}x_1^2+2\sum_i a_{i1}a_{i2}x_1x_2+\cdots+2\sum_i a_{i1}a_{in}x_1x_n\\&\quad+2\sum a_{i1}l_ix_1+\cdots\end{aligned}$$

در بالا همهٔ جمله‌های شامل x_1 را فهرست کرده‌ایم وهمهٔ جمعبندیها از $i=1$ تا $i=m$ است. بنابراین

$$\partial E/\partial x_1=2\sum a_{i1}a_{i1}x_1+2\sum a_{i1}a_{i2}x_2+\cdots+2\sum a_{i1}a_{in}x_n+2\sum a_{i1}l_i=0$$

یا

$$\sum a_{i1}a_{i1}x_1+\sum a_{i1}a_{i2}x_2+\cdots+\sum a_{i1}a_{in}x_n+\sum a_{i1}l_i=0$$

گاوس $\sum a_{ij}a_{ik}$ را با $[a_ja_k]$ و $\sum a_{ij}l_i$ را با $[a_jl]$ نمایش می‌دهد. بنابراین، اولین معادله را بایستی به‌صورت

$$[a_1a_1]x_1+\cdots+[a_1a_n]x_n+[a_1l]=0$$

نوشته شود. $n-1$ معادلهٔ باقیمانده به‌روش مشابه به‌دست می‌آیند.

حال اثبات اینکه کل دستگاه معادلات نرمال را می‌توان به‌شکل ماتریسی

$$A^tAx=-A^tl\quad\text{با جواب}\quad x=-(A^tA)^{-1}A^tl$$

(A^t نمایانگر ترانهادهٔ A است) نمایش داد، آسان است. توجه داشته باشیدکه A^tA یك ماتریس متقارن است.

دراینجا بیان و برهانی جدید ازقضیه‌ای را می‌آوریم که درفصل۱۳ کتاب تحقیقات در باب اجزای بیضوی پالاس [۸] گاوس آورده شده است.

قضیهٔ گاوس: اگر تقلیل گاوس-یوردان را برای قطری کردن ماتریس متقارن

$$\begin{bmatrix}A^tA & -A^tl\\(-A^tl)^t & l^tl\end{bmatrix}$$

به‌کار بریم، آنگاه عدد واقع در گوشهٔ راست‌پایین، مجموع مربعات خطاهایی است که در صورت استفاده از ضرایب بردار جواب x به عنوان ضرایب تقریب خطی و ورودیها ($=$ مقادیر اولیه) داده شده، پدید می‌آید. یعنی پس از مثلثی کردن، گوشهٔ راست پایین شامل مقدار زیر است

$$E=v_1^2+\cdots+v_m^2=v^tv$$

برهان. دستگاه

$$\begin{bmatrix} A^tA & -A^tl \\ (-A^tl)^t & 0 \end{bmatrix}$$

را به‌صورت یك مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر در نظر بگیرید

$$\text{Max } w=(-A^tl)^tx \qquad (۲)$$

با قید

$$A^tAx=-A^tl$$

درنتیجه پس از مثلثی کردن، عدد واقع در گوشهٔ راست‌پایین قرینهٔ مقدار تابع هدف $(A^tl)^tx$ در نقطه جواب، خواهد بود. بنابراین اگر کار را از l^tl در آن گوشه شروع کنیم عبارت

$$l^tl+(A^tl)^tx$$

را به‌دست خواهیم آورد، که در آن $x=-(A^tA)^{-1}A^tl$.
از طرف دیگر

$$\begin{aligned} v^tv&=(Ax+l)^t(Ax+l)\\ &=(x^tA^t+l^t)(Ax+l)\\ &=x^tA^tAx+x^tA^tl+l^tAx+l^tl\\ &=x^tA^tA[-(A^tA)^{-1}A^tl]+x^tA^tl+l^tAx+l^tl\\ &=-x^tA^tl+x^tA^tl+l^tAx+l^tl\\ &=l^tl+(A^tl)^tx \end{aligned}$$

بنابراین، اگر ما دستگاه متقارن

$$\begin{bmatrix} A^tA & -A^tl \\ (-A^tl)^t & l^tl \end{bmatrix}$$

را مثلثی کنیم، نه‌تنها جواب معادلات نرمال را بـه دست می‌آوریم، بلکه مقدار مجموع مربعات خطاها را نیز برای آن مشاهدات خاص به‌دست می‌آوریم.

۴. روش و علامتگذاری گاوس چه بود؟ گاوس در سال ۱۸۱۰ درکتابش به نام تحقیقات در باب اجزای بیضوی پالاس [۸]، [۹، ص۱۲۳] عزم آن می‌کندکـه جزئیات ("اجزای بیضوی") مـدار پالاس، دومین سیارک بزرگ بین مـریخ و مـشتری را در منظومهٔ شمسی تعیین‌کند. او دستگاهی از معادلات خطی با شش مجهول به‌دست می‌آورد، که هیچ جوابی به‌طور همزمان در همهٔ آنها صدق نمی‌کند. درنتیجه لازم بود او مقادیری را برای مجهولات تعیین کندکه مجموع مربعات خطا مینیموم بشود. گاوس به جای اینکه صرفاً این مسئلهٔ خاص را حل کند، بـا انحراف از این موضوع خاص روشی برای حل این‌گونه دستگاههای معادلات خطی درحالت‌کلی ابداع می‌کند. در اینجاست که نمادهای خاص او برای اولین‌بار ظاهر می‌شوند.

به‌خاطر صرفه‌جویی درجا، ما ازهمان نمادهای بخش ۳ی بالا استفاده خواهیم‌کرد. (گاوس از p، q، r، ... برای نمایش متغیرها استفاده می‌کند و $\Omega = w^{\circ} + w'^{\circ} + \cdots$ را برای مجموع مربعات خطاها در نظر می‌گیرد و غیره.) نقطهٔ شروع کار گاوس، دستگاه زیراست

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + l_1 = v_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + l_m = v_m \end{cases}$$

اوفقط می‌گویدکه "به‌آسانی می‌توان دید"[1] برای آنکه مجموع خطاها

$$E = v_1^{\circ} + \cdots + v_m^{\circ}$$

مینیموم باشد، شرط زیر باید براورده شود

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m = 0 \\ \cdots \\ a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m = 0 \end{cases}$$

گاوس در آن بخش که این دستگاه از معادلات را مورد بررسی قرار می‌دهد از کلمات "روش مینیموم مربعات" استفاده نمی‌کند اما پیشتر از آن درمقالهٔ [۸، ص۱۶] نشان می‌دهد که مدت درازی از "شگردهای خاصی"[2] استفاده کرده‌که کاربرد روش‌مینیموم مربعات را بسیار آسانتر می‌ساخته است. در هر صورت، آخرین دستگاه (غیراز یك عامل مشترك ۲) بردستگاه معادلات نرمال $\partial E/\partial x_1 = 0, \ldots, \partial E/\partial x_n = 0$ منطبق‌است. حال گاوس نماد خاص خود را معرفی می‌کند

1. facile quidem perspicitur
2. quaedam artificia practica

$$[a_1 l] = a_{11} l_1 + a_{21} l_2 + \cdots + a_{m1} l_m$$

$$[a_i a_k] = a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + \cdots + a_{mi} a_{mk}$$

و الی‌آخر. بنابراین، مجهولات $x_1, \ldots, x_n$ از روی معادلات زیرمعین می‌شوند

$$\begin{cases} [a_1 a_1] x_1 + \cdots + [a_1 a_n] x_n + [a_1 l] = 0 \\ \cdots \\ [a_n a_1] x_1 + \cdots + [a_n a_n] x_n + [a_n l] = 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

حال، گاؤس از روشی (بدون کاربرد نماد ماتریسی) استفاده می‌کند که اساساً معادل با آن چیزی است که امروز به‌نام قاعدهٔ حذف گاؤس شناخته می‌شود. او به‌صراحت E را برحسب $x_1, \ldots, x_n$ بیان می‌کند و نشان می‌دهد که $E - R_1^2/[a_1 a_1]$ مستقل از x_1 است. در اینجا R_1 نمایانگر سمت چپ اولین سطر دستگاه بالاست. سپس x_2 را از $E^{(1)} = E - R_1^2/[a_1 a_1]$ حذف می‌کند، و به همین ترتیب پیش می‌رود. با این عمل او نمایشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آورد

$$E = \frac{(A_1(x_1, \ldots, x_n))^2}{a_1} + \frac{(A_2(x_2, \ldots, x_n))^2}{a_2} + \cdots + \frac{(A_n(x_n))^2}{a_n} + A$$

که در آن $a_1, \ldots, a_n$ اعداد مثبتی هستند. در اینجا A مقدار مینیموم E را نمایش می‌دهد و مجهولات با جایگذاری مقادیر از آخر به‌اول، از معادلات زیرمعین می‌شوند

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$A_2(x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\cdots$$
$$A_n(x_n) = 0$$

این چیزی است که در بخش۳ی بالا آن را قضیهٔ گاؤس نامیدیم.

۵. روش و علامتگذاری یوردان چه بود؟ یوردان درصفحهٔ ۸۳ چاپ سوم کتابش راهنمای مساحی [۱۷] برای تشریح روشی که بعدها به‌عنوان تقلیل گاؤس-یوردان شناخته شد یك مثال عددی می‌آورد که از یك کاربرد روش مینیموم مربعات درمساحی آمده است. دستگاه بخصوصی که او درنظر می‌گیرد، امروزه به‌صورت

$$\begin{cases} 17{,}500x - 6{,}500y - 6{,}500z = 2{,}14 \\ -6{,}500x + 17{,}500y - 6{,}500z = 13{,}96 \\ -6{,}500x - 6{,}500y + 20{,}500z = -5{,}40 \\ -2{,}14x - 13{,}96y + 5{,}40z = w - 100{,}34 \end{cases} \qquad (۴)$$

نوشته می‌شود که w در آخرین خط ازمعادلهٔ(۲) آمده‌است. اما، از آنجا که همهٔ دستگاههای

معادلات نرمال متقارن هستند، یوردان نمایش خلاصه‌وار زیر را در نظر می‌گیرد

$$\begin{aligned} &۱۷ر۵۰x - ۶ر۵۰y - ۶ر۵۰z - ۲ر۱۴ = ۰ \\ &+۱۷ر۵۰y - ۶ر۵۰z - ۱۳ر۹۶ = ۰ \\ &+۲۰ر۵۰z + ۵ر۴۰ = ۰ \\ &+۱۰۰ر۳۴ \end{aligned}$$

که در آن عدد $l'l$ دقیقاً در سمت راست پایین "شناور" است. در روش جدید برای حل دستگاه (۴) از عملیات سطری به‌شکل زیر استفاده می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۱۷ر۵۰ & -۶ر۵۰ & -۶ر۵۰ & ۲ر۱۴ \\ -۶ر۵۰ & ۱۷ر۵۰ & -۶ر۵۰ & ۱۳ر۹۶ \\ -۶ر۵۰ & -۶ر۵۰ & ۲۰ر۵۰ & -۵ر۴۰ \\ -۲ر۱۴ & -۱۳ر۹۶ & ۵ر۴۰ & -۱۰۰ر۳۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ R_۲+(۶ر۵/۱۷ر۵)R_۱ \\ R_۳+(۶ر۵/۱۷ر۵)R_۱ \\ R_۴+(۲ر۱۴/۱۷ر۵)R_۱ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱۷ر۵۰ & -۶ر۵۰ & -۶ر۵۰ & ۲ر۱۴ \\ ۰ & ۱۵ر۰۹ & -۸ر۹۱ & ۱۴ر۷۵ \\ ۰ & -۸ر۹۱ & ۱۸ر۰۹ & -۴ر۶۱ \\ ۰ & -۱۴ر۷۵ & ۴ر۶۱ & -۱۰۰ر۰۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_۱+(۶ر۵/۱۵ر۰۹)R_۲ \\ \\ R_۳+(۸ر۹۱/۱۵ر۰۹)R_۲ \\ R_۴+(۱۴ر۷۵/۱۵ر۰۹)R_۲ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱۷ر۵۰ & ۰ & -۱۰ر۳۴ & ۸ر۲۹ \\ ۰ & ۱۵ر۰۹ & -۸ر۹۱ & ۱۴ر۷۵ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ر۸۳ & ۴ر۱۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ر۱۰ & -۸۵ر۶۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_۱+(۱۰ر۳۴/۱۲ر۸۳)R_۳ \\ R_۲+(۸ر۹۱/۱۲ر۸۳)R_۳ \\ \\ R_۴+(۴ر۱۰/۱۲ر۸۳)R_۳ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱۷ر۵۰ & ۰ & ۰ & ۱۱ر۷۹ \\ ۰ & ۱۵ر۰۹ & ۰ & ۱۷ر۶۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ر۸۳ & ۴ر۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۸۴ر۳۵ \end{bmatrix}$$

$$x = ۱۱ر۷۹ / ۱۷ر۵۰ = ۰ر۶۷$$

$$y = ۱۷ر۶۰ / ۱۵ر۰۹ = ۱ر۱۷$$

$$z = ۴ر۱۰ / ۱۲ر۸۳ = ۰ر۳۲$$

$$\text{مجموع مربعات خطا} = ۸۴ر۳۵$$

در روش یوردان، محاسباتی مشابه بـا ترتیبی متفاوت انجام می‌شود. او در درجهٔ اول از مزیت تقارن استفاده می‌کند که در روند تقلیل همچنان محفوظ می‌ماند. در درجهٔ دوم اندازه‌های گوناگونی را به‌کارمی‌گیرد و در نتیجه اعدادی که باید باهم جمع شوند می‌توانند بی هیچ اشکالی دروقت مناسب یکی بالای دیگری قرار گیرد. بالاخره برای دستیابی به‌این‌حالت مناسب، درایه‌های بالای قطردرسمت راست ماتریس قرارداده می‌شوند. در اینجا شمای روش یوردان را می‌بینید. ما حروفی را درکنار تعدادی از اعداد قـرار داده‌ایم تـا بتوان آنها را در پانویسهایی‌که در ادامه آمده است تشخیص داد. البته این حروف توسط یوردان وارد طرح نشده است.

یوردان برای تشریح مسئله درحالت‌کلی، از نمادهای گاؤس استفاده می‌کند و آنها را گسترش می‌دهد. او، به‌رسم آن روزگارسعی می‌کندکه بدون استفاده از اندیس‌گذاری یا با فهرست راهنما، فرمولی بازگشتی به دست دهد. بنابراین، داده‌های ورودی را بـه صورت a، b، c وغیره و l نام‌گذاری می‌کند. او در [۱۷، ص۷۷] معادلات‌کلی نرمال را به‌صورت زیرمی‌نویسد

$$\underline{[aa]}x+[ab]y+[ac]z+[al]=0$$

$$\underline{[bb]}y+[bc]z+[bl]=0$$

$$\underline{[cc]}z+[cl]=0$$

$$\underline{[ll]}$$

پس، تقلیل گاؤس-یوردان توسط جدول [۱۷، ص۸۲] ارائه می‌شود.

درایه‌های جدول صفحه ۶۲ با فرمولهایی معین می‌شوند کـه تقلیل گاؤس-یوردان معمولی را به‌دست می‌دهند. مثلاً

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$[ac\cdot 1]=[ac]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[ab]$$

a	b	c	l			
$+۱۷٫۵۰$	$-۶٫۵۰$	$-۶٫۵۰$	$-۲٫۱۴$			
	$+۱۷٫۵۰$	$-۶٫۵۰$	$-۱۳٫۹۶$			
	$-۲٫۴۱a$	$-۲٫۴۱a$	$-۰٫۷۹a$			
		$+۲۰٫۵۰$	$+۵٫۲۰$			
		$-۲٫۴۱a$	$-۰٫۷۹a$			
			$+۱۰۰٫۳۴$			
			$-۰٫۲۶b$			
	$+۱۵٫۰۹c$	$-۸٫۹۱c$	$-۱۴٫۷۵c$	$-۶٫۵۰d$		
		$+۱۸٫۰۹e$	$+۴٫۶۱e$	$-+۰٫۵۹f$		
		$-۵٫۲۶g$	$-۸٫۷۱g$	$-۳٫۸۴h$		
			$+۱۰۰٫۰۸i$	$-۲٫۱۴j$		
			$۱۴٫۴۲k$	$-۶٫۳۵h$		
		$+۱۲٫۸۳l$	$-۴٫۱۰l$	$-۱۰٫۳۴m$	$-۸٫۹۱n$	
			$+۸۵٫۶۶o$	$-۸٫۴۹m$	$-۱۴٫۷۵p$	
			$-۱٫۳۱q$	$-۳٫۳۰r$	$-۲٫۸۵s$	
			$+۸۴٫۳۵t$	$-۱۱٫۷۹u$	$-۱۷٫۶۰v$	$-۴٫۱۰w$
			$=[vv]$	$-۱۷٫۵۰$	$-۱۵٫۰۹$	$-۱۲٫۸۳$
				$+۰٫۶۷$	$+۱٫۱۷$	$+۰٫۳۴$
				$=x$	$=y$	$=z$

(a) $\frac{۶٫۵}{۱۷٫۵}R_۱$

(b) $\frac{۲٫۱۴}{۱۷٫۵}R_۱$

(c) $R_۲+\frac{۶٫۵}{۱۷٫۵}R_۱$

(d) (۱, ۲) درایه‌های دستگاه اولیه

(e) $R_۳+\frac{۶٫۵}{۱۷٫۵}R_۱$

(f) (۱, ۳) درایه‌های دستگاه اولیه

(g) $\frac{۸٫۹۱}{۱۵٫۰۹}R_۳$

(h) $\frac{۶٫۵}{۱۵٫۰۹}R_۳$

(i) $R_۴+\frac{۲٫۱۴}{۱۷٫۵}R_۱$

(j) (۱, ۴) درایه‌های دستگاه اولیه

(k) $\frac{۱۴٫۷۵}{۱۵٫۰۹}R_۳$

(l) $R_۳+\frac{۸٫۹۱}{۱۵٫۰۹}R_۳$

(m) $R_۱+\frac{۶٫۵}{۱۵٫۰۹}$

(n) (۲, ۳) درایه‌های پس از اولین تقلیل

(o) $R_۴+\frac{۱۴٫۷۵}{۱۵٫۰۹}R_۳$

(p) (۲, ۴) درایه‌های پس از اولین تقلیل

(q) $\frac{۴٫۱۰}{۱۲٫۸۳}R_۳$

(r) $\frac{۱۰٫۳۴}{۱۲٫۸۳}R_۳$

(s) $\frac{۸٫۹۱}{۱۲٫۸۳}R_۳$

(t) $R_۴+\frac{۴٫۱۰}{۱۲٫۸۳}R_۳$

(u) $R_۱+\frac{۱۰٫۳۴}{۱۲٫۸۳}R_۳$

(v) $R_۳+\frac{۸٫۹۱}{۱۲٫۸۲}R^۳$

(w) (۳, ۴) درایه‌های پس از دومین تقلیل

$[aa]_{۳}$	$[ab]_{۰}$	$[ac]_{۰}$	$[ad]_{۰}$	$[al]_{۰}$				
	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$				
		$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$				
			$[dd]$	$[dl]$				
				$[ll]$				
	$[bb\cdot۱]_{۳}$	$[bc\cdot۱]_{۱}$	$[bd\cdot۱]_{۱}$	$[bl\cdot۱]_{۱}$	$[ab]_{۰}$			
		$[cc\cdot۱]$	$[cd\cdot۱]$	$[cl\cdot۱]$	$[ac]_{۰}$			
			$[dd\cdot۱]$	$[dl\cdot۱]$	$[ad]_{۰}$			
				$[ll\cdot۱]$	$[al]_{۰}$			
		$[cc\cdot۲]_{۳}$	$[cd\cdot۲]_{۲}$	$[cl\cdot۲]_{۲}$	$(ac\cdot۱)$	$[bc\cdot۱]_{۱}$		
			$[dd\cdot۲]$	$[dl\cdot۲]$	$(ad\cdot۱)$	$[bd\cdot۱]_{۱}$		
				$[ll\cdot۲]$	$(al\cdot۱)$	$[bl\cdot۱]_{۱}$		
			$[dd\cdot۳]_{۳}$	$[dl\cdot۳]_{۳}$	$(ad\cdot۲)$	$(bd\cdot۲)$	$[cd\cdot۲]_{۲}$	
				$[ll\cdot۳]$	$(al\cdot۲)$	$(bl\cdot۲)$	$[cl\cdot۲]_{۲}$	
				$[ll\cdot۴]$	$(al\cdot۳)$	$(bl\cdot۳)$	$(cl\cdot۳)$	$[dl\cdot۳]_{۳}$ صورت
					$[aa]_{۳}$	$[bb\cdot۱]_{۳}$	$[bc\cdot۲]_{۳}$	$[dd\cdot۳]_{۳}$ مخرج
					$-x$	$-y$	$-z$	$-t$ خارج قسمت

۶. دربارهٔ کلاسن چه می‌توان گفت؟ درقولی‌که از هاوس‌هولد نقل‌کردیم ادعا شده بود روشی‌که به‌نام روش گاؤس-یوردان خوانده می‌شود به‌نظرمی‌آید اولین‌بار توسط کلاسن در [۷] ارائه شده باشد. در [۲۲]، توماس مویسر نیز دربارهٔ همین مقالهٔ کلاسن می‌نویسد:

> در حل دستگاهی از معادلات خطی با ضرایب حسابی، آزادی عمل قابل توجهی برای انتخاب دنبالهٔ معادلات استخراج شده که به یافتن مقادیرمجهولات منجرمی‌شود، وجود دارد. انتخابی‌که توسط نویسنده به عمل آمده ... با مهارتی واقعی انجام شده و شایستهٔ توجه و دقت است.

نام کلاسن به عنوان "کلاسن، گراندوك لوکزامبورگ"[1] در لیست اعضای انجمن علمی بروکسل ازسال ۱۸۸۷ تا ۱۹۰۱ دیده می‌شود [۲]. نام وی در لیست اعضای متوفی درسال ۱۹۰۲ دیده می‌شود [۳]. ازمجلات تاریخی [۴، ص۶۲] چنین برمی‌آیدکه او در آن سال فوت کرده است. او فقط یك مقاله در سالنامهٔ انجمن علمی بروکسل منتشر کرده است [۴، ص۱۲۱ و ۲۳۲]. دراین بخش نظری دقیقتر براین مقاله می‌افکنیم.

درابتدا، شایسته است توجه کنیم که کلاسن به‌هیچ مرجعی اشاره نمی‌کند ونام گاؤس (یا یوردان) را هیچگاه ذکر نمی‌کند. تنها ریاضیدانی که دراین مقاله از او یاد می‌شود، پال مانشن است که ظاهراً نقش یك صاحبنظررا دارد. کلاسن از او دریك پانویس مختصر، تشکرمی‌کند. با نمادهای امروزی اگر روش کلاسن روی دستگاه زیر به‌کار گرفته شود

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} m & 0 & a_{13}^{(1)} & \cdots & b_1^{(1)}\\ 0 & m & a_{23}^{(1)} & \cdots & b_2^{(1)}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3\\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \cdots & b_1^{(1)}\\ 0 & m & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & \cdots & b_2^{(1)}\\ 0 & 0 & R & a_{34}^{(1)} & \cdots & b_3^{(1)}\\ & & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & b_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & a_{14}^{(2)} & \cdots & b_1^{(2)}\\ 0 & R & 0 & a_{24}^{(2)} & & b_2^{(2)}\\ 0 & 0 & R & a_{34}^{(1)} & \cdots & b_3^{(1)}\\ & & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & b_n \end{bmatrix} \cdots$$

سپس

$$m=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

و

$$R=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1. Clasen (abbé) B.I., Curé-doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg

پیکانها نمایانگر عملیات واضح سطری هستند.

کلاسن مکرراً متذکر می‌شودکه روش او متضمن هیچ تقسیمی نیست، ایـن حرف مشخصه‌ای از روزگار ماقبل از ماشینهای محاسب است. او همچنین معادلاتی اضافه برای کنترل در کار می‌آورد.

خودکلاسن ازنماد ماتریس استفاده نمی‌کند و در عوض معادلاتی را که متوالیاً به دست می‌آیند در پس هم می‌نویسد که به نظر می‌رسد کار نسبتاً پرزحمتی باشد. مثلاً اگر او می‌خواست یك دستگاه ۳ × ۳ را حل کند، به‌شکل زیرعمل می‌کرد

$$X_1 : a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+b_1=0$$
$$Y_1 : a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+b_2=0$$
$$Z_1 : a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+b_3=0$$

$$X_1 : a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+b_1=0$$

$$a_{11}Y_1 : \quad a_{11}a_{21}x+a_{11}a_{22}y \quad +a_{11}a_{23}z \quad +a_{11}b_2=0$$
$$-a_{21}X_1 : -a_{21}a_{11}x-a_{21}a_{12}y \quad -a_{21}a_{13}z \quad -a_{21}b_1=0$$
$$Y_2 : \quad my+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})z+a_{11}b_2-a_{21}b_1=0$$

$$mX_1 : ma_{11}x+ma_{12}y \quad +ma_{13}z \quad +mb_1=0$$
$$-a_{12}Y_2 : \quad -a_{12}my-a_{12}(a_{11}a_{23}- \quad a_{21}a_{13})z \quad -a_{12}(a_{11}b_2-a_{21}b_1)=0$$
$$ma_{11}x+[ma_{13}-a_{12}a_{11}a_{23}+a_{12} \quad a_{21}a_{13}]z+mb_1-a_{12}(a_{11}b_2-a_{21}b_1)=0$$
$$ma_{11}x \quad +a_{11}a'_{13}z \quad +a_{11}b'_1=0$$
$$X_2 : \quad mx \quad +a'_{13}z \quad +b'_1=0$$

$$mZ_1 : ma_{31}x \quad +ma_{32}y \quad +ma_{33}z+mb_3 =0$$
$$-a_{32}Y_2 : \quad -a_{32}my-a_{32}a'_{23}z-a_{32}b'_2=0$$
$$-a_{31}X_2 : -a_{31}mx \quad -a_{31}a'_{13}z-a_{31}b'_1=0$$
$$Z_2 : \quad Rz \quad +b'_2=0$$

$$RY_2 : Rmy+Ra'_{23}z \quad +Rb'_2=0$$
$$-a'_{23}Z_2 : \quad -a'_{23}Rz-a'_{23}b'_2=0$$
$$Y_2 : Rmy \quad +b''_2=0$$

$$RX_2 : Rmx+Ra'_{13}z+ \quad Rb'_1=0$$
$$-a'_{13}Z_2 : \quad -a'_{13}Rz-a'_{13}b'_2=0$$
$$X_2 : Rmx \quad +b''_1=0$$

در انتهای ایـن مقاله، کلاسن تأکید می‌کند کـه، روش او نسبت به روشی که از دترمینانها استفاده می‌کند، به‌عملیات کمتری نیازمند است ونشان می‌دهدکه چگونه می‌توان با استفاده از روش او دترمینانها را محاسبه‌کرد.

درهمان جلد ازسالنامهٔ انجمن علمی بروکسل‌که مقالهٔ کلاسن را دربرداشت شامل یك نقد و بررسی به‌قلم پ. مانشن [۲۰] نیز بود. مانشن (۱۸۴۴–۱۹۱۹) یك ریاضیدان معروف بلژیکی واز سال ۱۸۶۵ استاد دانشگاه گنت [۱]، [۲۷] بود. مانشن روش کلاسن را "روش ضرایب برابر" می‌نامد، وتوضیحات نسبتاً مفصلی ازکارکلاسن ارائه می‌کند. او نیز هیچ ارجاعی به‌گاؤس یا شخص دیگر نمی‌کند.

بعدها، در سال ۱۹۳۰، ممکه[1] [۲۱] روش "کلاسیك و هنوز مرسوم" حل دستگاه معادلات خطی را تشریح می‌کند. ایـن روش بـه وضوح همان قاعدهٔ حذف گاؤس است، اگرچه هرگز ذکری از نام گاؤس به میان نمی‌آید. ممکه مشاهده می‌کند که جایگذاری مقادیراز آخرمی‌تواند برزحمت باشد، به ویژه در دستگاههای بزرگ. او می‌گوید روش کلاسن برقاعدهٔ حذف گاؤسی ارجح است اگر چه جهان به کلی روش کلاسن را نادیده گرفته است.

هدف مقـالهٔ ممکه یادآوری کار کلاسن به خواننده است اما ممکه سیستمی برای نمادگذاری ابداع می‌کندکه از صورتبندی بهتری برخوردار است. (آرایه‌هایی از اعدادکه در آنها هر متغیری یك ستون دارد) و در کار کلاسن دیده نمی‌شود. او برای آسانترکردن محاسبات، حتی از نوارهای باریك کاغذی استفاده می‌کند و بالاخره، ممکه روش کلاسن را "بهبود می‌بخشد" به‌این طریق‌که این روش رابا جرح و تعدیلهایی برای حذف سریع، که درآن درهرمرحله تعدادی متغیرحذف می‌شوند مناسب می‌سازد.ممکه هم نه‌ازگاؤس و نه از یوردان ذکری به‌میان نمی‌آورد.

۷. وضع سایر روشهای حل دستگاههای خطی چگونه است؟ در سـال ۱۹۴۷ بودویگ [۶، ص۹۳۱] مقاله‌ای دربارهٔ دستگاههای بزرگی ازمعادلات خطی می‌نویسدکه هیچ یك از روشهای موجود قادر نیستند مشکلات ذاتی آنها را رفع کنند و لازم است از ماشینهای محاسب استفاده بشود. او در ادامه می‌گوید: "ماشینهای محـاسب الکترونیکی مشهور جدید به‌طور اتوماتیك چنین دستگاههایی را حـل می‌کنند، بنابراین روش مـورد استفاده اهمیتی‌ندارد. اما، قیمت چنین ماشینهایی‌آنقدر بالاست‌که تنهایك نمونه ازهرکدام ازآن دونوع موجود است (یا زمانی موجود خواهد بود).سایرافراد بشر باید به‌ماشینهای محاسب معمولی‌که روش به‌کار رفته برای آنها کاملاً مهم است، قناعت‌کنند."

کمبود محاسبه‌گرهای مناسب باعث شده بودکه هر روش میان‌برکوچکی با اهمیت باشد. اگرچه موضوع حل دستگاههای خطی دراصول درك شده بود، روشها رضایت‌بخش نبودند.برای غلبه براین ضعف در زمانهای مختلف روشهای‌گوناگونی متداول بوده‌است. حداقل دو مقالهٔ مروری [۶ و ۱۴] اختصاص به فهرست نـام تعداد بسیاری روش طویل فراموش شده برای حل دستگاههای خطی دارد.

---

1. R. Mehmke

مراجع

1. L'Académie Royale des Science, "des Lettres et des Beaux-arts de Belgique" *Biographie National Bruylant*, Bruxelles, 30(1959) 540-542.
2. *Annales de la Société Socientifique de Bruxelles*, 11(1887)16-35; 25 (1901)19.
3. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 26(1902)46.
4. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Table Analytique des vingt-cinq premiers volumes 1875-1901, procédée de l'Histoire documentairé de la Société Scientifique et de la Liste générale de ses membres, pp. 62, 121, 234
5. Bartlett D., *General Principles of the Method of Least Squares*. Boston, 1915.
6. Bodewig E., "Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten," *Koninkl Akad. Wetensch.*, 50(1947-1948)930-941, 1104-1116, 1285-1295, and 51(1948)53-64, 211-219.
7. Clasen B.-I., "Sur une novelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de Cette methode au calcul des déterminants" *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*. 12(1888)251-281; *Mathesis* (Suppl. 2) 9(1988)1-13.
8. Gauss C. F., Werke, Sechster Band, Disquisitio de Elementis elliptics Palladis ex Oppositionibus Annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen (1874)3-24.
9. Gauss C. F., *Abhandlungen zur Methode der Kleinsten Quadrate*, Berlin, 1887.
10. Gewirtz A., Sitomer H., Tucker A. W., *Constructive Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Clifs, 1974.
11. Harbert, "Ruhestätte für Wilhelm Jordan," *Zeitschrift fur Vermessungswesen*, 85(1960)138.
12. Helmert, "Wilhelm Jordan," *Zeitschrift fur Vermessungswesen*, 28 (1899)321-328. (The official annauncement of Jordan's death (April 17, 1899) is on page 265 of this volume.)
13. Householder A. S., *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*,

Blaisdell, Now York, 1953.

14. Jensen H., An Attempt at a Systematic Classification of the Methods for the Solution of Normal Equations, Geodaetisk Institut, Meddelelse No. 18(1944).
15. Johnson W. W., "On Gauss's Method of substitution," *Annals of Mathematics*, 7(1893)65-69.
16. Jordan H.; "Wilhelm Jordan, Lebensbild eines deutschen Geodäten," *Zeitschrift fur Vermsesungswesen*, 51(1922)577-585.
17. Jordan W., Hand buchder vermessungskunde, Erster Band, Dritte verbesserte Auflage; Metzler, Stuttgart, 1888.
18. Kunz K., *Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1957.
19. Leland O. M., *Practical Least Squares*, McGraw-Hill, New York, 1921.
20. Mansion M. P., "Sur la mémoire de M. l'abbe B.-I. Clasen" *Ann. Soc Sci. Bruxelles*. 12(1888)50-59.
21. Mehmke R., "uber die zweckmassigste Art, linear Gleichungen durch Elimination aufzulosen," *Z. Angew. Math. Mech.*, 10(1930) 508-514.
22. Muir T.; *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Macmillan, London, 1906-1923; Dover reprint, New York, 1960.
23. Muller C., "Bucherschau," *Zeitschrift fur Vermessungswesen*, 51 (1922)143-144.
24. Nusse A., "Willhelm Jordan Eine Erinnerung" *Allgemeine Vermessungsnachricht)n*, 54(1942)66-70.
25. Poggendorff J. C., *Biographisch-Literarisches Handworterbuch der exakten Naturwissenschaften*, Akademie-Verlag, Berlin, 7a(1969)305.
26. Runge C., "Wilhelm Jordan," *Zeitschrift fur Architektur und Ingenieurwesen* 45(1899)265-266.
27. de Seyn E., *Dictionnaire biographique des Science*, des Lettres et des Arts en Belgique volume 2, L'Avenir Bruxelles, 1939; p. 713.
28. Tucker A. W., Private communication.

ایرل بیونز

خط مماس، نه به‌منزلهٔ یك حد*

ترجمهٔ کامبیز محمودیان

معلمان ریاضی‌ام هیچ دلیلی اقامه نکرده بودند که حساب دیفرانسیل و انتگرال را چیزی جز سفسطه پندارم.
برتراند راسل

آیا رابطهٔ میان خط مماس و مشتق بیانگر ارتباطی زیبا میان هندسه و آنالیز است یا این رابطه یك نوع "تکرار معلوم" است که حاوی اطلاع خاصی نیست و صرفاً ناشی از نحوهٔ انتخاب تعاریف است؟ کاربرد خط مماس در زمینه‌چینی برای تعریف مشتق تقریباً در همه جای دنیا مرسوم است. اما آیا واقعاً می‌توان مشتق را جدا از خط مماس درك کرد؟ مثلاً یك دانشجوی مبتدی درس حساب دیفرانسیل و انتگرال چگونه پی می‌برد که خط معینی بر یك نمودار خاص مماس است؟

از آنجا که اینها پرسشهایی اساسی‌اند، فرض کنید می‌خواهیم کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال امروزی را بررسی کنیم تا ببینیم در آنها با این مسائل چگونه برخورد شده‌است. پس از بررسی چندین کتاب از این نوع، پی می‌بریم که علی‌الاصول دو رهیافت متفاوت به‌مسألهٔ خط مماس وجود دارد.

نوع الف: بحث شهودی بسیار مختصری پیرامون خط مماس،
نوع ب: بحثی مفصلتر در باب خط مماس، که از دیدگاهی شهودی آغاز و با تعریفی صوری برحسب مشتق پایان می‌پذیرد.

همان‌طور که خواهیم دید، هریك از دو رهیافت فلسفه‌ای خاص را درمورد خط مماس باز می‌تابانند.

در رهیافتهای نوع (الف)، تعاریفی هندسی و صرفاً شهودی از خط مماس می‌یابیم.

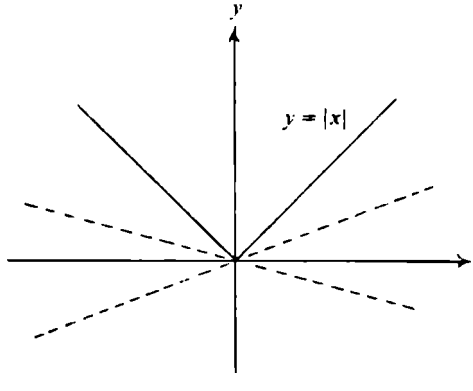
* Bivens Irl C., "What a tangent line is when it isn't a limit," *The College Mathematics Journal*, 17(1986)133-143.

مثلاً، خط مماس خطی است که درهرنقطه "در راستای نمودار" باشد، یا خطی است کـه "وضعیت حدی" خطوط قاطع را به‌دست دهد. باهمهٔ اینها علیرغم‌چنین "تعاریفی"، فرضی را به‌طورکم وبیش ضمنی می‌پذیرند که بنابرآن دانشجو وقتی خط مماس را ببیند آن را خواهد شناخت. این فرض درمواردی می‌تواند کاملاً صریح باشد.

> تلاش ما بر این نیست‌که خط مماس بر یك خم دریك نقطه را تعریف کنیم. مطالعهٔ شما در هندسه، درکی شهودی از این ایده به شما بخشیده است کـه همان کفایت می‌کند. [۳]

ودر واقع، تاوقتی‌که نمودارهای مورد بررسی به‌سمت بالا یاپایین مقعر باشد، دانشجویان مفهوم خط مماس برنمودار را "از لحاظ شهودی واضح" می‌یابند. آنها غموماً (وشاید با اندکی غرغرکردن) حتی می‌پذیرند کـه خط مماس بر نمودار یك تابع خطی، خود همان نمودار است.

اما تجربه نشان می‌دهدکه ممکن است خطوط مماس تنها درچشم بیننده وجود داشته باشند. این مطلب غالباً بـا ملاحظه تابع قدرمطلق آشکارا نمایان می‌شود. نزد بسیاری از دانشجویان، "به طور شهودی واضح" است کـه محور xها در مبدأ مختصات بر نمودار $y=|x|$ مماس است. بالاخره محور xها بـا نمودار در یك نقطه تماس پیدا می‌کند، و بدینسان درآن نقطه "باید" برنمودار مماس باشد! در واقع، با تعمق بیشتر، آشکارمی‌شود که چند خط مماس دیگرنیز وجود دارد (شکل۱). موفقیت در متقاعد کردن دانشجویان به اینکه شهودشان آنها را گمراه کرده است، می‌تواند تیغی دولبه باشد. (در پی بحثی نسبتاً طولانی پیرامون این‌نکته، یکی از دانشجویانم می‌گفت: "خیلی‌خوب، فکرمی‌کنم سرانجام مطلب را فهمیده‌ام. اگر نموداری در نقطه‌ای بیش از یك خط مماس داشته باشد، اصلاً خط‌مماسی درآن‌نقطه ندارد.") به‌همین‌ترتیب، دانشجویان غالباً فکرمی‌کنندکه محور xها نمی‌تواند درمبدأ مختصات برنمودار $y=x^3$ مماس باشد. برای آنها "بدیهی" است که خط مماس نمی‌تواند نمودار را درنقطهٔ مماس قطع کند.



شکل ۱. نمودار $y=|x|$.

بخشی ازمشکل رهیافت (الف)، فقدان تعریف روشنی از خط مماس است. در نزد دانشجو، خط مماس مفهومی کم و بیش مبهم است که در مواردی با موفقیت به‌کار می‌آید اما در سایرموارد به‌گیجی و اشتباه می‌انجامد. وقتی چنین اشتباهاتی پیش می‌آید، مدرس ناگزیراست برتری شهود خود را برشهود دانشجوانبات کند، واین‌کار به‌نوبهٔ خود، ممکن است ازسوی دانشجویان "مکتب تهدید" در ریاضیات تلقی شود.

اینك، فرض کنید رهیافت نوع (ب) به خط مماس را بررسی می‌کنیم. در اینجا، ظاهراً فلسفهٔ راهنما، فلسفهٔ ویتگنشتاین است، "گزاره‌های من به این معنی روشنگرند: آنکه آنهارا می‌فهمد، سرانجام وقتی بخواهد ازاین‌گزاره‌ها برای استخراج مطالب برتراستفاده کند، آنها را بیمعنی می‌یابد." پیش از هـر چیز، مفهوم خط مماس از دیدگاهی شهودی معرفی می‌شود. آنگاه مسألهٔ شیب خط مماس برای پدید آوردن زمینهٔ تعریف حدی مشتق به‌کارمی‌رود. سرانجام، تعریف حدی مشتق را برای تعریف صوری خط‌مماس به‌کارمی‌برند.

اگر $P(x_0, y_0)$ نقطه‌ای بـر روی نمودار تابع f باشد، آنگاه بنابر تعریف، خط مماس بر نمودار f در P خطی است ماربر P با شیب: [۱]

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

خط مماس، عملاً، به‌صورت یك حد خاص تعریف می‌شود. ماهیت تقریباً دوری برآمدن مفهوم مشتق ازطریق خط مماس وسپس تعریف صوری خط مماس برحسب مشتق را می‌توان یا به‌طور کامل نادیده‌گرفت ویا صریحاً به‌آن اقرار کرد.

آنچه کـه به نظر می‌رسد استدلال دوری است، در واقع انگیزهٔ تعریف است: اگـر تلاشمان صرفاً این بودکه منطقی باشیم، تعریف را ادامه می‌دادیم و کار را بـا آن تمام می‌کردیم ... اما در این صورت ممکن بود از جانب شما، به حق، به رفتار دلبخواهی متهم شویم. البته نهایتاً همین طور هم هستیم: هر تعریفی دلبخواه است! اما ریاضیدانان با سایر مردم فرقی ندارند: آنها هـم می‌خواهند حرفشان فهمیده شود. [۴]

البته، از دیدگاه صوری، درتعریف بالاهیچگونه اشکالی به‌چشم نمی‌خورد.(بی‌گمان در آن چیزی وجود ندارد کـه راسل آن را نپذیرد.) بـا استفاده از این تعریف، مدرس می‌تواند برای شاگردانش "ثابت" کند کـه محور xها بـرنمودار تابع قدرمطلق مماس نیست. با همهٔ اینها، در نزد بسیاری از دانشجویان این وضعیت چندان هم رضایت‌بخش نیست. ایدهٔ خط‌مماس (که درابتدای امر بسیار هندسی و شهودی به‌نظرمی‌رسید) ناگهان به‌زیرسایه‌های تجرید پس نشسته است. رفتار آن بسیارشبیه است به‌ستاره‌ای‌کم‌سوکه وقتی مستقیماً به‌آن نگاه می‌کنیم، ناپدید می‌شود.

به هرحال، احتمالاً دانشجویان در برخورد با تعریفی از خط مماس که مستلزم حد باشد زیاد احساس راحتی نمی‌کنند. به جای آن، فرض‌کنید تعریفی مرکب از چند مفهوم

ازخط مماس را مورد توجه قرار دهیم که در آن از کاربرد صریح حد خودداری می‌شود. این تعریف قویاً برپایهٔ شهود هندسی استوار است، اما چندان صوری هست که بینشی نسبت به‌برخی مسائل نسبتاً ظریف به‌ما بدهد (مثال ۵ وقضیهٔ ۳).

خط مماس به‌منزلهٔ بهترین تقریب خطی

وقتی کسی به‌نموداری می‌نگرد و به‌سرعت خط مماسی برآن رسم می‌کند، چه فرایندهایی در ذهن او جریان‌دارند؟ آیا او، عملاً و به‌گونه‌ای ناآگاهانه، مشتق را محاسبه می‌کند و یا "وضعیت حدی" خطوط مماس را می‌یابد؟ (و این حکایت همان‌کسی است که وقتی پی‌برد درتمام عمرش به‌نثرسخن می‌گفته است بدشگفت آمد.) احتمالاً این‌طورنیست. ممکن است کسانی باشندکه وقتی ازآنها خواسته شود افکارشان را تشریح کنند این‌طور بگویند: "باید خطی را رسم‌کنم که در نزدیکی نقطهٔ تماس به دقیقترین وجهی به نمودار "بچسبد". یك خط نمی‌تواند برنمودار مماس باشد در صورتی که بتوان خط دیگری را رسم‌کردکه به‌آن نمودار نزدیکتر باشد." به بیان دیگر، هرکسی در تلاش است بهترین تقریب خطی برای نمودارتابع را رسم‌کند. این تعبیر، احتمالاً نزدیکترین تعبیر به درك شهودی غالب مردم ازخط مماس‌است. درواقع، برخی ازکتابهای درسی این‌دیدگاه را (هرچند نه‌به‌طور چندان جدی) هنگام تعریف شهودی خط مماس برمی‌گزینند.

> خط مماس خطی است شامل P که "بهترین تقریب" نمودار f در نزدیکی P است. [۲]

> ایدهٔ خط مماس بر یك خم در P به‌منزلهٔ خطی که در نزدیکی P بهترین تقریب خم است، تعریف بهتری است، اما بازهم از نظر دقت ریاضی بسیار مبهم است. [۵]

تعریفی صوری ازخط مماس را برمبنای این تعبیر پایه‌ریزی می‌کنیم، که نقطهٔ آغاز این تعریف، نقطهٔ $P=(a, f(a))$ واقع بر نمودار یك تابع $y=f(x)$ است. برای پرهیز ازمشکلات منطقی، علاوه‌براین فرض می‌کنیم تابع در بازه‌ای حول $x=a$ تعریف شده است.

تعریف ۱. خط L ماربر $P=(a, f(a))$ خط مماس برنمودار f در P خوانده می‌شود اگر L بهترین تقریب خطی به f در نزدیکی P باشد. به بیان دقیقتر، خط $L=L(x)$ ماربر P، خط مماسی بر نمودار f در P است مشروط براینکه در مورد هر خط دیگر $K=K(x)$ ماربر P، $\delta>0$ ی وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $a-\delta<x<a+\delta$، داشته باشیم

$$|f(x)-L(x)|\leqslant|f(x)-K(x)|$$

یادآوریها. (۱) هرچند δ بی‌سروصدا در تعریف ما راه یافته است، اما این به‌معنی گریختن نصف حد از دست خواننده [و راه یافتن آن به تعریف خط مماس] نیست؛ علت

اینکه δ به‌ما تحمیل شده این است که خطوط مماس فقط به شکل نمودار در نزدیکی نقطهٔ تماس بستگی دارند. به بیان دیگر، مسألهٔ وجود خطوط مماس بیشتر "موضعی" است تا "فراگیر". (۲) تعریف ۱، هم بر پایهٔ ملاحظات هندسی و هم براساس ملاحظات تحلیلی استوار است. اما، می‌توان تعریفی کاملاً هندسی نیز ازخط مماس به‌دست داد [۸.۶].

از آنجا که بنابرتعریف بالا تنها لازم است زوج خطهای L و K را مقایسه‌کنیم، آزمودن حدسها دربارهٔ خطوط مماس غالباً فرایند هندسی سرراستی است.

مثال ۱. فرض‌کنید $f(x)$ تابعی خطی است. در این صورت با توجه به‌تعریف بی‌درنگ روشن می‌شود که در هر نقطه بر روی نمودار f خط مماس یکتایی (یعنی، خود نمودار) وجود دارد.

آیا درست است‌که به‌طورکلی خطوط مماس یکتا هستند؟ شهودمان می‌گویدکه هر نمودار در یك نقطهٔ حداکثر یك "بهترین" تقریب خطی دارد. بنابر مطالب زیر ملاحظه می‌شودکه حقیقتاً همین طور است. فرض‌کنید $L=L(x)$ و $K=K(x)$ خطوط مماسی متمایز برنمودار f در $P=(a, f(a))$ باشند. دراین صورت،بنابرتعریف دربازه‌ای حول $x=a$ داریم

$$|f(x)-L(x)| = |f(x)-K(x)|$$

درنتیجه، دراین بازه، $f(x)=\frac{1}{2}[L(x)+K(x)]$ و f موضعاً تابعی خطی است. از آنجا که خطوط مماس برای توابع خطی یکتا هستند (مثال ۱)، پس $L=K$. اما این امر با فرض متمایز بودن L و K متناقض است. بنابراین، هر نمودار در یك نقطه حداکثر می‌تواند یك خط مماس داشته باشد.

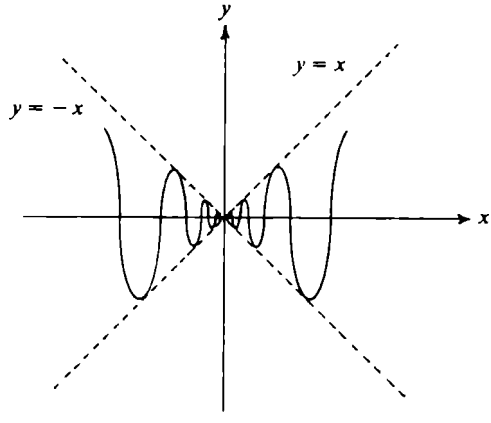
اینك برای نشان دادن سودمندی تعریف ۱، آن را درمورد چند مثال به‌کارمی‌گیریم. قصد ما این نیست که صرفاً یك رشته اثبات صوری ارائه دهیم، بلکه هدفمان بیشترنشان دادن این نکته است که این تعریف همراه با یك نمودار دقیق می‌تواند به نتایج هندسی معتبری منجرشود.

مثال ۲. یك بار دیگرنمودار $y=|x|$ را و اینکه آیا، بنا به تعریف ما، این نمودار خط مماسی درمبدأ دارد، درنظر بگیرید. فرض‌کنید L هرخطی باشدکه احتمالاً خط‌مماس هم هست، و این خط L را با خطوط $y=x$ و $y=-x$ مقایسه کنید. در مورد نقاطی که به‌طور دلخواه به مبدأ نزدیك‌اند، L دست‌کم نسبت به یکی از این دو خط، تقریب بسیار بدتری را به‌دست می‌دهد. درنتیجه نمودار تابع قدرمطلق درمبدأ هیچ خط مماسی ندارد.

مثال ۳. آیا نمودار تابع زیر (شکل ۲) در مبدأ دارای خط مماس است؟

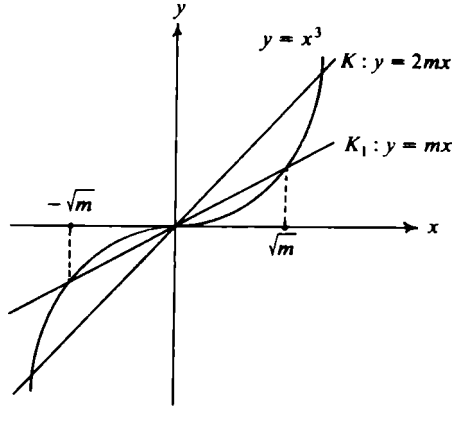
$$y=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

خیر، همان استدلال مثال ۲ دقیقاً دراینجا هم به‌کار می‌آید.



شکل ۲

مثال ۴. اینك از تعریفمان بهره گیریم وثابت کنیم که محور xها درمبدأ مختصات بر نمودار $y=x^3$ مماس است. آشکار است که محور xها، x^3 را درمبدأ نسبت به‌هرخطی با شیب منفی بهتر تقریب می‌کند. بنابراین، فرض کنید $K(x)=2mx$ خط دلخواهی مانند K را باشیب مثبت $2m$ نشان می‌دهد. از آنجا که می‌خواهیم نشان دهیم در بازه‌ای حول مبدأ، x^3 به ۰ نزدیکتراست تا به $K(x)=2mx$، برای مقایسه، خط $K_1=K_1(x)=mx$ را ترسیم می‌کنیم (شکل۳).



شکل ۳

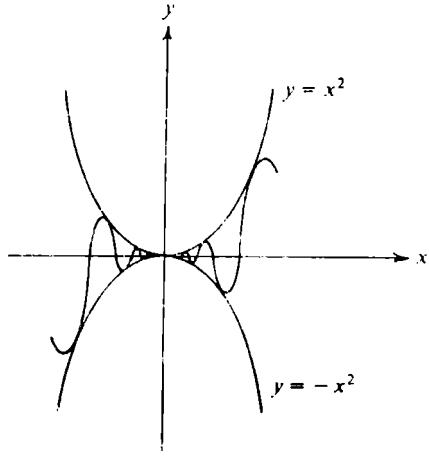
از روی نمودار، آشکار می‌شود کـه محور xها x^3 را در بازهٔ $(-\sqrt{m}, \sqrt{m})$ نسبت به K بهتر تقریب می‌کند. و در واقع دراین بازه داریم

$$|x^3|=|x^2|\,|x|\leqslant|2m-x^2|\,|x|=|K(x)-x^3|$$

که همین عبارت، اثبات ما را کامل می‌کند.

