واحد

سال اول شمارهٔ چهارم ۱۵ آذر ۱۳۰۹

مجلهٔ

(ریاضیات)

(عالی و مقدماتی)

مدیر مسئول و مؤسس مصاحب

جای اداره : موقتا ادارهٔ جریدهٔ قانون

طهران ، خیابان باب همایون

(اول و پانزدهم هر ماه منتشر میشود)

(وجه اشتراك در ایران)

سالیانه : از ۴۰ تا ۲۵ قران (برای محصلین ۱۰ قران)

ششماهه : فقط برای محصلین ۶ قران

تك شماره : یك ریال

1re Année N°4 JOURNAL DE 15 Azar 1309

MATHEMATIQUES

ELEMEMTAIRS ET SUPERIEURES

(Paraissant le 1er et le 15 de chaque Mois)

DIRECTEUR : MOSSAHEB

Administration : Téhéran, Avenue Babe Homayoun

ABONNEMENT ANNUEL

Perse: de 40 à 25 Krans.

ETRANGER : 60 FRANCS.

از مقالهٔ تاریخی دانشمند معظم آقای اقبال استفاده کنید

مسائل حساب

مسائل (۱) و (۲) و (۳) و (٤) : محسن تربتی محصل دارالفنون

ورقهٔ نیز بامضای آقای غلامرضا خان عبداللهی که جواب صحیح مسائل(۱)و(۳)و(٤) در آن مندرج بود باداره رسید ولی نظر باینکه هیچگونه توضیحی در باب عملیات خود نداده بودند نتوانستیم راجع بآنها قضاوت کنیم.

۱۰ - ترنی بطول ۸۸ متر از پهلوی شخصی که باسرعت ۷۰٤۰ متر در ساعت در جهت حرکت ترن حرکت میکرد در ۱۰ ثانیه عبور نمود و سپس در ۹ ثانیه از پهلوی شخص دیگری که درجهت آن حرکت میکرد گذشت . مطلوبست سرعت حرکت شخص اخیر .

۱۱ - شخصی در ساعت ٦ صبح از نقطهٔ حرکت می کند . سرعت این شخص درساعت ٥ کیلو متر است . در ساعت ۹ برادرش که در ساعت ۱۵ کیلومتر می پیماید بدنبال وی میرود . معلوم کنید در چند ساعت و در چه فاصله از نقطهٔ عزیمت باو میرسد .

۱۲ - زید از نقطهٔ A بطرف نقطهٔ B وعمرو ازنقطهٔ B بسمت نقطهٔ A در یك لحظه حرکت میکنند. فاصلهٔ A از B ٥٥ میل انگلیسی است و در ۲٥ میلی از نقطهٔ A یکدیگر را ملاقات میکنند . اگر سرعت هر یك ٤ میل در ساعت بود ملاقاتشان ۰ر۱۲ دقیقه بیشتر طول می کشید . مطلوبست سرعت هر یك .

۱۳ - ترنی که در ساعت ٤٥ میل انگلیسی می پیماید درمدت ۲٥ ثانیه ازمقابل ترن دیگری که طولش ۰ر۱ برابر طول آن وسرعتش در ساعت ۲۷ میل انگلیسی است عبور میکند . معلوم کنید ترن اول در چه مدت از مقابل استاسیونی که ۱٦٥ یارد طول دارد عبور می کند. (۱۷٦۰ یارد یك میل انگلیسی است .)

واحد مبادله و اهداء

مجلهٔ ریاضیات

عالی و مقدماتی

پانزدهم آذر ماه ۱۳۰۹ شمسی

بقلم دانشمند معظم آقای میرزا عباس خان اقبال.

علامت x بجای مجهول - معنی جبر و مقابله - ارقام هندی

شاید در میان کسانی که سروکار با ریاضیات دارند و در حساب و جبر و مقابله هزاران مرتبه در محاسبه علامت x و ارقام حسابی مجهول را بکار برده اند کمتر کسانی باشند که بدانند این علامت و ارقام از کجا آمده و عبارت جبر و مقابله که فرنگیها از شکل عربی جزء اول آن یعنی الجبر کلمهٔ Algèbre را گرفته اند چه معنی دارد. ما اینک باختصار بتوضیح علائم و کلمات فوق می پردازیم:

۱- علامت x

مسلمین در کتب جبر و مقابلهٔ خود بجای مجهول در جزء اول هم وقت در مقام کلمهٔ شئ را که در بین مردم بمعنی چیز نامعلوم است بکار می بردند.

در موقعی که عیسویان اروپا در قرون جدیده کتب ریاضی مسلمین را از عربی بالسنهٔ خود ترجمه می کردند کلمهٔ شئ را هم با اندک تحریفی در لغات خود داخل کردند و چون این کار اول بار از طرف عیسویان اسپانیا بعمل آمد ایشان

لغت شئ عربی را xei تلفظ و بهمین شکل بین اختیار و اول دفعه این کار را یکی از ریاضیون اسپانیائی بنام پدرو Pedro از مردم شهر Alcala (القلعه) کرد، بعد از آنکه نوشتن معادلات بصورت دستورها ساده جبری معمول گردید و پایان حرف اول کلمهٔ xei محرف شئ را که x است بجای مجهول در درجهٔ اول اختیار نمودند و برای مجهولات درجات بالاتر قوای آنرا گرفتند.

۲- معنی جبر و مقابله

جبر در عربی بمعنی شکسته بندی و تلافی کردن و مقابله بمعنی آوردن برابر چیزی در حل معادلات جبری چون مسلمین فرمول نداشتند ناچار بودند اعمال اختصار معادلات را ذهنی انجام دهند و با کلمات بنویسند مخصوصا از دو طرف معادله طرفی که مقدار منفی داشت آنرا با افزودن همان مقدار با علامت مثبت بدو طرف معادله از مقدار منفی خلاص می کردند و چون برابر آن مقدار منفی که از یک طرف معادله حذف شده بود مقدار مثبتی بطرف دیگر آن افزوده و جای آن باصطلاح پر می شد این عمل را «جبر» میخواندند. مثلاً در معادلهٔ: $x^2 - 30x = 250$ چون یک طرف معادله مقدار منفی دارد بطرفین آن $30x$ می افزودند تا بصورت $x^2 - 30x + 30x = 250 + 30x$ در می آمد و بهمین نظر که بجای $-30x$ منفی که از یک طرف معادله حذف می گردید $+30x$ مثبت بطرف دیگر آن افزوده و کسر مزبور جبری می شد عمل را جبری می گفتند.

برای رسیدن بجواب عمل دیگری بین لازم است و آن تفریق کردن اعداد معلوم از یک دیگر و مقادیر مجهول از یکدیگر است مثلاً در معادلهٔ فوق باید ۴۰ را از ۲۵۰ تفریق نمود و معادله را بصورت $x^2 = 210 + 30x$ در آورد و با اصطلاح ریاضیون اسلامی دو جزء معلوم و مجهول را در برابر یکدیگر گذاشت، این عمل بمقابله موسوم بود و علمی که از این دو عمل بحث می کرد و طرق آنرا بیان می نمود پیش ایشان علم «الجبر والمقابله» نام داشت.

