سال اول شمارهٔ پنجم — واحد — اول دی ۱۳۰۹

مجلهٔ

[ریاضیات]

عالی و مقدماتی

مدیر مسئول و مؤسس: مصاحب

جای اداره: موقتاً ادارهٔ جریدهٔ قانون
طهران خیابان باب همایون

اول و پانزدهم هر ماه منتشر میشود

وجه اشتراك در ایران

سالیانه: از ۴۰ تا ۲۵ قران (برای محصلین ۱۰ قران)

ششماهه: فقط برای محصلین ۶ قران است

تك شماره: یك ریال

1er Année, 5e No. — JOURNAL DE — 1er Déi. 1309

MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES & SUPÉRIEURES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque Mois.

Dircteur : MOSSAHEB

Administra.; Téhéran, Avenue Babé-Homayoun

ABONNEMENT ANNUEL

PERSE : DE 40 A 25 KRANS — ETRANGER 60 FRANCS.

مطبعه بوستای

(بقیه از شمارهٔ قبل)

حرکت (متمم حساب مقدماتی)

(مسائل راجع بساعت)

مسئله ۱ ـ درچه زمانی بین ۳ و ٤ بعداز ظهر دو عقربهٔ ساعت بر یکدیگر منطبق می‌شوند؟

راه حل ـ مقدمتاً گوئیم دو عقربهٔ ساعت قوسی از محیط دایرهٔ صفحهٔ آن جدا می‌کنند که آنرا **فاصله قوسی** دو عقربه خوانیم اینك اگر طول یکی از تقسیمات کوچك صفحهٔ ساعت واحد طول فرض شود درساعت ۳ فاصله قوسی دو عقربه ۱۵ واحدطول خواهد بود . از طرف دیگر اگر واحد زمان دقیقه فرض شود سرعت عقربهٔ دقیقه شمار یك واحددر دقیقه وسرعت عقربهٔ ساعت شمار ۱۲/۱ واحد در دقیقه خواهد بود و با این ملاحظات مسئلهٔفوق به این مسئله تبدیل می‌شود :

سرعت دو متحرك بترتیب ۱ و ۱۲/۱ واحد طول‌در دقیقه است و فاصلهٔ آنها ۱۵ واحد طول پس‌از چه‌مدت متحرك اول بمتحرك ثانی میرسد (مقایسه کنید با مسئلهٔ صفحهٔ ۳شمارهٔ ۲)

مسئله ۲ ـ درچه ساعتی بین ٤ و ٥ بعداز ظهر زاویهٔ دو عقربهٔ ساعت قائمه می‌شود ؟

حل ـ اولاً معلومست که در مدت یکساعت دو مرتبه زاویهٔ عقربه‌ها مساوی زاویهٔ مفروضی (مثلا قائمه) میگردد حال با قرار داد های سابق گوئیم برای انکه زاویهٔ دو عقربه قائمه شود باید فاصلهٔ قوسی انها ۱۵ واحدطول باشدوچون درساعت ٤ فاصله قوسی دو عقربه ۲۰ واحد است باید معین گردد در چه زمانی فاصلهٔ آنها ۱۵ یا ۳۵ = ۱۵ + ۲۰ واحد طول می‌گردد وبا ملاحظات سابق مسئله فوق به‌این مسئله تبدیل می‌شود. سرعت دومتحرك بترتیب ۱ و ۱۲/۱ واحد در دقیقه است و فاصلهٔ انها ۲۰ واحد . پس از چه زمانی فاصلهٔآنها ۱۵ یا ۳۵ واحد طول می‌شود ؟ (خاتمه)

شمارهٔ (۵)

کتابخانه ملی
ایران
واحد مبادله و اهداء

مجلهٔ

ریاضیات

عالی و مقدماتی

اول ذیماه ۱۳۰۹ شمسی

بقلم دانشمند معظم آقای میرزا عباس خان اقبال

ابوریحان بیرونی و حساب دانه‌های گندم خانه‌های شطرنج

در کتب تواریخ اسلامی چنین نقل کرده‌اند که یکی از پادشاهان محلی هند بنام شرام مردی سفاک و ظالم پیشه بود و در اندک مدتی در اثر سوء سیاست و بی‌خردی مملکتش رو بخرابی و ویرانی شد. برهمنان آن دیار برای رهائی از این مصیبت بفکر چاره افتادند. عاقبت یکی از ایشان که سسا نام داشت بازی شطرنج را اختراع کرد و بحضور شاه برد و بدو فهماند که شاه شطرنج با آنکه مهمترین سوارانش نطع بازیت بدستیاری مهره‌های دیگر نمیتواند مهره‌ای بحرکتی مبادرت کند و اگر معاونت سایر مهره‌ها نباشد هر حرکتی که از او ناشی شود مدبوح و منجر بهلاکت است. پادشاه را این بازی فوق العاده مسرور کرد و بر همن وعده داد که رفتار خود را عوض کند و بپاداش این اختراع شگرف هرچه بخواهد باو ببخشد. برهمن گیری خواست پادشاه را درس دیگری در باب احتیاط و میانه روی بیاموزد گفت تنها پاداشی که متوقعم این است که پادشاه امر فرماید که گماشتگان در خانهٔ اول شطرنج

دانه گندم بگذارند و در خانهٔ دوم دو برابر گندم خانهٔ اول و در خانهٔ سوم دو برابر گندم خانهٔ دوم و بهمین ترتیب تا خانهٔ آخر عدهٔ گندم های هر خانه را مضاعف خانهٔ قبل از آن بنمایند و مجموع آن گندم ها را بسمن بدهند پادشاه ابتدا بحقارت در این درخواست بهمن خندید ولی پس از آنکه بعظمت کمیت حاصل کند مهابی برد دید که عهدهٔ انجام خواهش برهمن برنمی آید .

از لحاظ تاریخی درست معلوم نیست که این قصه حقیقتی داشته یا نه بلکه قریب بیقین است که بعضی از حکما آنرا برای گرفتن درس عبرت وضع و جعل کرده اند ولی از وقتی که قصهٔ مزبور شایع شده علمای ریاضی در صدد پیدا کردن مجموع گندم خانه های شطرنج بطرز مذکور در فوق برآمده و در آن باب زحماتی کشیده اند . حالیه که جداول لگاریتم و دستورهای جبر مدون در دست است حساب این گونه مسائل آسان و کلا محصل این کلاسهای متوسطه است ولی سابقا که علوم ریاضی ترقیات عصر ما را نداشته و حتی نوشتن معادلات با حروف و علامات نیز معمول نبوده است پیدا کردن جواب مسائل نظیر مسئلهٔ فوق سخت مشکل بوده است .

مسئلهٔ فوق چنانکه اشاره شد مبنی بر حساب حاصل جمع یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت (۲) و این ایام یافتن جواب آن در چند دقیقه ممکن می شود .

ابو ریحان محمد بن احمد بیرونی (۳۶۲ - ۴۴۰ ه) از اجلهٔ حکما و علمای ریاضی و مورخین و ادبای ایران که از معتقدین بحرکت زمین بوده و بسیاری از مشکلات ریاضی و هیئت را حل کرده و از بزرگترین مفاخر حقیقی نژاد ایرانی است در باب مسئلهٔ فوق نیز فکر کرده و در قضیهٔ ذیل دایافته و بر طبق آنها مجموع جمیع قوای حساب کرده است .

قضیهٔ ۱ — در صورتی که عدهٔ گندم خانه ابرابد انیم شمارهٔ گندم خانه ایکه فاصلهٔ آن تا این خانه برابر باشد با فاصلهٔ این خانه تا خانهٔ اول برابر است با مجذور عدهٔ گندم خانهٔ معلوم مثلا عدهٔ گندم موجود در خانهٔ ۵ برابر است با ۱۶ چون فاصلهٔ خانهٔ ۵ تا خانهٔ اول ۴ خانه است عدهٔ گندم خانهٔ ششم که فاصلهٔ آن نیز تا خانهٔ ۵ بیشتر از ۴ خانه نیست برابر

خواهد شد با $۱^{۲}$ یعنی ۱ و شمارهٔ گندم خانهٔ ۱۷ برابر است با $۲۵^{۲}$ ....

