واحد

سال اول شمارهٔ سوم — اول آذر ۱۳۰۹

مجلهٔ ریاضیات

(عالی و مقدماتی)

مدیر مسئول و مؤسس
مصاحب

جای اداره: موقتا ادارهٔ جریدهٔ قانون
طهران، خیابان باب همایون

(اول و پانزدهم هر ماه منتشر میشود)

«(وجه اشتراك در ایران)»

سالیانه: از ۴۰ تا ۲۵ قران (برای محصلین ۱۰ قران)
ششماهه: فقط برای محصلین ۶ قران
تك شماره: یك ریال

1 er Anneé - Ne 3 JOURNAL DE 1er Azar. 1309

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES ET SUPÉRIEURES

(Paraissant le 1er et le 15 de Chaque Mois)

DIRECTEUR : MOSSAHEB

Administration : Téhéran. Avenue Babe Homayoun

ABONNEMENT ANNUEL :
Perse: de 40 à 25 Krans.
ETRANGER: 60 FRANCS.

از مقالهٔ مهم دانشمند معظم آقای دکتر رضا زاده شفق استفاده کنید

(بقیه از شمارهٔ قبل)

حرکت (متمم حساب مقدماتی)

۳ – برای اینکه متحرکی (مثل ترن) از مقابل نقطه بگذرد باید راهی مساوی طول خود به پیماید .

٤ – برای اینکه ترنی از مقابل استاسیون (یا ترن دیگری) بگذرد باید راهی مساوی طول خود بعلاوهٔ طول استاسیون (یا ترن دیگر) به پیماید .

استعمال - مسئله - ۱ - شخصی که در کنار جاده ایستاده مشاهده می کند که ترنی درمدت ۷ ثانیه از مقابل وی و در مدت ۲۰ ثانیه از مقابل گارے بطول ۳۹٦ متر عبور نمود مطلوبست طول ترن و سرعت آن .

حل - از قسمت اول مسئله معلوم میشود که ترن طولی برابر طول خود را درمدت ۷ ثانیه می‌پیماید (قانون اول مذکور در فوق) و چون مسافت مطویه معادل حاصل ضرب سرعت و زمان است طول ترن ۷ برابر سرعت آن خواهد بود .

از قسمت دوم معلوم میشود که ترن مذکور طولی برابر طول خودش (یا ۷ برابر سرعت آن) بعلاوهٔ ۳۹٦ متر را در ۲۰ ثانیه طی‌میکند پس ۲۰ برابرسرعت ترن معادلست با ۷ برابرسرعت آن بعلاوهٔ ۳۹٦ متر . بنا بر این ۱۸ = ۷ - ۲۰ برابر سرعت ترن ۳۹٦ متر است پس سرعت آن مساویست با : ۲۲ = $\frac{۳۹٦}{۱۸}$ متر در ثانیه وچون طول ترن ۷ برابر این مقدار است مساوی ۱۵٤ = ۲۲×۷ می باشد .

مسئله ۲ - ترنی بطول ۱۷٦ متر با سرعت ۲۳۷٦۰۰ متر در ساعت از پهلوی ترن دیگری که سرعتش ۱۵۸٤۰۰ متر در ساعت است در جهت حرکت آن میگذرد . اولا چه مدت طول‌میکشد تا ترن اول از مقابل یکی از مسافرهای ترن دوم عبور نماید . ثانیاً بنا برآنکه ترن اول در مدت ۱۵ ثانیه از پهلوے ترن دوم عبور کرده باشد طول ترن اخیر چقدر است ؟

دنباله دارد

کتابخانه ملی
ایران
واحد مبادله و اهداء

مجلهٔ ریاضیات

عالی و مقدماتی

اول آذرماه ۱۳۰۹ شمسی

بقلم دانشمند معظم آقای دکتر رضازادهٔ شفق. (جزو درس متد و لژیک دارالمعلمین عالی)

روش در علم ریاضی

پایهٔ علوم بر طریقهٔ تحقیق یا روش (متُد) استوار است و آن عبارتست از تحقیق منطقی علوم.

چنانکه خود علم بنا بمعنای اصطلاحی آن عبارتست از وقوف ذهن بحقایق و روابط صحیح اشیاء روش علمی نیز عبارتست از راه و رسم منطقی برای وصول بدان. روش در یک علم مستلزم تعیین موضوع و تقسیمات و مبادی و اصول قضاوت در آن علم است.

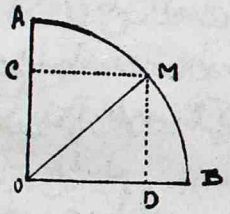
موضوع ریاضی - ریاضی علم کمیّات و روابط آنست. کمیّت ریاضی آنست که قابل تزاید و تناقص و مقیاس آن قابل تصور باشد. (فرق کمیّات از مقادیر آنست که مقدار محل تجربه است و کمیّت انتزاعی از مقادیر است.) کمیّت ریاضی بر دو قسم است منفصل و متصل. کمیّات منفصل آنست که بین هر دو مقدار هر چند کوچک باشند بیان فاصلهٔ فجائی موجود باشد مثلاً میان این کسور: $\frac{29}{100}$ و $\frac{3}{10}$ و $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{2}$ یا بر این کوچکتر از آنها فاصلهٔ فجائی موجود است. و کمیّت متصل فاصلهٔ اجزاء فجائی نه بلکه تدریجی و نامحسوس است مانند اجزاء یک خط نسبت

بیکدیگر

حساب علم کمیّات منفصل و هندسه علم کمیّات متصل است. تعبیر کمیّات منفصل بواسطهٔ اعداد و کمیّات متصل بواسطهٔ خطوط بعمل می آید. (اعداد مطلق که امروز مستعمل است در قدیم وجود نداشت و ملل ابتدائی اعداد را مستقل از اشیا تصور نمیتوانستند و موازین مادّی مانند انگشتان دست و پا و بازوان و سنگریزه وغیره بکار برده می شد. خود کلمهٔ Calculus بلاتینی بمعنی سنگریزه می آید.)

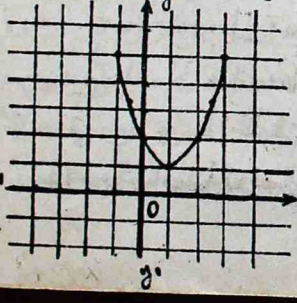
هم حساب و هم هندسه از کمیّات مشخص بحث می کند و اگر کمیّت مطلق منظور گردد آنگاه ریاضی موضوع جبر و مقابله خواهد بود پس جبر و مقابله علم کمیّات نامشخص است خواه منفصل و خواه متصل. واسطهٔ تعبیر کمیّات جبری حروف است. در معادلهٔ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، a و b هر مقدار مفروض را قبول می کند و کمیّتش معیّن و محدود نیست. مقصود از شمول جبر بکمیّات متصل آنست که روابط هندسی را میتوان در شکل معادلات جبری ادا نمود و بالعکس و این عمل در واقع موضوع

هندسهٔ تحلیلی را تشکیل میدهد که دکارت (Des-cartes) فرانسوی و لیبنیتز (Leibnitz) آلمانی آنرا وضع نمودند. پس هندسهٔ تحلیلی در بادی نظر علم حل معادلات و روابط کمیّات منفصله و متصله است بواسطهٔ تخیل آنها بیکدیگر. مثلاً اگر خواستیم معادلهٔ دایرهٔ AB را موافق این شکل بحروف تعبیر



نمائیم میتوانیم نیم قطر OB را مبنا قرار داده و موافق دستور مثلث قائم الزاویه اینچنین بنویسیم: $\overline{CM}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{OM}^2$ و این معادله بفرض M در تمام نقاط AB با تغییر متناسب ضلعین صدق خواهد داشت.

اگر بالعکس خواستیم مثلاً معادلهٔ $y = x^2 - 2x - 2$ را بواسطهٔ کمیّات متصل تعبیر نمائیم می توانیم بعد از ارجاع آن بشکل $y = x^2 - 2x + 2$ برای مثال تا چند درجه



فنکسیون مذکور نسبت به y معیّن نموده آنرا باصول مختصات (Coordinat) تبدیل بمنحنی کرده و قوابع را بدین ترتیب تثبیت نمائیم. اگر برای x مقادیر $\frac{1}{2}$ - و ۱ - و ۳ و $\frac{1}{2}$ ۲ و ۲ و ۱ و ۰ تقدیر شود برای y

بالتبع مقادیر $\frac{1}{2}$ و ۵ و ۵ و $\frac{1}{2}$ و ۳ و ۲ و ۱ و ۲ می افتد و معنی آن چنین بر می آید.

