واحد

سال اول شمارهٔ اول — اول آبان ۱۳۰۹

ریاضیات

عالی و مقدماتی

مدیر مسئول و مؤسس مصاحب

جای اداره : موقتا ادارهٔ جریدهٔ قانون
(خیابان باب همایون)

اول و پانزدهم هر ماه منتشر می شود

(بهای نامه در ایران سه ماهه)

سالیانه : از ٤٠ تا ٢٥ قران (برای محصلین ١٠ قران)

ششماهه: فقط برای محصلین ٦ قران

1 er Anneé - Ne 1 — JOURNAL DE — 1 er Aban. 1309

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES ET SUPÉRIEURES

(Paraissant le 1er et le 15 de Chaque Mois)

DIRECTEUR : MOSSAHEB

Administration : Avenue Babe Homayoun

Abonnement Annuel

Perse : de 40 à 25 Krans.

ETRANGER : 60 FRANCS.

مطبعهٔ « فرهومند » طهران

مجلهٔ ریاضیات

عالی و مقدماتی

اول ابان ماه ۱۳۰۹ شمسی

مقصود و وظیفه ما چیست؟!

هر چیزی را احتیاج بوجود می آورد. کتاب - مجله - روزنامه - قانون و حتی کاد
زائیدهٔ احتیاج است بدیهی است که اگر در علت ایجاد اشیا غور کنیم می بینیم انسان
احتیاج محیط را بدانها دریافته و سپس در صدد ایجاد آنها برآمده است. این است
مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی نیز یکی از موالید احتیاجات محیط
یازده سال قبل نه تنها چنین مجله دوام می یافت بلکه اصلا کسی بفکر ایجاد آنهم نمی افتاد
چرا؟ برای اینکه در تمام ایران ۳ محصل منوسطه بیش نبود و امروز فقط در
طهران ۳۰۰۰ محصل و ۱۵۰۰ محصله مشغول تحصیل و فراگرفتن علوم و فنون
مختلفه هستند که از مهمترین آنها ریاضیات است میباشد.

بساده انوی امروز محیط احتیاج نداشت و امروز احتیاج آن چنین مجله که در نوع
خود منحصر بفرد است در نزد اهل کمال واضح و محتاج بتوضیح و تشریح نمیباشد.
پس از ایراد این مقدمه یعنی پس از اینکه مسلم شد که مجلهٔ ریاضیات را احتیاج محیط
بوجود آورده تکلیف و وظیفه آن نیز معین می شود:

تشخیص احتیاجاتی که باعث ایجاد مجله شده و کوشیدن در رفع آنها.

نکات و ملاحظاتی که ما را وادار بانتشار چنین مجله نموده سه چیز است:

اوّلاً نظر باحتیاج محصّلین و محصّلات بوسائلی برای مشق و تمرین و ورزش فکری در ممالک اروپا هزاران کتاب و تألیفات متنوّعه و مجلّات علمی و فنّی تألیف و انتشار نموده اند ولی در ایران محصّلین و محصّلات بکلّی از این وسائل عاری میباشند و هیچگونه وسیلهٔ برای اینکه فکر خود را بکار بیندازند ندارند . مجلّهٔ ریاضیات برای برطرف ساختن این نقص در هر یک از شماره ها مسائل حل شده از مقدمات ما بالاتر راجع بتمام شعب علوم ریاضی ـ فیزیک ـ مکانیک و هیئت و غیره را در دسترس محصّلین و محصّلات و اشخاصی که در این علوم کار می کنند می نهد . بعضی از مسائلی که در صفحات مجلّه حل می شود منتخب از مسائلی که در امتحانات نهائی و مسابقه ها ایران داده شده میباشد و برخی مسائلی هستند که دانشمندان محترم و آقایان محصّلین یا محصّلات باذوق طرح نموده باداره بفرستند . ضمناً هر مسئلهٔ که در شمارهٔ حل میشود در شمارهٔ که اقلاً یک ماه قبل از آن منتشر شده طرح میگردد . اینمدّت برای این است که خوانندگان محترم بمجال تفکّر در حل مسائل داشته باشند و ضمناً برای تشویق اسم هر مشترکی را که منتها پس از بیست و پنج روز پس از طرح مسئله باداره بفرستند در ذیل همان مسئله درج خواهد شد .

ثانیاً بسیاری از اشخاص هستند که فوق العاده شایق و مایل اند که از ترقیات روز افزون علوم آگاهی یافته و بر حدود و مشکلات آنها مطّلع گردند واضح است که قبل از این مقصود و وسیلهٔ جز مشترک شدن جراید و مجلّات علمی اروپا که هر کدام قسمتی از این احتیاج را رفع می کنند ندارد و این مطلب بر من مشهود است که یکنفر هیچگاه از عهدهٔ چنین عملی بر نمی آید و اساساً رفع این احتیاج بر عهدهٔ کتابخانه ها و قرائت خانه های ملّی میباشد که متأسّفانه هنوز در ایران تأسیس نشده است و تأسیس و ایجاد آنها یکی از بزرگترین آرزوهای اداره مجلّهٔ ریاضیات است .

باری مجلّهٔ ریاضیات برای اینکه در رفع این احتیاج تا حدّی که قدرت دارد کوتاهی نکرده باشد در هر شماره خلاصهٔ مطالب جدیده و اکتشافات و ترقیات نو را از نظر مشترکین محترم خواهد گذراند

ثالثاً و بالاخره نداشتن کتب علمی باعث اتلاف وقت بوده و زحمت زیادی برای

محصلین ایجاد می کند . ادارهٔ مجلهٔ ریاضیات برای رفع این اشکال در نظر دارد
سلسلهٔ کتب علمی متوسطه را که تألیف اغلب آنها تمام شده بطبع و انتشار آورد .
واضح است که موفقیت در این قسمت همچنانکه موفقیت در دو قسمتی که قبلاً
بدانها اشاره رفت بدون تشویق و مساعدت مادّی و معنوی طالبین علم و
معرفت و دانشمندان محترم امکان پذیر نیست . فعلاً دورهٔ جبر و مقابلهٔ سالهای
پنجم و ششم متوسطه را که تاکنون در ایران بطبع نرسیده است در انتهای شماره های
مجلهٔ ریاضیات منتشر میکنم . این کتاب بسیار ساده نوشته شده و در خور فهم
کلیهٔ محصلین این قسمت میباشد . در آخر هر فصل و هر قسمت آنهم مسائلی
راجع بآن فصل طرح می کردد که خوانندگان محترم در مطالب تمرین و مشق نمایند
ضمناً برای اینکه تا حدی که استطاعت داریم در خدمت گذاری بمعارف و فدا
کاری در راه نشر علم و معرفت کوتاهی نکرده باشیم متذکر میشویم که مشترکین
ما برای اینکه بهتر و زودتر شوند ممکن است مسائل انتهای فصول را حل
کرده در جوف پاکت باداره ارسال دارند . ما زحمت تصحیح آنها را عهده
دار شده و پس از تصحیح و تذکر ایرادات وارده بآدرس فرستندگان پس
می فرستیم برای این قسمت فقط باید باندازهٔ تمبری که روی پاکت
الصاق شده در جوف پاکت تمبر بگذارند و برای زحمت تصحیح آن
هیچ گونه تحمیلی نمیشود .