قضیهٔ ۲ــ عدهٔ گندم هر خانه منهای واحد برابر است با مجموع گندم خانهای قبل از آن مثلا شمارهٔ گندم خانهٔ ۶ برابر است با ۳۲ مجموع گندم پنج خانه قبل از آن برابر است با ۳۱ دانه باین ترتیب :

$$۱-۳۲ = ۱+۲+۴+۸+۱۶$$

بعد از ذکر این دو قضیه ابو ریحان میگوید اگر فرض کنیم که شطرنج بجای ۶۴ خانه ۶۵ خانه داشته باشد بر طبق قضیهٔ ۲ عدهٔ گندم خانهٔ ۶۵ برابر می شود با مجموع گندمهای خانهای ماقبل آن منهای واحد و این مجموع گندم ۶۴ خانهٔ شطرنج است پس ابتدا باید شمارهٔ گندم موجود در خانهٔ ۶۵ را یافت .

بموجب قضیهٔ ۱ چون خانهٔ ۳۳ واسطه بین خانهٔ ۶۵ و خانهٔ اول یعنی از هر دو یک فاصله است پس مربع گندمهای موجود در آن خانه برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۶۵ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ (واسطهٔ بین خانهٔ ۳۳ و خانهٔ اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۹ (واسطه بین دو خانهٔ ۱۷ و اول) برابر با گندم خانهٔ ۱۷ و مربع شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ (واسطه بین دو خانهٔ ۹ و اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۹ و مجذور عدهٔ گندم خانهٔ ۳ (واسطه بین دو خانهٔ ۵ و اول) برابر با شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۲ (واسطه بین خانهای ۳ و اول) یعنی چهار مساویست با عدهٔ گندم خانهٔ ۳ و مجذور ۴ یعنی ۱۶ شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ است و مجذور ۱۶ یعنی ۲۵۶ مساویست با عدهٔ گندم خانهٔ ۹ و مجذور ۲۵۶ یعنی ۶۵۵۳۶ برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ و مجذور عدد اخیر یعنی ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۶ عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ است و اگر این عدد آخری را در خود ضرب کنیم حاصل یعنی :

۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۶

عدهٔ گندمهای خانهٔ ۶۵ است و چون این عدد بموجب قضیهٔ ۲ منهای واحد برابر است با مجموع گندمهائی که در کل خانه‌های ماقبل خانهٔ ۶۵ یعنی در ۶۴ شطرنج گذاشته شده پس مجموع گندمهای خانه‌های ۶۴ گانهٔ شطرنج بموجب حساب فاضل استاد ابو

ریحان بیرونی عدد بیست و نهمی ذیل است :

۱۸،۴۴۶،۷۴۴،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۵

البته با بکار بردن دستور

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

و داشتن جدول لگاریتم عمل کردن بر طبق قضایای فوق و اجرای چند بار عمل ضرب امر وقت دیگر لازم نیست ولی در عهدی که این نوع دستورها و جداول معمول نبوده پیدا کردن دو قضیهٔ مذکور و یافتن حاصل کند مها بوجه سادهٔ مرقوم در فوق یکی از شاهکارها محسوب می شده و نمایندهٔ هوش و درجهٔ استادی ابوریحان بیرونی است.

زیر زمین علی بابا !

شربت فروش کوری موسوم بعلی بابا در زیر زمین منزل خود نه جعبه بطرز بقی کرده شکل دیده می شود که دارای جعبهٔ وسط و برای شیشه‌های خالی معین کرده و در هر یک از چهار جعبهٔ گوشه‌ها سر شیشه و در چهار جعبهٔ دیگر ده شیشهٔ شربت نهاده بود.

۳	۱۰	۳
۱۰		۱۰
۳	۱۰	۳

نوکر علی بابا، روزی که خانه را خالی یافت چهار شیشهٔ شربت از جعبهٔ مذکور دزدید. یکی از همسایگان علی بابا که موضوع را ملتفت شده بود وی را آگاه ساخت. علی بابا بزیر زمین رفته کشف کرده مشاهده نمود که شیشه‌های اطراف تغییر نکرده بدین معنی که در هر طرف همان ۱۰ شیشهٔ شربت موجود است. لهذا خیال کرد نوکرش طمعت زده اند. نوکر از سادگی ارباب و این اتفاق استفاده کرده سه دفعهٔ دیگر دزدی خود را تکرار نمود و هر دفعه علی بابا بجعبه‌ها سر کشی کرده موافق حساب خود نقصی در جعبه‌ها ندید حال بگوئید نوکر علی بابا چه جملهٔ بکار برده و چگونه مکان شیشه‌ها را تغییر داده است

صلیب مربع پنج مربع

آقای «حسین بینا» محصل کلاس اول مدرسهٔ صنعتی جواب صحیح دو مسئلهٔ فوق را بادارهٔ ارسال داشته اند

تصحیحات لازمه

شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۵ سطر ۶ (از پائین) مرکز دایره غلط و مراکز دوایر صحیح است

شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۴ سطر ۹ « کلوبند غلط و صلیب صحیح است

شمارهٔ ۳	۰	۱۶	۴	(از بالا)	۱و۲و۳	و	۱و۲و۳
«	«	«	۵		۳و۲و۱	«	۳و۲و۱

چه وقت دنیا ختم میشود؟!

۱- برج هانوی

"Satan d'Hanoi"

اسم فوق متعلق بیکی از بازیهای جالب توجهی است که قبل از اینکه آخر دنیا را از نظر خوانندگان محترم بگذرانیم بشرح آن میپردازیم:

اسباب بازی عبارتست از سه تخته چوب که بر وسط هریک از آنها میله عمودی کوبیده شده و بیک عده صفحات مستدیر کوچک و وسط آنها سوراخی که قطرش قدری از قطر میله ها بیشتر است نصب شده. ابتدا یک عده از این صفحات را بقسمی که همیشه صفحهٔ کوچکتر روی صفحهٔ بزرگتر باشد بر یکی از میله ها داخل میکنیم و میخواهیم بعد دو میلهٔ دیگر با مراعات این قانون که: «هیچگاه نباید صفحهٔ بزرگتر بر صفحهٔ کوچکتر قرار گیرد.» صفحات را از میلهٔ بمیلهٔ دیگر نقل کنیم.

برای مثال فرض میکنیم سه صفحه بر میلهٔ (۱) واقع باشند برای نقل آنها بمیلهٔ (۳) حرکات ذیل را انجام میدهیم:

۱- صفحهٔ کوچکتر را بر (۳) قرار میدهیم

۲- صفحهٔ وسطی را بر (۲) داخل میکنیم

۳- صفحهٔ کوچکتر را بر (۲) میفرستیم

۴- صفحهٔ بزرگتر را بر (۳) قرار میدهیم

۵- صفحهٔ کوچکتر را بر (۱) داخل میکنیم

۶- صفحهٔ وسطی را بر (۳) قرار میدهیم.

۷- صفحهٔ کوچکتر را بر (۳) داخل میکنیم.

چنانکه ملاحظه می شود برای حل مسئله باید صفحه ۷ حرکت لازم است. اینجا بالطبیعه مسئلهٔ ذیل طرح میشود:

مسئله - مطلوبست عدهٔ حرکات لازم برای نقل برج n طبقه. برای حل این مسئله مقدمتاً قضیهٔ ذیل را مورد گفتگو قرار میدهیم:

قضیه - اگر a_n عدهٔ حرکات لازم برای نقل برج n طبقه باشد عدهٔ حرکات لازم برای نقل برج $n+1$ طبقه مساویست با $2a_n+1$

برهان - برای نقل برج $n+1$ طبقه از میلهٔ (۱) بمیلهٔ (۳) ابتدا n طبقهٔ فوقانی برج را بر میلهٔ (۲) نقل میکنیم (a_n حرکت) سپس طبقهٔ $n+1$ ام را که بر میلهٔ (۱) تنها بر میلهٔ (۳) منتقل مینمائیم (یک حرکت) بالاخره برج n طبقه‌ئی را که بر میلهٔ (۲) واقع است بر

میلهٔ (۳) نقل به کنیم (v_1 حرکت) عدد حرکاتی که انجام گرفته مساویست با:

$$v_{m+1} = 2v_m + 1 \quad v_{m+1} = 2v_m + 1$$

پس از ابراد این مقدمه گوئیم از رابطهٔ

$$v_{m+1} = 2v_m + 1$$ چنین نتیجه می شود:

$$v_m = 2v_{m-1} + 1 \quad v_{m-1} = 2v_{m-2} + 1 \quad v$$

$$v_{m-2} = 2v_{m-3} + 1 \quad v \quad \dots\dots \quad v_2 = 2v_1 + 1$$

$v_1 = 2v_0 + 1$ یا:

$$v_m = 2v_{m-1} + 1$$

$$2v_{m-1} = 2^2 v_{m-2} + 2$$

$$2^2 v_{m-2} = 2^3 v_{m-3} + 2^2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$2^{m-3} v_3 = 2^{m-2} v_2 + 2^{m-3}$$

$$2^{m-2} v_2 = 2^{m-1} v_1 + 2^{m-2}$$

چون این تساوی ها را جمع نموده مختصر کنیم بنجنین حاصل آید:

$$v_m = 2^{m-1} v_1 + 2^{m-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$

اما $v_1 = 1$ پس:

$$v_m = 2^m - 1$$

مثلا برای برج دو طبقه $v_2 = 2^2 - 1 = 3$

و برای برج سه طبقه $v_3 = 2^3 - 1 = 7$ هکذا

۲- آخر دنیا!