مثال ۵. نمودار تابع زیر (شکل۴) را درنظر بگیرید

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}\sin(۱/x), & x\neq ۰\\ ۰, & x=۰\end{cases}$$



شکل ۴

اغلب تعاریف شهودی خط مماس هنگامی‌که با این مثال روبرو می‌شوند کم‌وبیش به‌اشکال برخورد می‌کنند. با این وجود، نشان دادن این امر که محور xها در مبدأ بر این نمودار مماس است، چندان دشوار نیست. اولاً، توجه کنید که محور xها در مبدأ برنمودار هردو تابع $y=x^{۲}$ و $y=-x^{۲}$ مماس است. (این مطلب "واضح" است ودرغیراین صورت می‌توان آن را مانند روش به‌کار رفته در مثال ۴ اثبات کرد.) بدینسان، در مورد هر خط مفروض $K=K(x)$ ماربرمبدأ، بازه‌ای حول $x=۰$ وجود دارد به‌قسمی‌که فاصلهٔ $x^{۲}$ و نیز $-x^{۲}$ تاصفرنا بیشتراز فاصلهٔ آنها تا $K(x)$ است. اما ازآنجا که $-x^{۲}\leqslant f(x)\leqslant x^{۲}$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که در این بازه، فاصلهٔ $f(x)$ تا صفر کمتراز فاصله‌اش تا $K(x)$ است. چون $K(x)$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که محور xها درمبدأ برنمودار f مماس است.

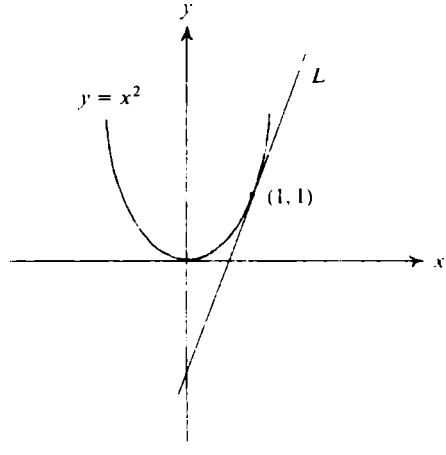
یادآوری. تابع مثال ۵ را می‌توان به تابعی تبدیل کرد که تجسم آن از این هم دشوارتر باشد. به‌عنوان یك تمرین، استدلال بالا را برای نشان دادن اینکه محور xها در مبدأ برنمودار تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}\sin(۱/x), & x \text{ گنگ است}\\ ۰, & x \text{ گویاست}\end{cases}$$

مماس است، به‌کار گیرید.

همان طورکه از مثالهای بالا برمی‌آید، تعریف ما از خط مماس می‌تواند حتی در مورد نمودارهای "پرددسر" هم مفید واقع شود. اما خوانندهٔ زیرك متوجه خواهد شد که تمامی خطوط مماس مورد بررسی، افقی بوده‌اند. وقتی‌که بایك خط مماس ناافقی سروکار داریم، چه پیش می‌آید؟

مثال ۶. آیا نمودار $y=x^2$ خط مماسی در $(1, 1)$ دارد؟



شکل ۵

از نمودار (شکل۵) آشکار است که، مطمئناً، خط مماسی در این نقطه وجود دارد. اما آیا با بهره‌گیری از تعریفمان عملاً می‌توانیم این‌مطلب را اثبات کنیم؟ برای استفاده از تعریف، ابتدا باید جانشینی برای خط L پیدا کنیم. امـا خط L عملاً چـه خواهد بود؟ به نظر می‌رسد که در اینجا متوقف شده باشیم.

اما اشکال کار در تعریف ما نیست، بلکه در شیوهٔ حدس زدن این خط است. برای دستیابی به‌روش مؤثرتر، باید استلزامهای تعریف را اندکی بیشتر پیگیری کنیم.

خطوط مماس و مشتقپذیری

در اغلب رهیافتهای صوری، بنا بر تعریف، وجود خط مماس و مشتقپذیری یك تابع مفهوم واحدی‌اند. اما، در مورد تعریفی که ما از خط مماس به دست دادیم چنین نیست؛ در اینجا باید رابطهٔ [خط مماس] با مشتق مورد بررسی قرار گیرد. آیـا ممکن است تابعی در یك نقطه یك "بهترین تقریب خطی" داشته باشد، اما در آن نقطه مشتقپذیر نباشد؟ در واقع، این حالت نمی‌تواند پیش بیاید وعلت آن بیامد نتیجهٔ زیراست.

قضیهٔ ۱. نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $P=(a, f(a))$ دارای خط مماسی مثل L

است، اگر و تنها اگر $f'(a)$ موجود و با شیب L مساوی باشد.

اثبات. فرض کنید $f'(a)$ وجود دارد و $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$، و خط L ماربر $P=(a, f(a))$ باشیب $f'(a)$ و $K(x)=f(a)+m(x-a)$ خط دیگری ماربر P با شیب $m\neq f'(a)$ باشد. برای آنکه ثابت‌کنیم L در P برنمودار f مماس است، کافی است نشان دهیم در بازه‌ای حول $x=a$ داریم

$$|f(x)-L(x)|\leqslant ۱/۲\ |L(x)-K(x)|$$

بنابرتعریف مشتق، $\delta>۰$یی چنان وجود داردکه به‌ازای هر $۰<|x-a|<\delta$، داریم

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|\leqslant\frac{۱}{۲}\,|f'(a)-m|$$

و درنتیجه در بازهٔ $(a-\delta,\ a+\delta)$

$$|f(x)-L(x)|\leqslant ۱/۲\ |f'(a)-m|\ |x-a|=۱/۲\ |L(x)-K(x)|$$

برعکس، فرض کنید خط $L(x)=f(a)+m(x-a)$ در نقطهٔ $(a, f(a))$ برنمودار مماس باشد. باید ثابت‌کنیم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=m$$

فرض کنید $\varepsilon>۰$، پس قرار می‌دهیم: $L_۱(x)=f(a)+(m+\varepsilon)(x-a)$ و $L_۲(x)=f(a)+(m-\varepsilon)(x-a)$. بنابرتعریف ما ازخط مماس، مقداری چون $\delta>۰$ چنان وجود داردکه به‌ازای همهٔ مقادیر $a-\delta<x<a+\delta$، داریم

$$|f(x)-L(x)|\leqslant|f(x)-L_۱(x)|\quad\text{و}\quad|f(x)-L(x)|\leqslant|f(x)-L_۲(x)|$$

اگر $a<x<a+\delta$، آنگاه $L_۲(x)<L(x)<L_۱(x)$، و در نتیجه

$$L_۲(x)<f(x)<L_۱(x)$$

اما این نامساویها، با کاستن $f(a)$ از طرفین و تقسیم آنها بر $(x-a)$، معادل‌اند با

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-m\right|<\varepsilon$$

ازآنجا که این نامساویها به‌ازای $a-\delta<x<a$ نیز صادق‌اند، می‌بینیم که $f'(a)$ وجود دارد و برابر m است.

حال می‌توان به جای روش غیرمؤثر "حدس زدن خط" تنها گام زیر را برداشت: محاسبهٔ مشتق. (ازدیدما، رهیافت صوری متعارف به‌جای تعریف عملی خط مماس، روشی برای یافتن آن به دست می‌دهد.)این‌کار مثل آن است که ریشه‌های یك چندجمله‌ای را به

عنوان اعدادی‌که از دستور درجهٔ دوم به‌دست می‌آیند تعریف کنیم.

یك بار دیگر به بررسی تابع قدرمطلق بازمی‌گردیم. توجه کنید که نمودار به‌طور کامل دریك طرف هریك از دوخط نقطه‌چین شکل۱ قرار می‌گیرد. با الهام ازاین تصویر، تعریف زیررا ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲. خط L ماربر $P=(a, f(a))$ واقع برنمودار $y=f(x)$، خط کرانی در P است، اگرتمام نمودار دریك‌طرف L واقع شده‌باشد. خط L کرانی‌موضعی در P است، هرگاه بازهٔ بازی چون I حول $x=a$ چنان وجود داشته باشدکه L یك خط‌کرانی برای تحدید f به I باشد. (بدینسان، همهٔ خطوط‌کرانی، خطوط‌کرانی موضعی نیز هستند.)

اگررابطه‌ای میان خطوط مماس وخطوط‌کرانی (موضعی) وجود داشته باشد، ازچه نوعی است؟ آیا اینکه درمبدأ تابع قدرمطلق بیش از یك خط‌کرانی موضعی دارد با عدم وجود خط مماس در آن نقطه هیچ ارتباطی دارد؟ نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که به راستی چنین است.

قضیهٔ ۲. اگر $f'(a)$ موجود باشد، آنگاه f حداکثر یك خط کرانی موضعی ماربر $P=(a, f(a))$ دارد، و آن خط [در صورت وجود] بر نمودار f در P مماس است.

اثبات. اگر $f'(a)$ تعریف شده باشد، خط مماسی چون $L=L(x)$ برنمودار f درنقطهٔ P وجود دارد. فرض‌کنید یك خط‌کرانی موضعی مثل $K=K(x)$ برای f در P موجود باشد، و بدون از دست دادن کلیت موضوع فرض کنید در بازه‌ای حول $x=a$، داریم: $K(x)\leqslant f(x)$. چون L خط مماس است، در بازه‌ای حول $x=a$ داریم: $K(x)\leqslant L(x)$. اما L و K در P یکدیگر را قطع می‌کنند و بنابراین K باید بر L منطبق باشد. برای تکمیل اثباتمان،کافی است ملاحظه‌کنیم که ضرورتی ندارد f هیچگونه خط‌کرانی موضعی در P داشته باشد ــ مثلاً، نمودار $f(x)=x^3$ درمبدأ چنین است.

به‌ویژه، اکنون می‌توانیم روایت صحیحی از "محك مشتق‌ناپذیری" دانشجوی من ارائه دهیم. یعنی، اگرنموداری بیش از یك خط‌کرانی موضعی مار برنقطهٔ مفروضی داشته باشد، درآن نقطه خط مماس ندارد.

حتی می‌توان قضیه‌ای راکه تاحدی عکس قضیهٔ۲ است ثابت‌کرد. آنچه این عکس (قضیهٔ۳) را تاحدی شگفت‌آورمی‌کند این است‌که اگردرآن به‌جای عبارت "خط‌کرانی" عبارت "خط کرانی موضعی" را قرار دهیم، دیگرقضیهٔ ۳ صادق نخواهد بود (تمرین ۳). وعلیرغم این واقعیت‌که مشتقپذیری پدیده‌ای صرفاً موضعی است، این حالت برقرارمی‌است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $y=f(x)$ نمایشگر تابع پیوسته‌ای باشد که روی بازهٔ بازی تعریف شده است. اگر از هر نقطهٔ P برنمودار f، خط کرانی یکتایی بگذرد، آنگاه f روی این بازه مشتقپذیر است.

اثبات. بنابرقضیهٔ ۱، کافی است نشان دهیم هر خط کرانی خط مماس نیز هست. رض کنید درنقطه‌ای مانند P برنمودار f، خط‌کرانی L مماس نباشد. پس از آنکه f

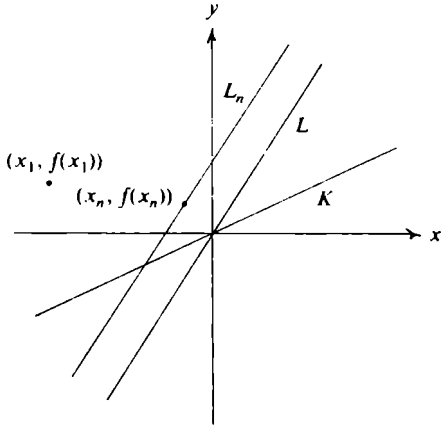
را بـا انعکاسها و انتقالهای مناسبی ترکیب کردیم، می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت موضوع فرض کنیم که $P=(0,0)$، خط L شیب نامنفی m را دارد، ونمودار f بالا، یا روی L قرار دارد. ازآنجا که L خط مماس نیست، باید خطی مانند $K=K(x)$ ماربر مبدأ، و دنباله‌ای از نقـاط $x_n \to 0$ وجود داشته باشد به طوری کـه $(x_n, f(x_n))$ و (x_n, mx_n) در دوطرف مخالف K قرارگیرند (تمرین۲). فرض می‌کنیم شیب K اکیداً کمتراز شیب L باشد، و بررسی‌حالت شیب بزرگتر را به‌خواننده وامی‌گذاریم. بنابراین، به‌ازای مقداری چون $\varepsilon > 0$ داریم: $K(x)=(m-\varepsilon)x$، و درنتیجه به‌ازای همهٔ مقادیر n، $x_n < 0$ و $f(x_n) > K(x_n)=(m-\varepsilon)x_n$. فرض می‌کنیم m_n شیب خط کرانی یکتای ماربر $(x_n, f(x_n))$، یعنی خط $L_n(x)=m_n(x-x_n)+f(x_n)$ باشد. می‌گوییم کـه هیچ زیردنباله‌ای از $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ به m نمی‌گراید. فـرض کنید زیردنباله‌ای بـه m می‌گراید. پس با گذر به این دنباله، می‌توانیم فرض کنیم $m_n \to m$. اما دراین صورت می‌توان به‌ازای مقادیر بزرگ n، مقدار $|m-m_n|$ را کوچك کـرد. به ویژه، به‌ازای مقادیری از n که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشند

$$L_n(0) = -m_n x_n + f(x_n) > (m-m_n-\varepsilon)x_n > 0 = f(0)$$

از سوی دیگر، پیوستگی f تضمین می‌کند کـه $(x_n, f(x_n)) \to (0,0)$. پس به‌ازای مقادیری از n که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشند

$$\begin{aligned} f(x_1)-L_n(x_1) &> (m-\varepsilon)x_1 - [m_n(x_1-x_n)+f(x_n)] \\ &= (m-m_n-\varepsilon)x_1 + m_n x_n - f(x_n) > 0 \end{aligned}$$

در نتیجه به‌ازای مقادیر بزرگ n، نقطهٔ $(0,0)$ و $(x_1, f(x_1))$ در دو طرف مخالف L_n واقع‌اند واین با کرانی بودن خط L_n متناقض است (شکل۶).

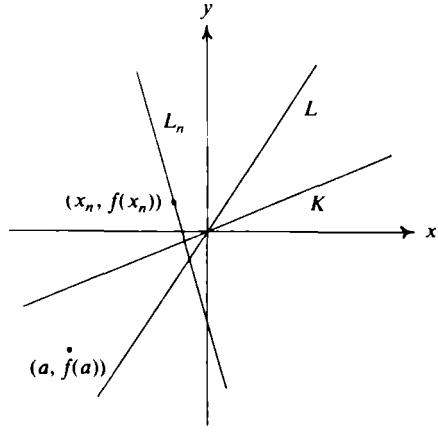


شکل ۶

این امرادعای ما را مبنی براینکه هیچ زیردنباله‌ای از $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ به m نمی‌گراید، اثبات می‌کند. پس، $|m_n - m|$ باید به‌ازای مقادیر بزرگ n درمقداری به‌دور ازصفر بماند و نتیجه می‌شود که: $L_n \cap L = (z_n, mz_n) \to (0, 0)$، زیرا

$$z_n = \frac{f(x_n) - mx_n}{m - m_n} + x_n$$

چـون K خط کرانی نیست، باید نقطه‌ای چون $(a, f(a))$ اکیداً بین K و L موجود باشد (شکل ۷).



شکل ۷

حـال توجه کنید کـه به ازای مقادیر بـزرگ n، داریـم: $z_n < 0$. (هیچ z_n مثبتی نمی‌تواند بـه دامنهٔ f متعلق بـاشد، زیرا در آن صورت L_n نقطهٔ $(0, 0)$ را از نقاط بهشکل $(x, f(x))$ به‌ازای $x > z_n$، جدا می‌کند. اگر z_n صفرمی‌بود، آنگاه L_n نقطهٔ $(a, f(a))$ را ازنقاط $(x, f(x))$ به‌ازای $x > 0$، جدا می‌ساخت.) اما دراین صورت به‌ازای nهای بزرگ، $(a, f(a))$ و $(0, 0)$ در دو طرف مخالف L_n قرار می‌گیرند، که این خود تناقض است. (اثبات این مطلب، استدلالی سرراست بـا کمك نامساویها است.) بنابراین، خط K نمی‌تواند وجود داشته باشد و خط کرانی L در واقع، مماس نیز هست.

نتیجه‌گیری و تمرینات

تعبیر خط مماس به عنوان "بهترین تقریب خطی" را می‌توان در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به‌خوبی به‌کار برد. البته، اینکه دامنهٔ انجام عملی این کار تا به‌کجاست، به‌وقتی‌که برای آن درس درنظرگرفته شده و نیز به‌ماهیت آن درس بستگی دارد. کمترین

کار دراین جهت، ارائهٔ تعریف ۱، به‌کار بستن آن درمورد چند مثال وسپس پیشروی به‌سوی تعریف مشتق به روش متداول است. قضیهٔ ۱ را می‌توان بدون اثبات بیان، و یا آن را کلاً حذف کرد. چنین درسی احتمالاً برای دانشجویانی که اولین‌باری است که باحساب دیفرانسیل‌وانتگرال روبرو می‌شوند، مناسب خواهد بود. اگراین دانشجویان در دبیرستان قدری حساب دیفرانسیل و انتگرال خوانده باشند، یا کلاس حساب دیفرانسیل وانتگرال، ویژهٔ دانشجویان پیشرفته‌باشد، تعریف ۱ را می‌توان به‌طور دقیقتری مورد استفاده قرار داد، زیرا ایـن دانشجویان برای درك تأثیر متقابل هندسهٔ خط مماس و تعریف حـدی مشتق، آمادگی بیشتری دارند. می‌توان اثباتی ازقضیهٔ ۱ را بیان و برخی ازمسائل طرح شده در زیررا بررسی کرد.

مستقل از رهیافتی که اختیارکرده‌ایم، همواره ارزشمند است که نشان دهیم تعاریف و مفاهیم کنده‌کاریهایی بر سنگ نیستند، بلکه همواره می‌توانند دستخوش انـواع تعابیر واقع شوند.

تمرینات زیر را برای کسانی که می‌خواهند این ایده‌ها را قدری بیشتر پی گیرند، پیشنهاد می‌کنیم.

۱. مستقیماً با استفاده از تعریف ۱ (یعنی بدون استفاده از قضیهٔ ۱) ثابت کنید کـه اگر نمودار f در نقطهٔ $(a, f(a))$ خط مماسی داشته باشد ،آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.

۲. ثابت کنید که خط $L=L(x)$ بر نمودار f در نقطهٔ $P=(a, f(a))$ مماس است، اگروتنهااگر به‌ازای هرخط دیگر K ماربر P، بازه‌ای حول $x=a$ موجود باشد، به‌طوری که در این بازه $(x, f(x))$ و $(x, L(x))$ در یك طرف خط K واقع شوند.

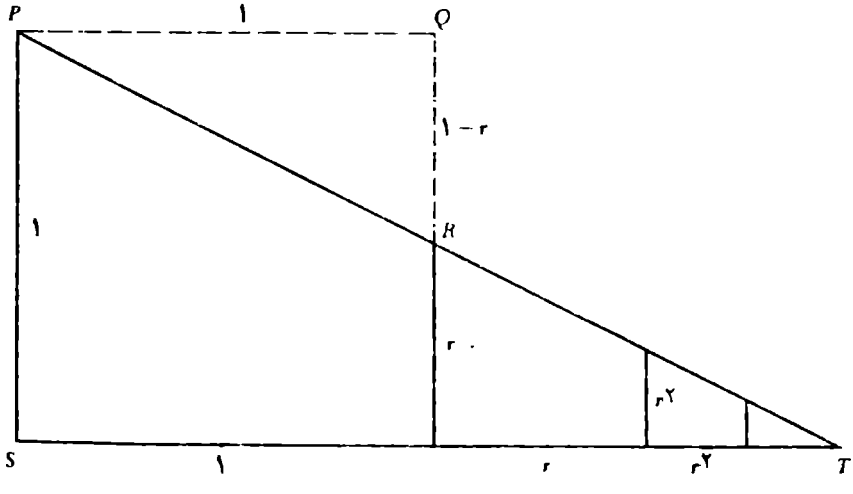
۳. حکمی را کـه درست قبل از قضیهٔ ۳ آمده است، اثبات کنید. (راهنمایی: بـا بهره‌گیری از نیمهٔ بالایی تابع مفروض در مثال ۳، مثال ناقضی را مطرح کنید. تمام نقاط بریدگی را به‌صورت پاره‌خطهایی امتداد دهید.)

مراجع

1. Anton Howard, *Calculus with Analytic Geometry*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1984.
2. Foulis D. J., Munem M. A., *Calculus with Analytic Geometry*, 2nd ed. Worth Publishing Inc., 1984.
3. Fraleigh John B., *Calculus with Analytic Geometry*, Addison-Wesley, 1981.
4. Gillett Philip, *Calculus and Analytic Geometry*, 2nd ed., D. C. Heath and Company, 1984.
5. Purcell Edwin, Varberg Dale, *Calculus with Analytic Geometry*, 4 nd ed., Prentice-Hall, 1984.

6. Roetman E. L., "Tangent planes and differentiation," *Mathematics Magazine*, 43(1970)1-7.
7. Thurston H., "Tangents: an elementary survey," *Mathematics Magazine*, 42(1969)1-11.
8. Thurston H., "On the definition of the tangent line," *Amer. Math. Monthly*, 71(1964)1099-1103.

بدون شرح



$\Delta PQR \approx \Delta TSP$

$$\therefore ۱ + r + r^۲ + \cdots = \frac{۱}{۱ - r}$$

مارتین دیویس و روبن هرش

آنالیز نااستاندارد•

ترجمهٔ ناصر بروجردیان

چکیده. این نظریهٔ ریاضی، بینهایت‌کوچکها را براساس محکمی تجدیدبنا کرده‌است. بینهایت کوچکها ازقدیم‌الایام برای حل مسائلی مانند یافتن مساحت دایره، البته باشك وتردید، به‌کار برده می‌شدند.

آنالیز نااستاندارد، شاخهٔ جدیدی از ریاضیات‌که ده سال پیش توسط ابراهام رابینسون[1] منطقدان ابداع شد، مرحلهٔ تازه‌ای ازحل چند پارادوکس مشهور قدیمی را رقم زده است. رابینسون، که در حال حاضر در دانشگاه ییل کار می‌کند، مفهوم "بینهایت‌کوچك"، عددی که بینهایت‌کوچك است وبا این حال از صفر بزرگتراست، را احیا کرده است. ریشه‌های این مفهوم تـا عهد باستان امتداد دارند. درآنالیز مرسوم، یا "استاندارد"، آشکار به نظر می‌رسدکه این مفهوم تناقضی درخود دارد. معهذا، دست‌کم از عهد ارشمیدس ابزار مهمی در مکانیك و هندسه بوده است.

درقرن نوزدهم‌کم و بیش به‌نظرمی‌رسید بینهایت‌کوچکها یك‌بار و برای همیشه از ریاضیات‌اخراج شده‌اند. وایرشتراس برای رفع‌نیازهای منطقی،حساب بینهایت‌کوچکهای نیوتن و لایب‌نیتس را بدون‌استفاده از بینهایت‌کوچکها بازسازی‌کرد. با این حال امروز این منطق ریاضی است که با قدرت و پیچیدگی امروزین خود بینهایت کوچکها را احیا کـرده و دوباره آنهـا را قابل قبول ساخته است. رابینسون بـه یك معنا از بی‌قیدی و آسانگیری ریاضیات قـرن هیجدهم برعلیه سختگیری مرتاضانهٔ ریاضیات قـرن نوزدهم حمایت کرد و فصل جدیدی در جنگ بی‌پایان مابین متناهی و نامتناهی، پیوسته وگسسته، گشود.

• Davis M., Hersh R., "Nonstandard analysis," *Sci. Amer.*, June 1972, 78-86.

1. Abraham Robinson

در مباحثات مربوط به بینهایت کوچکها که با رشد و گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال همراه بوده است، هندسهٔ اقلیدس نمونهٔ استانداردی بود که متجددین برعلیه آن موضع می‌گرفته‌اند. درکتاب اقلیدس هم بینهایت و هم بینهایت‌کوچك به‌نحو زیرکانه‌ای کنار گذارده شده‌اند. درکتاب اقلیدس می‌خوانیم که نقطه چیزی است که مکان دارد ولی بعد ندارد. این تعریف را بی‌معنا نامیده‌اند، اما آوردن این تعریف شاید به‌خاطر احتراز از بحث بینهایت‌کوچکها بوده باشد؛ واین به‌منزلهٔ رد مفاهیم پیشین تفکرات یونانی‌است. دراتمیسم‌دموکریت نه‌تنها ماده، بلکه زمان وفضا نیزمطرح بوده‌است. ولی بعداً استدلالات زنون باعث شدکه مفهوم زمان به‌صورت رشته‌ای ازلحظات متوالی، ومفهوم خط به‌صورت رشته‌ای ازنقاط "غیرقابل تقسیم" متوالی، غیرقابل دفاع شود. ارسطو، بانی منطق اصولی، بینهایت بزرگ یا کوچك را از هندسه طرد کرد.

نمونه‌ای از به‌کارگیری استدلالات مبتنی بر بینهایت کوچکها در هندسه از قرار زیر است.

"می‌خواهیم رابطهٔ بین مساحت دایره و پیرامون آن را بیابیم. برای سهولت فرض می‌کنیم شعاع دایره واحد باشد، حال دایره را می‌توان به‌صورت‌ترکیبی از بینهایت پاره‌خط مستقیم در نظرگرفت‌که همهٔ آنها با هم مساوی‌اند و همه بینهایت‌کوتاه هستند. دراین صورت دایره مجموع مثلثهای بینهایت کوچك است که ارتفاع همهٔ آنها واحد است. در مثلث، مساحت برابر با نصف قاعده ضربدر ارتفاع است. بنابراین مجموع مساحت مثلثها، نصف مجموع قاعده‌هاست؛ ولی مجموع مساحت مثلثها مساحت دایره، ومجموع قاعده‌های این‌مثلثها محیط دایره است. بنابراین، مساحت دایره به‌شعاع واحد نصف محیط آن است."

این‌استدلال،که اقلیدس آن را رد می‌کرد، درقرن پانزدهم‌توسط نیکولاس کوسایی[1] منتشر شد. نتیجه البته درست است، اما یافتن ایرادات استدلال مشکل نیست. حداقل می‌توان گفت مفهوم مثلث با قاعدهٔ بینهایت کوچك مغشوش است. مطمئناً قاعدهٔ یك مثلث باید طولی برابر صفر یا بزرگتر از صفر داشته باشد. اگر طول قاعده صفر باشد، آنگاه مساحت صفراست وصرفنظرازتعداد آنها، درهرصورت مجموع آنها چیزی جزصفرنیست. از طرف دیگر، اگرطول قاعده بزرگتر از صفر، هر اندازه کوچك، باشد با جمع تعداد نامتناهی ازآنها یك‌حاصل جمع بینهایت بزرگ به‌دست می‌آوریم. در هرحال نمی‌توانیم یك دایره با محیط متناهی را به‌صورت مجموع بینهایت قطعهٔ مساوی به‌دست آوریم.

اساس این ایراد این مطلب است که حتی یك عدد خیلی کوچك ناصفر هم اگر به دفعات کافی با خود جمع شود به‌اندازهٔ دلخواه‌بزرگ می‌شود. ازآنجاکه این‌مطلب‌ابتدا توسط ارشمیدس تصریح‌شد، آن‌را خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی می‌نامند. یك بینهایت کوچك،درصورت‌وجود، دقیقاً باید یك عدد غیرارشمیدسی‌باشد: عددی بزرگتراز صفرکه به‌هرتعداد (متناهی) ازدفعات‌که باخودجمع‌شود، مثلاً کمتراز واحدباقی‌بماند. ارشمیدس که به‌شیوهٔ ارسطو و اقلیدس فکر می‌کرد، اظهارکردکه همهٔ اعداد ارشمیدسی هستند؛ هیچ بینهایت‌کوچکی وجودندارد. بااین‌حال ارشمیدس یك‌فیلسوف طبیعی، مهندس، وفیزیکدان

1. Nicholas of Cusa

نیز بود. او بینهایت‌کوچکها و شهود فیزیکی خود را برای حل مسائلی در هندسهٔ سهمیها به‌کاربرد. سپس، ازآنجا که بینهایت‌کوچکها "وجود ندارند"، او یك اثبات "بی‌خلل" از نتایجش را بـا استفاده از "روش افنا" که مبتنی بـر استدلالی غیرمستقیم و اعمالی صرفاً متناهی است، ارائه می‌داد. این اثبات بی‌خلل در رسالهٔ «دربارهٔ تربیع سهمی»[1] او آورده شده که از زمان قدیم آن را می‌شناخته‌اند. شیوهٔ استفاده از بینهایت کوچکها کـه عملاً برای کشف جواب به‌کار برده شده، درمقاله‌ای به‌نام "دربارهٔ روش"[2] آمده است که تازمان کشف هیجان‌انگیز آن در ۱۹۰۶ ناشناخته مانده بود.

روش افنای ارشمیدس که از بینهایت کوچکها اجتناب می‌کند، در اساس به روش "اپسیلون ـ دلتا"یی که به‌کمك آن وایرشتراس و پیروانش در قرن نوزدهم روش بینهایت کوچکها را از آنالیز بیرون راندند، نزدیك است. توضیح ایـن مطلب با مراجعه به‌مثال دایره به‌عنوان یك بینهایت ضلعی آسان است. می‌خواهیم یك اثبات منطقاً قابل قبول برای گزارهٔ "مساحت دایره‌ای به‌شعاع واحد نصف محیط آن است" که به‌وسیلهٔ استدلالی منطقاً غیرقابل قبول آن را کشف‌کردیم، به‌دست آوریم.

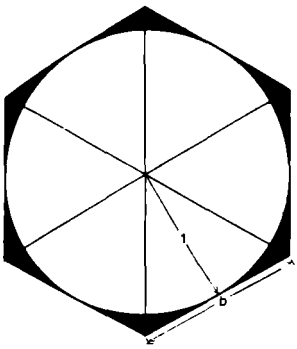
به‌روش زیراستدلال می‌کنیم. این گزاره حاکی‌ازتساوی دوکمیت مربوط به‌دایره‌ای با شعاع واحد است: مساحت آن و نصف محیط آن. حال اگرگزاره نادرست باشد یکی ازاین‌کمیتها بزرگتراز دیگری است. فرض‌کنید A عدد مثبتی باشدکه ازتفاضل آن مقدار کوچکتراز مقدار بزرگتر به‌دست می‌آید. حال می‌توانیم یك چندضلعی منتظم با هرتعداد ضلع‌که می‌خواهیم بردایره محیط کنیم. از آنجا که چند ضلعی متشکل از تعدادی متناهی مثلث با ارتفاع واحد است، می‌دانیم که مساحت آن نصف پیرامون آن است. اگر تعداد اضلاع را به‌اندازهٔ کافی بزرگ سازیم می‌توانیم اختلاف مساحت دایره و چند ضلعی را کمترازنصف A سازیم (مقدار A هرچه‌که می‌خواهد باشد)؛ درهمین حال اختلاف محیط چندضلعی و دایره‌کمتراز نصف A خواهد بود. اما دراین صورت اختلاف مساحت دایره ونصف محیط آن بایدکمتراز A باشدکه بافرض اولیهٔ ما درتناقض است، بنابراین فرض ما غیرممکن است و A، همان‌طور که می‌خواستیم ثابت‌کنیم باید صفر باشد.

ایـن استدلال منطقاً بی‌عیب است. اما در مقایسه بـا اولین استدلال کـه ساده و سرراست است، سرشار از وسواس و سخت‌گیری است. رویهم رفته، اگـر با استفاده از بینهایت‌کوچکها جواب درست به‌دست می‌آید،آیا نباید استدلال مربوطه به‌معنایی درست باشد؟ حتی‌اگرما نتوانیم مفاهیم به‌کار رفته درآن راتوجیه‌کنیم، وقتی راهگشاست چگونه می‌تواند واقعاً غلط باشد؟

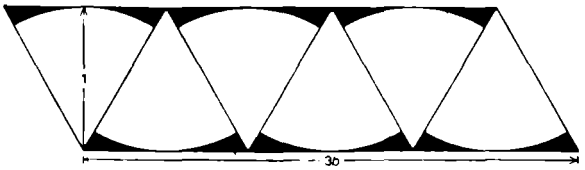
ارشمیدس چنین دفاعی از بینهایت کوچکها نکرد. در واقع او در رسالهٔ "دربارهٔ روش" دقت داردکه توضیح دهد "حقیقتی‌که دراینجا بیان شد واقعاً با استدلال به‌کاربرده شده، ثابت نمی‌شود" ویك اثبات بی‌خلل به‌طور جداگانه منتشر شده است. ازطرف دیگر،

---

1. *On the Quadrature of the Parabola*
2. "On the method"



چند ضلعی A

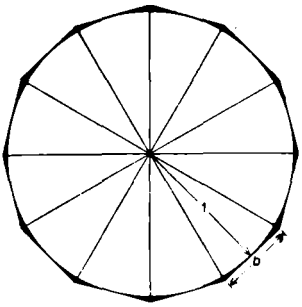


محیط $P=6b$

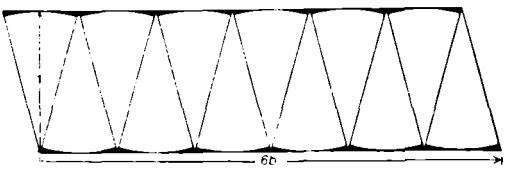
مساحت چندضلعی $A=3b=1/2\,P$

محیط دایرهٔ محاطی $\ll P$

مساحت دایرهٔ محاطی $\ll 1/2P$



چند ضلعی B

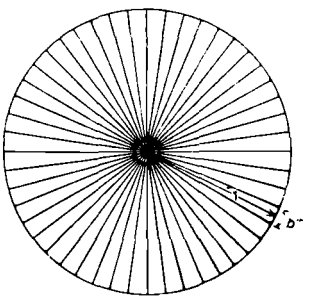


محیط $P'=12b'$

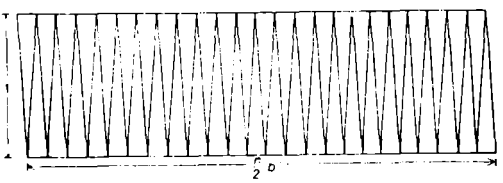
مساحت چند ضلعی $B=6b'=1/2P'$

محیط دایرهٔ محاطی $< P'$

مساحت دایرهٔ محاطی $< 1/2P'$



چند ضلعی N



محیط $P''=nb''$

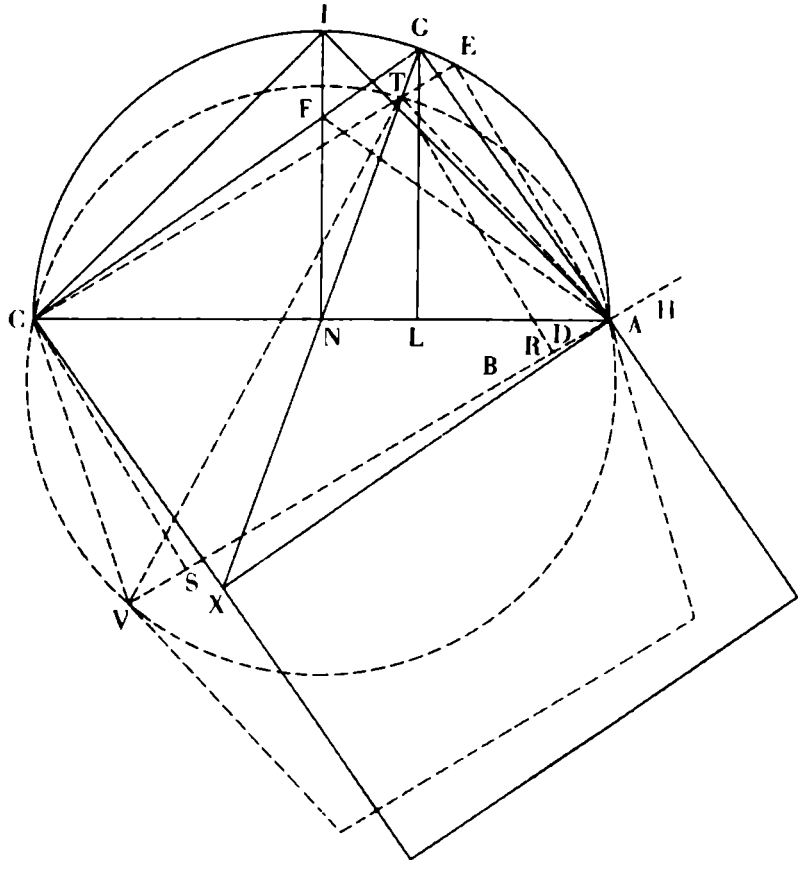
مساحت چندضلعی $N=nb''/2=1/2P''$

محیط دایرهٔ محاطی $\approx P''$

مساحت دایرهٔ محاطی $\approx 1/2P''$

روش افنا برای اثبات غیرمستقیم این مطلب که مساحت دایره‌ای به شعاع واحد نصف محیط آن است، به کار برده می‌شود. در اثبات بالا یک چند ضلعی بر دایره محیط شده است (بالای شکل) وتعدادی مثلث به‌وجود آورده است‌که مساحت آنها به‌آسانی قابل‌محاسبه است. با اضافه کردن تعداد اضلاع چند ضلعی، همانند چند ضلعی B و چند ضلعی N، تعداد مثلثها افزایش یافته و نازکترمی‌شوند واختلاف مساحت دایره و چندضلعی کمتر می‌شود. با این حال برای یك چند ضلعی با هرتعداد متناهی از اضلاع، این اختلاف هیچگاه صفرنمی‌شود. آنالیز استاندارد از این مشکل به‌این صورت دوری می‌گزیند که می‌گوید وقتی تعداد اضلاع به‌سمت بینهایت افزایش می‌یابد، مساحت چند ضلعی به مساحت دایره به صورت حد نزدیك می‌شود. آنالیز نااستاندارد توضیح روشنگرانه‌تری ارائه می‌دهد و با استفاده از چندضلعی بینهایت ضلعی‌که هرضلع آن طولی بینهایت‌کوچك دارد، از مفهوم حد اجتناب می‌کند.

نیکولاس، که یك کاردینال کلیسا بود، استدلال به کمك مقادیر بینهایت را ترجیح می‌داد زیرا اعتقاد داشت بینهایت "منشأ و ابزار و در عین حال هدف دست نیافتنی همهٔ دانشها" است. یوهان کپلر، یکـی از بنیانگذاران علوم جدید، از ایـن اعتقاد نیکولاس به معرفت شهودی پیروی کرد. کپلر در یك تفحص علمی که امروزه کمتر از کشفیاتش در نجوم شهرت دارد، در ۱۶۱۲ بینهایت کوچکها را به‌کار گرفت تا بهترین ابعاد را برای یك بشکهٔ آب پیدا کند. او نگران تناقضات درونی روشش نبود و به الهام و شهود اطمینان می‌کرد و



مسئلهٔ بشکهٔ آب را کپلر در مقاله‌اش[1] که درسالهای ۱۶۱۵ و ۱۶۱۶ در اتریش منتشرشد، با استفاده از بینهایت‌کوچکها مورد بررسی قرار داد. مسئله‌ای‌که کپلردر برابرخود نهاد، یافتن بهترین ابعاد برای یك بشکهٔ آب بود. در شکل، صفحه‌ای ازنسخهٔ بازسازی شدهٔ مقاله در قرن نوزدهم‌که دراروپا منتشرشد دیده می‌شود.

1. *Nova stereometria doliorum vinariorum*

نوشت: "طبیعت هندسه را تنها ازطریق غریزه‌آموزش‌می‌دهد، حتی بدون استدلال منطقی." علاوه‌براین، فرمولهای او برای حجم بشکه‌های آب درست هستند.

مشهورترین ریاضیدانی کـه به معرفت شهودی اعتقاد داشت بدون شك بلز پاسکال است. او در جواب ایرادات معاصرینش به استدلال مبتنی بر بینهایت کوچکها، مخلصانه می‌گفت چشم دل را باید بازکرد تـا مسائل روشن شوند. پاسکال بـه بینهایت بزرگها و بینهایت‌کوچکها به‌عنوان رازهایی می‌نگریست‌که طبیعت آنها را به‌بشر عرضه‌کرده است، نه از برای فهمیدن آنها، بلکه از برای تحسین آنها.

اوج شکوفایی استدلالات بینهایت‌کوچکی با نسل بعد از پاسکال فرارسید: نیوتن، لایب‌نیتس، برادران برنولی (یاکوب، ویوهان)، لئونهارت اویلر. قضایای اساسی‌حساب دیفرانسیل و انتگرال را نیوتن و لایب‌نیتس در سالهای ۱۶۶۰ و ۱۶۷۰ کشف کـردند. اولین کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مارکوس هوپیتال (یکی از شاگردان لایب‌نیتس) و یوهان برنولی در ۱۶۹۶ نوشتند. در آغـاز این کتاب به‌عنوان یك اصل موضوع گفته می‌شودکه دومقدار راکه اختلافشان یك بینهایت‌کوچك‌است می‌توان مساوی در نظرگرفت. به‌عبارت دیگر، این مقادیر به‌طور همزمان مساوی با یکدیگر و نامساوی با یکدیگردرنظرگرفته می‌شوندا اصل موضوع دیگری می‌گوید یك خم "مرکب از بینهایت پاره‌خط با طولهای بینهایت کوچك" است. این به منزلهٔ آن است که روشهایی‌که ارسطو ۲۰۰۰ سال پیشتر آنها را از هرحقی محروم ساخته بود، با آغوش باز پذیرفته می‌شوند.

هوپیتال نوشت: "آنالیز معمولی فقط بامقادیرمتناهی سروکار دارد ولی به‌هرمیزان کـه بینهایت پیش می‌رود، این نیز پیش می‌رود. این آنالیز، تفاضلات بینهایت کوچك مقادیرمتناهی را مقایسه و روابط بین این تفاضلات راکشف می‌کند و به‌این طریق روابط بین مقادیرمتناهی راکه درمقایسه با بینهایت‌کوچکها، بینهایت بزرگ هستند، به‌همان‌گونه که هست کشف می‌کند. حتی می‌توان گفت که این آنالیز تا ماوراء بینهایت هـم امتداد دارد، زیرا خودرا محدود به‌تفاضلات بینهایت‌کوچك نمی‌کند، بلکه روابط بین تفاضلات این تفاضلات را هم‌کشف می‌کند."

نیوتن و لایب‌نیتس در این شور و شیفتگی بـا هوپیتال شریك نبودند. لایب‌نیتس مدعی نبود که بینهایت کوچکها واقعاً وجود دارند، فقط می‌گفت که می‌توان بدون بروز اشتباه طوری‌آنها را دراستدلال به‌کارگرفت‌که‌گویی واقعاً وجود دارند. گرچه لایب‌نیتس نمی‌توانست این‌مدعا را ثابت‌کند، کار رابینسون نشان دادکه او رویهم‌رفته به‌معنایی برحق بوده‌است. نیوتن سعی‌کردکه ازبینهایت‌کوچکها اجتناب‌کند. او درکتاب، اصول ریاضی[1] همانند ارشمیدس در رسالهٔ دربارهٔ تربیع سهمی، نتایجی را که در اصل به وسیلهٔ روشهای بینهایت‌کوچکی به‌دست آمده بود به‌طور کامل، با روش متناهی اقلیدسی ارائه کرد.

در فراهم آوردن مسئله برای آنالیز ریاضی، دینامیك اهمیتی همتراز هندسه یافته بود. مسئلهٔ اصلی، ارتباط مابین "فلوئنت"[2] و "فلوکسیون"[3] بودکه امروزه به نامهای مکان

---

1. *Principia Mathematica* 2. fluent 3. fluxion

لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای یك جسم متحرك معروف‌اند.

یك سنگ در حال سقوط را در نظر بگیرید. حرکت آن با مشخص کردن مکان آن به عنوان تابعی از زمـان، توصیف می‌شود. در حین سقوط سرعت آن افـزایش می‌یابد، بنابراین سرعت آن درهر لحظه نیزمتغیری است تابع زمان. نیوتن تابع مکان را "فلوئنت" و تـابع سرعت را "فلوکسیون" نامید. با در دست بودن هـر یك از این دو، دیگری را می‌توان تعیین کـرد. این ارتباط، اساس حساب بینهایت کوچکهایی است کـه نیوتن و لایب‌نیتس ارائه کردند.

درمورد سنگ درحال‌سقوط، فلوئنت بافرمول $s = ۱۶t^۲$ ارائه‌می‌شودکه s مسافت طی شده برحسب فوت و t زمان سپری شده ازلحظهٔ رها شدن برحسب ثانیه است. درحین سقوط سنگ، سرعت آن مـدام افزایش می‌یابد. چگونه می‌توانیم سرعت سنگ در حال سقوط را در لحظهٔ خاصی، مثلاً $t = ۱$، حساب کنیم؟

می‌توانیم سرعت متوسط را برای زمانهای متناهی بـا این فرمول ابتدایی به‌دست آوریم: سرعت مساوی است با فاصله تقسیم برزمان. آیا می‌توانیم سرعت لحظه‌ای را با استفاده ازاین فرمول به‌دست آوریم؟ دریك نمو بینهایت‌کوچك زمان، نموفاصله نیز باید بینهایت کوچك باشد؛ نسبت آنهـا، سرعت متوسط در طـی آن لحظه، باید همان سرعت لحظه‌ای متناهی باشدکه در جستجوی آن هستیم.

فرض می‌کنیم dt نمایانگر نمو بینهایت کوچك زمان و ds نمایانگر نمو متناظر فاصله باشد. (البته ds و dt را باید نمادهایی منفرد درنظرگرفت ونه به‌شکل d ضربدر t یا d ضربدر s.) می‌خواهیم نسبت ds/dt راکه مقداری متناهی است، به‌دست‌آوریم. برای یافتن نموفاصله از $t = ۱$ تا $t = ۱ + dt$، مکان سنگ را در زمان $t = ۱$،که عبارت است‌از $۱۶ = ۱^۲ \times ۱۶$، ودر زمان $t = ۱ + dt$،که عبارت است‌از $۱۶ \times (۱ + dt)^۲$، محاسبه می‌کنیم. با کمی استفاده از جبر مقدماتی درمی‌یابیم‌که ds، نمو فاصله که تفاضل این دوفاصله است، برابراست با $۳۲dt + ۱۶dt^۲$. بنابراین نسبت ds/dt که می‌خواهیم آن را بیابیم، برابراست با $۳۲ + ۱۶dt$.

آیا مامسئله را حل‌کرده‌ایم؟ ازآنجا که جواب باید مقداری متناهی باشد، خواهان آنیم‌که قسمت بینهایت‌کوچك، $۱۶dt$، را حذف‌کنیم تا جواب ۳۲فوت برثانیه را برای سرعت لحظه‌ای به‌دست آوریم. این دقیقاً همان کاری است که اسقف برکلی اجازهٔ انجام آن را به‌ما نمی‌دهد.

کتاب آنالیزدان، همان نقادی مشعشع و کوبندهٔ برکلی از روش بینهایت کوچکها، در ۱۷۳۴ عرضه شد. ایـن کتاب، خطاب به‌یك "ریاضیدان بی‌ایمان" کـه عموماً گمان می‌کنند دوست نیوتن، ادموند هالی منجم، بـاشد، نوشته شده است. هالی برای انتشار اصول سرمایه‌گذاری کرد و به‌آماده‌سازی آن برای نشرکمك‌کرد.

برکلی‌نوشت روش لایب‌نیتس‌که به‌سادگی $۳۲ + ۱۶dt$ را "همان" ۳۲ "درنظر" می‌گیرد، قابل فهم نیست. اونوشت "هیچ فایده‌ای ندارد‌که بگوییم [قسمت اغماض شده] مقداری فوق‌العاده کوچك است، زیرا به ما گفته می‌شود اگر از چیزی صرفنظر شود، هر

رابینسون	سنگ درحال‌سقوط $s=16t^2$ مکان	وایرشتراس
قرار دهید $t'=1+dt$؛ dt یك عدد بینهایت‌کوچك مثبت است. $s'=16+32dt+16(dt)^2$ $ds=s'-s$ $ds=32dt+16dt^2$ $ds/dt=32+16dt$ از آنجا که dt بینهایت کوچك است، $16dt$ نیز چنین است. ۳۲ یك عدد حقیقی استاندارد است. بنابراین قسمت استاندارد ds/dt = سرعت لحظه‌ای $=32$	●	قراردهید $t'=1+\Delta t$؛ Δt یك عدد حقیقی مثبت است. $s'=16+32\Delta t+16(\Delta t)^2$ $\Delta s=s'-s=32\Delta t+16(\Delta t)^2$ به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت ε، هر اندازه کوچك، δ را برابر $\varepsilon/16$ اختیار می‌کنیم. در این صورت به‌ازای هر $\Delta t<\delta$ داریم $(\Delta s/\Delta t)-32=16\Delta t<16\delta$ $=16(\varepsilon/16)$ $=\varepsilon$ سرعت لحظه‌ای $=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t$ $=32$
	●	
	●	

مسئلهٔ سنگ درحال سقوط با راه‌حلهای این مسئله به‌روش آنالیز استاندارد (راست) و به‌روش آنالیز نااستاندارد (چپ) نمایش داده شده‌اند. در آنالیز استاندارد که ریاضیدان آلمانی قرن نوزدهم کارل وایرشتراس مظهر آن است، سرعت سنگ درحال‌سقوط را بدون استفاده از بینهایت کوچکها و با تعریف سرعت به عنوان حدی که توسط نسبتهای نموهای متناهی تقریب می‌شود، محاسبه می‌کنند. ابراهام رابینسون از دانشگاه ییل، ابداع‌کنندهٔ آنالیز نااستاندارد، این محاسبه را با روش اصلاح شده‌ای از بینهایت‌کوچکها انجام می‌دهد.

چقدر هم کوچك باشد، دیگر نمی‌توانیم مدعی به‌دست آوردن سرعت دقیق باشیم، و فقط یك مقدار تقریبی به‌دست می‌آوریم.

نیوتن، خلاف لایب‌نیتس، در نوشته‌های بعدی خود سعی کرد با استفاده از زمان شهودی فیزیکی خللهای نظریهٔ بینهایت‌کوچکها را برسازد. "مقصود از سرعت نهایی، آن سرعتی است که جسم دقیقاً در همان لحظه‌ای که [به‌مکان آخرخود] می‌رسد، با آن سرعت حرکت می‌کند، نه قبل از رسیدن به آن مکان، که در آن حرکت متوقف می‌شود و نه بعد از آن ... و همین‌طور، مقصود از نسبت نهایی مقادیر صفرشونده، نسبت آن مقادیر، نه قبل از صفرشدن و نه بعد از آن، بلکه در همان وقت صفرشدن آنهاست." با این حال، وقتی او مشغول محاسبه شد، هنوز مجبور بود حذف قسمت "قابل‌اغماض" از جواب محاسبه شده‌اش را توجیه کند. روش نیوتن، همان‌طور که ما انجام دادیم، ابتدا یافتن $ds/dt=32+16dt$

وسپس مساوی صفر قراردادن نمو dt و به‌دست آوردن جواب دقیق ۳۲ بود.

اما برکلی نوشت: "باید توجه کرد که این استدلال واضح یا قانع کننده نیست." بالاخره، dt یا صفراست یا مخالف صفر. اگر dt صفرنیست، آنگاه $16dt+32$ مساوی ۳۲ نیست و اگر dt صفراست، آنگاه ds نمو فاصله، هم صفر است و کسر ds/dt، نه $16dt+32$، بلکه عبارت بی‌معنای ۰/۰ است. "زمانی که گفته می‌شود، فرض کنید نمو صفر باشد، یعنی فرض کنید نموهیچ باشد یا نموی درکار نباشد؛ فرض اولیه که نومقداری دارد یا نموی درکار است باطل می‌شود، با این‌حال یکی ازنتایج آن فرض، یعنی عبارتی که بنابرصدق فرض به‌دست‌آمده، ابقا می‌شود. واین شیوهٔ غلطی ازاستدلال است." برکلی بادلسوزی‌نهایتاً نتیجه‌گیری می‌کند: "این فلوکسیونها چیستند؟ سرعت نموهای صفرشونده. واین نموهای صفرشونده چیستند؟ آنها نه مقادیرمتناهی‌اند و نه مقادیر بینهایت‌کوچك ونه حتی هیچ. آیا نمی‌توان آنها را ارواح کمیتهای مرده نامید؟"

منطق برکلی قابل پاسخگویی نبود، با این حال، ریاضیدانان استفاده از بینهایت کوچکها را یك قرن دیگر با موفقیت بسیار ادامه دادند. در واقع فیزیکدانان و مهندسان هیچگاه ازآن دست برنداشتند. ازطرف دیگردر ریاضیات محض درقرن نوزدهم بازگشتی به‌سمت دقت اقلیدسی، انجام شد واین تمایل تحت رهبری وایرشتراس در ۱۸۷۲ به‌اوج خود رسید. جالب است توجه شودکه درقرن هیجدهم، دورهٔ بزرگ بینهایت‌کوچکها، هیچ مرزی مابین فیزیك و ریاضی دیده نمی‌شد. رهبران فیزیك و رهبران ریاضی اشخاص واحدی بودند. وقتی ریاضیات محض بـه صورت نظامی جداگانه دوباره به صحنه آمد، ریاضیدانان دوباره مطمئن شدند کـه اصول کار آنها حاوی هیچ تناقض آشکاری نیست. آنالیزدانهای جدید برای استحکام اصول آنالیز همان کاری را کردند که یونانیها کرده بودند: غیرقانونی ساختن بینهایت‌کوچکها.