اینها خلاصهٔ از نواقص و طرق اصلاح آنها بود ولی البته همان طور که
در فوق هم گفتیم موفقیت کامل مابسته بتشویق و مساعدتهای دانشمندان
و ایران دوستان و مطابق مثل مشهور یک دست صدا ندارد و تا بحال دیده
نشده که یک نفر بتنهائی در کاری پیشرفتهای عمده حاصل کند . خلاصه
چون صفحات مجله برای مقاصد عالی تر از این که در باب اهمیت آن مقالهٔ
نگارش یابد منتشر می گردد دنبال جمله را همین جا ختم کرده از باری تعالی موفقیت
کامل را در خدمت بوطن عزیز و برادران و خواهران وطنی خود خواستاریم

(مصاحب)

مسائل حل شده و دستورات و مقالات مفید

I - حرکت (متمم حساب مقدماتی)

چون در هیچیک از کتب حساب مقدماتی اسمی از حرکت بمیان نیامده متعلمین دورهٔ اوّل متوسّطه تصوّر صحیحی در این مطلب و متعلقات آن ندارند و بدین واسطه در حلّ مسائل واجع باین موضوع باشکالاتی بر میخورند لهذا بی مناسبت نیست که مختصری در این باب متذکر شویم

(دنبالهٔ دارد)

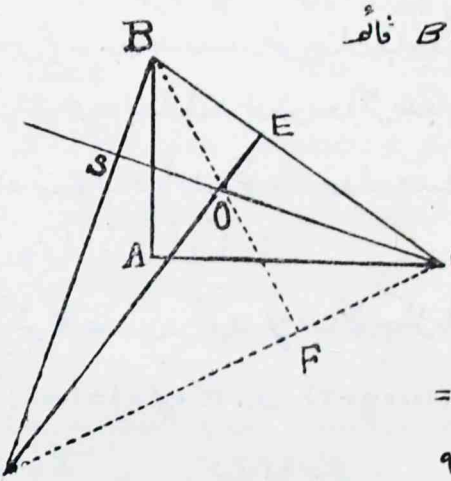
۱ - (حساب) - سه طفل مشغول گردو بازی میشوند. در موقع شروع عدّهٔ گردوهای آنها با اعداد ۷ و ۶ و ۵ متناسب بوده و پس از آنکه بازی تمام شد عدّهٔ گردوها با اعداد ۶ و ۵ و ۴ متناسب شد اوّلاً معلوم کنید کدام یک برده و کدام یک باخته اند؟ ثانیاً اگر یکی از اطفال دوازده گردو بیش از شروع بازی داشته باشد کلیّهٔ چند گردو دارند و در ابتدای بازی هر یک چند گردو داشته اند؟

حل - می توان گفت عدّهٔ گردوها موقع شروع با اعداد $\frac{5}{18}$ و $\frac{6}{18}$ و $\frac{7}{18}$ و در موقع ختم با اعداد $\frac{4}{15}$ و $\frac{5}{15}$ و $\frac{6}{15}$ متناسب است و چون $\frac{5}{18} = \frac{6}{18}$ عدّهٔ گردوهای دوّمی تغییر نکرده و چون $\frac{5}{18}$ از $\frac{4}{15}$ بزرگتر است دوّمی باخته پس اوّلی برده است. بنابراین اختلاف $\frac{7}{18}$ و $\frac{6}{15}$ کلیّهٔ عدّهٔ گردوها مساویست با ۱۲ و چون $\frac{1}{90} = \frac{7}{18} - \frac{6}{15}$ عدّهٔ گردوها مساویست با: $90 \times 12 = 1080$ پس در موقع شروع بازی اوّلی $\frac{7}{18} \times 1080$

۴۲۰ = ودوتی ۳۶۰ = $\frac{۲۰}{۱۸} \times ۱۰۸۰$ و سوّمی ۳۰۰ = $\frac{۵}{۱۸} \times ۱۰۸۰$ اگر دودانه

۲- (هندسه)- فرض می کنیم O مرکز و E نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث قائم الزّاویهٔ ABC باوتر باشد. از نقطهٔ B عمود BS وتر CO فرود آورده و محل تقاطع آن را با شعاع OE به L می نامیم. ثابت کنید که EL معادل نصف محیط مثلث ABC است.

حل- مثلّث BOS قائم الزّاویه و متساوی الساقین است زیرا:



$$\widehat{OBS} = \widehat{EBL} - \widehat{EBO}$$

$$= ۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} =$$

$$۹۰ - \frac{B+C}{۲} = ۴۵$$

پس: $BS=SO$ از طرف دیگر خطّ BO بر CL عمود است پس اگر F موقع آن باشد از مثلّث BFL نتیجه می شود $\widehat{FLB} = ۴۵^{\circ}$ بالنتیجه از مثلّث CSL چنین حاصل شود: $CS = LS$ و از این تساوی و تساوی فوق الذکر لازم آید که دو مثلّث BSC و LSO مساوی گردند پس $LO = BC = a$ از طرف دیگر $OE = \frac{b+c-a}{۲}$ پس:

$$LE = EO + OL = \frac{b+c-a}{۲} + a = \frac{a+b+c}{۲}$$

۳- (جبر)- مطلوب است مقدار عددی:

$$x = \frac{(ab^{۳})^{\frac{۱}{۲}}\, b^{-۲}\, c^{\frac{۱}{۳}}}{a^{\frac{۲}{۳}}\, b^{-\frac{۵}{۲}}\, c^{\frac{۱}{۲}}}$$