در معبد بنارس در زیر گنبدی که مرکز عالم میدانند صفحهٔ مفرغی موجود است که بر آن سه میلهٔ الماس بطول یک ذراع و قطر نیم سانتیمتر نصب شده. وقتی خداوند عالم را خلق کرد ۶۴ فرص از طلای خالص باندازه های مختلف بر یکی از این میله ها مطابق قانون «برج هانوئی» قرار داده هم عابد بن این معبد اسرار آمیز بر این مصر وقف که این برج را بامر اعات قانون مذکور دور «بازی برج هانوئی» بر میلهٔ دیگر بی نقل نمایند. وقتی این امر انجام یابد **برج و پیروان برهما بزمین ریخته و دنیا ختم خواهد شد!** موافق حساب فوق الذکر برای نقل این برج ۶۴ طبقه عدد حرکات لازم عبارتست از:

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

و اگر زمان لازم برای هر حرکت را یک ثانیه فرض کنیم زمانی که برای نقل برج ۶۴ طبقه لازمست یعنی عمر دنیا بیش از ۵ میلیارد قرن یعنی ۵۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰ سال خواهد بود!

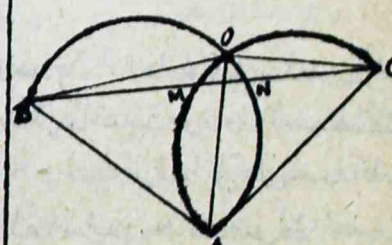
مسئله

قطعهٔ مقوائی داریم که یک ضلعش ۶ و ضلع دیگرش ۹ سانتی متر است میخواهیم آنرا بدو قطعه تقسیم کنیم بطوری که اگر از دو راه لوله هم بگذاریم مساحتی اگر مسئله را حل کرده بدار فرستادن آن مضایقه نخواهید

حیل ریاضی

قضیه ۳ - اولاً مجموع زوایای مثلث از دو قائمه زیادتر است ثانیاً در خط عمود بر یک خط متقاطع عند ثالثاً بر دو نقطه مفروض بیش از یک مستقیم مرور نمیکند.

برهان - برای اثبات قضیه نخست مانند BAC رسم نموده بقطر هر یک از اضلاع آن نیم دایره رسم کرده خط



BC را رسم می کنیم و فرض می کنیم M و N نقاط تقاطع آن با دو نیم دایره مرسوم باشند اولاً چون هر یک از زوایای AMC و ANB در نیم دایره محاطند مساوی یک قائمه خواهند بود و بنابراین مجموع زوایای مثلث AMN از دو قائمه متجاوز است. ثانیاً دو خط AM و AN که بر BC عمود ند بر A تقاطع نموده اند. ثالثاً هر یک از زوایای BOA و COA قائمه اند و بنابراین خط BOC مستقیم است و چون BC نیز مستقیم میباشد B و C دو مستقیم مرور کرده. فثبت المطلوب.

حکایات و اقوال

«عشق بحساب»

بسیاری از دانشمندان عشق مفرطی بحساب داشته اند. آمپر Ampère دانشمند شهیر و عالم معروف فرانسوی و علامه که باین قسمت داشته مشهور است چنانکه گویند قبل از اینکه ارقام را شناخته و قادر بنوشتن آنها باشد با سنگ ریزه و لوبیا حسابهای بس طولانی مینمود.

و نیز گویند در کودکی کسالتی عارض وی شده بود و برای این که فکرش راحت باشد مادرش او را از لوبیاهای عزیزش جدا ساخته بود. آمپر لقمه نانی را که پس از سرودن کر سنگی و پرهیز بوی داده بودند خورده مشغول محاسبات خود گردید.!!

این عشق منحصر بآمپر نیست مارا گو Arago عالم فرانسوی می نویسد: روزی یکی از علما در جلسه رسمی آکادمی پاریس شروع بضرب دو عدد بزرگ کسر بدون هیچ مقصودی نوشته بود نمود بعد از جلسه که من تعجب خود را راجع بدین مطلب بوی اظهار داشتم جواب داد: «نمیدانم وقتی صحت این ضرب را بوسیله تقسیم امتحان کردم چقدر لذت بردم»

عالم دوست

ترجمه و اقتباس از کتب
و مجلات علمی
و تاریخی
خارجه

۴ - مسلمین نیز در حل معادلهٔ درجهٔ سوم زحماتی کشیده اند و لی بدبختانه نتایج عمدهٔ بدست نیاورده اند و چنانکه در ابتدا این مقاله ذکر شد یکی از تحقیقات آنها بحل معادلات دو جمله درجهٔ سوم و معادلاتی که قابل تحویل بدانها باشند موقوف مانده بود و احتمال میرود اولین دفعه ریاضیدان عالیمقدار **غیاث الدین جمشید کاشانی** که معاصر الغ بیک بوده راه حل اینگونه معادلات را یافته باشد چنانکه در کتاب **مفتاح الحساب** خود می فرماید :

«.... اذ انتهی العمل الی معادلة جنس واحد جنسا واحدا ولو کانا متباعدین فیکون مسائل هذا النوع غیر متناهیة ولم یذکرها المتقدمون وانا استنبطت قاعدة یخرج منها جمیعها وهی ان نقسم عدد ما کان عدد منزلة اقل علی عدد ما کان عدد منزلة اکثر فما خرج نحفظه ونأخذ التفاضل بین عددی منزلتی الجنسین المتعادلین ونأخذ الضلع الاول من المحفوظ علی انه من مضلع یکون عدد منزلته بقدر التفاضل بین عددی منزلتی الجنسین المتعادلین فهو الشیء المجهول. مثاله اربعة وستون ما لا یعادل اربعة کعاب کعب فسمنا عدد الاموال وهو اربعة وستون علی عدد کعاب الکعب وهو اربعة خرجت من القسمة ستة عشر اخذنا ضلع اول علی انه مال مال لان التفاضل بین عدد منزلة المال وعدد منزلة کعب الکعب اربعة وهی عدد منزلة مال المال فکان اثنان وهما الشیء المجهول. مثال آخر .....»

مقصود از مال حاصل ضرب مجهول است در نفس خودش که در حساب معمولی ما آنرا نوشته می شود و کعب کعب x^4 است و معادلهٔ مسئلهٔ فوق اینست : $64x^4=4x^6$

(دنباله دارد)

حل مسائل شمارهٔ ۲

(مسائل این قسمت تا نمرهٔ ۱۰۱ در حدود دبیرستانهای دورهٔ اول متوسطه است.)

۹۲ـ مسئله ـ سه نفر هر یک مبلغی پول دارند. هر کدام بترتیب پول دو نفر دیگر را مضاعف کنند بنابر آنکه در آخر عمل هر یک ۸ فران داشته باشند ابتدا هر کدام چقدر داشته اند؟

حل ـ از فرض مسئله معلوم است که قبل از اینکه سومی پول رفقای خود را مضاعف کند (یعنی بعد از اینکه دومی پول اولی و سومی را مضاعف کرده) اولی و دومی هر یک چهار فران و سومی ۱۶ فران داشته پس قبل از اینکه دومی مضاعف نماید (یعنی بعد از آنکه اولی مضاعف کرده) اولی ۲ و سومی ۸ و بنابراین دومی ۱۴ فران داشته. بالنتیجه در بادی امر یعنی قبل از اینکه اولی مضاعف نماید پول دومی ۷ فران و پول سومی ۴ فران و بنابراین پول اولی ۱۳ فران بوده.

۹۳ـ مسئله ـ عبارت $(x-z)^3+(z-y)^3+(y-x)^3$ را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید.

حل ـ برای حل این مسئله قبلا لازم است قضیهٔ ذیل که بسیار مورد استفاده است را که هم بسیار ساده است ثابت نماییم.