۳- ارقام هندی

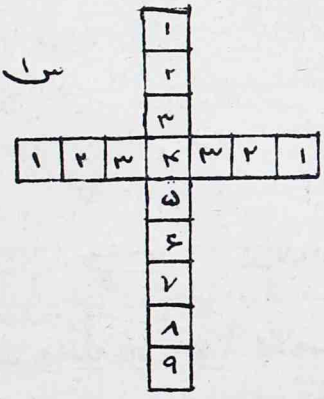
ارقام حسابی یعنی اعداد از (۱) تا (۹) را که ریاضیون قدیم اسلامی ارقام هندی

میگفتند اروپائیان اواخر قرون وسطی و اوایل قرون جدیده پس از آموختن
از مسلمین در مقابل ارقام لاتینی باسم ارقام عربی خواندند و همین ارقامست
که پس از تصرفات چند اعداد فرنگی حالیه از آنها نتیجه شده و هنوز هم
فرنگیها آنهارا Chiffres Arabes یعنی ارقام عربی می گویند.
در باب اصل و منشا این ارقام و اینکه آیا واقعا ارقام مزبور از هند بممالک
اسلامی آمده محققین جدید تحقیقات بسیار کرده اند. مسلمین قرون سوم و
چهارم غالب بر این عقیده بودند که این ارقام از هند و ستان بممالک اسلامی آمد
و همین علت هم آنهارا ارقام هندی می گفتند ولی فضلای جدید فرنگی باشواهدی
که اینجا مجال ذکر آنها نیست ثابت کرده اند که اصلا ارقام مزبور اختراع ایرانیهاست
و ابتدا نیز بین حکمای صوفی مشرب و اهل مجامع سرّی حکمتی معمول و جنبهٔ
رمزی نیز داشته است و بعد ها شیوع یافته.
وقتی که مسلما از مسلمین است رقم صفر است و صفر در عربی بمعنی خالی است و چون
آن رقم نماینده مقداری نیست آنرا باین عنوان خوانده اند و گویا باعث بر وضع
آن نیز آن بوده است که محاسبینی که با ارقام حسابی کار می کرده اند خواسته اند
در حساب عددی نیز مثل حساب سیاقی علامتی در مقابل خط (ترقین) داشته
باشند و خط ترقین خطی است که مستوفیان در موقع عمل جمع یا تفریق وقتی که
جای رقمی خالی می ماند آنرا بجای رقم خالی برای حفظ ترتیب می کشیدند.
کلمهٔ صفر بعد از ترجمهٔ کتب عربی بالسنهٔ اروپائی بشکل Cifra در زبانهای لاتینی
و اسپانیائی داخل شد ولی بدو معنی یکی خصوصی و دیگری عمومی. معنی خصوصی
Cifra در لغت مزبور همان علامت مخصوص صفر است و معنی کلی آن بطور
عموم رقم است و این از نوع تسمیهٔ کل است بجزء زیرا که رقم صفر تنها وقتی بود که
در السنهٔ اروپائی وجود نداشت و اسمی برای آن موجود نبود همین جهت در موقع
قبول ارقام عربی هم کلمهٔ Cifra را برای علامت مخصوصی که نداشتند
گرفتند و هم برای تسمیهٔ کل ارقام عربی و در این معنی دوم لغت Chiffre
در زبان فرانسه هنوز هم باقی است.

«مجلهٔ سودمند»

شمارهٔ اوّل مجلهٔ شریفهٔ سودمند که تحت مدیریّت آقای رازی در طهران ماهی دو شماره منتشر میشود باداره ما رسید. ما استفاده از مطالب سودمند مجلهٔ سودمند را بعموم مخصوصا به معلّمین و معلّمات و محصّلین و محصّلات توصیه نموده بقاء و دوام این مجلهٔ شریفه و موفقیّت آقای رازی که سالهاست از راه جریده نگاری بجامعه خدمت می کنند و سایر کارکنان مجلهٔ مذکوره را آرزومندیم.

«صلیب مرواریدی»



گویند زن یکی از سلاطین مغرب زمین صلیبی از مروارید (مطابق شکل (۱)) برای تعمیر بجواهر ساز خود داد و بوی اظهار داشت که عدّهٔ مرواریدهای موجود در صلیب را می داند، باین قسم که اگر از هر یک از سر انتهای فوقانی تا انتهای تحتانی بشمارد همیشه ۹ مروارید می یابد. جواهر ساز از سادگی صاحبهٔ گلوبند استفاده کرده دو دانه از مرواریدهای آن را برد و بصاحبهاش رد کرد ولی او مطابق حساب خود نقصی در گلوبند ندید. از خوانندگان محترم خواهش می کنیم حلّهٔ جواهر ساز را برای ما بنویسند.

تصحیحات لازمه

شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۳ - سطر ۲۹: (ط - ۱) ۲ غلط و (ط - ۲ط - ۳) (ط - ۱)۲ صحیح است.

شمارهٔ ۳ - صفحهٔ ۹ - سطر ۱۵: قد بمترین غلط و قد بمترین صحیح است.

" " ۱۵ " ۷ " دو برابر " و نصف "

مسئلهٔ معدّل

همه می دانیم که در امتحانات برای اینکه بدرسی پیش اندروس دیگر اهمیت دهند برای هریك از دروس ضریبی قرار داده ضریب آنرا که مهم تر است زیادتر اختیار می کنند و سپس نمرهٔ را که شاگرد در هریك از دروس گرفته در ضریب آن درس ضرب کرده مجموع حاصل ضربها را بمجموع ضرایب قسمت کنند برای اثبات اینکه باین شکل بدرس مهمتر بیشتر اهمیت داده شده برای سهولت فرض می کنیم شاگرد در دو درس که ضرایب آنها a و b است بترتیب نمرات x و y نائل شده باشد اگر بطریق معدل گرفته شود معدلش $\frac{x+y}{2}$ خواهد بود ولی با اهمیت معدل او $\frac{ax+by}{a+b}$ است. اختلاف این دو مقدار مساویست با:

$$\frac{ax+by}{a+b}-\frac{x+y}{2}=\frac{(a-b)(x-y)}{2}$$

اگر $a=b$ یا $x=y$ باشد این اختلاف صفر شده دو معدل مساوی میگردند پس فرض کنیم $a\neq b$ مثلاً $a>b$ و باین صورت اگر x با y معدل باضریب زیادتر خواهد بود و اگر x با y باشد معدل بدون ضریب زیادتر است و از اینجا اینطور نتیجه میشود که اگر نمرهٔ درسی که ضریب بیشتر زیادتر یعنی مهمتر است زیادتر باشد معدل باضریب زیادتر از معدل معمولی خواهد بود و الا کمتر می باشد. (مصاحب)

حل ریاضی

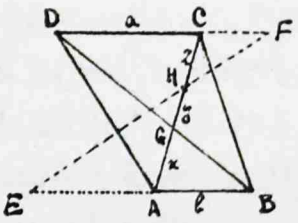
قضیهٔ ۳ - مجموع فواعد هر دو ذو نقص مقرر

برهان - فرض کنیم $AB=b$, $AD=a$ فواعد ذو ذنقهٔ $ABCD$ باشند. هریك از این دو را باندازهٔ دیگر امتداد میدهیم تا نقاط E و F بدست آیند و نقاط تقاطع خطوط EF و DB را با AC بترتیب H و G نموده طولهای CG و GH و HA را z و y و x مینامیم. از تشابه دو مثلث FHC و PHA از طرفی و از تشابه DCG و BGA از طرف دیگر این دو تناسب بدست آید:

$$\frac{a}{b}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y+z}$$

پس:

$$\frac{x}{z}=\frac{y+z}{x+y}$$



از آنجا پس از تفضیل نسبت:

$$\frac{x-z}{z}=\frac{z-x}{x+y}$$

پس:

$$\frac{z}{x+y}=\frac{x-z}{z-x}=-1$$

اما:

$$\frac{z}{x+y}=\frac{a}{b}$$

بالنتیجه $\frac{a}{b}=-1$ یعنی $a+b=0$

علم و تفریح

ایک جلد از این کتاب برای هر خانواده ضروری است.

حکایات واقوال

«ساعت نیوتون»

گویند روزی نیوتون دانشمند معروف انگلیسی میخواست حدث لازم برای طبخ تخم مرغ را معیّن کند پس از چند دقیقه متوجه شد که تخم مرغ را در دست گرفته و ساعت قیمتی خود را که مخصوص اعمال دقیقه بود بجای تخم مرغ جوشانده است!