بازاء $a=۲$ و $b=۳$ و $c=۴۳۲$

حل ـ کسر فوق مساوی است با: $x=a^{\frac{1}{۳}}b^{\frac{1}{۲}}b^{-۲}c^{\frac{1}{۳}}a^{-\frac{۲}{۳}}b^{\frac{۳}{۲}}c^{-\frac{1}{۴}}$

$$=a^{\frac{1}{۳}-\frac{۲}{۳}}b^{\frac{1}{۲}+\frac{۳}{۲}-۲}c^{\frac{1}{۳}-\frac{1}{۴}}=a^{-\frac{1}{۳}}b^{-\frac{1}{۴}}c^{\frac{1}{۱۲}}=$$

$$\frac{c^{\frac{1}{۱۲}}}{a^{\frac{1}{۳}}b^{\frac{1}{۴}}}=\frac{c^{\frac{1}{۱۲}}}{(a^{۴}b^{۳})^{\frac{1}{۱۲}}}=\sqrt[۱۲]{\frac{۴۳۲}{۲^{۴}\times۳^{۳}}}=۱$$

۴ ـ (جبر) ـ دو عدد سه رقمی چنان بیابید که اگر مجموعشان یک واحد بیفزائیم مجموع معادل هزار شود و اگر عدد بزرگتر را در سمت راست عدد کوچکتر بنویسیم با عدد کوچکتر را در سمت بزرگتر قرار دهیم عدد اوّل ۶ برابر عدد ثانی باشد.

حل ـ اگر x عدد بزرگتر و y عدد کوچکتر باشد این دو معادله حاصل میشود: $x+y+۱=۱۰۰۰$ و $۱۰۰۰x+y=۶(۱۰۰۰y+x)$

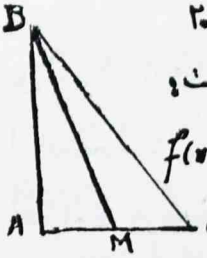
از آنجا $x=۸۵۷$ و $y=۱۴۲$.

II ـ دستگاههای درجهٔ دوّم.

حلّ دستگاههای دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوّم اغلب بسیار طولانی و مشکل و از حدود دو جبر مقدّماتی خارج است ولی در بعضی دستگاههای مخصوص می توان بسهولت مجهولات را تعیین کرد و چون این قسمت در جبر مقدّماتی بی اهمیّت نیست لازم می دانیم این قواعد را اندکی داده بواسطهٔ امثلهٔ چندی آنها را مفهوم سازیم. (دنباله دارد)

۵ ـ (جبر) ـ از مثلّث قائم الزّاویهٔ ABC $(A=۹۰)$ اضلاع $AC=b$ و $AB=c$ معلوم اند اوّلا بین A و C نقطهٔ مانند M چنان تعیین کنید

که طول BM نصف مجموع AC و AM باشد: ثابتاً در حالتی که مسئله صادق دو جواب است $BM'\times BM''$ و $BM'+BM''$ را بحسب b و c بدست آورید



حل ـ ۱ـ فرض کنیم $AM=x$ باشد $2BM=AM+AC$

$x+b$ = خلاصه: $MB=\sqrt{x^2+c^2}$ پس معادلهٔ مسئله این است:

$$2\sqrt{x^2+c^2}=x+b \quad \text{یا} \quad f(x)=3x^2-2bx+3c^2-b^2=0$$

واز آنجا: $$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-3c^2}}{3}$$

بحث ـ شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادله آنست که: $b^2-3c^2\geq 0$ یا $b\geq c\sqrt{3}$. از طرف دیگر مقادیری از x قابل قبولند که بین 0 و b واقع باشند. خلاصه $f(b)=3c^2>0$ پس b همیشه خارج ریشه‌ها است وچون نصف مجموع دو ریشه $\frac{b}{3}$ از b کوچکتر است b از هر دو ریشه بزرگتر میباشد. پس باید هر دو ریشه مثبت باشند. امّا مجموع دو ریشه مثبت است بنابراین کافی است حاصل ضرب آنها $\frac{3c^2-b^2}{3}$ مثبت باشد و برای این مقصود لازمست که $b<2c$ باشد. در این حالت مسئله دو جواب دارد در حالتی که $b<2c$ باشد ریشه‌های معادله مختلف العلامه خواهند بود و فقط ریشهٔ مثبت قابل قبول است.

خلاصه: $c\sqrt{3}<b<2c$ دو جواب ـ $b>2c$ یک جواب.

بازاء $b=c\sqrt{3}$ نتیجه می‌شود: $x'=x''=\frac{b}{3}$ و بازاء $b=2c$: $x''=\frac{2b}{3}$

۲ـ چون $2BM=x+b$: $BM'+BM''=\frac{1}{2}(x'+x''+2b)=\frac{4b}{3}$

و $$BM'.BM''=\frac{b+x'}{2}.\frac{b+x''}{2}=\frac{b^2+c^2}{3}$$

۴ـ (جبر) ـ دستگاه $x^2-2(\lambda+1)x+\lambda=0$ و $f(x)=x^2-2\lambda x-3=0$

مفروض است. λ را چنان تعیین کنید که دو معادله دارای یک ریشهٔ مشترک باشند.

حل - هر ریشهٔ مشترک از دو معادلهٔ فوق در تفاضلشان یعنی:

$x=\frac{\lambda+3}{2}$ محقق $x-\lambda-3=0$ خواهد بود و چون این معادله فقط بازاء

می‌شود کافی است این مقدار در یکی از دو معادلهٔ فوق صدق کند مثلاً چون

از آن در معادلهٔ $f(x)=0$ قرار دهیم حاصل می‌شود $(\lambda+1)^2=0$ از

آنجا $\lambda=-1$ و مقدار ریشهٔ مشترک چنین است: $x=\frac{-1+3}{2}=2$

۷- (جبر) - تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. مبدا نیم که تابع

ماکزیموی دارد معادل $+\frac{1}{4}$ و مجموع مکعبات ریشه‌هایش مساویست با ۹ و

بالاخره y - بازاء $\frac{3}{2}$ می‌نیموم دارد. مطلوبست محاسبهٔ a b c و نمایش

تغییرات تابع حاصل.

