سال اول شمارهٔ ۱۰-۱۱ ☆ واحد ☆ اول فروردین ۱۳۱۰

(مجلهٔ)

(ریاضیات)

عالی و مقدماتی

مدیر مسئول و مؤسس مصاحب — جای اداره : موقتاً اداره جریدهٔ قانون

طهران ـ خیابان باب همایون

(اول و پانزدهم هر ماه منتشر میشود)

وجه اشتراك در ایران

سالیانه : از ۴۰ تا ۲۵ قران (برای محصلین ۱۰ قران)

ششماهه : فقط برای محصلین ۶ قران

(تك شماره : یك ریال)

فهرست مندرجات

ریاضیون ایرانی (بقلم اقای مشیری) ـ نظریه نسبی بودن انیشتین La théorie de la Relativité restreinte et Généralisée Par A. Einstein ـ مسائل شطرنج ـ ریاضیات (بقیه از شمارهٔ قبل ـ چند مسئله از حساب عالی ـ ارزش ناپائون ـ بهترین وسیله زیاد کردن پول ـ خواص اعداد ـ مسائل ریاضیات مقدماتی ـ مسائل ریاضیات عالی

مطبعهٔ امید ـ طهران

مجله تجارت با منافع عدیده دیگر مجاناً داده میشود

مجله تجارت دوره دوم را بپایان رسانیده اینك با مزایا و منافع بیشتری دوره سوم را شروع مینماید. مجله تجارت بهترین رهنمای تجارتی است که مشترکین خودشرا بجلب منافع و دفع ضرر مخاطرات اقتصادی آگاه مینماید این مجله بالتمام با قلم اشخاص دیپلمه از مدارس تجارت و تجار مهم معروف داخله و خارجه نوشته شده و رؤس مطالب مهمه تجارتی داخله و خارجه را در هر شماره درج مینماید. این مجله علاوه بر آنکه مجانی تمام میشود هدایای عدیدهٔ دیگر نیز مجاناً تقدیم مشترکین مینماید اولا سه تومان اعلان مجانی بقیمت معمولی برای هر مشترکی درج مینماید ثانیاً سه آدرس تجارتی راجع بهرقسمت و هرکجای دنیا که مورد احتیاج هرمشترکی باشد مجاناً داده میشود ثالثاً نمایندگی یکی از تجارتخانه های مهم خارجه مجاناً داده میشود رابعاً ۱۲ شماره تمام مجله تجارت بهر مشترکی تفویض میگردد خامسا در صورت مراجعه یك مشورت تجارتی (درصورت امکان) در مقابل منافع پنجگانه فوق فقط نصف قیمت اعلان که پانزده قران است قبلا دریافت میشود تا کنون در دنیا هیچ جریده و

شمارهٔ (۱۱ - ۱۰)

کتابخانه ملی
ایران
مبادله و اهداء

مجلهٔ

ریاضیات

عالی و مقدماتی

بقلم آقای مشهری

۱ ریاضیون ایرانی

۳ - ابوسهل ویجن (بیژن) بن رستم کوهی

اصل این استاد از کوهستان طبرستان و معاصر با سلاطین آل بویه بوده و در دربار عضد الدوله (۳۳۸ - ۳۷۲) دیلمی و جانشینان او بعزت و تقرب تمام میزیسته و در فنون ریاضیات عموماً و خصوصاً در قسمت اعلی صاحب رهاسا شده و آن عصر بزرگی داشته و مقدم و مقتدای ریاضیون بعد بوده. و در اغلب کتب نجوم مصنفین این فن نام او را با احترام برده و استناد بقول او نموده اند چنانچه قطب الدین بن عزالدین بکاری در کتاب خود که موسوم است بحل و عقد نجوم بسیاری از مطالب نجومی را از وی نقل میکند. موقعی که شرف الدوله (۱) بر صمصام الدوله برادر خود غالب آمد و او را از بغداد خارج نمود ابوسهل را از ایران خواسته او را مأمور رصد نجاکند ابوسهل بامر شرف الدوله آنچه از اسباب و آلات که برای این کار لازم بود فراهم کرده و قبل

---

۱) بعد از عضد الدوله بین دو پسرش ابوالفوارس شرف الدوله (۳۷۶ - ۳۷۸) که آنوقت حکومت کرمان را داشت و ابوکالیجار صمصام الدوله (۳۸۱ - ۳۸۹) بر سر تخت و تاج نزاع و درگرفت شرف الدوله بر برادر خود شوریده او را دستگیر و بر بغداد مستولی یافت (۳۷۹)

تکبیر از منجمین بغداد را بر امر ابا ابو سهل شرکت نمودند و در صدد درخت ریاست ابو سهل تشکیل گردید
ابو سهل امکان که صلاحیت این عمل را داشت در بغداد انتخاب و شروع بکار نمود و تا مدت سی سال بر این امر اشتغال
داشت و سلاطین بعد از شرف الدوله هیچ وجه از تشویق و ترغیب او فروگذار نمینمودند و هر سال عدهٔ
از علما و فضلا و اشخاص که در این فن مهارت و اطلاع داشتند در موضع رصد مجتمع شده و بر صحت عمل
شهادت می نوشتند و صورت در محضر از آن محاضر را ابن القفطی در تاریخ الحکما (۱) ضبط نموده که انعقاد
محضر اول در روز شنبه ۲۸ صفر المظفر سنهٔ ۳۷۸ هجری مطابق با ۱۰ حزیران سال ۲۹۹ اسکندری (۲)
در روز ۱۰ ایران از ماه خرداد سال ۳۵۷ یزدجردی (۳) و محضر دوم در روز سه شنبه ۲۰ جمادی الاخر سنهٔ ۳۸۸

---

(۱) ص ۳۵ و ص ۳۵۳ تاریخ الحکما. (۲) مبدء تاریخ اسکندری روز دوشنبه سال ۱۲ وارد هم بعد از اسکندر (۳۳۳ وفات
- ۳۵۰ قم) است و مدت سال آن بحساب شمسی ۳۶۵ روز و عدهٔ روزهای ماههای آن از این قرار بوده: هفت
ماه ۳۱ روز و ۴ ماه سی روز و یکماه ۲۸ روز و دو دهم چهار سال ماه اخیر با بعلت کبس دارد باع سالهای چهار کامله ۲۹ روز
می گیرند و آن سال را با عتبار یکروز کبیسه می نامند و اسامی ماههای آن بترتیب از اول بهار مطابق با فروردین
(برج حمل) عبارتند از: ۱ آذار ۲ نیسان ۳ ایار ۴ حزیران ۵ تموز ۶ آب ۷ تشرین اول ۸ تشرین دوم ۹ ایلول ۱۰ کانون اول
۱۱ کانون دوم ۱۲ شباط. (۳) - مبدء تاریخ یزدجردی ۲۱ ربیع الاول سال ۱۱ هجری قمری مطابق با ۱۶ حزیران ۶۳۲ میلادی
موافق با جلوس یزدگرد پسر شهریار و نوهٔ خسرو پرویز آخرین سلطان ساسانی است که در سنهٔ ۳۱ هجری مطابق با ۶۵۲ میلادی
کشته شد. در دورهٔ ساسانی سال شمسی به ۱۲ ماه تقسیم میشده و اسامی ماهها همان است که امروز مصطلح است (فروردین، اردیبهشت، الخ)
و هر ماهی عبارت بوده از ۳۰ روز که هر کدام باسم یکی از یزدانها (ایزدها) و فرشتگان (ملائکه) مزدیسنا
مزامن او بودند و عدهٔ آنها با سیصد و سی عدد از آنها مشهور و اسامی هر یک از آنها معلوم و ثابت است که هر یک از آن روزهای ماه یکی از آنها اختصاص داشته) بنابراین
و چون در هر سال ۳۶۵ روز است اضافه می آمد و روز اضافی را بآخر یکی از ماههای اخیر وارد میاوردند و آن را پنجی یا پنجه یا اندگاه که
اعراب آن را معرب ساخته اند پنجاه و پنجی یا پنجه سرقه گفته اند و تا زمان یزدجرد اضافه اسامی مخصوص داشته که ابو ریحان
بیرونی در کتاب الآثار الباقیه ص ۴۳ طبع می گوید: مزدائیان در روز اول و نفرین باد و دعا و کتاب یکسان نزد پنج روز پنجه و روز شنبه اول
و اشاراتی کرده اند ۱- اهنه گاه ۲- اشتهاد گاه ۳- اسفندگاه ۴- اسفندمذگاه ۵- هشتش گاه و باره یکی می گویند که: اسامی
فروردادگان دیگر بدین طریق بدیم ۱- اهنوذ ۲- اشنوذ ۳- اسفندمذ ۴- اخشتر ۵- وهشتوشت - و اسامی
فروردادگان دیگر ان ثابت آملی صاحب کتاب (غرر) را زوداد و بهروشاهو بصاحب کتاب علت اعیاد مزدیسنا نقل می کند که
ذکر آنها موجب تطویل خواهد شد - بالجمله سال شمسی مزدیسنا ۳۶۵ روز بوده و چون سال حقیقی ۳۶۵ روز و ۶ ساعت و ۴۸ دقیقه
می باشد (یعنی ۱۱ دقیقه و نیم کمتر) پس در هر چهار سال تقریباً یکروز سال عرفی از سال حقیقی پیش افتاده و چون برای مزدیسنا
لازم بود که سال حقیقی بضبط باید برای انعقاد اعیاد و جشنها باشند فرا گرفته شده بود تدابیر خاصی در دولت هر ۱۲۰ سال یکدفعه
سیاله یعنی ۱ ماه حساب کنند و بنوبت و فروردین و دوازدهی جشن الخ می شمرند یعنی بعد ۱۲۰ سال اول و فروردین و هفتاد و ۱۲
سال بعد دوازدهی جشن حساب می کردند و سال کبیسه را که هر سی و هر روز از ماه اسم خاصی داشته که باید بنوبت
ذکر کنیم: ۱- اهرمز ۲- بهمن ۳- اردی بهشت ۴- شهریور ۵- اسفندارمذ ۶- خرداد ۷- مرداد ۸- دی بآذر
۹- آذر ۱۰- آبان ۱۱- خور ۱۲- ماه ۱۳- تیر ۱۴- جوش ودوی بهر ۱۵- بهر ۱۶- سروش ۱۷- رشن ۱۸- فروردین
۱۹- فروردین ۲۰- طیرام ۲۱- وام ۲۲- باد ۲۳- دی بدین ۲۴- دین ۲۵- ارد ۲۶- اشتاد ۲۷- آسمان ۲۸- زامیاد
۲۹- مارسفند ۳۰- انیران. ابو ریحان می گوید بعضیها اختلاف کرده اند در هر نوزده ایران که اول را فرخ و دومی را بابه نام
داشته اند و اتفاق دارند بقیه متفق القول اند.

مجری مطالعه رصد شهریور ماه ۳۵۷ یزدجردی و ۱۱ ایلول سنهٔ ۱۲۹۹ اسکندری بوده است.
و منجم او مصدقی که اساس آثار ابن القفطی ضبط کرده (۱) تصدیق کرده اند با اینکه، در ساعت مذکور در متن
اول بعد سمت الراس از مدار راس السرطان ۵° و ۵۰ بود و میل اعظم که آن هنگام بود در منطقة البروج است از
دایرهٔ معدل النهار ۲۳° و ۴۵ و ۱۷ باشد و عرض آن موضع که ذکر آن از پیش گذشت و صدد آن واقع آنطور که
نوشته شد، و آن ارتفاع قطب معدل النهار است از افق و در متن ثانی مصدقین و علما تصدیق نموده اند بر دو
آمدن شمس بر راس المیزان بعد از گذشتن چهار ساعت از روز مذکور در متن ثانی. تاریخ وفات ابن لسناد بطور
مخطوط در دست نیست و در هیچ یک از کتب (رکب مشهور و تواریخی که در دست رس است) تاریخ تولد و وفات او
بطور صریح مضبوط نیست لکن اگر برای مدت زندگی او محسوب داشته و با تاریخ ابتدای رصد بسنجیم تا
حدود ۴۱۰ و ۱۲ در رفید حیات بوده و تقریبا وفاتش هم در همین حدود از تاریخ اتفاق افتاده. مصنفات او
مؤلفات ابو سهل که فهرستی را ابن القفطی در تاریخ الحکما (۲) و قسمتی دیگر را ابن الندیم در الفهرست (۳) نقل
کرده اند بقرار ذیل است:

۱- کتاب مراکز الاکر که ناتمام مانده.　　۲- کتاب البرکار التمام در دو مقاله.
۳- کتاب الاصول که اقتباس از کتاب اقلیدس کرده و این کتاب هم ناتمام بوده.
۴- کتاب صنعة الاسطرلاب بالبراهین. در دو مقاله.
۵- کتاب احداث النقط علی الخطوط.　　۶- کتاب علی المنطقیین فی توالی الحرکتین.
۷- کتاب مراکز الدوائر علی الخطوط من طریق التحلیل دون التراکیب.
۸- کتاب اخراج الخطین علی نسبة.　　۹- کتاب الدوائر متماسة من طریق التحلیل
۱۰- کتاب الزیادات علی ارشمیدس فی المقالة الثانیه.
۱۱- رساله فی استخراج الضلع المسبع فی الدائره.
نسخهٔ خطی کتاب اخیر و اغلب از کتاب خانه ها موجود است.