از همین مثال می بینیم که فنکسیون اطلاق کمیات را وسعت می کند نه اینکه تنها کمیات غیر مشخص در این عمل قابل استعمالند بلکه تجمنهای نامحدود و متناسب و متتابع نیز توان بکار برد پس موضوع فنکسیون در ریاضی کمیات نامشخص با تجمنهای نامحدود و متتابع می باشد.

تقسیمات - بعد از تعیین موضوع قدم ثانی در علوم درک اجزا و اقسام آن و ارتباط آنها بهم یا در واقع طبقه بندی منطقی فروع آنهاست. شاید بهترین طبقه بندی در ریاضی همان باشد که قانون اعم و اخص کنت (Comte) فرانسوی را مستند قرار دهد. کنت بطوری که معلوم است علوم را باصطلاح خودش از نقطهٔ نظر کلیت متنازل (Généralité decroissante) و ترکیب متصاعد (Complication Croissante) تقسیم مینماید. از این حیث میتوان علوم ریاضی را ارجاع باین سه اصل نمود: **نظریهٔ فنکسیون و جبر - حساب - هندسه.**

فنکسیون و جبر چون با مقادیر نامشخص و متتابع سر و کار دارد شمولش بیشتر و نسبت تبالی اعم است. حساب تمام مقادیر و اعداد را بکار میبرد حتی مقادیر هندسی را میشمارد پس نسبت هندسه اعم ولی نسبت بما فوق بواسطهٔ محدود بودن بکمیات معلوم اخص است. ضمنا در این تقسیم ترکیب و تفرع ریاضی بیش میشود و برای تصویر توان گفت اگر آنرا از این نظر کنیم عمق و ترکیب و تفصیل و اگر از فوق نظر کنیم عرض و کلیت و شمول خواهیم دید. بدین سیاق فروع دیگر این علم عبارت می شود از تشعب همین اقسام سه گانه. مثلا چون در تغیرات فنکسیون حد و حدّ ثابت را مبدل بصفر نمائیم و تجمنات متتابعه ناصغر نامتناهی دوام نماید محاسبهٔ طرز این تغیرات در حال جریان آنها (یعنی قبل از رسیدن بحدّ) کار حساب فاضل و جامع است و از این تجمنین دقیق در عین حرکت و جریان نامتناهی مقادیر است که مخترع نابغهٔ این علم یعنی نیوتون Newton بخت آنرا Fluxions نام داد. همچنین است اقسام هندسه. مثلا اگر معادلات هندسی را بواسطهٔ تحلیل باعداد و حروف بجبر و حساب ارجاع نموده و آنها را بواسطهٔ مناظر و مرایا و تثبیت فضائی آنها با خطوط مناظر مرسوم نمائیم هندسهٔ ترسیمی بعمل آید

و اگر تنها حل مثلثات را با تعیین نسبت زوایا یا اضلاع با معلوم بودن ارزش بعضی از آنها بخواهیم علم مثلثات موضوع می گردد و اگر محاسبات فضائی توام با حرکت مورد نظر گردد مکانیک و اگر حساب حجم و حرکت و فاصلهٔ اجرام سماوی مطلوب شود هندسهٔ تجزیی دکار خواهد

مبادی - مبادی هر علم شرایط عقلی شروع و عملیات در آن علم می باشد . مبادی ریاضی عبارتست از قواعد و کلیاتی که کلا زمستان آنها را قبل از وقت مسلم داشت و آنها بر سه قسم است :

تعریفات ، اولیات و مسلمات

تعریف ریاضی عبارتست از یک حکم طبیعی که ماهیت یک کمیت مشخص را توصیف و تعیین می کند مثلا اینکه «محیط دایره خطی است که از حرکت نقطهٔ باطراف نقطهٔ دیگر ثابت مرکزی بفاصلهٔ ثابت بعمل می آید» تعریف است . تعریف خاصیتش اینست که عقل آنرا ایجاد و تصور می کند و قابل برهان نیست هم ضرورت منطقی ندارد و مسبوق بقاعدهٔ دیگر نمیشود .

اولیات (Axioms) عبارت از قضایائی است که ضرورت منطقی دارند یعنی در مقابل عقل بدیهی و ضروری القبول دیده می شود چون اساس احکام عقل مستند بر آنهاست مانند اینکه : اجتماع نقیضین محال است . فرض محال محال است . (کلمهٔ محال بعد از فرض صفت گرفته شود) کل از جزء بزرگتر است و امثال اینها .

مسلمات (Postulats) قضایائی هستند که قبول و مسلم دانستن آنها لابد منه و شرط محاسبهٔ ریاضی است گرچه ظاهرا ضرورت عقلی و منطقی ندارند و نیز قابل اثبات نمیباشند مانند اینکه : از نقطهٔ خارج یک خط تنها و تنها یک خط موازی با آن توان کشید (البته این مسلمات جمله مخصوص هندسه اکلیدیست .)

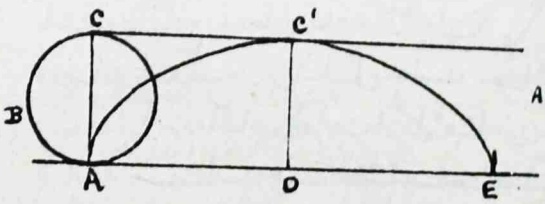
اصول قضاوت - اصول اساسی قضاوت در ریاضی قیاس است یعنی اولا قضاوت استناد می کند بتعریفات و اولیات و مسلمات . در اینکه آیا این قواعد اولیه خاصهٔ فطری و ناشی از عقل و یا نتیجهٔ مطلق تجربه میباشد در میان حکما اختلاف موجود است طرفداران احتمال دوم گویند عقل انسان در ابتدا دارای کلیات حاضر ریاضی نبود بلکه آنها را از راه تجربه یاد گرفت و چنین استشهاد می نمایند که در سابق (چنانکه اشاره رفت) اعداد مطلق وجود نداشت و مردم تنها بواسطهٔ اشیا حساب می کردند و قرنها بود که هندسها عدد را پیدا کردند و کلمهٔ هندسه که ما می گوئیم همان مناسبت است . گفته اند هندسه را مصریها بواسطهٔ اندازه گرفتن در منطقهٔ نیل بعمل آوردند و

همان اوان آنها بخوبی میدانستند که مثلثی که اضلاعش بنسبت ۳ و ۴ و ۵ باشند قائم الزاویه میشود حتی اوکلید (اقلیدس) مربع مجموع دو عدد را نخست بدین گونه درک و تصویر نمودند که خط AB را مجموع A و B فرض داد و این مسئله را بعمل آورد. نیز گالیله (Galilée) معروف مسئلهٔ

A a b B

سیکلوئید (Cycloïd) را بواسطهٔ خمیدن دو صفحهٔ فلزی متجانس با خاصیت مساوی یکی دایره و یکی سیکلوئید بود دریافت یکی سه مقابل دیگری است چنانکه در شکل ذیل دیده می شود:

a^2	ab
ab	b^2



$ABC = AD$

$AC = DC'$

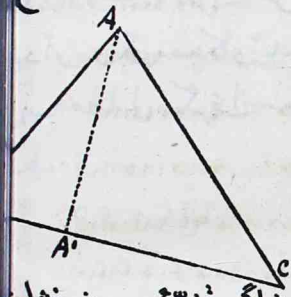
سطح AC'E = ۳ × سطح AC

روی این عقیدهٔ تجربی باید گفت قیاس ریاضی نیز مانند دیگر قیاسها در ابتدا بواسطهٔ استقراء حصول پذیرفته. امّا احکامی دیگر یعنی عقلیون با آنکه تاثیر بالفعل تجربه را در عقل انکار ندارند بقوهٔ آن لے تعمیم بالقوهٔ عقل قائلند و می گویند اساس ضرورت و کلیت قضایای ریاضی تنها استعداد نظری عقل است و ضرورت منطقی و کلیت عقلی هرگز از تجربه محدود و متنوع بحصول نیاید. در هر صورت اصول قضاوت اساسی ریاضی همان قیاس است و عالم ریاضی عالی ترین مسائل آز ابدون رجوع بتجربه تنها با رجوع باحکام اولیهٔ عقلی حل مینماید اعم از آنکه نشئت آن محل اختلاف باشد. اساس این قیاس نیز قانون مساوات یعنی مطابقت تام موضوع و محمول و باردر موارد اعتبار نقیض یعنی حل مسئله بواسطهٔ فرض عکس قضایا و درک بطلان آنست. علما در میان قضایای ریاضی و منطقی فرقی دراقائل شده اند. قضیهٔ منطقی تنها حکم مطلق عقلی است و کیفیت محض است در صورتی که قضیهٔ ریاضی ماده اش کیفیت و آن آن روست که بجای کلمهٔ (است) میان موضوع و محمول منطق ریاضی کلمهٔ (مساویست) را بکار می برد. همچنین گفته اند قضیهٔ ریاضی قطعیت دارد چون

۲ ریاضیون بخشنده حل مسائل را بعده ما رجوع باشناه و اشکال ردی گیرند. گفته اند مع

مستند بکمیّات ثابت ولی چون قضایای منطقی مستند بکیفیات است
قطعیّت نداشته باشد. مثلاً در این قیاس: «العالم متغیّر - کلّ متغیّر
- فالعالم حادث» قطعیّت صغری و کبری مانند قطعیّت یک قیاس ریاضی
ذیل نیست:

مساحت هر مثلّث مساوی است بحاصل ضرب نصف قاعده در ارتفاع



ABC مثلّث است پس مساحت $ABC = \frac{1}{2} AA' \times BC$

در قضیّهٔ منطقی فوق نه ماهیّت تغییر پیدا و
قطعی است و نه حادث بودن هر تغییر.