حل - از مفروضات اول و سوم این دو معادله حاصل میشود:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{1}{4} \qquad -\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$$

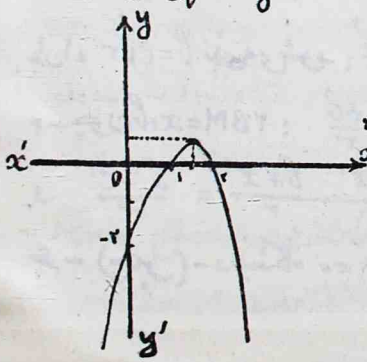
بعلاوه: $x'^3+x''^3=(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')=\frac{b(3ac-b^2)}{a^3}=9$

از حل این سه معادله حاصل میشود: $a=-1$ و $b=3$ و $c=-2$ پس

$y=-x^2+3x-2$ بازاء $x=1$ و $x=2$ y صفر می‌شود و بازاء

$\frac{3}{2}$ ماکزیمی دارد معادل $\frac{1}{4}$ و خلاصهٔ

تغییرات آن از جدول و منحنی ذیل معلوم می‌گردد:



x	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$\frac{3}{2}$ ↗	2 ↗	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	-2 ↗	0 ↗	$\frac{1}{4}$ ↘	0 ↘	$-\infty$

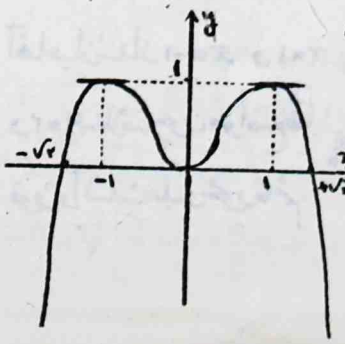
۸-(مشتقات) - تابع $y=2x^2-x^4$ مفروض است. اولاً مطلوبست نقاط کردر آنها مماس موازی محور طول است. ثانیاً تغیرات و رسم منحنی نمایش تابع. ثالثاً معادلهٔ مماس مرسوم از نقطهٔ از منحنی که طولش ۲ باشد و معادلهٔ خطی که ان نقطهٔ تماس بر مماس عمود شود. (این خط قائم بر منحنی خوانده می شود)

حل - ۱- برای اینکه در نقطهٔ مماس موازی محور طول باشد باید مشتق تابع صفر گردد خلاصه مشتق y عبارتست از: $y'=4x-4x^3=4x(1-x^2)$ و چون بازاء $x=0$ و $x=\pm 1$ $y'=0$ میشود در این نقاط مماس موازی محور طولست عرض نظیر این طولها عبارتند از ۰ و ۱ و ۱

۲- مشتق تابع علامت $(1-x^2)x$ را دارد. این مقدار در فاصلهٔ $(-\infty,-1)$ منفی (تابع نزولی) در فاصلهٔ $(-1,0)$ مثبت (تابع صعودی) در فاصلهٔ $(0,+1)$ منفی (تابع نزولی) در فاصلهٔ $(+1,+\infty)$ مثبت (تابع صعودی) و بالاخره در فاصلهٔ $(+\infty,+1)$ منفی میباشد (تابع نزولی) پس بازاء $x=\pm 1$ تابع ماکزیموم و بازاء $x=0$ می نیموم دارد. بعلاوه y بازاء $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ صفر گشته و بازاء $x=\pm\infty$ مساویست با $-\infty$. خلاصهٔ این مطالب را در جدول ذیل مشاهده کنید

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+1$	↘	0	↗	$+1$	↘	$-\infty$

چون مواضع نقاط فوق را معین نموده بین آنها را وصل کنیم این منحنی حاصل می شود:



۳- عرض نقطه از منحنی که طولش ۲ باشد مساویست با -8 - و ضریب زاویهٔ مماس در این

نقطه معادلست با : $-۲۴ = (۴-۱) ۲ \times ۴$ پس معادلهٔ مماس این است :

$y+۱ = -۲۴(x-۲)$ یا $y+۲۴x-۴۰=۰$ ضریب زاویه قائم مقابل

با $\frac{۱}{۲۴}$ پس معادلهٔ آن چنین است $y+۱ = \frac{۱}{۲۴}(x-۲)$ یا $۲۴y-x+۱۹۴=۰$

۹- (مشتقات)- تابع $y=\frac{۲x^۲-۱}{x^۲-۱}$ مفروض است. نقطهٔ مانند $A(۰,۱)$

بر منحنی نمایش این تابع فرض کنیم. اولاً معادلهٔ خط مماس بر این نقطه را بنویسید

ثانیاً معیّن کنید در چه نقطهٔ این خط محور عرضها را قطع می کند. (مسابقهٔ

مدرسهٔ نظام سنه ۱۳۴۰ قمری)

حل- قبلاً باید منحنی نمایش تابع را رسم کرد. برای این مقصود ملاحظه می کنیم که بازاء

$x=\pm ۱$ تابع منفصل و بازاء $x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ صفر می شود و بازاء $x=\pm\infty$ بسمت $y=۲$

میل می کند مشتق آن $y' = \frac{-۲x}{(x^۲-۱)^۲} = \frac{۴x(x^۲-۱)-۲x(۲x^۲-۱)}{(x^۲-۱)^۲}$

بازاء $x=۰$ صفر شده از $+\infty$ به $-\infty$ میرود پس بازاء این مقدار از x تابع y اگر نمو

دارد معادل ۱ در فاصلهٔ $(۰,\infty)$ کر مشتق مثبت است تابع صعودی و در

فاصلهٔ $(-\infty, ۰)$ نزولی می باشد. خلاصهٔ اینطالب از جدول ذیل مشهود می شود

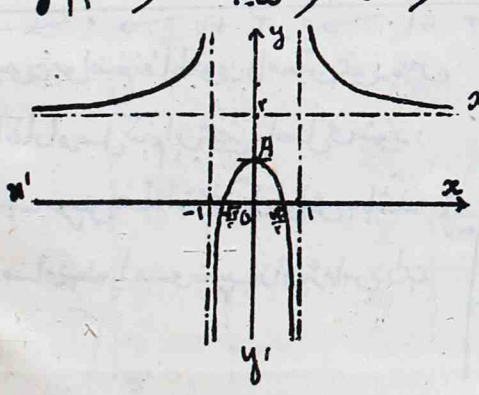
x	$-\infty$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	۰	↗	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	۱	↗	$+\infty$
y'				$+$			۰			$-$			
y	۲	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	۰	↗	۱	↘	۰	↘	$-\infty$ $+\infty$ ۲

منحنی سه مجانب دارد و معادلات

آنها عبارتند از $x=-۱$ و $x=۱$

و $y=۲$ خلاصه چون مواضع نقاط

فوق را نسبت بدو محور قائم



تعیین نموده بین آنها را وصل کنیم منحنی مطلوب حاصل میشود

اوّلاً چون در نقطهٔ A نابع ماکزیمومی دارد معادلهٔ مماس مطلوب عبارت

از $y=1$ ثانیاً نقطهٔ A خود نقطهٔ تلاقی مماس ومحور عرض است .