«آخرین گفتار یک نفر ریاضی دان»

موقعی که بسو (Bossut) ریاضی دان فرانسوی در حال احتضار بود اقوامش ویرا احاطه کرده و با ناله های جان سوز و کلمات تأثر آور از وی درخواست می کردند که مختصر سخنی گوید تا برای آخرین بار صدایش را بشنوند ولی متأسفانه سعیشان بی نتیجه مانده و نالهایشان در بسو تأثیری نبخشید. میر توئی (Maupertuis) دوست بسو که در آن مجلس حاضر بود گفت من شما را بمقصود میرسانم و سر خود را نزدیک گوش بسو برده سؤال کرد «۱۲ ضرب در ۱۲؟» محتضر جواب داد «۱۴۴» و جان بجان آفرین تسلیم کرد!

بشارت

(مژده دوستان مجلهٔ ریاضیات)

از شمارهٔ آتیه مجلهٔ ریاضیات در بیست و چهار صفحه منتشر میشود.

اطلاع

نظر بخواهش جمعی از دوستان محترم وعدهٔ دیاری از محصلین سال سوم متوسطه از شمارهٔ آتیه یکی دو صفحه را به حل و طرح مسائلی که در امتحانات نهائی سیکل اول داده شده و مسائلی که در حدود تحصیلات محصلین این دوره باشد اختصاص میدهیم.

پنج من بنج

با ۱۵ چوب کبریت شکلی مرکب از ۵ مربع مساوی تشکیل داده بعد سه چوب کبریت بردارید بقسمی که سه مربع بیش نماند. اگر جواب این مسئله را یافتید برای ما بفرستید

(۲)

عالم دزد
ترجمه و اقتباس از کتب و مجلات علمی و تاریخی خارجه

قبل از تارتاگلیا.

بی مناسبت نیست در اینجا نام حمائی را که قبل از تارتاگلیا برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم کشف و مبتکر شده بودند متذکر شویم:

۱- در نسخهٔ کهٔ یادگار قرن ۱۴ مسیحی است مؤلف آن لیبری (Libri) بقیاس معادلهٔ درجهٔ دوم دستوراتی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم میدهد ولی این دستورات به کلی خطاست.

مثلاً مطابق دستورات او جواب معادلهٔ $ax^3 = bx + c$ چنین است *

۲- در کتابی باسم Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita که در سنهٔ ۱۴۹۴ میلادی منتشر شده مؤلف آن پاکسیولی (Paccioli) مطالبی راجع بمعادلهٔ درجهٔ سوم مینویسد که با انشاء جبر امروزه چنین بیان می شود: «برای حل معادلاتی که بیکی از صور: $n = ax^3 + bx^4$ و $n = ax^2 + bx^3$ و $n = ax + bx^3$ باشند تاکنون راهی بدست نیامده» (رجوع کنید بجلد ۱۲ مجلهٔ Nouvelles annales de Mathématiques صفحهٔ ۳۹)

۳- چند سال بعد یک نفر ریاضیدان موسوم به سیپیون فرو (Scipion Ferro) که در بولونی (Bologne) متولد شده و بقول آلیدزی (Alidosi) و کاردان (Cardan) از ۱۴۹۶ تا ۱۵۲۶ بتعلیم علوم ریاضی اشتغال داشته بحل معادلاتی که بصورت $x^3 + px = q$ باشند نائل آمده و آن را بشاگرد خود که به فیور (Antonia Maria Fiore) موسوم بوده تعلیم کرده است.

متأسفانه راه حل او یکی از بین رفته است. (دنبالهٔ دارد)

* $x = \frac{b}{2a} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c}$

حل مسائل شمارهٔ اوّل

۱. مسئلهٔ نیوتون (برای صورت مسئله بشمارهٔ ۱ صفحهٔ ۵ رجوع شود) برای حلّ مسئله قبلاً معیّن می کنیم علف چه وسعتی از مزرعه کنونی (یعنی در هنگام ورود گاوها) معادل علفی است که یکروز از بابت آن نمو می کند برای این مقصود گوئیم گاوهای دستهٔ اوّل در ۱۲ روز علف مزرعهٔ بوسعت ۶۰ آر را بعلاوهٔ ۱۲×۶۰ ابر علف وسعت مطلوب خورده اند و گاوهای دستهٔ دوّم در ۱۵ روز علف مزرعهٔ بوسعت ۷۲ آر را بعلاوهٔ ۱۵×۷۲ ابر علف وسعت مطلوب خورده اند بنابراین بابت گاو دستهٔ اوّل در بابت روز علف چمنی بوسعت $\frac{60}{12\times75}$ آر را با انضمام $\frac{60}{75}$ علف وسعت مطلوب و با علف چمنی بوسعت $\frac{72}{15\times81}$ آر را با انضمام $\frac{72}{81}$ علف وسعت مطلوب خورده پس اختلاف $\frac{72}{81}$ و $\frac{60}{75}$ وسعت مطلوب مساویست با: $\frac{72}{15\times81}-\frac{60}{12\times75}$ وچون $\frac{72}{81}-\frac{60}{75}=\frac{4}{45}$ وسعت مطلوب معادل: $\frac{4}{45}:\frac{1}{135}=\frac{4}{1}\times\frac{135}{45}=\frac{12}{1}$ آر خواهد بود. بالنتیجه مقدار علفی که در مدّت اقامت گاوها در چمنها نمو می کند معادلست با مقدار علف سه مزرعه بوسعت: $3\times60=180$ و $\frac{12\times60}{12}=\frac{15\times72}{12}=90$ و $\frac{18\times96}{12}=144$ کرا رتفاع علف در آنها مساوی ارتفاع کنونی آن در مزارع مفروض باشد. باین طریق مسئلهٔ نیوتون باین مسئله راجع می شود:

۷۵ گاو در ۱۲ روز علف مزرعهٔ بوسعت $180+60=240$ آر را با ۸۱ گاو در ۱۵ روز علف مزرعهٔ بوسعت $144+90=234$ آر را خورده اند. بنابراین چند گاو در ۱۸ روز علف چمنی بوسعت $144+96=240$ آر را خواهند خورد؟

این مسئله از مسائل مقدّماتی و سهل است و از حلّ آن معلوم می شود که ۸۰ گاو برای مقصود مذکور در فرض مسئله کفایت می کند.

بطور کلّی فرض کنیم m گاو در y روز علف مزرعهٔ بوسعت s و m' گاو در y' روز علف مزرعهٔ بوسعت s' را خورده باشند میخواهیم بدانیم چند گاو در y'' روز علف مزرعهٔ بوسعت s'' را میخورند

برای حلّ مسئله فرض کنیم n عدّهٔ گاوها و y مقدار علفی که در بابت روز از واحد سطح نمو می کند و h مقدار علف کنونی واحد سطح مزارع باشد. چون m گاو در y روز $sh+ysy$ علف خورده m' گاو در y' روز $\frac{m'y'(sh+ysy)}{my}$ علف میخورند پس $s'h+ys'y'$ $=\frac{m'y'(sh+ysy)}{my}$ بهمین قسم معلوم می شود که $s''h+ys''y''=\frac{n''y''(sh+ysy)}{ny}$

این دو معادله را می توان باین صورت نوشت :

$$h(m'y's - my's') = yy'y'(ms' - m's)$$
$$h(m''y''s - my''s'') = yy'y''(ms'' - s m'')$$

از آنجا :
$$\frac{m'y's - my's'}{m''y''s - my''s''} = \frac{y'(ms' - s m')}{y''(ms'' - s m'')}$$

از حل این معادله چنین نتیجه می شود:

$$m'' = \frac{s''[y'm's(y''-y) - ym's'(y''-y')]}{s's''(y'-y)(y''-y)}$$

مثال عددی - اگر در عبارت فوق بجای حروف مقادیر مفروض در مسئله ۴۰ را قرار دهیم نتیجه می شود: $m'' = 100$

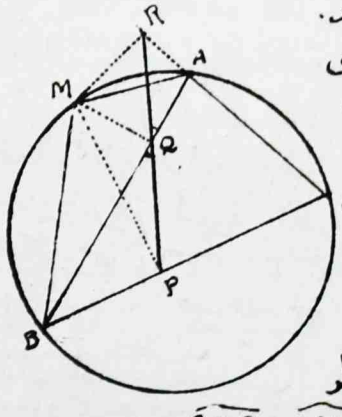
۴۱- مسئله - مطلوبست مقدار عددی $x^3 + 3x + 2$ بازاء $x = (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$ (۱)

حل - چون با ملاحظهٔ دستور $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm \beta^3 \pm 3\alpha\beta(\alpha \pm \beta)$ طرفین تساوی (۱) را مکعب کنیم نتیجه می شود: $x^3 = \sqrt{2}-1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3x = \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}-1)^{-1} - 3x$

$x^3 = -2 - 3x$

پس $x^3 + 3x + 2 = 0$ یعنی مقدار عددی مطلوب صفر است

۴۲- مسئله - ثابت کنید که اگر از نقطهٔ واقع بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث سه عمود بر اضلاع آن فرود آوریم مواقع آنها بر یک استقامت اند.