---

(۱) - ص ۳۵۳ تاریخ الحکما - قاضی ابوبکر بن صبه ۲- قاضی ابوالحسن بن خوزی ۳- ابواسحاق ابراهیم بن هلال (۳۱۳-۳۸۴ ه)
۴- ابوسعد العلاء بن سوار بن سنان الشیرازی ۵- ابوالوفا محمد بن محمد الکاسب (۳۲۸-۳۸۸ ه) ۶- ابوحامد احمد بن محمد
الصاغانی صاحب کاسطرلاب (در فارس مقارن بوده ۳۹۵ ه) ۷- ابوالحسن محمد بن محمد السامری ۸- ابوالحسن المغربی
(شرح حال اغلب که جزو ریاضیون اند خواهد آمد)　　(۲) - ص ۳۵۳ و ص ۳۵۴ طبع ۱۹۰۳ م
(۳) ص ۲۸۳ منطبعه ۱۸۷۱ م

۴- ابوالوفای بوزجانی

اسمش محمد بن محمد بن یحیی بن اسمعیل بن العباس از اهل بوزجان خراسان و تولدش در بوزجان (۱)، در سال ۳۲۸ در روز چهارشنبه اول رمضان بوده و ابتدا نزد ابی عمر المغازلی (۲) و ابی عبدالله محمد بن عنبسه که عمو و دائی او بودند حساب و هندسه و علوم مربوطه را آموخت و در سنهٔ ۳۴۸ عزم مسافرت عراق را نمود و در بغداد عضدالدوله [۳۳۷-۳۷۲] و خلفا را بعزت می زیست. و چنانکه در شرح حال وفا بن رستم گفته شد وقتی که عضدالدوله خواست کواکب سبعه را رصد نماید و این امر را ابوالوفا بمحل تحول نمود بعد از آنکه صورت اتمام بدین منظور امر کرد که عدهٔ از آن تصدیق نویسند ابوالوفا یکی از جمله اشخاص است که در دو محضر منعقده حضور داشته و بر صحت علمیات و یحیی بن رستم بعبیت عدهٔ دیگر که شرح آن گذشت تصدیق نوشته است. ابوالوفا. و امیر ابونصر عراق. و ابومحمد خجندی از واضعین علم مثلثات اند ابوالوفا یکی از بزرگترین مخترعین هندسه است و برای اعمال در عملیات نصف قطر را واحد عمل فرض می نموده و بعد ابوریحان ۳۶۲-۴۴۰ در این قسمت از وی تبع نموده و همچنین شکل ظلی که در مثلثات کروی قدما عمل میشود بدو منسوبست. و نیز در قسمت استخراج اوتار توسط تصنیف بزرگ و قابل توجهی که معتنابه اهل فضل است اورد و قسمتهای دیگر آن متذکر شده که علمای قبل از او غافل بودند و همینطور در تعدیلات اهلهٔ قمر زحمات کشیده ابن خلکان می نویسد که ابوالوفا یکی از بزرگترین علمای علم هندسه است و استخراجات مفیده در این علم دارد و متذکر است که کمال الدین ابوالفتح موسی بن یونس که یکی از بزرگترین علمای این فن است در حق او مبالغه مینماید و در اغلب از کتب خود باقوال او استناد کرده و در بیشتر مطالعاتش بکلمات ابوالوفا احتجاج نموده و بکتب او اعتماد کامل داشته و همینطور بعدها چو اجه نصیرالدین طوسی ۵۹۷-۶۷۲ و امیر ابونصر عراق در اغلب از مصنفات خود

---

(۱) بوزجان شهر کوچکی بوده واقع در چهار منزلی نیشابور و شش منزلی هرات و از نواحی نیشابور محسوب میشده ص ۴۷۵ ج ۱ معجم البلدان یاقوت حموی متوفی ۶۲۶

(۲) مخصوصات ابوعمر و راجع هندسه ابتدا پیش ابی یحیی المأوردی بوده است و استاد دیگر او حسین بن احمد بن ابراهیم بن بنداکاتب ابوالحسن بن ابی الحسین (یا ابواحمد) مشهور و یا بن کرنیب یکی از نقاشهٔ بزرگ که خود بخصوص صاحب قسمت طبیعیات مشهور و معروف بوده و دارای تصانیف عالیه است من جمله کتاب مشهور او بر رد ثابت بن قرهٔ حرانی ۲۲۱-۲۸۸ است و چند کتاب دیگر.

ابو الوفا را استاد دانسته و بین رگذر کرش را آورده اند مسئلهٔ جبری ذیل را که یکی از علمای معاصر ابو الوفا طرح کرده بود عضد الدوله حل آن را از ابو سهل و ابو الوفا و چند نفر دیگر خواست آنها پس از مدتی زحمت راه حلش را نیافتند و عاجز ماندند و از اینکی از ریاضیون معاصر سامانیان موسوم به ابو الجود (که شرح حالش خواهد آمد) حل نمود و مسئلهٔ مذکور در جزء سوم کامل است که امروز برای حلش تبدیل بناقص میشود اینک صورت مسئلهٔ مذکوره را ما ذیلاً مینویسیم :

عددی را بدو قسمت غیر مساوی تقسیم کنید که مجموع مربع آنها بعلاوهٔ خارج قسمت بزرگتر بر کوچکتر مساوی ۷۲ بشود

وفات - صاحب الفهرست تاریخ وفاتش را ضبط نکرده همچنانکه ابن خلکان در ذیل ترجمهٔ ابو الوفای گوید : تاریخ وفات ابو الوفا را ابو الفرج بن الندیم ذکر نکرده و من از ابن الاثیر گرفته ام که او تاریخ وفاتش را سنهٔ ۳۷۶ دانسته و بعضی دیگر ۳۷۸ و پارهٔ ۳۸۸ آورده اند بنا بر این تاریخ قطعی وفات ابو الوفا معین نیست و در این باب با اشتباه از کتاب اولیتر الکامل بوده که در آنجا وفات ابن خلکان تاریخ وفات را آنطور دیده و بضبط آورده یا اصلا ابن الاثیر یا ابن خلکان یا یکی از کتاب که بعد ها این دو کتاب را نوشته سهو کرده اند .

بعلت اینکه ابو الوفا در دو محضری که راجع بابو سهل که ذکر آن گذشت حضور داشته و تاریخ محضر ثانی در ۲۰ جمادی الاخر سال ۳۷۸ بوده در این صورت باید در تاریخ انعقاد محاضر یا اصلا در حضور ابو الوفا و یا تاریخی که ابن خلکان و ابن الاثیر نقل کرده اند تردید نمود و اما در قسمت دوم شق اول بطور قطع و یقین تردیدی نیست چه در تاریخ انعقاد محضرین و حضور ابو الوفا و تصدیق نوشتن و امضا کردن او اغلب از مورخین و ارباب تذکره و صاحبان تراجم که ذکر آنها موجب تطویل است در این قسمت شریک و متفق القول هستند بنابراین می توانیم تاریخ مذکوره در وفیات الاعیان و کتاب الکامل را سقیم و خالی از صحت بدانیم و یا همچنان که مذکور شد آن را خطا دانسته اشتباه مصنفین آن دو کتاب یا کتاب آن دانست و از قرائن چنین بر می آید که ابو الوفا احد و در ۳۸۸ حیات داشته .

مصنفات - ابو الوفا دارای مصنفات عالیهٔ بسیاری است که ابن الندیم (۱) مصنفات

(۱) الفهرست ص ۲۸۳

مهمهٔ او را ضبط نموده که آنها از این قرار اند :

۱- شرح بر کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی

۲- تفسیر مجسطی دنیوفنطس یونانی اسکندرانی (جبر و مقابله)

۳- کتاب تفسیر کتاب ابرخس (۱) در جبر و مقابله

۴- کتاب ما یحتاج الیه العمال والکتاب من صناعة الحساب که حاوی هفت مبحث است و هر مبحث شامل هفت باب. مبحث اول در نسبت. مبحث دوم در ضرب و قسمت. سوم در اعمال مساحان و مبحث هفتم در روش و طرز معاملات تجار.

۵- کتاب المدخل الی الارثماطیقی .

۶- ایضاً کتابی در ارثماطیقی

۷- کتابی در براهین قضایای دیوفنطس و در تفسیر مکه ابوالوفا بر کتاب او نوشته

۸- کتاب استخراج ضلع مکعب بمال مال و ترکیبات آن دو در یک مقاله

۹- کتاب معرفة الدّائرة القلکی یک مقاله

۱۰- کتاب الکامل دارای سه مقاله: اوّل در اموری که تعلیم آنها قبل از حرکات کواکب لازم است دوم در حرکات کواکب سوم در اموری که متعرّض‌اند حرکات کواکب

۱۱- کتاب زیج الواضح که آنهم دارای سه مقاله است و قسمتهای مقالات آن مثل کتاب الکامل است.

---

(۱) ابرخس (یا هیپارک Hipparque) یکی از ریاضیون بزرگ و منجمین عالی مقام قرن دوم قبل از میلاد است و جزء حکماء کلدانی نعمان یونان بوده و در علم ارصاد و اعمال آلات آن از قبیل اسطرلاب وغیره مهارت کامل داشته و اختراع اسطرلاب را بعضی باو نسبت میدهند گرچه بعضی دیگر معتقدند که اسطرلاب از مخترعات کلاب حکیم است در هر صورت ابرخس یکی از حکما و ریاضیون بزرگ است که در تقسیم اعداد و صنعت جبر و مقابله بی نظیر و تقریباً یکی از مبتکرین این فن است و همچنین قواعدی برای حل مثلثات مستقیمة الخط وضع نموده و بنیز در تقدیم اعتدالین و تعیین مدت حقیقی سال شمسی ابداعی نموده مصنفات او در دست نیست فقط آنچه را که بطلیموس (Ptolemée) در کتاب خود موسوم بالمجسطی (Almageste) ضبط کرده موجود است همطور در تاریخ الحکما ص ۹۰ می گوید کتاب سرا را المنجم فی معرفة الدول والملل والملاحم (واو الملک) بدو منسوبست و ابن کتاب بعربی نقل شده و ابن الندیم در الفهرست ص ۲۶۱ می نویسد که ابرخس ... المزعفی دارای تصانیف ذیل است یکی کتاب جبر که ابوالوفا آن را اصلاح نموده و ادله و براهین آنرا بآن افزوده و دیگر کتاب قسمة الاعداد است

«نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی»

بقلم آلبرت اینشتین.

La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée.

(Albert Einstein.)

چند سالی است که صدای دانشمند معاصر آلمانی آلبرت اینشتین بایران نیز رسیده ولی بواسطهٔ دور بودن معنوی این مملکت از مراکز علم و دانش دنیا وفقدان نشریات علمی در این سرزمین هیچگونه وسیلهٔ دست رس اشخاصی که وقت تحصیل مقدمات ریاضی و طبیعی نظریهٔ نسبی بودن و تعمق در آنرا ندارند و فقط مایل بدانستن اصول این نظریه میباشند گذارده نشده. باین مناسبت بی مناسبت ندیدیم که کتاب «**نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی**» را که اینشتین برای اشخاصی که آشنائی مختصری باصول علم دقیقه دارند نگاشته و باغلب السنهٔ چه ترجمه شده است بفارسی ترجمه کرده در دسترس خوانندگان محترم خود قرار دهیم.

ضمناً تذکر میدهیم که بواسطهٔ ضیق صفحات اردوج مقدمه که اینشتین براین کتاب نوشته صرف نظر شده و در بعضی موارد مطالبی که ذکر آنها لازم بوده بعنوان حاشیه نگاشته شده است

(مجلهٔ ریاضیات)

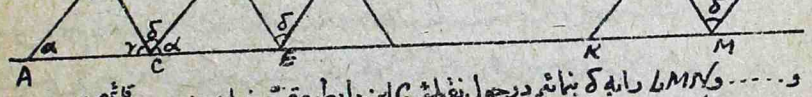
قسمت اوّل - نسبی بودن خصوصی

فصل اوّل - فیزیک و قوانین هندسه

کسی که این کتاب را میخواند بلاشک دوجوانی یا بنای باشکوه هندسه

اقلیدس آشنا شده و شاید یادآوری این علم بلند پایه که معلمین با عقیده درستی

(۱) هندسهٔ معمولی را بمناسبت اینکه اوّل دفعه اقلیدس بونانی تدوین کرده هندسهٔ اقلیدس خوانند. در این هندسه اصل موضوع ذیل معتبر است:
«از نقطهٔ واقع در خارج مستقیم مفروض فقط یک خط موازات آن مرور می کند»
بعضی از مصنفین بجای این اصل اصولی دیگر از قبیل اصول ذیل قرار داده اند:
۱- اگر یک عمود و یک مایل بر خطی رسم کنیم این دو خط یکدیگر را ملاقی می کنند
۲- مجموع دو زوایای مثلث دو قائمه است و غیره
بسیاری از ریاضیون در اثبات اصل موضوع اقلیدس زحمات کشیده اند ولی هیچ یک موفق نیامده اند
لژاندر (Legendre) (۱۷۵۲-۱۸۳۳) پس از زحمات زیادی بدون
استعمال اصل موضوع اقلیدس ثابت کرده است که مجموع زوایای مثلثات مستقیم الخط اند دو قائمه
تجاوز نمیکند و استدلال او بقرار ذیل است:
فرض کنیم ABC مثلث مفروض و α و β و γ زوایای آن و $\alpha+\beta+\gamma$ بزرگتر از دو قائمه باشد
برامتداد AC طولهای CE و ..... و KM را مساوی AC جدا نموده مثلثات CDE و .....
و KLM را مساوی مثلث ABC رسم می کنیم اگر مقدار مشترک زوایای BCD و DEF



و ..... و $\angle LMN$ را به δ بنامیم در حول نقطهٔ C این رابطه مقرر خواهد بود: $\alpha+\gamma+\delta = 2$ قائمه
اما: $\alpha+\beta+\gamma > 2$ قائمه پس $\delta < \beta$ بنابراین $BD < AC$ (هندسهٔ مسطحهٔ عدد اتمند معظم
آقای دهنا قضیهٔ ۲۳) فرض کنیم ε تفاضل AC و BD و n عدهٔ مثلثات مساوی با ABC باشد
واضح است که: $\angle LN = n\varepsilon$ پس: $AM - BDF \ldots\ldots$
$\angle NM = n\varepsilon - (AB+MN) = n\varepsilon - 2AB$
$AM - ABDF \ldots\ldots \angle NM = n\varepsilon$
چون عدد n اختیاری است می توان آن را بقسمی تعیین کرد که طرف دوم تساوی فوق مثبت باشد
و آنوقت لازم می آید که مستقیم AM از منکسر $ABDF \ldots LNM$ که در دو طرف با آن مشترک
بزرگتر باشد و این ممتنع است.
بعد از بن قضیه لژاندر قضیهٔ ذیل را ثابت نموده: اگر در یک مثلث مستقیم الخط مجموع زوایا
دو قائمه باشد در جمیع مثلثات دو قائمه خواهد بود.