۱۰- (هندسه) - ثابت کنید که اگر P و C و B و A چهار نقطهٔ واقع بر

خط مستقیمی باشند رابطهٔ ذیل برقرار است :

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0 \qquad \text{(اولی)}$$

دلیل اوّل - اگر P را مبدء قرار داده وطول نقاط A و B و C را نسبت باین

مبدء به a و b و c بنمائیم اثبات رابطهٔ فوق باثبات این اتحاد راجع می شود :

$$a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)\equiv 0$$

وصحت این مطلب بدیهی است .

دلیل دوّم - بنابر قضیهٔ شال : $\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA}$ و $\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{CB}$

حال اگر طرفین تساوی اوّل را در $\overline{BC}$ و طرفین دوّمی را در $\overline{CA}$ ضرب نموده جمع کنیم

نتیجه می شود $\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PC}(\overline{BC}+\overline{CA})+\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CA}$

وچون ملاحظه کنیم که جملهٔ اخیر طرف دوّم صفر و جملهٔ داخل پرانتز معادل

$\overline{AB}$ - است حکم ثابت می شود

۱۱- (مثلّثات) ثابت کنید که اگر در مثلثی $\beta=45^\circ$ و $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

باشد زاویه ٔ α معادل ۱۲۰ درجه است (مسابقهٔ فوائد عامه سنه ۱۳۰۷)

حل - از قضیه جیوب حاصل می شود : $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ اما $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پس $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$: بالنتیجه $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

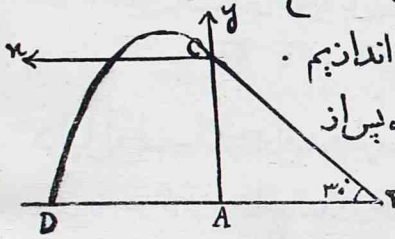
$\cos\alpha = +\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$: $\alpha < 45°$ وچون $= \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$

پس : $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos 45° + \cos\alpha\sin 45°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وچون γ منفرجه است ناچار : $\gamma = 120°$

۱۲- (فزیك و مکانیك) - از نقطهٔ B انتهای سطح مورّب BC جسمی را



باسرعت اوّلیه ۱۰ متر در ثانیه بطرف بالا می اندازیم .
این جسم بدون اصطکاك بر سطح مورّب لغزیده پس از
۲ ثانیه بنقطهٔ C میرسد و از آنجا حرکت
خود را ادامه داده و در نقطهٔ D بزمین می افتد بنابر آنکه $\widehat{B} = 30°$
باشد مطلوبست محاسبهٔ AD ($g = 980^{cm}$)

حل - حرکت جسم بر سطح مورّب حرکت متغیّرهٔ منتظم ایست مبطئه که سرعت
اوّلیّه اش ۱۰۰۰ سانتی متر در ثانیه و شتابش $\frac{cm}{sec^2} = -490 = -\frac{980}{2} = -g\sin\alpha$ است پس
معادلهٔ این حرکت چنین خواهد بود $e = 1000t - 245t^2$ و سرعت آن چنین است
$v = 1000 - 490t$ بنابراین متحرّك با سرعت $\frac{cm}{sec} 1000 - 490\times 2 = 20$ به C
میرسد و از آن ببعد معادلهٔ مسیرش نسبت بدو محور قائم Cx و Cy که اوّلی
موازی AB و دوّمی بر آن عمود است چنین خواهد بود : $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$
یا : $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{49x^2}{3000}$ خلاصه در نقطهٔ D : $y = AC$. برای محاسبهٔ
AC ملاحظه می کنیم که اگر در معادله (۱) $t = 2$ فرض شود حاصل میشود $e = BC$
$1000 - 980 = 1020$ پس $AC = BC\sin 30 = 510$ بنابراین $AD = x$ از معادله ذیل بدست آید
$\frac{49x^2}{3000} - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 510 = 0$ - تنها ریشهٔ مثبت این معادله قابل قبول
وآن مساوی است با : $x = 17/1$ سانتی متر .

«ریاضیّات عالی»

۱۳- (آنالیز) - مخروط دواری مفروض است. اولاً مطلوبست معادلهٔ منحنی که مولدهای مخروط را بازاویهٔ ثابتی قطع کند. ثانیاً مطلوبست مکان هندسی مرکز انحنای منحنی سؤال اوّل در نقاط مختلف آن ثالثاً ثابت کنید که مماسهای مرسوم بر دو منحنی در نقاط متناظر بر هم عمودند.

حل - برای سهولت راس مخروط را مبدء و محور آنرا محور zها قرار میدهیم. برای تعیین معادلهٔ آن فرض میکنیم $M(x,y,z)$ نقطهٔ از سطح بدن آن و α زاویهٔ محور با مولدها و θ زاویهٔ محور طول با تصویر OM بر سطح xoy باشد مختصات نقطهٔ M چنین خواهند بود: $x = z\,tg\alpha\cos\theta$ ، $y = z\,tg\alpha\sin\theta$ ، $z = z$

در این معادله دو پارامتر موجود است: (θ, z) و برای اینکه منحنی مرسوم بر این سطح بدست آید کافی است بین این دو پارامتر رابطهٔ برقرار کنیم مثلاً اگر فرض کنیم $z = f(\theta)$ معنی ذیل یکی از منحنیهائی است که بر مخروط مفروض رسم شده:

$$x = tg\alpha\cos\theta f(\theta) \qquad y = tg\alpha\sin\theta f(\theta) \qquad z = f(\theta) \qquad (1)$$

از طرف دیگر معادلهٔ یکی از مولدها این است:

$$x = z\,tg\alpha\cos\theta \qquad y = z\,tg\alpha\sin\theta \qquad (2)$$

پس پارامتر جهت کسینوسهای این مولد عبارتند از 1 ، $tg\alpha\sin\theta$ ، $tg\alpha\cos\theta$ و چون پارامتر جهت کسینوسهای مماس بر منحنی (۱) عبارتند از:

$$dx = tg\alpha\,(f'\cos\theta - f\sin\theta)\,d\theta$$
$$dy = tg\alpha\,(f'\sin\theta + f\cos\theta)\,d\theta$$
$$dx = f'\,d\theta$$

باید $\pm \frac{tg\alpha\cos\theta dx + tg\alpha\sin\theta dy + dz}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$ مقدار ثابتی داشته باشد و اگر این مقدار ثابت را به $\cos\beta$ نموده بجای dx و dy و dz مقدارشان را قرار داده اختصارات لازمه را بجا آوریم نتیجه میشود: $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \pm\frac{\sin\alpha}{tg\beta}$