بدیهی است که قیاس ریاضی ممکن است مسلسل
باشد و در واقع در ریاضی عالی حال همین است
در مبادی هندسه بین این تسلسل پیدا است. مثلاً در قضیّهٔ معروف فیثاغ
(که در کتب قدیم ما شاید بتحریف از کلمهٔ فیثاغورث بقضیّهٔ عروس معرو
اثبات آن مستند است بمختصر بقضیّهٔ مساحت مثلّث ها بعد بقانون نس
مثلّث ها بعد بمساحت مربّع و مستطیل.... الخ.

اصطلاحات

L'aire balayée	سطح مفروش
Surface Caustique	سطح مُحرّق
Enveloppe	لفاف
Enveloppé	ملفوف
Congru nce	مساوات
Déterminant	مُعرّف
Substitution	تبدیل
Transformation	تحویل
Centre instantané de rotation	مرکز آنی دوران

خواص عدد ۹

9×1 $+2=11$

9×12 $+3=111$

9×123 $+4=1111$

9×1234 $+5=11111$

9×12345 $+6=111111$

9×123456 $+7=1111111$

9×1234567 $+8=11111111$

9×12345678 $+9=111111111$

9×123456789 $+10=1111111111$

ایضاً

9×9 $+7=88$

9×98 $+6=888$

9×987 $+5=8888$

9×9876 $+4=88888$

9×98765 $+3=888888$

9×987654 $+2=8888888$

9×9876543 $+1=88888888$

9×98765432 $+0=888888888$

دو عدد سرّی!

$142857\times$

326451

142857

714285

571428

857142

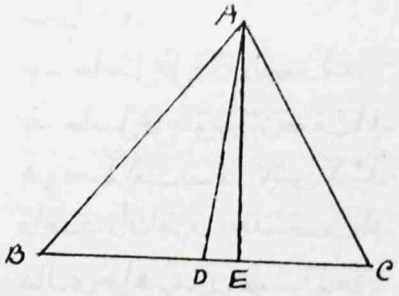
285714

428571

حیل ریاضی

قضیهٔ ۲- طول قسمتی از یک قطعه خط مساویست باطول تمام آن و بعبارهٔ اخری کل و جزء مساویند.

برهان- برای اثبات قضیه مثلثی مانند ABC رسم نموده فرض می‌کنیم زاویهٔ B حاده و زاویهٔ BAC بزرگتر از ACB باشد. و اوپر BAD را مساوی C جدا



کرده عمود AE را بر BC فرود می‌آوریم موافق یکی از قضایای هندسه از دو مثلث ABC و ABD نتیجه می‌شود:

$$\frac{ABC}{ABD}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}$$

و از همان دو مثلث بمناسبت اینکه اوتفاعشان مشترک است نتیجه حاصل آید:

$$\frac{ABC}{ABD}=\frac{BC}{BD}$$

از آنجا: $\frac{AC^2}{BC}=\frac{AD^2}{BD}$ یا: $\frac{BC}{BD}=\frac{AC^2}{AD^2}$ (۱)

امّا: $AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BE$

و $AD^2=AB^2+BD^2-2BD.BE$

چون این مقادیر را در نسبت (۱) قرار داده اختصارات لازمه را بجا آوریم چنین حاصل آید: $BC=BD$. مثبت المطلوب.

گوناگون

بشخص امر کنید عددی کوچك بزنان شانزده دو نظر گرفته یکی بر آن علاوه کند وحاصل را سه برابر نماید وبعد اعمال ذیل را انجام دهد :

۱- حاصل را نصف کند و نتیجه را سه برابر نماید .

۲- حاصلی را که بدست آمد نصف نموده و سه برابر کند .

۳- حاصل عمل دوّم را نصف کند

۴- حاصل عمل سوّم را نیز نصف نماید هر دفعه که گفت نصف نمیشود بگوئید واحدی بر آن افزوده بعد تنصیف نماید حال می خواهیم بدون هیچ سوالی عدد را که در نظر گرفته بیابیم .

حلّ مسئله - این مسئله بمدد جدول ذیل حل میشود :

می - انی	۸	۰
با - ری - کی	۱	۹
که - می - ا	۲	۱۰
ث - با - نی	۳	۱۱
بی - پی - وا	۴	۱۲
ام - ری - کا	۱۳	۵
شی - ری - نی	۶	۱۴
و - ن - راء	۱۵	۷

این جدول شامل ۸ کلمه است که هریك بسه قطعه تقسیم شده اند وبعضی از این قطعات شامل حرف (ی) می باشند. این حرف نمایش افزودن واحد میباشد. ستونی که با ۸ شروع می شود نظیر اعداد یك رقمی در عمل چهارم بدون افزودن واحد تنصیف امکان یافته و ستون اخیر نظیر آنهائیست که در عمل چهارم نیز واحدی افزوده. اینك برای توضیح مثالی می آوریم :

۱- می گوید نصف نمیشود پس باید از بین کلمات فوق آنهائی را که قطعهٔ اوّلشان شامل حرف (ی) است انتخاب کرد و این کلمات عبارتند از (می انی - کی می ا - بی پی وا - شی ری نی)

۲- مجدّداً می گوید نصف نمیشود. پس از چهار کلمهٔ فوق آنهائی را که قطعهٔ دوّمشان نیز شامل (ی) است انتخاب مینمائیم :

(کی می ا - شی ری نی)

۳- مجدّداً می گوید نمیشود نصف پس کلمهٔ (شی ری نی) را اختیار می کنیم.

۴- بدون افزودن واحد تقسیم می کند پس عددی که در نظر گرفته در ستونی که در فوق آن ۸ است ومقابل (شی ری نی) یعنی ۶ می باشد

(تفکر در اثبات راه حل این مسئله را بمخوانندگان محترم توصیه می کنیم و اگر مطالبی در باب آن نگاشته شود درج خواهیم نمود. بعلاوه در شماره های آینده خود اثبات آنرا ذکر خواهیم کرد .)

۲۸- **مسئله** (جبر)- معادلهٔ $(x^2+y^2-1)(a^2+b^2-1)+(ax+by-1)^3+(bx-ay)^2=0$ را بصورت $(x-a)^2+(y-b)^2=(x^2+y^2)(a^2+b^2)+2(ax+by)-1$ درآورده سپس مقادیر x و y را که در معادلهٔ (۱) صدق میکنند بیابید.

حل- معادلهٔ (۱) را میتوان چنین نوشت: $(x^2+y^2)(a^2+b^2)+2(ax+by)+1=(x-a)^2+(bx-ay)^2$ اما موافق اتحاد لاگرانژ $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(x^2+y^2)(a^2+b^2)$ پس:

$$(ax+by)^2+2(ax+by)+1+(bx-ay)^2=0$$

یا $(ax+by+1)^2+(bx-ay)^2=0$ و وقتی محقق میشود که معادلهٔ (۲) بر معادلهٔ (۱) قرار باشد و چون طرف اول معادلهٔ (۲) مجموع دو مجذور راست تنها وقتی صفر تواند شد که هر یک از این دو مجذور و بتنهائی صفر باشند یعنی $bx-ay=0$ و $ax+by+1=0$ از حل این دو دستگاه چنین نتیجه میشود: $x=\frac{a}{a^2+b^2}$ و $y=\frac{b}{a^2+b^2}$

مسئلهٔ ۲۹- (جبر)- شخصی وصیت کرد که پس از مرگش دارائیش را طبق توافق بین اطفالش تقسیم کنند باولی یکصد بنار بعلاوهٔ عشر باقی. بدوّمی دویست بنار بعلاوهٔ عشر باقی و بسوّمی سیصد بنار بعلاوهٔ عشر باقی و هکذا. وقتی تقسیم را باین طریق انجام دادند تمام پول تقسیم شده و سهام هر مساوی گردید. مطلوبست دارائی آن شخص و عدهٔ اطفالش. (این مسئله مسئلهٔ میراث معروف است از کتابی که در سنهٔ ۱۲۴۸ میلادی نوشته شده اقتباس گردیده است. این کتاب قدیمترین حل المسائل هائی است که در مملکت فرانسه تدوین شده و مؤلف آن نیکلاشوکه Nicolas Chuquet میباشد: در این کتاب شوکه علاوه بر مسائل درجهٔ اول مسائل متعدد درجهٔ دوم و بعضی از آنها را از قبیل سرشوهر حسود- کرک و کلم و گوسفند- یک جملهٔ حیرت انگیز (رجوع کنید بجلد اول علوم تفریحی تألیف غ. مصاحب) وغیره نیز مورد بحث قرار میدهد.) — این مسئله را چند طریق حل نموده اند.