طوبلی او را با آن آشنا ساخته اند حتی احترام را بیش از حق حظ و شعف مروی بیدار نماید از این نظر است که بکسی که جرات شک کردن در کمترین حکم این علم را نماید با نظر حقارت مینگرم. ولی اگر سؤال ذیل را از او بنماید عقیده که بحقیت مطلق هندسهٔ اقلیدس دارد از وی سلب خواهد شد: «وقتی میگویند این قضایا محقق اند مقصودتان چیست؟» در اینجا تأمل باید کرد.

هندسه از مبادی اصلی چندی از قبیل سطح - نقطه - خط مستقیم که ما تصور کرده بدیهی و واضح از آنها داریم و چند حکم ساده (بدیهیات) که پس از تصوری که از مبادی فوق الذکر برای ما حاصل شد بنظرمان «محقق» می آیند منتج میشود سپس کلیهٔ قضایای دیگر را با روشی منطقی که فکر ما از پذیرفتن آنها اکراه است ببدیهیات فوق الذکر ارجاع مینمایند. پس یک حکم وقتی صحیح یعنی «محقق» است که بواسطهٔ این روش منطقی که مورد قبول عموم استادان

بدیهی است که پس از اثبات قضیهٔ فوق الذکر برای اثبات اصل موضوع اقلیدس کافی است ثابت شود که مجموع زوایای مثلث از دو قائمه کمتر نمیتواند شد ولی پس از جدّ و جهد زیاد لژاندر و دیگر علمای ریاضی از اثبات این قضیه مایوس گردیده و در این موقع هندسه های دیگری با هم موجود شد که گاوس Gauss آنها را هندسهٔ غیر اقلیدسی (Geometrie non euclidienne) نامیده و لباچفسکی Lobatchevsky و ژان بلیه J. Bolyai دوستان دانشمند مذکور اولین اشخاصی هستند که در این هندسه کار کرده اند. چون در این شماره مقالهٔ بقلم آقای سید عبدالله ثابت ریاضی راجع باصول هندسهٔ لباچفسکی در مجله درج شده ما از ذکر تفصیلات در این باب بی نیاز بوده فقط متذکر میشویم که هندسهٔ ریاضی دان مذکور مبنی بر این اصل است: از نقطهٔ مفروض واقع در خارج مستقیم مفروضی در صفحهٔ خطی توان رسم کرد که مستقیم مفروض را قطع نکند. بعدها هندسهٔ دیگری موسوم هندسهٔ ریمانی باسم ریاضی دان معروف (Riemann) مبنی بر این اصل که «از نقطهٔ مفروض واقع در خارج مستقیم مفروضی هیچ خطی بموازات آن مرور نمیکند.» ظاهر شد و این هندسه امروز اهمیت زیادی حائز شده است. گذشته از این دو هندسه هندسه های دیگری از قبیل هندسهٔ بلترامی (Beltrami) و هندسهٔ فریش (Friehhof.) هندسهٔ تیلی (Tilly) و هندسهٔ ژراد Gerard و غیره موجود است که در اصول آنها جوب تطویل میباشد و قارئین می توانند بکتاب Geometrie non euclidienne تألیف Barbarin (آدرس کتابخانهٔ Gauthier - Villars (Paris) که در باب هریک از این هندسه ها توضیحات کامل داده است مراجعه نمایند (مترجم)

بدیهیات مذکور نتیجه شود بنابراین تحقیق محقق بودن قضایای مختلف هندسه بتحقیق محقق بودن این بدیهیات راجع می گردد ولی از دیرزمانی می دانند که نه فقط صحت بدیهیات مذکور را بوسیلهٔ طرق هندسی اثبات نتوان کرد بلکه این بدیهیات بخودی خود معنائی ندارند مثلاً ممکن نیست از خود سؤال کنیم که «آیا بر نقطهٔ مفروضی فقط یک مستقیم مرور می کند» فقط می توانیم بگوئیم هندسهٔ اقلیدس از اشکالی موسوم بخط مستقیم که خاصیت معین شدن بواسطهٔ دو نقطه را بآنها نسبت می دهد بحث می کند. بنابراین حقیقت معنای محقق بودن در باب قضایای هندسه قابل استعمال نیست زیرا این لفظ معمولاً برای اشیاء حقیقی استعمال میشود. هندسه روابط بین این مبادی و مبادی تجربی بحث نمیکند بلکه از ارتباط منطقی که بین این مبادی موجود است گفتگو می نماید. بسهولت می توان علت اینکه با وجود مطالب فوق الذکر قضایای هندسه را محقق میپندارند تشریح نمود. در طبیعت اشیائی موجود است که کم و بیش با مبادی هندسه قابل تطبیق است و بلاشک این مبادی از آنها بوجود آمده و بعبارهٔ اخری اصل اینمبادی می باشند. هندسه برای اینکه حتی المقدور بنای خود را در محیط منطق بنا نهاده سعی می کند خویش را از اصل خود دور نماید. مثلاً در فکر ما جایگیر شده که خط مستقیم بواسطهٔ دو نقطه جسم صلبی را تعیین کنیم و بنین عادت کرده ایم که سه نقطه را بر یک مستقیم بدانیم هرگاه بر آنها شعاع بصری مرور نماید (بنابر آنکه مکان چشم را صد موضع مناسبی اختیار شود) بعلاوه بر وفق عادتی که در فکر کردن داریم باحکام هندسهٔ اقلیدسی حکم ذیل را می افزائیم: ناصلابهٔ دو نقطه جسمی که عملاً صلب باشد مربوط باوضاع مختلف جسم مذکور نبوده بلکه لایتغیر[1] باین طریق احکام هندسهٔ اقلیدس باحکامی مربوط باوضاع نسبی اجسامی که عملاً میتوان آنها صلب دانست راجع می گردد و وقتی هندسه باین قسم تکمیل گردید می توان آنرا شعبهٔ از فیزیک دانست. اینک می توانیم از خود سؤال کنیم که وقتی احکام هندسه اینگونه تعبیر شوند

---

(۱) در اصطلاح جزء انفعال جسم صلب جسمی است که در اثر هیچ قوهٔ تغییر شکل ندهد. معلوم است که در طبیعت اجسامی که دقیقاً باین تعریف صدق کنند وجود ندارد ولی عملاً بعضی اجسام را می توان صلب دانست.
(مترجم)

محقق خواهند بود یا خیر. برای توانیم از خود بپرسیم اشیائی که نظیر مبادی هندسی سابق الذکر هند با احکام هندسی قابل تطبیق اند یا نه پس تجربیگاه وقتی بالاخره حکم هندسی بتجربه می‌گذارد که بوسیلهٔ پرکار و ستاره امکان پذیر باشد راجع کرد. میتوانیم آنرا محقق بدانیم ولی اطمینان بمحقق بودن احکام هندسی اینگونه تصور نشود این اطمینان جز بخیالی ناقص مبنی نتواند بود. ما فعلاً محقق بودن احکام هندسی را قبول کرده و در قسمت اخیر این افکار (در مبحث نسبی بودن بطور عمومی) خواهیم دید که این محقق بودن مطلق نیست و در همان مورد حدود آنرا تعیین خواهیم کرد

فصل دوم - دستگاه مختصات

بعد در تعبیر فیزیکی فاصلهٔ که در فصل سابق ذکر شد میتوانیم با دقت فاصله دو نقطهٔ مفروض از جسم صلبی را بسنجیم. برای این مقصود مستقیمی (مانند چوب کبریت که) برای تعیین فاصلهٔ آنها مستقیمی که آنها را وصل کند بر طبق قوانین هندسی رسم نموده چوب کبریت که را ابتدا از A آنقدر بر AB نقل کنیم تا به B برسیم. عددی که از این سنجش حاصل میشود اندازهٔ مستقیم AB است. بطور کلی سنجش طولها مبنی بر این اصل است برای تعیین وضع شئ در فضا یا تعیین موضعی که حادثه در آن واقع شده جسم صلبی بعنوان دستگاه مأخذ (۱) اختیار کرده نقطهٔ از آنرا که باشد منظور منطبق است تعیین میکنیم. این روش نه فقط از نظر علمی برای تعیین موضع اشیا استعمال میشود بلکه در زندگی عادی نیز مستعمل است. مثلاً اگر جملهٔ: «طهران - میدان سپه» را که برای تعیین مکان بکار میرود تشریح کنیم مشاهده میشود که زمین دستگاه مأخذ است و بر روی آن موضع «میدان سپه در طهران» که محل وقوع حادثهٔ معینی است قرار دارد.

این طریقهٔ مفید ملتی برای تعیین امکنه فقط برای تعیین نقاطی که بر سطح اجسام صلب واقع باشند قابل استعمال است و بعلاوه مبنی بفرض وجود نقاط متباین بر سطح اجسام صلب میباشد ولی ذیلاً خواهیم دید که چگونه فکر بشر بدون اینکه راه تعیین مکان را

۱ اختیار نمودن آنرا واضعین مبادی هندسه مسلم فرض نموده‌اند

A و B مفروض باشند

Système de référence.

تغییر دهد از این دو تخصیص رهائی یافته. برای مثال فرض کنیم قطعهٔ ابری در فوق میدان سپه باشد. برای تعیین وضع آن نسبت بسطح زمین می توان بر نقطهٔ از سطح میدان سپه تیری کرد بقطعهٔ ابر مذکور منتهی شود نصب کرد حال اگر با الفاظ «طهران میدان سپه» که موضوع نصب تیر را معلوم می کند ارتفاع تیر را اعلاوه کنیم وضع ابر معین می گردد. از روی این مثال دیده می شود که موضوع مکان بطریق ذیل تکمیل گردید:

ا- جسم صلب مفروضی را که بعنوان دستگاه ماخذ انتخاب شده آنقدر بسط میدهیم تا شیئ را که منظور تعیین موضع آنست در نقطهٔ تلاقی کند.

ب- برای معین کردن موضعی بجای استعمال الفاظ اعداد بکار میبریم (در مثال فوق طول تیر که بید دستگاه مدرجی بدست می آید.)

ج- بدون توجه بنصب تیری که در فوق گفته شد ارتفاع ابر را ذکر می کنیم (در مثال فوق باید دارا صادی که ان نقاط مختلف کرهٔ زمین در ابر شده و باید خواص انتشار نور طول تیر معین می شود.)

از آنچه گفته شد معلوم می شود که در تعیین امکنه حتی الامکان استعمال اعداد انتزاعی را باین طریق بدون توجه بنقاط قابل توجه جسم صلبی که بعنوان دستگاه ماخذ انتخاب شده می توان مکان منظوری را معین نمود. در فیزیک برای سهل باین مقصود دستگاه مختصات قائم را استعمال می کنند. این دستگاه شامل سه صفحهٔ صلب است که دو بدو بر هم عمود و جزء لاینفک (۱) جسم صلبی می باشند. مکان وقوع هر حادثه نسبت باین دستگاه بوسیلهٔ طول عمودهای وارد از ان بر این سه سطح معین می شود این سه طول را مختصات مکان مذکور نامند و آنها را بحروف x و y و z مینامند. مختصات نقطه را بر طبق قوانین و روشهای هندسهٔ اقلیدسی و بدد میله ها صلب تعیین می کنند. در عمل نه بساختن صفحات صلب مذکور احتیاج است و نه مختصات نقطه را بوسیلهٔ میله های صلب بدست می آورند. بلکه بطرق غیر مستقیم آنها را تعیین می کنند. معذلک برای اینکه نتایج علوم فیزیک و هیئت در نظر معلق و تاریک نگردد نباید این

مبنای فیزیکی تعیین مکان را از نظر دور نساخت .

پس بطور اجمال توان گفت که برای تعیین موضع وقوع یک حادثه در فضا اختیار جسم صلبی لازم است تا مکان وقوع حادثه نسبت بآن معلوم شود . این تعیین قوانین هندسهٔ اقلیدسی را در باب خط مستقیم قابل استعمال فرض می کند بعبارهٔ اخری در این تعیین فرض می کنند در طبیعت خط مستقیم را می توان بواسطهٔ دو نقطهٔ معین از جسم صلبی نمایش داد .