از آنجا: $f(\theta) = ce^{\pm\frac{\sin\alpha}{tg\beta}\cdot\theta}$ و اگر برای سهولت $ctg\alpha$ را به a و $\pm\frac{\sin\alpha}{tg\beta}$ را به k بنمائیم معادلات منحنیات مطلوب چنین میشود

$$\{x = a\cos\theta e^{k\theta} \;،\; y = a\sin\theta e^{k\theta} \;،\; z = ce^{k\theta}\} \qquad (3)$$

۲- مرکز انحنای منحنی در هر نقطه واقع است بر قائم اصلی مار بر آن نقطه و فاصلهٔ آن از نقطهٔ مفروض معادل شعاع انحنای منحنی در آن نقطه می باشد پس باید شعاع انحنای منحنی (۳) و (کسینوس دیرکتور) های قائم اصلی آن را حساب کرد. برای این کار اگر α و β و γ کسینوس دیرکتورهای مماس باشند؛ خلاصه: $\alpha = \frac{dx}{ds}$ و $\beta = \frac{dy}{ds}$ و $\gamma = \frac{dz}{ds}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2K\theta}\left[a^2(1+K^2) + c^2K^2\right]d\theta^2$$

یا اگر برای اختصار مقدار داخل کروشه را m^2 بنامیم: $ds = m e^{K\theta} d\theta$ پس:

$$\alpha = \frac{a}{m}(-\sin\theta + K\cos\theta) \quad \beta = \frac{a}{m}(\cos\theta + K\sin\theta) \quad \gamma = \frac{cK}{m}$$

خلاصه اگر طول قوس را متغیر مطلق فرض داده شعاع انحنا را به R بنامیم:

$$R^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2$$

وچون: $\frac{d\alpha}{ds}$ و $\frac{d\beta}{ds}$ و $\frac{d\gamma}{ds}$ را حساب کنیم از رابطهٔ فوق نتیجه می شود: $R = \pm \frac{m^2}{a\sqrt{K^2+1}} e^{K\theta}$. اینک از روی دستورات (فرنه) (کسینوس دیرکتورهای) قائم اصلی بدست آمده ($\alpha = \frac{1}{R}\frac{d\alpha}{ds}$ و غیره) و از آنجا مختصات مرکز انحنا بدست می آید:

$$\begin{cases} x_1 = a e^{K\theta}\cos\theta + \frac{m^2}{a(1+K^2)} e^{K\theta}(-\cos\theta - K\sin\theta) \\ y_1 = a e^{K\theta}\sin\theta + \frac{m^2}{a(1+K^2)} e^{K\theta}(-\sin\theta + K\cos\theta) \\ z_1 = c e^{K\theta} \end{cases}$$

۳ — برای اثبات قسمت سوم کافی است مبرهن کنیم که:

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

و اثبات این مطلب را که فقط عملیات جبری است بعهدهٔ خوانندگان محترم می گذاریم.

مسائل حل کردنی

مسئله - بنابر آنکه ۷۵ کاو در ۱۲ روز علف مزرعه‌ئی را که ۰ آر وسعت دارد نشخوار نموده باشند و ۸۱ کاو در ۱۵ روز علف مزرعهٔ بوسعت ۷۲ آر را نشخوار کرده باشند چند کاو لازم است تا در ۱۸ روز علف چمنی بوسعت ۹۰ آر را نشخوار کنند بنابر آنکه در موقع ورود کاو ها ارتفاع علف در سر چمن مساوی بوده و نمو انها نیز متماثلا انجام گیرد؟ (حل حسابی) (نیوتون) (Newton)

مسئله - در مسئلهٔ فوق بجای اعداد حروف اختیاری قرار داده مسئله را حل نمائید.

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارت x^3+3x+2 بازاء $x=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ - بمسئله ثابت کنید که اگر از نقطهٔ واقع بر محیط دایرهٔ محیطی مثلثی سر عمود بر اضلاع آن وارد آید هم مواقع آنها بر یک استقامت خواهند بود. (سمسون) (Simpson)

مسئله - مثلث ABC مفروض است. فرض می کنیم G محل تلاقی سه میانه و M نقطهٔ غیر مشخصی از سطح مثلث باشد. اولا مطلوب است محاسبهٔ $GA^2+GB^2+GC^2$ بحسب اضلاع مثلث ثانیا ثابت کنید که: $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ ثالثا نقطهٔ در سطح مثلث چنان بیابید که مجموع مربعات فواصلش از رؤس کمترین مقدار ممکنه را داشته باشد

مسئله - دستگاه ذیل را حل کنید:

$$x^2+y^2+z^2=14 \qquad y(x+z)=8 \qquad x^2z^2-4xz+3=0$$

مسئله - مطلوبست حد $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ وقتی $x\to a$

مسئله - مطلوبست اولا تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$ ثانیا در چه حدودی تغییر کند تا y بتواند

جیب قوسی مانند x کردد؟

مسئله - منحنی $y=-x^3+2x-1$ وخط $y+2x+1=0$ مفروض است. نمایش منحنی وخط را نسبت بدو محور رسم کرده قطعهٔ از سطح را که در سمت راست محور yy' محصور بین خط و منحنی و محور $x'x$ است حساب کنید.

(سال ششم دار المعلمین مرکزی سنهٔ ۱۳۰۷)

مسئله - معادلهٔ $\sin x+\cos x=a$ را حل کنید. تعیین کنید بین رک ترین مقدار a را که بازاء آن معادلهٔ مفروض دارای جواب میباشد. (مسابقهٔ نفط سنهٔ ۱۳۰۶)

مسئله - در هر مثلث $A+B+C=\pi$ ، ثابت کنید که بازاء مقداری از A می بینیم دارد و مقدار مینیموم را حساب کنید

مسئله - حسن وحسین وعلی بازنهای خود مسماة به اخضر و عصمت وعفت ببازار رفتند و هریك آنقدر دستمال می خرند که عدهٔ آنها مساوی قیمت یك دستمال باشد بحساب قران. بنابر آنکه خرج هر مردی ۳ قران بیش از خرج زنش باشد و بعلاوه حسن ۲۳ دستمال بیش از عصمت و حسین ۱۲ دستمال بیش از اخضر خریده باشد وزن هریکرا تعیین کنید.

مسئله - مطلوبست محاسبهٔ سطح مثلثی که مختصات رؤسش $(1,2,5)$ و $(8,3,6)$ و $(5,7,9)$ باشد

مسئله - توابع $\frac{\sqrt{1-\cos^3(x-a)}}{x-a}$ و $\frac{\sin\frac{1}{x-a}}{1+e^{\frac{1}{x-a}}}$ بازاء $x=a$ منفصل اند. مطلوبست نوع انفصال هریك.