۱- **طریق اولر** Euler- این طریق مبنی بر اینست که سهم اولی و دومی را مساوی قرار دهیم. برای این مقصود فرض کنیم x تمام دارائی آن شخص باشد. سهم اولی معادلست با $\frac{x+9}{10}$ یا $1+\frac{x-1}{10}$ پس باقیماندهٔ پول چنین است $x-\frac{x+9}{10}=\frac{9x-9}{10}$ بنابراین سهم دومی مساویست با: $2+\frac{\frac{9x-9}{10}-2}{10}$ یا $2+\frac{9x-29}{100}$ از آنجا $\frac{x+9}{10}=\frac{9x+171}{100}$ یا پس از حذف مخارج $10x+90=9x+171$ پس: $x=81$ بنابراین سهم هر طفلی مساویست با $\frac{81+9}{10}$ بنابراین عدهٔ اطفال 9 است

۲- **طریق کاتالان** (Catalan)- فرض کنیم x دارائی آن شخص و y_p سهم طفل $p+1$ ام و سهم طفل $p+2$ ام y_{p+1} باشد چون سهام اطفال مساویست $y_p=y_{p+1}$ یعنی

$$\frac{(1+p)-y_p-\cdots-y_2-y_1-x}{10}+p+1=\frac{p-1-y_p-\cdots-y_2-y_1-x}{10}+p$$

$$\text{یا } \frac{y_{p+1}}{10} - \frac{y_p}{10} - \frac{y_{p-1}}{10} - \dots - \frac{y_1}{10} + \frac{x}{10} + 1 + p = p - \frac{y_1}{10} - \dots - \frac{y_{p-1}}{10} - \frac{y_p}{10}$$

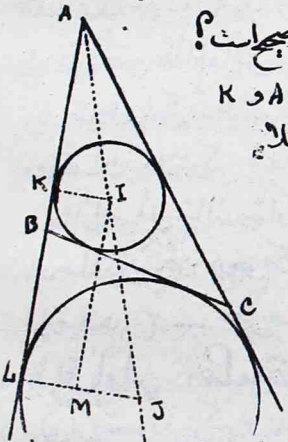
از آنجا $y_p = 9$

تبصره — اگر برای اولی a تومان بعلاوهٔ $\frac{1}{n}$ باقی و برای دومی ۲۵ تومان بعلاوهٔ $\frac{1}{n}$ باقی و همچنین وصیت کرده بود تمام پول a^2 $(n-1)$ و عدهٔ اطفال a $(n-1)$ و سهم هریک $n-1$ می گردید.

مسئلهٔ ۳ (هندسه) — از کف برکه که سطحش بشکل مربع است بضلع ۱ پائی لای روئیده و نمو می کند اگر موقعی که بمقدار یک پا از آب خارج شده سر آن را بطرف وسط یکی از اضلاع سطح برکه خم دهیم بآن میرسد. مطلوبست ارتفاع نی. (این مسئله از کتابی باسم کیوچانگ Kiu tschang که ۲۰۰ سال قبل از میلاد مسیح بزبان چینی نوشته شده و ۲۵۰ سال قبل از میلاد تسن کن چانگ Tsin-Tschang آنرا منتشر ساخته است اقتباس کرده بود و ما فقط از نظر تاریخی درج این مسئله را در اینجا لازم دانستیم)

حل — معلوم است که اگر ارتفاع برکه باشد ارتفاع نی $x+1$ خواهد بود و وقتی راس نی را بوسط ضلع سطح برکه برسانیم مثلث قائم الزاویه تشکیل میشود که وترش $x+1$ و دو ضلع دیگرش یکی x و دیگری ۵ است پس: $(x+1)^2 = x^2 + 25$ از آنجا: $x = 12$

مسئلهٔ ۴ (هندسه) — ثابت کنید که اگر در مثلثی ضلع a واسطهٔ هندسی بین اقطار دو دایرهٔ محاط در زاویهٔ A باشد مثلث متساوی الساقین است. عکس قضیه صحیح است؟



دلیل اول — فرض کنیم I و J مراکز دو دایرهٔ محاط در زاویهٔ A و K و L نقاط تماس این دو دایره با یکی از اضلاع مثلث غیر از a (مثلاً با AB) باشد. اگر IM را بموازات AB مرور دهیم این دو دایره بر هم مماس خارج میشوند و داریم: $IM = KL = BC$ و $MJ = p_a - p$

پس: $\overline{IJ}^2 = (p_a - p)^2 + a^2$ اما $a^2 = 4pp_a$ بنا براین $\overline{IJ}^2 = (p_a - p)^2 + 4pp_a = (p_a + p)^2$

پس $IJ = p_a + p$ و از این رو معلوم می شود که دو دایرهٔ I و J بر یکدیگر مماسند و بالنتیجه خط AIJ بر مماس مشترک این دو دایره یعنی BC عمود میباشد و این مطلب حکم را ثابت می کند.

دلیل دوم — میدانیم که $p = \frac{ab}{p_a}$ و $p_a = \frac{ab}{p-a}$ حال این مقادیر را در رابطهٔ $a^2 = 4pp_a$ قرار داده اعمال لازمه را بجا می آوریم حاصل میشود: $b = c$.

قضیهٔ عکس — برای اثبات اینکه عکس قضیهٔ مذکور صحیح است کافی است ملاحظه کنیم که اگر H وسط ضلع BC از مثلث متساوی الساقین ABC باشد مثلث IBJ قائم الزاویه و BH ارتفاع آن است پس $\overline{BH}^2 = \overline{IH} \cdot \overline{JH}$ یعنی $\frac{a^2}{4} = pp_a$ پس $a^2 = 4pp_a$

دستگاههای درجهٔ دوم (بقیه از شمارهٔ قبل)

۳- وقتی معادلات دستگاه متجانس باشند (تابع راعجانس خوانند وقتی تمام جملش دارای یک درجه باشند) خارج قسمت دو مجهول را مجهول معاون قرار میدهیم. پس از تعیین این مجهول مجهولات اصلی بدست آیند.

مسئله ۳۲ دستگاه $x^2+y\sqrt{xy}=18$ و $y^2+x\sqrt{xy}=9$ را حل کنید.

حل - فرض کنیم $\frac{y}{x}=t$ یعنی $y=tx$ دستگاه فوق چنین میشود:

$$x^2(1+t\sqrt{t})=9 \quad (1) \qquad \sqrt{t}x^2(1+t\sqrt{t})=18 \quad (2)$$

از تقسیم این دو معادله نتیجه میشود $\sqrt{t}=2$ پس $t=4$ بنابراین معادلهٔ (۱) را میتوان بدین صورت نوشت: $9x^2=9$ پس $x=\pm 1$ بالنتیجه $y=tx=\pm 4$ (خانمه)

مسئله ۳۳ - عددی مرکب است از سه رقم. مجذور رقم عشرات مساویست با حاصل ضرب دو رقم دیگر بعلاوهٔ ۴ و تفاضل ضاعف رقم عشرات و آحاد معادلست با رقم مئات و بالاخره اگر از این عدد مقلوبش را بکاهیم باقی مانده معادل خواهد بود با رقم عشرات بعلاوهٔ ۳۹۰. آن عدد کدام است

حل - اگر فرض کنیم $\overline{xyz}$ (این علامت عددی را که ارقامش بترتیب z و y و x باشند مینمایاند) عدد مطلوب باشد این دستگاه حاصل میشود

$$\begin{cases} y^2=xz+4 & 2y-z=x \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=y+390 \end{cases}$$

چون معادلهٔ سوم را مختصر کرده دو معادلهٔ اول و سوم بجای x مقدارش را قرار دهیم چنین نتیجه میشود

$$198(y-z)=y+390 \qquad (y-z)^2=4$$

از معادلهٔ اول نتیجه میشود $y-z=\pm 2$ پس معادلهٔ دوم بالنتیجه بدو صورت زیر درمیآید: $198(y-z)=y+390$ و $198(y-z)=-y-390$