قضیه ـ هرگاه مجموع سه عدد جبری a و b و c صفر باشد مجموع مکعبات آنها مساوی است با سه برابر حاصلضرب آنها.

زیرا: $(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ امّا از شرط $a+b+c=0$ نتیجه میشود $a+b=-c$ و $b+c=-a$ و $c+a=-b$ حال اگر این مقادیر را در اتحاد فوق قرار دهیم چنین نتیجه میشود: $a^3+b^3+c^3=3abc$. پس از ابراز این مقدمه گوئیم چون مجموع سه مقدار $y-x$ و $z-y$ و $x-z$ صفر است مجموع مکعبات آنها مساوی است با سه برابر حاصلضرب آنها یعنی: $(x-z)^3+(z-y)^3+(y-x)^3 \equiv 3(x-z)(z-y)(y-x)$

طریق دیگر ـ عبارت مفروض را پس از بسط پرانتزها و مرتب کردن بحسب توانهای یکی از حروف مثلا x بنوان مرتب چنین نوشت:

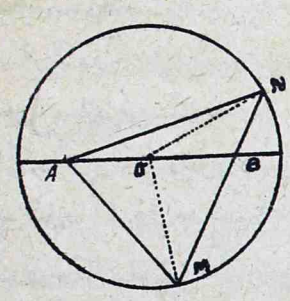
$$3\left[x^2(z-y)+x(y^2-z^2)-(y-z)yz\right]$$
$$=3(z-y)\left[x^2-x(z+y)+yz\right]$$
$$=3(z-y)\left[x(x-z)-y(x-z)\right]=3(z-y)(x-z)(y-x)$$

سیّد کاظم میرجهاء ـ محصل کلاس چهارم علمی مدرسهٔ متوسطهٔ بیرجند.

۹۴ـ مسئله ـ بر قطری از دایرهٔ مفروض O دو نقطهٔ A و B را متساوی البعد از مرکز اختیار کرده بر یکی از آنها مثلا B و بر غیر مشخص مانند BMN که محیط دایره را در M و N قطع می کند مرود

مسئله. ثابت کنید که مجموع مربعات اضلاع مثلث AMN مقدار ثابت.

حل- چون نقاط M و N را بمرکز دایره وصل کنیم از دو مثلث ANB و AMB این دو تساوی نتیجه می‌شود:



$$\overline{AN}^2 + \overline{NB}^2 = 2\overline{NO}^2 + 2\overline{AO}^2$$

و

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2\overline{AO}^2$$

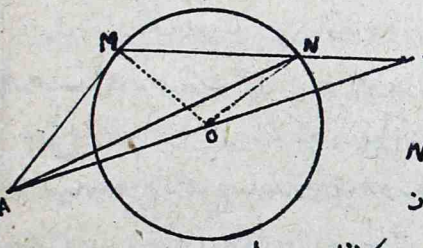
از جمع این تساوی این قسم نتیجه می‌شود:

$$\overline{AN}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{MB}^2 = 4\overline{NO}^2 + 4\overline{AO}^2$$

با پس ان افزودن $2.NB.MB$ بطرفین:

$$\overline{AN}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{NM}^2 =$$

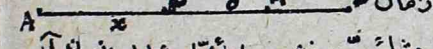
$$4(\overline{NO}^2 + \overline{AO}^2) + 2NB.MB.$$



موافق یکی از قضایای هندسه $NB.MB$ مقدار ثابت پس طرف دوم تساوی فوق ان وضع قاطع NBM مستقل میباشد. (سید کاظم بهاء)

تبصره- برای تعیین مقدار طرف اول بحسب a و R $(AO=a \quad , \quad NO=R)$ کافی است بجای $NB.MB$ عبارت معمولی قوت نقطهٔ B را نسبت بدایرهٔ O قرار دهیم باین قسم معلوم میشود که بحسب آنکه A و B در داخل یا خارج دایره واقع باشند $\overline{AN}^2 + \overline{MA}^2 + \overline{NM}^2$ مساوی $2(a^2+3R^2)$ یا $2(R^2+3a^2)$ است.

۹۵- مسئله- اتوموبیل- فرض کنیم اتوموبیل دونفر جوانتر را در نقطهٔ P ملاقات کند و $AP=x$ و $PM=y$ اگر زمانی که اتوموبیل از A به M رفته و از آنجا به P مراجعت نموده مساوی با زمانی که دونفر جوانتر مسافت AP را پیموده اند و چون زمان حرکت مساوی با خارج قسمت مسافت مطویه بسرعت (شمارهٔ دوم صفحه ۳) معادلهٔ اول مسئله باین صورت در می‌آید



$$\frac{x}{6} = \frac{x+y}{36} + \frac{y}{36} = \frac{x+2y}{36}$$

یا $x=2y$ و. از طرف دیگر مدتی که اتوموبیل از M به P رفته و از آنجا به B مراجعت کرده مساوی با مدتی که دونفر مسافت MB را پیموده اند یعنی:

$$\frac{y}{36} + \frac{36-x}{36} = \frac{36-(x+y)}{3}$$

یا $x+5y=36$. از حل این دستگاه نتیجه میشود: $x=\frac{288}{33}$ و $y=\frac{1440}{33}$

مسائل امتحانات دورهٔ اوّل متوسطه

نباید فراموش کرد که مسائلی که سابقاً در امتحان سال دوّم متوسطه داده شده مطابق پروگرام فعلی سال سوم و مسائل سال سوم سابق مطابق پروگرام فعلی سال چهارم متوسطه است.

۹۶- **مسئله** - دو معادلهٔ دو مجهولی ذیل را حل کنید: $\frac{2y-5x}{3}+\frac{3}{2}=\frac{5x-2y}{3}$ و $2x-\frac{y-x}{2}$

و $\frac{5x-2y}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-x+y}{3}-\frac{-x+y-2}{\frac{1}{3}}$ (سال سوم متوسطهٔ مدارس اناث سنهٔ ۱۳۰۷)

حل - معادلهٔ اوّل دستگاه پس از حذف مخارج چنین میشود: $(5x-2y)+2=9+(x-y)-3x-12$

یا $y=9-5x$ معادلهٔ دوّم را اقلاً چنین مینویسیم: $\frac{y-x-6}{2}-\frac{1}{2}=\frac{y+x}{2}-\frac{1-x}{2}$

طرف اوّل مساویست با: $\frac{5x-2y}{3}=y-3$ طرف دوّم مساویست با: $\frac{x-y+x-7+y+x}{3}$

پس معادلهٔ دوّم این طور می شود: $\frac{5x-2y}{3}=-3$ یا $y=9-5x$ چنانکه دیده میشود معادلات دستگاه عین یکدیگر می باشند. بنابراین دستگاه بیحد است.

۹۷- **مسئله** - در طویلهٔ چند مرغ و چند خرگوش موجود است. این حیوانات روی هم ۶۵ سر و ۲۲۰ پا دارند. عدهٔ هریک را معلوم کنید. (سال دوّم دار المعلمین مرکزی سنهٔ ۱۳۰۷)

حل - اگر x عدهٔ مرغها و y عدهٔ خرگوشها باشد این دو معادله حاصل میشود: $x+y=65$ و $2x+4y=220$ معادلهٔ دوّم مخصر شده باین شکل میشود: $x+2y=110$ از آنجا پس از کم کردن دو معادله $y=45$ و $x=20$

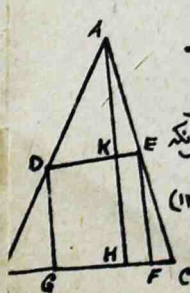
مسائل حل کردنی

۹۸- **مسئله** - سه نفر سرمایه‌ها بین خود تقسیم کردند. اوّلی $\frac{1}{2}$ آن را برد دوّمی $\frac{1}{3}$ و سوّمی بقیه را. هریک سرمایهٔ خود را داده ۵ سال بمرابحه دادند. در آخر مدّت مذکور بهر سه سرمایه مساوی شد تعیین کنید نرخ دوسرمایهٔ دیگر را در صورتی که سرمایهٔ اوّلی ۶۷۵۰ تومان و نرخ آن از قرار ۵٪ باشد. (سال دوّم مدرسهٔ بنات سنهٔ ۱۳۰۶)

۹۹- **مسئله** - دستگاه: $\frac{x(a+b)}{a-b}+\frac{y(a-b)}{a+b}=x+y+a$

و $ax+by=a^2-b^2$ را حل کنید. (سال دوّم دار المعلمین مرکزی سنهٔ ۱۳۰۷)