مطابق روش وایرشتراس برای یافتن سرعت لحظه‌ای، ما هر تلاشی برای محاسبهٔ سرعت به عنوان یك نسبت را کنار می‌گذاریم. در عوض، سرعت را به صورت یك حد تعریف می‌کنیم که توسط نسبتهای نموهای متناهی تقریب می‌شود. فرض کنید Δt یك نمو متغیرمتناهی در زمان و Δs نومتغیرنظیرآن درمکان باشد. دراین صورت $\Delta s/\Delta t$ کمیت متغیر $16\Delta t+32$ است. باانتخاب Δtی به‌اندازهٔ کافی کوچك، می‌توانیم مقدار $\Delta s/\Delta t$ را به هرمیزان که مایلیم به ۳۲ نزدیك سازیم، به این ترتیب، مطابق تعریف، سرعت در $t=1$ دقیقاً ۳۲ است.

این شیوهٔ عمل ازلحاظ آنکه هیچ اشاره‌ای به‌اعدادی‌که متناهی نیستند نمی‌کند، با توفیق همراه است. وهمچنین دراین شیوه از هرکوششی برای اینکه Δt در $\Delta s/\Delta t$ مستقیماً مساوی صفرقرارداده شود، اجتناب می‌گردد. به‌این‌ترتیب ما از هردو دام منطقی‌که توسط اسقف برکلی گذاشته شده رهیده‌ایم. ولی، تاوانی نیز پرداخته‌ایم. کمیتی از نظرشهودی روشن و از نظر فیزیکی قابل اندازه‌گیری، مانند سرعت لحظه‌ای، وابسته به‌مفهوم دور از ذهن حد شده است. اگر به‌تفصیل این حرف را تشریح‌کنیم، عبارات مغلق زیررا خواهیم داشت:

"سرعت v است هرگاه، به‌ازای هر عدد مثبت ε قدرمطلق $v - \Delta s/\Delta t$، برای همهٔ مقادیر Δt کـه قدرمطلقشان از عدد مثبتی مانند δ (کـه به ε بستگی دارد) کمتر است، از ε کمتر باشد."

ما v را به وسیلهٔ رابطهٔ پیچیده‌ای بین دوکمیت جدید ε و δ، کـه به معنایی هیچ ربطی به‌خود v ندارند، تعریف‌کرده‌ایم. حداقل برای برنولی و اویلر بی‌توجهی به ε و δ هیچ مانعی در راه به‌دست آوردن سرعت نبود. حق این است‌که ما قبل از یادگیری ایـن تعریف واقعاً می‌دانستیم سرعت لحظه‌ای چیست؛ مـا این تعریف را که فهمیدنش بسیار مشکلتراز مفهومی است که تعریف می‌کند به خاطر سازگاری منطقی می‌پذیریم. البته برای یك ریاضیدان تعلیم یافته تعریف اپسیلون-دلتایی شهودی است و این نشان می‌دهد کـه با آموزش صحیح چه چیزهایی می‌توان به‌دست آورد.

بازسازی حساب دیفرانسیل و انتگرال برمبنای مفهوم حد و تعریف اپسیلون-دلتایی آن، همانا تحویل آن به‌حساب اعداد حقیقی بود. توانی‌که این پیشرفت روشنگر و اساسی فراهم آورد به‌طور طبیعی منجر به یك توجه ناگهانی به مبنای منطقی خود دستگاه اعداد حقیقی شد. این توجه، بازگشتی، پس از دوهزار و پانصد سال، به‌مسئلهٔ اعدادگنگ بودکه یونانیها پس از فیثاغورس آن را نومیدانه به‌کناری گذارده بودند. یکی از وسایلی‌که در این تلاشها به‌کار رفت، شاخهٔ جدیدگسترش یافتهٔ منطق ریاضی یا نمادی بود.

نماد	معنای موردنظر
$\sim$	چنین نیست‌که
$\&$	و
$\vee$	یا
$\rightarrow$	نتیجه می‌دهد
$\forall$	هرچه باشد
$\exists$	وجود دارد
x, y, z	متغیرهایی‌که روی اعداد حقیقی تغییرمی‌کنند
f, g, h	متغیرهایی‌که روی دیگراشیاء تغییرمی‌کنند
$+, \cdot, <$	جمع، ضرب، کوچکتراست از
$( )$ $[ ]$	پرانتزها
0 1 2	نمادهایی برای اعداد مشخص

نمادهای به‌کار رفته در زبان صوری L، که درآن حساب دیفرانسیل وانتگرال قابل‌بیان است. دراین فرهنگ لغات‌کوچك به‌زبان فارسی ترجمه شده‌است. آن زبان صوری‌که نمادهایی بسیار بیشترازاین را به‌کار می‌گیرد، ما بین جهان استاندارد و جهان بزرگتر نااستاندارد، که مفهوم مرکزی آنالیز نااستاندارد است، ارتباط برقرار می‌کند.

در دوره‌های متأخرتر، دریافته‌اند که منطق ریاضی پایه‌ای نظری برای نظریهٔ ماشینهای محاسبه و برنامه‌های کامپیوتری فراهم می‌آورد. بنابراین این نمونهٔ بارز تفکر محض در ریاضیات را اکنون باید متعلق به‌قسمت کاربردی ریاضیات درنظر گرفت.

پل ارتباطی مابین منطق ومحاسبه، تا حد زیادی مفهوم زبان صوری است، یعنی آن نوع زبانی‌که ماشین می‌فهمد. و همین زبان صوری است که به رابینسون امکان داد این مدعای لایب‌نیتس راکه "می‌توان بی هیچ اشتباهی استدلال کرد چنانکه گویی بینهایت کوچکها وجود دارند"، دقیق سازد.

لایب‌نیتس بینهایت‌کوچکها را به‌عنوان اعداد مثبت یا منفی بینهایت‌کوچکی درنظر می‌گرفت‌که "همان خواص" اعداد معمولی ریاضیات را دارند. این ایده ظاهراً تناقضی در خود دارد. اگر بینهایت کوچکها همان "خواص" اعداد معمولی را دارند، چگونه می‌توانند "خاصیت" مثبت بودن و با این حال کوچکتر از هرعدد مثبت معمولی بودن را، داشته باشند؟ با استفاده از یك زبان صوری بود که رابینسون توانست این پارادوکس را برطرف سازد. رابینسون نشان داد که چگونه می‌توان دستگاهی شامل بینهایت کوچکها ساخت‌که از لحاظ خواص قابل بیان در زبان صوری خاصی، بادستگاه اعداد"حقیقی" یکسان باشد. طبیعتاً "خاصیت" مثبت بودن واز هرعدد مثبت معمولی کوچکتر بودن، در این زبان قابل بیان نیست، به‌این ترتیب پارادوکس رفع می‌شود.

هرکسی‌که با ماشینهای محاسبه کارکرده باشد، با این وضعیت آشناست. کامپیوتر به عنوان ورودی فقط نمادهایی را می‌پذیرد‌که قبلاً درفهرست خاصی دراختیار استفاده‌کننده قرارگرفته است و این نمادها باید مطابق قواعد خاص معینی به‌کار برده شوند. زبان معمولی، آن‌گونه‌که درمحاورات بین‌انسانها به‌کار می‌رود، پیرو قواعدی است‌که زباندانها هنوز از فهم آن عاجزند. اگرمجبور شده باشید که با کامپیوترها کار کنید، دریافته‌اید که آنها "کودن"اند، واین دقیقاً به‌خاطر آن است‌که برعکس‌انسانها، آنها دریك زبان صوری با لغاتی معین و قواعدی مشخص کار می‌کنند. انسانها با یك زبان طبیعی با قواعدی که هیچگاه‌کاملاً تصریح نشده است کار می‌کنند.

ریاضیات، همانند فلسفه یا طراحی کامپیوترها، البته یك کنش انسانی است. همانند این کنشها، ریاضیات با استفادهٔ انسان از زبان طبیعی بنا می‌شود. ریاضیات دارای این ویژگی خاص است که می‌توان آن را به خوبی در یك زبان صوری، که به معنایی دقیقاً محتوای آن را منعکس می‌سازد، بیان‌کرد. می‌توان گفت ملاك اینکه آیا یك‌کشف ریاضی کاملاً فهمیده شده است یا خیر، امکان قراردادن آن در یك زبان صوری است.

درآنالیز نااستاندارد، اعداد حقیقی متناهی وبقیهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال را به همان صورتی‌که در ریاضیات استاندارد آنها را می‌شناسند، به عنوان نقطهٔ شروع در نظر می‌گیریم. این را "جهان استاندارد" می‌نامیم و با حرف M نمایش می‌دهیم. آن زبان صوری راکه درآن راجع‌به M صحبت می‌کنیم می‌توان با L نشان داد. هرجمله‌ای در L گزاره‌ای‌است دربارهٔ M، و البته باید یا صادق ویا کاذب باشد. یعنی هرجمله‌ای در L یا صادق‌است ویا نقیض‌آن صادق‌است. مجموعهٔ همهٔ جملات صادق‌را K می‌نامیم ومی‌گوییم

M یك "مدل" برای K است. منظور این است که M یك ساختمان ریاضی است به‌گونه‌ای که هرجمله‌ای در K، وقتی بـا ارجاع به M تعبیرشود، صادق خواهد بود. البته، K را با هیچ روش کارآمدی "نمی‌شناسیم"؛ اگر می‌شناختیم، جواب هر سؤال ممکنی درآنالیز را می‌دانستیم. معهذا، K را به‌عنوان یك شیٔ خوشتعریف می‌پذیریم که دربارهٔ آن می‌توانیم استدلال کنیم و نتایجی به‌دست آوریم.

حقیقت اساسی و نکتهٔ اصلی این است که علاوه بر M، جهان استاندارد، مدلهای نااستانداردی نیز برای K وجود دارد. یعنی ساختمانهای ریاضی M^*ای وجود دارندکه اساساً با M متفاوت‌اند (به‌معنایی‌که توضیح خواهیم داد)، وبا این وجود مدلی برای K به معنای طبیعی "مدل" هستند: اشیایی در M^* و روابطی مابین اشیاء M^* وجـود دارند به‌گونه‌ای که اگر نمادهای L از نو، با به‌کارگیری این شبه‌اشیاء و شبه‌روابط به شکل مناسب تعبیر شوند، آنگاه هـر جمله‌ای در K، اگر چه بـا معنایی متفاوت، صادق باقی خواهد ماند.

یك تشبیه نه چندان دقیق می‌تواند شهود را در این مورد تقویت کند. فرض کنید M مجموعهٔ دانش‌آموزان سال آخـر یك دبیرستان باشد. برای مناسب بودن شرایط بحث، فـرض کنید عکس همهٔ ایـن دانش‌آموزان در سالنامهٔ ایـن دبیرستان، کـه عکس همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان درقطع ۴ × ۳ درآن گذارده می‌شود، قرارداده شده‌باشد. بنابراین M^* می‌تواند مجموعهٔ همهٔ مستطیلهای ۴ × ۳ صفحات سالنامه باشد. روشن است‌که بایك تعبیرواضح، هرگزارهٔ صحیحی راجع به‌یك دانش‌آموز این دبیرستان متناظر با یك گزارهٔ صحیح راجع به یك مستطیل ۴ × ۳ خاصی در سالنامه است. بـا این وجود، مستطیلهای ۴ × ۳ بسیاری درسالنامه موجود است‌که متناظر با هیچ دانش‌آموزی نیست. M^* بسیار بزرگتراز M است و، علاوه‌براعضای نظیراعضای M، شامل اعضای بسیار دیگری است.

بنابراین‌گزارهٔ "هری‌اسمیت از جورج‌کلاین لاغرتراست" وقتی در M^* تعبیرشود، گزاره‌ای راجع به‌مستطیلهای ۴ × ۳ خاصی خواهد بود. تعبیررابطهٔ "لاغرتربودن" به‌همان صورت اصلی خود درست نخواهد بود. بنابراین "لاغرتر بودن" باید از نو، به‌عنوان یك شبه‌رابطه مابین شبه‌دانش‌آموزان (عکسهای دانش‌آموزان)[۱] تعبیر شود. می‌توانیم (در داخل گیومه) شبه‌رابطهٔ "لاغرتربودن" را این‌گونه تعریف‌کنیم‌که بگوییم مستطیل ۴ × ۳ با برچسب "هری اسمیت" از مستطیل با برچسب "جورج‌کلاین" لاغرتراست هرگاه هری اسمیت واقعـاً از جورج‌کلاین لاغرتر باشد. به این ترتیب، گزاره‌های صادق دربـارهٔ دانش‌آموزان از نو بـه صورت گزاره‌هـای صادق راجع بـه مستطیلهای ۴ × ۳ تعبیر می‌شوند.

البته، دراین مثال‌کل بحث‌کمی تصنعی است. ولی اگر M جهان استاندارد حساب دیفرانسیل وانتگرال باشد، آنگاه جهان نااستاندارد M^* دنیای فوق‌العاده جالبی است.

---

۱. برای تطبیق این تشبیه بـا واقعیت لازم است عبارت داخل پرانتز "مستطیلهای ۴ × ۳" باشد.ـم.

وجود مدلهای نااستاندارد جالب توجه را اولین‌بار منطقدان نروژی اسکولم کشف کرد که دریافت اصول شمارش ــ اصولی کــه "اعداد طبیعی" ۱، ۲، ۳، . . . را توصیف می‌کنند ــ مدلهای نااستانداردی دارد که شامل اشیای "عجیبی" است که حساب معمولی انتظار آنها را نداشته است. بینش عمیق رابینسون این بود کــه مشاهده کرد چگونه این زائدهٔ غریب منطق صوری جدید می‌تواند مبنای احیای روش بینهایت کوچکها در حساب دیفرانسیل وانتگرال قرار گیرد. در این بازسازی او به‌قضیه‌ای اتکا کرد که اولین‌بار توسط منطقدان روسی مالسو[1] ثابت شد وسپس توسط هنکین از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی تعمیم پیدا کرد. این قضیه عبارت است ازقضیهٔ "فشردگی" و درارتباط با قضیهٔ مشهور "تمامیت" گودل است کــه می‌گوید یك مجموعه از جملات منطقاً سازگارند (هیچ تناقضی از این جملات قابل استنتاج نیست) اگر وفقط اگــر "جهانی" وجود داشته باشد کــه تمامی آن جملات در آن صادق باشند.

قضیهٔ فشردگی می‌گوید: فرض کنید خانواده‌ای ازجملات زبان L را داشته باشیم. همچنین فرض کنید درجهان استاندارد[2] هرزیرمجموعهٔ متناهی از این خانواده صادق باشد. دراین صورت جهان نااستانداردی وجود دارد که کل خانواده با هم در آن صادق است.

قضیهٔ فشردگی به سادگی ازقضیهٔ تمامیت نتیجه می‌شود: اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی ازیك خانواده ازجملات L درجهان استاندارد صادق باشد، آنگاه هرزیرمجموعهٔ متناهی آن خانواده سازگاراست. بنابراین کل آن خانواده منطقاً سازگاراست (زیرا درهراستنتاج فقط ازتعدادی متناهی فرض می‌توان استفاده کرد). بنابه قضیهٔ تمامیت، جهانی نااستاندارد وجود دارد که کل خانواده در آن صادق است.

جملهٔ صوری در L	تعبیر در جهان استاندارد	تعبیردرجهان نااستاندارد
$(\forall x)(\exists y)[x=0 \vee xy=1]$ به‌طور لفظی، برای هر x، yای هست که یا $x=0$ و یا $xy=1$.	هرعدد حقیقی ناصفر وارون‌پذیر است.	هرعدد حقیقی نااستاندارد غیرصفر یك وارون نااستاندارد دارد؛ به ویژه بینهایت کوچکهای مثبت وارونهایی دارند کــه از هر عدد حقیقی استانداردی بزرگتراست‌یعنی بینهایت بزرگ هستند.

جملهٔ صوری در زبان L بیان می‌شود. ستون وسط تعبیر یا معنای آن را درجهان استاندارد و ستون سمت چپ تعبیر یا معنای آن را درجهان نااستاندارد به‌دست می‌دهد.

---

1. Anatoli Malcev

۲. البته در قضایای فشردگی و تمامیت مفاهیم "استاندارد" و "نااستاندارد" وجود ندارند، و "استاندارد" بودن یا نبودن مفهومی خارج ازخود مدل است.ـم.

یك نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ فشردگی "وجود" بینهایت کوچکهاست. برای دیـدن اینکه چگونه این‌نتیجهٔ شگفت‌آور ازقضیهٔ فشردگی نتیجه می‌شود این‌جملات را درنظر بگیرید:

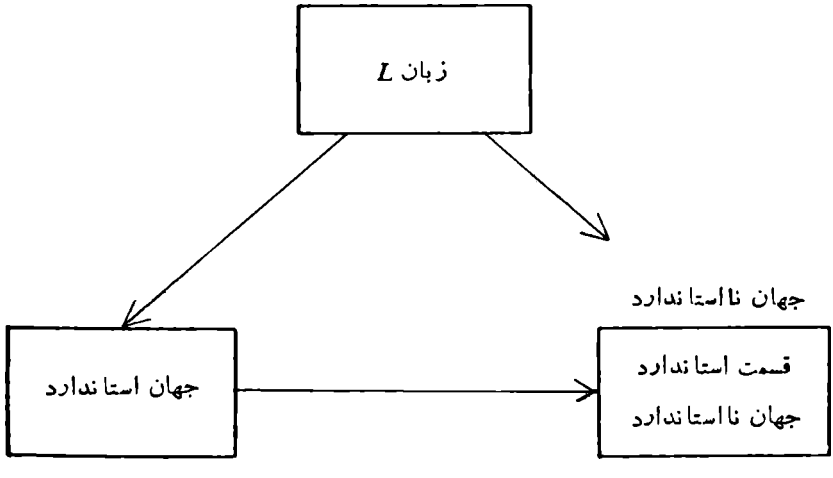
"c عددی بزرگتراز صفروکوچکتراز ۱/۲ است."

"c عددی بزرگتراز صفروکوچکتراز ۱/۳ است."

"c عددی بزرگتراز صفروکوچکتراز ۱/۴ است." و به‌همین ترتیب.

این خانواده‌ای نامتناهی از جملات است‌که هرکدام از آنها را می‌توان در زبان صوری L نوشت. با مراجعه به‌جهان استاندارد اعداد حقیقی R، هرزیرمجموعهٔ متناهی از آن صادق است، زیرا اگر شما تعدادی‌متناهی‌از جملات به‌شکل "c عددی‌بزرگتر از صفر وکوچکتراز $1/n$ است." داشته باشید،آنگاه یکی از جملات شامل‌کوچکترین‌کسر $1/n$ خواهدبود و $1/(2n)$ به‌واقع بزرگترازصفروکوچکترازهمهٔ‌کسرهای موجود در آن فهرست متناهی ازجملات خواهد بود. با این‌حال اگرشما کل مجموعهٔ نامتناهی این جملات رادر نظر بگیرید، با مراجعه به اعداد حقیقی استاندارد کاذب خواهد بود، زیرا اهمیتی ندارد کـه c را چقدر کوچك انتخاب می‌کنید، $1/n$ برای nای به اندازهٔ کافی بزرگ، از c کوچکترخواهد بود.

قضیهٔ فشردگی مالسو و هنکین می‌گوید جهـان نااستانداردی مشتمل بر اعداد شبه‌حقیقی R^* وجود دارد که یك عدد شبه‌حقیقی مثبت c کوچکتر از هر عدد به شکل $1/n$



نقش زبان صوری در واسطه‌گری بین جهان استاندارد وجهان نااستاندارد دراینجا نشان داده شده است. زبان صوری L، جهان استاندارد راکه شامل اعداد حقیقی و ریاضیات کلاسیك است توصیف می‌کند. جملاتی از L که درجهان استاندارد صادق‌اند، درجهان نااستاندارد نیز، که شامل اشیای ریاضی اضافی‌مانند بینهایت کوچکهاست، صادق‌اند. درنتیجه آنالیز نااستاندارد روش بینهایت‌کوچکها را برای اولین‌بار دقیق می‌سازد.

را دربردارد. یعنی، c بینهایت کوچك است. علاوه براین، c همهٔ خواص اعـداد حقیقی استاندارد رابه‌معنایی کاملاً دقیق داراست: هرگزارهٔ صادقی دربارهٔ اعدادحقیقی استاندارد که بتوانید در زبان صوری L بیان کنید با تعبیری مناسب دربارهٔ اعداد حقیقی نااستاندارد، از جمله بینهایت کوچك c، نیز صادق است. (مستطیل ۴ × ۳ با برچسب "هری اسمیت" واقعاً از مستطیل ۴ × ۳ برچسب "جورج کلاین" لاغرتر نیست، اما جملهٔ "هری اسمیت از جورج کلاین لاغرتراست." تحت تعبیرنااستاندارد ما از "لاغرتر بودن"، صادق است.) از طرف دیگر، خواصی که همهٔ اعداد حقیقی استاندارد در آن سهیم‌اند، اگر قابل بیان در زبان صوری L نباشند، ممکن است در مورد شبه‌اعداد نااستاندارد مصداق نداشته باشند.

خاصیت ارشمیدسی (عدم وجود بینهایت‌کوچکها) R را می‌توان با استفاده از یك مجموعهٔ نامتناهی‌از جملات L به‌شکل زیر بیان‌کرد (از نماد "$>$" به‌طور معمول به‌معنای "بزرگتراست از" استفاده می‌کنیم). برای هرعضو مثبت c از R تمامی این جملات مگر تعدادی متناهی از آنها صحیح هستند:

$$c > ۱$$

$$c+c > ۱$$

$$c+c+c > ۱، \text{ و به‌همین ترتیب.}$$

امـا ایـن مطلب برای اعـداد شبه‌حقیقی R^* درست نیست: اگـر c بینهایت کـوچك (بنابراین عدد شبه‌حقیقی) باشد، تمامی این جملات کاذب خواهند بود. به عبارت دیگر، مجموع هیچ تعداد متناهی از c، نمی‌تواند از ۱ بزرگترشود. همین موضوع که خاصیت ارشمیدسی در جهان استاندارد صادق ولی در جهان نااستاندارد کاذب است ثابت می‌کند که این خاصیت به‌وسیلهٔ جمله‌ای در L قابل بیان نیست؛ عبارتی که ما به‌کار بردیم شامل تعدادی نامتناهی از جملات بود. این دقیقاً همان تفاوتی است‌که شبه‌اشیا رامفید می‌سازد. آنها به‌طو 'صوری" شبیه اشیای استاندارد رفتار می‌کنند و با این حال از لحاظ خواص مهمی‌که قابل فرمولبندی در L نیستند، با اشیای استاندارد فرق می‌کنند.

اگرچه جهان نااستاندارد ازلحاظ مفهومی جدای ازجهان استاندارد است، بهتر آن است‌که آن را به‌عنوان توسیعی از جهان استاندارد درنظر بگیریم. ازآنجا که R^* مدلی برای K است، هر جملهٔ صادقی دربارهٔ R تعبیرصادقی در R^* دارد. به‌ویژه اسامی اعداد R تعبیری به‌عنوان اسامی اعضایی از R^* دارند. می‌توانیم به‌سادگی آن عضو R^* را که "۲" نامیده می‌شود با عدد آشنای ۲ در R یکی بگیریم. درنتیجه R^* علاوه‌برمجموعهٔ وسیعی از بینهایت‌کوچکها و بینهایت بزرگها شامل اعداد حقیقی استاندارد R نیز هست و R ر داخل R^* قرار می‌گیرد.

یك عضو R^* (یك عدد شبه‌حقیقی) نامتناهی نامیده می‌شود هرگاه [قدرمطلق آن] از هرعدد حقیقی استانداردی شبه‌بزرگتر باشد، درغیراین‌صورت متناهی نامیده می‌شود. یك عـدد شبه‌حقیقی مثبت، بینهایت کوچك نـامیده می‌شود هرگاه از هـر عدد حقیقی مثبت

استانداردی شبه‌ـکوچکتر باشد.[۱] هرگاه شبه‌ـتفاضل دوعدد شبه‌ـحقیقی متناهی باشد، می‌گوییم آنها به یك "کهکشان" تعلق دارند. محور شبه‌ـحقیقی شامل تعداد شمارش‌ناپذیری کهکشان است. هرگاه شبه‌ـتفاضل دو عدد شبه‌ـحقیقی بینهایت کوچك باشد، می‌گوییم آنها به یك "موناد" (اصطلاحی کـه رابینسون از نوشته‌های فلسفی لایب‌نیتس وام گرفته است) تعلق دارند. هرگاه یك عدد شبه‌ـحقیقی r^* به‌یك عددحقیقی استاندارد r بینهایت نزدیك باشد[۲]، r را قسمت استاندارد r^* می‌نامیم. همهٔ اعـداد حقیقی استاندارد در یك کهکشان جـای می‌گیرند، که کهکشان اصلی نامیده می‌شود. در کهکشان اصلی هر مونادی یك و فقط یك عـدد حقیقی استاندارد را در بر دارد. این موناد "همسایگی بینهایت کوچك" r است: مجموعهٔ همهٔ اعداد نااستاندارد بینهایت نزدیك بـه r. معلوم شده است کـه مفهوم موناد نه‌تنها برای اعداد حقیقی بلکه برای فضاهای کلی متریك و توپولوژیك نیز قابل به‌کاربردن است. بنابراین آنالیز نااستاندارد فقط بـه حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مربوط نیست، بلکه به‌کل حوزهٔ آنالیز مجرد جدید مربوط است.

وقتی می‌گوییم بینهایت کوچکها یا مونادها وجود دارند، روشن است که حرف ما به هیچ وجه به‌آن معنایی نیست که اقلیدس یا برکلی درنظر داشتند. تا صد سال پیش همهٔ فیلسوفان و ریاضیدانان به‌طور ضمنی فرض می‌کردندکه موضوع ریاضیات واقعیت عینی دارد، تقریباً به‌همان معنایی که موضوع علم فیزیك واقعیت دارد، اینکه بینهایت کوچکها وجود دارند یانه، سؤالی بود دربارهٔ واقعیت، مشابه ایز سؤال‌که‌آیا اتمهای مادی وجود دارند یا نه. امروزه بسیاری از، و شاید اکثر، ریاضیدانها چنین اعتقادی راجع به وجود عینی اشیایی‌که بررسی می‌کنند، ندارند. نظریهٔ مدلها متضمن هیچ تعهدی درمورد این‌گونه مسائل هستی‌شناختی نیست. آنچه که ریاضیدانان از بینهایت کوچکها انتظار دارند وجود مادی آنها نیست، بلکه حق استفاده از آنها دراثباتهاست. به‌همین دلیل همهٔ آنچه‌که مورد نیاز است، اطمینان از این موضوع است‌که اثبات متکی بر بینهایت کوچکها غیرمنطقی‌تر از اثبات مستقل از بینهایت‌کوچکها نیست.

به‌کارگیری آنالیز نااستاندارد در تحقیقات چیزی شبیه این است که: می‌خواهیم قضیه‌ای را که فقط اشیای‌استاندارد را در بردارد ثابت کنیم. اگراشیای‌استاندارد را در یك توسیع نااستاندارد قرار دهیم، ممکن است بتوانیم با استفاده از اشیای نااستاندارد اثباتی‌کوتاهتر و "روشنگرانه"تر به‌دست آوریم. به‌این ترتیب، آن قضیه در واقع بانظر به تعبیر نااستاندارد کلمات و حروفش ثابت شده است. آن اشیای نااستانداردی‌که متناظر با اشیای‌استاندارد هستند دارای این‌خاصیت‌اند‌که جملات راجع به‌آنها(درتعبیرنااستاندارد) صادق‌اند [اگر و] فقط اگرجمله مشابه با نظر به‌اشیای‌استاندارد (درتعبیراستاندارد) صادق باشند. به‌این‌ترتیب با استدلال دربارهٔ اشیای‌نااستاندارد، قضایایی دربارهٔ اشیای‌استاندارد ثابت می‌کنیم.

---

۱. درست‌تر آن است که یك عدد شبه‌ـحقیقی که از حیث قدرمطلق دارای خاصیت مذکور در بالاست، یك بینهایت‌کوچك نامیده شود.ـم.

۲. یعنی، $r-r^*$ یك بینهایت‌کوچك باشد.ـم.

به‌عنوان مثال، "اثبات" نیکولاس کوسایی را مبنی براینکه مساحت دایره‌ای به‌شعاع واحد، نصف محیط آن است، دوباره درنظر بگیرید. ببینیم که درنظریهٔ رابینسون استدلال نیکولاس به‌چه معنایی درست است. همین‌که اعداد بینهایت‌کوچك و بینهایت بزرگ (در جهان نااستاندارد) در دسترس قرار گرفتند، می‌توان ثابت کرد که مساحت دایره، قسمت استاندارد مجموع تعدادی نامتناهی از بینهایت‌کوچکها (درجهان نااستاندارد) است.

حال وقت آن است که به‌مسئلهٔ سنگ در حال سقوط از دیدگاه رابینسون نظر کنیم. ما سرعت لحظه‌ای را نه مانند هوپیتال به صورت نسبت نموهای بینهایت کوچك، بلکه به عنوان قسمت استاندارد آن نسبت، تعریف می‌کنیم؛ بنابراین ds، dt ونسبت آنها ds/dt اعداد حقیقی نااستاندارد هستند. همانند قبل داریم $ds/dt = ۳۲ + ۱۶dt$، اما اکنون بلافاصله بی‌هیچ خلل و اشکالی دراستدلال، نتیجه می‌گیریم v، قسمت استاندارد ds/dt، مساوی ۳۲ است. یك اصلاح جزئی در روش بینهایت کوچکهای لایب‌نیتس یعنی تمایز دقیق قائل شدن بین عدد غیراستاندارد ds/dt و قسمت استاندارد آن v تناقض را، که هوپیتال به‌سادگی از آن چشم می‌پوشید برطرف می‌سازد.

البته لازم است ثابت شود که به طور کلی تعریف رابینسون و تعریف وایرشتراس جوابهای یکسانی به‌دست می‌دهند. اثبات این موضوع مشکل نیست ولی ما دراینجا به‌آن نمی‌پردازیم.

پس به‌این نتیجه رسیده‌ایم که برای اولین‌بار روش بینهایت‌کوچکها دقیق شده‌است. درگذشته ریاضیدانان مجبور بودند انتخاب کنند. اگر آنها از بینهایت کوچکها استفاده می‌کردند، برای استدلال درست مجبور بودند بر تجربه و شهود خـود متکی باشند. گفته می‌شود دالامبر برای مطمئن ساختن یك رفیق ریاضیدان مردد گفته است: "فقط ادامه بده، باور بزودی حاصل خواهد شد." ریاضیدانان برای کسب اطمینان کامل مجبور بودند به روش پر زحمت افنای ارشمیدس یـا شکل جدید آن، روش اپسیلون-دلتای وایرشتراس، متوسل شوند. امروزه روش بینهایت کوچکها، یا به‌طورکلیتر روش مونادها، ازسطح خام شهودی به‌سطحی دقیق و مستحکم ترفیع یافته است. منطق صوری با شیوهٔ عمل خود موفق شده است که کاملاً از زیربار سؤال "آیا کمیتهای بینهایت کوچك به مفهوم عینی وجود دارند یا نه؟" که ذهن برکلی و دیگـر منتقدین زمانهای گذشته را آشفته می‌ساخت، شانه خالی کند.

ازنظرگاه یك ریاضیدان عملگرا نکتهٔ مهم‌این است که او روشهای خاصی ازاثبات، شیوه‌های خاصی از استدلال، را که از قبل از ارشمیدس پرثمر بوده‌اند، دوباره به دست آورده است. مفهوم همسایگی بینهایت کوچك دیگـر یك عبارت تناقض‌آمیز نیست بلکه مفهوم‌دقیقاً تعریف شده‌ای‌است که همان‌قدرمجاز ومنطقی است که هرمفهوم‌دیگری درآنالیز.

کاربردهایی که مورد بحث قرار دادیم، مقدماتی و در واقع بدیهی بودند. [ولی] کاربردهای غیربدیهی نیز پیدا شده و می‌شوند. کارهایی در دینامیك نااستاندارد واحتمال نااستاندارد انجام شده است. رابینسون و شاگردش آلن برنشتاین، آنالیز نااستاندارد را برای حل مسئله‌ای در زمینهٔ عملگرهای خطی فشرده که قبلاً حل نشده بود، به‌کار گرفتند.

با این همه، باید گفت که بسیاری از آنالیزدانها نسبت به اهمیت نهایی روش رابینسون تردید دارند. این کاملاً درست است که هرآنچه‌که با بینهایت کوچك بتوان انجام داد، علی‌الاصول بدون آنها نیز می‌توان انجام داد. شاید، همانند دیگر نوآوریهای اساسی، به‌کارگیری تام و تمام این ایده‌های جدید توسط نسل جدیدی از ریاضیدانان که به‌طور عمیق در روشهای استاندارد غرق نشده‌اند صورت پذیرد و آنها [این امکان را بیابندکه] از آزادی و قدرت آنالیز نااستاندارد لذت ببرند.

ریچارد کورانت

آزمایشهای لایهٔ صابون برای نمایش رویه‌های مینیمال•

ترجمهٔ علی پارسیان دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی، دانشگاه تهران

درسیر پیشرفت ریاضیات، نمونه‌های متعددی از کمکهای ارزشمندی که آزمایشهای فیزیکی به نظریات ریاضی کرده‌اند، دیده می‌شود. مثلاً آزمایشهای فیزیکی فرضی با جریانهای دو بعدی الکتریسیته، در نظریهٔ هندسی توابع، بسیار روشنگر بوده‌اند وجواب مسائل مقادیر مرزی برای معادلهٔ لاپلاس و دیگر معادلات بـا مشتقات جزئی را می‌توان بـا ابزارها و روشهای الکتریکی و آماری، تجسم‌عینی بخشید. اما، شاید برجسته‌ترین نمونه از آزمایشهای سادهٔ فیزیکی که از لحاظ نظریهٔ ریاضی ارزش داشته‌اند، نمایش رویه‌های مینیمال به‌وسیلهٔ آزمایشهای لایهٔ صابون باشد که به تفصیل توسط پلاتو [۱] فیزیکدان بلژیکی تشریح شد وهمچنین به‌وسیلهٔ ریاضیدانان، به‌خصوص شوارتز [۲]، مورد استفاده قرار گرفت.

مسئلهٔ یافتن کوچکترین رویهٔ محصور به‌یك مرز بسته، در اوایل قرن هجدهم توسط اویلرمطرح شد. این مسئله به سادگی به مسئلهٔ حل یك دستگاه از معادلات با مشتقات جزئی از نوع غیرخطی با مقادیر مرزی منجر می‌شود. هرچند در قرن نوزدهم ریمان، شوارتز، وایرشتراس،و دیگران جوابهای این مسئله را برای انواع خاصی از مرزها به‌دست دادند، اما برهانهای کلی وجودی اخیراً به‌وسیلهٔ رادو، داگلاس،مك‌شان، گارنایر،وکورانت ارائه شده‌اند.

با این حال، آزمایشهای پلاتو بلافاصله جوابهایی برای مرزهای بسیار کلی به‌دست می‌دهند. اگر سیمی را که به‌شکل مرز بستهٔ دلخواهی درآمده درمایع چسبناکی فروبرده و بیرون آوریم لایهٔ آویزانی روی سیم تشکیل می‌شود. ایـن لایه، شکل یك رویهٔ مینیمال باکمترین مساحت راکه برمرز بستهٔ مفروض گسترده شده، به‌خود خواهد گرفت. ازاین‌رو، فرض می‌کنیم تأثیر جاذبه و عوامل دیگر که مانع از گرایش لایه به کسب کمترین سطح ممکن و در نتیجه کمترین مقدار ممکن انرژی پتانسیل مربوط به کشش سطحی می‌شوند،

• Courant R., "Soap film experiments with minimal surfaces," *Amer. Math. Monthly*, 47(1940)167-174.

قابل اغماض باشند. یك دستورالعمل خوب برای تهیهٔ آسان چنین مایع چسبنده‌ای از این قرار است:

۱۰ گرم سدیم اولئات خشك خالص را در ۵۰۰ گرم آب مقطر حل کنید و سپس ۱۵ واحد محلول را با ۱۱ واحد گلیسیرین مخلوط کنید.

لایه‌هایی که از این محلول با قابهایی از سیمهای برنجی نیم‌سخت به‌دست می‌آیند نسبتاً پایدارند و برای نمایش آزمایش به‌اندازهٔ کافی دوام دارند. ولی، قطرچنین قابهایی نباید از ۵یا۶اینچ تجاوزکند، والبته درقابهای کوچکتر پایداری لایه‌ها بسیار بیشتراست.

با استفاده از محلول لاك الکل، می‌توان به نمونه‌های جامد و تـا اندازه‌ای دائمی دست یافت زیرا لاك الکل پس از شکل‌گیری لایه، خشك و محکم می‌شود.

با این روش، می‌توان مسئله را به‌آسانی با شکل دادن قاب سیمی به صورت مورد نظر "حل" کرد. مدلهای زیبایی بـا قابهای سیمی چندضلعی که توسط تعدادی از یالهای یك چندوجهی منتظم شکل می‌گیرند، به‌دست می‌آیند. به‌ویژه، جالب است‌که کل قاب یك مکعب را در چنین محلولی فروبریم. نتیجهٔ حـاصل در ابتدا سیستمی از رویه‌های مختلف است‌که یکدیگررا درامتداد خطوط تقاطع، قطع می‌کنند. (اگرمکعب با دقت زیاد خارج شود نتیجه، سیستم متقارنی از صفحات خواهد بود.) برای آنکه فقط یك رویه محدود به یك چندضلعی بسته باقی بماند، مجبوریم تعدادی کافی از این رویه‌های مختلف را سوراخ و تخریب کنیم و این کار می‌تواند به روشهای مختلفی انجام شود و با هرکدام از روشها رویهٔ خاصی به‌دست می‌آید.

امـا دامنه و ارزش اطلاعاتی آزمایشهای لایهٔ صابون درمـورد رویه‌های مینیمال، گسترده‌ترازاین نمایشهای اولیهٔ پلاتو است. در سالهای اخیرمسئلهٔ رویه‌های‌مینیمال، نه‌تنها برای حالت یك مرز، بلکه برای هرتعداد ازمرزها مطالعه شده است، به‌علاوه گاهی، مثلاً وقتی‌که رویه یکطرفه یا از گونهٔ غیرصفر باشد، ممکن‌است ساختمان توپولوژیکی رویه‌ها پیچیده‌تر بـاشد. همچنین مسئله برای مرزهای آزاد هـم مورد بررسی قرارگـرفته است یعنی درحالتی‌که مرزها یاقسمتهایی ازآنها خمهای ثابتی نیستند و روی رویه‌های مفروض آزادگـذارده شده‌اند. حتی این مسائل‌کلیتر کـه پدیده‌های هندسی گوناگون و جالبی را ایجاد می‌کنند، با آزمایشهای لایهٔ صابون قابل توضیح‌اند. دراین ارتباط، بسیارمفید است که اصلاحاتی دراین آزمایشهای ساده به‌عمل‌آوریم وبا ساختن دستگاهی ازقابهای سیمی یا رویه‌های مرزی ازقبل معین شده، نه به‌شکل ثابت بلکه به‌شکل قابل انعطاف، به مطالعهٔ تأثیر تغییر شکلهای آن مرزهای تعیین شده روی جواب بپردازیم. چنین تغییرشکلهایی را می‌توان به آسانی با وصل کردن دستگیره‌هایی بـه قابهای سیمی یا دیگر تمهیدات سادهٔ مکانیکی ایجادکرد.

اساساً سه سؤال کلی وجـود دارد که باید در ارتباط بـا این مسئله مورد مطالعه قرارگیرند:

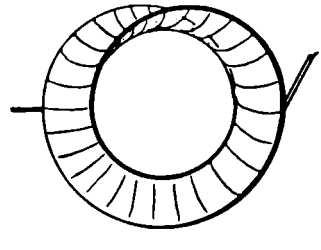
۱. وجود جوابی از یك نوع معین.

۲. یکتایی جواب.
۳. وابستگی جواب به داده‌های از قبل تعیین شده، به‌خصوص اینکه آیا تغییرات جواب برحسب تغییرات مرزهای داده شده پیوسته است یا نه.

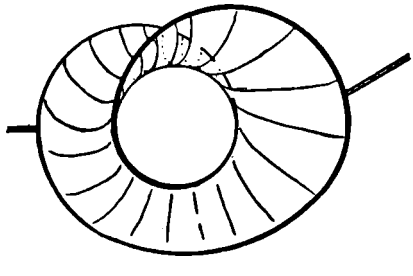
ازاین سؤالات تاکنون فقط به‌اولین سؤال به‌طور نظری جواب داده شده است، در حالی‌که در مورد دو سؤال دیگرکارهای زیادی باید انجام شود. با این حال، آزمایشهای فیزیکی پرتوی بر هر سه سؤال می‌افکنند و علاوه بر این پرسشهای ریاضی دیگری را هم پیش می‌کشند وحتی پاسخ آنها را نیزنشان می‌دهند. این نکته را می‌توان با ذکرچند مثال نوعی روشن کرد.

۱. اگرمرز، یك‌دایره باشد، به‌طورطبیعی یك قرص مستدیرمسطح به‌دست می‌آوریم. اگردایرهٔ مرزی رابه‌طور پیوسته تغییرشکل دهیم، احتمالاً انتظار داریم رویه‌های مینیمال مشخصهٔ توپولوژیکی یك‌قرص را همواره حفظ کنند. اما چنین نیست. اگر مرز به‌گونه‌ای که درشکل۱ نشان داده شده تغییرشکل دهدآزمایش فیزیکی، رویهٔمینمالی پدیدمی‌آورد که دیگر همبند ساده[1] نیست، بلکه یك نوار موبیوس یکطرفه (جهت‌ناپذیر) است. حال می‌توانیم کار را با این قاب و با یك لایهٔ صابونی به شکل یك نوار موبیوس شروع کنیم. با برهم زدن شکل قاب سیمی وکشیدن دستگیره‌هایی که به‌طور مناسب به‌آن لحیم شده‌اند (شکل۲) به‌لحظهٔ خاصی می‌رسیم که به‌طورناگهانی مشخصهٔ توپولوژیکی لایه تغییرمی‌کند و مجدداً رویه به صورت یك قرص همبند ساده درمی‌آید (شکل۳). با معکوس کردن این فرایند تغییرشکل، دوباره یك نوارموبیوس به‌دست می‌آید.

به‌هرحال، چیزی که دراین فرایندهای متناوب تغییرشکل دیده می‌شود، این است که درفرایند معکوس، دگرگونی از رویهٔ همبند ساده به‌نوار موبیوس دیرترصورت می‌پذیرد. این‌نشان می‌دهدکه باید دامنه‌ای ازتغییرشکل‌مرزها موجود باشدکه درآن هم‌نوارموبیوس وهم رویهٔ همبند سادهٔ دوطرفه پایدار بمانند (همان‌طورکه در شکلهای ۲و۳ نشان داده شده است). البته یکی ازآنها فقط نمایانگر یك مینیموم نسبی است. درحقیقت،همیشه یك رویهٔ

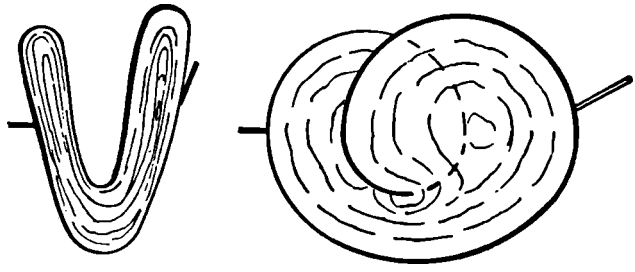


شکل ۱



شکل ۲

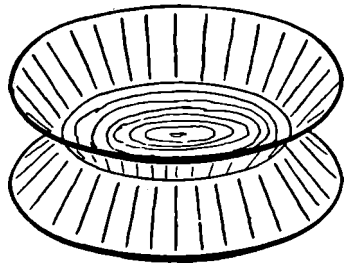
۱. هرفضای همبندی که هرخم بسته درآن بتواند به‌طور پیوسته و بدون پاره شدن به‌یك نقطه تغییرشکل دهد، همبند ساده نامیده می‌شود.ـم.



شکل ۳

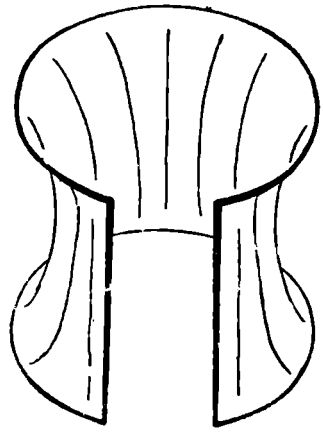
همبند ساده دوطرفه که یك مینیموم نسبی باشد موجود است. اما وقتی نوارموبیوس مساحتی بسیار کمتر از رویهٔ دوطرفه دارد، حالت اخیر بسیار ناپایدارتر از آن است که واقعاً رخ دهد.

۲. رویهٔ مینیمال دوار که بین دو دایره گسترده می‌شود، به‌آسانی تشکیل می‌شود. در آزمایش عملی، پس از خروج قابهای سیمی یك رویهٔ ساده نخواهیم یافت، بلکه ساختمانی ازسه رویه خواهیم داشت که یکی از آنها یك قرص مستدیر سادهٔ موازی با دوایر مرزی است (شکل ۴). در این حالت فقط بـا از بین بردن این رویهٔ میانی است که زنجیروار کلاسیك به‌وجود می‌آید. با دورکردن دوایرمرزی ازیکدیگر به‌سادگی می‌توان نشان داد که لحظه‌ای وجود دارد کـه رویهٔ مینیمال همبند دوگانه ناپایدار می‌شود. در این لحظه، زنجیروار به طور ناپیوسته به دو دایرهٔ مرزی مجزا پرش‌می‌کند، که "جواب گلداشمیت" است. البته این فرایند معکوس‌پذیر نیست.

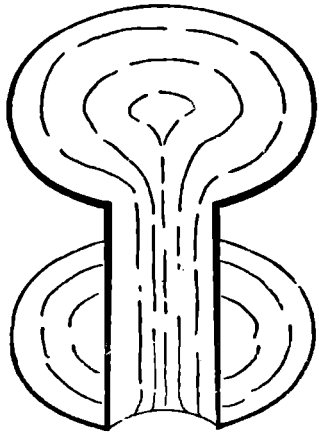


شکل ۴

۳. یك نمونهٔ بسیارآموزنده در شکلهای ۵ و ۶ نشان داده شده است. این نمونه از دو دایرهٔ موازی، به‌همان شکل که یك زنجیروار را به‌وجود می‌آورند، با بریدن دوقطعهٔ موازی و وصل کردن آنها با خطوط مستقیم به یکدیگر، به دست می‌آید. درنتیجه، ما یك مرز بستهٔ ساده داریم. نکتهٔ جالب این است کـه این قاب اصولاً دو رویهٔ مینیمال همبند سادهٔ مختلف به‌وجود می‌آورد. یکی ازآنها بایك تغییرشکل کوچك بارویه‌ای مرتبط است که متشکل از دوقرص مستدیرحاصل از دوایرمرزی، و نوارکوچك بین دوقطعه خط مستقیم



شکل ۵

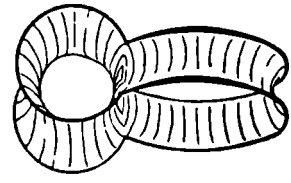


شکل ۶

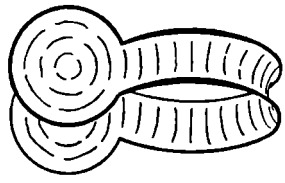
ارتباطی است. دیگری رویه‌ای است که با تغییرشکل استوانهٔ بین دو دایرهٔ مرزی پس از حذف نوار بین دو خط مستقیم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر، اولی متناظر با جواب گلداشمیت به‌اضافهٔ نوار ارتباطی است، و دومی متناظر با زنجیروار منهای نوار ارتباطی. ابعاد این قاب را می‌توان چنان انتخاب کرد که این دو رویهٔ مینیمال تقریباً هم‌مساحت شوند، ولی حتی اگر قاب، اندکی با چنین شکلی تفاوت داشته باشد، هر دو جواب در موقعیتهای تعادلی نسبتاً پایداری قرار می‌گیرند. بنابراین ما در اینجا با حالتی روبروییم که مسئله دوجواب متمایز همبند ساده دارد.

اگر قاب را مثلاً با دور کردن خطوط واصل یا نزدیک کردن قسمتهای مستدیر به یکدیگر، تغییرشکل دهیم، می‌توانیم یکی ازجوابها را بسیار ناپایدارتر از دیگری سازیم به‌طوری که درلحظهٔ خاصی از تغییرشکل، آن جواب، ناپایدارشده و به‌جواب دیگرجهش کند. با وارون کردن تغییر شکل قاب، انتقال از یك جواب به جواب دیگر نیز معکوس می‌شود. می‌توان این فرایند متناوب را بدون از بین‌رفتن لایه، به‌دفعات بسیار زیاد تکرار کرد. این یك مثال آموزنده از مسئله‌ای است که جواب آن به طور یکتا معین نمی‌شود و همچنین، جواب به‌طور پیوسته به‌داده‌های مسئله یعنی قاب بستگی ندارد.

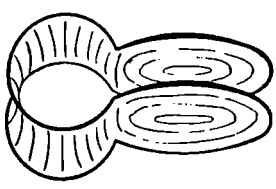
۴. یك مثال مهمتر، به‌وسیلهٔ قابهای شکلهای ۷، ۸، و ۹ فراهم می‌آید. این قاب نیز نمایشگر یك خم ساده است. همان طور که در این شکلها نشان داده شده است این قاب پذیرای سه رویهٔ مینیمال مختلف است. همهٔ آنها محدود به‌خم پیوستهٔ یکسانی هستند، یکی از آنها (شکل ۹) دارای گونهٔ ۱ است، در حالی که دوتای دیگر همبند ساده و به‌شکلی قرینهٔ یکدیگرند. اگر مرز کاملاً متقارن باشد، دو رویهٔ اخیر دارای مساحتهای مساوی‌اند ولی لزوماً چنین حالتی برقرار نیست وتنها یکی از آنها مقدار مینیموم مطلق مساحت را به‌دست می‌دهد و دیگری مینیموم نسبی را به‌دست خواهد داد به‌شرط آنکه مینیموم درمیان سطوح همبند ساده جستجو شود. امکان وجود جوابی با گونهٔ ۱ به این واقعیت بستگی داردکه با



شکل ۷



شکل ۸



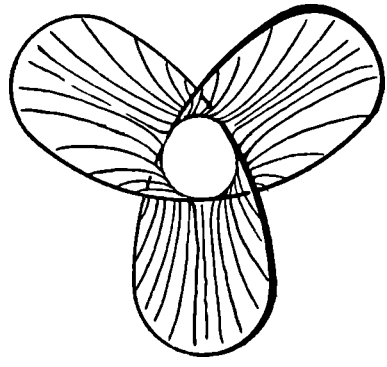
شکل ۹

قبول رویه‌های با گونهٔ ۱ ممکن است بتوانیم مینیموم کوچکتری به‌دست آوریم، تا اینکه خودرا به رویه‌های با گونهٔ صفر یا همبند ساده محدود کنیم. با تغییرشکل قاب، اگر این تغییر به‌اندازهٔ کافی باشد، باید به‌نقطه‌ای برسیم که وضعیت اخیر دیگردرست نباشد. دراین لحظه، رویهٔ از گونهٔ ۱ ناپایدار می‌شود و ظاهراً با یك پرش ناپیوسته، خود را به‌جواب پایداری که درشکلهای ۷و۸ دیده می‌شود تبدیل می‌کند. اگر بایکی ازاین جوابهای همبند ساده، مثلاً شکل۷، شروع کنیم می‌توانیم آن را به‌طریقی تغییرشکل دهیم که دیگرجواب همبند سادهٔ شکل ۸ پایدارتر شود. نتیجهٔ این عمل آن است که در لحظهٔ خاصی یك گذر ناپیوسته از نوع ۷ به نوع ۸ صورت می‌گیرد. با معکوس کردن آهستهٔ این تغییرشکل به وضعیت اولیهٔ قاب بـاز می‌گردیم، اما این‌بار جوابی از نوع ۸ در آن قرار دارد. البته می‌توانیم این فرایند را در جهت دیگر تکرار کرده، به این ترتیب با گذرهای ناپیوسته، بین این دونوع نوسان کنیم. با عمل دقیق همچنین می‌توان به‌طور ناپیوسته از هر کدام از جوابهای همبند ساده به‌رویهٔ از گونهٔ ۱ گذر کرد. برای‌این‌منظورمثلاً اگراز رویهٔ ۷ شروع کنیم، مجبوریم قسمتهای قرص‌مانند را بسیار به‌هم نزدیك سازیم تا رویهٔ ازنوع ۹ به‌طور محسوس پایدارترشود. در این فرایند، گاهی اوقات تکه‌هایی از لایه‌های واسطه‌ای ظاهر می‌شوندکه قبل از به‌وجود آمدن رویهٔ با گونهٔ ۱ باید از بین برده شوند.