فصل سوّم - فضا و زمان در جرّ ثقیل تعلیمی

بدون مطالعات طویله و بیانات مقدماتی نمیتوان مقصود جرّ اثقال را چنین بیان کرد : «جرّ اثقال در تغییر وضع اجسام در فضا بحسب زمان بحث می کند .» ولی در این تعریف خطایای بزرگی نسبت بفکر وضوح و روشنی مرتکب می شویم و اینک سعی می کنیم این خطاها را توضیح دهیم :

در اینجا موضوع «مکان» (یا وضعیت) و «فضا» آنقدر ها روشن نیست . برای توضیح مثالی اختیار می کنیم : اگر از پنجرهٔ اطاق ترنی که با حرکت متشابه (۱) حرکت می کند سنگی بدون سرعت اولیّه رها کنند صرف نظر از مقاومت هوا بنظر شما که در ترن هستید سنگ در امتداد مستقیمی سقوط می کند ولی بنظر شخصی که خارج ترن در کنار جادّه ایستاده باشد مسیر سنگ سهمی خواهد بود . اوضاع مختلفی که در حقیقت امر سنگ اختیار کرده بر یک مستقیم و افتند یا بر یک سهمی بعلاوه در اینجا مقصود از «حرکت در فضا» چیست ؟ جواب این سؤالات با مقدّمات مذکور در فصل ۲ محتاج بتأمّل نیست مقدّمتر لفظ «در فضا» را که بالصّراحه باید مهمل بودن آنرا تصدیق کرد کنار گذارده بجای آن عبارت «حرکت نسبت بیک جسم صلب» را استعمال مینمائیم . طریق تعیین یک موضع نسبت بدو دستگاه مأخذ اطاق ترن یا جادّه بتفصیل در فصل سابق مذکور شد و اگر بجای لفظ دستگاه مأخذ اصطلاح ریاضی «دستگاه مختصات» را استعمال کنیم میتوانیم بگوئیم : «مسیر سنگ

(۱) برای تعریف و توضیح مختصری در باب حرکت و مسیر و سرعت و غیره مراجعه کنید بشمارهٔ دوم مجلهٔ صفحهٔ ۳

نسبت بدستگاه مختصاتی که جزء لاینفک تن باشد خط مستقیم و نسبت بدستگاه که جزء لاینفک جاده باشد سهمی است.» از این مثال معلوم می شود که از مسیر[1] من حیث هو هو نمیتوان صحبت کرد بلکه فقط از مسیر متحرک نسبت بدستگاه مأخذ مفروضی بحث توان کرد.

امّا حرکت وقتی معیّن است که وضع متحرک نسبت بزمان معلوم باشد یعنی وقتی در هر لحظه بتوان موضع متحرک را بر مسیرش معلوم نمود.

برای این مقصود باید بمفروضات فوق الذکر تعریفی از زمان منظم نمود و این تعریف باید بنوعی باشد که بدان توان مقادیر مختلف زمان را مانند نتایجی که از سنجش کمیات بدست می آید تحت اصول مشاهده و تجربه قرار داد. در مثال فوق الذکر اگر بطریق ذیل رفتار نمائیم برطبق اصول جرّ ثقیل تعلیمی بمقصود نائل می شویم:

فرض کنیم هر یک از دو واصد اطاق تن و جادهٔ ساعتی داشته باشند و این دو ساعت از هر حیث متماثل باشند و هر یک از آنها در موقعی که ساعتش موقع معیّنی را نشان می دهد وضع سنگ را در دستگاه مأخذ خود تعیین کند. باین قسم بواسطهٔ محدود بودن سرعت انتشار نور هیچ گونه خطائی رخ نخواهد داد.

در باب این مطلب بعدها بتفصیل سخن خواهیم راند و نیز راجع باشکال دیگری که در فوق ذکری از آن بمیان نیاورده بحث خواهیم نمود.

فصل چهارم. دستگاه مختصات کالیله.

می دانیم که مکانیک نیوتون و کالیله مبنی باصل جبر است که به اصل جبر موسوم شده: «وقتی جسم در فضا تحت اثر هیچ قوّه نباشد یا ساکن است و یا حرکت متشابه مستقیم الخطّ دارد.» این حکم نه فقط در حرکت اجسام جاری است بلکه در انتخاب دستگاههای مأخذی که در این مکانیک قابل قبولست نیز دخیل می باشد. اصل جبر محققاً با تقریب زیادی در باب ثوابت نیز قابل اجراست امّا مسیر ثوابت نسبت بدستگاه مختصاتی

---

(۱) مقصود از مسیر خطی است که اوضاع متوالی متحرک را وصل کند. (حاشیهٔ اینشتین)

که جرم کاینات کرهٔ زمین باشد و دایره ایست که شعاع آن بسیار بزرگ میباشد و کوکب مفروض در شبانه روز نخستین آزمایش پیمایند و این مطلب خود با اصل جبر متناقض است پس برای این که اصل مذکور قابل استعمال باشد باید حرکات را نسبت بدستگاهی سنجید که حرکت ثوابت نسبت بآنها مستدیر نباشد. چنین دستگاهی را «دستگاه مختصات کالیله» خوانند. قوانین مکانیک نیوتون و کالیله فقط در دستگاههای قابل تطبیقی باشند

فصل پنجم - اصل نسبی بودن (بمعنای خاص)

برای توضیح بهتر نخست که با حرکت متشابه حرکت می کروی کره یی. این حرکت را حرکت انتقالی متشابه نامیم. (« انتقالی » گوئیم زیرا در حرکت اطراف زمین نسبت بجادهٔ هیچکونه دورانی موجود نیست. و « متشابه » خوانیم زیرا سرعت آن از جهت جهت و کمیت ثابت است.) و فرض کنیم کلا نحنی نسبت براصد ی که در زمان مذکور باشد از جهت سرعت و جهت با حرکتی که نسبت براصد اول می نماید مختلف است ولی بنظر راصد اخیر این حرکتش مستقیم الخط و متشابه می باشد. بعبارهٔ علمی تر بگوئیم اگر حرکت دستگاه مختصات K' نسبت بدستگاه مختصات K حرکت انتقالی متشابه و حرکت نقطهٔ مانند M نسبت بدستگاه K مستقیم الخط و متشابه باشد حرکت آن نسبت به K' نیز مستقیم الخط و متشابه خواهد بود.

اگر K دستگاه مختصات کالیله باشد هر دستگاه دیگری مانند K' که حرکتش نسبت به K انتقال متشابه است نیز دستگاه کالیله است و قوانین جزء انتقال نیوتون همان گونه که در دستگاه K قابل اجراست بر دستگاه K' نیز قابل تطبیقی باشد. بطور عمومی می توان گفت، اگر حرکت دستگاه K' نسبت بدستگاه K انتقال متشابه باشد اثرات طبیعی در هر دو دستگاه پیرو یک قانون خواهند بود. این اصل را **اصل نسبی بودن خاص** خوانیم. تا موقعی که پیرو این عقیده باشیم که تعبیر اثرات طبیعی بمدد مکانیک تعلیمی ممکن است در این اصل هیچگونه شک و تردیدی نخواهد بود ولی توسعهٔ جدید مبحث الکتریسیتهٔ جاری و نور روز بروز بوضوح این مطلب که مکانیک تعلیمی برای تمام فیزیک مبنای کافی نیست افزود و از این هنگام مقبولیت اصل نسبی بودن خاص مورد بحث فراوان گردید و جواب آن چندان واضح بنظر ها نیامد.

دو مطلب عمومی هست که در نظر اوّل از شاهدهای قوی صحّت اصل نسبی بودن بشمار میرود. بفرض اینکه مکانیک تعلیمی مبنای کافی برای بیان تمام آثار فیزیکی نباشد در قسمت عمدهٔ آن آنها نتایج موافق حقیقت می دهد زیرا بادقت در بادی حرکات حقیقی اجسام سماوی را تعیین می کند پس باید اصل نسبی بودن با احتمال قوی لااقل در جزء اشکال قابل اجرا باشد. بالبداهه خیلی کم محتمل است که اصلی باین عمومیّت در بیان دستهٔ از آثار قابل اجرا بوده و باز دستهٔ دیگر قابل تطبیق نباشد. مطلب دوّمی که بعدها موضوع بحث ما خواهد بود اینست که اگر اصل نسبی بودن مطلق مقبول نباشد دستگاههای مختلف کالیله K و K' و K'' و ..... که نسبت بیکدیگر حرکت متشابه دارند برای بیان آثار طبیعی معادل نخواهند بود و با این نظر این فکر بخاطر خطور می کند که در بین این دستگاههای مختلف یکی مانند K_0 که دارای حرکت معیّنی است یافت می شود که در آن قوانین طبیعت بصورت خیلی ساده و طبیعی بیرون آیند آنوقت بمناسبت رجحانی که دستگاه K_0 برای بیان قوانین طبیعت دارد عقلاً می توانیم آنرا دارای «سکون مطلق» دانسته و بقیّهٔ دستگاههای کالیله را نسبت بآن متحرّک بدانیم مثلاً اگر جادّه را بجای دستگاه K_0 فرض کنیم اطاق ترن نسبت باین دستگاه ها از مخصّصات کالیله خواهد بود (K که بعلّت حرکت آن نسبت بدستگاه K_0 (یعنی بعلّت حرکت «حقیقی» آن) قوانین طبیعت دوران مشکل تر و مفصّل تر از قوانین طبیعت در دستگاه K_0 می باشند. زیرا کمیّت و جهت سرعت ترن در قوانین طبیعت نسبت بدستگاه K داخل خواهند شد. مثلاً می توان پیش بینی کرد که برحسب آنکه محور لوله ارگی موازی یا عمود بر جهت حرکت ترن باشد ارتفاع اصوات آن مختلف خواهند بود. امّا زمین نسبت بشمس متحرّک و بمنزلهٔ واگنی است که با سرعت ۳۰ کیلومتر در ثانیه حرکت می کند پس اگر اصل نسبی بودن برقرار نباشد باید منتظر بود که سرعت آنی زمین در قوانین طبیعت داخل شده و با النتیجه دستگاههای فیزیک بحسب اوضاعی که نسبت بسطح زمین دارند مختلف باشند. زیرا امتداد سرعت زمین بعلّت دوران آن در عرض سال همواره در تغیر است پس در عرض سال نمیتوان آنرا نسبت بدستگاه فرضی K_0

ساکن انگاشت. خلاصه هیچگاه چنین اختلاف خواص فیزیکی در جهات مختلف فضا دیده نشده و این مطلب خود برهانی قوی بر له اصل نسبی بودن می باشد.

فصل ششم - قضیهٔ ترکیب سرعت در جرا ثقال تعلیمی (۱)

مجدداً فرض می کنیم تن سابق الذکر با سرعت ثابت v در ثانیه در حرکت باشد و مسافری در طول تن در جهت حرکت آن با سرعت w حرکت نماید. سرعت این شخص نسبت بجادهٔ چقدر است؟ (این سرعت را با W می نمائیم). ظاهراً تنها جواب ممکن از مطالب ذیل نتیجه می شود:

اگر مسافر مذکور یک ثانیه ساکن بماند نسبت بجادهٔ مسافتی مساوی سرعت تن یعنی v طی نماید ولی در حقیقت بمناسبت حرکت خاص خود در این یک ثانیه علاوه بر مسافت v طولی مساوی w نسبت به تن و بالنتیجه نسبت بجادهٔ می پیماید. پس من حیث المجموع در این یک ثانیه طولی مساوی

$$W = v + w$$

پیموده. بعدها خواهیم دید که این اصل کلاسیک جرا ثقال تعلیمی قضیهٔ ترکیب سرعتها نامیده می شود بدقت صحیح نیست و بالنتیجه این قضیه در حقیقت امر محقق نمیباشد. معذلک فعلاً ما آنرا محقق شمارید. (بقیه در شمارهٔ آینده)

مسائل راجع باسب شطرنج

در شکل ذیل اسب از خانهٔ (۱) براه افتاده و موافق شرایط مسائل سابق باید بخانهٔ (۲ یا ۳) برسد.

(۲)			(۳)				(۱)

(۱) رجوع کنید بشمارهٔ دوم مجله صفحهٔ (۳)

چند مسئله از حساب عالی

۳- تبدیل رادیکالهای درجهٔ دوم بکسر مسلسل

تبدیل رادیکالهای درجهٔ دوم بکسر مسلسل - فرض کنیم N عدد مثبت غیر مربع کامل باشد. اگر جزء صحیح $\sqrt{N}$ را با a_1 نمایش دهیم $\sqrt{N} = a_1 + (\sqrt{N} - a_1) = a_1 + \frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}$: $N - a_1^2 = r_1$ یا اگر برای سهولت فرض کنیم $\frac{N-a_1^2}{\sqrt{N}+a_1}$

و باز فرض کنیم b_1 جزء صحیح $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ باشد $b_1 + (\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1} - b_1) = b_1 + \frac{\sqrt{N}+a_1-b_1 r_1}{r_1}$ یا اگر $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1} = b_1 + \frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}$ را با a_2 نمایش دهیم: $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1} = a_2 + b_2 r_2 - a_2$ و اگر $\frac{N-a_2^2}{r_2} = b_2 + \frac{N-a_2^2}{r_2(\sqrt{N}+a_2)}$ را با r_2 نمایش دهیم

و هکذا بهمین طریق معلوم میشود که این قانون کلی است یعنی اگر فرض کنیم $\frac{\sqrt{N}+a_{m-1}}{r_{m-1}} = b_{m-1} + \frac{r_m}{\sqrt{N}+a_m}$ باین طریق $\sqrt{N}$ بکسر مسلسل نامحدودی مانند $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ تبدیل میشود مقادیر $\sqrt{N}$ و $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ و $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ و ..... را خارج قسمتهای تام خوانند.

خواص اصلی کسر مسلسل $\sqrt{N} = (a_1, b_1, b_2, \ldots)$ کسور مسلسلی که از تبدیل رادیکالهای درجهٔ دوم حاصل میشود دارای یک رشته خواص بسیار مهمی است که ذیلا بذکر بعضی از آنها مبادرت می کنیم:

۱- مقادیر a_n و r_n و b_n بالاصاله مثبت اند حال گوئیم سایر a ها و r ها نیز مثبت می باشند. برای اثبات این حکم ملاحظه می کنیم که:

$\sqrt{N} = (a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n})$

بفرض که اگر فرض کنیم $\frac{p}{q} = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ و $\frac{p'}{q'} = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$

نتیجه می شود: $\sqrt{N} = \frac{p'\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n} + p}{q'\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n} + q} = \frac{p'\sqrt{N}+a_n p'+r_n p}{q'\sqrt{N}+a_n q'+r_n q}$

چون مخارج را حذف نموده اجزاء منطق و اصم را مساوی قرار دهیم نتیجه می شود

$a_n p' + r_n p = N q'$ $a_n q' + r_n q = p'$

از آنجا $N=19$، $a_n=4$ و $b_n=3$ و $a_n^2=16$، $N-a_n^2=3$ و $b_n=3$ امّا $\pm 1=4-5$ و مقادیر 5 و 3 و $19-16=3$ و $19-25=-6$ متحدالعلامت اند (شمارهٔ قبل) پس a_n و b_n مثبت می باشند. لازمست متذکر شویم که چون قبل از $\frac{\sqrt{N}+a_n}{b_n}$ دو متقارب موجود است استدلال فوق برای کلیّهٔ مقادیری از n که از واحد بزرگتر باشند برقرار میباشد.