وچون y مقدار مثبت فقط علامت فوق قابل قبول است و از آن معلوم میشود که $y=4$ پس $z=y-2=2$ بنابراین $x=12-4=8$. بالنتیجه عدد مطلوب ۴۲۸ است

مسئله ۳۴ (فیزیک) دو بالن داریم که ظرفیت اولی یک لیتر و ظرفیت دومی دو لیتر است. اولی از هوائی که حرارتش ۱۵° و فشارش ۷۲۰ میلیمتر جیوه است و دومی از هوائی با حرارت ۲۰° و فشار ۴۰/۵ آتمسفر پر شده. این دو بالن را بوسیلهٔ لولهٔ کوچکی غیر قابل ملاحظه است بهم وصل میکنیم اوّلاً وقتی حرارت دستگاه فوق معادلات حرارت محیط (۱۵°) گردید فشار هوای محتوی در دستگاه چقدر است؟

ثانیاً در این موقع جرم هوائی که از بالن دوم داخل بالن اول گردید چقدر است؟

(جرم یک لیتر هوا در شرایط متعارفه ۱٫۲۹۳ گرم و ضریب انبساط آن $\frac{1}{273}$ است)

حل ـ ۱ـ فرض کنیم x فشار مطلوب و v' و v'' حجم هوای هر بالن باشد و بالن در شرایط $(x, 15^\circ)$ باشد چون حرارت هوا بالن اول تغییر نکرده موافق قانون ماریوت:
$v' \times x = 720 \times 1$ پس $v' = \frac{720}{x}$ و چون هوای بالن دوم از حالت $(760 \text{ میلیمتر}, 4.5 \text{ آتمسفر}, 20^\circ)$
بحالت $(x, 15^\circ)$ درآمده این رابطه برقرار است: $\frac{v'' x}{1+15\alpha} = \frac{2 \times 4.5 \times 760}{1+20\alpha}$ از آنجا $v'' = \frac{9 \times 760 (1+15\alpha)}{x(1+20\alpha)}$
و چون $3 = v' + v''$ لیتر است این معادله حاصل می‌شود: $\frac{720}{x} + \frac{9 \times 760 (1+15\alpha)}{x(1+20\alpha)} = 3$
از آنجا $x = 2481$ میلیمتر

۲ـ حجم هوائی که از بالن دوم وارد بالن اول شده مساوی با $v'' = 2 - \frac{9 \times 760 (1+15\alpha)}{x(1+20\alpha)}$
و چون این هوا در شرایط $(x, 15^\circ)$ است وزن مخصوص آن چنین خواهد بود: $d = \frac{1.293 x}{760(1+15\alpha)}$
بنابراین جرم هوائی که از بالن دوم بالن اول رفته مساوی است با:
$$\frac{1.293 x}{760(1+15\alpha)} \times \left[2 - \frac{9 \times 760 (1+15\alpha)}{x(1+20\alpha)}\right] = 2.184 \text{ کیلوگرم}$$

مسئلهٔ ۳۵ـ (مشتقات). بر منحنی $y^2 = 20x$ مماسی وان مماس منصف الزاویه ربع اول رسم میکنیم مطلوبست معادلهٔ این مماس.

حل ـ طریق مستقیم ـ چون ضریب زاویهٔ منصف الزاویهٔ مذکور (۱) است معادلهٔ مماس مطلوب بصورت $y = x + b$ خواهد بود. حال باید b را چنان تعیین کرد که دستگاه $y^2 = 20x$, $y = x + b$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد. برای این مقصود y را بین معادلات دستگاه حذف میکنیم نتیجه می‌شود: $x^2 + 2x(b-10) + b^2 = 20x$ یا $(x+b)^2 = 0$
باید مبین این معادله صفر باشد یعنی: $(b-10)^2 - b^2 = 0$ از آنجا $b = 5$ پس معادلهٔ مماس مطلوب عبارتست از $y = x + 5$

طریق دوم ـ ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی فوق عبارتست از y'. برای محاسبهٔ y' از طرفین معادلهٔ فوق اشتقاق میکنیم نتیجه می‌شود $2yy' = 20$ پس $y' = \frac{10}{y}$ بنابراین اگر m و v مختصات نقطهٔ تماس باشند $m = \frac{10}{v}$ یعنی $v = 10$ پس $m = \frac{100}{20} = 5$
بنابراین معادلهٔ مماس مطلوب عبارتست از $y = x + 5$ یا $y - 10 = x - 5$

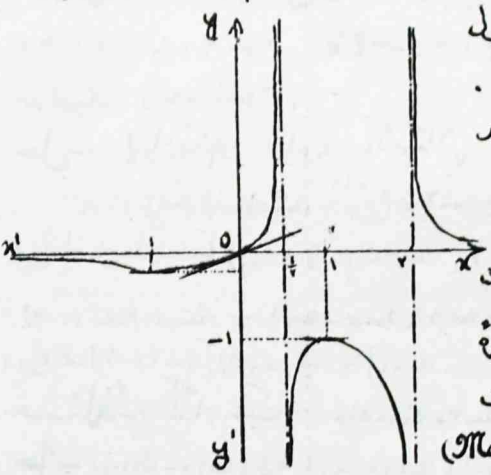
مسئلهٔ ۳۶ـ (مشتقات). ثابت کنید که اگر تابع $\varphi(x)$ صعودی باشد تابع $\frac{x + \varphi(x)}{1 - x\varphi(x)}$ نیز صعودیست.

حل ـ اگر فرض کنیم: $\frac{x + \varphi(x)}{1 - x\varphi(x)} = y$ بوسیلهٔ اشتقاق حاصل می‌شود: $y' = \frac{1 + \varphi'(x) + \varphi^2(x) + \varphi'(x)\varphi^2(x)}{[1 - x\varphi(x)]^2}$
که اخیراً بمناسبت اینکه φ صعودی فرض شده (یعنی $\varphi' > 0$) دائماً مثبت و بنابراین y صعودیست.

مسئلهٔ ۳۷ـ (مشتقات). ـ تابع $\frac{x}{2x^2 - 5x + 2} = y$ مفروض است مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش آن و معادلهٔ مماسی که از مبدأ بر منحنی نمایش y رسم شود

حل - بازاء $x=0$ و $x=\pm\infty$ تابع صفری شود و بازاء ریشه‌های مخرج یعنی ۲ و $\frac{1}{2}$ منفصل می‌گردد. مشتق آن $y'=\frac{2(1-x^2)}{(2x^2-5x+2)^2}$ بازاء $x=\pm1$ صفری شود در فواصل $(-1,-\infty)$ و $(+\infty,1)$ که $1-x^2$ و بنابراین y' منفی است تابع نزولی و در فاصلهٔ $(+1,-1)$ صعودی می‌باشد. بازاء $x=-1$ مینیموم و بازاء $x=+1$ ماکزیموم دارد. خلاصهٔ تغییرات آن از جدول و منحنی ذیل معلوم می‌شود

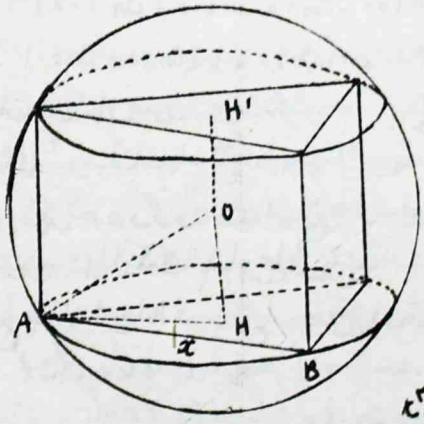
x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$
y	0	$-\frac{1}{9}$	0	$+\infty$	$-\infty$	-1	0



مجانبهای منحنی عبارتند از محور طول و دو خط $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$.
ضریب زاویهٔ مماسی که از مبدء بر منحنی رسم شود مساویست با $\frac{1}{2}$ پس معادلهٔ آن چنین است $y=\frac{1}{2}x$

مسئله ۴۸ - (مشتقات) مطلوبست ماکزیموم حجم منشوری قائم محاط در کرهٔ بشعاع R بنابر آنکه قاعدهٔ منشور مثلث متساوی الاضلاع باشد (Mantua)

حل - فرض کنیم $AB=x$ ضلع قاعدهٔ منشور و $H'H=2h$ ارتفاع آن باشد. حجم منشور معادلست با: $V=\frac{hx^2\sqrt{3}}{2}$ اما



از مثلث قائم الزاویه OAH بنتیجه می‌شود: $AH=\sqrt{R^2-h^2}$

پس $AB=x=\sqrt{R^2-h^2}\sqrt{3}$

با تعویض $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}h(R^2-h^2)$

این مقدار وقتی ماکزیموم می‌شود که $h(R^2-h^2)$ یا $(h^2)^{\frac{1}{2}}(R^2-h^2)$ ماکزیموم باشد و چون مجموع دو عامل h^2 و R^2-h^2 ثابت است حاصل ضربشان وقتی ماکزیموم خواهد بود که $R^2-h^2=\frac{h^2}{2}$

یعنی $h=\frac{R\sqrt{3}}{3}$ بازاء این مقدار حجم منشور معادل R^3 یعنی مکعّب شعاع کرهٔ محیطی باشد

طریق دیگر - مشتق حجم منشور عبارت از $V'=\frac{3\sqrt{3}}{2}(R^2-3h^2)$ و بنابراین مقدار بازاء $h=\frac{R\sqrt{3}}{3}$ صفر شده از + به - می رود پس بازاء این مقدار از h حجم منشور ماکزیموم دارد

تبصره - اگر منشور محاطی مسدّس القاعده و قاعده اش منتظم بود ماکزیموم حجم کره محاطی مکعّب شعاع کره می گردید. اثبات این مطلب را بر خوانندگان محترم می گذاریم.