ایـن مثال نه فقط نشان دهندهٔ امکان وجود جوابهای مختلف با یك نوع توپولوژی است، بلکه نشان دهندهٔ امکان وجود نوعهای متفاوت در یك قاب واحد نیزهست، و علاوه براین، امکان گذرهای ناپیوسته را از یك جواب به‌جواب دیگر، درحالی‌که شرایط مسئله به‌طور پیوسته تغییر کنند، به‌نمایش می‌گذارد.

می‌توان به‌سهولت بسیار مدلهای پیچیده‌تری به‌روش مشابه ساخت و رفتار آنها را به‌طور تجربی مطالعه‌کرد. این را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

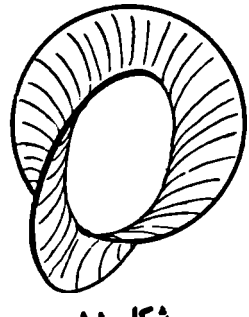
۵. یك پدیدهٔ جالب برای همه، این است‌که رویه‌های مینیمال همبند سادهٔ مستقر در یك مرز واحد لزوماً قطع کنندهٔ خود باشند. این‌گونه رویه‌های خودبر، همیشه ناپایدارند زیرا همان‌طور که به سادگی دیده می‌شود، آنها را می‌توان با رویه‌های دیگری با مساحت کوچکترو با همان مرز تعویض کرد. لذا در آزمایشهای مربوطه، رویه‌هایی با یك مشخصهٔ توپولوژیکی ساده تشکیل نمی‌شوند بلکه خود به خود رویه‌هایی با ساختمان توپولوژیکی پیچیده‌تر به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال، اگرمرز داده شده‌گره‌خورده باشد با چنین حالتی روبرو خواهیم بود. همان‌طورکه درشکل۱۰ نشان داده شده‌است، یك قاب به‌شکل برگ



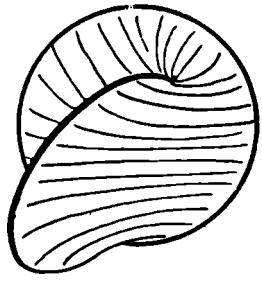
شکل ۱۰

شبدر، یك رویهٔ مینیمال یکطرفهٔ زیبا به‌دست می‌دهد.

یك پدیدهٔ خیلی نزدیك به این پدیده، ظهور رویه‌های مینیمال محدود به دو یا چند خم بستهٔ به‌هم پیوسته است، مانند دو دایره. اگر ابتدا دو رویهٔ مینیمال همبند ساده را که به ترتیب به دو خم محدود شده‌اند در نظر بگیریم، فوراً می‌توانیم ملاحظه کنیم که باید یکدیگررا قطع کنند. چنین زوجی از رویه‌های متقاطع، کمترین مساحت ممکن را به‌دست نمی‌دهد. بنابراین، برای خمهای به‌هم پیوسته جوابهای همبند دوگانهٔ محدود به‌دو خم را به‌دست خواهیم آورد. آنها را می‌توان عملاً با آزمایش به آسانی به دست آورد، در حالی‌که ممکن است تجسم آنها پیش از آزمایش‌کار دشواری باشد. دراین آزمایش نیز باید لایه‌های واسطه‌ای سوراخ شوند. ضمناً توصیه می‌شودکه با حرکت دادن دوخم به‌هم پیوسته به مکانهای مختلف، تغییرات و گذرهای ناپیوسته‌ای که رخ می‌دهند، مطالعه شوند. شکلهای ۱۱ و ۱۲ نشان دهندهٔ دو رویهٔ متفاوت برای دو دایرهٔ به هم پیوسته در وضعیت نسبی یکسان است؛ جهات مختلف دوایرنسبت به‌رویه‌ها باید مورد توجه قرار گیرد.



شکل ۱۱



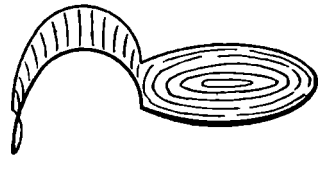
شکل ۱۲

۶. در آزمایشهایی که قسمتهایی از مرز روی یك رویهٔ مفروض S آزادانه حرکت می‌کند، رویه‌های مینیمال جالبی به دست می‌آیند. به‌عنوان مثال توصیه می‌شودکه از قاب

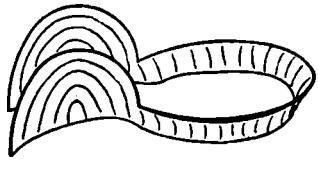
نشان داده شده درشکلهای ۱۳، ۱۴، و ۱۵ استفاده شود. خمی که دو نقطهٔ روی رویهٔ S را به‌هم وصل می‌کند (درشکل ما، S نشان داده نشده است، فرض براین است که تقریباً یك صفحهٔ افقی است) مرز ثابت است، در حالی که مرز آزاد روی رویه قرار دارد. اگر خم ثابت به اندازهٔ کافی دور از رویه قرار داشته باشد، یك رویهٔ مینیمال همبند ساده به دست می‌آوریم (شکل۱۳). ولی، اگرقسمت مسطح این خم ثابت به‌اندازهٔ کافی به‌رویه نزدیك شود، جواب پایدار، یك‌رویهٔ مینیمال همبند دوگانه خواهد بودکه علاوه‌برخط‌مرزی روی رویه، که کامل کنندهٔ خم مرزی ثابت به صورت یك خم بسته است، دارای یك خم مرزی بسته روی رویهٔ مرزی از پیش تعیین شده است (شکل ۱۵). هـر دو جواب می‌توانند به آسانی به‌طورناپیوسته به‌یکدیگرتبدیل شوند. امکان دیگری هم برای یك رویهٔ همبند ساده وجود دارد (شکل۱۴). به ارتباط شکلهای ۱۳، ۱۴، و ۱۵، به ترتیب، به شکلهای ۷، ۸، و ۹ توجه کنید.

همهٔ این مثالها و مثالهای بسیار دیگری که خواننده خود می‌تواند به‌آسانی و پس ازکسب کمی تجربه فراهم آورد، نمایانگر یك اصل کلی است که درستی آن در تحقیقات نظری اخیر، در مورد رویه‌های مینیمال معلوم شده است، وآن اینکه، همواره جوابی بایك نوع ساختمان توپولوژیکی مفروض وجود دارد به‌شرطی که برای این‌نوع ساختمان نسبت به‌انواع پایینتر، پایداری بیشتری (به‌معنی مساحت‌مینیموم‌کمتر) وجود داشته باشد. مثلاً، نوارموبیوس مثـال ۱ به محض آنکه ساختمان از نوع نوارموبیوس، مساحت‌کمتری از ساختمان از نوع قرص به دست دهد، به وجود می‌آید. از نظر یکتایی و پیوستگی، هنوز هیچ نظریهٔ جامعی عرضه نشده است. اما این نکته روشن است که وابستگی ناپیوسته وعدم یکتایی به‌هم ارتباط دارند.

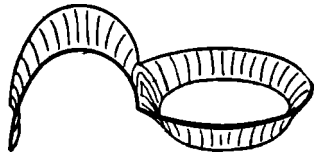
سرانجام می‌توان خاطرنشان ساخت کـه آزمایشهای لایهٔ صابون نه تنها در نظریهٔ



شکل ۱۳



شکل ۱۴



شکل ۱۵

(در آزمایش، رویهٔ مرزی آزاد را می‌توان تکه‌ای از سلولوئید[1] گرفت. این رویهٔ S و نیزسیم مرزی را باید به‌تغییرشکل واداشت.)

1. celluloid

رویه‌های مینیمال، بلکه درمسائل مینیمال دیگرنیز مفیدند. مثلاً، حباب کروی صابون چیزی نیست جز تجسم فیزیکی ویژگی هم‌محیطی کره. این مسئله هم‌محیطی را می‌توان به‌روش زیرتعمیم داد:

ازمیان همهٔ رویه‌های گذرنده بر یك مرز مفروض که به‌همراه رویهٔ از پیش معینی که ازاین مرز می‌گذرد حجم مشخصی را دربرمی‌گیرند، به‌دنبال رویه‌ای می‌گردیم که کمترین مساحت ممکن را دارد. جواب باید رویه‌ای بـا خمیدگی متوسط ثابت باشد (رویه‌های مینیمال خمیدگی متوسط صفردارند). ازنظر ریاضی، این مسئله نسبت به‌رویه‌های مینیمال، مسئله‌ای‌غیرخطی، واز درجه‌ای بالاتراست. حل نظری مسئله هنوز به‌آخر نرسیده است. اما آزمایشهای حباب صابون چنین مسائلی را بـه آسانی "حل" می‌کنند. حجم داده شده را می‌توان به سادگی با دمیدن هوا به داخل حبابهای صابون که مرز از پیش تعیین شده‌ای دارند، ایجادکرد. مثلاً اگرمرز از پیش داده شده یك مربع باشد، و اگر رویهٔ این مربع همان رویهٔ مـرزی از پیش داده شده باشد، در این صورت می‌توانیم از مکعب خودمان شروع کنیم. آن را داخـل محلول صابون فرو می‌بریم و از داخل در یك حباب صابون می‌دمیم تاتمام درون مکعب را پر کند، سپس با ادامهٔ این عمل شش رویه باخمیدگی ثابت را به شکل مطلوب به‌دست خواهیم آورد.

اگرآزمایشهای اولیهٔ پلاتو در مورد لایهٔ صابون را با اصل هم‌محیطی ترکیب کنیم می‌توان پدیدهٔ جالبی را ملاحظه کرد. مثلاً می‌توانیم این مسئله را در نظر بگیریم: یافتن یك رویهٔ مینیمال با کمترین مساحت ممکن، که به k خم ثابت مفروض ویك خم متغیر با طول معین محدود شده باشد. درآزمایشهای مربوطه می‌توانیم یك نخ ابریشمی را نمایندهٔ خم نامعین بگیریم. اگرلایهٔ داخل این خم را سوراخ کنیم رویه‌های مینیمال باقیمانده باید شکل جواب را به خود بگیرند و در این حـال، نخ ابریشمی، وضعیت بهینه را بـه خود می‌گیرد. اگر مرز داده شده مسطح باشد بدیهی است که این وضعیت، یك دایره است.

تحلیل مسائل ریاضی متناظرو همچنین مسائل مربوط به‌لایه‌های مبانی، هنوز مسئله‌ای حل نشده است.

مراجع

1. Plateau J., *Statique expérimentale et théorétique des Liquides*, Paris, 1873.
2. Schwarz's Collected Papers, *passim*, Vol 1.

برای مطالعهٔ بیشتر به منبع زیر مراجعه کنید:

Nitsche J. C. C., "Plateau's problems and their modern ramifications," *Amer. Math. Monthly*, 81(1974)945-968.

لوئیس براند

یك جبر تقسیم برای دنباله‌ها و حساب عملگرهای نظیر آن•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

۱. مقدمه. میکوسینسکی [۱] یك نوع حساب عملگرها ارائه داده است که اساساً عبارت است از جبر تقسیمی که اعضایش مجموعهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی یا مختلط روی بازهٔ $0 \le t < \infty$ هستند. این مجموعه همراه با دو عمل

$$(a+b)(t) = a(t)+b(t) \qquad \text{جمع :}$$

$$(ab)(t) = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{پیچش :}$$

یك حلقهٔ تعویضپذیر [۲] است. قضیهٔ تیچمارش [۳] نشان می‌دهد که این حلقه هیچ مقسوم‌علیه صفری ندارد. پس این حلقه را می‌توان به‌یك جبر تقسیم گسترش داد که عناصرش، a/b، را عملگر [۴] می‌نامیم. سپس، میکوسینسکی این جبر را هم برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی وهم برای حل معادلات با مشتقات جزئی به‌کار می‌برد. به‌طورکلی، در اینجا محاسبات بسیار شبیه همانهایی هستند که در آنها تبدیل لاپلاس به‌کار می‌رود. اما این روش از کلیت بیشتری برخوردار است زیرا از ملاحظات مربوط به همگرایی آزاد است و می‌تواند برای حل معادلاتی نظیر $x' - x = 2(t-1)e^{t^2}$ [۵]، که در آن عبارت سمت راست تبدیل‌پذیر نیست، به‌کار رود.

اما میکوسینسکی در به‌کار بردن روشهای مبتنی بر عملگرها برای حل معادلات تفاضلی [۶] از روشی استفاده می‌کند که به گفتهٔ او، هیچگونه ارتباط اساسی با حساب عملگرها ندارد [۷]. هدف از این مقاله بنیاد نهادن یك حلقهٔ تعویضپذیر است که عناصرش

• Brand L., "A division algebra for sequences and its associated operational calculus," *Amer. Math. Monthly*, 71 (1964) 719-728.

دنباله‌ها و اعمال آن جمع و پیچش (حاصلضرب کوشی) دنباله‌ها $\{f(t)\}$، روی اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... هستند

$$(a+b)(t)=a(t)+b(t) \qquad \text{جمع :}$$

$$(ab)(t)=\sum_{\tau=0}^{t} a(\tau)b(t-\tau) \qquad \text{پیچش :}$$

دراینجا نیز نظیر آنچه در قضیهٔ تیچمارش دیدیم، به‌سادگی می‌توان نشان داد که این حلقه هیچ مقسوم علیه صفری ندارد. سپس این حلقه را می‌توان به جبر تقسیمی با عناصر همانی یکتا گسترش داد. سپس، به‌همان طریقی که جبرمیکوسینسکی برای حل معادلات دیفرانسیل به‌کار می‌رود، این جبر را می‌توان برای حل معادلات تفاضلی به‌کار برد.

این‌کار نخستین بارتوسط ژوزف الیاس [۸] انجام شد، کسی که پیچش دنباله‌ها را تعریف کرد و یك حساب عملگرها برای دنباله‌ها به موازات حساب میکوسینسکی ساخت؛ تعریف وی از پیچش، باتعریف فوق این تفاوت را دارد که جملهٔ آغازی آن صفر است. فرمولهای او برحسب عملگر $\{۱\}/۱$ (عکس عملگر جمع) بیان می‌شوند و برای حل معادلات تفاضلی به‌صورت Δ-یی به‌کار می‌روند.

ت. ا. نیوتن [۹] از پیچش دنباله‌ها به‌صورتی که در بالا تعریف شد، دریافتن روابط بازگشتی برای جواب سری توانی معادلات تفاضلی بهره گرفت. سرانجام مور [۱۰] نشان داد که این‌کار را می‌توان با اعمال صرفاً جبری انجام داد به‌این طریق که مشتق جبری یك دنباله به صورت $D\{f(t)\}=\{(t+۱)f(t+۱)\}$ تعریف شود و برخی از دنباله‌های اساسی به‌صورت عملگرانتقال $s=\{۰, ۱, ۰, ۰, \ldots\}$ بیان شوند.

اگرمعادلهٔ دیفرانسیل رابرحسب عملگر $\vartheta=xD$ بیان کنیم عبورازمعادلهٔ دیفرانسیل به‌روابط بازگشتی ساده می‌شود. ازآنجا که $\vartheta(\vartheta-۱)=x^۲D^۲$، معادلهٔ

$$(۱+x^۲)y''+۲xy'-۲y=۰$$

که نیوتن و مور هر دو آن را بررسی کردند به‌صورت

$$\vartheta(\vartheta-۱)y+x^۲(\vartheta+۲)(\vartheta-۱)y=۰$$

درمی‌آید. که این رابطه مقدار ضرایب را به‌دست می‌دهد: $\lambda_۱=۰$ و $\lambda_۲=۱$ و جوابها عبارت‌اند از

$$y_۱=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{۲n}$$

که درآن $(۲n-۱)c_n+(۲n-۳)c_{n-۱}=۰$ و $y_۲=x$.

دنباله‌ها را برحسب عملگر انتقال s نیز بیان خواهیم کرد. در فرمولهای به شکل $A(s)=\{a(t)\}$، $A(s)$ دقیقاً همان تابع مولد دنباله به مفهوم لاپلاس است

$$A(s)=\sum_{t=0}^{\infty}a(t)s^t$$

پس این حساب عملگرها از فرمولهای آشنایی که برای توابع مولد داریم، تعبیر جدیدی به‌دست می‌دهد، همان‌طور که حساب میکوسینسکی از تبدیلات لاپلاس تعبیر تازه‌ای می‌کند ــ در هردو مورد، هیچ مراجعه‌ای به‌مفهوم همگرایی نمی‌شود.

۲. حلقهٔ تعویضپذیر. مجموعهٔ دنباله‌های با مقدار حقیقی یا مختلط را کـه به‌ازای اعداد صحیح $t=0,1,2,\ldots$ تعریف شده‌اند با S نمایش می‌دهیم. این مجموعه همراه با اعمال جمع و پیچش حلقه‌ای تعویضپذیر تشکیل می‌دهد کـه در شش شرط زیر صدق می‌کند. (به پیروی از نمادگذاری میکوسینسکی، از حروف کوچك برای نمایش عناصر (دنباله‌های) این جبر استفاده می‌کنیم)

(ج۱): $a+b=b+a$؛

(ج۲): $(a+b)+c=a+(b+c)$؛

(ج۳): به‌ازای هر a و b، عنصری چون x وجود دارد که $a+x=b$؛

(ض۱): $ab=ba$؛

(ض۲): $(ab)c=a(bc)$؛

(ت): $a(b+c)=ab+ac$.

(ت) و (ض۱) بدیهی‌اند و (ض۲) به‌سادگی اثبات‌می‌شود. از (ج۱)، (ج۲)، و (ج۳) می‌توان یکتایی x و وجود و یکتایی عنصر همانی جمع را نتیجه گرفت که برای مجموعهٔ S عبارت است از دنبالهٔ صفر $\{0,0,0,\ldots\}$.

حال نشان می‌دهیم که این حلقه مقسوم‌علیه صفر ندارد.

قضیه: پیچش دو دنبالهٔ صفر است اگر و تنها اگر یکی از دنباله‌ها صفر باشد.

برهان. فرض کنیم $c=ab=0$. اگر $a(t)=0$ حکم به اثبات رسیده است. پس فرض کنیم $a(n)\neq 0$ نخستین عنصر ناصفر $\{a(t)\}$ باشد. دراین صورت

$$c_n=\sum_{\tau=0}^{n}a(\tau)b(n-\tau)=a(n)b(0)=0 \qquad b(0)=0$$

$$c_{n+1}=\sum_{\tau=0}^{n+1}a(\tau)b(n+1-\tau)=a(n)b(1)=0 \qquad b(1)=0$$

و به‌طور کلی، با استقراء، $b(t)=0$.

۳. میدان خارج‌قسمت. حال از حلقهٔ تعویضپذیر جبر تقسیمی می‌سازیم که عناصرش زوجهای مرتب (a,b)، با شرط $b\neq 0$، هستند و رابطهٔ هم‌ارزی

$$(a, b)=(c, d) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad ad=bc \qquad (۱)$$

را دارند. درحالت خاص، برای هردنبالهٔ ناصفر f

$$(a, b)=(af, bf) \qquad f\neq ۰ \qquad (۲)$$

جمع و ضرب را مانند جمع و ضرب کسرها تعریف می‌کنیم

$$(a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd) \qquad (۳)$$

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac, bd) \qquad (۴)$$

از آنجا که $b, d\neq ۰$، بنابرقضیهٔ فوق $bd\neq ۰$ و بنابراین مجموع و حاصلضرب زوجهای مرتب عناصری ازمیدان هستند. حال عنصر صفر عبارت است از $(۰, f)$ که در آن $f\neq ۰$. زیرا از (۲) و (۳) داریم

$$(a, b)+(۰, f)=(af, cf)=(a, b)$$

این زوجهای مرتب هر شش اصل یك حلقهٔ تعویضپذیر را براورده می‌سازند و به‌علاوه دراصل زیرنیز صدق می‌کنند.

ض۳. به‌ازای هر $(a, b), (c, d)$ باضابطهٔ $a\neq ۰$ (همچنین $b, d\neq ۰$) زوج یکتای (x, y) وجود دارد به‌قسمی که $(a, b)\cdot(x, y)=(c, d)$.

برهان. طبق فرض $ad\neq ۰$، پس $ab\neq ۰$.

$$(a, b)\cdot(bc, ad)=(abc, bad)=(c, d)$$

بنابراین می‌توان قرارداد $(x, y)=(bc, ad)$. به‌علاوه (x, y) یکتاست، زیرا اگر $(a, b)(x, y)=(a, b)(u, v)$ یا $(ax, by)=(au, dv)$، آنگاه از (۱) نتیجه می‌شود $axbv=byau$ واز آنجاکه $ab\neq ۰$ پس‌داریم $xv=yu$ یا $(x, y)=(u, v)$.

اگر f دنباله‌ای ناصفر باشد آنگاه (f, f) عنصرهمانی ضرب است.

۴. عملگرهای عددی. دنباله‌های $\mathbf{k}=\{k, ۰, ۰, \dots\}$ به‌دلیل روابط

$$\mathbf{k}_۱+\mathbf{k}_۲=\{k_۱+k_۲, ۰, ۰, \dots\}$$

$$\mathbf{k}_۱\mathbf{k}_۲=\{k_۱k_۲, ۰, ۰, \dots\}$$

با اعداد حقیقی k یکریخت هستند.

گهگاه ممکن است برای نمایش دنبالهٔ فوق از حروف سیاه $\mathbf{k}$ استفاده کنیم. اما معمولاً حروف ایتالیك k را به‌کارمی‌بریم. بنابراین k برابر یك دنباله به‌مفهوم معمولی، با $\mathbf{k}$ برابر یك دنباله به‌مفهوم ذکرشده دراین جبر، یکی است.

به‌علاوه می‌نویسیم

$$k\{a\} \text{ برای } \{k, ۰, ۰, \cdots\}\ \{a(۰), a(۱), a(۲), \cdots\}$$

$$k\{۱\} \text{ برای } \{k, ۰, ۰, \cdots\}\ \{۱, ۱, ۱, \cdots\}$$

همهٔ توانهای دنبالهٔ $\{۱, ۰, ۰, \cdots\}=۱$ عبارت‌اند از ۱، و $۱\{a\}=\{a\}$. از (۳) و (۴) داریم

$$(a, ۱)+(b, ۱)=(a+b, ۱), \quad (a, ۱)(b, ۱)=(ab, ۱)$$

بنابراین زوج $(f, ۱)$ را می‌توان به‌عنوان نماد دیگری برای دنبالهٔ f به‌کار برد؛ می‌نویسیم $f=(f, ۱)$. پس به‌خصوص، عنصر همانی ضرب عبارت است از: $۱=(۱, ۱)=(f, f)$.

۵. نمادگسری. اگر بنویسیم $(a, b)=a/b$ $(b\neq ۰)$ آنگاه روابط (۱) تا (۴) همان قوانین آشنای کسرهای عددی هستند که در آنها پیچش جایگزین ضرب شده است. هر دنبالهٔ $f(t)$ را می‌توان به‌صورت $f/۱$ نوشت؛ و عناصر همانی جمع و پیچش عبارت‌اند از $۰=۰/۱$ و $۱=۱/۱$.

اگر $a/b=c/۱=c$ آنگاه $a=bc$ $(b\neq ۰)$ که یك دنباله است اما اگر a و b دو دنبالهٔ دلخواه باشند a/b لزوماً یك دنباله نخواهد بود. برای مثال، اگر $a(۰)\neq ۰$ و $b(۰)=۰$، a/b نمی‌تواند دنباله‌ای چون c باشد زیرا $c(۰)=۰$ نمی‌تواند مساوی $a(۰)$ باشد. عناصر این جبر تقسیم را عملگر می‌نامیم که در حالت خاص اعداد و دنباله‌ها را نیز دربرمی‌گیرند.

۶. عملگر انتقال. دنبالهٔ

$$s=\{۰, ۱, ۰, ۰, \cdots\} \qquad (۵)$$

به‌جهت پیچش

$$s\{f(۰), f(۱), \cdots\}=\{۰, f(۰), f(۱), \cdots\}$$

که در آن هر صفر f به خانهٔ سمت راستش منتقل می‌شود، عملگر انتقال نامیده می‌شود. به‌علاوه $s^۲=\{۰, ۰, ۱, ۰, \cdots\}$ و در حالت کلی

$$s^n=\{\underbrace{۰, ۰, \cdots, ۰}_{n}, ۱, ۰, ۰, ۰, \cdots\} \qquad (۶)$$

برطبق (۶)، به‌ازای $n=۰$ تعریف می‌کنیم $s^۰=\{۱, ۰, ۰, \cdots\}$. پس هر دنبالهٔ $\{f(t)\}$ را می‌توان به‌صورت سری نامتناهی

$$\{f(t)\}=\sum_{t=۰}^{\infty} f(t)s^t=F(s) \qquad (۷)$$

نمایش داد. مسئلهٔ همگرایی در مورد این نماد مطرح نیست. رابطهٔ (۷) تنها می‌گوید که جملهٔ $f(n)$ از دنباله در همان جایی قرار می‌گیرد که ۱ در s^n قرار دارد.

از (۷) نتیجه می‌شود

$$\{r^t f(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)(rs)^t = F(rs) \qquad (۸)$$

به‌علاوه $\{tf(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} tf(t)s^t = s\sum_{t=0}^{\infty} f(t)ts^{t-1}$، یا از آنجایی که مجموع آخر مشتق صوری سری $F(s)$ در (۷) است

$$\{tf(t)\} = sF'(s) \qquad (۹)$$

فرمولهای (۸)و(۹) تنها درحالتی اثبات شده‌اندکه $F(s)$، همان‌طورکه در رابطهٔ (۷) بود، یك سری ساده باشد. هنگامی کـه $F(s) = A(s)/B(s)$، یعنی $F(s)$ خـارج قسمت دوسری ساده باشد، روابط فوق همچنان معتبرخواهد بود. زیرا اگر

$$\{f(t)\} = \frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} = \frac{A(s)}{B(s)} = F(s)$$

باشد، آنگاه پیچش $\sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)b(t-\tau) = a(t)$ را داریم. حال از اتحاد

$$\sum_{\tau=0}^{t} r^\tau f(\tau)r^{t-\tau}b(t-\tau) = r^t a(t) \quad \text{یا} \quad \{r^t f(t)\}\{r^t b(t)\} = \{r^t a(t)\}$$

نتیجه می‌شودکه

$$\{r^t f(t)\} = \frac{\{r^t a(t)\}}{\{r^t b(t)\}} = \frac{A(rs)}{B(rs)} = F(rs) \qquad (۸')$$

به‌علاوه از اتحاد

$$\sum_{\tau=0}^{t} \tau f(\tau)b(t-\tau) + \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)(t-\tau)b(t-\tau) = ta(t)$$

نتیجه می‌شودکه $\{tf(t)\}\{b(t)\} + \{f(t)\}\{tb(t)\} = \{ta(t)\}$. بنابراین

$$\{tf(t)\}B(s) + \frac{A(s)}{B(s)} sB'(s) = sA'(s)$$

$$\{tf(t)\} = s\frac{BA' - AB'}{B^2} = s\left(\frac{A'}{B}\right) = sF'(s) \qquad (۹')$$

۷. عملگرهای مجموع و تفاضل. دنبالهٔ

$$\sigma\{۱, ۱, ۱, \cdots\} \qquad (۱۰)$$

به‌جهت پیچش

$$\sigma f=\left\{\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)\right\} \qquad (11)$$

عملگر مجموع نامیده می‌شود. عکس σ، یعنی

$$\delta=\frac{1}{\sigma}=\{1,-1,0,0,\cdots\}=1-s \qquad (12)$$

به‌جهت خاصیت

$$\delta f=\{f(0),\Delta f(0),\Delta f(1),\cdots\}$$

عملگر تفاضل نامیده می‌شود. با نوشتن این رابطه به‌صورت

$$(1-s)\{f(t)\}=f(0)+s\{\Delta f(t)\}$$

که در آن $\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$، به‌رابطهٔ مهم

$$s\{f(t+1)\}=\{f(t)\}-f(0) \qquad (13)$$

می‌رسیم که در آن $f(0)$ یك عدد است. در حالت خاص به‌ازای $f(t)=1$ داریم $s\{1\}=\{1\}-1$ یا

$$\{1\}=\frac{1}{1-s} \qquad (14)$$

از آنجا که $\sigma=\{1\}$، این رابطه را از (۱۲) نیز می‌توان نتیجه گرفت. حال به‌ازای $f(t)=r^t$ خواهیم داشت $sr\{r^t\}=\{r^t\}-1$، یا

$$\{r^t\}=\frac{1}{1-rs} \qquad (15)$$

که از (۸) و (۱۴) نیز می‌توان آن را نتیجه گرفت.

از (۱۳) داریم $s\{f(t+2)\}=\{f(t+1)\}-f(1)$، پس

$$s^2\{f(t+2)\}=\{f(t)\}-f(0)-sf(1) \qquad (16)$$

و در حالت کلی

$$s^n\{f(t+n)\}=\{f(t)\}-f(0)-sf(1)-\cdots-s^{n-1}f(n-1) \qquad (17)$$

توانهای σ نیز به‌سادگی محاسبه می‌شوند

$$\sigma^2=\sigma\{1\}=\sum_{\tau=0}^{t} 1=\tau\Big|_{\tau=0}^{t+1}=\{t+1\}$$

$$\sigma^{۲}=\sigma\{t+۱\}=\sum_{\tau=۰}^{t}(\tau+۱)=\frac{(\tau+۱)^{(۲)}}{۲}\Big|_{\tau=۰}^{t+۱}=\frac{\{(t+۲)^{(۲)}\}}{۲!}$$

و در حالت کلی، با استفاده از استقراء (برای نمادها [۱۱] را ببینید) داریم $\sigma^{n+۱}=\{(t+n)^{(n)}\}/n!$؛ یا ازآنجا که $\sigma=(۱-s)^{-۱}$

$$\{(t+n)^{(n)}\}=\frac{n!}{(۱-s)^{n+۱}} \qquad (۱۸)$$

اگردر رابطهٔ (۱۷) قرار دهیم $f(t)=t^{(n)}$، با توجه به‌اینکه

$$f(۰)=f(۱)=\ldots=f(n-۱)=۰$$

خواهیم داشت

$$\{t^{(n)}\}=s^{n}\{(t+n)^{(n)}\}=\frac{n!s^{n}}{(۱-s)^{n+۱}} \qquad (۱۹)$$

از (۸) و (۱۸) به‌رابطهٔ مفید زیرمی‌رسیم

$$\{r^{t}(t+n)^{(n)}\}=\frac{n!}{(۱-rs)^{n+۱}} \qquad (۲۰)$$

۸. فرمولهای عملگرها. چنانچه رابطهٔ $\{۱\}=(۱-s)^{-۱}$ را درنظر گرفته ورابطهٔ (۹) را متوالیاً به‌کار می‌بریم درمی‌یابیم که

$$\{t\}=\frac{s}{(۱-s)^{۲}},\qquad \{t^{۲}\}=\frac{s(s+۱)}{(۱-s)^{۳}},\qquad \{t^{۳}\}=\frac{s(s^{۲}+۴s+۱)}{(۱-s)^{۴}} \qquad (۲۱)$$

بار دیگر با استفاده ازاین فرمولها و رابطهٔ (۸) داریم

$$\{r^{t}\}=\frac{۱}{۱-rs},\qquad \{tr^{t}\}=\frac{rs}{(۱-rs)},\ \ldots \qquad (۲۲)$$

واز (۲۲)

$$\{e^{i\alpha t}\}=\frac{۱}{۱-se^{i\alpha}}=\frac{۱-se^{-i\alpha}}{۱-۲s\cos\alpha+s^{۲}}$$

وبا درنظرگرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی خواهیم داشت

$$\{\cos\alpha t\}=\frac{۱-s\cos\alpha}{۱-۲s\cos\alpha+s^{۲}} \qquad (۲۳)$$

$$\{\sin \alpha t\} = \frac{s \sin \alpha}{1 - 2s \cos \alpha + s^2} \qquad (24)$$

و به‌ازای $\alpha = \pi/2$ روابط فوق به‌این صورت درمی‌آیند

$$\left\{\cos \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{1}{1+s^2} \qquad (25)$$

$$\left\{\sin \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{s}{1+s^2} \qquad (26)$$

و همچنین از (۹) داریم

$$\left\{t \cos \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{-2s^2}{(1+s^2)^2} \qquad (27)$$

$$\left\{t \sin \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{s(1-s^2)}{(1+s^2)^2} \qquad (28)$$

و بنابراین

$$\left\{\frac{t}{2} \cos \frac{\pi}{2} t + \cos \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{1}{(1+s^2)^2} \qquad (29)$$

$$\left\{\frac{t}{2} \sin \frac{\pi}{2} t + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right\} = \frac{s}{(1+s^2)^2} \qquad (30)$$

چنانچه عناصرسمت چپ معادلات (۲۳)تا(۳۰) را در r^t ضرب‌کنیم، باید درطرف راست rs را جانشین s کنیم.

اگردرمعادلهٔ(۷)، s متغیری حقیقی، یامختلط باشد $F(s)$ تابع مولد دنبالهٔ $\{f(t)\}$ خواهد بود. چنانچه از ملاحظات مربوط به همگرایی صرفنظر کنیم، روابط (۸) و (۹) نتایج صوری (۷) بوده و نشان می‌دهند کـه $F(rs)$ و $sF'(s)$ بـه ترتیب توابع مولد دنباله‌های $\{r^t f(t)\}$ و $\{t f(t)\}$ هستند. به کمك ایـن نتایج می‌توان تمامی فرمولهـای عملگرها را از تابع مولد دنبالهٔ $\{1\}$ یعنی $1/(1-s)^{-1}$ و $\{1\}$ به دست آورد. نتیجتاً روابط فوق به دو معنی هستند: (۱). هنگامی که s عملگر انتقال باشد، این روابط دنبالهٔ $\{f(t)\}$ را به‌عنوان یك تابع گویای $F(s)$ دریك جبرتقسیم بیان می‌کنند، (۲)، هنگامی‌که s متغیری عددی باشد، $F(s)$ تابع مولد $\{f(t)\}$ خواهد بود.

۹. معادلات تفاضلی. برای حل یك معادلهٔ تفاضلی ازمرتبهٔ n با ضرایب ثابت مانند

$$a_0 y(t+n) + a_1 y(t+n-1) + \cdots + a_n y(t) = f(t)$$

طرفین را در s^n ضرب‌کرده، با استفاده از (۱۷) سمت چپ را به‌صورت

$$(a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n)y+G(s)$$

می‌نویسیم که در آن $G(s)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $n-1$ است وضرایب آن به n جملهٔ اول دنبالهٔ y بستگی دارند که این جملات به‌عنوان شرایط آغازی داده می‌شوند. با استفاده ازفرمولهای عملگرهای مناسب $\{f(t)\}$ را به‌صورت $F(s)$ می‌نویسیم و معادلهٔ

$$y=\frac{s^nF(s)-G(s)}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}$$

را از طریق تجزیه به‌کسرهای جزئی و تعبیر آنها به‌صورت دنباله‌هایی از t حل می‌کنیم. این‌روش را ازطریق مثالهای زیرشرح می‌دهیم که در آنها از روابط $sy(t+1)=y-y_0$، $s^2y(t+2)=y-y_0-sy_1$ برای تبدیل عناصر سمت چپ استفاده شده است و $y_n=y(n)$.

مثال ۱. $y(t+2)+y(t)=\sin(\pi/2)t$ ، $y_0=1$ ، $y_1=0$. طرفین را در s^2 ضرب می‌کنیم سپس

$$y-1+s^2y=\frac{s^3}{1+s^2},$$

$$y=\frac{1+s}{1+s^2}-\frac{s}{(1+s^2)^2}$$

$$=\{\cos(\pi/2)t+\sin(\pi/2)t-(1/2)(1+t)\sin(\pi/2)t\}$$

که از روابط (۲۵)، (۲۶)، و (۳۰) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. $\Delta y+3y-2\sigma y=(-1)^t$، $y_0=1$ که در آن

$$\Delta y(t)=y(t+1)-y(t)$$

و $\sigma=(1-s)^{-1}$ عملگرمجموع در رابطهٔ(۱۰)است. طرفین را در s ضرب می‌کنیم، سپس

$$y-1+2sy-\frac{2s}{1-s}y=\frac{s}{1+s},$$

$$y=\frac{(1+2s)(1-s)}{(1-2s)(1+s)^2}$$

$$=\frac{4/9}{1-2s}+\frac{11/9}{1+s}-\frac{2/3}{(1+s)^2}$$

$$=\frac{4}{9}\{2^t\}+\frac{11}{9}\{(-1)^t\}-\frac{2}{3}\{(-1)^t(t+1)\}$$

که با استفاده از (۱۵) و (۲۰) به‌دست می‌آید.

مثال ۳. $\Delta^2 y+y=\sin(\pi/2)t$ ، $y_0=1$ ، $y_1=0$ که در آن

$$\Delta^2 y(t)=y(t+2)-2y(t+1)+y(t)$$

طرفین را در s^2 ضرب می‌کنیم؛ سپس

$$s^2\{y(t+2)-2y(t+1)+2y(t)\}=\frac{s^3}{s^2+1}$$

$$y-1-2s(y-1)+2s^2y=\frac{s^3}{s^2+1}$$

$$(1-2s+2s^2)y=\frac{1-2s+s^2-s^3}{s^2+1}$$

$$y=\frac{1-2s+s^2-s^3}{(s^2+1)(1-2s+2s^2)}$$

$$=\frac{1}{5}\frac{s+2}{s^2+1}-\frac{1}{5}\frac{7s-3}{1-2s+2s^2}$$

حال $\{\sin(\pi/2)t\}+2/5\{\cos(\pi/2)t\}=1/5(s+2)/(s^2+1)$. ودرمورد کسردوم از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\{r^t\cos\alpha t\}=\frac{1-rs\cos\alpha}{1-2rs\cos\alpha+r^2s^2},\qquad \{r^t\sin\alpha t\}=\frac{rs\sin\alpha}{1-2rs\cos\alpha+r^2s^2}$$

که از کاربرد (۸) درمورد (۲۳) و (۲۴) به‌دست می‌آیند. پس

$$\frac{7s-3}{1-2s+2s^2}=-3\frac{1-s-4s/3}{1-2s+2s^2}$$

$$=-3\{2^{t/2}\cos(\pi/4)t\}+4\{2^{t/2}\sin(\pi/4)t\}$$

قرار می‌دهیم $r=\sqrt{2}$، $r\sin\alpha=r\cos\alpha=1$ و بنابراین $\alpha=\pi/4$. جواب عبارت است از

$$y=1/5\{\sin(\pi/2)t\}+2/5\{\cos(\pi/2)t\}+3/5\{2^{t/2}\cos(\pi/4)t\}$$
$$-4/5\{2^{t/2}\sin(\pi/4)t\}$$

$$y(t)=1/5(\sin(\pi/2)t+2\cos(\pi/2)t)$$
$$+((1/5)2^{t/2})(3\cos(\pi/4)t-4\sin(\pi/4)t)$$

مراجع

1. Minkusinski Jan, *Operational Calculus*, Pergamon Press, London and New York, 1959.
2. Minkusinski Jan, *Ibid*. p. 342.
3. Minkusinski Jan, *Ibid*. part 1, chapter 2.
4. Minkusinski Jan, *Ibid*. part 1, chapter 3.
5. Minkusinski Jan, *Ibid*, p. 42, example 1.
6. Minkusinski Jan, *Ibid*, part 2, chapter 3.
7. Minkusinski Jan, *Ibid*, p. 164, 12.
8. Eliás Josef, "O operatorovej methode riesenia differencyyeh rovnik," *Mat-Fyz. Casopis*, Sav. VIII, 4(1958)203-227.
9. Newton T. A., "An application of the generating function to differential equations," *Amer. Math. Monthly*, 68(1961)242-244.
10. Moore D. H., "Convolution products and quotients and algebraic derivatives of sequences," *Amer. Math. Monthly*, 69(1962)132-138.
11. Brand L., "Binomial expansions in fractorial powers," *Amer. Math Monthly*, 67(1960)953-957.

هانس ساگان

چندضلعیهای تقریبی برای خمهای فضا پر کن لبگ و شوئنبرگ*

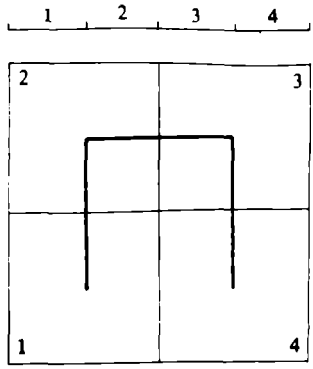
ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

در گذشته‌ها خم را به‌عنوان یك شیء هندسی حاصل‌از حرکت پیوسته یك نقطه در یك بازهٔ زمانی محدود و بسته، یا به زبان امروزی، به‌صورت تصویر پیوسته (در E^n) یك قطعه از خط، در نظر می‌گرفتند. در ۱۸۹۰ پئانو [۸] با اثبات اینکه این تعریف اشیایی را (با بعد ۲ یا بالاتر) با محتوای ژوردان مثبت (مانند مربعها یا مکعبها) در برمی‌گیرد که هیچکس آنها را خم نمی‌نامد، متخصصان هندسهٔ دیفرانسیل را از آسودگی خاطر به‌درآورد. سال بعد، هیلبرت [۴] مثال پئانو را اصلاح کرد و به‌جای تعریف حسابی پئانو یك‌روش خیلی ساده و مقنع تولیدکنندهٔ هندسی ارائه داد.

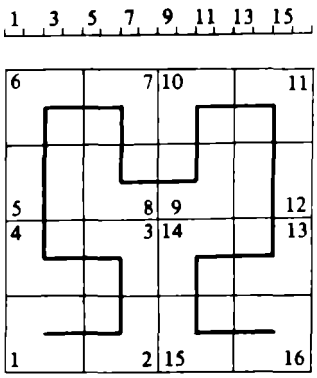
بازهٔ $[۰, ۱]$ را به ۴ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و مربع $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ را به ۴ مربع تقسیم، و مربعها را چنان شماره‌گذاری می‌کنیم که هر دو مربع با شماره‌های متوالی یك ضلع مشترك داشته باشند (شکل ۱ الف). اگر تمام بازه بتواند روی تمام مربع نگاشته شود، آنگاه $[۱/۴ , ۰]$ می‌تواند روی مربع ۱ نگاشته شود، $[۱/۲ , ۱/۴]$ می‌تواند بر مربع ۲ نگاشته شود وقس‌علیهذا. دوباره هر زیربازه را به ۴ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم، هر مربع کوچکتر را به ۴ مربع تقسیم، و مربعها را چنان شماره‌گذاری می‌کنیم که نگاشت قبلی حفظ شود و هر دو مربع متوالی یك ضلع مشترك داشته باشند (شکل ۱ ب) و بحث قبلی را تکرار می‌کنیم. مرحلهٔ بعد در شکل ۱ (ج) ترسیم شده است. به‌همین صورت بینهایت بار عمل می‌کنیم تا نگاشتی که بنا بر شیوهٔ ساختنش پیوسته است، به‌دست آید. این نگاشت پوشا

---

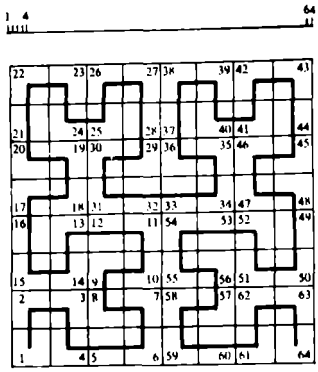
* Sagan H., "Approximating polygons for Lebesgue's and Schoenberg's space filling curves," *Amer. Math. Monthly*, 95(1986) 361-368.



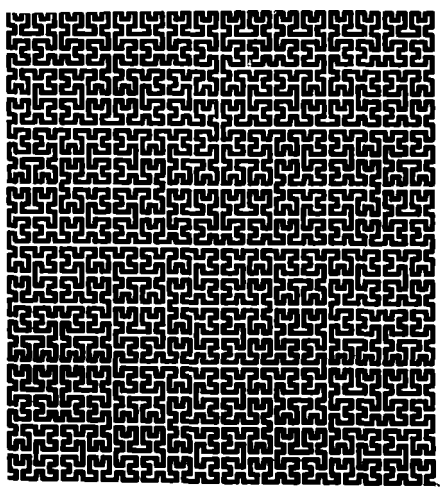
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱. (الف) تا (ج) تولید خم فضا پرکن هیلبرت. (د) چندضلعی تقریبی ششم برای خم فضا پرکن هیلبرت.

هم‌هست و این‌موضوع از این‌حقیقت نتیجه می‌شود که هرنقطه در $[0,1]\times[0,1]$ دریك دنباله ازمربعهای تودرتوی بسته قراردارد که قطرشان به‌صفرمیل می‌کند و وابسته به‌دنباله‌ای از بازه‌های تودرتوی بسته می‌باشدکه طولشان به صفر میل می‌کند.

دنبالهٔ مربعها را می‌توان با یك مسیر چندضلعی که از نقاط وسط اضلاع مربعها، با حفظ ترتیب شمارهٔ آنها می‌گذرد، نمایش داد. واندرلیش[1] [۱۵] چنین چندضلعیهایی را "چندضلعیهای تقریبی" می‌نامد. چندضلعی تقریبی مربوط به‌مرحلهٔ‌ششم درشکل ۱ (د) آمده است (این شکل کمی پیچیده با یك کامپیوتر شخصی آی‌بی‌ام تولید شده است [۶]). ما در دو بخش آتی‌مفهوم دیگری از چندضلعیهای تقریبی را که به همین مفهوم ذکر شده وابسته است، در نظر می‌گیریم.

به‌طور کلی

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \qquad a\leqslant t\leqslant b \qquad (۱)$$

را یك "خم فضاپرکن" دو بعدی، یا یك "خم پئانو" می‌نامند، هرگاه f و g پیوسته باشندومجموعهٔ $\{(f(t),\ g(t))\in E^2 \mid a\leqslant t\leqslant b\}$ محتوای مثبت ژوردان دوبعدی داشته باشد. ضمناً، چنین نگاشتی احتمالا نمی‌تواند دوسویی باشد زیرا همان‌گونه‌که نتو[2] نشان داده‌است [۷] هرنگاشت دوسویی از یك خط برروی یك رویه لزوماً ناپیوسته است.

بعد از مثالهای پئانو و هیلبرت، خمهای فضاپرکن دیگری ساخته شده‌اند. اکثر این خمها صورتهای تغییریافته‌ای از مثال هیلبرت هستندکه درآنها یا بازه و مربع درهرمرحله به ۹ قسمت تقسیم‌شده‌اند یا عمل‌نگاشتن برروی یك‌مثلث متساوی‌الساقین‌قائم‌الزاویه انجام می‌گیرد، ویا نظایراینها (مثلاً [۴] را ببینید). ولی‌دوتا ازاین‌خمها دراین‌گروه‌نمی‌گنجند، که نامهای لبگ و شوئنبرگ را برخود دارند.

خم‌فضاپرکن‌لبگ. لبگ [۵] f و g را در (۱) به‌ازای $a=0$ و $b=1$ به‌این صورت تعریف می‌کند: برای تمام اعضای مجموعهٔ کانتور

$$t_0=\frac{2a_1}{3}+\frac{2a_2}{3^2}+\frac{2a_3}{3^3}+\cdots, \qquad a_i=0 \text{ یا } 1 \qquad (۲)$$

قرار می‌دهیم

$$f(t_0)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_5}{2^3}+\cdots, \qquad g(t_0)=\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\frac{a_6}{2^3}+\cdots \qquad (۳)$$

پس

$$t=\frac{2a_1}{3}+\frac{2a_2}{3^2}+\cdots+\frac{2a_{2n}}{3^{2n}}+\frac{2a_{2n+1}}{3^{2n+1}}+\cdots, \qquad a_i=0 \text{ یا } 1$$

---

1. W. Wunderlich 2. Netto

داریم

$$|f(t)-f(t_0)|<\frac{1}{2^n}$$

و برای g نیز نتیجه‌ای مشابه به‌دست می‌آوریم؛ مشاهده می‌کنیم که f و g روی مجموعه کانتور پیوسته هستند. حال تعریف f و h را به‌طور پیوسته با درونیابی خطی به‌متمم مجموعهٔ کانتور (که معادل اجتماع تعدادی شمارا از بازه‌های باز است) تعمیم می‌دهیم. مثلاً برای تعمیم تعریف f و g به بازهٔ $(۱/۳, ۲/۳)$ ملاحظه می‌کنیم که

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad g\left(\frac{1}{3}\right)=1,\quad g\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

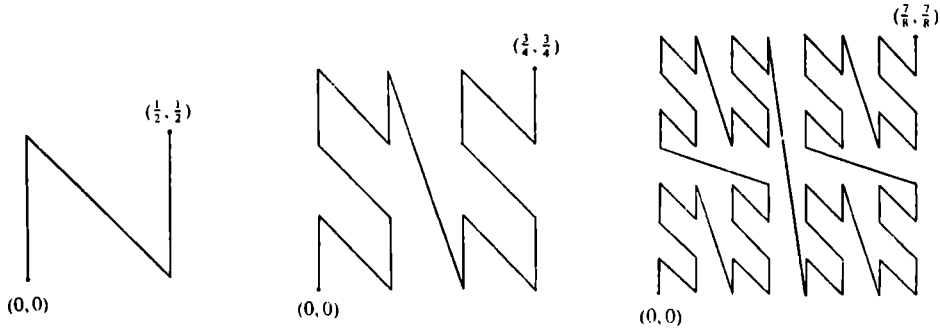
و بنابراین، به‌ازای $۱/۳<t<۲/۳$ قرار می‌دهیم $f(t)=۱/۲$ و $g(t)=-۳t+۲$ و همین کار را درمورد بازه‌های $(۱/۹, ۲/۹)$ و $(۷/۹, ۸/۹)$ و الی آخر، ادامه می‌دهیم. توابع تعمیم‌یافته، با توجه به‌نحوهٔ ساختشان، روی متمم مجموعهٔ کانتور پیوسته‌اند. برای نشان دادن اینکه این توابع در تمام بازه پیوسته هستند کافی است ملاحظه کنیم که هر نقطهٔ مجموعهٔ کانتور که یک نقطهٔ انتهایی چپ یکی از بازه‌های باز مجموعهٔ متمم نباشد، یک نقطهٔ انباشتگی چپ مجموعهٔ کانتور است، و همین طور هر نقطهٔ مجموعهٔ کانتور که یک نقطهٔ انتهایی راست یکی از آن بازه‌ها نباشد یک نقطهٔ انباشتگی راست مجموعهٔ کانتور است. برای ملاحظهٔ توضیحات بیشتر به [۲] مراجعه کنید. در این مورد که این نگاشت پوشاست، می‌توان به‌این‌صورت استدلال کرد: اگر $(x, y)\in[۰, ۱]\times[۰, ۱]$ آنگاه این مختصات را می‌توان آن‌گونه که در (۳) آمده است، نمایش داد و نقطه به‌عنوان تصویر t_0 آن‌طور که در (۲) آمده نمایان می‌شود.

منطقی است که یک چندضلعی با رئوس

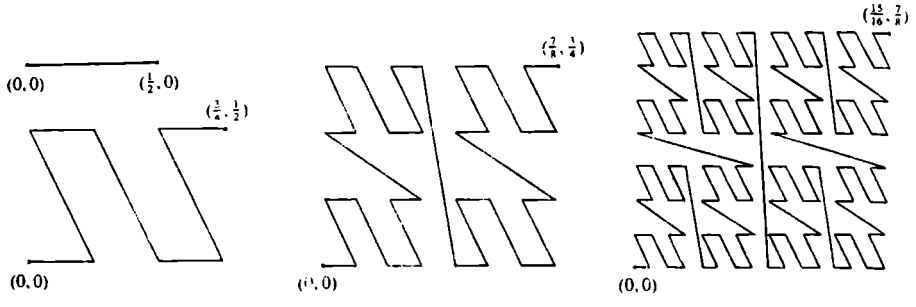
$$t_m=\frac{2a_1}{3}+\frac{2a_2}{3^2}+\cdots+\frac{2a_m}{3^m}\qquad a_i=0,\ 1$$

به‌ازای یک m ثابت را، یک چندضلعی تقریبی مرتبهٔ mام برای خم فضا پرکن لبگ، یا به‌اختصار، یک‌چندضلعی مرتبهٔ mام لبگ بنامیم. با توجه به‌نمودارهای چنین چندضلعیهایی، تصوری از اینکه چگونه مربع سرانجام پر می‌شود، به‌دست می‌آوریم. مثلاً برای به‌دست آوردن چندضلعی مرتبهٔ دوم لبگ، مقادیر ۰٫۰۰، ۰٫۰۲، ۰٫۲۰، و ۰٫۲۲ (درمبنای ۳) را درنظر می‌گیریم تا رئوس $(۰, ۰)$، $(۰, ۱/۲)$، $(۱/۲, ۰)$، و $(۱/۲, ۱/۲)$ را به‌دست آوریم. چندضلعیهای مرتبهٔ ۱، ۳، ۵، و ۷ لبگ در شکل ۲ و مرتبه‌های ۲، ۴، و ۶ در شکل ۳ دیده می‌شوند.