حل - فرض کنیم P و Q و R مواقع عمودهای وارد از نقطهٔ M بر اضلاع مثلث ABC باشند باید ثابت کرد که دو خط PQ و QR بر یک استقامت اند. برای اثبات این حکم کافیست ثابت کنیم که: $\widehat{AQR} = \widehat{BQP}$ (۱) اما نقاط M و Q و P و B بر محیط دایرهٔ بقطر MB و نقاط A و Q و M و R بر محیط دایرهٔ بقطر AM واقعند پس $\widehat{AQR} = \widehat{AMR}$ و $\widehat{BQP} = \widehat{PMB}$

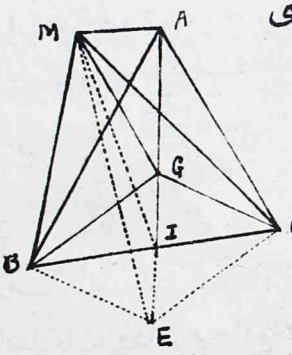
از طرف دیگر دو چهارضلعی CAMB و CAMP محاطی اند پس: $\widehat{AMB} = 180 - \hat{C}$ و $\widehat{RMP} = 180 - \hat{C}$ بنابراین $\widehat{AMB} = \widehat{RMP}$ حال اگر از طرفین این تساوی جزو مشترک AMP را اسقاط کنیم حکم قضیه ثابت می شود (خط PQR را خط سفسون Simpson خوانند.)

۴۳- مسئله - مثلث ABC مفروض است. فرض می کنیم G مرکز ثقل و M نقطه غیر مشخصی از سطح مثلث باشد. او گاه مطلوبست محاسبهٔ $\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$ بحسب اضلاع مثلث. ثانیاً ثابت کنید که: $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ ثالثاً نقطهٔ در سطح مثلث چنان بیابید که مجموع مربعات فواصلش از دوس کمترین مقدار ممکنه را داشته باشد.

حل - $GA=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$ ، $GB=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}}$ و $GC=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}$ و از آنجا پس از مختصر عملیاتی چنین نتیجه می شود:

$$\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

۲- فرض کنیم I وسط BC و E راس چهارم متوازی الاضلاعی که بر CG و GB بنا می شود باشد. از دو مثلث MBC و MEG چنین نتیجه می شود:



$$\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=2\overline{MI}^2+2\overline{IB}^2$$

$$\overline{ME}^2+\overline{MG}^2=2\overline{MI}^2+2\overline{IE}^2$$

وچون G وسط AE است این تساوی نیز حاصل:

$$\overline{MA}^2+\overline{ME}^2=2\overline{MG}^2+2\overline{GA}^2$$

از جمع این سه تساوی پس از مختصر تصرفی معلوم میشود که:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+2(\overline{IB}^2+\overline{GA}^2-\overline{IE}^2)$$

مقدار داخل پرانتز از وضع نقطهٔ M مستقل است پس برای تعیین آن کافی است M را در موضع مناسبی قرار دهیم مثلاً اگر M بر G منطبق گردد از اینجا حاصل آید:

$$\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=0+2(\overline{IB}^2+\overline{GA}^2-\overline{IE}^2)=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

از آنجا:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

۳- از تساوی فوق معلوم است که $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ وقتی کمترین مقدار خود را اختیار می کند که $\overline{MG}^2$ صفر یعنی M بر G منطبق باشد.

۴۴- مسئله - دستگاه ذیل را حل کنید:

$$x^2+y^2+z^2=14 \qquad y(x+z)=1 \qquad x^2z^2-4xz+3=0$$

حل - از معادلهٔ سوم دستگاه این طور نتیجه می شود: $xz=3$ یا: $xz=1$

اولاً $xz=3$ - چون طرفین این معادله و معادلهٔ دوم دستگاه را مضاعف کرده

با معادلهٔ اوّل جمع کنیم چنین حاصل میشود: $x^2 = (z+y+x)^2$ پس: $z+y+x = \pm x$
از آنجا: $y+z = \pm x - x$ بقسمی که معادلهٔ دوّم دستگاه مفروض باین صورت بیرون
می آید: $(y+z)(y+z \mp x) = 0$ یا: $y^2 + 2yz \mp 2xy = 0$ از آنجا چهار مقدار $+2$ و -2 و
$+4$ برای $\frac{x}{z}$ بدست می آید و مقادیر نظیر آنها از $\frac{x}{z}$ عبارتند از: $(\frac{x}{z} = 1$ و $\frac{x}{z} = 3)$ و
$(\frac{x}{z} = 1+\sqrt{2}$ و $\frac{x}{z} = 1-\sqrt{2})$ و $(\frac{x}{z} = -1+\sqrt{2}$ و $\frac{x}{z} = -1-\sqrt{2})$

ثانیاً z از اینجا نیز هشت دسته جواب دیگر بدست می آید.

۵ـ **مسئله** ـ مطلوبست حدّ $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ وقتی $x \to a$

حل ـ اگر کسر مذکور را با y بنامیم با ملاحظهٔ: $\sqrt{x}-\sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$
و $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x-a}$ چنین نتیجه میشود:

$$y = \frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+1}{\sqrt{x+a}}$$

اینک اگر $x \to a$ این کسر بمیت $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ میل میکند.

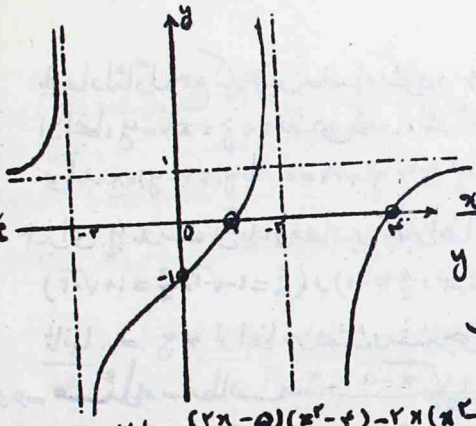
۶ـ **مسئله** ـ مطلوبست اوّلاً تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$
ثانیاً x بین چه حدودی تغییر کند تا y بتواند جیب قوسی مانند α گردد

حل ـ ۱ـ طریق مستقیم ـ بازاء جمیع مقادیر x غیر از ± 2 تابع متصل است بازاء
$(x = 4$ و $x = 1)$ صفر میشود و وقتی x بی نهایت بزرگ شود بطرف واحد میل میکند. پس
خطوط $x = \pm 2$ و $y = 1$ مجانبهای منحنی نمایش تغییرات y میباشند. برای تعیین y
بازاء $x = \pm 2$ اوّلاً فرض کنیم x مجاور -2 باشد یعنی $x = -2 \pm \varepsilon$ (ε مقدار مثبت بی
نهایت کوچک) y باین شکل می شود: $y = \frac{(-6+\varepsilon)(-3+\varepsilon)}{\varepsilon(-4+\varepsilon)}$. اگر ε یعنی x
کوچکتر از -2 باشد صورت و مخرج کسر فوق مثبت و بنابراین مقدار آن مثبت است
واگر $\varepsilon > 0$ یعنی x از -2 بزرگتر باشد صورت کسر مثبت و مخرج آن منفی خواهد بود
و بالنتیجه مقدار کسر منفی است بقسمی که بازاء $x = -2$ تابع از $+\infty$ به $-\infty$ میرود
همین قسم معلوم می شود که بازاء $x = 2$ تابع از $+\infty$ به $-\infty$ عبور می نماید.