ب- چون طرف دوّم رابطهٔ $N-a_n^2=b_{n-1}b_n$ مثبت است لازم است که $a_n<\sqrt{N}$ از آنجا $a_n<a_1$ از اینجا معلوم است که a ها بیش از a_1 مقدار مختلف اختیار نتوانند کرد. حال از رابطهٔ $b_n=a_n+a_{n+1}$ با ملاحظهٔ اینکه b_n عدد ثابت صحیح غیر از صفر معلوم می شود که $b_n<2a_1$ پس b_n هم بیش از $2a_1$ مقدار مختلف نتوانند داشت بنابر این عدّهٔ مقادیر مختلف خارج $\frac{\sqrt{N}+a_n}{b_n}$ منتهاماساوی $2a_1^2$ است وچون عدّهٔ این خارج قسمتها لااقل نامتناهی است چنین نتیجه می شود که دو خارج قسمت تام پیدا میشوند که مساوی باشند فرض کنیم $\frac{\sqrt{N}+a_k}{b_k}$ اول این خارج قسمت ثانی که تکرار می شود و $\frac{\sqrt{N}+a_l}{b_l}$ با آن مساوی باشد بسهولت معلوم می شود که $a_l=a_k$ و $b_l=b_k$ و $b_{k-1}=b_{l-1}$ و از تساوی این مقادیر لازم آید که $b_{k+1}=b_{l+1}$ و هکذا. از اینجا معلوم می شود که رشته (..., b_{l-1} و b_l و b_{k-1} و b_k) متناوب است.

مثال- فرض کنیم $N=19$، $a_1=4$ و $b_1=3$، صورت عمل را چنین ترتیب می توان داد:

مقدار b_n	مقدار $\frac{\sqrt{N}+a_n}{b_n}$	مقدار $b_n=\frac{N-a_n^2}{b_{n-1}}$	مقدار $a_n=b_{n-1}\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{b_{n-1}}-a_{n-1}$
$b_1=3$		$b_1=3$	$a_1=4$
$b_2=1$	$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$	$b_2=\frac{19-16}{3}=1$	$a_2=3\times 3-4=5$
$b_3=3$	$\frac{\sqrt{19}+3}{1}$	$b_3=\frac{19-25}{1}=-6$	$a_3=1\times 1-5=-4$
$b_4=1$	$\frac{\sqrt{19}+3}{5}$	$b_4=\frac{19-9}{-6}=-1$	$a_4=3\times -6-(-4)=-14$
$b_5=2$	$\frac{\sqrt{19}+2}{3}$	$b_5=\frac{19-196}{1}=-177$	$a_5=1\times 1-(-14)=15$
$b_6=8$	$\frac{\sqrt{19}+4}{1}$	$b_6=\frac{19-225}{-177}=1$	$a_6=2\times -177-15=-369$

$b_1=2$ $\frac{\sqrt{19}+4}{3}$ $a_2=\frac{19-16}{1}=3$ $a_3=8\times1-4=4$

$\sqrt{19}=(4,\overline{2,1,3,1,2,8}\ldots)$

پس: $(\ldots\ldots1,2,8,2,1,4,3,1,2,8,4,2)$ $\frac{b_{n-1}}{r_{n-1}}$ بمناسبت اینکه $a_{n-1}+a_n=b_{n-1}r_{n-1}$ و زیرا از تساوی $a_1<a_n+r_n$ نتیجه می‌شود: $a_{n-1}<\sqrt{N}$ اما $a_{n-1}+a_n\geq r_{n-1}$ پس عدد دی است صحیح

$\sqrt{N}+a_n\geq r_{n-1}$ بنابراین از تساوی $N-a_n^2=r_{n-1}r_n$ حاصل می‌شود: $\sqrt{N}-a_n$

پس: $a_1-a_n<r_n$

- دورهٔ تناوب همیشه از جملهٔ دوم شروع می‌شود و جملهٔ آخر آن دوبرابر اولین خارج قسمت ناقص است.

برهان - فرض کنیم b_m اولین جملهٔ باشد که دورهٔ تناوب با آن شروع می‌شود و $a_m=a_k$ و $b_m=b_k$, $r_m=r_k$ گوئیم $m=1$ زیرا اگر $m>1$ باشد:

$$r_{m-1}r_m=N-a_m^2=N-a_k^2=r_kr_{k-1}=r_mr_{k-1}$$

پس $r_{m-1}=r_{k-1}$ و $a_{m-1}+a_m=b_{m-1}r_{m-1}$ پس از دو رابطهٔ $a_{k-1}+a_k=b_{k-1}r_{k-1}$ نتیجه می‌شود: $a_{m-1}-a_{k-1}=r_{m-1}(b_{m-1}-b_{k-1})$ پس $\frac{a_{m-1}-a_{k-1}}{r_{m-1}}$ یا صحیح است یا صفر. اما: $a_1-a_{m-1}<r_{m-1}$ و $a_1-a_{k-1}<r_{k-1}$.

نامساوی اخیر را می‌توان چنین نوشت: $a_1-a_{k-1}<r_{k-1}$ از آنجا $\frac{a_{m-1}-a_{k-1}}{r_{m-1}}<1$

پس $\frac{a_{m-1}-a_{k-1}}{r_{m-1}}=0$ از آنجا $b_{m-1}=b_{k-1}$ و این خلاف فرض است و بالنتیجه فرض $m>1$ ممکن نیست.

از این رو دیده می‌شود که $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ تکرار می‌شود. فرض کنیم $\frac{\sqrt{N}+a_m}{r_m}$ یکی از جملهٔ ماقبل $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ و یکی از دوره‌های تناوب باشد. چون $\frac{\sqrt{N}+a_m}{r_m}$ و $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ دو خارج قسمت تام متوالی اند: b_m و $a_m+a_1=r_mb_m$ و $N-a_1^2=r_1r_2$ امّا $N-a_1^2=r_1$ پس r_1 از طرف دیگر $a_1-a_m<r_1$ پس $a_1-a_m=0$ یعنی $a_1=a_m$ از آنجا: $a_m+a_1=2a_1=b_m$ ف. م

اطلاع - بعضی از مشترکین محترم مجله جوابهای مسائل شماره‌های قبل را باداره ارسال داشته اند متاسفانه بواسطهٔ ضیق صفحات درج اسامی آنها در این شماره ممکن نگردید. البته در شمارهٔ آتیه جبران خواهد شد.

ارزش ناپلئون

وقتی مسافری از مملکتی بمملکت دیگر میرود و پول مملکت سابق را بپول مملکت جدید تبدیل مینماید مقداری از آنرا کسر میکند. الفرد دوینی Alfred de Vigny شاعر معروف فرانسوی برای اینکه بفهماند از تبدیل پی در پی پول مملکتی به مملکت دیگر چقدر بمسافر ضرر میرسد مسافری را طوری نمود باین قسم که ابتدا از فرانسه به فرانکفورت Frankfort رفت و شیکی از تجاری که بوی توصیه شده بود دریافت خواهش کرد یک قطعهٔ ۲۰ فرانکی که در فرانسه به ناپلئون معروف بود به پول رایج مملکت تبدیل کند. این پول را گرفت و در کیسهٔ مخصوصی جای داد سپس به مونیش برلن - وین - میلان - ناپل - رم - سویس - هلاند - بلژیک - رفت و هر مملکتی که میرسید پولهائی که در کیسهٔ خود داشت بپول رایج آن مملکت تبدیل میکرد. روز یازدهم مارس ۱۸۴۲ که بپاریس رسید بقایای ۲۰ فرانک را بپول فرانسه تبدیل نمود... و سانتیم یعنی ۳ صدم وجه اصلی عاید ش شد. وقتی این مطلب را شنید کرد در دفتر خود چنین یادداشت نمود:

برای یک صنعتگر مسافر ناپلئون دوازده شاهی بلژیک نمی ارزد

(۱۰۰ مملکت فرانسه واحد پول فرانک است و صد بلژیک آنرا سانتیم خوانند و پنج سانتیم را بلژیک شاهی Sou. می نامند)

(از جلد دوم علوم تفریحی)

بهترین وسیلهٔ زیاد کردن پول

فرض کنید یکی از اجداد شما در زمان حضرت مسیح مبلغ یک سانتیم انعقاد کرده باشد. می دانید امروز چه سرمایهٔ هنگفتی از این یک سانتیم تشکیل شده؟ اگر بخواهیم این سرمایه را باعداد نشان بدهیم قدری طولانی میشود لذا گوئیم اگر از زمان حضرت مسیح دقیقه بدقیقه کراتی بین رکهای طلائی ناب از آسمان می انداختند سرمایهٔ حاصل از کلیهٔ این کرات متجاوز نبود.

خواص اعداد

عدد ۱۴۲۸۵۷

$1 \times 142857 = 142857$

$3 \times 142857 = 428571$

$2 \times 142857 = 285714$

$6 \times 142857 = 857142$

$4 \times 142857 = 571428$

$5 \times 142857 = 714285$

$7 \times 142857 = 999999$

ریاضیات (دنباله از شماره قبل)

پس از وضع این قرارداد ها فوراً به مطلب ذیل بر میخوریم: اولاً اینکه اگر به بحث کاملی از توابع $f(z)$ موفق شدیم بدون شایع حاصل میتوان خواص توابع متغیر حقیقی x یعنی $f(x)$ را معلوم کرد زیرا توابع اخیر مقدار $f(z)$ است بازاء $z=x$. دوم اینکه وقتی بطریق فوق الذکر حوزهٔ نظریه توابع را بسط و توسعه دادیم برای همهٔ مطالب مختلف این نظریه افزوده شده تا بحال اشکال مختلفی میگیرد. مثلاً فرض کنیم نقاط M_1 و M_2 نمایندهٔ مقدار حقیقی از z (مثلاً $z=x$ و $z=x_0$) باشند. در نظریهٔ توابع در حوزهٔ حقیقی متغیر z فقط یک طریق وجود دارد که بین این دو مقدار متغیر انتقال حاصل نماید (باین قسم که جمیع مقادیر حقیقی واقع بین x و x_0 را اختیار کند) ولی در نظریه جدید برای اینکه متغیر z از x به x_0 برود یعنی نقطهٔ $M(z)$ از $M_1(x)$ به $M_2(x_0)$ برود بینهایت طریق موجود است (زیرا برای این مقصود کافی است نقطهٔ M بروی هر یک از منحنیهائی که M_1 و M_2 را وصل میکنند حرکت نماید). این مطلب خود راه دیگری برای بحث و تحقیق خواص توابع $f(z)$ باز میکند.

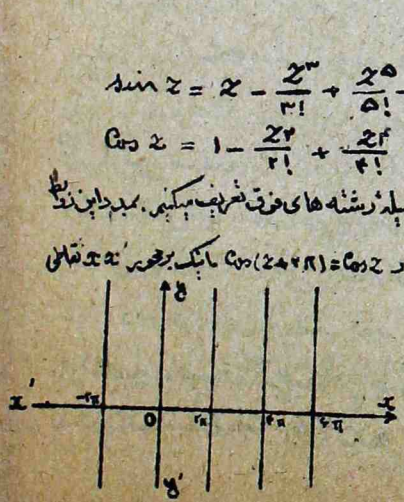
و نیز میتوان تغییرات $f(z)$ را وقتی z در ناحیهٔ اختیاری از سطح متغیر مکان دهیم بحث نمود و باین طریق بکشف خواص بسیار جالب و بدیع نائل شده اند که در کتابهای بوسایل دیگر غیر ممکن است و ما برای نمونه چند مثال ذکر میکنیم:

۴ - چنانکه میدانیم اگر x حقیقی باشد

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

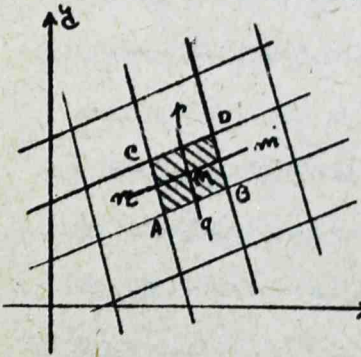
حال در حالتی که z موهومی باشد جیب و جیب تمام بوسیلهٔ رشته های فوق تعریف میکنیم. بعد با این رابطه بسهولت معلوم میشود که: $\sin(z+2\pi) = \sin z$ و $\cos(z+2\pi) = \cos z$ یا یک بر حوزهٔ x تقاطی باطولهای $\pm 2\pi$، $\pm 4\pi$، $\pm 6\pi$ و غیره معین نموده



از این نقاط خطوطی بموازات محور عرض مرور میدهیم بدین طریق صفحه بنوارهائی موازی محور عرض تقسیم میشود.