مسئله - مطلوبست محاسبهٔ $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2}$ (امتحان آخر کامپون پاریس یا ریاضیات سنهٔ ۱۸۸۱)

مسئله - منحنی $y=\frac{u-au^2}{U+a}$ و $x=\frac{1-2au}{U+a}$ و $z=\frac{a}{U+a}$ کرد و آن U تابعی است از u مفروض است. U را چنان تعیین کنید که وقتی a تغییر کند فامیل فوق دارای انولپی باشد. (ایپانس Borda امتحان کتبی)

مصاحب — جبر و مقابله

فصل اول - حدود

۱- **تعریفات** - کمیّتی را که مقادیر مختلفه اختیار کند **متغیّر** خوانند (مانند درجهٔ حرارت یک اطاق) و مقداری را که متغیّر نباشد **ثابت** اصطلاح کرده‌اند. معمولاً مقادیر متغیّر را بحروف اواخر الفبا و مقادیر ثابت را بحروف اوایل نامند.

اغلب وقتی متغیّری تغییر می‌کند تغییراتش موجب تغییرات یک یا چند متغیر دیگر می‌گردد در این صورت متغیّرها را **تابع** یکدیگر خوانند مثلاً شعاع دایره و سطح آن تابع یکدیگرند.

معمولاً وقتی چند متغیّر در مسئله دخالت داشته باشند فرض می‌کنند یکی از آنها مجزی خود تغییر کند و آنرا **متغیّر مطلق** می‌خوانند. بدیهی است که متغیّرهای دیگر بتبعیّت متغیّر مطلق تغییر می‌کنند و از این جهت است که آنها را **تابع** آن می‌نامند مثلاً اگر شعاع دایره متغیّر مطلق فرض شود سطح و محیط آن تابع شعاع خواهند بود.

ممکن است مقداری تابع چند متغیّر مطلق باشد مانند حجم مکعّب مستطیل که تابع طول و عرض و ارتفاع جسم است. در آنچه ذیلاً می‌گوئیم توابعی را منظور نظر قرار میدهیم که فقط تابع یک متغیر مطلق باشند

برای نمودن این که y تابع x است حروف اخیر را در داخل پرانتزی که مقدّم بر آن یکی از حروف f یا g یا h یا φ یا ψ و غیره میباشند قرار میدهند مثلاً $y = f(x)$. مقدار عددی y بازاء $x=a$ چنین نموده می‌شود: $f(a)$

مثال- از تساوی $y=f(x)=5x^2+3x-1$ معلوم می‌شود که y تابع x است و مقدار عددی آن بازاء $x=1$ و $x=0$ و $x=-1$ بترتیب چنین‌اند[+]:

۲- **حد**- هرگاه متغیّری مانند x در ضمن تغییرات خود آنقدر بمقدار ثابت a نزدیک شود که $|x-a|$ از هر مقدار کوچک مثبت اختیاری مانند ε (هر قدر کوچک که بخواهیم) کوچکتر گردد گوئیم x بسمت a میل می‌کند و یا a حدّ x است و این مطلب را چنین می‌نامند:

$$x \longrightarrow a \quad \text{یا} \quad a = \lim x$$

مثال ۱- اگر فرض کنیم $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ از دستورات

[+] $f(-1) = 5-3-1 = 1$ و $f(0) = -1$ و $f(1) = 5+3-1 = 7$

تصاعد هندسی نتیجه می شود : $x_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ از آنجا :
$2 - x = \frac{1}{2^{n-1}}$. طرف ثانی را از هر مقدار مثبت اختیاری (هرقدر کوچک
که بخواهیم) می توان کوچک تر نمود مثلا اگر بخواهیم $\frac{1}{2^{n-1}}$ از $\frac{1}{1000000}$
کوچک تر شود کافی است n را معادل ۲۱ اختیار کنیم. از این مقوله معلوم
می شود که وقتی n فوق العاده زیاد شود $2-x$ از هر مقدار مثبتی مانند
ε کوچک تر می گردد پس بازاء $n \to \infty$: $x_n \to 2$ یا $\lim x_n = 2$.

مثال ۲ — فرض کنید زید ۱۶ تومان داشته باشد و هر روز نصف پول خود را
خرج کند روز اول ۸ تومان. روز دوم ۴ تومان. روز سوم ۲ تومان.
روز چهارم یک تومان برای او خواهد ماند و هکذا بقسمی که دارائی زید بسمت
صفر میل می کند.

مثال ۳ — فرض کنیم $x_1 = 0,6$ و $x_2 = 0,66$ و $x_3 = 0,666$ و ... و $x_n = 0,\overbrace{666\ldots6}^{n\text{ عدد}}$
وقتی n بی نهایت بزرگ شود x_n بسمت $\frac{2}{3}$ میل می نماید.

مثال ۴ — محیط (وسطح) کثیر الاضلاع محیطی و محاطی بسمت محیط (وسطح) دایرهٔ
محاطی یا محیطی میل می کند. بعبارهٔ اخری حد محیط (وسطح) یکی از دو کثیر
الاضلاع فوق محیط و سطح دایرهٔ مذکور است.

تبصره ۱ — مقداری را که حدّش صفر باشد بی نهایت کوچک خوانند مثلا
وقتی x بی نهایت زیاد شود $\frac{1}{x}$ بی نهایت کوچک است. (معمولاً مقادیر بی نهایت
کوچک بیکی از حروف ε و η وغیره نموده می شود.)

۲ — هرگاه مقدار مطلق کمیّتی از هر مقدار مثبتی (هرقدر بزرگ که بخواهیم)
تجاوز کند گویند آن مقدار از حیث قدر مطلق بی نهایت بزرگ است. مثلاً
$\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) وقتیکه x بی نهایت بزرگ است و بعلامت ∞ نموده می شود.

فرع — هرگاه $|x-a|$ بی نهایت کوچک باشد. a حد x است و بالعکس

۳ — قضایای ذیل مهم ترین قضایای مبحث حدود می باشند :

۱ — هرگاه از دو متغیّر x و y یکپیوسته باهم مساویند اولی بسمت a میل کند دومی نیز بسمت
a میل می نماید.

ب - اگر دو متغیر x و y پیوسته باهم مساویند بترتیب بسمت a و b میل کند: $a=b$

ج - هرگاه چند مقدار دارای حدودی باشند حد مجموع (حاصل ضرب) آنها مساویست با مجموع (حاصل ضرب) حدودشان.