ببینید که این چندضلعیها چگونه روی مربع پیچ و تاب می‌خورند و الگوهای جالب هندسی را پدید می‌آورند. روش واضحی برای رسم این چندضلعیها وجود دارد. برای



شکل ۲. چندضلعیهای لبگ از مرتبهٔ ۱، ۳، ۵، ۷.



شکل ۳. چندضلعیهای لبگ از مرتبهٔ ۲، ۴، ۶.

به‌دست آوردن چندضلعی مرتبهٔ $m+2$، چندضلعی‌مرتبهٔ mام را ۲ بار دریك الگوی‌مربعی رسم‌کنید، ۴ قسمت را با خطوط اتصال مناسبی به‌یکدیگر وصل‌کنید، و حاصل را تا نصف اندازهٔ اصلی کوچك‌کنید.

اتصالات با طولهای گوناگون، اتصالات نهایی عمودی و افقی را که متناظر با توسیعهای خطی f و g دربازه‌های (۱/۳, ۲/۳)، (۱/۹, ۲/۹) و (۷/۹, ۸/۹) و نظایر آن هستند، تقریب می‌زنند. مثلاً، فرورفتگی عمیق وسط، تقریبی است از حد نهایی فرورفتگی عمودی از (۱/۲, ۱) تا (۱/۲, ۰) که مربوط به توسیع خطی f و g در (۱/۳, ۲/۳) می‌باشد. توجه کنید که f و g، برخلاف توابع مولد یك "خم" از نوع هیلبرت مشتقپذیر هستند.

خم فضاپرکن شوئنبرگ. شوئنبرگ بدون‌شك تحت تأثیرمثال لبگ، برداشت خود از یك خم فضا پرکن را در سال ۱۹۳۸ منتشرکرد [۹]. خم او تصادفاً با خم لبگ روی

مجموعهٔ کانتور منطبق است. به‌دلایل مناسبی که خواهید دید، هیچ شکلی از چندضلعیهای تقریبی دراین مثال ظاهر نمی‌شود.

خم شوئنبرگ برحسب یك تابع مولد زوج

$$p(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{3}\\ 3t-1 & \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

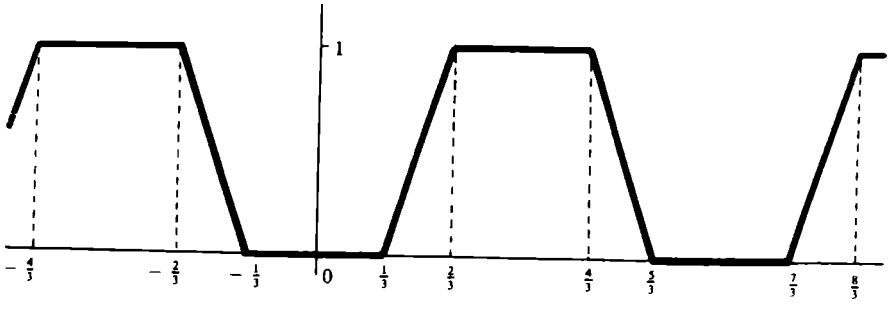
با دو دورهٔ تناوب

$$p(-t)=p(t)$$
$$p(t+2)=p(t)$$

(شکل ۴ را ببینید) به‌این‌صورت تعریف می‌شود

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(3^{2k-2}t)}{2^k},\qquad g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(3^{2k-1}t)}{2^k}\qquad (۴)$$

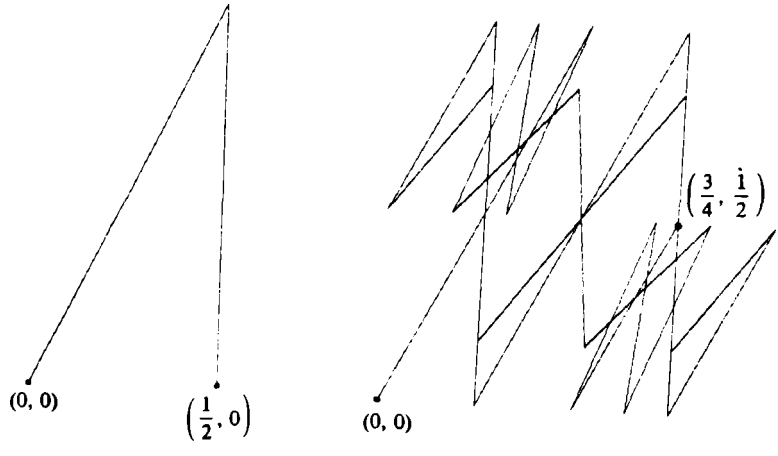
که f و g همانند (۱) هستند و $a=0$ و $b=1$. اثبات اینکه این خم واقعاً فضاپرکن است، چنان ساده است که درحساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته به‌صورت یك اثبات استانده درآمده است. f و g که با سری همگرای یکنواخت توابع پیوسته نشان داده می‌شوند، به‌وضوح پیوسته هستند. ازآنجا که می‌توان هرنقطه در $[0,1]\times[0,1]$ را به صورت (۳) نشان داد، بنابر (۴) چنین نقطه‌ای تصویر t_0 است که با (۲) داده می‌شود و این‌نشان می‌دهدکه نگاشت پوشاست و همزمان، خم‌شوئنبرگ برخم لبگ روی مجموعهٔ



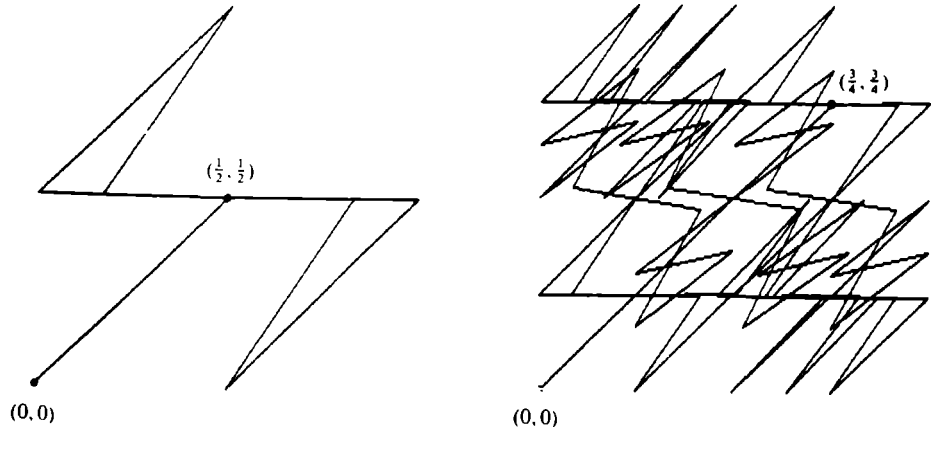
شکل ۴. نمودار تابع مولد p.

کانتور منطبق است. (برای ملاحظهٔ توضیح بیشتر [۱] را ببینید.)

بنا بر (۴)، خم شوئنبرگ رأسهای با لقوه‌ای به‌ازای $m = ۱, ۲, \ldots$، $t_{m,n} = n/۳^m$، و $n = ۰, ۱, \ldots, ۳^m$ دارد. مطابق تعریف قبلی، یك چندضلعی با رئوس $t_{m,n}$ به‌ازای m ثابت و $n = ۰, ۱, \ldots, ۳^m - ۱$ را یك چندضلعی تقریبی مرتبهٔ m ام برای خم شوئنبرگ، یا به‌طور ساده، یك چندضلعی مرتبهٔ mام شوئنبرگ، می‌نامیم. رسم چندضلعیهای مرتبهٔ اول و دوم شوئنبرگ کار ساده‌ای است و رسم چندضلعیهای مرتبهٔ سوم و چهارم ازعهدهٔ فردی که به‌حدکافی با حوصله باشد، برمی‌آید (شکلهای ۵ و ۶ را ببینید). رسم چندضلعی مرتبهٔ پنجم با ۲۴۳ رأس با لقوه وبدون وجود الگوی راهنما، قدرت تحمل و مهارتی درحد یك ریاضیدان

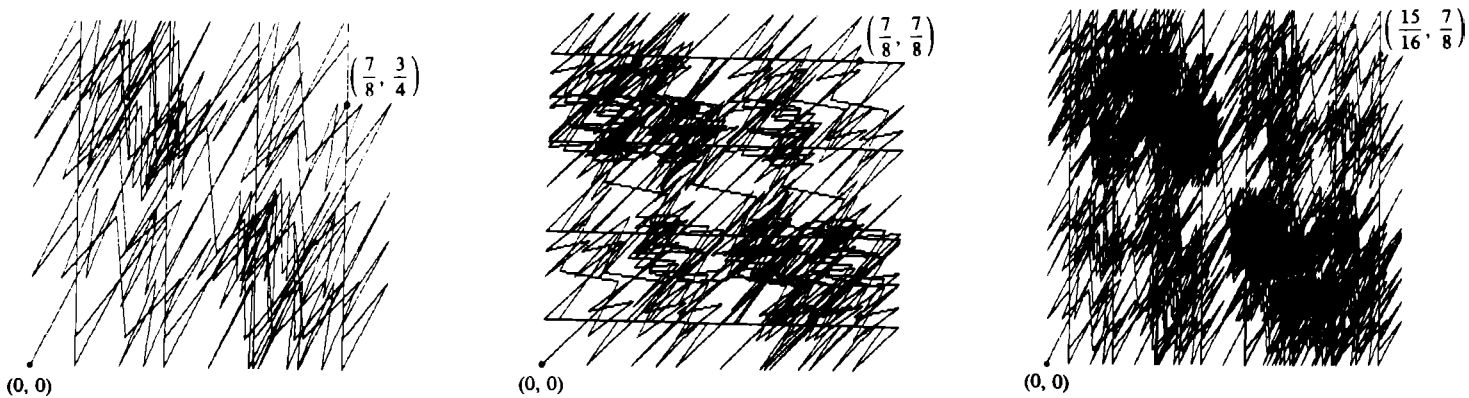


شکل ۵. چندضلعیهای شوئنبرگ مرتبهٔ ۱ و ۳.



شکل ۶. چندضلعیهای شوئنبرگ مرتبهٔ ۲ و ۴.

```
 5 REM This program produces the graph of the approximating polygon of m-th
       order for Schoenberg's Peano-Curve. The origin is placed at the left
       margin, 199 pixels down, at (0,198).
10 CLS:PRINT"m = ";:INPUT M:SCREEN 2:PSET (0,198):N=1
15 REM The generating function p is defined in lines 20 - 50 by making use of
       the unit-step function u(t,a) = sgn(sgn(t-a)+1).
20 DEF FNA(T)=(3*T-1)*(SGN(SGN(3*T-1)+1)-SGN(SGN(3*T-2)+1))
30 DEF FNB(T)=SGN(SGN(3*T-2)+1)-SGN(SGN(3*T-4)+1)
40 DEF FNC(T)=(5-3*T)*(SGN(SGN(3*T-4)+1)-SGN(SGN(3*T-5)+1))
50 DEF FND(T)=FNA(T)+FNB(T)+FNC(T)
60 X=0:Y=0:T=N/(3^M):L=1
65 REM In lines 70 and 90, we reduce t modulo 2 by t = t - 2*int(t/2).
       Potential vertices occur for t = n/(3^m) for n = 0,1,2,...,3^m-1.
       x,y are evaluated for each potential vertex in lines 70 - 100.
70 X=X+FND(T)/(2^L):T=3*T:T=T-2*INT(T/2)
80 Y=Y+FND(T)/(2^L):L=L+1:IF L>INT((M+1)/2) THEN 100
90 T=3*T:T=T-2*INT(T/2):GOTO 70
100 X=X+(N-2*INT(N/2))/(2^(L-1)):Y=Y+(N-2*INT(N/2))/(2^(L-1))
105 REM Each vertex is joined to its predecessor by a straight line in 110.
110 LINE -(480*X,198-198*Y),1
120 N=N+1:IF N>3^M-1 THEN 140
130 GOTO 60
140 IF INKEY$="" THEN 140
150 END
```



شکل ۷. چندضلعیهای مرتبهٔ ۵، ۶، و ۷ شوئنبرگ و برنامهٔ کامپیوتری رسم آنها.

قرن هفدهم را طلب می‌کند و حتی تصور بعد از این دهشتناك است.

برای به‌دست‌آوردن چندضلعیهای شوئنبرگ مرتبه‌های بالاتر، برنامه‌ای‌ساده به‌زبان بیسیك برای‌ماشینهای‌آی‌بی‌ام که علی‌الاصول توانایی تولید اشکال چندضلعیهای شوئنبرگ از هر مرتبه را دارد، نوشته شده است. اگر توجه‌کنیم که

$$p\left(\frac{۳^j n}{۳^m}\right) = p(n) = n - ۲[n/۲] \qquad \forall\, j \geqslant m$$

که داریم

$$f(t_{m,n}) = \sum_{k=۱}^{[(m+۱)/۲]} p\left(\frac{۳^{۲k-۲} n}{۳^m}\right) \quad ۲^k + \frac{n - ۲[n/۲]}{۲^{[(m+۱)/۲]}}$$

$$g(t_{m,n}) = \sum_{k=۱}^{[(m+۱)/۲]} p\left(\frac{۳^{۲k-۱} n}{۳^m}\right) \quad ۲^k + \frac{n - ۲[n/۲]}{۲^{[(m+۱)/۲]}}$$

می‌توانیم از مجموعهای نامتناهی در محاسبهٔ مختصات رئوس بپرهیزیم. برنامهٔ کامپیوتری و چندضلیهای مرتبهٔ ۵، ۶، و ۷ شوئنبرگ درشکل ۷ آمده‌اند.

بگذارید یافتن‌روشی برای‌ساختن چندضلعیهای‌شوئنبرگ به‌عنوان مسئله‌ای تفکرانگیز برای‌هندسه‌دانان باقی‌بماند. اگرخواننده بخواهد برنامهٔ‌کامپیوتری اخیررا اجرا کند به‌او توصیه‌می‌کنم ابتدا آن‌را به‌وسیلهٔ‌ترجمه‌گر بیسیك‌ترجمه‌کند، تا باکامپیوتر شخصی آی‌بی‌ام بتواند از زمان اجرای برنامه به‌میزان زیادی بکاهد. ازآنجاکه خمهای شوئنبرگ و لبگ روی مجموعهٔ کانتور بریکدیگر منطبق هستند، برنامهٔ اخیرمی‌تواند چندضلعی لبگ را هم، اگر T درخط ۶۰ برنامه به‌اعضای مناسبی از مجموعهٔ کانتور محدود شود، تولیدکند. با دقت مضاعف می‌توان یك تصویر مناسب ازچندضلعی مرتبهٔ ۱۳ لبگ به‌دست داد.

نکتهٔ آخر. اگر همین مفهوم از چندضلعی تقریبی را درمورد خم هیلبرت هم قبول کنیم، چندضلعیهایی‌متفاوت با آنچه درشکل ۱ به‌دست آمدند، حاصل‌می‌شوند. ولی درحالی که زیرمربعها کوچك می‌شوند، نقاط وسط آنها و تصاویرنقاط آغازی زیرفاصله‌ها به‌یکدیگر نزدیکتر می‌شوند و در حد، یکی به‌دیگری میل می‌کند.

مراجع

۱. آپوستل، ت. آنالیز ریاضی، ترجمهٔ علی‌اکبرعالم‌زاده، دانشگاه صنعتی‌شریف، ۱۳۵۹، ۳۲۲.

2. Devinatz A., *Advanced Calculus*, Holt, Rinehart, Winston, New-York, 1968, p. 253.

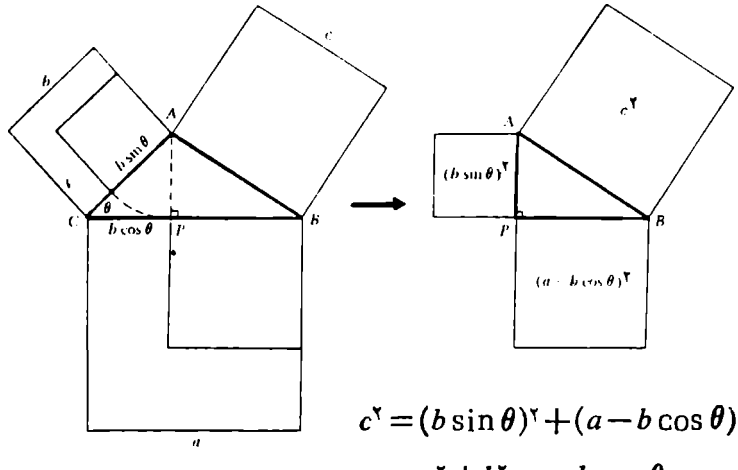
3. Hilbert D., "Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flaechenstueck," *Math. Ann.*, 38(1891)459-460.

4. Knopp K,, "Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und von Koch," *Arch. Math. Phys.*, 26(1917) 103-115.

5. Lebesgue H., *Lecons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives*, Cauthier, Villars, Paris, 1904, pp. 44-45.
6. Lee Eui In, "Recursive Curves," *PC Tech J.*, 3(April 1985) 171-174.
7. Netto E., "Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre," *Crelle J.*, 86 (1879) 263.
8. Peano G., "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane," *Math. Ann.*, 36(1890)157-160.
9. Schoenberg I. J., "The Peano-Curve of Lebesgue," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44(1938)519.
10. Wunderlich W., "Ueber Peano-Kurven," *Elem. Math.*, 28 (1973) 1-10.

بدون شرح

قانون کسینوسها برای $\theta < \pi/2$



$$c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

ریچارد فرانسیس

از هیچ تا بینهایت: مسائل مبارزطلب در رده‌بندی اعداد اصلی•

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآباد نو

در مورد بسیاری از مجموعه‌های آشنای ریاضی تعیین این موضوع کـه متناهی هستند یا نامتناهی، با مشکلی‌روبرو نمی‌شود. اما بررسی دقیق نشان می‌دهدکه هرگاه سؤال "متناهی یا نامتناهی" در موارد واقعاً دشوار و بحث‌انگیزی مطرح شده است، نتیجه شدیداً به‌نفع نامتناهی‌یا مجموعهٔ تهی‌بوده‌است. ظاهراً، نتیجهٔ "تعدادی اما نه تعدادی نامتناهی" به‌ندرت به‌دست می‌آید. اگر مجموعه‌ای ناتهی متناهی باشد، آیا می‌توان نتیجه‌گیری کرد که این متناهی بودن از بعضی چیزهای ذاتی در تعریف مجموعه و روابط عددی حاصله ناشی شده است؟ هنگامی‌که نوع عدد اصلی مجموعه‌ای مشخص نیست، غالباً معلوم می‌شودکه حدس وگمانها منبعی‌برای راهنمایی وجهت‌یابی هستند وبارها مبنایی برای اثباتهای دقیق فراهم کرده‌اند.

با درنظرداشتن این مطالب، اجازه دهیدکه به‌طورخلاصه بعضی از مسائل حل‌نشده در زمینهٔ عدد اصلی[1] مجموعه‌ها را که ریاضیدانان امروزی با آنها روبرو هستند، به‌طور مختصر بررسی‌کنیم. در شروع بحث از خواننده دعوت می‌کنیم‌که احتمال نامتناهی‌بودن یا تهی‌بودن (مجموعه‌ها) در هریك از مسائل زیرین را، که درحال حاضر نامعلوم است، بررسی کند.

$U_1 = \{$اعداد تام زوج$\}$

$U_2 = \{$اعداد تام فرد$\}$

$U_3 = \{$اعداد اول فرما (اعداد اولی به‌شکل 2^n+1)$\}$

• Francis Richard L., "From none to infinity: challenging problems in cardinality classification," *The College Mathematics Journal*, 17(1986)226-230.

1. cardinality

$U_۴ = \{$اعداد اول دوقلو$\}$

$U_۵ = \left\{\begin{matrix}\text{سه‌تایی‌هایی‌ازتوان } n\text{ام } (n > ۲)\\ \text{که یکی مجموع دوتای دیگر است}\end{matrix}\right\}$

$U_۶ = \left\{\begin{matrix}\text{اعداد اول متشکل ازیك (اعداد اولی که تمامی}\\ \text{ارقام‌نمایش‌معمولی دهدهی آنها عدد یك است)}\end{matrix}\right\}$

$U_۷ = \{$چندضلعیهای منتظم قابل‌رسم که تعداد فردی ضلع دارند$\}$

$U_۸ = \{x^۲ + ۱$ به‌شکل اعداد اولی$\}$

$U_۹ = \{n! + ۱$ به‌شکل اعداد اولی$\}$

$U_{۱۰} = \left\{\begin{matrix}\text{زوجهای اعداد متحابه (زوجهای اعداد صحیح مثبت و متمایزی}\\ \text{که مجموع مقسوم‌علیه‌های سرهٔ هریك مساوی عـدد دیگر باشد)}\end{matrix}\right\}$

هر یك از مجموعه‌های بالا تاریخچه‌ای دارد که در آن، مسئلهٔ "تعدادی" یا "تعدادی نامتناهی" به‌صورت آزاردهنده‌ای رخ نموده است. مسائل بالا فقط بخش کوچکی از کل عرصهٔ مسائل مبارزطلب در زمینهٔ عدد اصلی را تشکیل می‌دهند. گهگاه، با پیداشدن عناصر بیشتر و بیشتری در مجموعه‌های گوناگون، نور ضعیفی تابیدن می‌گیرد و پیشرفتی نمودار می‌شود، (البته) با توجه به‌استثنائات قابل‌ملاحظهٔ $U_۲$ و $U_۵$ (که تاکنون عددی (در آنها) پیدا نشده‌است)، و $U_۳$ (که اعداد اول دیگری از زمان رنسانس تاکنون در آن پیدا نشده است).

اعداد تام زوج[1]. یادآوری می‌کنیم کـه یك عدد صحیح مثبت را تام نامند هر گاه مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های سره‌اش باشد. مثلاً، ۶ (‌$= ۱ + ۲ + ۳$) تام‌است. دو عدد تام بعدی ۲۸ و ۴۹۶ هستند. عملاً، جستجوی اعداد تام زوج، جستجویی‌است برای یافتن اعداد اول مرسن[2] (اعداد اولی به‌شکل $۲^n - ۱$)، چون اویلر ثابت‌کرد که همهٔ اعداد تام زوج به شکل $(۲^n - ۱)۲^{n-۱}$ هستند، که عامل فرد (در عبارت فوق) عددی اول است. اقلیدس ثابت‌کرده بودکه هر عدد به‌این شکل، نتیجتاً تام است. از ۱۹۵۰ (تقریباً آغاز عصر کامپیوتر) پیشرفت مؤثری در پیداکردن اعداد اول مرسن دیگر، صورت گرفته است. بزرگترین عـدد اول مرسن شناخته شده $۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱$، نمایش معمولی دهدهی‌اش دارای ۶۵۰۵۰ رقم است. از آنجایی کـه تاکنون اثباتی برای تعیین عدد اصلی مجموعهٔ اعداد اول مرسن ارائه نشده است، مسألهٔ امکان وجود بزرگترین عدد تام زوج نیز همچنان حل نشده باقی‌مانده‌است.

جستجوی‌اعداداول مرسن، رویهمرفته‌کاری همچون جستجوی "سوزن درتودهٔ علف" نیست در حالتی که $۲^n - ۱$ عددی اول باشد، شرطهای گوناگونی برای نما شناخته شده

---

1. even perfect number 2. Mersenne

است. یك شرط لازم این است که خود n عددی اول باشد. اما همان طور که با ملاحظهٔ $(۸۹)(۲۳) = ۲۰۴۷ = ۲^{۱۱} - ۱$ یا $(۱۷۸۴۸۱)(۴۷) = ۸۳۸۸۶۰۷ = ۲^{۲۳} - ۱$ مشاهده می‌شود، این شرط کافی نیست.

نتیجهٔ اویلر، یعنی اینکه همهٔ اعداد تام زوج به‌شکل $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ اندکه در آن عامل فرد عددی اول است، به‌روشنی نشان می‌دهدکه هیچ عدد تام زوجی‌مربع کامل نیست؛ زیرا اگرچنین باشد، عامل اول فرد باید به‌تعداد زوجی ازدفعات ظاهرشود؛ واین‌بایکتایی تجزیهٔ $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ به‌عوامل اول، که از توصیف اقلیدس ـ اویلر از چنین اعداد تامی برمی‌آید، متناقض‌است.

هرعدد اول فرد به‌شکل $(۴r+۱)$ یا $(۴r+۳)$ است. اگرنما در عدد اول مرسن $۲^n - ۱$ به شکل $n = (۴r+۱)$ باشد، عدد تام زوج متناظر $۲^{۴r}(۲^{۴r+۱} - ۱)$ به ۶ ختم خواهد شد. (به‌بیان دقیق، $(۲^۴)^r = ۲^{۴r}$ همواره به ۶ ختم می‌شود، بنابراین $۲^{۴r+۱}$ به ۲ ختم‌می‌شود، و $۲^{۴r+۱} - ۱$ به ۱ختم می‌گردد.) همین‌طور، عدد تام زوج $۲^{۴r+۲}(۲^{۴r+۳} - ۱)$ متناظر با نمای $n = (۴r+۳)$، بـه ۸ ختم می‌شود. بنابراین، نمایش دهدهی همهٔ اعداد زوج دارای ارقام انتهایی ۶ یا ۸ است. تاکنون فقط ۳۰ عدد تام زوج شناخته شده‌است.

اعداد تام فرد. جستجو برای اعداد تام فرد بسیار گیج‌کننده شده‌است. اویلر ثابت کردکه اگر عدد فردی تام باشد، باید به‌شکل $(s)(p^{۴m+۱})$ باشد، کـه p عدد اول فردی است و s مربع کامل‌است. همان‌طورکه با توجه به‌عدد غیرتام $۳^۵(۱) = ۲۴۳$ دیده می‌شود، این‌شرط لازم، کافی نیست. درواقع، اگر عدد تام فردی پیدا شود، تعداد بیشتری از خواص اینگونه اعداد معلوم خواهد شد. یکی از نتایج نمونه‌وار اخیر، این نتیجه است [۷] که هرعدد تام فردکه مضرب ۳ نباشد، باید، شامل حداقل یازده مقسوم‌علیه اول متمایز باشد. با این حال، تا امروز، عدد تام فردی شناخته نشده است، و اگر چنین عددی یافت شود، می‌باید از $۱۰^{۲۰۰}$ بزرگتر باشد ([۱۵] را ببینید).

جستجوی اعداد تام فرد، تا جایی‌که از خواص تثبیت شدهٔ مبتنی برنظریهٔ اعداد نیز بهره می‌گیرد (مانند محك مقسوم‌علیه متمایز دربالا)، جستجویی کاملاً تصادفی و اتفاقی نیست. جالب است‌که قلهٔ رفیع پیشرفت امروز را با این نتیجهٔ قبل ازعصر کامپیوتر کـه به‌وسیلهٔ برنهارت درماهنامهٔ آمریکایی ریاضیات شمارهٔ نوامبر ۱۹۴۹ (صفحهٔ ۶۲۸) گزارش شده، مقایسه کنیم.

> در ۱۹۰۸، ا. تورکانیف[1] ثابت کردکه هیچ عدد فردی کوچکتر از دومیلیون، نمی‌تواند عددی تام باشد. این عدد عموماً به‌عنوان مینیموم درکتابهای درسی متداول‌پذیرفته می‌شود. اما، به‌وسیلهٔ اثباتهای شناخته شده به‌سادگی نشان داده می‌شودکه کوچکترین عدد تام فرد ممکن، بزرگتراز ده بیلیون است.

چه پیشرفتی! جهشی از $۱۰^{۱۰}$ به $۱۰^{۲۰۰}$ درچند دهه. با این‌حال، به‌دست آمدن اثباتی از

---

1. A. Turcaniov

تهی بودن یا نامتناهی بودن مجموعهٔ این اعداد، حتی از این هم جالبتر خواهد بود.

اعداد اول فرما. مجموعهٔ {اعداد اولی به‌شکل $۲^{۲^n}+۱$} $=U_۴$ بسیار مبارزطلب‌تر ازاعداد مرسن به‌نظر می‌رسد. امروزه تنها پنج عدد اول فرما شناخته شده‌است: ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷. توجه کنید که اگر $۲^{۲^n}+۱$ اول باشد، n لزوماً توانی از ۲ است. درغیر این‌صورت، $n=۲^k m$ (m فرد) و $(۲^{۲^k})^m+۱=(۲^{۲^n})+۱$، که $۲^{۲^k}+۱$ یك عامل آن‌است. به‌عنوان مثال

$$۲^۶+۱=(۲^۲+۱)(۴^۲-۲^۲+۱)=(۲^۲+۱)^۳+۱=(۲^{۲^۲})+۱=(۵)(۱۳)$$

این‌شرط "توانی از ۲" کافی نیست، همان‌طور که $۲^{۲^۵}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. اعداد فرما که عموماً به‌صورت $۲^{۲^r}+۱$ هستند، اغلب با $F(r)$ برحسب توان r نشان داده می‌شوند. بنابراین: $F(۰)=۳$، $F(۱)=۵$، و $F(۲)=۱۷$ و غیره. (جالب اینکه، همهٔ اعداد فرما بعد از ۵ دارای رقم انتهایی ۷ هستند. چون در فرمول مولد، $۲^{۲^r}$ توانی از ۱۶ است و بنابراین به ۶ ختم می‌شود.) از آنجا کـه اعداد فرما به‌سرعت بسیار بزرگ می‌شوند، آزمایش اول بودن آنها اغلب مسائلی‌جدی پیش می‌آورد. عدد $F(۳۶)$ که ظاهراً چندان بزرگ نیست، در نمایش دهدهی خود شامل بیش از سه بیلیون رقم‌است؛ حتی گوگول[1] (عدد $۱۰^{۱۰۰}$) در مقایسه با این عدد کوچك است. معلوم شده است که اعداد فرمای $F(۵)$ تا $F(۱۶)$، و همچنین حالات منفرد دیگری چون $F(۳۶)$، $F(۷۳)$، و نیز $F(۱۹۴۵)$ که به‌طور باورنکردنی بزرگ است، مرکب هستند. تا به‌حال، اثباتی از اینکه مجموعهٔ اعداد اول فرما نامتناهی‌است یا نه، داده نشده‌است. معلوم شده‌است که هرعدد فرما یا اول‌است یا شبه اول[2] (عدد مرکب n شبه اول است هرگاه $۲^n-۲$ را عاد کند). اعداد اول وشبه اول، هردسته، تشکیل مجموعه‌ای نامتناهی می‌دهند.

اعداد اول دوقلو . اگرچه مثالهای متعددی ازاعداد اول دوقلو (زوجهایی‌ازاعداد اول که تفاوتشان دو است) موجوداست، این‌سؤال که آیا مجموعهٔ $U_۴$ نامتناهی‌است یا نه، هنوز بی‌پاسخ مانده است. تاکنون، بعضی از زوجهای فوق‌العاده بزرگ یافته شده‌اند (مانند ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۹,۶۴۹ و ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۹,۶۵۱). شاید شگفت‌انگیز باشد که مجموعهٔ متناظراعداد اول منفرد (آن اعداد اولی که به‌زوجهای دوقلوی اول تعلق ندارند) نامتناهی‌است. این‌مطلب از قضیهٔ دیریکله[3] (اینکه $an+b$ وقتی که a و b نسبت به‌هم اول باشند، بینهایت عدد اول تولید می‌کند) نتیجه می‌شود. توجه کنید که $۸n+۱۵$، بینهایت عدد اول تولید می‌کند (۲۳، ۵۳، ۸۳، و غیره.)، گرچه $(۶n+۱۵)$ و $(۱۰n+۱۵)$ هردو قابل تجزیه هستند.

سه‌تاییهای فرما. نوع‌عدد اصلی‌مجموعهٔ $U_۵=\{x,y,z : x^n+y^n=z^n (n>۲)\}$ هنوز نامعلوم مانده‌است. اگرچه فرما مدعی بودکه برهانی برعدم وجود چنین سه‌تاییهایی دارد، بسیاری از ریاضیدانان امروز به‌اعتبار "اثباتش" کاملاً مشکوك هستند. بعضی معتقدند که "برهان به‌راستی خارق‌العاده"ای که فرما مدعی‌آن بود، تعمیمی اثبات نشده از توان

---

1. googol 2. Pseudoprime 3. Dirichlet

چهارم به‌توان nام با روش "نزول نامتناهی" بوده‌است.

درجستجوی سه‌تاییهای فرما، کافی‌است مقادیر اول نما را بررسی کنیم. اگراین‌حکم برای توان سوم ممتنع باشد، برای توانهای n که $n = 3r$ نیز ممتنع است. احکام مشابهی برای توانهای mام و nام، که m یك مقسوم‌علیه n است، نتیجه می‌شود. اگرچه اویلرامتناع گزاره را برای توان سوم نشان داد (و فرما برای توان چهارم، لژاندر برای توان پنجم، لامه[1] برای توان هفتم)، مسئلهٔ عدد اصلی مجموعه در حالت‌کلی حل نشده است. امروزه، معلوم شده است‌که برای هیچیك از توانهای اول‌کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰ سه‌تاییهای فرما موجود نیستند. علاوه براین، فالتینگز اخیراً ثابت‌کرده‌است‌که اگر x و y نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه $x^n + y^n = z^n$ برای هر $n > 2$ حداکثر تعداد متناهی جواب دارد.

اویلر، با آزمودن عباراتی چون $۶۳ = ۵^۳ + ۴^۳ + ۳^۳$ حدس زده بودکه‌کمتر از n توان nام نمی‌توانند مجموعی‌داشته باشندکه توان nام باشد. اگر این حدس درست باشد، به‌ازای $n > ۲$، مجموع دقیقاً دوتوان nام نمی‌تواند یك توان nام باشد، و بنابراین‌قضیهٔ فرما ثابت می‌شود. در ۱۹۶۸، با کشف چهار توان پنجم که مجموعشان توان پنجم بود: $۱۴۴^۵ = ۱۳۳^۵ + ۱۱۰^۵ + ۸۴^۵ + ۲۷^۵$، نادرستی حدس اویلر ثابت شد. پس ازسه‌قرن تلاش‌جامعهٔ ریاضی، نوع عدد اصلی‌مجموعهٔ $U_۵$ همچنان نامعلوم مانده‌است. علاوه براین، مثال خاصی از چنین سه‌تاییهایی پیدا نشده‌است.

اعداد اول متشکل ازیك. تنها چهار عضو از مجموعهٔ

$U_۶ =$ {اعداد اولی‌که تمامی ارقام نمایش دهدهی‌آنها عدد یك است}

شناخته شده است. عموماً برای مشخص کردن تعداد ۱ها در نمایش اعداد متشکل از یك، از اندیس استفاده می‌شود. آشکارا $R_۲ = ۱۱$ اول است و $R_۴ = ۱۱۱۱$ مرکب است. یافتن مثالهایی بزرگتر از اعداد اول متشکل از یك بسیار مشکل است. تنها اعداد اول شناخته‌شدهٔ دیگر ازاین قبیل $R_{۱۹}$، $R_{۲۳}$، و $R_{۳۱۷}$هستند. اگربنویسیم $R_n = (۱۰^n - ۹)/۹$، واضح است‌که R_n مرکب‌است اگر n مرکب‌باشد (البته نه به‌عکس). به‌وضوح $R_۶$ بر $R_۲$ و همچنین $R_۳$ بخش‌پذیر است. اساساً اگر m مقسوم‌علیهی از n باشد، R_m مقسوم‌علیهی از R_n خواهد بود.

مجموعهٔ اعداد اول متشکل ازیك، زیرمجموعهٔ سره‌ای از مجموعهٔ اعداد اول مقلوب مستوی[2] (اعداد اولی‌که ازچپ به‌راست و از راست به‌چپ به‌یك شکل خوانده می‌شوند، مثل ۱۳۸۳۱ یا ۹۹۸۹۸۹۹) است. شاید اظهاراین مطلب تعجب‌انگیز نباشدکه عدد اصلی مجموعهٔ اعداد اول مقلوب مستوی نیز معلوم نیست در چه رده‌ای قراردارد.

چندضلعیهای منتظم قابل‌رسم. عدد اصلی مجموعهٔ

$U_۸ =$ {چندضلعیهای منتظم قابل رسم‌که تعداد فردی ضلع دارند}

در رابطهٔ بسیار نزدیك با مجموعهٔ اعداد اول فرماست. معلوم شده است که یك چندضلعی

1. Lame 2. palindromic primes

منتظم با داشتن تعداد فرد p ضلع قابل رسم است اگر و تنها اگر p یك عـدد اول فرما باشد یا حاصلضرب اعداد اول فرمای متمایز باشد. از آنجایی که تنها پنج عدد اول فرما شناخته شده است، تعداد چند ضلعیهای منتظم قابل رسم شناخته شده که تعداد فردی ضلع دارند $۲^۵ - ۱$ یا ۳۱ است (یعنی، ${}_۵C_۵ + {}_۵C_۴ + {}_۵C_۳ + {}_۵C_۲ + {}_۵C_۱$). اینکه تعیین نوع عدد اصلی مجموعهٔ $U_۷$ مسئلهٔ نابسامان و آشفته‌ای‌است، ممکن است شگفت‌انگیز باشد زیرا مجموعهٔ متناظر برای تعداد اضلاع زوج به‌وضوح نامتناهی‌است.

مجموعه‌های $U_۸$ و $U_۹$. اعضای بسیار بزرگی از هر یك از مجموعه‌های

$$U_۸ = \{\text{اعداد اولی به‌شکل } x^۲ + ۱\} \text{ و } U_۹ = \{\text{اعداد اولی به‌شکل } n! + ۱\}$$

شناخته شده‌اند، با این‌حال، هنوز نوع عدد اصلی این مجموعه‌ها شناخته نشده‌است. اگرچه معلوم شده است که مجموعهٔ اعداد اول تولید شده به‌وسیلهٔ $y^۲ + x^۲$ نامتناهی است، هنوز هیچ چیز دربارهٔ زیرمجموعهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $x^۲ + ۱$ مشخص نشده‌است.

برای تحلیل اعداد اول مجموعهٔ $U_۹$، مفید است که از قضیهٔ ویلسون یاری بطلبیم: $n(>۱)$ اول است اگروتنها اگر $(n-۱)! + ۱$ بر n بخش‌پذیر باشد. بنابراین، اگر $n > ۲$ و $(n+۱)$ هم عددی اول باشد، $n! + ۱$ نمی‌تواند اول باشد. نتیجتاً، بینهایت عدد مرکب به‌شکل $n! + ۱$ وجود دارند. (به‌عنوان مثال، $۱۰۰! + ۱$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است.) همچنین این حقیقت جالب است که $n! + k \; (۱ < k \leqslant n)$ لزوماً مرکب است، گرچه (بنا به‌قضیهٔ برتران[1]) باید حداقل یك عدد اول بین $n!$ و $(n+۱)!$، وقتی $n > ۱$، وجود داشته باشد.

اعداد متحابه[2]. کوچکترین زوج در مجموعـهٔ

$$U_{۱۰} = \{\text{زوجهای اعداد صحیح مثبتی که مجموع مقسوم‌علیه‌های سرهٔ هر یك مساوی عدد دیگر باشد}\}$$

۲۲۰ و ۲۸۴ است؛ یك زوج بزرگتر ۶۹۶۱۵، ۸۷۶۳۳ می‌باشد. بسیاری از خواصی که حدس زده می‌شود زوجهای متحابه داشته باشند، با نوشتن فهرست مختصری از این اعداد دیده می‌شوند. (بـه عنوان مثال، همهٔ زوجهای متحابه زوجیت یکسان دارند؛ یعنی هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد)، اما مسألهٔ مزاحم، مثل موارد قبل، این است کـه "چه تعداد زوج متحابه موجود است؟" اینکه آیا این مجموعه نامتناهی است یا نه، بی‌پاسخ مانده‌است.

قابل توجه است که عدد اصلی مجموعه‌ها گاهی اوقات به‌وضوح یکی از دو حالت فرین "هیچ" یا "تعدادی نامتناهی" می‌باشد، اما مشکل این‌است که کدام‌یك ازاین دوحالت برقراراست. بسیاری ازوقایع برجستهٔ تاریخ ریاضی‌این‌مطلب را نشان می‌دهند. یادآوری می‌کنیم که یك عدد متعالی است، هرگاه ریشه‌ای از معادلهٔ جبری

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + a_۲x^{n-۲} + \ldots + a_n = ۰$$

با ضرایب صحیح نباشد. در طی بیشتر قرن هجدهم، جهان ریاضی دربارهٔ امکان [وجود] چنین اعدادی کنجکاو بود ولی هیچ عددی از این نوع پیدا نشد. تنها بـا کار لیوویل در

---

1. Bertrand's 2. amicable numbers

۱۸۵۱ بود که نخستین عدد متعالی T کشف شد ($T = .۱۱۰۰۰۱۰۰۰۰\ldots$) تشکیل‌شده از ۱ در مکانهای به‌شمارهٔ ردیف فاکتوریلی مثل اولین، دومین، ششمین، ۲۴ امین، ۱۲۰ امین و غیره، و صفر در مکانهای دیگر.) نکتهٔ بسیار جالب توجه این است که، مضارب صحیح T (غیر از صفر) اعداد متعالی دیگری تولید می‌کنند. بنابراین، موضوع اعداد متعالی‌از موقعیت حدسی "هیچ عدد متعالی" به‌موقعیت واقعی "بینهایت عدد متعالی" انجامید. این پدیدهٔ "باز شدن سد" در جستجوی جاری برای سه‌تاییهای فرما نیز صادق است. اگر $a^n+b^n=c^n$، آنگاه برای هرعدد صحیح k داریم: $(ka)^n+(kb)^n=(kc)^n$. بنابراین، اگرچه یك چنین سه‌تایی یافته نشده‌است، حتی پیداشدن یك روزنه [سد را خواهد شکست] و بینهایت سه‌تایی از این نوع به‌دست خواهد آمد.

تعیین اینکه یك مجموعه متناهی‌است، به‌تنهایی‌عدد اصلی‌مجموعه را معلوم نمی‌سازد. دادن پاسخ دقیق به‌مسألهٔ عدد اصلی حقیقی یك مجموعه ممکن است ماورای توانایی ریاضیدانان باشد. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ {اعداد اولی با دقیقاً یك تریلیون رقم} $= J$ متناهی است، اما یافتن عدد اصلی J به‌نظر امر محالی می‌رسد. ظاهراً برای پاسخگویی به‌بعضی از سؤالاتی که در ارتباط با عدد اصلی پیش می‌آیند، استراتژیی وجود ندارد؛ ابزارهایی از نظریهٔ کلاسیك اعداد یا روشهایی از آنالیز مرسوم [که درمورد آنها به‌کار آید] موجود نیست. به‌عنوان مثال، سؤال ظاهراً سادهٔ "چه تعداد دو درنمایش‌اعشاری یك عدد وجود دارد؟" را در نظر گیرید. ملاحظه می‌شودکه پاسخ به‌چنین سؤالی یا بدیهی یا دور از دسترس‌است. راه میانه‌ای موجود نیست. بدیهی‌است که در بسط ۱/۳ دو موجود نیست، و در بسط ۷/۱۳ درست یکی موجود است. تعیین‌این‌موضوع برای اعدادی چون π یا e، یا حتی $\sqrt{۲}$، مسئلهٔ گیج‌کننده‌ای است. بنابراین، مبارزه ادامه می‌یابد، و هر نسلی از ریاضیدانان با پرسشهای جدیدی دربارهٔ اعداد اصلی روبرو می‌شوند.

نتیجه. شگفت‌آور است که در تاریخ ریاضیات، واقعاً همهٔ مسائل عمدهٔ مبارزطلب (دربارهٔ) اعداد اصلی، وقتی سرانجام حل‌شده‌اند، جوابشان مجموعه‌ای تهی‌یا مجموعه‌ای بینهایت عضوی بوده است. وقتی که، در ابتدای قرن بیستم، دیوید هیلبرت بیست و سه مسألهٔ مبارزطلبش را به جهان ریاضی عرضه‌کرد، محتملاً گمان می‌کردکه بعضی از این مسائل درمقابل تلاش‌برای حلشان یکصدسال مقاومت می‌کنند. خوشبختانه بیشتراین‌مسائل امروز حل شده‌اند. با همین روند ریاضیدانان قرن بیست و یکم در سالهای پیش رو که عصر کامپیوتر خواهد بود، در جستجویشان برای اعداد تام فرد، اعداد اول فرمای دیگر، یا تعیین عدد اصلی مجموعه‌هایی‌که امروز عدد اصلی آنها نامعلوم‌است، چه‌کارهایی‌انجام خواهند داد؟ آیا نتیجهٔ ظاهراً نادر "تعدادی اما نه‌تعدادی نامتناهی" ظهوری خواهد داشت؟ یا الگوی قاطع "هیچ یا بینهایت" به‌حکمروایی‌ادامه خواهد داد؟ همچنان‌که مسائل‌حل‌شده، مسائل‌حل‌نشدهٔ جدیدی پدید می‌آورند، مجموعهٔ تلاشها نیز به‌نظر می‌رسد، که درست شبیه مجموعهٔ اعداد اول، عضو آخر ندارد.

مراجع

1. Bernhard H. A., "On the least possible odd perfect number," *Amer. Math. Monthly*, 56(1949)628-629.
2. Burton D. M., *Elementary Number Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1976.
3. Cantor Georg, *The Theory of Transfinite Numbers*, The Open Court Publishing Co., LaSalle, 1941.
4. Francis R.L., "Initial primes," *Two-Year College Mathematics Reading*; Warren Page, Ed., The Mathematical Association of America, 1981, pp. 78-79.
5. Francis R. L, "Isolated primes," *Journal of Recreational Mathematics*, 11(1978)17-21.
6. Gardner M., "The hierarchy of infinities and the problems it spawns," *Reading from Scientific American*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1978.
7. Hagis P., Jr. "Sketch of a proof that odd perfect number relativity prime to 3 has at least eleven factors," *Mathematics of Computations*, 46(1983)399-404.
8. Hildebrand W. J., "Generalized pythagorean triples," *The College Mathematics Journal*, 16(1985)48-52.
9. Leavitt W. G., "Mersenns primes and the Lucas-Lehmer test," *Two-Year College Mathematics Reading*, Warren Page, Ed., The Mathematical Association of America, 1981, pp. 80-86.
10. Rosen K. H., *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1984.

مایکل بارنسلی و آلن اسلون

روشی بهتر برای فشرده‌سازی تصاویر•

ترجمهٔ سروش مؤمن‌پور

چکیده: به‌کمک یك روش جدید ریاضی می‌توان تصاویر را به‌نسبت یك‌ده‌هزارم (وحتی بیشتر) فشرده ساخته و در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره نمود.

جهان طبیعی دارای پیچیدگیهای فراوانی است. به‌عنوان مثال ترکیبات و نقوش هندسی موجود بر پشت دست خود (منافذ، خطوط ظریف و تغییرات رنگ پوست) را در نظر بگیرید. با یك دوربین‌می‌توان این جزئیات را ثبت‌کرد و آنگاه شما می‌توانید با فراغت خاطر عکس پشت دست خود را بررسی‌کنید و چیزهایی را ببینیدکه قبلا هرگز به آنها توجه نداشته‌اید. حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که آیا از یك‌کامپیوتر شخصی نیز می‌توان برای ذخیره‌سازی و تجزیه و تحلیل تصاویر استفاده کرد؟ اگر چنین باشد، قطعاً فشرده‌سازی تصاویر مهمترین نقش را در فراهم ساختن این امکان به عهده خواهد داشت.

علت این‌مسئله واضح‌است، چراکه‌تصاویر رقمی یعنی تصاویری‌که برای پردازش کامپیوتری به‌زنجیره‌ای از بیتهاتبدیل شده‌اند به‌حجم زیادی ازحافظهٔ‌کامپیوتر نیاز دارند. به‌عنوان مثال یك عکس‌دقیق هوایی‌سیاه‌وسفید (سایه‌روشن) در اندازهٔ ۳٫۵ فوت مربع‌را می‌توان باتفکیك‌پذیری ۳۰۰×۳۰۰ نقطه در هر اینچ مربع وبا در نظر گرفتن‌هشت بیت برای ذخیرهٔ هر نقطه،رقمی کرد. انجام این امر به ۱۳۰ مگابایت حافظهٔ‌کامپیوتر،که‌بسیار بیشتر از میزان قابل‌پردازش در کامپیوترهای شخصی‌کنونی است، نیازمند است.

به‌وسیلهٔ روشهای موجود، تصاویر واقعی مثل عکسهای هوایی را تنها می‌توان به نسبتهای ۲ به ۱ تا ۱۰ به ۱ فشرده ساخت. حتی با چنین روشهایی عکس‌مذکور حافظه‌ای بین ۱۳ تا ۶۵ مگابایت اشغال می‌کند.

در این مقاله ایده‌های اساسی یك روش جدید فشرده سازی را شرح می‌دهیم. در

• Barnsley M. F., Sloan A. D., "A bettr way to compress images," *Byte*(January 1988)215 - 223.

این روش بـا استفاده از فرکتالها[1] امکان فشرده‌سازی بـه نسبت بیش از ۱۰۰۰۰ به ۱ وجود دارد. این‌میزان فشرده‌سازی موجب تقلیل‌حافظهٔ لازم برای ذخیرهٔ عکس موردبحث به میزان قابل قبول ۱۳۰۰۰ بایت می‌گردد. شکلهای ۱ تـا ۵ پس از اعمال این روش تنها حافظه‌ای بین ۱۰۰ تا ۲۰۰۰ بایت را اشغال کرده‌اند.

یك گروه‌تحقیقات‌ریاضی در انستیتوتکنولوژی جورجیاکه بودجهٔ‌آن توسط مؤسسهٔ پروژه‌های تحقیقاتی پیشرفتهٔ دفاعی و شرکت GTRC[2] تأمین شده این روش را طراحی کرده است. هرچند ما به‌ناچار توصیف ساده‌شده‌ای از این روش ارائه می‌دهیم ولی این توصیف به شما نشان خواهد داد که روش فشرده‌سازی مبتنی بر فرکتالها چگونه است و چگونه می‌توان از آن برای تولید تصاویری جالب استفاده‌کرد.

توصیف اجسام طبیعی

تصاویر درگرافیك‌کامپیوتری سنتی از اشکال سادهٔ هندسی مثل نقاط، خطوط، چهارگوشها، دوایر و غیره تشکیل می‌شوند. سیستمهای پیشرفته‌تر برای این منظور از عناصر سه‌بعدی مثل کره و مکعب استفاده می‌کنند و از رنگ و سایه نیز بهره می‌جویند.

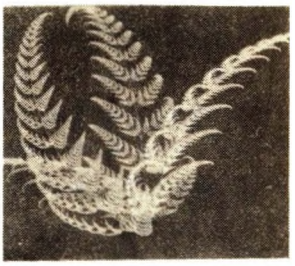
سیستمهای گرافیکی مبتنی بر هندسهٔ سنتی در ایجاد تصاویر اشیای ساختهٔ بشر مثل آجرها، چرخها، خیابانها، ساختمانها و چرخ‌دنده‌ها توانا هستند. اما این‌سیستمها در ایجاد تصاویری مثل غروب آفتاب، درخت، توده‌ای از گل و لای و یا تصویر پیچیدهٔ سرخسها اصلاً کارایی‌ندارند. تصورکنیدکه بخواهید ازیك سیستم گرافیکی استاندارد برای ایجاد تصویر رقمی یك ابر استفاده‌کنید. در این‌صورت مجبورید مکان و رنگ هر نقطه از ابر را به کامپیوتـر بدهید و این دقیقاً همان شکل رقمی اما غیر فشردهٔ یك تصویر است، که دنباله‌ای طولانی از مکانها و خصوصیات نقاط را شامل می‌شود.

برای برطرف‌کردن این مشکل به‌مجموعهٔ غنیتری از اشکال هندسی نیازمندیم. این اشکال باید انعطاف‌پذیر و قابل‌کنترل باشند تا بتوان آنها را با تصاویری چون ابرها، خزه‌ها، پر و بال پرندگان، برگها، صورتها، گلهای آفتابگردان مواج و گرگهای براق قطب شمال تطبیق داد. هندسهٔ‌فرکتالی دقیقاً چنین مجموعه‌ای از اشکال رافراهم می‌سازد. برای درك بهتر می‌توان از تصاویرکتاب هندسهٔ فرکتالی طبیعت کمك گرفت. این کتاب نوشتهٔ بنیت مندلبرا[3] است‌که اولین بار واژهٔ فرکتال را برای توصیف اشیایی که بسیار "شکسته" هستندبه‌کار برد. چند تصویر سادهٔ فرکتالی در این مقاله دیده می‌شوند.