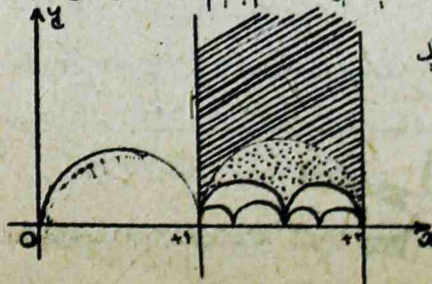
در نقاط متناظر جمیع این توابعها توابع z سنه و z cos مقادیر مساوی اختیار میکنند و بعبارت کاملتر گوئیم اگر M نقطه از توابعها باشد و از این نقطه خطی موازی محور طول رسم کرده طولهای MM1 و MM2 را مساوی 2π جدا کنیم مقدار f(z) در نقاط M1 و M2 مساوی و معادل f(M) میباشد. بالنتیجه برای بحث خواص توابع z سنه و z cos در تمام سطح کافی است این توابع را در یکی از نوارهای مذکور بحث نمائیم. توابع z سنه و z cos را اصطلاحاً بایکدیگر برابر خوانند و 2π دوره تناوب آنهاست.

۵ - بواسطه بسط نظریهٔ فوق توابع دیگری موسوم به توابع دو دوره Fonction biperiodique بدست آورده اند. نظیر هریک از این توابع یکرشته متوازی الاضلاع است و در نقاط متناظر این متوازی الاضلاعها توابع مقادیر مماثل اختیار میکنند. بعبارت دقیق تر گوئیم اگر M نقطه از متوازی الاضلاع ABCD (مثلاً) باشد و خطوط Mp و Mm را موازی با اضلاع متوازی الاضلاع ABCD رسم کرده M1 M2 را مساوی DB و Mm و M1 M را مساوی AB جدا کنیم مقدار تابع در نقاط m و M1 و p و M2 مساوی و معادل مقدار آن در نقطه M میباشد.



توابعی که عاری از خاصیت فوق باشند **توابع بیضوی** خوانده شده اند و وجود آنها ثابت شده است.

۶ - توابع دیگری باقی میشوند که در یک رشته نواحی منتظم الشکل که مجموعاً آنها ناحیهٔ تغیر z را پر میکنند مقادیر مساوی اختیار میکنند. برای مثال بر محور طول نقاط ±1 و ±2 و .... را تثبیت کرده از این نقاط خطوطی بموازات محور عرض موجود هم و بقطر این قسمیات همدایره هائی رسم میکنیم. دستهٔ اول نواحی مذکور از قبیل ناحیه که پوشانده این دایره ها میباشند. اگر یک مربع از قسمیات سابق الذکر را نصف نموده بقطر آنها قوسی رسم میکنیم. باین طریق نواحی جدیدی بدست میاید که بسه قوس دایره محدود اند



(مانند ناحیه که با نقطه پرشده). بهمین قسم میتوان نواحی پیشماری بدست آورد. مطرح است که مجموعهٔ
نواحی ناحیه تغییرح را پر میکنند. خلاصه توابعی یافته اند (توابع اساسات fonction modu. Fonction
Fuchsiennes) که مقادیرشان در نقاط متناظر نواحی همنوع با مختلف النوع مذکوره در فوق مساویست توابع
در هریک از این نواحی جمیع مقادیر ممکنه را اختیار میکنند.

۷ - در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ تلاش زیادی در باب کشف خواص این توابع بعمل آمده ولی در سنهٔ ۱۸۸۰ هانری
پوانکاره (H. Poincaré) ثابت کرد که توابع اساسی دسته خاصی از توابع کلی تری
که دانشمند مذکور آنها را توابع فوشین F. fuchsiennes نامیده میباشد.
ft Automorphes. توابع اخیر خود مشمول توابع عمری تری موسوم به توابع اتومرف
هستند.

یکی از خواص اصلی توابع فوشین این است که در نواحی معینی که مجموعهٔ آنها ناحیه تغییرح یا جزئی از آنرا پر میکنند اگر
میشوند و هریک از این نواحی بچند قوس دایره که موافق قانون معینی رسم شده و وضع نسبی آنها نیز بطبق
قانون معینی است محدود باشد. بعبارت دیگر خاصیت اصلی توابع فوشین را میتوان اینطور بیان کرد:
چند کسر بصورت $\frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$ و $\frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2}$ مثلاً سه کسر $\frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d مقادیر ثابته اند) تابع
$\frac{a_3 z+b_3}{c_3 z+d_3}$ اختیار میکنند. نظیر این سه کسر توابع فوشین مانند $f(z)$ یعنی که اگر t موهومی غیر
مشخصی باشد بازاء $z=t$ و $z=\frac{a_1 t+b_1}{c_1 t+d_1}$، $z=\frac{a_2 t+b_2}{c_2 t+d_2}$، $z=\frac{a_3 t+b_3}{c_3 t+d_3}$ تابع $f(z)$ مقادیر مساوی
اختیار میکند.

چنانکه گفتیم توابع اساسی دسته خاصی از توابع فوشین میباشند و توابع پیضوی نیز اینچنین اند توضیح آنکه
اگر دو کسر مانند $\frac{b_1}{c_1}$ و $\frac{b_2}{c_2}$ را اختیار کنیم تابع فوشین نظیر آنها تابع پیضوی خواهد بود. (خاتمه)

تصحیح لازم.

شماره ۸-۷. صفحه ۳۶. سطر ۱۹ متعادل الفاظ غلط و منطقة البروج صحیح است.

مسائل شماره ۶

۱۳۰- **مسئله** - اگر فرض کنیم $X=\frac{1}{x-1}$ ، $Y=\frac{1}{y-1}$ دستگاه معروض چنین می‌شود

$\frac{1}{20}=X-Y$ و $4=10Y+18X$ از آنجا: $X=\frac{1}{20}$ و $Y=0$ یا: $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{20}$

$\frac{1}{y-1}=\frac{1}{5}$ پس: $x=1\frac{20}{21}$ و $y=1\frac{5}{4}$.

۱۳۱- **مسئله** - اگر x عدهٔ دوتومانی‌ها باشد عدهٔ پنجتومانی‌ها: $x-9$ خواهد بود

واز آنجا این معادله حاصل میشود: $2x+5(x-19)=53$ از آنجا: $x=9$ و $x-19=7$

۱۳۲- **مسئله** - فرض کنیم عدهٔ اشخاص x باشد . عدهٔ اعدادهائی که چیده شده مساوی با

$1+2+3+4+\dots\dots\dots\dots+x=\frac{x(x+1)}{2}$

بنابراین: $x=8$: $\frac{x(x+1)}{2}=12$ یا: $x+1=13$ از آنجا: $x=11$

۱۳۳- **مسئله** - اگر x عدهٔ قرانی‌های عابر باشد دفعهٔ اول x شاهی یعنی $\frac{x}{20}$

قران بفقرا داده پس $\frac{39x}{20}=\frac{x}{20}-2x$ قران یا $\frac{39x}{40}$ دوقرانی برایش مانده وچون

هریک ازاین دوقرانی‌ها پنجقرانی تبدیل شده پول عابر $\frac{39x}{8}=\frac{39x}{40}\times 5$ قران خواهد شد

واز آنجا این معادله حاصل میشود: $2x=35-\frac{39x}{8}$ یا $x=40$

۱۳۴- **مسئله** - فرض کنیم ABC مثلث معروض و m_a ، m_b ، m_c بترتیب میانه‌های

اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ ، $AB=c$ و O محل تلاقی سه میانه باشد . طول MO را مساوی

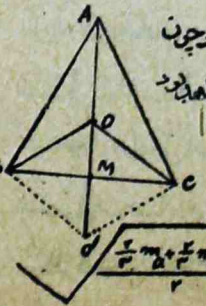
OM و در امتداد آن جدا کرده شکل $BOCO'$ را تشکیل میدهیم . این شکل متوازی‌الاضلاع

(چرا؟) وبنابراین دو مثلث COB و $O'OB$ معادلند (بچند دلیل؟) وچون

مثلث BOC ثلث مثلث ABC است مثلث $O'OB$ یوثلث ABC خواهد بود

اما اضلاع این مثلث عبارتند از $\frac{2}{3}m_b$ و $\frac{2}{3}m_c$ و $OO'=\frac{2}{3}m_a$

و $BO=\frac{2}{3}m_a$ پس مساحت آن مساویست با:



$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b-\frac{2}{3}m_c}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_c-\frac{2}{3}m_b}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c-\frac{2}{3}m_a}$

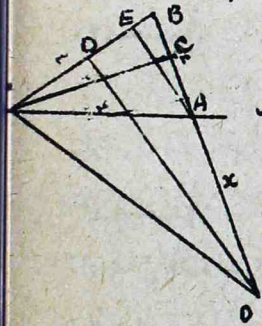
اگر بجای مجموع میانه‌ها را به $2m$ بنامیم دستور ذیل نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

۱۳۵- **مسئله** اگر طول AD را به x بنامیم طول BC خواهد بود $x+3$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB نتیجه میشود: $(x+3)^2=x^2+16+2x.AC$ یا: $6x-2x.AC=7$

اما در مثلث ABB' که زاویهٔ A از آن حاده است: $\overline{BB'}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB'}^2-2\overline{AB}.\overline{AC}$

از آنجا: $AC=\frac{3}{4}$ پس: $x=1$ یا $6x-\frac{1}{2}x=7$ پس طول BC $x+3=4$ و $x=10,5$



مساحت $=13,5$ است.

طریق دیگر چون از نقاط A و O عمودهای AE و OD را بر BB' فرود آوریم نتیجه می‌شود $BB'=12$ و $\overline{B'O}^2=\overline{B'B}^2+\overline{BA}^2-2BB'.AE$ از آنجا: $BE=\frac{1}{3}$ حال چون تشابه دو مثلث BEA و BOD را بنویسیم حاصل می‌شود: $\frac{BO}{BA}=\frac{BD}{BE}$ از آنجا $B=13,5$

مسائل حل کردنی

۱۹۴- **مسئله**- معادلهٔ ذیل را حل کنید

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1\right)=0$$

۱۹۵- **مسئله**- چلیکی a من شراب خالص دارد. یک من آن را برداشته بجایش آب میریزیم بعد یک من دیگر از مخلوط را برداشته بجایش یک من آب میریزیم و این عمل را n مرتبه تکرار میکنیم. مطلوبست مقدار آب در شراب که در چلیک میماند.

۱۹۶- **مسئله**- ثابت کنید که عبارت $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}[1+2n(n-1)]$ توان چهارم کامل است. (Brocot.)

۱۹۷- **مسئله**- نقاط و بر نقطهٔ تقاطع اقطار و دو ربعهٔ اضلاعی مربع چهار ضلع معلوم است. مطلوبست رسم چهار ضلعی.

۱۳۶- **مسئله** ثابت کنید که کثیر الجمله $f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+(n-1)x^{n-1}+\dots+2x^2-(n+1)x+n$ قابل قسمت است.

حل - $f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+(n-1)x^{n-1}+\dots+2x^2-(n+1)x+n$

عوامل $x^2-(n+1)x+n$ عبارتند از $x-1$ و $x-n$:

$$f(1)=n-(n+1)+n+(n-1)(1-n)=0$$

$$f(n)=n\cdot n^{n+1}-(n+1)n^n+n+(n-1)\frac{n^n-1}{n-1}=0$$

پس $f(x)$ بر $x-1$ و $x-n$ قابل قسمت است و چون این دو عامل اول نسبت بهم آنها نیز قابل قسمت است.

۱۳۷- **مسئله** - اگر باقیمانده خارج قسمت تقسیم عددی بر ۱۱ مجذور کامل باشد مربع آن عدد مجموع چهار مجذور است و بطور کلی مربع $11a^2+b^2$ مجموع چهار مجذور میباشد. (مصاحب)

حل - $(11a^2+b^2)^2=121a^4+22a^2b^2+b^4$

$$=(25a^4-10a^2b^2+b^4)+96a^4+32a^2b^2=(5a^2-b^2)^2+16(2a^2+2b^2)a^2$$

$$=(5a^2-b^2)^2+16a^2(a+b)^2+16a^2(a-b)^2$$

۱۳۸- **مسئله** - معادله $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+h$ را حل کنید

حل - اگر فرض کنیم $x+4=y$ معادله فوق چنین میشود: $y(y+1)(y+2)(y+3)+h$

$=(y^2+3y)(y^2+3y+2)+h$ و چون فرض کنیم $y^2+3y=z$ معادله اخیر باین صورت چنین میآید: $z^2+2z-h=0$. اثبات برخواننده گان است.

۱۳۹- **مسئله** - معادله $(x-a)^3(x+a-2b)-(a-b)^3(a+b-2x)=0$ را حل کنید

حل - معادله فوق را بشکل چنین نوشت: $\left(\frac{x-a}{a-b}\right)^3-\frac{a+b-2x}{x+a-2b}=0$ و چون فرض کنیم $\frac{x-a}{a-b}=y$ معادله چنین میشود: $y^3+2y^2+2y+1=0$. اثبات برخواننده است.