برای تعیین ماکزیموم و مینیموم y معادلهٔ $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$ را چنین مینویسیم

$$x^2(y-1) + 5x - 4(y+1) = 0$$

شرط حقیقی بودن ریشه های این معادله آنست که $\Delta = (y-1)^2 + 25 + 16y \geq 0$
و چون این شرط همیشه و بازاء جمیع مقادیر y برقرار است تابع



نه ماکزیمم و نه مینیمم دارد.
جدول تغییرات و منحنی آن از
این قرار است:

x	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

۲ بوسیلهٔ مشتق - مشتق

تابع عبارتست از:

$$y' = \frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+4)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

این مقدار همیشه مثبت است و بنابراین تابع پیوسته صعودیست. بالنتیجه بازاء $x=\pm 2$ y از $+\infty$ به $-\infty$ میرود. جدول تغییرات و منحنی آن بقرار زیر است که در فوق مذکور شد.

۲- برای اینکه y بتواند چپ قوسی گردد لازم و کافیست که $y' > 1$ یا $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4} > 1$

اولاً $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4} > 1$ یا $\frac{-5x+8}{x^2-4} > 0$ از حل این نامساوی چنین نتیجه می شود $\frac{8}{5} > x > 2$ یا $x < -2$ و بنیز از نامساوی دوم معلوم می شود که $x > 2$ یا $-2 < x < 2$ و بالاخره $x > 0$ برای اینکه مقایسهٔ این مقادیر بسهولت انجام گیرد خطی رسم نموده فواصلی را که در آنها نامساوی اول برقرار است بواسطهٔ پرداشهائی واقع در فوق خط و فواصلی را که در آنها نامساوی دوم مقرر است بواسطهٔ پرداشهائی واقع در زیر خط معین میکنیم. فواصلی که دارای هر دو نوع پرداشند جوابهای مسئله را معین

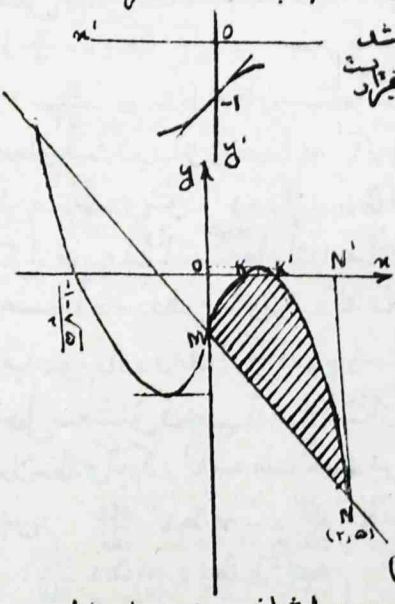


میکنند و این فواصل عبارتند از $(\frac{8}{5}, 0)$ و $(2, +\infty)$ و وقتی x در یکی از آنها واقع باشد y چپ قوسی خواهد بود. (طریقهٔ فوق الذکر در حل دستگاه نامساوی بسیار مفید و قابل توجه است)

۳- مسئله- منحنی $y = x^3 - 2x^2 + 1$ و خط $x + 2y = 0$ مفروض است. نمایش منحنی و خط را نسبت بدو محور رسم کرده قطعهٔ از سطح را که در سمت راست محور yها محصور بین خط و منحنی و محور xها است حساب کنید (سال ششم دارالمعلمین مرکزی سنهٔ ۱۳۰۵)

حل- اولاً رسم منحنی- بازاء $x=1$ تابع صفر میشود پس y به $x-1$ قابل قسمت است و پس از تقسیم معلوم میشود که $y = (x-1)(x^2-x-1)$ بنابراین بازاء ریشه های

معادلهٔ $x^2+x-1=0$ یعنی بازاء $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ نمودار y صفر است بازاء $x=\pm\infty$ تابع $\pm\infty$ می‌گردد (رجوع کنید بشمارهٔ اول صفحهٔ ۱۹) بعلاوه تابع همیشه متصل می‌باشد.
مشتق آن $y'=3x^2+2x-1$ بازاء $x=\frac{-1\pm\sqrt{4}}{3}$ صفر می‌شود. در فواصل $(-\infty$ و $\frac{-1-\sqrt{4}}{3})$ و $(\frac{-1+\sqrt{4}}{3}$ و $+\infty)$ مشتق مثبت و بنابراین تابع نزولی است و در فاصلهٔ $(\frac{-1-\sqrt{4}}{3}$ و $\frac{-1+\sqrt{4}}{3})$ تابع صعودی می‌باشد. بازاء $x=\frac{-1-\sqrt{4}}{3}$ y ماکزیمومی معادل $2,08$ و بازاء $x=\frac{-1+\sqrt{4}}{3}$ مینیمومی معادل $-2,08$ دارد. مشتق ثانی آن $y''=6x+2$ بازاء $x=0$ صفر شده و از $-\infty$ به $+\infty$ میرود پس نقطهٔ $x=0$ طولش باشد نقطهٔ انعطاف و شکل منحنی در حوالی این نقطه بقرار زیر است که در شکل (۱) دیده میشود. خلاصهٔ تغییرات تابع در جدول و منحنی ذیل هند رجست:



x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}\sqrt{4}$		0		$+\frac{1}{3}\sqrt{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$2,08-$	↗	-1	↗	$0,08+$	↘	$-\infty$

چون وجود صفرهای تابع در جدول لزومی ندارد از درج آنها خودداری کرده و فقط در رسم منحنی برای اینکه نظر وضع مراعات شده باشد مکان آنها را معین کرده‌ایم.)

۲- رسم خط - نقاط تقاطع خط $y=2x+1$ با محورین عبارتند از: $A(-\frac{1}{2},0)$ و $B(0,1)$ پس خط AB نمایش تابع $y=2x+1$ می‌باشد

۳- سطح مطلوب قسمتی است که پرداخته‌ایم. برای محاسبهٔ آن قبلاً مختصات نقطهٔ تلاقی خط و منحنی یعنی مختصات نقطهٔ N را حساب می‌کنیم و برای این مقصود مجموعهٔ دستگاه $y=-x^3+2x+1$ و $y=2x+1$ میپردازیم. از این دستگاه نتیجه می‌شود: $x^3=x^2+x$ از آنجا ($x=0$ یا $x=2$) نقطهٔ N نظیر $x=2$ است پس عرض معادل $y=(2\times2)+1=5$ می‌باشد. پس از این مقدمه گوئیم اگر S وسعت مطلوب باشد:

$$S = \text{سطح } MONN' - \text{سطح } MOK = \text{دوذنقهٔ } MONN'$$

امّا: $\text{دوذنقهٔ } MONN' = \frac{ON'}{2}(MO+NN') = \frac{2}{2}(1+5) = 6$

سطح MOK $= \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{0} (-x^3+2x-1)\,dx = \left(-\frac{x^4}{4}+x^2-x\right)_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{0} = \left|\frac{9-5\sqrt{5}}{8}\right| = 0{,}27$

سطح $K'NN' = \int_{0}^{2} (-x^3+2x-1)\,dx = \left(-\frac{x^4}{4}+x^2-x\right)_{0}^{2} = 1{,}75$

پس $S = 6-(0{,}27+1{,}75) = 3{,}98$

۶۸- **مسئله** - معادلهٔ $a\cos x + \sin x = a$ را حل کنید. تعیین کنید بزرگترین مقدار a را که بازاء آن معادلهٔ مفروض دارای جواب باشد.