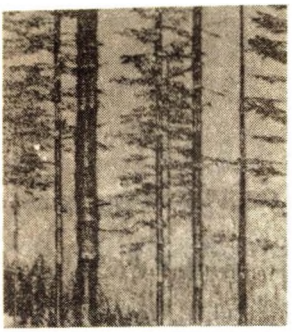
استفاده از فرکتالها در شبیه‌سازی مناظر و آثار طبیعی کار تازه‌ای نیست بلکه از کاربردهای اولیهٔ آنها بوده است. به‌عنوان مثال به‌تجربه می‌توان دریافت‌که یك فرکتال خاص الگویی شبیه به پوست درخت تولید می‌کند، بعداً هنگامی‌که می‌خواهیم تصویری

---

1. fractals 2. Georgia Tech Research Corporation (GTRC)
3. Benoit Mandelbrot



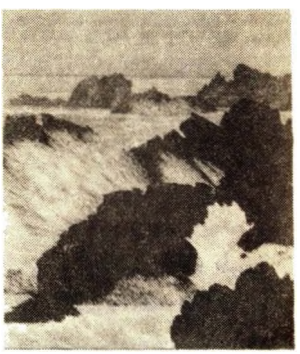
شکل ۱. تصویری از سرخسهای سه‌بعدی که با استفاده از IFS رمز شده‌است (۴ تبدیل، ۱۰۰ بایت).



شکل ۲. عکس رنگی از "جنگل سیاه" که با استفاده از IFS رمز شده است؛ مجموعهٔ رنگها متناسب باهوای زمستان انتخاب شده است (۱۲۰ تبدیل، ۲۰۰۰ بایت).



شکل ۳. عکسی از یك دختر بولیویایی که با استفاده از IFS رمز شده است (۱۲۰ تبدیل، ۲۰۰۰ بایت).



شکل ۴. عکسی از ساحل مانتری که با استفاده از IFS رمز شده‌است (۶۰ تبدیل، ۱۰۰۰ بایت).



شکل ۵. تصویری‌از "مطالعهٔ یك‌ابر"که با استفاده از IFS رمز شده است (۳۰ تبدیل، ۵۰۰ بایت)

از درخت ایجادکنیم می‌توان از این فرکتال استفاده‌کرد.

آنچه‌که تازگی‌دارد توانایی‌شروع ازیك تصویر واقعی و یافتن فرکتالهایی‌است‌که می‌توانند با هر میزان دقت دلخواه آن تصویر را تولید کنند. از آنجاکه روش‌ما شامل ارائهٔ این‌فرکتالها به‌طریقی فشرده‌است، لذا دستاوردمان مجموعهٔ‌اطلاعات بسیارفشرده‌ای خواهد بودکه از آن برای بازسازی تصویر اولیه استفاده می‌شود:

مروری برفشرده‌سازی فرکتالی

ما با یك تصویر رقمی‌شروع می‌کنیم و با استفاده از روشهای تصویرپردازی مثل "تفکیك رنگ"، "تشخیص لبه"، "تجزیهٔ‌طیف‌نور" و "تجزیهٔ تغییرات بافت"، تصویر را به‌تعدادی جزء می‌شکنیم (روشهای مشابهی‌نیز وجود داردکه‌اساس‌کار رنگ‌آمیزی خودکارفیلمهای سیاه وسفید سینمارا تشکیل می‌دهند). یك‌جزء ممکن است یك سرخس یا یك‌برگ، یك‌ابر ویا یك نرده باشد. همچنین یك‌جزء ممکن است مجموعهٔ پیچیده‌تری ازسلولهای تصویری مثل منظرهٔ دورنمای دریا شامل قطرات معلق آب درهوا، صخره و مه باشد.

مرحلهٔ‌بعد، جستجو به‌دنبال این اجزا درکتابخانه‌ای از فرکتالهاست. این‌کتابخانه محتوی فرکتالهای واقعی‌نیست چراکه در این‌صورت به‌فضای فوق‌العاده‌زیادی از حافظه نیازمندیم، بلکه شامل مجموعه‌های نسبتاً فشرده‌ای از اعداد است‌که‌کدهای سیستم توابع تکراری (IFS)[1] نامیده می‌شوند و هرکدام فرکتال مربوط به خود را تولید می‌کند. علاوه بر این، سیستم طبقه‌بندی‌کتابخانه چنان است‌که تصاویر مشابه نزدیك یکدیگر قرار می‌گیرند یعنی‌کدهای نزدیك به‌هم با فرکتالهای مشابه متناظرند. این باعث می‌شود جهت یافتن فرکتالهایی که به‌طور تقریبی یك تصویر معین را تولید می‌کنند بتوان رویه‌های خودکاری[2] برای‌جستجوی‌کتابخانه‌ایجادکرد. یك قضیهٔ ریاضی‌تحت عنوان "قضیهٔ‌اختلاط[3]" (بعداً بیشتر درمورد آن خواهیم گفت) تضمین می‌کند که ما همواره می‌توانیم کد IFS مناسبی بیابیم و برای انجام آن روشی نیز ارائه می‌دهد.

پس‌از آنکه به‌دنبال همهٔ اجزای تصویر درکتابخانهٔ خودگشتیم وکد IFS آنها را یافتیم، می‌توانیم تصویر اولیهٔ رقمی را کنار گذاشته و کدهای حاصل را نگهداری کنیم و از امکان فشرده‌سازی به میزان ۱۰۰۰۰ به ۱ یا حتی بیشتر برخوردار شویم.

سیستم توابع تکراری

حال با توضیح این امر که چگونه مجموعه‌ای از کدهای IFS می‌تواند تصویری طبیعی را تقریب بزند، شروع می‌کنیم.

نظریهٔ IFS تعمیمی از هندسهٔ‌کلاسیك است. این‌نظریه برای نشان‌دادن ارتباط میان

---

1. iterated function system (IFS)
2. automated procedures
3. collage

اجزای یك تصویر از تبدیلات مستوی، که در زیر توضیح داده‌می‌شود، استفاده می‌کند و با استفاده ازهمین ارتباطات، تصاویر پیچیده را تعریف کرده ومنتقل‌می‌سازد. با استفاده از این نظریه می‌توان با همان وضوحی که یك معمار خانه‌ای را توصیف می‌کند، تکه‌ای ابر را توصیف کرد.

با مطالعهٔ بخشهای بعدی این‌مقاله قادر خواهید بودکه اجزای تصاویر سیاه وسفیدی چون برگ یك درخت، سایه‌های درختان و مارپیچها و توده‌های ابر را به رمز در آورده و رمزگشایی‌نمایید، ضمناً ایده‌ای از یك سیستم کاملاً خودکار فشرده‌سازی‌فرکتالی به‌دست خواهید آورد.

تبدیلات مستوی را می‌توان ترکیبی از دوران، مقیاس‌گذاری و انتقال محورهای مختصات در فضای n بعدی دانست

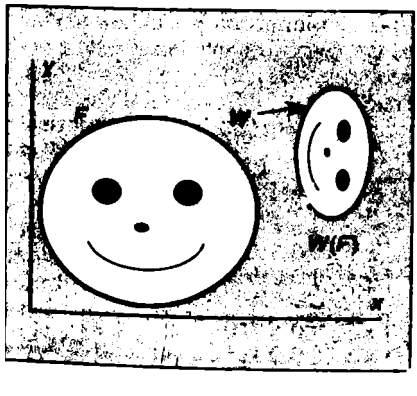
$$W(x,\ y)=\left(\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}y+۱,\ \ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}y+۲\right)$$

مثالی در فضای دوبعدی است‌که می‌توان آن را به‌صورت ماتریسی نیز نمایش داد

$$W\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰٫۵ & ۰٫۲۵\\ ۰٫۲۵ & ۰٫۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$$

ایـن تبدیل نقاط (۰٫۵ ,۱ —) و (۰ ,۰) را به ترتیب به نقاط (۲ ,۰٫۶۲۵) و (۱,۲) انتقال می‌دهد. برای درك بهتر عمل تبدیل، به عنوان تمرین، حاصل تبدیل نقطهٔ (۱,۱) را بررسی‌کنید. ما این تبدیل را W نام می‌گذاریم، عنوان $W(S)$ معرف زیر تصویر W بر روی مجموعه‌ای از نقاط به نام S است.

حال ببینیم تبدیل W چه اثری برتصویری از یك چهرهٔ خندان به‌نام Fکه برروی صفحهٔ xyقراردارد، می‌گذارد (شکل۶). حاصل،تصویر جدیدفشرده‌ای به‌نام $W(F)$است. تبدیل مستوی فوق‌تصویر را تغییرشکل و انتقال داده‌است. توجه‌کنیدکه چشمها در تصویر تبدیل‌یافته یعنی $W(F)$ نسبت به تصویر اولیهٔ F به‌هم نزدیکترند. تبدیل W منقبض‌کننده



شکل ۶. تبدیـل مستوی W، چهرهٔ خندان F را به چهرهٔ جدید $W(F)$ بدل می‌سازد. تبدیل فوق منقبض‌کننده تلقی می‌شود، چرا که نقاط را به‌هم نزدیکتر می‌کند.

است، یعنی همواره نقاط را به‌هم نزدیکتر می‌کند.

نمونه‌ای دیگر از یک تبدیل مستوی منقبض کننده را در شکل ۷ ملاحظه می‌کنید. این‌بار تبدیل مزبور یك برگ را به‌برگ جدید کوچکتری تغییر شکل داده است.

صورت کلی یك تبدیل مستوی عبارت است از

$$W\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by+e\\cx+dy+f\end{bmatrix}$$

که در آن ضرایب a, b, c, d, e, f اعدادی حقیقی هستند.

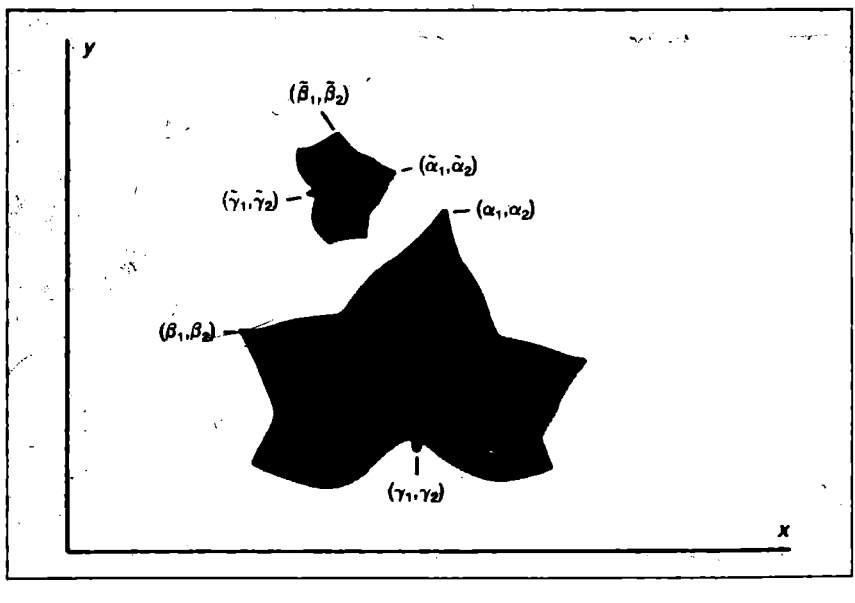
اگر پیشاپیش از انتقالها، دورانها ومقیاس‌گذاریهایی‌که W با ترکیب‌آنها ساخته می‌شود آگاه باشیم، می‌توانیم ضرایب مزبور را به طریق زیر به‌دست آوریم

$$a=r\cos\theta\,,\quad b=-s\sin\phi$$

$$c=r\sin\theta\,,\quad d=s\cos\phi$$

در اینجا r, s به‌ترتیب ضرایب‌مقیاس‌گذاری روی x, y، θ, ϕ به‌ترتیب زوایای دوران x, y و e, f به ترتیب میزان انتقال x, y هستند.

چگونه می‌توان یك تبدیل مستوی یافت‌که‌اثری دلخواه داشته‌باشد؟ برای این‌منظور تبدیل مستوی به‌کار رفته در تبدیل‌برگ بزرگ شکل ۷ به‌برگ‌کوچکتر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در حقیقت می‌خواهیم ضرایب a, b, c, d, e, f را چنان بیابیم که تبدیل



شکل ۷. دو برگ پاپیتال تبدیل W را مشخص می‌کنند.

W دارای خاصیت: برگ کوچک $\approx$ (برگ بزرگ) W باشد. ابتدا محورهای x و y را همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود مشخص می‌کنیم. سه نقطه از برگ را در نظر می‌گیریم (نوک آن، لبهٔ کناری و محل اتصال ساقه به‌آن را در نظر گرفته‌ایم) و مختصات آنها یعنی (α_1, α_2)، (β_1, β_2) و (γ_1, γ_2) را تعیین‌می‌کنیم. نقاط متناظر با این سه‌نقطه را در برگ کوچک مشخص کرده و مختصات آنها یعنی به‌ترتیب $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$، $(\tilde{\beta}_1, \beta_2)$ و (γ_1, γ_2) را تعیین می‌نماییم.

مقادیر ضرایب a, b, c را با حل سه معادلهٔ خطی:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + e = \tilde{\alpha}_1 \qquad (1)$$

$$\beta_1 a + \beta_2 b + e = \tilde{\beta}_1 \qquad (2)$$

$$\gamma_1 a + \gamma_2 b + e = \tilde{\gamma}_1 \qquad (3)$$

و مقادیر c, d, f را به طریقی مشابه با استفاده از معادلات

$$\alpha_1 c + \alpha_2 d + f = \tilde{\alpha}_2 \qquad (4)$$

$$\beta_1 c + \beta_2 d + f = \tilde{\beta}_2 \qquad (5)$$

$$\gamma_1 c + \gamma_2 d + f = \tilde{\gamma}_2 \qquad (6)$$

به دست می‌آوریم. برای یافتن ضرایب توصیه می‌شود که از یک "معادله حل‌کن" مثل TK Solver Plus (یونیورسال تکنیکال سیستمز، راکفرد، ایلی‌نویز) یا EUREKA (برلنداینترنشنال، اسکاتس والی، کالیفرنیا) استفاده گردد، چراکه‌انجام دستی این‌محاسبات می‌تواند خسته‌کننده باشد.

حال که دیدیم یک تبدیل مستوی منقبض‌کننده چیست و چگونه می‌تواند تصویری را به صورت دلخواه تغییرشکل دهد، می‌توانیم سیستم توابع‌تکراری‌را توضیح‌دهیم. یک IFS مجموعه‌ای‌از تبدیلات مستوی منقبض‌کننده‌است. در زیر IFS برای سه‌نمونه تبدیل را ملاحظه می‌کنید:

$$W_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۰ \\ ۰٫۰ & ۰٫۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$W_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۰ \\ ۰٫۰ & ۰٫۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$W_3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۰ \\ ۰٫۰ & ۰٫۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰٫۲۵ \\ ۰٫۰ \end{bmatrix}$$

هر تبدیل باید دارای یک احتمال، P_i، که معرف اهمیت آن نسبت به‌سایر تبدیلات است،

باشد. در این مثال می‌توانیم P_1، P_2، و P_3 را در نظر بگیریم. توجه کنید که جمع این احتمالات باید ۱ باشد، یعنی $P_1+P_2+P_3=1$.

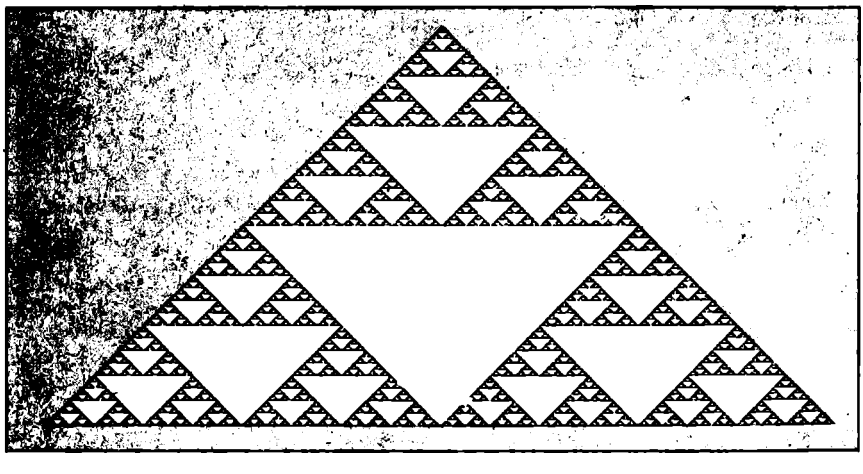
مسلماً نمایش یك IFS به‌صورت بالاخسته‌کننده است. جدول ۱ همین اطلاعات را نشان می‌دهد. نمونه‌های دیگری از کدهای IFS را می‌توان در جدولهای ۲ تا ۴ مشاهده کرد. توجه داشته باشید که یك IFS می‌تواند هر تعداد تبدیل مستوی را شامل شود.

الگوریتم تکرار تصادفی

حال ببینیم چگونه می‌توان هر کد دلخواه IFS را بـا استفاده از روش تکرار تصادفی رمزگشایی نمود. به‌یاد داشته باشید که در حالت کلی یك IFS می‌تواند تعداد دلخواهی، مثلاً m، تبدیل مستوی مثل $W_1, W_2, \ldots, W_m$ که هرکدام دارای یك احتمال باشد را شامل شود. جملات زیر روش مزبور را خلاصه می‌کند:

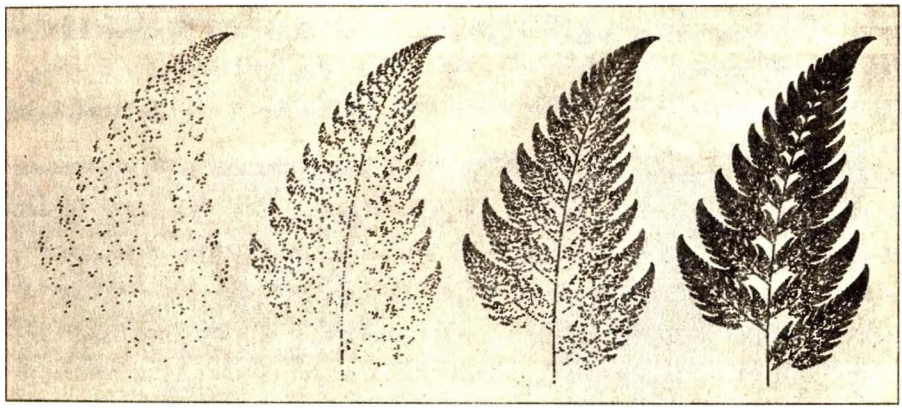
۱. مقدار اولیه دادن: $x=0, y=0$.
۲. برای $n=1$ تا ۲۵۰۰ مراحل ۳ تا ۷ را تکرار کن.
۳. عدد k را با احتمال P_k بین ۱ تا m انتخاب کن.
۴. تبدیل W_k را بر روی نقطهٔ (x, y) انجام داده و نقطهٔ (x, y) را به‌دست بیاور.
۵. مقادیر x, y را برابر مقادیر متناظر درنقطهٔ به‌دست آمده قرار بده: $x=\tilde{x}$ و $y=\tilde{y}$.
۶. اگر $n>10$، نقطهٔ (x, y) را ترسیم کن.
۷. تکرار (انتهای حلقه).

با اعمال این برنامه بر روی تبدیلات جدول ۱، شکل ۸ که تصویر فرکتالی به نام



شکل ۸. نتیجهٔ اعمال الگوریتم تکرار تصادفی بر روی رمزهای IFS جدول ۱. این تصویر مثلث سرپینسکی نامیده می‌شود.

مثلث سرپینسکی است، به دست می‌آید. افزایش دفعات تکرار (یعنی n) بر تعداد نقاط تصویر می‌افزاید. شکل ۹ نتیجهٔ حاصل از اعمال الگوریتم تکرار تصادفی را بر روی داده‌های موجود در جدول ۳ در مراحل مختلف آن نشان می‌دهد. با افزایش ضریب مقیاس‌گذاری به‌کار رفته در ترسیم می‌توان تصویر را بزرگتر کرد (شکل ۱۰). در لیست A نمونه‌ای از پیاده‌سازی این الگوریتم به زبان بیسیك همراه با توضیحات بیشتر مشاهده می‌شود. ممکن است از اینکه ۱۰ نقطهٔ اولیه رسم نمی‌شوند تعجب کرده باشید (مرحلهٔ ۶ الگوریتم بالا). هدف از این‌کار سپری شدن زمان لازم برای رسیدن نقاط به حالت پایدار و بی‌لرزش است، درست مثل وقتی‌که یك توپ فوتبال در زمینی‌که تعدادی بازیکن ماهر



شکل ۹. هنگامی‌که الگوریتم تکرار تصادفی بر روی رمزهای IFS جدول ۳ اعمال شود یك سرخس ظاهر می‌شود.



شکل ۱۰. زومهای متوالی بر روی قطعاتی از یك سرخس‌که با استفاده از IFS رمز شده‌است.

در آن‌هستند رها شود، تا زمانی که یکی از بازیکنان کنترل توپ را به‌دست نگیرد، حرکت آن غیر قابل پیش‌بینی است و یا حداقل مستقل از عملکرد بازیکنان است، ولی بالاخره یکی از آنها توپ را به دست می‌آورد و از آن هنگام حرکت توپ به مهارت بازیکنان بستگی مستقیم خواهد داشت. این واقعیت که تبدیلات ما همگی منقبض‌کننده‌اند تضمین می‌کند که "توپ" بالاخره به دست یکی از "بازیکنان" می‌افتد و پس از آن تحت کنترل باقی خواهد ماند.

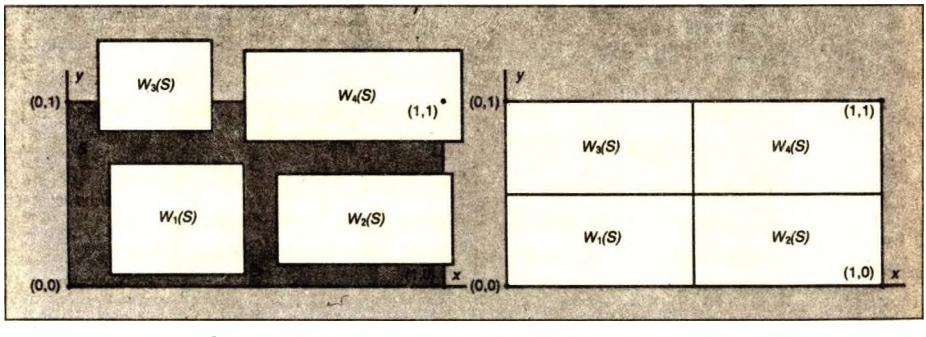
چگونه می‌توان اطمینان داشت که الگوریتم تکرار تصادفی در هر بار اجرا، مستقل از رشتهٔ اعداد تصادفی انتخاب شده، تصویری یکسان تولید کند؟ این مسئلهٔ مهم نخستین‌بار در حین انجام آزمایشات ریاضی در زمینهٔ گرافیک کامپیوتری مطرح و متعاقباً توسط جان التون ریاضیدان شرکت جورجیاتک، مبنای ریاضی محکمی برای آن ارائه‌شد.

قضیهٔ اختلاط

هدف بعدی ما نشان‌دادن‌روشی اصولی‌برای یافتن‌تبدیلات مستوی‌است‌که‌امکان رمزنگاری IFS یك تصویر دلخواه را به‌دست دهد. این امر به‌کمك قضیهٔ اختلاط تحقق می‌یابد.

برای توضیح روش مزبور از تصویر یك مربع توپر (S) در صفحهٔ x, y که رئوسش عبارت‌انداز (۰,۱) و (۱,۱) و (۰,۰) و (۱,۰)، شروع‌می‌کنیم (شکل ۱۱). هدف ما انتخاب مجموعه‌ای از تبدیلات مستوی منقبض‌کننده است (در این حالت W_1، W_2، W_3، و W_4) به‌طوری که بتوان S را به بهترین وجه ممکن به وسیلهٔ اجتماع چهار زیرتصویر ایجاد شده توسط آنها (یعنی $(W_1(S) \cup W_2(S) \cup W_3(S) \cup W_4(S)$ تخمین زد. در سمت چپ شکل ۱۱، S به همراه چهار تبدیل مستوی غیر پوشای آن دیده می‌شود. در سمت راست تبدیلات مستوی چنان هماهنگ شده‌اندکه اجتماع آنها کل S را زیر پوشش قرار دهد.

ما برای یافتن‌ضرایب این‌تبدیلات، از همان روشی که درقسمت مربوط به‌سیستمهای

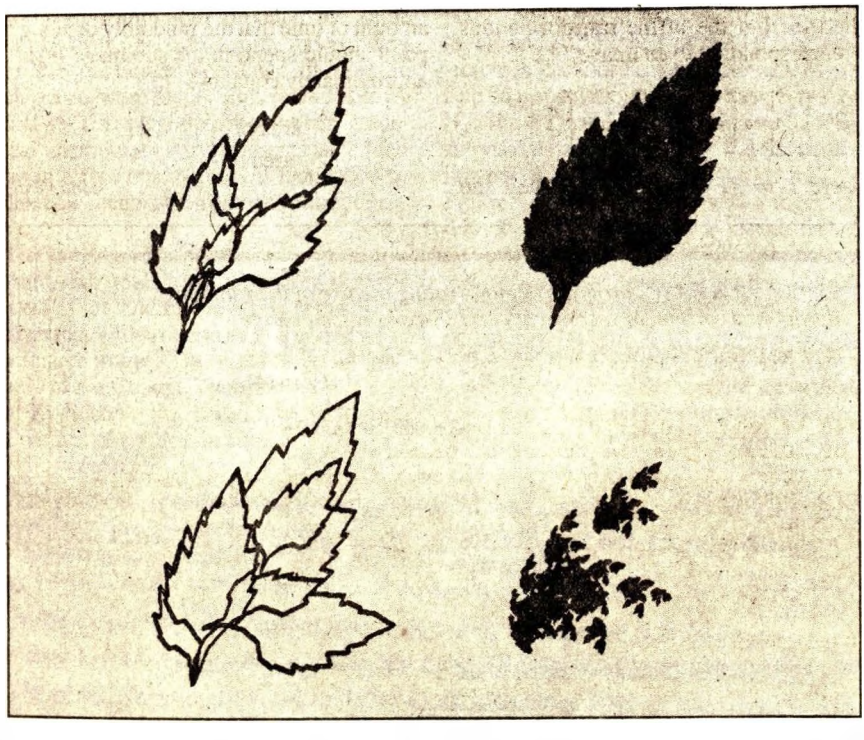


شکل ۱۱. قضیهٔ اختلاط برای رمزکردن مستطیل S به‌کار رفته است. هنگامی‌که چهار تبدیل مستوی از S سطح‌آن‌را همانطورکه در سمت راست نشان داده شده پوشانند، آنگاه رمز صحیح IFS به‌دست‌آمده‌است.

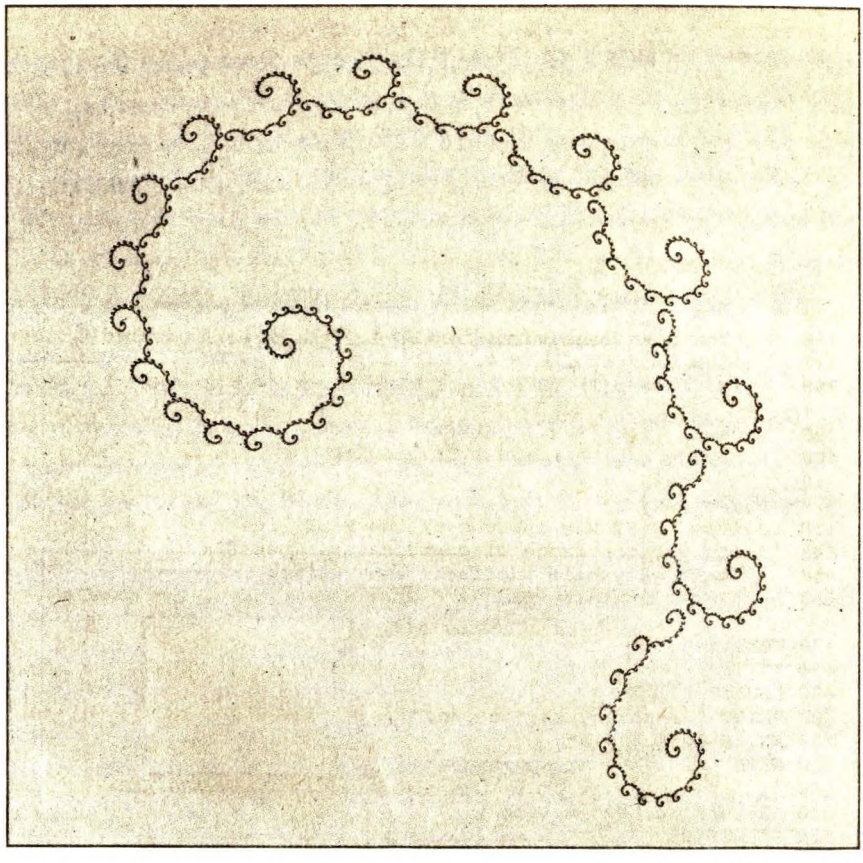
توابع تکراری بیان‌شد و به‌حل دو دستگاه شامل معادلات (۱ تا ۳) و (۴ تا ۶) منجر می‌شد، استفاده می‌کنیم. مقادیر یافته شده برای این مثال در جدول ۲ مندرج است. هنگامی که الگوریتم توابع تکراری بر روی این کد IFS اعمال شود، مربع دوباره تولید می‌شود.

مثال فوق راه‌حل عمومی این نوع مسائل را مشخص می‌کند: ما باید مجموعه‌ای از تبدیلات مستوی که فواصل را کوتاه‌کنند بیابیم به‌گونه‌ای که اجتماع این تبدیلات تصویر مورد نظر را تقریب بزند، قضیهٔ اختلاط نشان می‌دهد که هرچه تصویر به‌این طریق دقیقتر توصیف گردد، تبدیلات، کد IFS، دقیقتری از آن بدست می‌دهند.

شکل ۱۲ نمایشی دیگر از قضیهٔ اختلاط است. در قسمت پایین سمت چپ، حدود (کناره‌های) چند ضلعی شکل یك برگ دیده می‌شود. برگهای تغییرشکل یافته رویهمرفته نتوانسته‌اند تقریب خوبی از برگ را به وجود آورند و درنتیجه، تصویر IFS حاصل (پایین سمت راست) که به کمك الگوریتم تکرار تصادفی ایجاد شده، چندان شباهتی به برگ اصلی ندارد. اما اگر اختلاط به نحو دقیقتری ایجاد شود (بالا سمت چپ) تصویر



شکل ۱۲. قضیهٔ اختلاط برروی یك برگ اعمال شده است. اختلاط پایین سمت چپ، چندان خوب نیست و به همین خاطر تصویر IFS متناظر، در پایین سمت راست، تقریب ضعیفی ازشکل واقعی است. اما به موازات بهبود اختلاط؛ بالا سمت چپ، تصویر IFS آن نیز بهبود می‌یابد (بالا سمت راست).



شکل ۱۳. آیا می‌توانید رمزهای IFS این تصویر مارپیچی را بیابید؟ تنها دو تبدیل لازم است.

رمز شده (بالا سمت راست) دقیقتر خواهد بود.

بنابراین در اینجا یك پایداری اساسی وجود دارد. به‌این ترتیب که مجبور نیستیم برای ایجاد تصویری شبیه تصویر اصلی، کد IFS کاملاً درستی به‌دست آوریم. کدهای IFS پایدارهستند، یعنی آشفتگیهای کوچك در کدصدمات غیرقابل‌پیش‌بینی به‌تصویر وارد نمی‌کنند. در هریك از مثالهای بالا، ما برای رمزکردن تصویر از چهار تبدیل استفاده کرده‌ایم. ولی به‌طورکلی هرتعداد تصویر می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد.

برای مثال تصویر مارپیچی شکل ۱۳ را می‌توان تنها با دوتبدیل مستوی منقبض‌کننده رمزکرد. سعی کنید آنها را بیابید. آنگاه ضرایب تبدیلات IFS را تعیین‌کرده و آنها را ورودی الگوریتم تکرار تصادفی قرار دهید تا مارپیچ تولید شود.

تعیین احتمالات

هنگامی که تبدیلات لازم مشخص شدند، باید به هر یك از آنها یك احتمال نسبت داد.

رمزگشایی IFS
به وسیلهٔ بیسیك

لیست A پیاده‌سازی الگوریتم تکرار تصادفی به‌زبان بیسیك را نشان می‌دهد. این برنامه حاوی داده‌های مربوط به‌مثلث سرپینسکی است، اما ازآن می‌توان برای پردازش هر جدول IFS دیگر نیز استفاده کرد. به‌عنوان مثال می‌توان داده‌های موجود در جدولهای ۲، ۳، و ۴ را مورد آزمایش قرار داد. برای این‌کار باید در انتخاب درست متغیر m دقت کرد. این متغیر نشاندهندهٔ تعداد تبدیلات موجود در IFS است.

ضمناً مجموع عناصر بردار p باید یك باشد. بهتر است برای حصول سرعت بیشتر تبدیلات به‌ترتیب نزولی احتمالشان درنظر گرفته شوند. یعنی ابتدا تبدیلی که بیشترین احتمال‌را دارد، و درانتها تبدیلی که دارای کمترین احتمال است منظورشود.

برنامه دارای متغیرهایی برای مقیاس‌گذاری وانتقال مجدد مبدأ مختصات برای تطبیق نقاط رسم شده با ابعاد صفحهٔ نمایش است. اگر تصویر بیش از حد پهن است می‌بایست متغیر "xscale" را کاهش داد و اگر نقاط ازنظر افقی زیاد به‌هم نزدیك‌اند می‌بایست این متغیر افزایش یابد. به‌روشی مشابه می‌بایست متغیر yscale چنان تعیین شود که توزیع عمودی نقاط مطلوب باشد. برای حرکت دادن تصویر باید متغیرهای "xoffset" و "yoffset" را تغییر داد.

این‌تصحیحات را می‌توان باآزمایش و خطا انجام داد: برنامه را اجرا کنید، آن را متوقف سازید و ضرایب انتقال و مقیاس را تغییر دهید وسپس دوباره آن‌را اجرا نمایید.

لیست A: برنامه‌ای به‌زبان بیسیك‌که استفاده از الگوریتم تکرار تصادفی را دربازسازی شکلی که به‌کمك IFS، فشرده شده است، نشان می‌دهد.

```
10 'Allow for a maximum of 4 transformations in the IFS
20 DIM a(4), b(4), c(4), d(4), e(4), f(4), p(4)
30 '
40 'Transformation data, Sierpinski triangle
50 'First comes the number of transformations
60 'then the coefficients a through f and probability pk
70 'The values for pk should be in descending order.
80 DATA 3
90 DATA .5,0,0,.5,0,0,.34
100 DATA .5,0,0,.5,1,0,.33
110 DATA .5,0,0,.5,.5,.5,.33
120 '
130 'Read in the data
140 READ m
150 pt = 0  'Cumulative probability
160 FOR j = 1 TO m
170     READ a(j), b(j), c(j), d(j), e(j), f(j), pk
180     pt = pt + pk
190     p(j) = pt
200 NEXT j
210 '
220 'Set up for Graphics
230 SCREEN 3          'Select graphics screen
240 xscale = 350      'Map [0,1] onto [0,350]
250 yscale = 325      'Map [0,1] onto [0,325]
260 xoffset = 0
270 yoffset = 0       'Leave the y-origin
280 '
290 'Initialize x and y
300 x = 0
310 y = 0
320 '
330 'Do 2500 iterations
340 FOR n = 1 TO 2500
350     pk = RND
360     'The next line works for m<=4. It must be modified
370     'for values of m > 4.
380     IF pk <= p(1) THEN k = 1 ELSE IF pk <= p(2) THEN k = 2
                ELSE IF pk <= p(3) THEN k = 3 ELSE k = 4
390     newx = a(k) * x + b(k) * y + e(k)
400     newy = c(k) * x + d(k) * y + f(k)
410     x = newx
420     y = newy
430     'Use PRINT x,y instead of the PSET line
440     'to see the range of coordinates. Then fix
450     'xscale, yscale, xoffset, and yoffset
460     IF n > 10 THEN PSET (x * xscale + xoffset, y * yscale
                + yoffset)
470 NEXT n
480 '
490 LOCATE 24, 35
500 PRINT "Press any key to end.";
510 WHILE INKEY$ = ""
520 WEND
530 '
540 'Return to text screen
550 SCREEN 0
560 END
```

علاوه‌براین‌کار می‌توان دستورالعمل ترسیم "pset" را با دستورالعملی که‌مقادیرمتغیرهای x و y را چاپ می‌کند جایگزین نمود و سپس برنامه‌را اجراکرد تا تصور دقیقی از گسترهٔ‌نقاطی که ترسیم می‌شوند به‌دست آمده و درنتیجه بتوان مقیاسها وانتقالات را دقیقتر تعیین‌کرد.

راه حل دیگر آن است که برنامه را چنان تغییر داد که تمام داده‌ها یعنی m و $a( )$، $b( )$، $c( )$، $d( )$، $e( )$، $f( )$، $p( )$، xscale، xoffset، yscale و yoffset از فایلی که توسط استفاده‌کننده مشخص می‌شود خوانده شوند. همچنین می‌توان به‌جای خواندن ضرایب a، b، c، و d، ابتدا زوایای θ و ϕ و ضرایب مقیاس‌گذاری r و s را خوانده و آنگاه ضرایب بالا را محاسبه کرد.

الگوریتم تکرار تصادفی پر محاسبه است. از این‌رو توصیه می‌کنیم از کامپایلری چون مایکرو سافت‌کوئیك بیسیك (Microsoft's Quick BASIC)یا بورلند توربو بیسیك (Borland's Turbo BASIC) استفاده شود. اگرکامپیوتر دارای کمك‌پردازندهٔ عددی و محاسباتی با عملیات ممیز شناور باشد و کامپایلر آن را به‌کار گیرد، کارها بهتر پیش خواهد رفت.

جدول ۱. رمزهای IFS مثلث سرپینسکی

W	a	b	c	d	e	f	p
۱	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰	۰	۰٫۳۳
۲	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۱	۰	۰٫۳۳
۳	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۳۴

جدول ۲. رمزهای IFS یك مربع

W	a	b	c	d	e	f	p
۱	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰	۰	۰٫۲۵
۲	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰٫۵	۰	۰٫۲۵
۳	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰	۰٫۵	۰٫۲۵
۴	۰٫۵	۰	۰	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۲۵

جدول ۳. رمزهای IFS یك سرخس

W	a	b	c	d	e	f	p
۱	۰	۰	۰	۰٫۱۶	۰	۰	۰٫۰۱
۲	۰٫۲	—۰٫۲۶	۰٫۲۳	۰٫۲۲	۰	۱٫۶	۰٫۰۷
۳	—۰٫۱۵	۰٫۲۸	۰٫۲۶	۰٫۲۴	۰	۰٫۴۴	۰٫۰۷
۴	۰٫۸۵	۰٫۰۴	—۰٫۰۴	۰٫۸۵	۰	۱٫۶	۰٫۸۵

جدول ۴. رمزهای IFS برای یك درخت فرکتالی

W	a	b	c	d	e	f	p
۱	۰	۰	۰	۰٫۵	۰	۰	۰٫۰۵
۲	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰٫۲	۰٫۱۵
۳	۰٫۴۲	—۰٫۴۲	۰٫۴۲	۰٫۴۲	۰	۰٫۲	۰٫۴
۴	۰٫۴۲	۰٫۴۲	—۰٫۴۲	۰٫۴۲	۰	۰٫۲	۰٫۴

انتخابهای مختلف این احتمالات منجر بـه تولید تصاویر مختلف نمی‌گردد، بلکه تنها بر سرعت پرشدن نواحی گوناگون تصویر یـا خواص مختلفش تأثیر می‌گذارد. فرض کنید W_i تبدیلات مستوی مربوط به‌تصویر I باشد

$$W_i\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_i\\f_i\end{bmatrix}$$

که $i=1,2,\ldots,n$. دراین صورت مدت زمانی که نقطهٔ تصادفی لغزان باید در "زیر تصویر" W_i سپری کند تقریباً برابر با نسبت مساحت W_i به‌مساحت کل I است. بنابراین می‌توان ازحساب دیفرانسیل وانتگرال نتیجه گرفت تا زمانی که $ad-cd$ صفر نباشد این نسبت برابر دترمینان ماتریس تبدیل W_i است. پس

$$\frac{a_id_i-b_ic_i}{\sum_{k=1}^{n}|a_kd_k-b_kc_k|}$$

می‌تواند انتخاب مناسبی برای احتمال p_i باشد مشروط برآنکه هیچیک از p_iها صفر نشود. اگر یکی ازآنها صفر شد به‌جای آن بـاید مقدار مثبت خیلی کوچکی مثل ۰٫۰۰۱ قرار داد واحتمالات دیگر را چنان تصحیح کردکه مجموع کل احتمالات برابر ۱ شود.

اکنون می‌توان فرایند فشرده‌سازی و گسترده‌سازی تصاویر را خلاصه کرد: تصویر ورودی به کمك روشهای تصویرپردازی به اجزای آن تقسیم می‌شود. با استفاده از قضیهٔ اختلاط، درکتابخانهٔ IFSها به دنبال این اجزا می‌گردیم وکد IFS، آنها را ثبت می‌کنیم. هنگامی‌که بخواهیم تصویر را بازسازی کنیم کافی است این‌کدها را دراختیار الگوریتم تکرار تصادفی قرار دهیم. میزان دقت در این امر تنها بـه میزان دقت در مرحلهٔ اختلاط بستگی دارد.

کاربردها

برای کاربردهای گرافیکی از رویهٔ پیچیده‌تری‌که امکان رمزنگاری تصاویر رنگی را فراهم می‌سازد استفاده شده است. برای خودکارسازی مرحلهٔ اختلاط می‌توان از الگوریتمهای جستجوی‌ترکیبی بهره جست. شکلهای ۲، ۳، و ۴ با استفاده از نظریهٔ IFS با فشرده‌سازی به‌میزان ۱۰۰۰۰ به ۱ به‌دست آمده‌اند. این تصاویر اقتباس ازعکسهای مندرج دریکی از شماره‌های اخیر مجلهٔ *National Geographic* است. نقاشی متحرك‌کاملی به‌نام "مطالعهٔ یك ابر" درسیگراف ۸۷ (SIGGRAPH' 87) نمایش داده شد. تصاویر این فیلم بـا فشرده‌سازی بیش‌از ۱,۰۰۰,۰۰۰ به ۱ رمز شده‌اند ومی‌توانند باسرعت ویدیوئی ازطریق خطوط ISDN (Integrated Services Digital Network) ـ مقوله‌ای در زمینهٔ ارتباطات یکپارچهٔ صوت و تصویر) انتقال یابند. یك قاب ازاین نقاشی متحرك در شکل ۵ دیده می‌شود.

روش فشرده‌سازی IFS هم درمرحلهٔ رمزنگاری وهم درمرحلهٔ رمزگشایی پرمحاسبه است. کلیهٔ محاسبات مربوط به‌تصاویر رنگی برروی کامپیوترهای ماسکامپ ۵۶۰۰[1] (دارای دو پردازندهٔ ۶۸۰۲۰) وبا امکانات گرافیکی آرورا[2] انجام شده است. برای رمزنگاری تصاویر رنگی پیچیده برروی این سیستم به ۱۰۰ ساعت و برای رمزگشایی آنها به ۳۰ دقیقه زمان نیاز است.

برای کاربردهای واقعی به‌سخت افزارهای مخصوص که عمل رمزنگاری و رمزگشایی را با سرعت بالا انجام دهند نیاز است. یك نمونهٔ آزمایشی به نام IFSIS[3] قادر است چندین قالب را دریك‌ثانیه رمزگشایی‌کند. دستگاه IFSIS با همکاری مشترك CTRC و DARPA ساخته شده است و درپنجم اکتبر ۱۹۸۷ درسومین اجلاسیهٔ سالیانهٔ ریاضیات محاسباتی و کاربردی که توسط DARPA برگزار می‌شود به‌نمایش گذاشته شد. این دستگاه را می‌توان از طریق یك درگاه (port) سریال به‌کامپیوترهای شخصی متصل کرد. کامپیوترکدهای IFS را به این دستگاه ارسال کرده و دستگاه تصویر رنگی را برروی صفحهٔ نمایش ایجاد می‌کند.

دستگاه IFSIS نشانه‌ای ازامکان ساخت دستگاههای سریعتر با قدرت تفکیك‌پذیری بیشتر است. هنگامی که دستگاههای سریعتر IFSIS به ارتباطات ISDN مجهز شوند ارسال نقاشی متحرك رنگی با سرعتهای ویدیوئی برروی خطوط تلفن امکانپذیر خواهد بود.

تجزیه و تحلیل خودکار تصاویر کاربرد دیگری از روش رمزنگاری IFS است. تصویر چه چیز را نشان می‌دهد؟ یك ماروماهی خالدار یا یك سینه سرخ؟ هرچه تصاویر پیچیده‌تر یا به‌عبارت دیگر پرسش ظریف‌تر باشد نوشتن الگوریتم مربوط به‌آن دشوارتر خواهد بود. اما نکته‌ای‌که دراین میان وجود دارد این است که پاسخ هرچه باشد، اگر تصاویر پایدار بوده و فشرده نیز باشند، سرعت اجرا افزایش خواهد یافت، چرا که حل مسائل مربوط به‌تشخیص تصاویر نیازمند جستجوهای ترکیبی است و در چنین روشهایی، زمان جستجو متناسب با فاکتوریل اندازهٔ فایل تصویر افزایش می‌یابد.

دربهار ۱۹۸۷ شرکت ایتریتد سیستم[4] اقداماتی در زمینهٔ کاربردهای تجاری فشرده‌سازی IFS تصاویر انجام داد.

به‌هرحال بسیار جالب است که شاخهٔ مجردی از تحقیقات ریاضی به‌ایجاد تکنولوژی جدیدی منجر شده که دامنهٔ آثارش از تجارت و امور صنعتی تا محاسبات شخصی کشیده شده است.

---

1. Masscomp 5600
2. iterated function system-image synthesizer (IFSIS)
3. Aurora
4. iterated systems

علیرضا رنجبر مطلق*

حساب دیفرانسیل روی حلقه‌های مرتب

درحساب دیفرانسیل (یك‌متغیره) کلیهٔ ساختارهای R (ساختارهای جبری و توپولوژیکی) نقشی اساسی بازی می‌کنند. درآنجا ابتدا یك سلسله مفاهیم ومطالب اولیه مانند حد و پیوستگی، که مربوط به‌ویژگیهای‌توپولوژیکی R است، تعریف وسپس به‌معرفی دیفرانسیل اقدام می‌شود و به‌دنبال آن، با بیان خواص مقدماتی دیفرانسیل به‌موضوعات عمیقتر و در نهایت به‌اثبات قضایای میانگین و تیلر پرداخته می‌شود. با نگاهی نه‌چندان عمیق به‌اثبات این قضایا دیده می‌شودکه صرفنظر از تعاریف، در لابلای اثباتها نیز همچنان از مفاهیم توپولوژیکی برای اثبات قضایا کمك گرفته می‌شود. ظاهراً سرشت حساب دیفرانسیل (یك‌متغیره) علاوه برساختار جبری برتوپولوژی R نیز اتکا دارد و بدون آن معنا و مفهومی ندارد.

هدف این‌مقاله توصیف یك سلسله مفاهیم (جبری) است که می‌توانند جانشین مناسبی برای مفاهیم حدی مربوط به‌مشتق باشند.این عمل درابتدا توسط دکتر شفیعی روی حلقه‌ها[1] انجام گرفته است و پیاده‌کردن و اثبات قضایای اصلی حساب دیفرانسیل معمولی روی حلقه‌های مرتب به‌عنوان پروژه به‌اینجانب واگذار شد.

برای تعمیم تعریف دیفرانسیل‌پذیری روی حلقه‌ها ابتدا باید توابع دیفرانسیل‌پذیر[2] معمولی روی R را مورد بررسی قرار داد و خواص اصلی آنها را که صرفاً از طریق ساختار جبری R قابل بیان است به عنوان اصول درتعریف دیفرانسیل‌پذیری روی حلقه‌ها به‌کار برد. مجموعهٔ توابع دیفرانسیل‌پذیر معمولی روی R را با $C^\infty(R)$ نشان می‌دهیم. در $C^\infty(R)$ سه قانون جمع و ضرب و ضرب در اسکالر وجود دارد که به‌شکل نقطه‌ای و صرفاً به‌کمك ساختار جبری R تعریف می‌شوند. این قوانین به‌شکل زیرند

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (1)$$

---

* لیسانس ریاضی از دانشگاه تهران.

۱. دراین مقاله منظور ازحلقه، حلقهٔ جابجایی یکه‌دار بدون مقسوم‌علیه صفر است.

۲. دراین مقاله منظور ازتابع دیفرانسیل‌پذیر، تابعی است که بینهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر است.

$$(\lambda \cdot f)(x)=\lambda \cdot f(x) \qquad (۲)$$

$$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x) \qquad (۳)$$

در بالا $f, g \in C^{\infty}(R)$ و $\lambda \in R$. $C^{\infty}(R)$ با قانون جمع وضرب بالا یك حلقهٔ جابجایی یکه‌دار است و با قانون جمع و ضرب در اسکالر بالا یك فضای برداری حقیقی است. علاوه بر این قانون ضرب و ضرب در اسکالر آن در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\lambda \in R,\ f, g \in C^{\infty}(R), \quad \lambda(f \cdot g)=(\lambda f) \cdot g=f \cdot (\lambda g) \qquad (۴)$$

ساختاری همانند بالاکه متشکل از یك فضای برداری است که روی آن یك قانون ضرب وجود دارد کـه نسبت به‌جمع بخشی است ونسبت به‌ضرب دراسکالر در رابطهٔ (۴) صدق می‌کند را یك جبر خوانند. زمـانی کـه میدان اسکالرهـا در واقع فقط یك حلقه باشد همین اصطلاح به‌کار می‌رود وآن‌را یك جبر روی آن حلقه می‌نامند. مثلاً $C^{\infty}(R)$ یك جبر روی میدان R است. اگـر قانون ضرب دارای خواص اضافی مـانند انجمنی، جابجایی، و یکه‌دار بوده باشد، آن جبر را نیز با این صفات نام می‌بریم. مثلاً $C^{\infty}(R)$ یك جبر انجمنی جابجایی و یکه‌دار روی R است. به‌عنوان مثال اگر R حلقهٔ دلخواهی باشد مجموعهٔ همهٔ توابع از R در R، که با R^R نمایش می‌دهیم به‌طور طبیعی دارای سه قانون جمع وضرب و ضرب دراسکالر (با اسکالرهای در R) است که همانند (۱) و (۲)و (۳) تعریف می‌شوند. R^R با این سه قانون یك جبر انجمنی جابجایی یکه‌دار روی R است. درحالتی کـه R همان میدان اعـداد حقیقی R باشد، $C^{\infty}(R)$ بخشی از R^R است و علاوه بر این به عنوان یك جبر یك زیرجبر آن محسوب می‌شود. این مطلب اولین نکته‌ای است که باید به‌آن توجه کرد،زیرا این ساختارها کاملاً طبیعی‌اند وصرفاً از روی ساختارهای جبری قابل دستیابی هستند. بنابراین اولین گام این‌است که اصول را به‌گونه‌ای وضع کنیم کـه مجموعهٔ توابع دیفرانسیل‌پذیر روی یك حلقهٔ R یك زیرجبر، جبر همهٔ توابع روی R شود.

مهمترین خاصیت توابع دیفرانسیل‌پذیر معمولی که ویژگی دیفرانسیل‌پذیری را در خود مستتر دارد، وجود بسط تیلر برای آنهاست. به‌آسانی می‌توان ثابت کردکه اگر f یك تابع دیفرانسیل‌پذیر روی R و λ یك عدد حقیقی باشد یك تابع دیفرانسیل‌پذیر g می‌توان یافت که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\forall x \in R \qquad f(x)=f(\lambda)+(x-\lambda)g(x) \qquad (۵)$$

g یکتاست وهمهٔ مقادیر $g(x)$ برای $x \neq \lambda$ بـه تنهایی ازطریق تساوی (۵) قابل تعیین است اما مقدار $g(\lambda)$ ازطریق تساوی (۵) قابل به‌دست‌آمدن نیست و در واقع این توپولوژی R است که مقدار $g(\lambda)$ را به‌طور یکتا معین‌کند (زیرا g پیوسته است و در همه‌جا ازطریق تساوی (۵) معین است مگر در λ که پیوستگی g مقدار $g(\lambda)$ را هم معین می‌کند). بنابراین ما باید برقراری تساوی (۵) را به‌صورت اصل واردکنیم و یکتایی g

را نیز جزء اصول قرار دهیم.