۱۰۰- **مسئله** - در مثلث ABC قاعدهٔ BC و ارتفاع AH بترتیب ۳۷ متر و ۲۵ متر است. بنابر آنکه شکل مستطیل DEFG معادل ۱۲۱۵ متر باشد طول AK را حساب کنید (سر اله ذکور سنهٔ ۱۳۰۸)



۱۰۱- **مسئله**- معادلهٔ $x^4+4b^3x+3b^4=0$ را حل کنید

حل- دو جملهٔ اوّل طرف اوّل معادلهٔ فوق متعلّق است ببسط $(x+b)^4$ زیرا:

$$(x+b)^4=x^4+4b^3x+6b^2x^2+4bx^3+b^4$$

با این ملاحظه معادلهٔ مفروض چنین می شود:

$$(x+b)^4-6b^2x^2-4bx^3+3b^4=0 \qquad (1)$$

فرض کنیم $x+b=y$ معادلهٔ (۱) باین صورت بیرون می آید:

$$y^4-4by^3+6b^2y^2=0$$

از آنجا $y^2=0$ یعنی $x=-b$ و یا $y^2-4by+6b^2=0$ از آنجا $y=b(2\pm\sqrt{-2})$ پس $x=b(1\pm\sqrt{-2})$

۱۰۲- **مسئله**- در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و ضلع b معلوم است بعلاوه میدانیم که ضلع سه برابر وتر بر ضلع سوم مثلث معادل طول معیّن l می باشد مطلوبست محاسبهٔ اضلاع و بحث در مسئله

حل- اگر فرض کنیم x وتر و y ضلع دیگر مثلث باشد این دستگاه حاصل می شود $x^2-y^2=b^2$ و $3x-y=l$ از آنجا پس از حذف y: $f(x)=8x^2-6xl+l^2+b^2=0$

پس: $x=\frac{3l\pm\sqrt{l^2-8b^2}}{8}$.

بحث- شرط حقیقی بودن ریشه ها آنست که $l\geq 2\sqrt{2}b$ بعلاوه باید x و y مثبت باشند. ولی مقادیر x مثبت اند پس مجموع و حاصلضرب آنها مثبت است و برای اینکه y مثبت باشد باید $x>\frac{l}{3}$ خلاصه: $f(\frac{l}{3})=b^2-\frac{l^2}{9}$ این مقدار بازاء $b<3l$ مثبت است و در این صورت b خارج ریشه ها خواهد بود و چون از نصف مجموع آنها $\frac{3l}{8}$ کوچکتر است از هر دو کوچکتر بوده و مسئله دو جواب دارد. وقتی $b\geq 3l$ باشد $f(\frac{l}{3})$ منفی و بالنتیجه $\frac{l}{3}$ بین ریشه هاست و فقط ریشهٔ بزرگتر قابل جواب است بطور خلاصه بازاء $l<3b<2\sqrt{2}l$ مسئله صاحب دو جواب و بازاء $3b<l$ صاحب یک جواب.

۱۰۳- **مسئله**- ثابت کنید که:

$$\operatorname{tg}K\alpha+\operatorname{tg}K\beta+\operatorname{tg}K\gamma=\operatorname{tg}K\alpha\operatorname{tg}K\beta\operatorname{tg}K\gamma \qquad (1)$$

$$\sin 2K\alpha+\sin 2K\beta+\sin 2K\gamma=\pm 4\sin K\alpha\sin K\beta\sin K\gamma \qquad (2)$$

$$\cos 2K\alpha+\cos 2K\beta+\cos 2K\gamma=-1\pm 4\cos K\alpha\cos K\beta\cos K\gamma \qquad (3)$$

$$\sin^2 K\alpha+\sin^2 K\beta+\sin^2 K\gamma=2\pm 2\cos K\alpha\cos K\beta\cos K\gamma \qquad (4)$$

$$\cos^2 K\alpha+\cos^2 K\beta+\cos^2 K\gamma=1\pm 2\cos K\alpha\cos K\beta\cos K\gamma. \qquad (5)$$

برحسب آنکه k زوج یا فرد باشد باید علائم فوق را تغییر داد. (Gelin)

حل ۱- از دستور $tg(k\alpha+k\beta)=\frac{tgk\alpha+tgk\beta}{1-tgk\alpha\,tgk\beta}$ نتیجه می‌شود: $tgk\alpha+tgk\beta=tg(k\alpha+k\beta)(1-tgk\alpha\,tgk\beta)$

بالنتیجه $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ اما $tg(k\alpha+k\beta)=tg(k\pi-k\gamma)=-tgk\gamma$ بقسمی که عبارت مفروض چنین می‌شود:

$$tgk\gamma\left[1-(1-tgk\alpha\,tgk\beta)\right]=tgk\alpha\,tgk\beta\,tgk\gamma$$

۲- $\sin 2k\alpha+\sin 2k\beta=2\sin(k\alpha+k\beta)\cos(k\alpha-k\beta)$

$=2\sin(k\pi-k\gamma)\cos(k\alpha-k\beta)=\mp 2\sin k\gamma\cos(k\alpha-k\beta)=$

(برحسب آنکه k زوج یا فرد باشد) و $\sin 2k\gamma=2\sin k\gamma\cos k\gamma$ پس اگر k زوج باشد عبارت مفروض مساویست با:

$$2\sin k\gamma\left[\cos k\gamma-\cos(k\alpha-k\beta)\right]=-4\sin k\gamma\sin\frac{k(\alpha+\gamma-\beta)}{2}\sin\frac{k(\gamma+\beta-\alpha)}{2}$$

$$=-4\sin k\gamma\sin k\alpha\sin k\beta\sin\left(k\frac{\pi}{2}-k\beta\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}-k\alpha\right)=$$

واگر k فرد باشد مساویست با:

$$2\sin k\gamma\left[\cos k\gamma+\cos(k\alpha-k\beta)\right]=4\sin k\gamma\cos\frac{k(\alpha+\gamma-\beta)}{2}\cos\frac{k(\gamma+\beta-\alpha)}{2}$$

$$=4\sin k\gamma\sin k\alpha\sin k\beta\sin\left(k\frac{\pi}{2}-k\beta\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}-k\alpha\right)=$$

(صورت این قسمت از مسئله بطریقی که در شمارهٔ دوم نوشته شده صحیح نیست طرح کنندهٔ مسئله اشتباه کرده یا آنکه غلط طبع شده است.)

۳- $\cos 2k\alpha+\cos 2k\beta=2\cos(k\alpha+k\beta)\cos(k\alpha-k\beta)$

$=2\cos(k\pi-k\gamma)\cos(k\alpha-k\beta)=\pm 2\cos k\gamma\cos(k\alpha-k\beta)=$

(برحسب آنکه k زوج یا فرد باشد.)

و $\cos 2k\gamma=2\cos^2 k\gamma-1$ پس اگر k زوج باشد عبارت مفروض مساویست با:

$$-1+2\cos k\gamma\left[\cos k\gamma+\cos(k\alpha-k\beta)\right]=-1+4\cos k\gamma\cos\frac{k(\alpha+\gamma-\beta)}{2}\cos\frac{k(\beta+\gamma-\alpha)}{2}$$

$$=-1+4\cos k\gamma\cos\left(k\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-1+4\cos k\alpha\cos k\beta\cos k\gamma$$

واگر k فرد باشد مساویست با:

$$-1+2\cos k\gamma\left[\cos k\gamma-\cos(k\alpha-k\beta)\right]=-1-4\cos k\gamma\sin\frac{k(\gamma+\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{k(\gamma+\beta-\alpha)}{2}$$

$$=-1-4\cos k\alpha\cos k\beta\cos k\gamma.$$

۴- با ملاحظه دستور $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ عبارت مفروض چنین می شود:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2K\alpha + \cos 2K\beta + \cos 2K\gamma) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1 \pm 4\cos K\alpha \cos K\beta \cos K\gamma)$$

$$= 2 \mp 2\cos K\alpha \cos K\beta \cos K\gamma$$

(بقیه قسمت دوم در اینجا نیست)