مسئلهٔ ۳۹ - (مثلّثات) - اگر α و β و γ زوایای مثلّث مستقیم الخطی باشند سه مقدار $\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ و $\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$ و $\sin^2\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$ مساویند. (Brocard)

حل - برای اثبات حکم فوق کافی است ثابت کنیم که اگر $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ باشد تفاضل $A=\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ و $B=\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$ (مثلاً) صفر است.

اما $A-B=\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$ این تفاضل مساویست با

پس $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$A-B=\sin(\alpha-\beta)[\sin(\alpha+\beta)-\sin\gamma]=\sin(\alpha-\beta)[\sin(\pi-\gamma)-\sin\gamma]=0$

مسئلهٔ ۴۰ - (مثلّثات) - ثابت کنید که $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ=\frac{3}{16}$ (Lindemann)

حل - $\sin10^\circ\sin20^\circ=\frac{1}{2}(\cos10^\circ-\cos30^\circ)$ و $\sin40^\circ\sin50^\circ=\frac{1}{2}(\cos10^\circ-\cos90^\circ)$

پس عبارت فوق مساویست با:

$\frac{1}{4}(\cos20^\circ\cos40^\circ-\cos20^\circ\cos100^\circ-\cos50^\circ\cos100^\circ+\cos^2100^\circ)$

امّا $\cos20^\circ\cos40^\circ=\frac{1}{2}(\cos10^\circ+\cos60^\circ)$ و همچنان برای حاصل ضرب های دیگر بقیّه

که عبارت فوق باین صورت نوشته می شود: $\frac{3}{16}=\frac{1}{4}\sin^280^\circ$

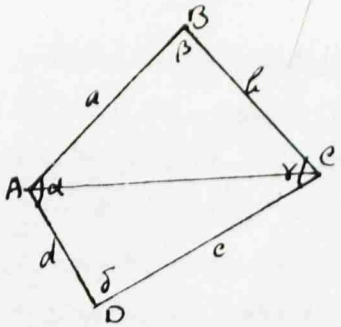
مسئلهٔ ۴۱ - (مثلّثات) اضلاع ذوار بعة اضلاعی در دست است. وسعت آنرا چنان معیّن کنید که محاطی باشد

حل - فرض کنیم a و b و c و d اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ و α و β و γ و δ زوایای آن باشند. شرط اینکه چهار ضلعی محاطی باشد آنست که $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$ باشد. خلاصه اگر سطح چهار ضلعی را به S بنامیم از وصل کردن قطر AC چنین نتیجه می شود:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}dc\sin\delta=\frac{1}{2}\sin\beta\,(ab+dc)$$

اما: $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2+2cd\cos\beta$

پس $\cos\beta=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$ و اگر محیط شکل را به $2p$



بنمائیم از این رو این نتیجه حاصل می شود

$$\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}$$

با نتیجه :

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

مسائل حل کردنی

مسئلهٔ ۴۲ ـ دختری می گوید عدهٔ خواهران و برادران من مساویند. برادرش میگوید عدهٔ برادران من دو برابر خواهرانم می باشد پدر آنها چند پسر و چند دختر دارد ؟ (حل حسابی)

مسئلهٔ ۴۳ ـ عبارت $x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

مسئلهٔ ۴۴ ـ معادلهٔ $\frac{x+2}{12x^2+34x+24}-\frac{x+14}{12x^2-14x-41}+\frac{6x-4}{9x^2-12x-32}=0$ را حل کنید

مسئلهٔ ۴۵ ـ دو نفر دوچرخه سوار در یک لحظه اول از نقطهٔ A بطرف نقطهٔ B و دومی از نقطهٔ B بطرف نقطهٔ A حرکت می کنند. فاصلهٔ A از B معادل d است و دو مسافر مذکور این راه را بترتیب در a ساعت و b ساعت می پیمایند. بنا بر آنکه ملاقات آنها m ساعت قبل از رسیدن اولی به B و n ساعت قبل از رسیدن دومی به A باشد ثابت کنید که: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{m}{n}$

مسئلهٔ ۴۶ ـ اتومبیلی از مقابل تابلوئی که روی آن عدهٔ کیلومترهائی را که اتومبیل پیموده معین می کند عبور مینماید. روی این تابلو عددی دو رقمی نوشته شده. بعد از این که یک ساعت دیگر حرکت کرد از مقابل تابلوی دیگری که روی آن عددی دو رقمی که معکوس عدد اولست نوشته شده می گذرد. بالاخره پس از یک ساعت دیگر از مقابل تابلوی سومی که روی آن عددی سه رقمی که دو رقم طرفین آن دو رقم عددهای اول و دوم و وسطش صفر است عبور مینماید.

مطلوبست سرعت اتومبیل و عددی که روی تابلو اول نوشته شده .

مسئلهٔ ۴۷ ـ مطلوبست فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی و محاطی مثلثی بجهت اشعهٔ این دایره .

مسئلهٔ ۴۸ ـ ثابت کنید که اگر ریشه های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ حقیقی باشند ریشه های معادلهٔ $x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$ نیز بازاء جمیع مقادیر a حقیقی اند. (De Longchamps)

مسئلهٔ ۴۹ ـ دستگاه $x+y=2$ و $\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{121}{13}$ را حل کنید .

مسئلهٔ ۵۰ ـ بفرض که جسم غیر قابل ملاحظه است کرهٔ بوزن ۵ کیلوگرم آویخته دستگاه وارد در سر پوشی که حرارتش در تمام طول عمل صفر درجه استقرار داده هوای آنرا مرتباً کم می کنیم

فشار هوای سر پوش چه اندازه شود تا کرهٔ مذکوره میلی متر بالا رود؟ معلوماتی: اولاً انبساط فلز متناسب با وزنه و مقدار آن برای هر کیلوگرم یک سانتی متر است. ثانیاً وزن مخصوص کره ۱۲ است. ثالثاً ۱۳ گرم هوا در شرایط متعارف یک لیتر حجم را اشغال میکند.

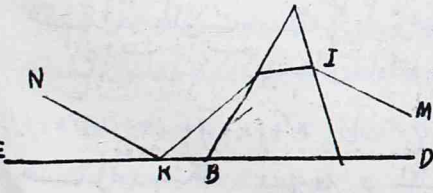
مسئلهٔ ۵۱ - مقدار مایع محتوی در سه ظرف A و B و C با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و قیمت یک لیتر آنها بترتیب با اعداد ۳ و ۲ و ۱ متناسبند. مقداری مایع از ظرف A برداشته در ظرف B میریزیم و همان مقدار از مخلوط ظرف B را در C و همان قدر از مخلوط ظرف C را در B و بالاخره همان مقدار از مخلوط ظرف B را در ظرف A میریزیم. باین قسم قیمت مایع محتوی در ظرف اول $\frac{35}{27}$ قیمت اولی آن می گردد. می دانیم که اگر در اعمال فوق هر دفعه یک لیتر بیشتر برداشته بودیم قیمت مایع ظرف اول $\frac{3}{2}$ مقدار اولی آن می گردید. مطلوبست مقدار مایع محتوی در هر یک از ظروف.