۱۴۰- **مسئله دوچرخه** - فرض کنیم x مقدار داده مفروض بحسب کیلومتر باشد و راه این ملاقات (۱) پیاده ۴ کیلومتر و ۳ کیلومتر با چرخ و (ب) ۴ کیلومتر با چرخ و ۳ کیلومتر

پیاده طی کرده و از اینجا با ملاحظه اینکه سرعت دو مسافر با چرخ یکسان است معلوم میشود مدتی که (ا) ۴ کیلومتر پیاده طی کرده مساویست با مدتی که (ب) ۳ کیلومتر پیاده و یک کیلومتر با چرخ پیموده و چون سرعت (ب) با چرخ مضاعف سرعت او با پا است نتیجه میشود که مدتی که (ا) با پا ۴ کیلومتر طی کرده مساویست با مدتی که (ب) $\frac{7}{2} = \frac{1}{2} + 3$ کیلومتر پیاده طی نموده بنابراین نسبت سرعت (ا) بسرعت (ب) مثل $\frac{7}{8}$ است پس میتوان سرعت دو مسافر را بترتیب به $7y$ و $8y$ نمود. وقتی مجدداً براه میافتند باید ۷-۲x کیلومتر پیمایند و در طی اینراه (ا) ۳-x کیلومتر پیاده و ۴-x کیلومتر با چرخ و (ب) ۴-x کیلومتر پیاده و ۳-x کیلومتر با چرخ طی نموده. بنابراین مدتی که اولی با پا ۳-x کیلومتر طی نموده مساویست با زمانی که دومی ۴-x کیلومتر پیاده و یک کیلومتر با چرخ پیموده ولی چون در اینراه سرعت (ب) با چرخ دو برابر سرعت (ا) با پا است معلوم میشود زمانی که (ا) $\frac{7}{2} - x$ طی کند (ب) ۴-x-۳-x = $\frac{1}{2}$ کیلومتر می پیماید و چون در این راه سرعت دو مسافر بترتیب $7y + \frac{1}{2}$ و $8y + \frac{1}{2}$ و مسافت مطویه با زمان متناسب است این معادله حاصل میشود:

$$\frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4} = \frac{8y + \frac{1}{2}}{7x + \frac{1}{2}}$$

از آنجا $x = \frac{30y + 1}{4y}$. از طرف دیگر زمان لازم برای طی راه مذکور بطریق فوق الذکر مساویست با: $\frac{4}{8y} + \frac{3}{14y} + \frac{x-3}{14y+\frac{1}{2}} + \frac{x-4}{2(8y+\frac{1}{2})}$ با چون بجای x مقدارش را قرار داده مختصر کنیم: $\frac{670y+41}{28y(16y+1)}$ پس: $\frac{63}{63} = 2$ یا $\frac{670y+41}{28y(16y+1)}$ از اینجا: $y = \frac{1}{2}$ پس $x = 4$ بنابراین راه مذکور ۱۶ کیلومتر و سرعت دو مسافر بترتیب ۴ و ۳/۵ کیلومتر است.

۱۴۱- **مسئله** - مطلوبست مشتق nام توابع: $\frac{a}{x+b}$ و $\frac{1-x}{1+x}$ و $\frac{1}{x^2-a^2}$

$y = \frac{a}{x+b}$ - ۱ - $y' = -a.\frac{1}{(x+b)^2}$. $y'' = a.\frac{1.2}{(x+b)^3}$. $y''' = -a.\frac{1.2.3}{(x+b)^4}$ و .....

اگر در طرف تشکیل این مشتقات دقت کنیم مشاهده میشود که اولاً در تمام آنها عامل a موجود است. ثانیاً صورت مشتق اول ۱ و صورت مشتق دوم ۱.۲

صورت مشتق سوم ۱.۲.۳ است وهکذا پس صورت مشتق n ام n..... ۳.۲.۱ خواهد بود. (معمولاً این حاصلضرب را با $n!$ نمایند n عامله میخوانند مثلاً $3!=3.2.1$)

ثالثاً مخرج هر مشتق قوی است از $x+b$ که یک واحد از مرتبهٔ آن مشتق زیادتر میباشد مثلاً مخرج مشتق دوم $(x+b)^3$ است پس مخرج مشتق n ام $(x+b)^{n+1}$ خواهد بود.

رابعاً مشتقات مرتبهٔ صفر عامل 1 و مشتقات مرتبهٔ فرد عامل -1 دارند پس مشتق مرتبهٔ n ام عامل $(-1)^n$ خواهد داشت بعبارتی که $y^{(n)}=(-1)^n a \cdot \frac{n!}{(x+b)^{n+1}}$

۲ - تابع $y=\frac{1-x}{1+x}$ را بشکل چنین نوشت: $y=-1+\frac{2}{1+x}$ پس $y^{(n)}=\frac{(-1)^n 2 n!}{(1+x)^{n+1}}$

۳ - $y=\frac{1}{x^2-a^2}$ - برای محاسبهٔ مشتق n ام این تابع قبلاً آنرا بصورت مجموع دو کسر که مخارج آنها $x+a$ و $x-a$ و صورتشان مقادیر ثابته باشند بیاورید برای این مقصود فرض میکنیم $\frac{1}{x^2-a^2}\equiv\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$ از آنجا $1\equiv x(A+B)+a(A-B)$

از آنجا $A+B=0$ و $A-B=\frac{1}{a}$ یا $A=\frac{1}{2a}$ و $B=-\frac{1}{2a}$ بعبارتی که $y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

پس: $y'=\frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}\right]=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left[(x-a)^{-(n+1)}-(x+a)^{-(n+1)}\right]$

۱۴۲- **مسئله** - مجذور کامل مانند $\overline{aab00c}$ چنان پیدا کنید که $c+b=a$ باشد (مصاحبه)

حل - اگر فرض کنیم $N=\overline{aab00c}$ نتیجه میشود: $N=11001a+9993$ اما $999=3^3\times37$

چون $N=3^3\times37(991a+9b)$ پس: $11001=3\times3^2\times37$ و $991a+9b=mul111$ یا $991a+9b=111$ از آنجا $991a-9b=111$

مجذور کامل است باید $991a-9b=111$ یا $991a+9b=111$ از آنجا $991a-9b=111$

پس: $a=9$ ، $b=8$ بنابراین $C=$ اعداد مطلوب 9998001 خواهد بود

مجذور آن 999 است.

۱۴۳- **مسئله** - مطلوبست مشتق هفتم $y=\frac{x^6-3x^5+x^4+3x^3-2x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}$

- مخرج مساویست با: x^2-3x+2 صورت را بشکل چنین نوشت.

$=x^6(x^2-3x+2)-x^6+3x^5-2x^4+x^2-x-1$

$x^{۶}(x^{۲}-۳x+۲)-x^{۴}(x^{۲}-۳x+۲)+x^{۲}-۳x+۲+۲x-۳$

پس : $y=x^{۶}-x^{۴}+۱+\frac{۲x-۳}{(x-۱)(x-۲)}$. چون مشتق تفاضل $x^{۶}-x^{۴}+۱$

صفر است مشتق تفاضل y همان مشتق تفاضل $\frac{۲x-۳}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{(x-۱)+(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)}$

$y^{(۷۱۱)}=-۷!\left(\frac{۱}{(x-۱)^{۸}}+\frac{۱}{(x-۲)^{۸}}\right)$ خواهد بود . $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x-۲}$: پس

۱۴۴ - مسئله - مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع : $y=x^{۳}-x$

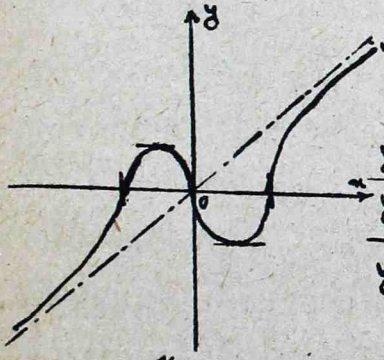
حل - $y=\sqrt[۳]{x^{۳}-x}$. y همیشه متصل و حقیقی است و بازاء $x=۰$ و $x=\pm ۱$

صفر میشود بازاء $x=\pm\infty$ مساوی $\pm\infty$ میگردد . مشتق آن : $y'=\frac{۳x^{۲}-۱}{۳\sqrt[۳]{(x^{۳}-x)^{۲}}}$

علامت صورت را دارد و بازاء $x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ صفر میشود تغییر علامت میدهد . مقدار اول نظیر

ماکزیموم و مقدار ثانی نظیر مینیموم y است . در نقاط $x=۰$ و $x=\pm ۱$ که مشتق منفصل

است مماس بر منحنی موازی محور عرض میباشد



جدول تغییرات y از این قرار است :

x	$-\infty$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۱	↗	$+\infty$
y'		$+$		۰		$-$		۰		$+$			
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$\sqrt[۳]{\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}}$	↘	۰	↘	$-\sqrt[۳]{\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}}$	↗	۰	↗	$+\infty$

برای رسم منحنی تعیین مجانبهای غیر موازی با محورین مختصات لازمست :

$a=\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x=\infty}\sqrt[۳]{۱-\frac{۱}{x^{۲}}}=۱$

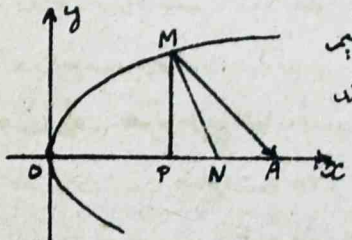
$b=\lim_{x=\infty}(\sqrt[۳]{x^{۳}-x}-x)=\lim_{x=\infty}\frac{x}{x^{۲}+x\sqrt[۳]{x^{۳}-x}+\sqrt[۳]{(x^{۳}-x)^{۲}}}=۰$

پس خط $y=x$ مجانب منحنی است .

تبصره - گاهی اوقات تعیین مجانب های منحنی بطریق ذیل اسهل و اقرب است : ابتداء y را بصورت ذیل می نویسیم : $y=x\sqrt[۳]{۱-\frac{۱}{x^{۲}}}$. فرض میکنیم $\frac{۱}{x^{۲}}=u$. برای محاسبهٔ $\sqrt[۳]{۱-u}$ فرض میکنیم $\sqrt[۳]{۱-u}=a+bu+cu^{۲}+\dots$ چون در طرفین u را

مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود: $a=1$. حال طرفین را مکعب میکنیم حاصل میشود:
$1-u=1+3bu+3cu^2+\dots$ از آنجا: $b=-\frac{1}{3}$ و $c=0$ و همینطور بقیهٔ که:
$\sqrt[3]{1-u}=1-\frac{u}{3}+\dots$ پس: $y=x-\frac{1}{3x}+\frac{\dots}{x^2}+\dots$ حال اگر x بینهایت بزرگ شود $x-y$ نسبت صفر میل میکند پس خط $y=x$ مجانب منحنی است.

۱۴۰- **مسئله - مکانیک** - شرط تعادل نقطهٔ M آنست که منتجهٔ دو قوهٔ MP و MN بر سطحی معروض ناظر باشد. فرض کنیم M در وضع تعادل، MN امتداد ناظر نقطهٔ M باشد



از معادلهٔ منحنی نتیجه میشود: $y'=\frac{p}{q}$ پس $y'=\frac{1}{q}$ بنابراین ضریب زاویهٔ ناظر نقطهٔ غیر مشخصی از منحنی عبارتست از $\frac{2p}{q}$ - پس اگر (u,v) مختصات نقطهٔ M باشند معادلهٔ ناظر MN چنین خواهد بود: $y-v=-\frac{2p}{q}(x-u)$. از آنجا: ON $p+u$. اما N وسط PA است پس اگر a طول نقطهٔ A باشد $u+p$ $=\frac{u+a}{2}$ از آنجا: $u=a-2p$ پس نقطهٔ طول نقطهٔ متقی که $a-2p$ گرفته شود مجال تعادل خواهد بود.

مسائل حل کردنی

۱۹۸- **مسئله** - اضلاع مثلثی جمل متوالی تصاعد عددی با قدر نسبت r میباشند و سطح مثلث معادل حاصلضرب ارتفاعات نظیر کوچکترین و بزرگترین اضلاعست. اولاً مطلوبست محاسبهٔ اضلاع ثانیاً ثابت کنید که مثلث مفروض معادلست با مربعی که بر منصف الزاویهٔ ضلع میانی میشود. ثالثاً ثابت کنید که ضلع میانی معادل شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است و زاویهٔ مقابل آنرا حساب کنید (منصاب)

۱۹۹- **مسئله** - معادلهٔ ذیل را حل کنید: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+7}=0$

۲۰۰- **مسئله** - دستگاه: $x^2+y^2+z^2+u^2$ ، $y+z=b$ ، $x+u=a$ ، $\frac{x}{u}=\frac{y}{z}$

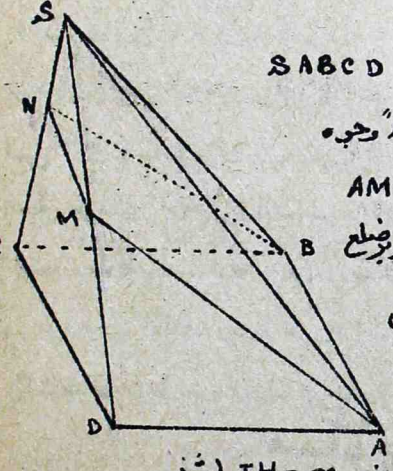
راحل کنید.

۲.۱ - **مسئله** - معادلهٔ $(m-1)\sin^3 x + m\sin^2 x + (m+1)\sin x = 0$

راحل و بحث کنید.

۲.۲ - **مسئله** - دو نقطهٔ ثابت A و B معرض است. دو دایرهٔ C و C' بر یکدیگر مماس و بر تیپ در نقاط A و B بر AB مماس اند. اولاً مطلوبست رابطه‌ئی که بین اشعهٔ دو دایره برقرار است. ثانیاً مطلوبست تغییرات مجموع سطوح آنها وقتی شعاع یکی از آنها جمیع مقادیر ممکنه را اختیار کند.

۲.۳ - **مسئله** - هرم مربع القاعدهٔ منتظم SABCD معرض است ضلع قاعدهٔ $2a$ و زاویهٔ وجوه با قاعدهٔ α است. فرض میکنیم AMNB مقطع این هرم با سطح متغیر P موازی ضلع AB و K و I و F نقاط تقاطع سطحی که بر ارتفاع هرم مرور کرده و بر AB عمود است با خطوط CD ، AB ، MN و H بترتیب بر F بر IK و بالاخره $IH = x$ باشد.



اولاً مطلوبست محاسبهٔ سطح AMNB = Σ حسب a ، α ، x. معلوم کنید که $\cos\alpha$ در چه شرطی صدق کند تا Σ یک ماکزیموم و یک مینیموم داشته باشد. فرض میکنیم این شرط برقرار شده و x' ، x مقادیر x نظیر ماکزیموم و مینیموم Σ باشند. ثابت کنید که اگر $\frac{x}{a}$ ، $\frac{x'}{a}$ منطق و $\tan\alpha$ صحیح باشد $\tan\alpha = 3$.