۵- با ملاحظه دستور $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ عبارت مفروض باین شکل برون می آید:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2K\alpha + \cos 2K\gamma + \cos 2K\beta) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 \pm 4\cos K\alpha \cos K\beta \cos K\gamma)$$

$$= -1 \pm 2\cos K\alpha \cos K\beta \cos K\gamma$$

۱۰۴- **مسئله** - مشتق تابع $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ را یافته و نمودار اولاً منحنی نمایش تغییرات y را رسم کنید ثانیاً سطح محصور بین منحنی مرسوم و خط $y = 2x+1$ و محور $y'y$ را حساب نمائید (مسابقه فوائد عامه سنه ۱۳۰۷)

حل - ۱- مشتق y عبارت از:

$$y = \frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

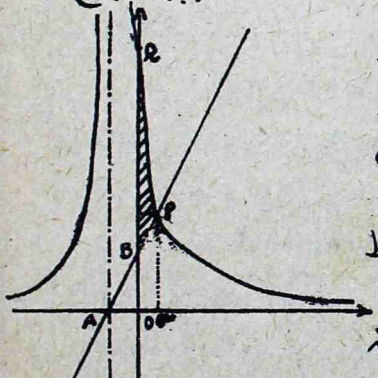
این تابع همیشه مثبت است و بازاء $x = -\frac{1}{2}$ منفصل میشود. مشتق آن:

$$y' = 5 \cdot \frac{-2 \times 2 (2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{-20}{(2x+1)^3}$$

هیچوقت صفر نمیشود و با $2x+1$ تغییر علامت می دهد بدین معنی که اگر $x < -\frac{1}{2}$ باشد $y' > 0$ یا تابع صعودیست و اگر $x > -\frac{1}{2}$ باشد $y' < 0$ و تابع نزولی خواهد بود. حال تغییرات و منحنی نمایش تابع را از قرار ذیل است

x	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	$+\infty$
y'	$+$	منفصل	$-$	
y	0 ↗	$+\infty \mid +\infty$ ↘	5 ↘	0

(خط $x = -\frac{1}{2}$ و محور عرض مجانب منحنی است)



۲- برای رسم نمایش $y = 2x+1$ ملاحظه می کنیم که نقاط تقاطع آن با محورین بترتیب $A(-\frac{1}{2}, 0)$ و $B(0,1)$ است پس نمایش این خط AB وسط مطلوب قسمتی است که پرداخته ایم و اگر آنرا به S و نقاط تقاطع منحنی را با AB و Oy بترتیب به P و Q و تصویر P بر محور x را به P' بنامیم این تساوی حاصل است:

$$S = OP'PQ \text{ ــــ ذوذنقه منحنی الخط} - \text{ذوذنقه } OBPP'$$

برای محاسبهٔ مقادیر طرف ثانی باید مختصات نقطهٔ P را تعیین کرد. برای این مقصود دستگاه $y=\frac{5}{(2x+1)^2}$ ، $y=2x+1$ را حل کنیم چنین نتیجه می‌شود $y=\sqrt{5}=2.24$ و $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\text{مساحت} = \int_{0.35}^{0.618} \frac{5\,dx}{(2x+1)^2} = \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)_{0.35}^{0.618} = 1.02$$

$$\text{ذوذنقهٔ منحنی الخط } OPP'Q$$

$$\text{ذوذنقهٔ } OBPP' = \frac{1}{2} OP'(OB+PP') = 0.48$$

بنابراین: $S = 1.02 - 0.48 = 0.54$

۱۰۵- **مسئله**- مطلوب است حدّ $\frac{\sin(\omega-\beta)+\sin(\beta-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\omega-\alpha)+\sin(\alpha-\lambda)+\sin(\lambda-\omega)}$ وقتی $\lambda \to \omega$

(Lemoine لموان)

حل- بمناسبت دستورات:

$$\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\beta) = 2\sin\frac{\omega-\beta}{2}\cos\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\lambda\right)$$

$$\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha) = 2\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\cos\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\lambda\right)$$

$$\sin(\alpha-\omega) = -2\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\cos\frac{\omega-\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \sin(\beta-\omega) = -2\sin\frac{\omega-\beta}{2}\cos\frac{\omega-\beta}{2}$$

کسر فوق چنین می‌شود:

$$\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\omega-\beta}{2}}{\cos\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\omega-\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin(\beta-\lambda)}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin(\alpha-\lambda)} = \frac{\sin^2\frac{\omega-\beta}{2}}{\sin^2\frac{\omega-\alpha}{2}}$$

حال اگر $\lambda \to \omega$ این کسر بمقدار $\frac{\beta-\omega}{\alpha-\omega}$ میل می‌کند.

طریق دیگر- چون با وضع $\lambda=\omega$ کسر فوق بصورت $\frac{0}{0}$ بیرون می‌آید قانون **هپیتال** قابل استعمال است یعنی مقدار کسر فوق همان مقدار $\frac{\cos(\omega-\lambda)-\cos(\beta-\omega)}{\cos(\omega-\lambda)-\cos(\alpha-\omega)}$ است بشرط مطلوب مساوی با: $\frac{\sin^2\frac{\beta-\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\lambda}{2}} : 2\sin^2\frac{\beta-\lambda}{2} = \frac{1-\cos(\beta-\lambda)}{1-\cos(\alpha-\lambda)}$

۱۰۶- **مسئله**- مکعب کاملی بصورت aaboodaaa چنان باید که $b+d=a$ (مصنا حسب)

حل- فرض کنیم: $N=$ aaboodaaa باقیماندهٔ تقسیم N بر ۳ مساوی با قیماندهٔ تقسیم $5a+b+d=6a$ بر ۳ مساوی با قیماندهٔ تقسیم $6a$ بر ۳ است خلاصه:

$$N = 11000\ldots1111\,a + 999\ldots b \qquad (1)$$

$$= 4074115 \times 27a + 6a + 27 \times 37000\ldots b = \text{مضرب } 27 + 6a$$

پس باید $6a$ مضرب ۲۷ باشد و چون a ناچار $a=9$ است و a را می‌توان چنین نوشت:

$$N = 3^3(3666670037 + 37000\ldots b)$$

اما: $۳۷ \times ۹۹۱۰۰۱ = ۳۶۶۶۷۰۳۷$ پس:

$$N = ۳^۳ \times ۳۷\,(۹۹۱۰۰۱ + ۱۰۰۰\,b)$$

بنابراین مقدار داخل پرانتز باید بصورت $۳۷^۲ K^۳$ باشد. اما ضمناً حد داخل پرانتز ۱۰۰۰۰۰۱ است پس $۱۰۰۰۰۰۱ \geqslant ۳۷^۲ \times K^۳ \geqslant ۷۳۰ K^۳$ بنابراین $K \leqslant ۹$ از طرف دیگر $۳۷^۲ \times K^۳$ باید بپنج ختم شود و چون $۳۷^۲$ به ۹۰ ختم می‌گردد ناچار باید $K^۳$ به ۹۰ ختم باشد و چون $K^۳$ سه رقمی است مساوی ۷۲۹ یعنی $K = ۹$ خواهد بود بقسمی که $۹^۳ \times ۳۷^۲ = ۹۹۱۰۰۱ + ۱۰۰۰\,b$ از حل این معادله معلوم می‌شود که $b = ۸$ بقسمی که عدد مطلوب عبارتست از ۹۹۷۰۰۹۹۹

$۳^۳ \times ۹^۳ \times ۳۷^۳ =$ و کعب آن ۹۹۹ است.

۱۰۷- **مسئله** - جسمی در ثانیهٔ آخر سقوط خود $\frac{۱}{n}$ مسافت مطویهٔ کلی را طی می‌کند. مطلوب مدت سقوط

حل - مسافت مطوی در ثانیهٔ آخر تفاوت مسافت مطویه در t ثانیه و $t-۱$ ثانیه است پس این معادله حاصل می‌شود:

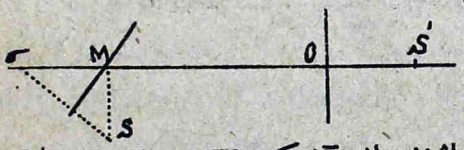
$$\frac{۱}{۲} g t^۲ - \frac{۱}{۲} g (t-۱)^۲ = \frac{۱}{۲n} g t^۲$$

با پس از اجرای اعمال لازمه: $t^۲ - ۲t n + n = ۰$ از آنجا: $t = n \pm \sqrt{n(n-۱)}$. چون باید t مثبت و بزرگتر از واحد باشد تنها ریشهٔ $n + \sqrt{n(n-۱)}$ قابل قبول است.

۱۰۸- **مسئله فیزیک**، (برای صورت مسئله بشمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۴ رجوع شود.)