مسئلهٔ ۵۲ - چهار عدد ۱۶ و ۸۰ و ۲۴۰ و ۵۴۴ چهار جملهٔ اول رشتهٔ هستند که جملهٔ n ام آن بصورت n^2 تابع صحیحی است از درجهٔ سوم مطلوبست اولاً تعیین جملهٔ n ام این رشته. ثانیاً ثابت کنید که اگر S مجموع n جملهٔ رشته باشد $S+1$ مجموع قوای چهارم دو عدد صحیح متوالی است (مصاحب)

مسئلهٔ ۵۳ - مطلوبست مشتق نابع: $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2m+1}\left[x^{2m}+\frac{2m}{2m-1}x^{2m-2}+\frac{2m(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)}x^{2m-4}+\cdots+\frac{2m(2m-2)\cdots\times 2}{(2m-1)(2m-3)\cdots\times 1}\right]$

مسئلهٔ ۵۴ - مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش نابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

مسئلهٔ ۵۵ - منشور متساوی الساقین ABC که نمایندهٔ آن ۱٫۶۲ است مفروضست. وجه BC از این منشور بر آینهٔ مسطح ED قرار دارد و خطوط الراس های آن بسطح شکل عمودند.



شعاعی مانند MI بریکی از وجوه منشور تابیده در نقطهٔ K بآینه خورده منعکس می شود.

اولاً ثابت کنید که اگر منشور در وضع مینیموم انحراف باشد شعاع KN با MI موازیست. ثانیاً در این حالت زاویهٔ KN و ED را حساب کنید.

ریاضیات عالی

معادلهٔ ریکاتی (بقیه از شمارهٔ قبل)

بطور کلی فرض کنیم $\theta_m = \frac{am+b}{a'm+b'}$ برای محاسبهٔ θ_m^n ملاحظه می‌کنیم که موافق تعریف:

$$\theta_m^n = \theta\,\theta_m^{n-1} = \frac{a\theta_m^{n-1}+b}{a'\theta_m^{n-1}+b'} = \frac{m(aa_{n-1}+ba'_{n-1})+ab_{n-1}+bb'_{n-1}}{m(a'a_{n-1}+b'a'_{n-1})+a'b_{n-1}+b'b'_{n-1}}$$

حتمی که اگر فرض کنیم:

$$a'_n = a'a_{n-1} + b'a'_{n-1} \qquad b'_n = a'b_{n-1} + b'b'_{n-1}$$

$$(1)\quad \begin{cases} a_n = aa_{n-1} + ba'_{n-1} \\ b_n = ab_{n-1} + bb'_{n-1} \end{cases}$$

حل مسئله بتعیین a_n و a'_n و b_n و b'_n راجع می‌شود. برای اینکه بسهولت باین مقصود نائل شویم فرض کنیم x و x_1 ریشه‌های معادلهٔ $x = \frac{b+b'x}{a+a'x}$ (۲) باشند. بسهولت معلوم می‌شود که:

$$(3)\quad \begin{cases} a_n + xa'_n = (a+a'x)(a_{n-1} + a'_{n-1}x) \\ b_n + xb'_n = (a+a'x)(b_{n-1} + b'_{n-1}x) \end{cases}$$

و این دو دستور را جع بسهولت چنین نتیجه می‌شود:

$$(4)\quad \begin{cases} a_n + x_1 a'_n = (a+a'x_1)^n \\ b_n + xb'_n = x(a+a'x_1)^n \end{cases}$$

علاوه بر این دستگاه دستگاهی که از تبدیل x به x_1 در معادلات (۴) حاصل میشود نیز برقرار است و باین قسم چهار معادله حاصل میشود که مجهولات آنها a_n و a'_n و b_n و b'_n هستند و اگر برای سهولت چنین قرار دهیم:

$$2t = \sqrt{(a+b')^2 - 4(ab'-ba')}\,, \qquad P_n = (a+b'+2t)^n + (a+b'-2t)^n$$

$$Q_n = \frac{(a+b'+2t)^n - (a+b'-2t)^n}{2t}$$

از حل این چهار معادله چنین نتیجه می‌شود:

$$a_n = \frac{P_n + (a-b')Q_n}{2^{n+1}}\,, \quad a'_n = a'\frac{Q_n}{2^n}\,, \quad b_n = b\frac{Q_n}{2^n}\,, \quad b'_n = \frac{P_n - (a-b')Q_n}{2^{n+1}}$$

این بود راه حل مسئله در حالت کلی

حالت خاص — ممکن است $t=0$ باشد و در این حالت نتایج فوق که بازاء جمیع مقادیر t محققند بازاء این مقدار مخصوص از t نیز برقرار خواهند بود و نتیجه که از این بعمل میآید شود اینست که در اینحالت $\theta_m^n = \left[(a-b'+\frac{a+b'}{2})m+2b\right] : \left[2a'm-(a-b'+\frac{a+b'}{2})\right]$ (۵) و فی $\theta_m = \frac{-m-4}{m+3}$ باشد $a=-1$, $b=-4$, $a'=1$, $b'=3$ و چون بازاء این مقادیر $t=0$ است دستور (۵) قابل استعمال خواهد بود و از آن این نتیجه حاصل می‌گردد:

$\theta_m^{\alpha} = \frac{(\frac{1}{\alpha}-2)m-4}{m+2+\frac{1}{\alpha}}$ پس وقتی $(\frac{1}{\alpha}-2)m-4=0$ یعنی $m=\frac{4\alpha}{1-2\alpha}$ باشد معادلهٔ دیکاتی قابل حل است. (دنبال دارد.)

مسئلهٔ ۵- ثابت کنید که اگر P و Q نسبت به x و y دو تابع متجانس و از یک درجه باشند عبارت $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$ فاصلهٔ کلی تابعی می باشد.

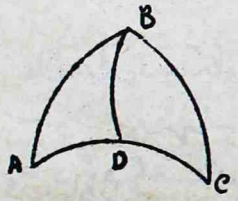
حل- باید ثابت کرد که: $\frac{\partial \frac{P}{Px+Qy}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{Q}{Px+Qy}}{\partial x}$ یا $Q(xP'_x+yP'_y) = P(xQ'_x+yQ'_y)$ (۱). خلاصه اگر n درجهٔ تجانس P و Q باشد موافق اتحاد اولر: $xP'_x+yP'_y=nP$ ، $xQ'_x+yQ'_y=nQ$ و از اینجا صحت تساوی (۱) بدیهی میشود

نتیجهٔ اصلی- وقتی P و Q نسبت به x و y دو تابع متجانس و از یک درجه باشند عامل $\frac{1}{Px+Qy}$ عبارت $Pdx+Qdy$ را فاصلهٔ کلی تابعی مینماید. (چنین عوامل را من بعد عامل جامعساز Facteur integraut اصطلاح می کنیم)

نتیجهٔ ۲- اگر عبارت $Pdx+Qdy$ خود فاصلهٔ کلی باشد می توان عدد ۱ را این عامل جامعساز $Pdx+Qdy$ دانست و بالنتیجه جامع کلی معادله $Pdx+Qdy=0$ در این حالت $Px+Qy=C$ خواهد بود.

مسائل حل کردنی

مسئلهٔ ۵۷- از مثلث کروی ABC محیط و زاویه BAC و قوس عظیمهٔ BD که بر AC عمود است در دست است مطلوب محاسبهٔ AB ، BC .



مسئلهٔ ۵۸- معادلهٔ $y''=y'y''f(y)$ را حل کنید.

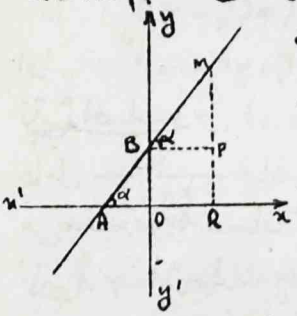
مسئلهٔ ۵۹- سطح $z=\pm\sqrt{(P-h\cos\theta)(-P+\frac{l}{\cos\theta})}$ (S) $x=P\cos\theta$ $y=P\sin\theta$ مفروض است. اولاً تحقیق کنید که منحنیات (θ = ثابت) یک رشته از خطوط انحنای (S) را تشکیل می دهند. نوع این منحنیات را معلوم نموده مکان هندسی مراکز انحنای آنها را پیدا کنید. ثانیاً معادله فاصلهٔ رشتهٔ دیگر خطوط انحنای (S) را معین نموده تحقیق کنید که این معادله دارای جوابهای خاص $P=h\cos\theta$ و $P=\frac{l}{\cos\theta}$ می باشد و از آنها جامع کلی (Integrale générale) آنرا معلوم کرده نوع رشتهٔ دوم خطوط انحنای (S) را معین کنید و مکان هندسی مراکز انحنای آنرا پیدا کنید.