ثانیاً در حالتکه نقاط تقاطع SO و دو سطح P' ، P را که نظیر ماکزیموم و مینیموم Σ اند تعیین کنید و حالتی را که $\tan\alpha = 3$ باشد امتحان نمائید.

ریاضیات عالی

مسئله مطلوبست محاسبهٔ انتگرال: $I=\int_{1}^{\infty}\frac{x^{2}-2}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}dx$

حل - $I=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}-\int_{1}^{\infty}\frac{2dx}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}$ انتگرال اول مساوی است با: $\int_{1}^{\infty}\frac{\frac{dx}{x^{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}=$

$-\arcsin\frac{1}{x}\Big)_{1}^{\infty}=\frac{\pi}{2}$ برای محاسبهٔ انتگرال دوم فرض میکنیم $z=\frac{1}{x}$ نتیجه میشود:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{2dx}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}=-\int_{1}^{0}\frac{2z^{2}dz}{\sqrt{1-z^{2}}}=-2\int_{1}^{0}z^{2}\frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}}=-2\left(z\sqrt{1-z^{2}}\right)_{1}^{0}+2\int_{1}^{0}\sqrt{1-z^{2}}\,dz$$

$\int_{1}^{\infty}\frac{2dx}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{\pi}{2}$ جملهٔ اول صفر است و جملهٔ دوم ربع سطح دایره ایست که شعاعش واحد باشد بنابراین:

پس: $I=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$

طریقهٔ دوم - $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x^{2}}+2\int\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x^{3}}dx=\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x^{2}}+2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}$ انتگرال.

$\int\frac{dx}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}=2$ - پس: $I=\left(-\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x}\right)_{1}^{\infty}=0$

مسئله - بنابراکه $f(z)=x+iy$ و $x=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ و تابع $f(z)$ تحلیلی باشد $f(z)$ را تعیین کنید.

حل - اولین شرط اینکه تابع تحلیلی باشد آنست که: $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{+(e^{2y}-e^{-2y})\sin 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^{2}}$

از حل این معادله نتیجه میشود: $y=-\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}+\varphi(y)$

از طرف دیگر باید: $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial x}$ از آنجا: $C=$ ثابت $=\varphi(y)+$ پس:

$$f(z)=\frac{2\sin 2x-i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}+C=\frac{\sin 2x-i\sin 2iy}{\cos 2x-\cos 2iy}+C=\cot(x+iy)+$$

مسئله - مفرکی بکارهٔ چنان حرکت میکند که دائما طول و عرضش متناسب میباشند. مطلوبست تعیین مؤلفه‌های شتاب در امتداد شعاع کرده و حفظ محور واقع در صفحهٔ تماس بجسب عرض مفرکه. (لیسانس پاریس سنهٔ ۱۸۸۹)

حل - فرض کنید x طول مفرک و y عرض آن و r شعاع کره باشد. میدانیم که مؤلفه‌های شتاب در مختصات کروی بر امتداد شعاع حامل - عمودی که در سطح OM و OZ از M بر OM اخراج شود - خطی که در صفحهٔ تماس بر محور OZ عمود شود باو تلب عبارتند از

$$\gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\lambda^2}{dt^2} - r\cos^2\lambda\frac{d\psi^2}{dt^2}$$

$$\gamma_m = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right) - r\sin\lambda\cos\lambda\frac{d\psi^2}{dt^2}$$

$$\gamma_m = \frac{1}{r\cos\lambda}\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\lambda\frac{d\psi}{dt}\right)$$

در اینجا به فرض $d\psi = \kappa d\lambda$ چنانچه آنگس در سرعت مخرج باشد:

$$v^2 = r^2\frac{d\lambda^2 + d\psi^2\cos^2\lambda}{dt^2} = r^2\frac{d\lambda^2}{dt^2}(1+\kappa^2\cos^2\lambda)$$

پس، $d^2\psi = \kappa d^2\lambda$ و $\frac{d\lambda^2}{dt^2} = \frac{v^2}{r^2(1+\kappa^2\cos^2\lambda)}$ بالاخره $\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{v^2\kappa^2\sin\lambda\cos\lambda}{r^2(1+\kappa^2\cos^2\lambda)^2}$

r مقدار ثابت و با این ملاحظات از معادلات فوق چنین نتیجه میشود:

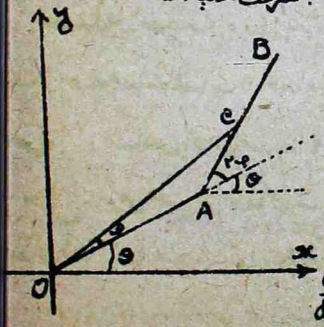
$$\gamma_r = -\frac{v^2}{r}$$

$$\gamma_m = -\frac{v^2\kappa^2\sin\lambda\cos\lambda(2+\kappa^2\cos^2\lambda)}{r(1+\kappa^2\cos^2\lambda)^2}$$

$$\gamma_m = -\frac{v^2\kappa\sin\lambda(2+\kappa^2\cos^2\lambda)}{r(1+\kappa^2\cos^2\lambda)^2}$$

۲۰۰ـ مسئله (مکانیک اجسام) در سطح افقی دو محور ox و oy دستگاه مرکب از دو میله بجرم M و طول l و AB با همان جرم و طول $2l$ در حول نقطهٔ O حرکت مینماید. دستگاه OAB مفصلی است و وسط میلهٔ AB (نقطهٔ C) مجذوب نقطهٔ O است و مقدار قوهٔ جاذبه بنسبت عکس مکعب فاصله میباشد. مطلوبست حرکت دستگاه.

$\widehat{xOA} = \theta$ و $AOC = \alpha$. عزم جبری OA نسبت به O: MK^2. قدر مطلق قوهٔ جاذبه $\frac{3M}{OC^3}$. وضع اولیهٔ دستگاه: $\theta = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{3}$. سرعت اولیه $= 0$.



حل ـ قوای خارجی وارد بر دستگاه عبارتند از اوزان دو میله. و عمل نقطهٔ O. قوهٔ جاذبهٔ وارد از O و چون عزم این قوا نسبت بمحور oz از نقطهٔ O بر سطح xoy عمود شود صفر است این رابطه حاصل میشود: $\frac{d}{dt}\sum m(xy' - yx') = 0$

پس: $\sum m(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt})=C$

مجموع طرف اول معرف است از عزم مقادیر حرکت دو میله OA و AB نسبت به نقطه C.
عزم مقدار حرکت میله OA نسبت به محور oz عبارتست از: $MK^2\frac{d\theta}{dt}$

برای تعیین عزم مقدار حرکت میله AB نسبت به محور مذکور ملاحظه میکنیم که اگر از نقطه C دستگاه $cx'y'$ را موازات دستگاه اول رسم کنیم این رابطه حاصلست:

$$\sum_{AB} m(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt})=M(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt})+\sum_{AB}(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt})$$

(ξ و η مختصات نقطه C در دستگاه xoy میباشند). اما:

$$\sum_{AB}(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt})=MK^2\frac{d}{dt}(\theta+2\varphi)$$

و در حرکت نقطه C:

$$M(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt})=M\cdot OC^2\frac{d}{dt}(\theta+\varphi)$$

از آنجا با ملاحظه $OC^2=4l^2\cos^2\varphi(\theta+\varphi)$:

ثابت $=2M(K^2+2l^2\cos^2\varphi)(\theta'+\varphi')$

ولی بر طبق شرایط اولیه این ثابت صفر است پس $\theta'+\varphi'=0$. از آنجا:

$\theta+\varphi=\theta_0+\varphi_0=\frac{\pi}{4}$ بالنتیجه نقطه C بر منصف زاویه xoy حرکت میکند.

برای تعیین حرکت معادله دیگری لازمست و انسب آنست که معادله (نیرو) را اختیار کنیم. نیروی وارد بر میله OA مساویست با: $MK^2\theta''=\frac{Ml^2}{3}\theta''$.

برای محاسبه نیروی وارد بر میله AB قضیه کنیگ (Koenigs) را استعمال میکنیم. بدین قسم که گوییم نیروی وارد بر میله AB در حرکت نسبی آن نسبت به دستگاه $x'cy'$ عبارتست از $MK^2(\theta'+2\varphi')^2=\frac{Ml^2}{3}\varphi'^2$ و نیروی وارد بر C در صورتیکه جرمش M باشد مساویست با: $4Ml^2\varphi'^2\sin^2\varphi$

$M(\frac{d}{dt}\overline{OC}^2)=4Ml^2\varphi'^2$

پس: $\frac{Ml^2}{3}(\theta'^2+\varphi'^2)+4Ml^2\varphi'^2\sin^2\varphi=\int-\frac{2\mu M}{OC^3}.d\overline{OC}$

$$= \mu M \left(\frac{1}{OC}\right)_0^t = \mu M \left(\frac{1}{4l^2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2l^2}\right) = -\frac{\mu M}{4l^2}\,\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

ازآنجا بعد دیفرانسیلهٔ $\theta' = -\varphi'$ نتیجه میشود:

$$\frac{2l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{\mu}{2}\,\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

این معادله بضمیمهٔ معادلهٔ سابق حرکت را معین میفماید.

مسائل حل کردنی

۲۰۵- **مسئله**- ثابت کنید که اگر α, β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند:

$$\log(a-bx+cx^2) = \log a + x(\alpha+\beta) - x^2\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} + \dots\dots$$

۲۰۶- **مسئله**- ثابت کنید که اگر $x<1$ باشد: $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x} > 1$

واز آنرو نامساوی ذیل را نتیجه بگیرید: $a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

۲۰۷- **مسئله**- مطلوبست تباعد و تقارب سلسلهٔ: $u_n = \frac{n^n x^n}{n!}$

۲۰۸- **مسئله**- مطلوبست محاسبهٔ $y = \int_0^\infty f\left(\frac{x^2}{2}\right) f\left(\frac{x^2}{2^2}\right) dx$

۲۰۹- **مسئله**- معادلهٔ سطحی در مختصات بیضوی عبارتست از: $z = (2-\alpha)\,f(\theta)$

اولاً مطلوبست معادلات خطوطی که مقاطع صفحات ماربرمحور z با سطح فوق را بزاویه قائمه قطع کنند. ثانیاً در حالتیکه $f(\theta) = \cos^2\theta$ باشد مطلوبست محاسبهٔ حجم محصور بین سطح فوق و سه سطح مختصات در ناحیهٔ اول.

۲۱۰- **مسئله** - دستگاه مفصلی BAB' مرکب از دو میله که طول هریک $2l$ و جرم هرکدام M است بدون اصطکاک در سطح افقی xoy میلغزد. اولاً مطلوبست تعیین حرکت دستگاه. ثانیاً شرایط اولیه را چنان تعیین کنید که زاویهٔ BAB' بتواند صفر شود. (پاریس. ژوئیه ۱۸۸۵ سوال دوم.)

۲۱۱- تابع تحلیلی $f(x) = P + iQ$ مفروض است. بنا برآنکه P تابعی از $x+\sqrt{x^4+y^2}$ و Q تابعی از $x-\sqrt{x^4+y^2}$ باشد $f(x)$ را تعیین کنید. (پاریس- امتحان کتبی سوال دوم)

(در مطبعهٔ علی بطبع رسید)

مجله یافت نشده که حتی ربع این فواید و منافع را مجانا به
مشترکین خودش داده باشد ما فقط از نقطه نظر خدمت باقتصادیات است
که متحمل اینمقدار زحمات وضرر میگردیم آقایانیکه مایل باشند
میتوانند بعنوان نمونه یك شماره مجانا بخواهند در صورتیکه تقاضا تا
آخر فروردین بر سد و تمام نشده باشد فوری ارسال خواهیم داشت
آقایانیکه مایل باشترك باشند در صورتیکه تقاضای آنها با ارسال
شانزده قران تا آخر فروردین (منتهی الی اردیبهشت) برسد
ممکن است دارای مجله و منافع مذکور گردند بعد از انتشار
اولین شماره دوره سوم تقاضای اشتراك (برای دوره سوم) پذیرفته
نمیشود .

طهران مجله تجارت اعلان ۱ -

کتاب جمع بین رائین الحکیمین

نگارش خواجه نصیرالدین طوسی راجع به مقایسه و قضاوت در
آراء حکیم ابوعلی سینا و ارسطو ترجمه تذئیل آقای میرزا باقرخان
مشیری عنقریب از طبع خارج میشود استفاده از این کتاب را
باهل علم توصیه میکنیم

1er Année №10-11 JOURNAL DE 1er Farvardine 1310

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES & SUPÉRIEURES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque Mois

Directeur; MOSSAHEB

Administration: Téhéran, Avenue Babé-Homayoun

ABONNEMENT ANNUEL

PERSE: DD 40 A 25 KRANS - ETRANGER 60 FRANCS

عنوان .....

آدرس .....

راجع بمجله

نشر مجلهٔ ریاضیات بواسطهٔ موانعی که ذکر آنها موجب تطویل است مدتی بتعویق افتاد و فعلادو شمارهٔ ۱۰ و ۱۱ تقدیم مشترکین محترم میگردد. حقاً این شماره باید در ٤٨ صفحه نشر شده باشد ولی بعلت تعجیلی که در طبع آن بود در ٣٦ صفحه منتشر گردید بنابر این تا کنون مشترکین ما ٢٤ صفحه از ما طلبکارند و امیدواریم که در شماره های آتیه این دین خود را بپردازیم

کتاب نظریه اینشتین

از این شماره متدرجاً در مجلهٔ ریاضیات منتشر میشود بطالبین این نظریه خواندن آنرا توصیه میکنم