حل - طرف اول معادله مساوی است با: $\sin x + \sin(\frac{\pi}{2}-x) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ (۱)

بقسمی که معادلهٔ مفروض چنین می شود: $a\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

شرط امکان مسئله آنست که $\frac{a}{\sqrt{2}} \geq 1$ یعنی $a \geq \sqrt{2}$ و از اینجا معلوم است که بزرگترین مقدار a $\sqrt{2}$ می باشد. بازاء این مقدار از معادلهٔ (۱) این قسم نتیجه می شود: $\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 1$ از آنجا: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ در حالتیکه α یکی از قوسهائی باشد که معادلهٔ (۱) صدق می کند سایر اجوبهٔ معادله عبارتند از: $2k\pi \pm \alpha$

۶۹- **مسئله** - در هر مثلث $A'B'C'$ داریم $\sin A' + \sin B' + \sin C' = \Delta$. ثابت کنید که بازاء مقداری از Δ مینیموم دارد و مقدار مینیموم را حساب کنید.

حل - مشتق Δ بجسب i عبارتست از: $\frac{d\Delta}{di} = 1 + \frac{dl'}{di} + \frac{dm'}{di}$. برای محاسبهٔ $\frac{dl'}{di}$ ملاحظه می کنیم که: $\sin l' = n\sin i$ پس: $n\cos i' \frac{di'}{di} = \cos l' \frac{dl'}{di}$ اما $A' = l' + r' + m'$

پس: $\cos l' \frac{dl'}{di} = -n\cos r' \frac{dr}{di}$. از تساوی $\sin r' = n\sin i$ حاصل میشود: $\cos r' \frac{dr'}{di} = n\cos i \frac{dr}{di}$

بالنتیجه: $\cos i' \frac{di'}{di} = -\frac{\cos r' \cos i}{\cos r}$ بنابراین: $\frac{dl'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos l' \cos r}$

پس: $\frac{d\Delta}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos l' \cos r} = \frac{\cos l' \cos r - \cos i \cos r'}{\cos l' \cos r}$

اگر در جملهٔ این کسر را در مقدار مثبت $\cos l' \cos r \cos r' + \cos i \cos r$ ضرب کنیم صورت آن چنین می شود: $-(\sin^2 r' - 1)(\sin^2 r - 1) = \cos^2 r' \cos^2 r - \cos^2 r' - \cos^2 r + 1$

$(\sin^2 r - \sin^2 r') = \frac{n^2-1}{n^2}(\sin^2 r' - 1)(\sin^2 r - 1)$

پس: $\frac{d\Delta}{di} = \frac{n^2-1}{n^2(\cos r \cos l' + \cos i \cos r')\cos l' \cos r}(\sin^2 r - \sin^2 r')$

کسر طرف ثانی بفرض $n > 1$ همیشه مثبت است عامل ثانی بازاء $r' = r$ صفر میشود و قبل از آن (مثلا بازاء $r' = 0$) منفی و بعد از آن (مثلا بازاء $r' = \frac{\pi}{2}$) مثبت است پس وقتی $r' = r$ باشد Δ مینیموم و مقدار این مینیموم معادلست با: $\Delta_m = 2(i-A)$

مثلاً ۵ - در موقعی که انحراف مینیموم یعنی $D=d$ باشد $A=2r$ و :
$n=\frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$ خواهد بود. دستور اخیر برای تعیین نمایندهٔ n بکار میرود

مسئله - حسن و حسین و علی بازنهای خود مسماة به اختر و عصمت و عفت بازار
رفتند هر یک آنقدر دستمال میخرند که عدهٔ آنها مساوی قیمت یک دستمال باشد بعد
از بازار آنکه خرج هر مردی ۴۳ قران بیش از خرج زنش باشد و بعلاوه حسن ۲۳
دستمال بیش از عصمت و حسین ۱۱ دستمال بیش از اختر خریده باشد زن هر یک را تعیین کنید.

حل - فرض کنیم x عدهٔ دستمالهائی که یکی از مردها خریده و y عدهٔ دستمالهائی که
دیگری خریده باشد. از فرض مسئله این معادله بدست می آید : $x^2-y^2=63$ یا
$(x+y)(x-y)=63\times1=21\times3=9\times7$ پس این سه دستگاه حاصل میشود:

$$\begin{cases}x+y=63\\x-y=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=21\\x-y=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=9\\x-y=7\end{cases}$$

نتیجه: $(y=31$ و $x=32)$ و $(y=9$ و $x=12)$ و $(y=1$ و $x=8)$

چون ۱۱=۱-۱۲ حسین ۱۲ دستمال و اختر یک دستمال خریده و چون ۲۳=۹-۳۲
حسن ۳۲ دستمال و عصمت ۹ دستمال ابتیاع نموده با النتیجه علی ۸ دستمال و عفت ۳۱
دستمال خریده. بنابراین اختر زن علی و عصمت زن حسین و عفت زن حسن است

مسائل حل کردنی

مسئله - وقتی سن من مساوی سن فعلی شما بود سن شما نصف سن من بود
و وقتی سن شما مساوی سن فعلی من شود مجموع سنین ما ۶۳ سال خواهد شد
هر یک چند سال داریم؟ (حل جبری و حسابی)

مسئله - شخصی صاحب قروض ذیل است: c_1 تومان بموعد n_1 سال.
c_2 تومان بموعد n_2 سال و..... و c_p تومان بموعد n_p سال. میخواهد
مبلغ $c_1+c_2+\dots$ را بیک مرتبه بپردازد. پس از چه مدت باید این مبلغ را ادا کند؟

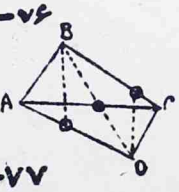
مسئله - ثابت کنید که اگر $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc=0$
باشد دو مقدار $ab^5+bc^5+ca^5$ و $a^5b+b^5c+c^5a$ مساویند (مصنا)

مسئله - کسر $\frac{2n\dots\dots(n+2)(n+1)}{1.3.5.7\dots\dots(2n-1)}$ را مختصر کنید. (De Longchamps)

مسئله - دو متحرک در یک لحظه یکی از نقطهٔ A بسمت D و دیگری از نقطهٔ B

بطرف C عزیمت می کنند نقاط C و D نسبت به A و B در یک طرف و A ص
مطرح جلو تر از B واقع شده. در ابتدای حرکت نسبت سرعت اولی (A) به سرعت د
(B) مثل نسبت ۴۰ است به سی و نه (۳۹) ولی وقتی فاصلهٔ A از B مع
½ فاصلهٔ اولی از مقصدش گردید سرعت A $\frac{79}{80}$ مقدار اولی آن می گردد.
دو دقیقه بعد فاصلهٔ دو متحرک مساوی میشود با ۳ متر با ضافهٔ نصف فاصله
از مقصدش. در این هنگام از سرعت اولی مجدداً متر در دقیقه کم میشود و بسرعت
دومی که تا حال ثابت بود ۸ متر در دقیقه افزوده می گردد و یک دقیقه بعد دومی
بمقصد رسیده و اولی به ۳ متری از مقصد خود میرسد. مطلوبست فاصلهٔ

۷۶- **مسئله**- هرگاه در چهار ضلعی AB CD زوایای B و D قائمه باشند محل تلا
عمودهای وارد از رؤس D و B بر AC با اضلاع CB و AD با محل تلاقی اقطار
یک استقامتند.