۱- تصویر S در آینهٔ M نقطه ایست مانند σ واقع بر محور عدسی بقسمی که $M\sigma = z$

پس فاصلهٔ σ از مرکز عدسی چنین است:



$$\overline{O\sigma} = \overline{OM} + M\sigma = d + z$$

از آنجا $p' = \frac{nf}{n+f} = \frac{f(z+d)}{z+d-f}$

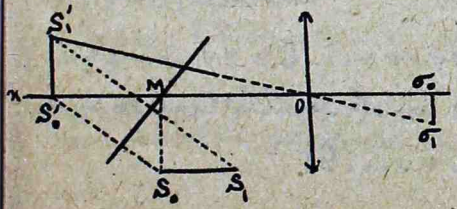
۲- شرط آنکه منبع و تصویرش از M متساوی البعد باشند آنست که $\overline{MS'} + \overline{M\sigma} = ۰$ امّا $\overline{MS'} = -p'$

$\overline{MO} + \overline{O\sigma} = -d - p'$ و $\overline{M\sigma} = z$ پس این معادله حاصل می‌شود با $z = d + p'$

$z = d + \frac{f(z+d)}{z+d-f}$ از آنجا: $z^۲ - ۲fz - d^۲ = ۰$ تنها ریشهٔ مثبت این معادله بقیق

$z = f + \sqrt{f^۲ + d^۲}$ قابل قبولست.

۳- تصاویر نقاط $S_۰$ و $S_۱$ در آینهٔ M بترتیب عبارتند از $S'_۰$ و $S'_۱$ و چون $S'_۰S'_۱$ به OM عمود است تصویر آن در عدسی خطی است مانند $\sigma_۰\sigma_۱$



+ اگر زمان سقوط باشد

عمود بر محور عدسی و طول این تصویر تغییر مکان مطلوبست. برای محاسبهٔ آن در دو مثلث متشابه O_0O_0' و $S_0'S_1'$ این رابطه را می نویسیم: $\frac{O_0O_0'}{S_0'S_1'} = \frac{OO_0'}{OS_0'}$ از آنجا:

$$O_0O_0' = S_0'S_1' \cdot \frac{OO_0'}{OS_0'} = S_0S_1' \cdot \frac{f(z_0+d)}{z_0+d-f} : (d+z_1) = \frac{df}{z_1+d-f}$$

تبصره - حل بعضی از مسائل شمارهٔ ۲ بواسطهٔ ضیق صفحات بشماره های آینده موکول گردید

مسائل حل کردنی

۱۰- **مسئله** - عبارت $\sqrt{+ab + 2(a^2 - b^2)\sqrt{-1}}$ را بمجموع دو رادیکال ببسیط تبدیل کنید

۱۱- **مسئله** - ثابت کنید که اگر a و b ریشه های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ باشد و $V_n = a^n + b^n$ و $U_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ اتحادهای ذیل محقق اند:

$$V_n - pV_{n-1} + qV_{n-2} \equiv 0 \qquad U_n - pU_{n-1} + qU_{n-2} \equiv 0$$

$$2U_{2n-1} \equiv V_nU_{n-1} + U_nV_{n-1} \qquad V_n - pU_n + 2qU_{n-1} \equiv 0$$

$$U_nU_{n-1} \equiv U_nV_{n-1} + 2q^{n-1} \qquad U_{2n} \equiv U_nV_n$$

(لوکا Lucas.)

۱۱۱- **مسئله** - سه ضلع مثلثی سه جملهٔ متوالی یک تصاعد عددی می باشند. اگر هر یک ۵ متر بیفزائیم شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ۱ متر اضافه میشود ولی اگر هر یک ۰،۵ متر اضافه کنیم بر شعاع دایرهٔ محاط ۲ متر اضافه می گردد مطلوبست محاسبهٔ اضلاع مثلث. (Whitworth)

۱۱۲- **مسئله** - ۱- برای تجزیهٔ هوا به اطاقی ده لیتر آزاد و لوله کربکی شامل اسید سولفوریک و دیگری دارای پتاس محرق است عبور می دهیم. افزایش وزن لولهٔ اولی ۰،۰۹ گرم و حجم هوا ۹،۸ لیتر می شود. از این تجربه نسبت وزن بخار آب و کاز کربنیک موجود در هوای اطاق را معین کنید.

۲- 20^{cm^3} از هوای اطاق را که از لوله عبور کرده با 10^{cm^3} شدت ثقل وارد ترازو می کنیم جرم کاز ادبومتر $19,45^{cm^3}$ می شود. مطلوبست تعیین نسبت وزن اکسیژن و ازت محتوی در این هوا

۳- بنا بر آنکه مقطع ادبومتر 2^{cm^2} و ارتفاع سطح جیوه در آن نسبت بسطح مشترک قبل از ورود کازهای فوق الذکر 5^{cm} باشد مطلوبست ارتفاع سطح جیوه در ادبومتر پس از ورود کازهای فوق الذکر (شرایط مجاذب فوق $0^{cm},7$ است)

۱۱۳- **مسئله** - مطلوبست تعیین ماکزیموم $\frac{x^2-1}{x^2+9}$ بدون استعانت مشتقات.

۱۱۴- **مسئله** - مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش $y = \frac{x+\sqrt{(5x-12)(x-4)}}{2(x-2)}$

ریاضیات عالی

«استعمال حاملها در بحث خواص منحنیات و سطوح»

استعمال قضایا و قوانین راجع بحامل و خواص آن در بسیاری از شعب ریاضی که مسائل آن بعلت کثرت و تطویل عملیات خسته کننده است باعث اختصارات قابل ملاحظه میشود. لهذا جای آنست که مختصری در باب استعمال این قوانین در بحث خواص منحنیات و سطوح مذکر شویم.

۱- فرض کنیم نظیر هر مقداری از متغیر t حامل معینی مانند $\vec{V}$ پیدا شود. اصطلاحاً گویند $\vec{V}$ تابع t است و چنین مینویسند: $\vec{V}(t)$. اگر $\vec{V}+\Delta\vec{V}$ حامل نظیر $t+\Delta t$ باشد حد حامل $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ را مشتق V بجسب t خوانند و یکی از علائم $\frac{d\vec{V}}{dt}$ یا $\vec{V}_t'$ نموده میشود.

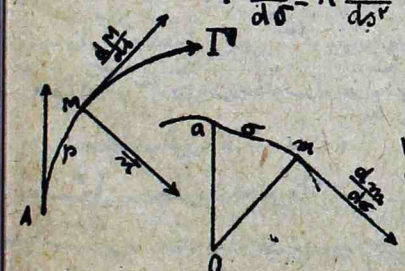
۲- فرض کنیم وضع نقطهٔ M بمتغیر t مربوط باشد و M و M' اوضاع نظیر t و $t+\Delta t$ باشند اگر O نقطهٔ ماند در فضا اختیار کنیم مشتق حامل $\vec{OM}$ بجسب t از وضع O مستقل است زیرا: $\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\lim\frac{\vec{OM'}-\vec{OM}}{\Delta t}=\lim\frac{\vec{MM'}}{\Delta t}$ همان این مقدار مخصص را مشتق نقطهٔ M خوانند و به $\frac{dM}{dt}$ نموده میشود

۳- فرض کنیم Γ منحنی معوجی باشد جهت مثبتی بر منحنی اختیار کرده نقطهٔ ماند A از مبدء قوسها قرار داده مقدار جبری $\overset{\frown}{AM}$ را به s میمنامیم. مشتق نقطهٔ M نسبت به s یعنی $\frac{dM}{ds}$ حامل است که در نقطهٔ M بر Γ مماس میباشد و اگر x و y و z مختصات نقطهٔ M باشند مؤلفه‌های حامل $\frac{dM}{ds}$ عبارتند از $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ و $\frac{dz}{ds}$ و چون مجموع مربعات این سه مؤلفه مساوی واحد است طول حامل $\frac{dM}{ds}$ نیز واحد مثبت است.