یك نکتهٔ دیگر که باید به‌آن توجه کرد مربوط به‌توابع چندجمله‌ای است. این توابع طبیعی‌ترین توابع روی یك‌حلقه هستندکه صرفاً ازطریق جبری تعریف می‌شوند و همچنین دربسط تیلر نیزحضور دارند،پس باید آنها را نیز جزء توابع دیفرانسیل‌پذیر قرار دهیم.

با این ملاحظات اکنون می‌توانیم دیفرانسیل‌پذیری روی حلقه‌ها را بـه شکل زیر تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنید R یك حلقه و $\mathcal{A}$ جبر همهٔ توابع از R در R باشد. یك زیرجبر $\mathcal{A}$ مانند $\mathcal{E}$ را یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری گوییم هرگاه تابع ثابت ۱ و تابع همانی R را دربر داشته وهر عضو آن مانند f حول هر اسکالر $\lambda \in R$ نسبت به‌یك عضو یکتای دیگر آن مانند g بسط تیلر مرتبهٔ اول داشته باشد، یعنی

$$\forall x \in R \qquad f(x)=f(\lambda)+(x-\lambda)g(x)$$

یا به‌زبان ریاضی

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad \forall \lambda \in R \quad \exists! g \in \mathcal{E} \quad \forall x \in R \quad f(x)=f(\lambda)+(x-\lambda)g(x)$$

تابع یکتای g راکه وابسته به‌مقدار λ وتابع f است با $D_\lambda f$ نشان خواهیم داد. هرتابع $f \in \mathcal{E}$ را $\mathcal{E}$ — دیفرانسیل‌پذیر واگر اشتباهی رخ ندهد به‌اختصار دیفرانسیل‌پذیر می‌نامیم. ومقدار $(D_\lambda f)(\lambda)$ را مشتق f در λ می‌نامیم وبا $f'(\lambda)$ نمایش می‌دهیم.

مطالب بسیاری دربارهٔ این ساختار ثابت شده‌است. درمورد وجود این گونه ساختارها ثابت شده کـه روی میدانهای متناهی چنین ساختاری وجود ندارد و در مورد حلقه‌هـای نامتناهی، مجموعهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری است و در واقع کوچکترین آنها هم هست زیرا ازتعاریف نتیجه می‌شودکه توابع چندجمله‌ای درهرخانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری حضور دارند. همچنین ثابت می‌شودکه روی حلقه‌های نامتناهی‌که میدان نیستند یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری ماکسیمال منحصر به‌فرد وجود دارد. بدیهی است که $C^\infty(R)$ خود یکی از نمونه‌های همین ساختار است که توابع دیفرانسیل‌پذیر معمولی را به‌دست می‌دهد.

خواص عادی عمل مشتقگیری دراین ساختار نیز برقرارند که ما تعدادی از آنها را ذکر می‌کنیم.

الف) اگر g و f دوتابع دیفرانسیل‌پذیر باشند و $\lambda \in R$ آنگاه داریم

$$(f+g)'=f'+g', \quad (\lambda f)'=\lambda f', \quad (f \cdot g)'=f' \cdot g + g' \cdot f$$

همچنین اگر f به‌گونه‌ای باشدکه $1/f$ معنا داشته و دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$$

ب) اگر $\mathcal{E}$ تحت عمل ترکیب توابع بسته باشد آنگاه داریم

$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g' \qquad f, g\in \mathcal{E}$$

ج) برای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر f و اسکالر λ و عدد طبیعی $n\geqslant 0$ دقیقاً یک تابع دیفرانسیل‌پذیر g_{n+1} و n اسکالر $y_i\ (i=1,\dots,n)$ موجود است به‌قسمی که

$$f(x)=f(\lambda)+y_1(x-\lambda)+y_2(x-\lambda)^2+\dots$$
$$+y_n(x-\lambda)^n+g_{n+1}(x)(x-\lambda)^{n+1} \qquad (6)$$

ما تساوی (۶) را بسط محدود مرتبهٔ nام f برحسب x حول λ می‌خوانیم وعبارت $g_{n+1}(x)(x-\lambda)^{n+1}$ را ماندهٔ مرتبهٔ $n+1$ام این بسط می‌نامیم.

حال بـا اضافه‌کردن ساختار ترتیب روی حلقهٔ R می‌توانیم نحوهٔ ارتباط ساختار دیفرانسیل‌پذیری را بـا آن مورد بررسی قرار دهیم. وقتی روی یک حلقه ساختار ترتیب می‌گذاریم مطمئناً باید ارتباط آن با ساختارهای قبلی حلقه مانند قوانین جمع و ضرب آن معلوم و معین باشد زیرا اگر هیچ ارتباطی موجود نباشد، در واقع مـا یک ساختار حلقهٔ مجزا و یک ساختار ترتیب مجزاداریم و حضور این دو ساختار در یـک مجموعهٔ واحد، به‌هیچ‌وجه موجد ساختار جدیدی نیست. این نکته در مورد ترکیب ساختارهای گوناگون دیگر نیز برقرار است.

بنا به‌تعریف حلقهٔ R راکه مجهز به‌رابطهٔ ترتیب تمام "$\leqslant$" نیز شده‌است، یک حلقهٔ مرتب نامیم هرگاه رابطهٔ ترتیب و قوانین جمع و ضرب R در روابط زیر صدق کنند

$$x\leqslant y \Longrightarrow x+z\leqslant y+z \qquad \forall x, y, z\in R$$
$$0\leqslant x, 0\leqslant y \Longrightarrow 0\leqslant xy \qquad \forall x, y\in R$$

همچنین حلقهٔ مرتب R را چگال می‌نامیم هرگاه رابطهٔ ترتیب آن دارای خاصیت زیر باشد

$$\forall x, y\in R(x<y \Longrightarrow \exists z\in R \quad x<z<y)$$

رابطهٔ بالا به‌طور خلاصه می‌گوید مابین هر دوعضو متمایز R عضو سومی متمایز ازآن‌دو وجود دارد. مثلاً Z با رابطهٔ ترتیب معمولی خود یک حلقهٔ مرتب است، اما چگال نیست ولی Q یک حلقه (میدان) مرتب چگال است. از این بـه‌بعد R را یک حلقهٔ مرتب چگال فرض می‌کنیم و برای روشنی مطلب تا آخر همین چارچوب را برای R حفظ خواهیم کرد.

برای اثبات قضایای مشابه حساب دیفرانسیل معمولی، نگاهی اجمالی به‌آن قضایا نشان می‌دهدکه نقش اصلی توپولوژی درآنها این است‌که توابع دیفرانسیل‌پذیر معمولی، پیوسته هستند و بـه‌خاطر چگال بودن رابطهٔ ترتیب R اگر توابع روی بـازه‌ای، مگر استثنائاً در یک نقطه، نامنفی باشد، روی آن نقطه نیز نامنفی هستند. بنابراین ما با اضافه‌کردن این شرط به‌توابع دیفرانسیل‌پذیر نوع جدید خود، به‌اثبات آن قضایا می‌پردازیم.

تعریف. اگر R یک‌حلقهٔ مرتب چگال و $\mathcal{E}$ یـک خانواده از توابع R در R باشد، $\mathcal{E}$ را یک خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای حلقهٔ مـرتب R نـامیم هرگاه $\mathcal{E}$ یک خانواده

دیفرانسیل‌پذیری برای حلقهٔ R بوده و در شرط (†) که در زیر می‌آید صدق کند.

(†) به‌ازای هر $a, b, c \in R$ که $a < b$ و هر تابع f در $\mathcal{E}$ اگر f روی مجموعهٔ

$$[a, b] - \{c\} = \{x \in R \mid a < x < b,\ x \neq c\}$$

نامنفی باشد، آنگاه f روی $[a, b]$ نیز همچنان نامنفی است.

اگر درشرط (†) عبارت "نامنفی" را به‌عبارت "نامثبت" تبدیل کنیم، شرط حاصل را با (†′) نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که (†) و (†′) معادل یکدیگرند و اگر $\mathcal{E}$ در یکی از آنها صدق کند در دیگری هم صدق می‌کند.

البته اگر توابع در $\mathcal{E}$ با توپولوژی ترتیبی R پیوسته باشند، آنگاه $\mathcal{E}$ حتماً درشرط (†) صدق خواهد کرد. همچنین مجموعهٔ همه توابعی از $\mathcal{E}$ را که روی بازهٔ $[a, b]$ به‌ماکزیموم و مینیموم خود می‌رسند، با $m[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱. بدیهی‌ترین مثال میدان اعداد حقیقی R و جبر توابع دیفرانسیل‌پذیر معمولی آن $C^\infty(R)$ است که درشرط (†) صدق می‌کند و یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب R است. علاوه براین به ازای هر $a, b \in R$ که $a < b$ داریم $m[a, b] = C^\infty(R)$.

مثال ۲. درمیدان مرتب Q، جبر توابع چندجمله‌ای با ضرایب گویا روی آن تشکیل یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب Q می‌دهند زیرا توابع چندجمله‌ای با توپولوژی ترتیبی Q که همان توپولوژی القایی از R است، پیوسته هستند و در نتیجه درشرط (†) صدق می‌کنند. البته در اینجا توابع چندجمله‌ای با ضرایب گویا روی بازه‌های بسته لزوماً به‌ماکزیموم یا مینیموم خود نمی‌رسند زیرا به‌عنوان توابعی از R در R ممکن است ماکزیموم یا مینیموم خود را درنقاط غیرگویا به‌دست آورند. بنابراین در اینجا $m[a, b]$ همهٔ توابع چندجمله‌ای نیست.

مثال ۳. اگر درمثال ۲ به جای Q میدان اعداد جبری حقیقی را که با A نمایش می‌دهیم درنظر بگیریم باز جبر توابع چندجمله‌ای با ضرایب گویا روی A تشکیل یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب A می‌دهند. منتها برخلاف مثال ۲ در اینجا همهٔ این توابع روی هر بازهٔ بسته‌ای به‌ماکزیموم یا مینیموم خود می‌رسند، زیرا اگر آنها را به‌عنوان توابعی از R در R درنظر بگیریم و مثلاً در $\lambda \in R$ به ماکزیموم یا مینیموم خود رسیده باشند، اگر λ در انتهای بازه نباشد آنگاه در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$f'(\lambda) = 0$$

و ازآنجاکه f یك چندجمله‌ای با ضرایب گویاست، f' نیز چنین است و λ یك عدد جبری خواهد بود. پس f به‌عنوان تابعی از A در A به ماکزیموم یا مینیموم خود رسیده است.

مثال ۴. روی میدان Q خانوادهٔ توابع به صورت $p(x)/q(x)$ را که در آن p و q دوچندجمله‌ای با ضرایب گویا هستند و q روی Q ریشه ندارد، با $\mathcal{E}$ نشان می‌دهیم.

به‌آسانی دیده می‌شود که $\mathcal{E}$ یك زیرجبر، جبر همهٔ توابع از Q در Q است زیرا تحت اعمال جمع و ضرب و ضرب دراسکالر بسته است. همچنین تابع ثابت ۱ به‌صورت $1/1$ و تابع همانی به‌صورت $x/1$ است؛ پس در $\mathcal{E}$ جای دارند. برای اثبات وجود بسط تیلور مرتبهٔ اول برای توابع $\mathcal{E}$ حول هر نقطهٔ دلخواه فرض می‌کنیم $p(x)/q(x) \in \mathcal{E}$ و $\lambda \in Q$ به‌طور دلخواه انتخاب شده باشند. از آنجا که p و q چندجمله‌ای‌هستند برای آنها روابط زیر برقرار است

$$p(x) = p(\lambda) + (x-\lambda)p_1(x) \qquad p_1(x) \in Q[x]$$
$$q(x) = q(\lambda) + (x-\lambda)q_1(x) \qquad q_1(x) \in Q[x]$$

حال برای تابع $p(x)/q(x)$ محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{q(\lambda)p(x) - q(x)p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$
$$= \frac{q(\lambda)(p(\lambda) + (x-\lambda)p_1(x)) - (q(\lambda) + (x-\lambda)q_1(x))p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$
$$= \frac{(x-\lambda)(q(\lambda)p_1(x) - q_1(x)p(\lambda))}{q(x)q(\lambda)}$$

درنتیجه داریم

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} + (x-\lambda)\frac{q(\lambda)p_1(x) - q_1(x)p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$

دیده می‌شود که ضریب $x-\lambda$ در رابطهٔ بالا در $\mathcal{E}$ جای دارد. یکتایی آن نیز از روی خاصیت توپولوژیك پیوستگی توابع در $\mathcal{E}$ با توپولوژی ترتیبی Q معلوم است. تا اینجا $\mathcal{E}$ یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری روی میدان Q است اما به‌خاطر پیوستگی توابع در $\mathcal{E}$ با توپولوژی ترتیبی Q، این توابع ساختار ترتیبی Q را نیز رعایت می‌کنند و یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب Q تشکیل می‌دهند. دراینجا نیز همانند مثال ۲ لزومی ندارد توابع در $\mathcal{E}$ روی بازه‌های بسته به ماکزیموم یا مینیموم خود برسند و $m[a, b]$ فقط برخی ازتوابع در $\mathcal{E}$ را دارد، اما اگر همانند مثال ۳ به‌جای Q ازمیدان اعداد جبری حقیقی A استفاده کنیم و توابع به‌صورت $p(x)/q(x)$ را درنظر بگیریم که p و q چندجمله‌ایهای با ضرایب گویا هستند و با این فرض قویتر که q روی R ریشه ندارد آنگاه این خانواده ازتوابع نیز یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب A خواهند بود و علاوه‌براین هرکدام از این توابع (با استدلالی مشابه مثال ۳) روی هر بازهٔ بسته به‌ماکزیموم ومینیموم خود می‌رسند.

حال به‌اثبات چند قضیهٔ مقدماتی مشابه قضایای حساب دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم. ازاین به‌بعد $\mathcal{E}$ یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای حلقهٔ مرتب چگال R است.

لم. اگر $f \in \mathcal{E}$، روی بازهٔ باز $]a, b[$ ثابت باشد، آنگاه f' روی این بازه صفر است.

برهان: نقطهٔ $\lambda \in]a, b[$ را به‌دلخواه درنظر می‌گیریم. به‌خاطر چگال‌بودن رابط ترتیب عناصر $c, d \in R$ موجودند به‌گونه‌ای‌که $a < c < \lambda < d < b$. تابع f ر روی بازهٔ $[c, d]$ درنظرمی‌گیریم. بنا به‌خاصیت دیفرانسیل‌پذیری f، تابع $D_\lambda f \in \mathcal{E}$ ب خاصیت زیر موجود است

$$f(x) = f(\lambda) + (x - \lambda)(D_\lambda f)(x) \qquad \forall x \in R$$

به‌ازای xهای دربازهٔ $[c, d]$ از آنجاکه f روی این بازه ثابت است می‌توان نتیجه گرفت $D_\lambda f$ روی $[c, d] - \{\lambda\}$ صفر است. بنابراین شرایط (†) و (†′) برای تابع $D_\lambda f$ نتیجه می‌دهندکه این تابع روی $[c, d]$ هم نامنفی است و هم نامثبت، یعنی $D_\lambda f$ روی $[c, d]$ ثابت صفر است، به‌خصوص $f'(\lambda) = (D_\lambda f)(\lambda) = 0$.

درواقع یکی از نتایج شرط (†) این است‌که اگر تابعی در $\mathcal{E}$ روی $[a, b] - \{c\}$ صفر باشد، آنگاه روی همهٔ $[a, b]$ صفر است.

قضیهٔ ۱. اگر $\lambda \in R$ یك ماکزیموم یا مینیموم موضعی برای $f \in \mathcal{E}$ باشد، آنگا $f'(\lambda) = 0$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم λ یك ماکزیموم موضعی باشد. بنا به‌تعریف یك $a > 0$ هست به‌گونه‌ای‌که به‌ازای هر $t \in [\lambda - a, \lambda + a]$ داریم

$$0 \geqslant f(t) - f(\lambda) = (t - \lambda)(D_\lambda f)(t)$$

بنابراین روی $]\lambda, \lambda + a[$ تابع $D_\lambda f$ نامثبت است و از شرط (†) نتیجه می‌شود کا $D_\lambda f$ روی $[\lambda, \lambda + a]$ نامثبت است، بخصوص داریم

$$(D_\lambda f)(\lambda) = f'(\lambda) \leqslant 0$$

با استدلال مشابه روی بازهٔ $]\lambda - a, \lambda[$ می‌توان نتیجه گرفت $f'(\lambda) \geqslant 0$. بنابراین $f'(\lambda) = 0$. برای حالتی‌که λ مینیموم موضعی است استدلال به‌روش مشابه است.

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ رل). اگر $f \in m[a, b]$ و $f(a) = f(b)$ آنگاه یك $c \in]a, b[$ هست به‌گونه‌ای‌که $f'(c) = 0$.

برهان: اگر f روی $[a, b]$ ثابت باشد، بنا به‌لم، قضیه برقرار است. اما اگر $]a, b[$ ∈ موجود باشد که برای آن $f(t) \neq f(a)$، آنگاه f ماکزیموم یا مینیموم خود را روی بازهٔ باز $]a, b[$ دریك‌نقطه مانند c به‌دست خواهدآورد ومطابق‌قضیهٔ ۱، $f'(c) = 0$.

به‌آسانی دیده می‌شود که $\mathcal{E}$ یك زیرجبر، جبر همهٔ توابع از Q در Q است زیرا تحت اعمال جمع و ضرب و ضرب دراسکالر بسته است. همچنین تابع‌ثابت ۱ به‌صورت $1/1$ و تابع همانی به‌صورت $x/1$ است؛ پس در $\mathcal{E}$ جای دارند. برای اثبات وجود بسط تیلور مرتبهٔ اول برای توابع $\mathcal{E}$ حول هرنقطهٔ دلخواه فرض می‌کنیم $p(x)/q(x)\in\mathcal{E}$ و $\lambda\in Q$ به‌طوردلخواه انتخاب شده باشند. ازآنجا که p و q چندجمله‌ای‌هستند برای آنها روابط زیر برقرار است

$$p(x)=p(\lambda)+(x-\lambda)p_1(x)\qquad p_1(x)\in Q[x]$$
$$q(x)=q(\lambda)+(x-\lambda)q_1(x)\qquad q_1(x)\in Q[x]$$

حال برای تابع $p(x)/q(x)$ محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$\frac{p(x)}{q(x)}-\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}=\frac{q(\lambda)p(x)-q(x)p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$
$$=\frac{q(\lambda)(p(\lambda)+(x-\lambda)p_1(x))-(q(\lambda)+(x-\lambda)q_1(x))p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$
$$=\frac{(x-\lambda)(q(\lambda)p_1(x)-q_1(x)p(\lambda))}{q(x)q(\lambda)}$$

درنتیجه داریم

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}+(x-\lambda)\frac{q(\lambda)p_1(x)-q_1(x)p(\lambda)}{q(x)q(\lambda)}$$

دیده می‌شود که ضریب $x-\lambda$ در رابطهٔ بالا در $\mathcal{E}$ جای دارد. یکتایی آن نیز از روی خاصیت توپولوژیك پیوستگی توابع در $\mathcal{E}$ با توپولوژی ترتیبی Q معلوم است. تا اینجا $\mathcal{E}$ یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری روی میدان Q است امـا به‌خاطر پیوستگی توابع در $\mathcal{E}$ با توپولوژی ترتیبی Q، این توابع ساختار ترتیبی Q را نیز رعایت می‌کنند و یك‌خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب Q تشکیل می‌دهند. دراینجا نیز همانند مثال۲ لزومی ندارد توابع در $\mathcal{E}$ روی بازه‌های بسته بـه ماکزیموم یا مینیموم خود برسند و $m[a,b]$ فقط برخی ازتوابع در $\mathcal{E}$ را دارد، اما اگر همانندمثال ۳ به‌جای Q ازمیدان اعداد جبری حقیقی A استفاده‌کنیم و توابع بـه‌صورت $p(x)/q(x)$ را درنظر بگیریم که p و q چندجمله‌ایهای با ضرایب گویا هستند و با این فرض قویتر که q روی R ریشه ندارد آنگاه این خانواده ازتوابع نیز یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای میدان مرتب A خواهند بود و علاوه‌براین هرکدام از این توابع (بـا استدلالی مشابه مثال ۳) روی هر بـازهٔ بسته به‌ماکزیموم ومینیموم خود می‌رسند.

حال به‌اثبات چند قضیهٔ مقدماتی مشابه قضایای حساب دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم. ازاین به‌بعد $\mathcal{E}$ یك خانوادهٔ دیفرانسیل‌پذیری برای حلقهٔ مرتب چگال R است.

لم. اگر $f \in \mathcal{E}$، روی بازهٔ باز $]a, b[$ ثابت باشد، آنگاه f' روی این بازه صفر است.

برهان: نقطهٔ $\lambda \in]a, b[$ را به‌دلخواه درنظر می‌گیریم. به‌خاطر چگال‌بودن رابطهٔ ترتیب عناصر $c, d \in R$ موجودند به‌گونه‌ای‌که $a < c < \lambda < d < b$. تابع f را روی بازهٔ $[c, d]$ درنظرمی‌گیریم. بنابه‌خاصیت دیفرانسیل‌پذیری f، تابع $D_\lambda f \in \mathcal{E}$ با خاصیت زیر موجود است

$$f(x) = f(\lambda) + (x-\lambda)(D_\lambda f)(x) \qquad \forall x \in R$$

به‌ازای xهای دربازهٔ $[c, d]$ از آنجاکه f روی این‌بازه ثابت است می‌توان نتیجه گرفت $D_\lambda f$ روی $[c, d] - \{\lambda\}$ صفر است. بنابراین شرایط (†) و (†′) برای تابع $D_\lambda f$ نتیجه می‌دهندکه این تابع روی $[c, d]$ هم نامنفی است و هم نامثبت، یعنی $D_\lambda f$ روی $[c, d]$ ثابت صفر است، به‌خصوص $f'(\lambda) = (D_\lambda f)(\lambda) = 0$. ▲

درواقع یکی از نتایج شرط (†) این است‌که اگر تابعی در $\mathcal{E}$ روی $[a, b] - \{c\}$ صفر باشد، آنگاه روی همهٔ $[a, b]$ صفر است.

قضیهٔ ۱. اگر $\lambda \in R$ یك ماکزیموم یا مینیموم موضعی برای $f \in \mathcal{E}$ باشد، آنگاه $f'(\lambda) = 0$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم λ یك ماکزیموم موضعی باشد. بنابه‌تعریف یك $a > 0$ هست به‌گونه‌ای‌که به‌ازای هر $t \in [\lambda - a, \lambda + a]$ داریم

$$0 \geqslant f(t) - f(\lambda) = (t-\lambda)(D_\lambda f)(t)$$

بنابراین روی $]\lambda, \lambda + a[$ تابع $D_\lambda f$ نامثبت است و از شرط (†) نتیجه می‌شود که $D_\lambda f$ روی $[\lambda, \lambda + a]$ نامثبت است، بخصوص داریم

$$(D_\lambda f)(\lambda) = f'(\lambda) \leqslant 0$$

با استدلال مشابه روی بازهٔ $]\lambda - a, \lambda[$ می‌توان نتیجه گرفت $f'(\lambda) \geqslant 0$. بنابراین $f'(\lambda) = 0$. برای حالتی‌که λ مینیموم موضعی است استدلال به‌روش مشابه است. ▲

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ رل). اگر $f \in m[a, b]$ و $f(a) = f(b)$ آنگاه یك $c \in]a, b[$ هست به‌گونه‌ای‌که $f'(c) = 0$.

برهان: اگر f روی $[a, b]$ ثابت‌باشد، بنابه‌لم، قضیه برقراراست. اما اگر $t \in]a, b[$ موجود باشد که برای آن $f(t) \neq f(a)$، آنگاه f ماکزیموم یا مینیموم خود را روی بازهٔ‌باز $]a, b[$ دریك‌نقطه مانند c به‌دست خواهدآورد ومطابق‌قضیهٔ ۱، $f'(c) = 0$. ▲

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ کوشی). اگر $f, g \in \mathcal{E}$ چنان باشندکه برای $a, b \in R (a < b)$ داشته باشیم

$$h=(f(b)-f(a))g-(g(b)-g(a))f \in m[a,b]$$

آنگاه یك $c \in]a,b[$ هست به‌گونه‌ای‌که

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

برهان: قضیهٔ ۲ را برای تابع h به‌کار برید. ▲

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ میانگین). اگر $f \in \mathcal{E}$ چنان باشد که برای آن تابع

$$h(x)=(f(b)-f(a))x+(b-a)f(x)$$

در $m[a,b]$ باشد، آنگاه یك $c \in]a,b[$ هست به‌گونه‌ای‌که

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

برهان: حالت خاص قضیهٔ ۳. ▲

حال با دردست داشتن قضیهٔ میانگین، اغلب قضایای مقدماتی حساب دیفرانسیل معمولی که به صورت کاربردهای این قضیه‌اند، قابل اثبات‌اند، منتها در اینجا باید در هر مورد، فرضیات را به‌شکلی متناسب درآورد.

به‌عنوان مثال یکی از این قضایا را در اینجا می‌آوریم.

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ داربو). فرض کنید f یك تابع دیفرانسیل‌پذیر روی حلقهٔ R و $[a,b]$ یك بازهٔ بستهٔ آن باشد. اگر $\lambda \in R$ به‌گونه‌ای باشد که $f'(a) < \lambda < f'(b)$ و همچنین تابع $g(x)=f(x)-\lambda x$ روی $[a,b]$ به مینیموم خود برسد آنگاه یك $c \in]a,b[$ موجود است که برای آن $f'(c)=\lambda$.

برهان: کافی است ثابت کنیم که تابع g مینیموم خود را در نقاط a یا b نمی‌گیرد، زیرا در این صورت بنابه قضیهٔ ۱، g' در نقطهٔ مینیموم $c \in]a,b[$ صفر است که به معنای اثبات قضیه است.

اما به روش برهان خلف، اگر فرض کنیم که g در a به مینیموم خود می‌رسد؛ با استفاده از بسط g حول a داریم

$$g(x)-g(a)=(x-a)(D_a g)(x)$$

از رابطهٔ بالا برای $x \in]a,b[$ نتیجه می‌شود $(D_a g)(x) \geqslant 0$، پس مطابق شرط (†) داریم $g'(a)=(D_a g)(a) \geqslant 0$ اما $g'(a)=f'(a)-\lambda < 0$.

همچنین اگر فرض کنیم که g در b به مینیموم خود می‌رسد، با استفاده از بسط g حول b داریم

$$g(x)-g(b)=(x-b)(D_bg)(x)$$

از این رابطه برای $x\in[a,b[$ نتیجه می‌شود $(D_bg)(x)\leqslant 0$. پس مطابق شرط (†′) داریم $g'(b)=(D_bg)(b)\leqslant 0$ اما $g'(b)=f'(b)-\lambda>0$. ▲

درقضیهٔ داربو اگر اسکالر $\lambda\in R$ به‌صورت $f'(b)<\lambda<f'(a)$ باشد، آنگاه تابع g باید به‌ماکزیموم خود برسد تا حکم قضیه برقرار بماند، زیرا کافی است قضیهٔ را برای تابع $f-$ و اسکالر $\lambda-$ به‌کار گیریم.

کامبیز محمودیان

دو کاربرد کوچك از قضیهٔ مقدار میانگین

بی‌شك یکی از پرمعنی‌ترین و درعین‌حال زیباترین قضایای آنالیز، قضیهٔ مقدار میانگین است. بعد از بیان این قضیه دو کاربرد آن را در دو مسأله خواهیم دید.

قضیهٔ مقدار میانگین: اگر تابع حقیقی f، روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد، نقطه‌ای مثل $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

مسألهٔ اول. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع $f(x)=\ln x$، $a=n$ و $b=n+1$ به‌کار می‌گیریم

$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n} = \ln'(c) = \frac{1}{c}, \qquad n<c<n+1$$

در نتیجه

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$$

با ضرب طرفین در n داریم

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

و چون تابع لگاریتم صعودی است به‌دست می‌آید

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1 = e$$

اگر $n \to \infty$، آنگاه $\frac{n}{n+n} \to 1$، و بنابر پیوستگی تابع e^x، $e^{n/(n+1)} \to e^1 = e$

پس.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

مسألهٔ ۲. اگر x، y، z اعدادی حقیقی باشند و $e < x < y < z$، اعداد $g = z^{y^x}$، $f = z^{x^y}$، $d = y^{z^x}$، $c = y^{x^z}$، $b = x^{z^y}$، $a = x^{y^z}$ را با هم مقایسه کنید.

ابتدا دو لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم یك. اگر $e < x < y$ و $z \geqslant 1$ آنگاه $x^{y^z} > y^{x^z}$.

اثبات. باردیگر قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع لگاریتم به‌کار می‌بندیم

$$\frac{\ln\ln y - \ln\ln x}{\ln y - \ln x} = \frac{1}{c}, \qquad 1 < \ln x < c < \ln y$$

چون $c > 1$، $z \geqslant 1 > 1/c$. پس

$$\frac{\ln\ln y - \ln\ln x}{\ln y - \ln x} < z$$

با ساده‌کردن رابطهٔ بالا، نتیجه می‌شود

$$\ln\frac{\ln y}{\ln x} < z\ln\frac{y}{x} = \ln\frac{y^z}{x^z}$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} < \frac{y^z}{x^z} \Longrightarrow \ln y^{x^z} = x^z \ln y < y^z \ln x = \ln x^{y^z} \Longrightarrow x^{y^z} > y^{x^z}$$

حالت خاص لم یك: اگر $e < x < y$، آنگاه $x^y > y^x$.

لم دو. اگر $e < x$ و $e < y < z$، آنگاه، $y^{x^z} > z^{x^y}$.

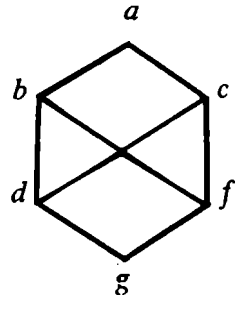
اثبات. این بار تابع مورد استفاده، $\varphi(x) = \ln\ln x$ است. $(\varphi'(x) = 1/(x\ln x))$ **قضیهٔ مقدار میانگین** حکم می‌کند که $c \in (y, z)$ وجود دارد (در نتیجه $\ln c > \ln y > 1$) به‌طوری که

$$\frac{\ln\ln z - \ln\ln y}{z - y} = \frac{1}{c\ln c} < \frac{1}{c} < 1 < \ln x$$

عملیاتی مشابه لم یك، این رابطه را به‌شکل حکم مطلوب درمی‌آورد: $y^{x^z} > z^{x^y}$.

لم ۱، حالت‌خاص آن، ولم ۲ را مجموعاً چنین بیان می‌کنیم که اگر $e < x < y < z$، "هرچه اعداد بزرگتر در تشکیل توان مضاعف (یعنی عددی به‌شکل $\alpha^{\beta^{\gamma}}$) بالاتر قرار گیرند، حاصل بزرگتر می‌شود."

اکنون مسألهٔ ۲ را در نظر می‌گیریم. بنابر لم ۱، $a > c$، $b > f$، و $d > g$. ازحالت‌خاص لم ۱ نتیجه‌می‌شود $y^z > z^y$. پس $a > b$ و همچنین $c > d$ و $f > g$. ولم ۲ به‌مامی‌گویدکه $a > g$، $b > d$، و $c > f$. یابه‌طور خلاصه شکل‌زیر را داریم



درمورد $(x, y, z) = (۳, ۴, ۵)$ اعداد a تا g چنین‌اند

$$\ln a \simeq ۱۱۲۵ \qquad \ln d \simeq ۱۷۳$$
$$\ln b \simeq ۶۸۷ \qquad \ln f \simeq ۱۳۰$$
$$\ln c \simeq ۳۳۷ \qquad \ln g \simeq ۱۰۳$$

درعین‌حال، درحالت کلی، c و b و نیز f و d قابل مقایسه نیستند. مثالهای زیر این مطلب را نشان می‌دهند

$$(x, y, z)$$
$$(۳, ۴, ۵) \implies b > c, d > f$$
$$(۳, ۴, ۱۰) \implies b < c, d > f$$
$$(۳, ۹, ۱۰) \implies b > c, d < f$$
$$(۸, ۹, ۱۰) \implies b < c, d < f$$

روبرت مور

مضاعف کردن: حقیقی، مختلط، چهارگان، و بالاتر... خوب، شاید•

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآباد نو

جبر تقسیم H از چهارگانها معمولاً به‌عنوان ۴تایی‌هایی از اعداد حقیقی به شکل $a+bi+cj+dk$، با ضربی که بدوسیلهٔ

$$i^2=j^2=k^2=-1, \quad ij=k=-ji, \quad jk=i=-kj, \quad ki=j=-ik$$

تعریف می‌شود، درنظر گرفته می‌شود.

این تعریف عبارت مرعوب‌کنندهٔ

$$\begin{aligned}(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)\\ =(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-c_2d_1)i \qquad (1)\\ +(a_1c_2+a_2c_1+b_2d_1-b_1d_2)j+(a_1d_2+a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)k\end{aligned}$$

را نتیجه می‌دهد.

شاید کمتر به‌این‌نکته توجه شده باشد که H را می‌توان، با اجتناب ازضرب بدقوارهٔ (۱)، از میدان اعداد مختلط C ساخت، به همان روشی که C از میدان اعداد حقیقی R ساخته می‌شود. دراینجا این شیوهٔ ساختن را شرح می‌دهیم ونیز این نکته راکه چگونه این رهیافت اثبات خواص چهارگانها را ساده می‌کند.

در ابتدا یادآوری می‌کنیم که چگونه C از R ساخته می‌شود. کار را با عدد غیرحقیقی i که $i^2=-1$، آغازمی‌کنیم، وابتدا مجموعهای $a+bi$ را تشکیل می‌دهیم،

• Moore R. C.,"Doubling: real, complex, quaternion, and beyond... well, maybe," *The College Mathematics Journal*, 17(1986)342-343.

که a و b اعدادی حقیقی هستند. جمع به صورت

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \qquad (۲)$$

و ضرب به‌صورت

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-\hat{b}_2b_1)+(b_2a_1+b_1\hat{a}_2)i \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود، که $\hat{a}$ مزدوج (حقیقی) a را نمایش می‌دهد، که به وضوح خود a است. اگرچه کاربرد مزدوج در اینجا غیرضروری به‌نظر می‌رسد، همان‌طور که وقتی چهارگانها را می‌سازیم خواهیم دید، خیلی مهم است.

برای هرعدد مختلط $z=a+bi$، مزدوج (مختلط) z به‌صورت

$$\bar{z}=\hat{a}-bi \qquad (۴)$$

تعریف می‌شود و نرم z به‌شکل

$$N(z)=z\bar{z}=a\hat{a}+b\hat{b} \qquad (۵)$$

یا فقط a^2+b^2، مجموعی از دومربع، تعریف می‌شود.

خواص زیرین C به‌سادگی اثبات می‌شوند:

(i) ضرب تعویضپذیر است؛

(ii) ضرب شرکتپذیر است؛

(iii) $N(z_1z_2)=N(z_1)N(z_2)$ برای $z_1, z_2 \in C$؛

(iv) $z^{-1}=N(z)^{-1}\bar{z}$ اگر $z \neq 0$.

درساختن چهارگانهای H از C، فرایند فوق را تکرار می‌کنیم، با این تفاوت که به‌جای اعدادحقیقی، اعدادمختلط‌را درنظرمی‌گیریم. درابتدا عددغیرمختلط j که $j^2=-1$ را تعریف می‌کنیم، ومجموعهای $A+Bj$ را تشکیل می‌دهیم، که A و B اعداد مختلط هستند. جمع را به‌صورت

$$(A_1+B_1j)+(A_2+B_2j)=(A_1+A_2)+(B_1+B_2)j \qquad (۲')$$

و ضرب را به‌صورت

$$(A_1+B_1j)(A_2+B_2j)=(A_1A_2-\bar{B}_2B_1)+(B_2A_1+B_1\bar{A}_2)j \qquad (۳')$$

تعریف می‌کنیم، که $\bar{A}$ مزدوج (مختلط) A را نمایش می‌دهد. برای $q=A+Bj$، مزدوج (چهارگان) q

$$q^*=\bar{A}-Bj \qquad (۴')$$

است. و نرم q

$$N(q)=qq^*=A\bar{A}+B\bar{B} \qquad (۵')$$

است که مجموع مربعات چهار عدد حقیقی است.

حال فرض کنید $k=ij$. سپس برای هر $A=a+bi$ و $B=c+di$، می‌بینیم که $q=a+bi+cj+dk$ دقیقاً $A+Bj$ است. خصوصاً

$$N(q)=a^2+b^2+c^2+d^2 \quad و \quad q^*=a-bi-cj-dk$$

قرار می‌دهیم $A_1=a_1+b_1i$، $B_1=c_1+d_1i$ و $A_2=a_2+b_2i$، $B_2=c_2+d_2i$، و فرض می‌کنیم $ij=k$. می‌بینیم که ضرب (۳′) دقیقاً (۱) است، گرچه شکل بسیار ساده‌تری دارد.

به همان روشی که (۳) خواص (i)—(iv) را برای C به دست می‌دهد، عبارت (۳′) خواص زیر را برای H نتیجه می‌دهد

(i′) ضرب تعویض‌پذیر نیست؛

(ii′) ضرب شرکت‌پذیر است؛

(iii′) $N(pq)=N(p)N(q)$ برای $p, q\in H$؛

(iv′) $q^{-1}=N(q)^{-1}q^*$ اگر $q\neq 0$.

خواننده می‌تواند سریعاً متقاعد شود که این خواص از (۳′) بسیار ساده‌تر به‌دست می‌آیند تا از (۱)!

ناتان جاکوبسون [۱] نشان می‌دهد که چگونه جبر A با فرایندی مشابه فرایند بالا "مضاعف" می‌شود. فرض کنید که A، ۱-دار باشد و $f: a\to\bar{a}$ یك تزویج[1] روی A باشد به‌طوری که $a\bar{a}=Q(a)1$، که $Q(a)$ یك صورت درجهٔ دوم ناتبهگون است. ما A را با تشکیل زوجهای مرتب (a, b) برای $a, b\in A$، و با تعریف جمع وضرب به‌صورت

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2) \qquad (۲'')$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)=(a_1a_2+c\bar{b}_2b_1, b_2a_1+b_1\bar{a}_2) \qquad (۳'')$$

که c هرعضو ناصفر میدان پایه می‌تواند باشد، "مضاعف" می‌کنیم. جبر حاصلهٔ B، بعدی دوبرابر A دارد. تزویج روی B

$$f_B: (a, b)\to\overline{(a, b)}=(\bar{a}, -b) \qquad (۴'')$$

است و صورت درجهٔ دوم

$$Q_B(a, b)=(a, b)\overline{(a, b)}=(a, b)(\bar{a}, -b)=(a\bar{a}-c\bar{b}b)1 \qquad (۵'')$$

است.

متأسفانه، در نتیجهٔ هرمضاعف کردنی بعضی از (قوانین) ساختار از بین می‌رود، همان‌طور که، برای مثال، تعویض‌پذیری ضرب وقتی که C مضاعف می‌شود تا H به دست

---

1. involution

آید، از بین می‌رود. وقتی که H مضاعف شود تا هشت‌گانها (یك جبر ۸بعدی روی R) به‌دست آید، شرکتپذیری ضرب از بین می‌رود. مضاعف کردن هشت‌گانها فاجعه‌آمیز است: خواص (i)–(iv) همگی از دست می‌روند!

برای دانش‌آموزان اغلب درك خواص میدان، بدون مشاهدهٔ مثالهایی که خواص درآنها برقرار نباشند، مشکل است. مجموعهٔ مثالهایی که در اینجا آورده شد، بعضی از مثالهای "منفی" را که ممکن است مفید باشند، به دست می‌دهد، وکارکردن با ضرب (۳′) آسان است.

مرجع

1. Jacobson Nathan, *Basic Algebra, I*, W. H. Freeman, San Francisco, 1974, pp. 417–427.

راس هانسبرگر

مطلبی شگفت‌آور از هندسه•

ترجمهٔ کامبیز محمودیان

کاملاً آشکار است که دو بردار درصفحه (مبدأ همه بردارها را، مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم) که با یکدیگر زاویه‌ای حاده یا قائمه بسازند، می‌توانند چنان حول مبدأ دوران یابند که هردوی آنها در ربع صفحهٔ نامنفی قرار گیرند (یعنی انتهای (x, y) هر دو بردار مختصات نامنفی داشته باشد). [اما] چندان واضح نیست که سه بردار در فضای سه‌بعدی که دو به دو با یکدیگر زاویهٔ حاده یا قائمه بسازند، همواره می‌توانند حول مبدأ چنان دوران یابند که در ثمن نامنفی قرار گیرند. این هم ابداً بدیهی نیست، اما درست است، که هر چهار بردار در فضای چهار بعدی که هیچ دوتایشان زاویه‌ای بزرگتر از قائمه با هم نسازند می‌توانند طوری قرار گیرند که در کنج[1] نامنفی واقع شوند (کنج اصطلاح کلی برای ربع و ثمن است).

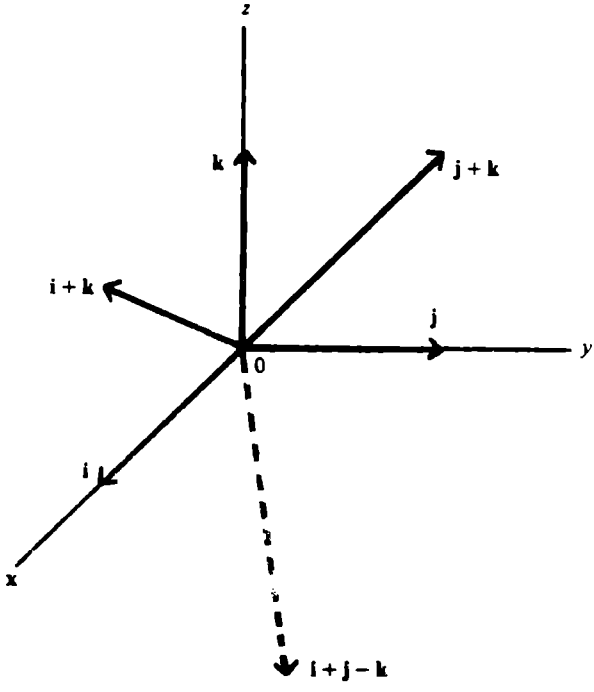
با این تفاصیل، چه‌کسی می‌تواند در مقابل این حدس مقاومت کند که هر n بردار در فضای n بعدی که هیچ دوتایشان یکدیگر را در زاویه‌ای بزرگتر از قائمه قطع نکنند، می‌توانند به‌گونه‌ای دوران یابند که همهٔ آنها در کنج نامنفی قرار گیرند؟ آیا شگفت‌انگیز نیست که این مطلب برای هر $n > ۴$ نادرست است؟

خواهیم دید که مجموعهٔ S، متشکل از پنج بردار سه بعدی $\mathbf{i}=(۱, ۰, ۰)$، $\mathbf{j}=(۰,۱, ۰)$، $\mathbf{i}+\mathbf{k}=(۱, ۰, ۱)$، $\mathbf{j}+\mathbf{k}=(۰, ۱, ۱)$ و $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}=(۱,۱,-۱)$ نمی‌توانند همگی در کنج نامنفی هیچ فضایی، از هر بعدی که باشد واقع شوند.

قبل از هر چیز، به آسانی می‌توان آزمود که هرجفت از بردارهای S با یکدیگر زاویهٔ نابزرگتر از قائمه می‌سازند و با نگاهی به شکل دیده می‌شود که این بردارها بیش از آن از یکدیگر باز هستند که بتوانند در یك ثمن فضای سه‌بعدی قرار گیرند. ادعای کلی خودمان

• Hansberger Ross A., "A Surprise from geometry," *Mathematics, Magazine*. 59 (1986) 28 - 29.

1. Orthant



را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید در یك فضای n بعدی مجموعهٔ S را بتوان به‌طور کامل در کنج نامنفی قرار داد. پس کلیهٔ مختصات تمام بردارهای S نامنفی خواهند بود. چون S شامل بردار صفر نیست، هیچیك از این n تاییهای مختصات تماماً از صفر تشکیل نشده‌است. پس در هر پنج بردار، لااقل یك مؤلفه باید مثبت باشد.

حال مسألهٔ مشکل: اثبات، این است که نشان دهیم با قراردادن S در کنج نامنفی، الزاماً بردار $\mathbf{k}=(0,0,1)$ نیز، با اینکه متعلق به S نیست، در این کنج قرار می‌گیرد.

در حالی که هر مؤلفهٔ بردارهای S، مثبت یا صفر است، مختصات بردار نشان‌دهندهٔ موقعیت $\mathbf{k}$ ممکن است مثبت، صفر، یـا منفی باشند. امکان منفی بودن مؤلفه‌ای از $\mathbf{k}$ را بررسی می‌کنیم. اگر $\mathbf{k}$ مؤلفه‌ای منفی درمحلی که مؤلفهٔ $\mathbf{i}$ در آنجا صفر است می‌داشت، آنگاه آن مؤلفه از مجموع $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ منفی می‌بود. امـا چون $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ متعلق به S است، هیچ مؤلفه‌ای از $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ منفی نیست. در نتیجه $\mathbf{k}$ تنها در جایی که $\mathbf{i}$ مؤلفهٔ مثبت دارد می‌تواند مؤلفهٔ منفی داشته باشد (بـه یـاد داشته باشید کـه مختصات $\mathbf{i}$ همگی مثبت یا صفرند). به همین ترتیب برای بردار $\mathbf{j}$، مؤلفه‌ای منفی در $\mathbf{k}$ در مقابل مؤلفه‌ای صفر در $\mathbf{j}$، مؤلفه‌ای منفی در $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ که متعلق به S است به‌وجود می‌آورد که تناقض است. در نتیجه $\mathbf{k}$ تنها در محلی که هر دوی $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ مؤلفهٔ مثبت دارند، می‌تواند مؤلفهٔ منفی داشته باشد.

اما چنین محلی وجود ندارد! اگر وجود داشت، چنین جفتی از مؤلفه‌های مثبت در $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ باعث ایجاد مقدار مثبت t درحاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{i}.\mathbf{j}$ می‌شدند. اما چون $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ متعامدند،

در هر دستگاه مختصات $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$. ولی ازآنجاکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ مؤلفهٔ منفی ندارند، راهی برای از بین بردن این مقدار مثبت t در حاصلضرب $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ وجود ندارد. در نتیجه $\mathbf{k}$ هیچ مؤلفهٔ منفی‌ندارد و باید درکنج نامنفی واقع شود.

حال نتیجه‌گیری آسان است. چون هر دو بردار $\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ هیچ مؤلفهٔ منفی ندارد، حاصلضرب نقطه‌ای‌شان $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$ نمی‌تواند عددی‌منفی باشد. اما باتوجه به تعامد بردارها واضح است که

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$
$$= 0 + 0 - |\mathbf{k}|^2$$

که منفی است. چراکه $\mathbf{k}$ بردار صفر نیست و برهان کامل است.

اثبات حکم دربارهٔ بردارهای واقع در فضای سه وچهاربعدی را می‌توان در [۱] یافت. جالب است که آخرین نکته در این منبع، مثالی از هشت بردار است که فضایی از بعد لااقل نه احتیاج دارند تا در کنج نامنفی آن قرارگیرند.

مرجع

1. Gray L. J., Wilson D. G., "Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrics," *Linear Algebra and its Applications* 31(1980)119-127.

هانس لایبك

برهانی برای تساوی رتبهٔ سطری و ستونی یك ماتریس•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

فرض کنید A یك ماتریس مختلط $m \times n$ و A^* مزدوج ترانهاده‌اش باشد، و x و y ماتریسهایی $n \times 1$ (بردارهایی ستونی) باشند.

لم ۱. $y^*y = 0$ اگر و تنها اگر $y = 0$

لم ۲. $Ax = 0$ اگر و تنها اگر $A^*Ax = 0$.

برهان: اگر $A^*Ax = 0$ و قرار دهیم $Ax = y$، آنگاه $y^*y = 0$. بنابراین، با استفاده از لم ۱، $y = 0$. عکس این مطلب بدیهی است.

حال برد A، یعنی فضای برداری $\{Ax : x \text{ هر}\}$ را با $R(A)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که

$$\dim R(A) = A \text{ رتبهٔ ستونی}$$

لم ۳. $\dim R(A) = \dim R(A^*A)$.

برهان: بنابر لم ۲، $Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_k$ مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر $A^*Ax_1, A^*Ax_2, \cdots, A^*Ax_k$ مستقل خطی باشند.

قضیه. (رتبهٔ ستونی A = (رتبه ستونی A^*) = (رتبهٔ سطری A.

برهان:

$$\text{رتبهٔ ستونی } A = \text{رتبهٔ ستونی } A^*A = \dim \{A^*Ax : x \text{ هر}\} \leqslant \dim \{A^*y : y \text{ هر}\}$$
$$= \text{رتبهٔ ستونی } A^*$$

به‌همین ترتیب

$$\text{رتبهٔ ستونی } A = \text{رتبهٔ ستونی } A^{**} \leqslant \text{رتبهٔ ستونی } A^*$$

و بنابراین

$$\text{رتبهٔ سطری } A = \text{رتبهٔ ستونی } \bar{A} = \text{رتبهٔ ستونی } A^* = \text{رتبه ستونی } A$$

• Liebeck H., "A proof of the equality of column and row rank of a matrix," *Amer. Math. Monthly*, 73(1966) 1114.

و. ر. اسکات

مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقهٔ چند جمله‌ایها•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

هدف این یادداشت ارائهٔ برهانی کوتاه از قضیهٔ زیر است که دریادداشتی بـا عنوان فوق و توسط آلکساندر فورسایت به اثبات رسیده است [۱]. (همچنین به مرجع [۲] مراجعه کنید.)

قضیه: فرض کنید R یك حلقهٔ جابجایی و $R[x]$ حلقهٔ چندجمله‌ایها روی R باشد. اگـر f مقسوم‌علیه صفری از حلقهٔ $R[x]$ باشد، عنصری چون c در R وجود دارد به قسمی کـه $c\neq 0$ و $cf=0$.

برهان: فرض کنیم حکم نادرست باشد، و g چندجمله‌ای ناصفری باشد که $fg=0$ و درجهٔ آن کوچکترین مقدار ممکن است

$$f=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$

$$g=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

که در آنها $b_n\neq 0$ و $n\geqslant 1$. از آنجا که $b_nf\neq 0$، دست‌کم برای یك i، $a_ib_n\neq 0$؛ پس $a_ig\neq 0$. اگر r بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_rg\neq 0$، آنگاه

$$fg=(a_0+\cdots+a_rx^r)(b_0+\cdots+b_nx^n)=0$$

بنابراین، $a_rb_n=0$ و $\deg(a_rg)<n$. اما، $(a_rg)f=0$، و این یك تناقض است.

مراجع

1. Forsythe A., *Amer. Math. Monthly*, 50(1943)7-8.
2. McCoy N. H., *Rings and Ideals*, p. 34.

• Scott W. R.,"Divisors of zero in polynomial rings," *Amer. Math. Monthly*, 61(1954)336.

بنای ریاضیات •

برج پرافتخار ریاضیات امروزی، تابلندای آسمان رفته است. درسدهٔ بیستم برج را با روشهای امروزی، تجدید بناکرده‌اند: مردم یادگرفته‌اند که از صنعت الکترونیك هم استفاده‌کنند. برجی زیبا سر به‌آسمان کشیده است که موجب شوق ولذت معماران آن می‌شود وهرکسی تلاش می‌کند، با افزودن بخش تازه‌ای به‌آن، شکوه وعظمت آن را بیشتروبیشترکند. ولی هرچه برج بالاتر می‌رود، معماران آن کمتر یکدیگررا درك می‌کنند: قبلاً همهٔ آنها با یك‌زبان ریاضی صحبت می‌کردند، ولی اکنون؟ قبلاً از«متخصص ریاضیات» صحبت می‌شد، سپس، بهتر دیدند از «متخصص هندسه»، «متخصص جبر» یا «متخصص آنالیز» گفت وگوکنند، وامروز، این‌پراکندگی به‌مراتب بیشترشده است، امروز، هریك از شاخه‌های اصلی ریاضیات ــ هندسه و جبر، حساب (نظریهٔ عددها) وآنالیز ــ به‌یك رشته ازمکتبها وسمت‌گیریهای مختلف تقسیم شده است، که هرکدام ازآنها، روشها وابزارهای خاص خود را دارند و به «زبان»خاص خود صحبت می‌کنند. وامروز، با «متخصص هندسهٔ بینهایت کوچکها» که به‌کلی زبان متخصصان در هندسه «به‌مفهوم کلی» را فراموش کرده‌است،«متخصص در نظریهٔ جبری عددها»،«متخصص در نظریهٔ تحلیلی عددها »،دانشمندانی‌که با ابزارهای ریاضی در نظریهٔ نسبیت کار می‌کنند، متخصصان روشهای ریاضی مکانیك کوانتومی و... روبه‌رومی‌شویم. وکجاست آن «حکیمی» کـه همهٔ «زبانها» را بداند وبتواند «مترجم» همهٔ شاخه‌هـای گوناگون ریاضی باشد؟

ولی، با این همه . . .