۷۷- **مسئله**- بدو انتهای شاهین ترازوئی که تا میلیمتر را نشان میدهد دو مکعب
آونجه ایم خط الراس یکی ۳ سانتی و وزن مخصوصش ۴٫۸۸ و خط الراس دومی ۵ سانتی
و وزن مخصوص آن ۱٫۰۵۵ می باشد. شاهین افقی می ایستد؟ کدام یک از دو مکعب
چقدر بر شاهین حرکت دهیم تا شاهین افقی بایستد؟
اسباب اولی را در سرپوش ماشین تخلیه که دارای کاز کربنیک در شرایط (۷۶ و ۰) است
قرار داده آنقدر تخلیه می کنیم که شاهین افقی شود. در این موقع فشار گاز سرپوش چقدر است؟
آیا ممکن است فشار کاز را تغییر نداده فقط بواسطهٔ تغییر درجهٔ حرارت آن شاهین را
افقی کرد؟ برای این مقصود حرارت کاز را چقدر باید بالا برد؟ (در این قسمت از
انبساط جامداتی که در مسئله دخالت دارند صرف نظر می کنیم). معلومات: وزن مخصوص
کاز کربنیک نسبت بهوا ۱٫۵۲۹ وزن یک لیتر هوا ۱٫۲۹۳ گرام. $\alpha = \frac{1}{273}$ شرایط محیط
خارج ۰° و ۷۶ سانتیمتر.

۷۸- **مسئله**- دو عدد اعشاری چنان تعیین کنید که جزء اعشاری آنها مساوی و مضاف
جزء اعشاری حاصل ضربشان باشد.

۷۹- **مسئله**- در مملکت ایران در سال m کنتال گندم از محصول مملکت و n کنتال
گندم خارجه مصرف می شود و قیمت یک کنتال گندم q فرانک است. بمناسبت مالیاتی که

بگندم خارجه می‌دهند قیمت کندم بکنتالی $\frac{b}{a}+9$ بالغ می‌گردد ولی در عوض از خارجه بقدری گندم وارد می‌کنند که خرج تغییر ننماید. بنابرآنکه مالیات گندم خارجه کنتالی m فران و s ثابت باشد عدد m را چنان تعیین کنید که عایدهٔ حاصل ازین مالیات ماکزیموم باشد.

۸- **مسئله**- سه سطح متغیر α و β و γ باسطح مفروضی موازیند. ثابت کنید که اگر نقاط تقاطع این سطوح را با دو خط معین D و D' بترتیب به A و B و C و A' و B' و C' بنامیم عبارت: $\frac{AA'}{AB.AC}+\frac{BB'}{BC.BA}+\frac{CC'}{CA.CB}$ مقدار ثابتی دارد.

۸۱- **مسئله**- مطلوبست محاسبهٔ سطح دایره بمدد توابع اولیه.

۸۲- **مسئله**- اگر I و I' نقاط تابش و انکسار شعاع نور بر منشوری باشد نقطهٔ تلاقی قائمهای مار بر این نقاط از شعاع تابش و شعاع منکسر متساوی البعداست.

۸۳- **مسئله**- عددی مانند $\overline{ab}$ چنان بیابید که مجذورش بشکل $\overline{acdb}$ باشد (مصاحب)

۸۴- **مسئله**- اعدادی مانند a_1 و a_2 و a_3 و..... چنان بیابید که اتحاد ذیل محقق شود

$$\log(1+x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots\dots\dots$$

۸۵ **مسئله**- توپی بوزن یک تن گلولهٔ بوزن ۵ کیلوگرام را با سرعت اولیهٔ ۵۰۰ متر در ثانیه بطور افقی پرتاب می‌کند اولاً مطلوبست (فرس وپو) کلوله- ثانیاً بنابر آنکه پرتاب کلوله بواسطهٔ احتراق ۵ گرم باروط انجام گرفته باشد و از احتراق هر گرم باروط ۳۸۰۳ کالری کوچک حرارت تولید شود از ذی سنتیک کلوله چه کسری از انرژی حاره مصروف می‌باشد؟ ثالثاً بواسطهٔ احتراق باروت توپ با سرعت اولیهٔ ۲،۵ متر در ثانیه بطور افقی بعقب میرود و در این حرکت یک انتهای فنری را که انتهای دیگرش ثابت است می‌کشد. در صورتی که اصطکاک موجود نباشد توپ چقدر بعقب میرود؟ و اگر فقط دو متر بعقب رود انرژی که بواسطهٔ اصطکاک هدر شده چقدر است و چقدر حرارت از این انرژی تولید میشود؟ می‌دانیم که کشش فنر متناسب است با تغییر مکان انتهای متحرک آن و برای یک سانتی متر حرکت مقدار آن یک کیلوگرام می‌باشد.

ریاضیات عالی

معادلهٔ ریکاتی

(بقیه از شمارهٔ قبل)

برای تعیین حالات دیگر که معادلهٔ ریکاتی قابل حل است در معادلهٔ $\frac{dy}{dx}+Ay^2=Bx^m$ تبدیل $y=\frac{1}{y}$ و $x=x^{\frac{1}{m+1}}$ را انجام می دهیم بعد معادله حاصل می شود:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{B}{m+1}y^2=A\,x^{\frac{-m}{m+1}}$$

بقسمی که اگر $\frac{m}{m+1}$ - را به θ_m بنامیم باز اء مقادیری از m که $\theta_m^i=0$ باشد معادلهٔ ریکاتی قابل حل میباشد و پس از محاسبه θ_m^n بعد دستورات سابق الذکر نتیجه می شود $m=\frac{-4n}{2n\pm1}$. پس بطور خلاصه وقتی $m=-\frac{4n}{2n+1}$ (n عدد بث صحیح و مثبت) باشد می توان معادلهٔ ریکاتی را حل کرد. (خاتمه)

۱۸- مسئله - مطلوبست محاسبهٔ سطح مثلثی که مختصات رؤسش (۵،۲،۱) و (۸،۳،۴) و (۹،۷،۵) باشند.

حل - اگر رؤس مثلث را به A و B و C بنامیم سطح مثلث معادلست با: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|$ مؤلفه‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بترتیب عبارتند از (۵،۱،۳) و (۴،۵،۴) پس مؤلفه‌های $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ چنین اند: $-11=-15+4$ ، $-8=-20+12$ ، $21=4+25$ پس:

$$\text{سطح ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{21^2+8^2+11^2}=\frac{1}{2}\sqrt{626}=12,52$$

۱۸- مسئله - توابع $\frac{\sqrt{1-\cos^3(x-a)}}{x-a}$ و $\frac{\sin\frac{1}{x-a}}{1+e^{\frac{1}{x-a}}}$ باز اء $x=a$ منفصل اند مطلوبست نوع انفصال هریك.

حل-۱ - فرض کنیم $x-a=\varepsilon$. اگر تابع اول را به $f(x)$ بنامیم $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos^3\varepsilon}}{\varepsilon}$ اما: $\varepsilon=1-\cos^2\varepsilon$ ($\cos^2\varepsilon$ تابعی است که وقتی $\varepsilon\to0$ بسمت $+1$ میل مینماید) پس برحسب آنکه ε مثبت یا منفی باشد: $f(x)=\pm\sqrt{\frac{+3\varepsilon^2-3\varepsilon^4+\varepsilon^6}{\varepsilon^2}}=\pm\sqrt{+3-3\varepsilon^2+\varepsilon^4}$ حال اگر $x\to a$ یعنی $\varepsilon\to0$ $f(x)$ بسمت $\pm\sqrt{3}$ میل میکند پس $f(a+0)$ و $f(a-0)$ هر دو بسمت حدّ معیّنی میل میکنند منتها این دو حد مختلفند پس انفصال تابع از نوع اول است.