(پاریس- امتحان کتبی)

مصاحب — جبر و مقابله

(بقیه از شمارهٔ قبل)

۱۰- **معادلهٔ خط مستقیم** - برای اینکه مثال دیگری از حالتی که بین طول و عرض نقاط یک منحنی رابطه موجود است بدست دهیم بتعیین معادلهٔ خط مستقیمی مانند AB مشغول میشویم: برای این مقصود دو محور قائم اختیاری مانند ox و oy مرور داده محل تلاقی آنها را با مستقیم مفروض به A و B می نامیم و فرض می کنیم $M(x,y)$ نقطهٔ غیر مشخصی از مستقیم AB و α زاویهٔ آن با جهت مثبت محور طول باشد. در این شکل معلوم است



که $y = MQ = MP + PQ$ از مثلث MBP نتیجه میشود $MP = OQ\,tg\alpha = x\,tg\alpha$ و اگر $PQ = OB$ را که عرض محل تلاقی مستقیم با محور عرض است به b بنامیم چنین خواهیم داشت $y = x\,tg\alpha + b$ (۱) و این رابطه معادلهٔ مستقیم مفروض است.

$tg\alpha$ یعنی ظل زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول را ضریب زاویه خط خوانند و اگر برای سهولت آن را با m بنامیم معادلهٔ (۱) چنین نوشته میشود: $y = mx + b$ (۲)

فرع- اگر OA را با a بنامیم معادلهٔ مستقیم AB را می توان بصورت نوشت: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (۳)

حالات خصوصی: اگر مستقیمی از مبدء عبور کند $b = 0$ و معادلهٔ آن چنین میشود:

$$y = x\,tg\alpha$$

۲- بر حسب آنکه مستقیم مفروض موازی محور طول یا محور عرض کم b یا a بینهایت بزرگ شده معادلهٔ آن بصورت $y = b$ یا $x = a$ بیرون می آید.

نتیجه- از آنچه گفته شد معلوم می شود که معادلهٔ کلی هر خط مستقیم معادله ایست از درجهٔ اول

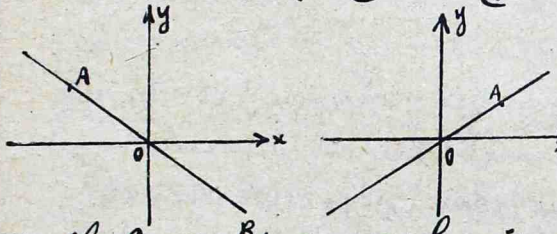
۱۱- **قضیهٔ عکس**- نمایش معادلهٔ درجهٔ اول خطی است مستقیم.

برهان- معادلهٔ کلی درجهٔ اول را می توان بصورت $Ay = Bx + C$ نوشت. اکنون سه حالت تشخیص میدهیم:

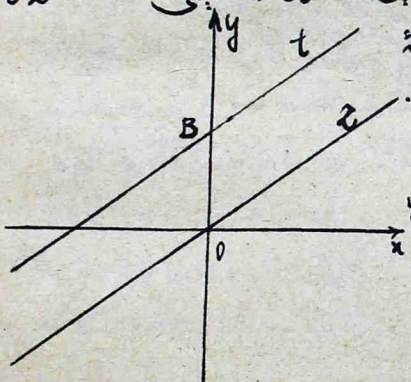
۱- یکی از ضرایب A و B صفر است. مثلاً اگر $B = 0$ باشد معادلهٔ فوق چنین می شود $y = \frac{C}{A}$ و این تساوی مکان هندسی نقاطی را مینماید که آن محور طول بفاصلهٔ $\frac{C}{A}$ واقع باشند و چنانکه می دانیم این مکان خطی است موازی محور طول.

۲- $C = 0$ - اگر $\frac{B}{A}$ را با m بنامیم معادلهٔ فوق چنین می شود: $y = mx$ نمایش این تابع از مبدء مرور می کند. اینک وضع نقطهٔ دیگری از آن مثلاً وضع نقطهٔ $A(1, m)$

را معیّن کرده آن را مبدء وصل می کنیم. واضح است که مختصات جمیع نقاط خطّ OA در معادلهٔ $y=mx$ صدق می کند و بعلاوه هیچ نقطهٔ در خارج OA یافت نمیشود که در این رابطه صدق نماید بالنتیجه خط OA خود نمایش معادلهٔ $y=mx$ است.



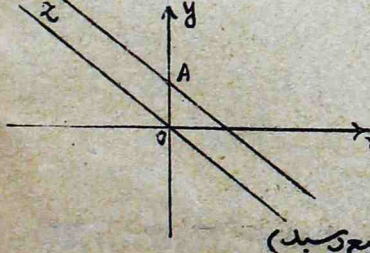
۳- اگر هیچیک از مقادیر A و B و C صفر نباشد معادلهٔ مفروض را می توان بصورت $y=mx+b$ $(m=\frac{B}{A}, b=\frac{C}{A})$ بیرون آورد. برای رسم نمایش این تابع مفید متر نمایش $y=mx$ را که مستقیمی است مانند Oz رسم کرده OB را معادل b جدا نموده از نقطهٔ B خطّ Bt را بموازات Oz مرور می دهیم. بسهولت می توان برهن کرد که مختصات تمام نقاط خط Bt در رابطهٔ $y=mx+b$ صدق می کند و هیچیک از نقاط خارج آن در این رابطه صدق نمینماید. پس خطّ Bt نمایش معادلهٔ $y=mx+b$ است.



۴- از استدلال فوق قاعدهٔ رسم نمایش یک تابع درجهٔ اوّل بین معلوم می شود:

مثال-۱- مطلوبست نمایش تابع $y=\frac{2}{3}x$ - نمایش این تابع خطّی است مار بمبدء. پس تعیین نقطهٔ دیگری از آن کفایت می کند. برای این مقصود به x مقداری غیر از صفر مثلاً ۱ نسبت میدهیم حاصل میشود $y=\frac{2}{3}$ خطّ واصل بین نقطهٔ $(1, \frac{2}{3})$ و مبدء نمایش تابع فوق است.

مثال-۲- نمایش تابع $y=x+1$ - ابتدا این معادله را بصورت $y=-x+1$ نوشته سپس نمایش $y=-x$ را رسم می کنیم (خط Oz)، خطّ At که از نقطهٔ $A(0,1)$ بموازات Oz رسم شده نمایش تابع $y+x=1$ است



(در مطبعهٔ علمی بطبع رسید)

دراین شماره

بواسطهٔ کثرت مطالب مجبور بحذف پاورقی گردیدیم .

خاطر محترمین و محترماتی

را که شماره های متوالی مجلهٔ ریاضیات برای آنها ارسال شده مستحضر میسازیم که خوبست در صورتیکه مایل باشتراك مجله نیستند ازقبول آن خود داری نمایند . ضمناً اطلاع میدهیم که آقایان و خانمهائی که سه شمارهٔ اول مجله را قبول نمایند جزو مشترکین رسمی محسوب خواهند بود .

مسائل حساب

۵ – دور ژیمان که بترتیب ۱۷۰ و ۱۵۰ متر طول دارند در جهت مخالف یکدیگر حرکت میکنند . رژیمان اول در ٤ ساعت ۱۷٦ متر ورژیمان دوم در ۳٫۵ ساعت همان مسافت را طی میکند حال میخواهیم بدانیم چه مدت پس از ملاقات اولین نفرات دورژیمان دو نفر آخر آنها یك کیلومتر از یکدیگر فاصله خواهند داشت.

٦ – اگر از حوض پری ابتداء ۰۷ گنجایش آنرا خالی کرده بعد ۳۰۱ من برداریم نصف میشود مطلوبست گنجایش این حوض

۷ – عدد سه رقمی چنان بیابید که رقم مآتش $\frac{2}{7}$ رقم آحاد و رقم عشراتش ثلث مجموع دورقم دیگر باشد

۸ – دوعدد صحیح چنان بیابید که مجموعشان ۱۸ و حاصل ضربشان ٤۵ باشد .

۹ – بدون استخراج کعب عددی بیابید که چون سه مرتبه در خودش ضرب شود ۵۹۲۷۰٤ حاصل گردد .



عنوان آقای میرزا المهدی کرام
آدرس شیراز - معارف

بخوانندگان محترم خود دقت در مقالهٔ مهم تاریخی دانشمند معظم آقای اقبال را که در شمارهٔ چهارم درج خواهد شد توصیه می کنیم.

(هتل مقدم)

«(چهار راه حسن آباد)»

از منظره باشکوه این هتل و ارکستر عالی آن که جدیداً با بهترین طرز برای پذیرائی واردین تشکیل شده است استفاده فرمائید.

(میزهای بیلیارد برای بازی نیز حاضر است)

فامیلهای محترم می توانند در این هتل از مهمانهای گرام خود با بهترین ترتیب پذیرائی نمایند.

بعد از یك هفته

همه شب دانسهای اروپائی را از ساعت ۹ ببعد مشاهده فرمائید.

نمرهٔ اعلان ۳

مطبعه « فرهومند » طهران