• گوشه‌ای ازمقدمهٔ ا. م. یاگلوم بر ترجمهٔ روسی کتاب تقارن تالیف هرمان‌ویل، باعنوان «هرمان ویل واندیشهٔ تقارن». به‌نقل‌از: آشنایی با ریاضیات، جلد شانزدهم و هفدهم، ویژه‌نامهٔ تقارن، آبان‌ماه ۱۳۶۶، صفحه۳۰۹-۳۱۱.

نامه‌ای سرگشاده*

بسمه تعالی

پیرو نامهٔ قبلی اینجانب بـه انجمن کـه در صفحهٔ دوم خبرنامهٔ شماره ۱۳ انجمن ریاضی ایران به چاپ رسید و پس از شرکت در ششمین کنگرهٔ آموزش ریاضی که ۲۷ ژوئیه تا ۳ اوت ۱۹۸۸ در بوداپست برگزار گردید، لازم‌دانستم دراین مقطع حساس ضمن مطرح نمودن مسائل و مشکلات فعلی آموزش ریاضی، پیشنهاد خود را در رابطه با ایجاد واحد فعالی زیرنظرانجمن ریاضی ایران، به‌نام **واحد آموزش ریاضی** مطرح نمایم. امیدوارم‌که این پیشنهاد مورد قبول واقع شود و اعضای محترم انجمن ریاضی در اجرای این رسالت بزرگ وظایف خودرا به‌خوبی انجام دهند.

۱. هم‌اکنون علوم به‌طورکلی و ریاضی به‌طور اخص در پوشش نظام غلط آموزش عالی کشور نادیده گرفته شده است. اصالت واقعی ریاضی تحت عنـاوین مختلف "ریاضی برای فلان و بیسار" نه ریاضی برای یادگیری ریاضی و به‌دلیل اهمیت‌آن دراندیشیدن صحیح و به‌کارگیری فکرمنطقی درعلوم مختلف، از بین رفته است. اکنون دیگرریاضی به‌صورت ابزاری دست دوم برای تربیت نیروهای دیگر به‌طور مصنوعی به رشته‌های دیگر وصله خورده است و به‌زودی بایستی شاهد از بین رفتن اصالت ریاضی درایران باشیم.

۲. از طرف دیگر، به دلیل عدم اهمیت دادن جامعه به شغل شریف معلمی و بی‌توجهی به مقام اساتید، ارزش این دو شغل مهم و حساس که تأثیر عمده‌ای روی آموزش ریاضی درسطوح مختلف دارند، از بین رفته است.

۳. برنامه‌های غلط و ناهماهنگ ریاضی دوره‌های‌مختلف راهنمایی، دبیرستان، و دانشگاه، حجم زیاد دروس و عدم اهمیت دادن به دروس فکری ریاضی (مانند هندسه و حساب استدلالی) بلیهٔ دیگری برای آموزش ریاضی می‌باشد.

۴. برنامه‌های گزینش و تربیت دبیران ریاضی خـود مقولهٔ بسیار خطرناکی را در روند آموزش ریاضی مملکت ایجاد نموده است.

* این مطالب متن نامه‌ای است‌که به‌انجمن ریاضی ایران نوشته شده، و رونوشت‌آن برای ما فرستاده شده است.

۵. عدم برنامه‌ریزی آموزش ضمن خدمت و آشنا ساختن دبیران ومعلمان به‌روشهای جدید نیز خطر بزرگ دیگری برای جامعهٔ ریاضی مملکت می‌باشد.
۶. اگرچه خوشبختانه مسابقات ریاضی، تاکنون برگزار شده ولی اگر به‌آن هم فکرنشود درجهت خاصی کشیده می‌شود وکل جامعه را از وجود خود بی‌بهره می‌سازد، بر جامعهٔ ریاضی مملکت واجب است که دراین رابطه آموزش و پرورش را هدایت نمایند.
۷. عدم آمادگی بـرای تدریس دروس جدید و عقب افتادن از روند پیشرفت ریاضی در دنیا مصیبت بزرگ دیگـری است. ریاضیات گسسته و آشناسازی دانش‌آموزان بـا روشهای مختلف حل مسائل و مدلسازی از دروسی است که بایستی هرچه سریعتر (ولی با برنامه‌ریزی صحیح و آمادگی کامل) جایی در دروس دبیرستان بازکنند.
۸. هجوم کامپیوتر به‌منازل و عدم آمادگی آموزش و پرورش برای جهت دادن صحیح به استفاده از این دستگاهها نیز لزوم برنامه‌ریزی در این جهت را مشخص می‌نماید.

مسائل فوق و سایر مسائل آموزش ریاضی (از قبیل بررسی مشکلات عدم علاقه به ریاضی، عمومی کردن ریاضی، انتشار نشریات عمومی ریاضی در سطوح مختلف و صدها مسئلهٔ دیگر) لزوم وجود واحد آموزش ریاضی را زیرنظر انجمن ریاضی ایران وبا ارتباط با کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی (ICMI) ایجاب می‌نماید...

علی رجالی
عضو هیئت علمی دانشکدهٔ ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان

گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی کشور

امیر اکبری مجدآبادنو

روز دوشنبه ۷ فروردین ۱۳۶۸ دانشگاه تهران چهره‌ای دیگر داشت. از ساعت ۸ صبح عدهٔ کثیری از اساتید، دانشجویان، معلمین، و دانش‌آموزان مقابل کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران تجمع کرده بودند و منتظر بازشدن درها و آغاز مراسم افتتاحیهٔ بیستمین کنفرانس ریاضی کشور بودند. درمیان حضار بعضی از پیشکسوتان ریاضیات ایران به چشم می‌خورند. چهره‌هایی چون دکتر افضلی‌پور، دکتر وصال، .... بالاخره ساعت ۱۰ مراسم افتتاحیه با تلاوت آیاتی از کلام‌الله مجید و پخش سرود جمهوری اسلامی آغاز شد. پس از آن دکتر نوری دلویی سرپرست کمیتهٔ برگزاری کنفرانس ضمن خیرمقدم به شرکت‌کنندگان در زمینهٔ چگونگی تشکیل کنفرانس و عملکرد کمیتهٔ برگزاری، گزارشی را به اطلاع حضار رسانید. سپس مهندس موسوی نخست‌وزیر طی سخنانی به ضرورت اهمیت دادن به‌علوم پایه درایران با توجه به شرایط جهان امروز پرداخت. وی یکی از دلایل عدم‌توجه به علوم پایه درکشور را نبود خواست همگانی و نیاز عمومی در این زمینه دانست. وی یکی از نقشهای چنین کنفرانسهایی را این دانست که اهمیت این نیاز را حس کنند و این نیاز را به‌جامعه انتقال دهند. واینکه دانشمندان غیر از پژوهش وظیفه‌ای دیگر نیز دارند و آن این است که اهمیت خودشان را به‌جامعه معرفی کنند. بعداز سخنان مهندس‌موسوی مراسم افتتاحیه با سخنان دکتر رحیمیان ریاست دانشگاه تهران و گزارش سالیانهٔ دکتر زعفرانی دبیر انجمن ریاضی ادامه پیداکرد. آخرین سخنران جلسهٔ افتتاحیه دکتر نجفی وزیر آموزش و پرورش بود که سخنانش را با طرح این سؤال آغازکرد که "فایدهٔ آموزش علم ریاضی برای کشوری که‌علاقه به‌استقلال‌داردچیست؟" وی در ادامه به سه گروه که پاسخهای مختلفی به این سؤال داده‌اند اشاره‌کرد. دستهٔ اول که تعلیم ریاضی را برای عادت دادن افراد به‌تفکر منظم، خوب فکر کردن وزیبا اندیشیدن ضروری‌می‌دانند. دستهٔ دوم که بر اهمیت ریاضی از لحاظ زیبایی‌شناسی و ظرفیت وسیع علم ریاضی از لحاظ زیبایی تأکید دارند و دستهٔ آخر گروهی که بنابرکاربردهای ریاضی در صنعت و زندگی برآموزش آن تأکید دارند. دکتر نجفی در ادامه به‌بررسی وضعیت موجود ریاضیات درایران پرداخت وضمن ارائهٔ آماری درمورد افت تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی در ۱۵ سال اخیر چنین گفت که در سه سال گذشته شاهد بهبود نسبی وضعیت ریاضیات و گرایش دانش‌آموزان به رشتهٔ ریاضی بوده‌ایم. وی درپایان گزارشی در مورد فعالیتهای وزارت‌آموزش وپرورش در زمینهٔ تألیف کتب‌درسی وانجام‌مسابقات ریاضی وتشکیل باشگاه ریاضیدانان جوان ارائه داد.

به مناسبت بیستمین سال برپایی کنفرانس ریاضی عده‌ای از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج و چند ریاضیدان خارجی برای شرکت درکنفرانس دعوت شده بود. ریاضیدانان ایرانی (مقیم خارج) که درکنفرانس سخنرانی کردند، عبارت بودند از: امیرحسین اسدی، نصرالله اعتمادی، حسن اکبر زاده، یدالله دوج، فضل‌الله رضا، فریدون سادات عقیلی، فریدون شهیدی، ناصرصاحب‌جهرمی، سیدکاظم‌للهی، عبدالصمد هدایت. ریاضیدانان مدعو خارجی‌که در کنفرانس شرکت کردند، عبارت بودند از: برادا (فرانسه)، بویارسکی (لهستان)، سن (هندوستان)، کارانا‌کیس (هلند)، گریمت (انگلستان)، هارادا (آمریکا). برنامهٔ کنفرانس چنین بود که صبحها سخنرانیهای یک ساعتهٔ عمومی ایراد می‌شد و

بعدازظهرها سخنرانیهای تخصصی ۲۰ دقیقه‌ای انجام می‌گرفت.

روز دوم کنفرانس با سخنرانی پرفسور رضا یکی از مدعوین کنفرانس و یکی از متخصصین نظریهٔ ریاضی سیستمها و نظریهٔ اطلاعات آغاز شد. اعتبار علمی پرفسور رضا باعث شده بود که عدهٔ کثیری در این جلسه حضور داشته باشند. پرفسور رضا در این سخنرانی با لحنی پدرانه به‌ذکر نصایح و توصیه‌هایی به‌جوانان و دانشجویان ایرانی پرداخت. وی در بخشی از سخنان خود گفت: "در طی تاریخ معرفت بشر، ریاضیات کلیدشناسایی طبیعت و زبان مکالمهٔ اهل علم بوده است. علمای بزرگ هنگام کسب معرفت همیشه با پرداختن به‌ریاضیات شروع می‌کردند. حتی شعرای بزرگی چون حافظ نیز با منطق و ریاضی آشنایی داشته‌اند... در درخت تناور ریاضیات می‌توان دو شاخهٔ اصلی تمیز داد، یکی اندیشهٔ ریاضی هندسی که از ۲۰۰۰ سال پیش به‌دست یونانیان و مصریان پایه‌گذاری شد و دیگری اندیشهٔ جبری و عددی که به‌دست ایرانیان وهندیان بنا شد واین‌همان اندیشه‌ای است که کامپیوتر را به‌وجود آورد." وی سپس به بررسی وضعیت ریاضیات در کشورهای پیشرفته و مقایسهٔ آن با کشورهای جهان‌سوم پرداخت و گفت: "درقرون جدید برای شناخت قوانین‌طبیعت از ریاضیات استفاده شد... در قرن بیستم ریاضیات به‌صورت یك کلید ابزاری‌هم درآمد، به‌خصوص بعد ازجنگ‌جهانی دوم ریاضیات درمهندسی‌وتکنولوژی و شاخه‌هایی چون مخابرات ماهواره‌ها ، پزشکی و غیره نفوذ کرد. و به این ترتیب بعد جدیدی از ریاضیات کاربردی مطرح شده است... امروز جهان سوم باهمهٔ گرفتاریهای اقتصادی‌اش خودرا درمقابل هزاران مقالهٔ تحقیقی وکنگرهٔ‌علمی می‌بیند... دراین بازی ریاضی‌مضاف درمیدانهای جهانی بسیارمشکل است." به‌نظر پرفسور رضا یکی‌ازبهترین رشته‌هایی که درآن جهان‌سوم باغرب می‌تواند مقابله کند،علوم ریاضی است واین به‌آن دلیل است که علوم ریاضی نسبت به‌علوم‌دیگر بسیارکم‌خرج وکم‌هزینه‌می‌باشند. وی سپس درمورد دانشجویان جهان سومی که برای تحصیل به کشورهای پیشرفته می‌روند، چنین گفت: "دانشجویانی که به‌کشور خارجی می‌روند، اگر در زبان و ادبیات و فرهنگ خود و ریاضیات پایه استحکام داشته باشند، به رشته‌های دیگر روی نمی‌آورند." وی درپایان به‌شرح یکی‌ازکارهای‌تحقیقاتی اخیر خود پرداخت.

پس از سخنان پرفسور رضا، دکتر امیرحسین اسدی دربارهٔ "توپولوژی خمینه‌های چهار بعدی" سخنرانی کرد. محور اصلی سخنان دکتر اسدی رده‌بندی خمینه‌های چهاربعدی بودکه این کار با یاری‌گرفتن ازحدس‌پوانکاره‌که توسط فریدمن‌اثبات شده، انجام می‌گرفت.

دیگر سخنران صبح روز دوم دکتر یدالله دوج بودکه سخنان خودرا با این جملات طنزآلود آغاز کرد: "ریاضیدانان آماردانان‌را قبول ندارند. ولی ما آنها را قبول داریم و فعلاً وضع ما بهتر از آنهاست!!" موضوع‌سخنرانی‌دکتردوج تحلیل آماری داده‌ها بود. وی درسخنانش روش‌جدید تحلیل داده‌ها راکه برمبنای استفاده از نرم L^1 بنا شده است، توضیح داد و مزایای این روش را به‌روش کلاسیك (استفاده از نرم L^2) شرح داد.

آخرین سخنران جلسات صبح دکتر کاظم للهی بود. شهرت و اعتبار دکتر للهی در جامعهٔ ریاضی ایران، باعث حضور عدهٔ کثیری در این جلسه شده بود. نام للهی به‌خصوص به‌سبب تألیف چندین‌کتاب درسی، برای دانشجویان ایرانی نامی آشناست. قبل‌از آغاز سخنرانی دکتر خروشاهی طی سخنانی در معرفی دکتر للهی چنین گفت: "... معرفی دکتر للهی کار بسیار مشکلی است. دکتر للهی حق زیادی به‌گردن جامعهٔ ریاضی ایران دارد. کتابهای درسیی که او نوشته است، شاید بعد از کتابهای مرحوم مصاحب دقیقترین‌کتابهای‌درسی‌فارسی باشد... رفتن او از گروه ریاضی دانشگاه تهران ضایعه‌ای جبران‌ناپذیر برای‌ما بود وما بعداز رفتن دکتر للهی بود که فهمیدیم چه در نایی را از دست داده‌ایم." پس‌ازآن دکتر للهی به‌ایراد سخنرانی پرداخت. وی سخنانش را چنین آغازکرد: "با اینکه جلسه بیش‌از حدرسمی‌است، حالت‌وقتی‌را دارم‌که برای‌اولین‌بار درکلاس درس حاضر شدم!" موضوع سخنان وی

"ریاضیات و بنیان علوم کامپیوتر" بود. وی سپس به تشریح رابطهٔ متقابل مابین ریاضیات و کامپیوتر پرداخت ونتیجه گیری کرد که امروزه دانش کامپیوتر به درجه‌ای رسیده است که می‌تواند در طرح و حل مسائلی با ریاضیات به رقابت بپردازد.

صبح روز سوم میزگردی با عنوان "مسابقات ریاضی" با شرکت دبیران ریاضی و اعضای کمیتهٔ برگزاری مسابقات ریاضی برگزارشد. در روزهای اول و دوم کنفرانس مرحلهٔ نهایی ششمین مسابقهٔ دانش‌آموزی کشور با شرکت دانش‌آموزان منتخب استانها برگزار شده بود. در این میزگرد اعضای کمیتهٔ برگزاری مسابقات ریاضی به سؤالات دبیران در زمینهٔ برگزاری مسابقات ریاضی پاسخ گفتند. در این جلسه یکی از دبیران ریاضی دربارهٔ حضور در کنفرانس ریاضی گفت: "در کنفرانس ریاضی هیچگونه توجهی به دبیران نشده‌است. واگر چنین توجهی نشود ما دلسرد می‌شویم." بخش دیگری از صحبتهای این میزگرد دربارهٔ تغییر برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی و تألیف کتب درسی جدید بود که قرار است بزودی آغازشود. دراین زمینه نظرات گوناگونی ارائه شد. دکتر کرم‌زاده معتقد بود که بردن ریاضیات جدید به دبیرستان یك اشتباه بوده است و باید هرچه زودتر ریاضیات جدید را از دبیرستان حذف کنیم. بعضی دیگر از شرکت‌کنندگان موافق چنین نظری نبودند. بخش دیگری از صحبتهای این میزگرد دربارهٔ نشریات ریاضی‌ای که هم‌اکنون منتشر می‌شوند بود که دراین رابطه دکتر مدقالچی ازطرف مجلهٔ (شد آموزش ریاضی دکتر رجالی ازطرف پیك ریاضی، و بهزادمنوچهریان ازطرف جنگ ریاضی دانشجو صحبت کردند.

مسابقات ریاضی دانشجویی نیز در صبح و بعد از ظهر روز سوم با شرکت ۴۹ دانشجو از دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی مختلف کشور برگزار شد. کیفیت سؤالات نسبت به سال گذشته بهتر بود. ذکر یکی از مسائل دراینجا خالی از لطف نیست.

مسأله: مثالی از یك گروه G به دست آورید که حاوی اعضای a و b هریك از مرتبهٔ دو باشد به قسمی که ab از مرتبهٔ بی‌نهایت باشد.

پاسخ زیر توسط یکی از شرکت‌کنندگان در مسابقه ارائه شده است. کافی‌است در گروه تبدیلات صفحهٔ a و b را دوتقارن محوری بامحورهای موازی درنظر گیریم! به‌زبان ساده‌تر دوآینهٔ تخت موازی و نقطه‌ای بین این دو آینه را درنظر گیرید!!

همچنین در ظهر روز سوم جلسه‌ای با حضور عده‌ای از علاقه‌مندان به جبر برگزار شد. این جلسه به‌طور خودجوش وجدا از برنامه‌های پیش‌بینی‌شدهٔ کنفرانس و به‌پیشنهاد یکی‌ازشرکت‌کنندگان تشکیل شد. دراین جلسه یکی‌از حضار پیشنهادکردکه برای ایجاد ارتباط و هماهنگی و جهت دادن به کارهای تحقیقاتی در زمینهٔ جبر پژوهشکده‌ای تأسیس شود. همچنین در زمینهٔ برنامه‌های درسی جبر کارشناسی ارشد نیز نظرات مختلفی ابراز شد. بعضی‌از حضار مخالف تمرکز و یکسان‌سازی برنامه‌های کارشناسی ارشد بودند و برنامه‌های موجود را فاقدکارایی‌لازم برای ایجاد انگیزهٔ تحقیق و سمت‌دهی به تحقیق دانشجویان کارشناسی ارشد می‌دانستند. این جلسه بدون هیچ نتیجهٔ مشخصی پایان یافت.

یکی از سخنرانان روز سوم دکتر عبدالصمد هدایت بودکه سخنانش را با طرح مسألهٔ زیر آغاز کرد: فرض کنید N لیوان داریم که از ۱ تا N شماره‌گذاری شده‌اند. هرلیوان شامل تعداد معینی مهره، که برای لیوان i ام به k_i نشان داده می‌شود، است. هرگاه n مهره از این لیوانها را برداریم با این محدودیت که از هرلیوان حداکثر یك مهره برداریم، گوییم یك دور (round) از اندازهٔ n داریم. یك‌بازی (game) دنباله‌ای از دورهاست که اگر به توالی انجام شود به خالی‌شدن همهٔ لیوانها بیانجامد. واضح است که همواره یك بازی موجود نیست. به‌عنوان مثال اگر ۳ لیوان و در لیوان اول ۱ مهره، در دومی ۲ مهره، ودر سومی ۳ مهره‌داشته باشیم و دورهایمان از اندازهٔ ۳ باشد به سادگی مشاهده می‌شودکه یك‌بازی امکان ندارد. حال‌سؤال این است: چه شرایطی اعداد $N, n, k_1, k_2, \ldots, k_N$ باید داشته باشند تا یك بازی ممکن باشد؟ با کمی توجه دیده می‌شودکه اگر یك‌بازی داشته‌باشیم لزوماً باید

۱) $n \leqslant N$

۲) $\sum_{i=1}^{n} k_i \equiv 0 \pmod{n}$

۳) $\sum_{i=1}^{n} k_i \geqslant n \max k_i$

نکته بسیار جالب این است که این شرایط کافی نیز می‌باشد! دکتر هدایت در ادامه به‌کاربردهای آماری بازیها در نظریهٔ نمونه‌گیری پرداخت و در انتها پاره‌ای ازمسائل حل‌نشده دراین زمینه را برشمرد.

یکی از سخنرانان مدعوخارجی کنفرانس دکتر سن[1] از کشور هندوستان بود که عصر روز سوم در مورد فضاهای نیم ضرب داخلی و کاربردهای آن صحبت کرد. خصوصیت بارز این سخنرانی شیوهٔ بیان مطالب و نیز تسلط سخنران به موضوع مورد بحث بود. در ابتدا او به بیانی دلنشین در باب فضاهای ضرب داخلی و تاریخچهٔ گسترش مفهوم آن به ایراد سخن پرداخت وسپس دربارهٔ پیدایش مفهوم فضاهای نیم‌ضرب داخلی نکاتی‌چند ارائه داد. جالب آنکه او مضامینی را که تا همین اواخر در مقالات تخصصی یافت می‌شد به‌بیانی جذاب (ولی متأسفانه نه زبانی جذاب!) چنان ارائه می‌دادکه هرکس با اطلاعاتی درسطح کارشناسی ریاضی کاملاً قادر به‌درك آنها بود. وی در ادامه به ذکر چند کاربرد از این مفهوم درحوزه‌های گوناگون اشاره کرد.

عصر روز چهارم مراسم اختتامیهٔ کنفرانس در تالار علامهٔ امینی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه انجام شد. در آغاز دکتر زعفرانی دبیر انجمن ریاضی گزارش سالانهٔ خود را به‌مجمع عمومی انجمن ارائه داد. در این گزارش عنوان شدکه به‌دلیل اینکه انجمن هنوز مراحل ثبت قانونی خود را طی نکرده است، در سال گذشته بولتن، خبرنامه، و فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی منتشر نشده است. در زمینهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی انجمن،همکاریهایی بامسؤولین برگزاری مسابقه و وزارت آموزش وپرورش‌داشته است. دکتر زعفرانی دربخشی ازگزارش‌خود ضمن اعلام نتایج مسابقهٔ ریاضی دانشجویی از دکتروصال خواست تا لوحهای یادبودی را که به همین‌مناسبت تهیه شده بود، به برندگان مسابقه اهدا کند. نفرات برتر مسابقهٔ ریاضی سال ۱۳۶۷ عبارت بودند از: ۱. شاهین آجودانی‌نمینی(دانشگاه‌تهران)، ۲. شاهین امیرشریفی (دانشگاه صنعتی‌شریف)، ۳. غلامحسین اسلام‌زاده (دانشگاه شیراز)، ۴. محمد رضا یاحقی (دانشگاه صنعتی‌شریف)، ۵. علی‌ایرانمنش (دانشگاه شیراز). پس‌از این‌مراسم دکتر زعفرانی‌متذکرشدکه طی مذاکراتی‌که انجمن ریاضی با سازمان انرژی اتمی داشته است، سازمان انرژی اتمی موافقت‌کرده است‌که از سال آینده به نفرات برتر مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی ودانشجویی‌کشوربورس تحصیلی اعطا کند. همچنین عنوان شد که از سال آینده به‌منظور ایجاد رقابت دربین دانشجویان کارشناسی ارشد به سه پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشدکه توسط هیئت داوران انتخاب شوند، -جایزه‌ای ازسوی‌سازمان انرژی‌اتمی تعلق‌خواهدگرفت. دکترزعفرانی‌درپایان‌زمان‌برپایی بیست‌ویکمین‌کنفرانس ریاضی‌کشور را از ۲۲ تا ۲۵ اسفند ماه امسال در دانشگاه اصفهان اعلام نمود و همچنین یادآور شدکه پنجمین سمینار فصلی جبر و چهارمین‌سمینارفصلی‌آنالیز به‌طورهمزمان‌درشهریور ماه امسال درتبریز برگزار می‌شود.

پس ازگزارش دبیر انجمن آخرین سخنرانی عمومی با عنوان "بیست سال‌کنفرانس" توسط دکتر رجبعلی‌پور انجام گرفت. وی‌سخنان خود را با یادی ازمرحوم دکترعباس ریاضی‌کرمانی آغازنمود و در ادامه به‌ذکر آمار فعالیتها و مسائل مطروحه دربیست کنفرانس گذشته پرداخت. وی این آمار را طی بخشهایی تحت عناوین: کنفرانسها وآموزش‌ریاضی، کنفرانسها و پژوهشها، کنفرانسها و ترجمه و تألیف، کنفرانسها و مسابقات دانشجویی، و کنفرانسها و یادبودها و نمایشگاهها ارائه داد.

پس از آن دکتر ایزد دوستدار قائم‌مقام کمیتهٔ برگزاری مختصری ازچگونگی شکل گیری کنفرانس بیستم را به استحضار رساند و پس ازآن با قرائت قطعنامه و پخش سرود جمهوری اسلامی، بیستمین کنفرانس ریاضی به‌کارخود پایان داد. درقطعنامه از مسؤولین جموری‌اسلامی درخواست شده‌بودکه‌جهت

1. Sen

تجهیز اصولی کتابخانه‌ها و علی‌الخصوص کتابخانه‌های ریاضی و توجه به آموزش و پژوهش در زمینهٔ علوم پایه مساعی بیشتری به‌خرج داده شود و با تلاش مستمر ازطریق رسانه‌های گروهی فرهنگ پژوهش را به جامعه منتقل کنند. همچنین از انجمن ریاضی ایران درخواست شده بود که برای برگزاری هرچه پربارتر کنفرانسهای آتی، نقدی دقیق وجامع بر ۲۰ کنفرانس گذشته انجام داده و میزان عملی‌شدن درخواستهای قطعنامه‌ها را ارزیابی کند.

ارزیابی، نتیجه‌گیری، و پیشنهاد

۱. بدون‌شك کنفرانس بیستم از لحاظ کیفیت برگزاری و حضور مهمانان خارجی وایرانیان مقیم خارج نقطهٔ عطفی درکنفرانسهای برگزارشدهٔ پس از انقلاب محسوب می‌شود. اما گذشته‌ازاین‌مسائل ظاهری باید متأسفانه‌قبول‌کنیم که به‌دلیل‌حاکم‌نبودن سیاستی مشخص بر برنامه‌ها و روشن نبودن اهداف، کنفرانس ریاضی ایران به شکل کنونی بازدهی چندانی‌ندارد. بنابه‌نظر اکثر شرکت‌کنندگان جلسات سخنرانی جز برای افرادی معدود قابل‌استفاده نیست. درکنفرانس بیستم یکی از اساتید عنوان کردکه سخنرانیهای ارائه شده جز برای ۲ تا ۳ درصد شرکت‌کنندگان برای بقیه قابل فهم نیست. با توجه به‌وضعیت فعلی تحقیق و پژوهش در کشور، شکل کنونی کنفرانس که مبتنی برمقالات تخصصی-تحقیقاتی است، باعث بی‌فایده شدن عملی این کنفرانس شده است.

۲. متأسفانه جای معلمین و دبیران ریاضی در برنامه‌های کنفرانس خالی بود. علی‌رغم حضور عده‌ای‌از آنها درکنفرانس، برنامه‌های کنفرانس برای آنها بسیارکم‌فایده بود. البته چند سخنرانی و یك میزگرد با حضور کارشناسان دفترتحقیقات وزارت آموزش و پرورش و اساتید دانشگاه تربیت معلم ترتیب داده شده بود، ولی این جلسات به‌صورت برنامه‌ای‌جنبی و جدا ازجلسات اصلی کنفرانس‌انجام شد. گویا همه فراموش کرده بودند، که از مهمترین مشکلات فعلی جامعهٔ ریاضی مسائل آموزشی است و اساسی‌ترین‌نیروهایی که‌می‌توانند دررفع‌این‌مشکلات بکوشند همین‌معلمین ودبیران‌هستند. دکتررجبعلی‌پور در بخشی از سخنرانی خود تحت عنوان "بیست سال کنفرانس" چنین‌گفت: "یکی از محسنات کنفرانسها این است‌که جوانها را در بین خود دارد" و شاید بزرگترین عیب کنفرانسها این باشدکه معلمین را در بین خود ندارد.

۳. با شکل‌گیری سمینارهای تخصصی‌فصلی، که درچند سال اخیرشاهد برپایی‌چند دورهٔ آن بوده‌ایم، به‌نظر می‌رسد که با محول‌کردن بخشی از مقالات تخصصی-تحقیقاتی به این سمینارها و تجدیدنظر در اهداف کنفرانس بهتر باشدکه بخشی ازبرنامه‌های کنفرانس به‌مسائل آموزشی وآموزش ریاضی در سطوح پیش از دانشگاه و دانشگاه اختصاص داده شود. و به‌این‌ترتیب معلمین و دبیران ریاضی بتوانند حضور فعالتری درکنفرانس داشته باشند.

۴. در کنفرانسهای اخیر شاهد برپایی میزگردهایی در زمینهٔ مسائل آموزشی بودیم، که متأسفانه درکنفرانس بیستم چنین کاری انجام نشد.

۵. در آستانهٔ بیستمین کنفرانس همه در انتظار بودندکه انجمن‌ریاضی بررسی و نقدی بر بیست سال فعالیت خود داشته باشد. به‌نظرمی‌رسیدکه سخنرانی دکتررجبعلی‌پور تحت عنوان "بیست سال‌کنفرانس" هم به‌همین منظور درنظرگرفته شده باشد. که به‌دلیل ضیق وقت، این سخنرانی با شتاب زیادی انجام شد و بخشهایی ازسخنان هم‌حذف شد. برخلاف آنچه‌که عنوان سخنرانی نشان می‌داد به‌جای تحلیلی‌جامع از وضعیت و جایگاه‌کنفرانسها درجامعهٔ ریاضی ایران طی بیست سال گذشته، به ذکر شتابزدهٔ پاره‌ای آمار اکتفا شد.

۶. ازحق نباید گذشت که کنفرانس فعالیتهای جنبی مفیدی داشت، که مهمترین این فعالیتها برگزاری مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی بود. با اعزام تیم دانش‌آموزان به دو دورهٔ المپیاد ریاضی ونتایج نسبتاً رضایت‌بخش حاصله، این مسابقه از ارزش و اعتبار خاصی برخوردار شده است و می‌رود تا نقش مثبتی درتکامل دانش ریاضی دانش‌آموزان ایفاکند. امامتأسفانه مسابقهٔ ریاضی‌دانشجویی با اینکه ازقدمت بیشتری برخوردار است و امسال سیزدهمین دورهٔ خود را برگزار کرد، همچنان بدون برنامه‌ریزی

مشخص ودرمحیطی نه‌چندان پرشور وحرارت برگزار شد. یکی‌از عللی‌که موجب‌شده‌که مسابقهٔ دانشجویی موردتوجه و استقبال قشردانشجوواقع نشود این‌است کـه سؤالات مطروحـه درآن در سطح سال چهارم کارشناسی ریاضی می‌بـاشد. به‌نظر می‌رسدکـه بـا برگزاری مسابقه درسطح سال دوم، آنچنان‌کـه در برخی ازکشورها مرسوم است (به‌عنوان‌مثال مسابقهٔ پاتنام) و شرکت دانشجویان‌گروههـای علمی دیگر می‌توان به‌این‌مسابقه ارزش واعتباری همپای‌مسابقات دانش‌آموزی بخشید.

۷. از دیگـر فعالیتهـای بسیار مفید کنفرانس بیستم برگزاری یك دوره درس فشردهٔ شش جلسه‌ای درزمینهٔ توپولوژی خمینه‌های چهاربعدی‌توسط دکتر امیرحسین اسدی بود، که با همکاری سازمان انرژی اتمی‌انجام شد. امیداست این دوره‌ها درکنفرانسهای آینده نیز ادامه یابد.

درخاتمه‌یك‌بار دیگر متذکر می‌شوم‌که‌کنفرانس ریـاضی ایـران نیازمند تجدید نظر در اهـداف و برنامه‌ریزی دقیق در زمینهٔ چگونگی بـرگزاری‌آن است و اگـر این‌کار صورت نـگیرد، از کنفرانس ریاضی جز تازه‌کردن دیدار بـا دوستان، فـایده‌ای نخواهیم برد.

جایزهٔ‌عبدالسلام‌برای پژوهشگران جوان علوم پایه درجهان سوم

پروفسور محمد عبدالسلام فیزیـکدان پـاکستانی، برندهٔ جـایزهٔ نوبل سال ۱۹۷۹، بنیانگذار آکادمی علوم جهان سوم، و رئیس مـرکز بین‌المللی فیزیك نظری، جایزهٔ خود را وقف پیشبرد علم درکشورهای جهان سوم‌کرده است. بدین‌منظور در برخی از این کشورهـا هـرچهار سال یکبار به‌یکی از بهترین پژوهشگران جوان هریك ازچهار زمینهٔ عام ریاضی، زیست‌شناسی، شیمی، و فیزیك، به تناوب یك هـزار دلار جایزه تخصیص می‌یابد. تا کنون این‌نیت خیر درکشورهای پاکستان، سوریه، مراکش ومصر پیاده، و ازسال ۱۹۸۹ ایران نیز مشمول آن شده است.

نامزدهای هریك از این زمینه‌های چهارگانه‌را کمیته‌ای متشکـل از متخصصـان منتخب پـروفسور عبدالسلام انتخاب می‌کند، و این کمیته گزارش کار خود را به "کمیتهٔ مشاوران" می‌دهد. نامزدهـا در شرایط عادی از بین افرادی انتخاب می‌شوند کـه هنگام اعطای جـایزه بیش از سی و پنج سال نداشته باشند، ولی درکشورهایی نظیر ایـران کمیته مجاز است موقتاً این شرط را تعدیل‌کند. بخش اعظم کار پژوهشی نامزدها باید درکشورشان انجام شده‌باشد. نامزدها که باید مقیم‌کشور خود باشند یـا براساس کل‌کار علمی خویش مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، و یا براساس مطلبی‌که خاص این جایزه تألیف‌کرده باشند.

کمیتهٔ معرفی نامزدهای علوم ریاضی بـا توجه به‌تمام جوانب به‌اتفاق آرا تصمیم‌گرفته است برای سال ۱۹۸۹ کسی را معرفی نکند، ولی امیدوار است این‌جایزه‌صاحب‌نام‌ازهم‌اکنون‌برتحرك پژوهشگران جوان‌کشور بیفزاید، آنان‌را درراه‌کسب این‌افتخار به‌رقابت سالم علمی وادارد. و از سال ۱۹۹۰ شاهد درخشش‌پژوهشگران جوان‌ایرانی‌درصحنهٔ‌بین‌المللی باشد. دستورالعمل‌کار معرفی‌نامزدها وجزئیات دیگر را این‌کمیته بعداً اعلام خواهدکرد.

فهرست موضوعی

جلدهای ۱، ۲، و ۳

آموزشی

نگاهی به $n+\ldots+2+1$ از دیدگاه ریاضیات گسسته؛ لورن لارسن، ۱۳۶۷، ۲، ۱۱۳–۱۲۸.

میز ناپدیدشوندهٔ کانتور؛ لاری کنوپ، ۱۳۶۷، ۲، ۱۴۸–۱۴۹.

شمارش‌پذیری مجموعه‌ها؛ استنلی کمپل، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۰.

برهان دیگری از قضیهٔ کوشی در مورد گروهها؛ جیمز مک‌کی، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۱.

نکته‌ای در باب چندجمله‌ایهای مشخصه؛ جوزف اشمید، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۲.

گروههایی که اجتماع سه زیرگروه هستند؛ هایمر، برایان، و مویر، ۱۳۶۷، ۲، ۱۴۵–۱۴۷.

ریاضیات و صداقت فکری؛ موزس ریچاردسون، ۱۳۶۸، ۳، ۸۹–۹۵.

آیا می‌توان ریاضیات را قابل‌فهم‌کرد؟؛ رالف فیلیپ بائوس، ۱۳۶۸، ۳، ۹۶–۱۰۳.

آموزش حل مسئله؛ پاول هالموس، ۱۳۶۸، ۳، ۱۰۴–۱۰۹.

آنالیز

اویلر وتابع‌زتا؛ ریموندایوب، ۱۳۶۶، ۱، ۴۳–۶۷.

عدد حقیقی چیست؟؛ جان مای هیل، ۱۳۶۶، ۱، ۱۱۹–۱۲۷.

انتگرال لئونهارت اویلر؛ فیلیپ دیویس، ۱۳۶۷، ۲، ۵۱–۷۲.

آنالیز ترکیبی

نگاهی به $n+\ldots+2+1$ از دیدگاه ریاضیات گسسته؛ لورن لارسن، ۱۳۶۷، ۲، ۱۱۳–۱۲۸.

ریاضیدان به‌مثابه یک کاشف؛ شرمن استین، ۱۳۶۸، ۳، ۷۴–۸۸.

تاریخی

گرایشهای جاری در جبر؛ گرت بیرکاف، ۱۳۶۶، ۱، ۱–۲۹.

اویلر و تابع‌زتا؛ ریموندایوب، ۱۳۶۶، ۱، ۴۳–۶۷.

آیا حقیقت ریاضی وابسته به زمان است؟؛ جودیث گرابینر، ۱۳۶۶، ۱، ۷۹–۹۲.

ده قانون دربارهٔ چگونگی تحول در تاریخ ریاضیات؛ مایکل کراو، ۱۳۶۶، ۱، ۹۳–۹۹.

نظری‌اجمالی برسیر تکاملی نظریهٔ‌گروهها؛ ایزرائل کلاینر، ۱۳۶۷، ۲، ۱–۲۸.

انتگرال لئونهارت اویلر؛ فیلیپ دیویس، ۱۳۶۷، ۲، ۵۱–۷۲.

میدانهای اقلیدسی اعداد؛ هندریك لنسترا، ۱۳۶۷، ۲، ۷۳–۸۸.

ملاحظاتی پیرامون مفهوم حد؛ روث ریکا استرویك، ۱۳۶۷، ۲، ۱۰۳–۱۱۲.

برنولیها و سری همساز؛ ویلیام دانهم، ۱۳۶۷، ۲، ۱۳۴–۱۳۹.

جبر و جبر خطی

گرایشهای جاری در جبر؛ گرت بیرکاف، ۱۳۶۶، ۱، ۱–۲۹.

نظری اجمالی برسیر تکاملی نظریهٔ‌گروهها؛ ۱۳۶۷، ۲، ۱–۲۸.

میدانهای اقلیدسی اعداد؛ هندریك لنسترا، ۱۳۶۷، ۲، ۷۳–۸۸.

گروههایی‌که‌اجتماع سه‌زیرگروه هستند؛ هایمر،برایان، و مویر، ۱۳۶۷، ۲، ۱۴۵–۱۴۷.

برهان دیگری از قضیهٔ کوشی درمورد گروهها؛ جیمز مک‌کی، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۱.

نکته‌ای در باب چندجمله‌ایهای مشخصه؛ جوزف اشمید، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۲.

عمومی

اویلر وتابع زتا؛ ریموندایوب، ۱۳۶۶، ۱، ۴۳–۶۷.

پیامدهای فکری انقلاب کامپیوتری؛ ر. همینگ،

۱۳۶۶، ۱، ۶۸–۷۸.
جهان نیوتنی؛ روپرت‌هال، ۱۳۶۷، ۲، ۱۲۹–۱۳۳.
ریاضیات و ریاضی فکرکردن؛ ۱۳۶۸، ۳، ۴۷–۵۶.
ریاضیات به‌عنوان هنری‌خلاق؛ پال هالموس، ۱۳۶۸، ۳، ۵۷–۷۳.
ریاضیدان به‌مثابه یك کاشف؛ شرمن استین، ۱۳۶۸، ۳، ۷۴–۸۸.

کامپیوتر

پیامدهای‌فکری‌انقلاب‌کامپیوتری؛ ر.همینگ، ۱۳۶۶، ۱، ۶۸–۷۸.

گزارش

نگاهی به مسابقات ریاضی در جهان و ایران؛ امیر اکبری مجدآبادنو، ۱۳۶۶، ۱، ۱۲۸–۱۳۵.
مگر حقیقت و زیبایی خودبسنده نیستند؟؛ جیمز گلیك، ۱۳۶۶، ۱، ۱۳۶–۱۳۸.
کارنامهٔ برنامهٔکارشناسی ارشدریاضی و آمار دانشگاه تهران؛ غلامرضا برادران خسروشاهی و بهزاد منوچهریان، ۱۳۶۶، ۱، ۱۳۹–۱۴۸.
گزارشی از سمینار آموزش ریاضی؛ بهزادمنوچهریان، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۳–۱۵۴.
نقش‌حل‌مسئله در پیشرفت‌علمی دانش‌آموزان؛ پرویز شهریاری، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۴–۱۵۶.
تدریس‌کامپیوتر در نیکاراگوئه؛ مارلین سینت و آرتور وین، ۱۳۶۷، ۲، ۱۵۶–۱۶۰.
نظری اجمالی برکتابهای ریاضی منتشرشدهٔ دانشگاه تهران؛ بهزادمنوچهریان، ۱۳۶۷، ۲، ۱۶۰–۱۶۳.
کنفرانسهای ریاضی در ایران، نگاهی به بیست سال گذشته؛ امیراکبری‌مجدآبادنو و بهزادمنوچهریان، ۱۳۶۸، ۳، ۱۱۰–۱۱۵.
نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران؛ بهزادمنوچهریان، ۱۳۶۸، ۳، ۱۱۵–۱۱۶.
تاریخچهٔ اجمالی کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی؛ سیدمحمدکاظم نائینی، ۱۳۶۸، ۳، ۱۱۷–۱۱۸.
گزارش ششمین‌کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در مجارستان؛ رحیم زارع نهندی، ۱۳۶۸، ۳، ۱۱۸–۱۲۴.

مبانی

آیا حقیقت ریاضی وابسته به زمان است؟؛ م. کارت رایت، ۱۳۶۶، ۱، ۷۹–۹۲.
ده قانون دربارهٔ چگونگی تحول درتاریخ ریاضیات؛ مایکل کراو، ۱۳۶۶، ۱، ۹۳–۹۹.
ریاضیات ساختنی؛ مارك مندلکرن، ۱۳۶۶، ۱، ۱۰۵–۱۱۸.
عدد حقیقی چیست؟؛ جان مای هیل، ۱۳۶۶، ۱، ۱۱۹–۱۲۷.
معماری بنای ریاضیات؛ نیکولا بورباکی، ۱۳۶۷، ۲، ۸۹–۱۰۲.
نقش‌روش‌اصل‌موضوعی؛ ر. ویلدر، ۱۳۶۸، ۱، ۳–۱۶.
وقتی ریاضیات نه می‌گوید؛ فیلیپ دیویس، ۱۳۶۸، ۳، ۱۷–۳۲.
صداقت در مباحث ریاضی؛ آیا یك و یك به‌راستی می‌شود دو؟؛ فیلیپ‌دیویس، ۱۳۶۸، ۳، ۳۳–۴۶.

هندسه و توپولوژی

سیاحتی در توپولوژی؛ فرشید جمشیدیان، ۱۳۶۶، ۱، ۳۰–۴۲.
هندسه‌های کلاینی؛ احمد شفیعی ده‌آباد، ۱۳۶۶، ۱، ۱۰۰–۱۰۴.
مجموعهٔ محدب چیست؟؛ ویکتور کلی، ۱۳۶۷، ۲، ۲۹–۵۰.

خوانندگان محترم

لطفاً غلطهای چاپی زیر را که در جنگ ریاضی دانشجو، جلد ۲ آمده است، اصلاح کنید.

صفحه	سطر	نادرست	درست
دو	۱۷	میز ناپدید شونده	میز ناپدید شوندهٔ کانتور
دو	۲۲	سمینار ریاضی	سمینار آموزش ریاضی
۲۶	۹	جنگ ریاضی دانشجو	جنگ ریاضی دانشجو، ۱
۵۱	۱۴	توسعه	درتوسعهٔ
۸۶	۱۲	$n \equiv ۲$	$n \equiv ۲$
۹۶	۲۷	fRy	fRg
۱۰۶	۳	درابدیت	تا ابدیت
۱۱۱	۱	تواند	می‌تواند
۱۱۷	۲۰	$۱+۲+\cdots+n$	$۱+۲+\cdots+k$
۱۱۸	۲۰	$x=۶$	$n=۶$
۱۲۰	۱۴	$۱\leqslant a\leqslant b\leqslant n+۱$	$۱\leqslant a<b\leqslant n+۱$
۱۲۲	۳	$n=۱+۲+\cdots$	$n=۱, ۲, \cdots$
۱۲۵	۱۷	$\frac{D^k f(a)}{k!}$	$\frac{\Delta^k f(a)}{k!}$
۱۳۱	۲	تقدیم	تقویم
۱۴۰	شکل ۱	A, B	A', B'
۱۴۱	شکل ۲	A, B, C	A', B', C'
۱۵۰	۱۶	$\frac{۲}{۳}=$	$\frac{۲}{۳}\longrightarrow$
۱۵۲	زیرنویس	characterestic	characteristic
۱۵۸	۱۰ ستون اول	مبتی	مبتنی
۱۵۸	۲۲ ستون اول	می‌دهد	می‌دهند
۱۶۵	۸	$T\text{-}K\text{-}W$	$۱\text{-}k\text{-}v$

خوانندگان محترم

لطفاً غلطهای چاپی زیر را که در جنگ ریاضی دانشجو، جلد ۳ آمده است، اصلاح کنید.

صفحه	سطر	نادرست	درست
یك	۷	مباحث	مباحثات
۴۰	۵	$۱-(۱-r)$	$۱-(۱/r)$
۴۴	۹	عملاً	عمداً
۶۵	۲۰	تورنمت	تورنمنت
۸۷	۲	میسر	مسیر
۹۶	زیرنویس ۱	intelligibel	intelligible,
۱۰۳	۲۱	faueral	funeral
۱۰۴	زیرنویس ۱	solvgni	solving
۱۰۶	۱۴	کسی	کسی است
۱۰۷	۵	احتمالاً	احتمالاً برای
۱۰۷	۱۵	برآن	برای آن
۱۱۱	۳ـ ستون اول	لطفعلی	لطفی
۱۱۱	۱۰ـ ستون اول	سرجی	سرگئی
۱۱۲	۲۱ـ ستون اول	وایلز	ایلز
۱۲۲	۲۳ـ ستون دوم	$d_n=P_{n+1}-P$	$d_n=P_{n+1}-P_n$

(بسمه‌تعالی)

خوانندگان عزیز، لطفاً برای اشتراك مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو، به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱. مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو هر سال ۳ شماره به‌چاپ می‌رسد، چنانچه مایلید از ابتدای هرسال مجله برای شما ارسال شود، درفرم زیر قید بفرمایید. درغیر این‌صورت، از زمانی‌که فرم اشتراك را ارسال می‌نمایید ۳ شمارهٔ متوالی برای شما ارسال خواهد شد.

۲. چنانچه به غیر از دو صورت فوق مایل به دریافت شماره‌هـای دیگری از مجله می باشید درفرم درمحل مخصوص قید فرمایید.

۳. خواهشمند از فرستادن چك بانکی، وجه نقد، یا تمبر پستی خودداری کنند.

۴. لطفاً هرگونه تغییر نشانی خود را در اسرع وقت به اطلاع بخش اشتراك مجله برسانید.

۵. پس از ارسال حوالهٔ بانکی، برای شما همراه با اولین مجلهٔ ارسالی یك شمارهٔ اشتراك فرستاده می‌شود. خواهشمند است این‌شماره را به‌یادداشته باشید ودرمکاتبات بعدی دربارهٔ اشتراك مجله حتماً این شماره را روی پاکت بنه یسید.

۶. حسابجاری ۱۸۷۳۱۴۵۲ به نام جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران نـزد بـانك تجارت شعبهٔ خیابان اردیبهشت تهران.

«فرم اشتراك مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو»

نام‌خانوادگی . . . . . نام . . . . میزان تحصیلات . . . . شغل . . . .

نشانی دقیق پستی . . . . . .

شماره تلفنی‌که درصورت نیاز بتوان با شما فوراً تماس‌گرفت . . . . . .

به‌پیوست حواله بانکی به‌مبلغ . . . . . ریال بابت اشتراك مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو ارسال می‌گردد.

☐ از ابتدای سال ۱۳

☐ برای سه شمارهٔ آینده

☐ تك شماره

☐ غیره (دقیقاً شمارهٔ موردنظررا قیدکنید)

«عذر تقصیر!»

آقای دکتر شاپور اعتماد طی تماسی با هیأت تحریریهٔ مجله تذکر دادندکه در مقـالهٔ "وقتی ریاضیات نه می‌گوید" (جُنگ ریاضی دانشجو، ۳، ص ۲۲) عنوان "بدون جای کوچکترین شك ممکن محتمل" صحیح است کـه سهواً "بدون سایهٔ تردید ممکن محتمل" درج شده است.

همچنین، آقای محمدرضا صیاد طی نامه‌ای یادآور شدندکه نام ایشان در جُنگ ریاضی دانشجو، ۱، ص ۱۴۸، به‌اشتباه در ردیف فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد آمده است؛ لازم به ذکر است که عنوان پروژهٔ کارشناسی ریاضی ایشان در کتابخانهٔ گـروه ریاضی اشتباهاً در ردیف رساله‌های کارشناسی ارشد ریاضی فهرست شده بود.

ضمن اعلا[illegible] دو اشتباه، از ایشان و نیز از همهٔ خوانندگان محترم پوزش می‌خواهیم.

فهرست

پس از صدمین جلسه

مقاله‌ها

ترتیبهای جزئی وحدود مور-اسمیت — ادوارد جیمز مك‌شین — ۱
خمهای بیضوی — تونی هورروویتس — ۱۵
اتحادهای افرازی ـ از اویلر تا به‌حال — ه. ل. آلدر — ۳۶
تاریخچهٔ کوتاهی از تقلیل گاوس-یوردان — استیون آلتون و رنه‌مك‌لاگلین — ۵۲
خط مماس، نه به‌منزلهٔ یك حد — ایرل بیونز — ۶۸
آنالیز نااستاندارد — مارتین دیویس و روبن هرش — ۸۲
آزمایشهای لایهٔ صابون برای نمایش رویه‌های مینیمال — ریچارد کورانت — ۱۰۰
یك جبر تقسیم برای دنباله‌ها و حساب عملگرهای نظیر آن — لوئیس براند — ۱۰۹
چند ملاحظهٔ تقریبی برای خمهای فضاپرکن لبگ وشونبرگ — هانس ساگان — ۱۲۱
ازهیچ تابیمهایت: مسائل مبارزطلب در رده‌بندی اعداد اصلی — ریچارد فرانسیس — ۱۳۱
روشی بهتر برای فشرده‌سازی تصاویر — مایکل بارنسلی و آلان اسلون — ۱۳۹
حساب دیفرانسیل روی حلقه‌های مرتب — علیرضا رنجبرمطلق — ۱۵۵

نکته‌ها

دو کاربرد کوچك ازقضیهٔ مقدار میانگین — کامبیز محمودیان — ۱۶۴
مضاعف کردن: حقیقی، مختلط، چهارگان، و بالاتر... خوب، شاید — روبرت مور — ۱۶۷
مطلبی شگفت‌آور از هندسه — راس هانسبرگر — ۱۷۱
برهانی برای تساوی رتبهٔ سطری و ستونی یك ماتریس — هانس لایبك — ۱۷۴
مغموم‌علبه‌های صفردرحلقهٔ چندجمله‌ایها — و. ر. اسکات — ۱۷۵

دیدگاه

نامه‌ای سرگشاده — ۱۷۷

گزارشها

گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی کشور — امیراکبری مجدآبادنو — ۱۷۹
جایزهٔ عبدالسلام برای پژوهشگران جوان علوم پایه‌درجهان‌سوم — ۱۸۴

فهرست موضوعی جلدهای ۱، ۲، و ۳ — ۱۸۵