۲- اگر تابع را به $f(x)$ بنامیم با فرض سابق می توان چنین نوشت: $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{\varepsilon}}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ اگر $\varepsilon>0$ باشد در حدّ این کسر بسمت صفر میل میکند ولی اگر $\varepsilon<0$ باشد بسمت حدّی میل

نمیماند یعنی $\varphi(a+0)$ بسمت صفر میل کرده و $\varphi(a-0)$ حدی ندارد پس تفصلا تابع از نوع دوم است

۸۸- **مسئله**- مطلوبست محاسبهٔ $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2}$ (امتحان آگرگاسیون ریاضیات پاریس)

حل- قبلا جامع نامعین: $I=\int \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2}$ را حساب کنیم. برای این مقصود فرض کنیم:

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

بسهولت معلوم میشود که: $A=1$ و $B=-2$ و $C=1$ و $D=0$ و $E=2$ و $F=+1$

پس:

$$I=\int \frac{dx}{x^2}-2\int \frac{dx}{x}+\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{x}-2\log x^2+\log(x^2+x+1)+\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$$

برای محاسبهٔ جامع اخیر قبلا آنرا چنین مینویسیم

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

امّا $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ بفرض کنیم: $u=\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ چنین نتیجه میشود:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{\frac{9}{16}(u^2+1)^2}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{u}{u^2+1}+\operatorname{arctg} u\right)$$

پس:

$$I=-\frac{1}{x}+\log\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{3(2x+1)}{\sqrt{3}(4x^2+4x+4)}+\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

اکنون اگر در این عبارت بجای x عدد مرتبا ۱ و ۲ قرار داده حاصل اول را از حاصل ثانی بکاهیم مقدار جامع معیّن مفروض بدست می آید.

۸۹- **مسئله**- منحنی $x=\frac{1-2au}{U+a}$ و $y=\frac{u-au^2}{U+a}$ که در آن $z=\frac{a}{U+a}$ کدام U تابعی است از u مفروض است. U را چنان تعیین کنید که وقتی a تغییر کند فامیل فوق دارای لفافی باشد. (لیسانس بردو)

حل- شرط مطلوب اینست که: $\frac{\partial x}{\partial a}:\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\partial z}{\partial a}:\frac{\partial z}{\partial u}$ و در اینجا این شرایط $\frac{\partial x}{\partial u}:\frac{\partial y}{\partial u}$ چنین میشوند: $\frac{2a^2+2a(U-uU')+U'}{2uU+1}=\frac{a^2u+a(uU-1-\frac{1}{2}u^2U')-U+uU'}{\frac{u^2}{2}U+u^2}$

یا پس از حذف a بین این دو معادله $U'u+U=0$ از آنجا: $U=cu^2$.

مسائل حل کردنی

۹۰- **مسئله**- مطلوبست نمایش تغییرات تابع $x^4-4ax^2y+ay^3=0$

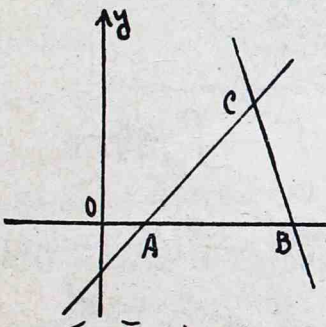
۹۱- **مسئله**- معادلهٔ $x^2y''-(2n-1)y'x+n^2y=0$ را حل کنید.

(مصاحب)　　(بقیه از شمارهٔ قبل)　　(جبر و مقابله)

تبصره - در حالتی که هیچ یک از ضرایب معادلهٔ درجهٔ اول صفر نباشند معمولاً برای رسم نمایش آن نقاط تقاطعش را با محورین معیّن می کنند مثلاً در مثال فوق برای تعیین نقاط تقاطع خطّ $x+y=1$ با محورین بترتیب x و y را مساوی صفر قرار داده مقادیر y و x را تعیین می کنیم. نقاط $A(0,1)$ و $B(1,0)$ نقاط تقاطع خط با محورین می باشند و خطّ AB نمایش تابع $y=1-x$ است.

مسائل راجع بخطّ مستقیم

۱۳- مسئله ۱- مطلوبست زاویهٔ دو مستقیم که ضرایب زاویهٔ آنها m و m' باشد



حل - فرض کنیم C محلّ تلاقی دو مستقیم $AC(m)$ و $BC(m')$ و V زاویهٔ آنها باشد از مثلّث ABC نتیجه می شود: $V=\widehat{CBx}-\widehat{CAx}$ پس:

$$tg\,V=\frac{tg\,\widehat{CBx}-tg\,\widehat{CAx}}{1+tg\,\widehat{CBx}\cdot tg\,\widehat{CAx}}$$

امّا $tg\,\widehat{CBx}=m'$ و $tg\,\widehat{CAx}=m$ پس:

$$tg\,V=\frac{m'-m}{1+mm'} \quad (1)$$

از این دستور V بدست می آید

۱۴- قضیّه - شرط لازم و کافی برای این که دو خطّ مستقیم موازی باشند آنست که ضرایب زاویهٔ آنها مساوی باشد.

زیرا اوّلاً اگر دو مستقیم موازی باشند $V=0$ پس $m'-m=0$ یعنی $m=m'$ ثانیاً اگر $m=m'$ باشد از دستور فوق نتیجه می شود $V=0$ یعنی دو مستقیم موازی اند

۱۵- قضیّه - شرط لازم و کافی برای این که دو خطّ مستقیم بر هم عمود باشند آنست که حاصل ضرب زاویهٔ آنها ۱- باشد. (برای اثبات باید ملاحظه کرد که وقتی دو مستقیم بر هم عمودند $V=\frac{\pi}{2}$)

۱۶- مسئله ۲- مطلوبست معادلهٔ کلّیهٔ خطوط مستقیمی که بر نقطهٔ مفروض $A(x_0,y_0)$ بگذرند

حل - معادلهٔ کلّی خطّ مستقیم اینست: $y=ax+b$ برای اینکه این خط از نقطهٔ A بگذرد باید $y_0=ax_0+b$ و چون b را از دو معادله استخراج نموده مساوی قرار دهیم نتیجه می شود: $y_0-ax_0=y-ax$ یا $y-y_0=a(x-x_0)$ (2)

۱۷- مسئله ۳- مطلوبست معادلهٔ خطّ مستقیمی که بر دو نقطهٔ مفروض $A(x_1,y_1$ و

از اشخاصی که

کتبا تقاضای اشتراك می نمایند تمنا داریم اسم و آدرس خود را با خط خوانا بنویسند تا اداره در ارسال مجله برای آنهادچار زحمت نشود . ما من بعد ازفرستادن مجله بادرسهائی که بواسطه بدی خط مشکوك باشند خود داری خواهیم نمود .

(بقیه از شماره قبل)

حرکت (متمم حساب مقدماتی)

حل ـ ۱ ـ برای اینکه ترن ثانی ازمقابل
اول بگذرد باید مسافتی معادل ۱۷۶ متر ر
ترن دوم داردیعنی : ۷۹۲۰۰ = ۱۵۸۴۰۰
یا ۲۱ متر در ثانیه به پیماید پس مدت
۸ = ۲۲ : ۱۷۶ (ثانیه) . از قسمت دوم مس
ترن اول باسرعت ۲۲ متر درثانیه مسافتی معادل
طول ترن دوم را در ۱۵ ثانیه طی کرده پس طول
با : ۱۵۴ = ۱۷۶ ـ ۱۵ × ۲۲ (متر) .

(در قسمت مسائل حساب مسائلی راجع بحرکت
و خوبست اشخاصی که این سطور را می خوانند آنهارا حل

مسائل راجع به ساعت .

اغلب مسائل راجع بساعت با ملاحظات فوق الذکر بسه
حل می شوند و ما من باب نمونه مسائل ذیل را متذکر میشویم

(دنباله دارد .)

عنوان حضرت آقای میرزا الصدر خان کرام

آدرس شیراز ـ معارف

ازخواندن مقالهٔ «ابوریحان بیرونی و حساب دانه های گندم خانه های شطرنج» بقلم دانشمند معظم آقای اقبال و حساب موقعی که دنیا تمام می شود مجلهٔ ریاضیات غفلت نکنید .

ل مقدم

چهار راه حسن آباد

با شکوه این هتل و ارکستر عالی آن
هترین طرز برای پذیرائی واردین تشکیل
استفاده فرمائید .
یز های بیلیارد برای بازی نیز حاضر است
فامیلهای محترم می توانند در این هتل از
همانهای گرام خود با بهترین ترتیب پذیرائی نمایند .

بعد از یك هفته

همه شب دانسهای اروپائی را از ساعت ۹ ببعد مشاهده فرمائید .

نمره اعلان ٤