د - هرگاه دو متغیر دارای حدودی باشند حد تفاضل (خارج قسمت) آنها مساویست با تفاضل (خارج قسمت) حدودشان. برای نمونه قضیهٔ (ج) را در بارهٔ دو عامل ثابت کرده اثبات بقیه را بعهدهٔ خوانندگان محترم می گذاریم: فرض کنیم a_1 و a_2 بترتیب حد x_1 و x_2 باشند. بنابفرض فوق $a_1 - x_1 = \varepsilon_1$ و $a_2 - x_2 = \varepsilon_2$ از آنجا: $(a_1 + a_2) - (x_1 + x_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. فرض کنیم η بزرگترین ε ها باشد. آشکار فوق چنین نوشته می شود: $(a_1 + a_2) - (x_1 + x_2) < 2\eta$ وچون η را می توان از هر مقدار مثبت مفروضی کوچکتر نمود طرف اوّل نامساوی فوق از هر مقدار دلخواهی کوچکتر می شود پس: $\lim(x_1 + x_2) = a_1 + a_2 = \lim x_1 + \lim x_2$

۴ - صور مبهمه - گاهی در تعیین مقدار عددی تابعی باز اء مقدار مخصوصی از متغیر مطلق مثلاً $x = x$ صور مبهمه از قبیل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty - \infty$ و امثال اینها دست میدهد. اگرچه با محاسبات جبر مقدماتی رفع این ابهامها در صورت کلی ممکن نیست مع ذلک قواعد مخصوصی هست که بعداً احتیاج الیه ما خواهد شد و طی آنها این کار را انجام میدهیم:

۱ - $\frac{0}{0}$. هرگاه باز اء $x=a$ کسر $\frac{f(x)}{f(x)}$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ بیرون آید موافق یکی از قضایای جبر مقدماتی دو جمله که هر یک بقوّه ای از $x-a$ قابل قسمتند و پس از حذف عامل مشترک دو جمله که وجودش باعث ابهام شده ابهام رفع می گردد.

مثال - مطلوبست مقدار عددی $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ باز اء $x=1$. باز اء این مقدار صورت و مخرج کسر صفر میشوند پس هردو به $x-1$ قابل قسمت می باشند و پس از حذف این عامل از دو جمله نتیجه میشود: $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ حال اگر $x=1$ شود y معادل $\frac{2}{3}$ می گردد این مقدار را مقدار حقیقی y باز اء $x=1$ خوانند.

۲ - قضیه - مقدار هر کثیر الجمله صحیح باز اء $x=a$ همان مقدار جمله با لاترین درجه است.

برهان - اگر کثیر الجمله مفروض $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ را بصورت $ax^n(1 + \frac{b}{ax} + \dots + \frac{l}{x^n})$ نوشته و x را بسمت ∞ میل دهیم

دیده میشود که $f(x)$ بسمت مقدار ax^n میل می‌کند . .

۳- مقدار کسر $y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+l}{\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\dots+\lambda}$ بازاء $x=\pm\infty$ - بنا بقضیهٔ فوق مقدار صورت و مخرج بترتیب همان مقدار ax^n و αx^m است پس مقدار y معادل مقدار $\frac{ax^n}{\alpha x^m}$ میباشد بنابراین اگر $m=n$ باشد y بسمت $\frac{a}{\alpha}$ میل می‌کند و اگر $m<n$ باشد حد آن صفر است و بالاخره اگر $n>m$ باشد y از حیث قدر مطلق بنهایت بزرگ می‌شود .

مثال- کسور $\frac{2x^2+1}{x^2-5}$ و $\frac{x-x^5}{2+x^3}$ و $\frac{-7x}{x^2+1}$ - وقتی $x=\pm\infty$ شوند بترتیب بسمت ۲ و $\mp\infty$ و صفر میل می‌کنند .

۴- گاهی اوقات ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ بواسطهٔ تقسیم دو جملهٔ کسر بقوهٔ مناسبی از x رفع میشود مثلاً برای تعیین مقدار واقعی $y=\frac{x^2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^3-1}+2x^2}$ بازاء $x=+\infty$ چون صورت و مخرج را به x^2 تقسیم کنیم نتیجه می‌شود: $y=\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}$

حال اگر $x\to+\infty$ این کسر بسمت $\frac{1}{2}$ میل می‌کند . (دنبالهٔ دارد)

«مسائل حل کردنی»

۱- ثابت کنید که اگر $f(x)=a^x$ و $\varphi(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ باشد این دو رابطه برقرار است $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ و $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=\varphi(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta})$ و بعد $\frac{f(x+h)}{f(x-h)}$ و $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ را حساب کنید .

۲- مطلوبست مقدار هریک از توابع ذیل بازاء مقداری از x که روی آنها نوشته شده

$y=\frac{x}{x^2-1}$ $y=\frac{x^4-a^4}{x-a}$ $y=\frac{1-x}{1-x^2}$ $y=\frac{x^3-6}{x^2-7x+2}$

$y=\frac{y^3-2y^2-y-2}{y^2-5y+6}$ $y=\frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-1}{x^4-7x^3+11x^2-2ax+1}$

$y=\frac{x^4+7x^3+11x^2+20x+1}{x^4+9x^3+30x^2+44x+24}$ $y=\frac{x^3-x}{x-1}$

$y=\frac{x^2-2x-7}{x^3+5x}$ $y=\frac{3x^2-5x+4}{2x-1+x^2}$ $y=\frac{1}{x^3}$

$y=\frac{x+\frac{x+2}{x-2}}{x-1+\frac{x}{x-2}}$ $y=\frac{2x^3+5x^2-7}{4x^3-x^2-x-1}$ $y=\frac{5x+7}{2x+1}$

$y=\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x}$ $y=\frac{x+1}{x^2+1}:\frac{x}{x^2}$

$y=\frac{x^5-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3+x^2-4x+2}$ $y=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{a-x}$ $y=\frac{2x^2-ax-a^2}{2x^2-5a^2x+a^3}$

آقای میرزا الهیار خان ارام - شیراز - معارف

PRIVEE

اعتذار

دراین شماره بواسطهٔ تفصیل مقدمه مجبور شدیم در کلیهٔ قسمتها باختصار کوشیده و حتی بعضی مطالب را حذف نمائیم . امید واریم در شماره های بعد این نقیصه جبران گردد

(پاورقی مجلهٔ ریاضیات)

از شماره آینده پاورقی مجلهٔ ریاضیات

« عالم وزد »

شروع میشود از خواندن آن غفلت نکنید .

داستان

(عزیز و غزال)

رمان شیرینی است بقلم سید اشرف الدین حسینی مدیر نامهٔ نسیم شمال جلدے یك قران در تمام کتابخانه ها بفروش میرسد .

نمره اعلان (۱)