۴- منتها الیه حاملی که از مبدء مختصات یعنی نقطهٔ O همسنگ با $\frac{d\vec{M}}{ds}$ رسم شود منحنی رسم می کند که بر کرهٔ بمرکز O و شعاع واحد واقع است و آنرا اندیکاتریس اول Γ خوانند. نظیر نقطهٔ A از منحنی Γ نقطهٔ A_1 ماند A_1 از اندیکاتریس اول و نظیر جهت مثبتی که بر Γ اختیار شده جهتی بر اندیکاتریس معین می شود که آنرا جهت مثبت قرار دهیم اینک اگر σ مقدار جبری $\overset{\frown}{am}$ باشد در نتیجه $\frac{dm}{d\sigma}=\frac{dm}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma}$ مقدار غیر حاملی $\frac{ds}{d\sigma}$ بالاصاله مثبت است شعاع انحنای اول Γ نامیده شده و معمولاً آنرا با R مینامند.

$$\frac{dm}{d\sigma}=R\frac{d^2M}{d\sigma^2}\quad\text{پس}\quad\frac{dm}{d\sigma}=\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dM}{ds}\right)=\frac{d^2M}{d\sigma^2}$$

از طرف دیگر



خاصیت اصلی حامل $\frac{dm}{d\sigma}$ اینست که اگر جهت مثبتی که بر Γ اختیار شده تغییر یابد جهت $\frac{dm}{d\sigma}$ تغییر نمیکند. حاملی را که با Γ موازی و مقدار جبری آن $\frac{dm}{d\sigma}$ رسم شود قائم اول منحنی Γ می خوانیم و از خاصیتی که در فوق برای $\frac{dm}{d\sigma}$ گفتیم نتیجه میشود

کرفاتم اول هر منحنی جهتی قائم بالذات دارد. من بعد برای اختصار حاصل $\frac{dm}{ds}$ را به $\vec{t}$ و حاصل $\frac{dm}{d\sigma}$ را به $\vec{n}$ نمایش میدهیم. در این صورت: $R\frac{dt}{ds}=\frac{dt}{d\sigma}$. از این تساوی معلوم می‌شود که دو حاصل $\frac{dt}{ds}$ و $\frac{dt}{d\sigma}$ موازی هستند. بعلاوه باید در نظر داشت که $\vec{n}$ (حاصل دوم) تأثر اصلی است.

۶- دستور اول فرنه- از آنچه گفته شد اینچنین نتیجه می‌شود: $\frac{dt}{ds}=\frac{\vec{n}}{R}$ (۱) این دستور را دستور اول (فرنه) است و بسهولت می‌توان از روی آن دستورات فرنه را در مختصات قائم نتیجه گرفت توضیح آنکه اگر α و β و γ مؤلفه‌های حامل $\frac{dt}{ds}$ و α' و β' و γ' مؤلفه‌های $\vec{n}$ باشند و تساوی فوق را بر محور تصویر کنیم نتیجه می‌شود: $\frac{d\alpha}{ds}=R\frac{d\alpha'}{d\sigma}$ و $\frac{d\beta}{ds}=R\frac{d\beta'}{d\sigma}$ و $\frac{d\gamma}{ds}=R\frac{d\gamma'}{d\sigma}$.

۷- منتها الیه حامل $\vec{b}$ که از مبدء مختصات همسنگ با $\vec{t}\wedge\vec{n}$ رسم شود منحنی رسم می‌کند واقع بر کرهٔ بشعاع واحد. این منحنی اندیکاتریس دوم T خوانده می‌شود و حاملی که از M موازی و متحد الجهت با $\vec{b}$ کمی بعد از آن را به $\vec{b}$ خواهیم نمود رسم شود قائم دوم T نامیده میشود.

۸- چون دو حامل $\vec{b}$ و $\vec{t}$ بر یکدیگر عمودند: $\vec{b}\cdot\vec{t}=0$ (علامت حاصلضرب اسکالر scalaire) است) از آنجا $\vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds}+\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{b}=0$ یا بالنتیجه $\vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds}+\vec{b}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0$ اما $\frac{d\vec{t}}{ds}$ با $\vec{n}$ همسنگ است پس: $\vec{b}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0$ از طرف دیگر: $\vec{t}\cdot\vec{t}=1$ و $\vec{b}\cdot\vec{b}=1$ پس $\vec{t}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0$ و $\vec{b}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds}=0$ چنانکه ملاحظه می‌شود حوامل $\frac{d\vec{t}}{ds}$ و $\frac{d\vec{b}}{ds}$ هردو بر صفحهٔ مماس بر $\vec{t}$ و $\vec{b}$ عمودند پس موازی میباشند اما اگر τ قوس اندیکاتریس دوم باشد: $\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{d\vec{b}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}$ از این تساوی بمناسبت اینکه $\frac{d\tau}{ds}$ مقدار بیست غیر حاصل چنین بر می‌آید: $\frac{d\vec{t}}{ds}\parallel\frac{d\vec{b}}{d\tau}$ اما: $\frac{d\vec{b}}{ds}\parallel\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{d\vec{t}}{d\sigma}$ بالنتیجه $\frac{d\vec{b}}{ds}\parallel\frac{d\vec{b}}{d\tau}$

پس مماسهای مرسوم بر دو اندیکاتریس در نقاط متناظره موازیند.

معمولا جهت مثبت قوس اندیکاتریس دوم را چنان اختیار می‌کنند که جهت مثبت مماسهای مرسوم بر آن همان جهت مثبت مماسهای اندیکاتریس اول باشد. باین ترتیب این تساوی حاصل میشود $\frac{d\vec{t}}{d\sigma}=\frac{d\vec{b}}{d\tau}$ (۲)

۸- دستورات دوم فرنه- مقدار غیر حاصل $\frac{ds}{d\tau}$ را شعاع انحنای دوم T خوانند و اگر آنرا به T' بنمایانیم از آنچه در نمرهٔ ۷ گفته شد نتیجه می‌شود: $\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{1}{T'}\cdot\frac{d\vec{b}}{d\tau}=\frac{1}{T'}\frac{d\vec{t}}{d\sigma}$ از آنجا: $\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{\vec{n}}{T'}$ (۳). این دستور دستور دوم (فرنه) است و برای تعیین آن در دستگاه (x,y,z) مؤلفه‌های $\vec{b}$ را به α'' و β'' و γ'' نموده دستور فوق را بر سر محور تصویر می‌کنیم نتیجه میشود: $\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T'}$ و $\frac{d\beta''}{ds}=\frac{\beta'}{T'}$ و $\frac{d\gamma''}{ds}=\frac{\gamma'}{T'}$

۹- دستورات سوم فرنه- از تساوی $\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{t}$ نتیجه می‌شود: $\frac{d\vec{m}}{ds}=$

$\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{\vec{n}}{R}$ و $\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{\vec{n}}{T}$ امّا: $\frac{d\vec{b}}{ds}\wedge\vec{t}+\vec{b}\wedge\frac{d\vec{t}}{ds}$ پس:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{1}{T}\cdot\vec{m}\wedge\vec{t}+\frac{1}{R}\cdot\vec{b}\wedge\vec{m}=-\left(\frac{\vec{b}}{T}+\frac{\vec{t}}{R}\right)$$

این دستور سوم (فرنه) میباشد واگر آنرا بر سه محور تصویر کنیم نتیجه می شود $\frac{d\alpha'}{ds}=$

$$-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}\quad,\quad\frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T}\quad,\quad\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T}.$$

از هین مختصر مشاهده میشود که استعمال حاصلها چقدر باعث سهولت عمل میشود بعلاوه ذیلا این مطلب بیشتر مشهود خواهد شد. (دنباله دارد)

۱۱۵- **مسئله** - ثابت کنید که اگر به نهایت کوچک اصلی باشد عبارت ذیل بینهایت کوچک است از رتبهٔ (۶): (Catalan) $\frac{\arctg x}{x}+\frac{\sin x}{x}+1-2\cos x$

حل - $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$ و $\frac{\arctg x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$

$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$ برای بسط $\frac{\sin x}{x}$ ملاحظه می کنیم که: $\cdots+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\frac{x^2}{3}-1=0$

پس: $\cdots+\frac{x^6}{7!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^2}{3!}-1=$

$$\frac{\sin x}{x}+1=\left(\cdots-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^2}{3!}\right)+\frac{1}{2}\left(\cdots+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^2}{3!}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\cdots-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)^3$$

چون این مقادیر را در عبارت مفروض قرار دهیم بصورت λx^6 که در آن λ وقتی $x\to 0$ بسمت حد معیّنی میل می کند بیرون می آید و این مطلب حکم را ثابت می کند.

۱۱۶- **مسئله** - معادلهٔ $x^3y'y''+2y^2=0$ را حل کنید.

حل - اگر فرض کنیم $y=e^{\int u\,dx}$ نتیجه میشود: $y'=uy$ و $y''=y(u'+u^2)$

حال اگر این مقادیر را در معادلهٔ مفروض قرار دهیم باین صورت بیرون می آید: $u\frac{du}{dx}$ (۱)

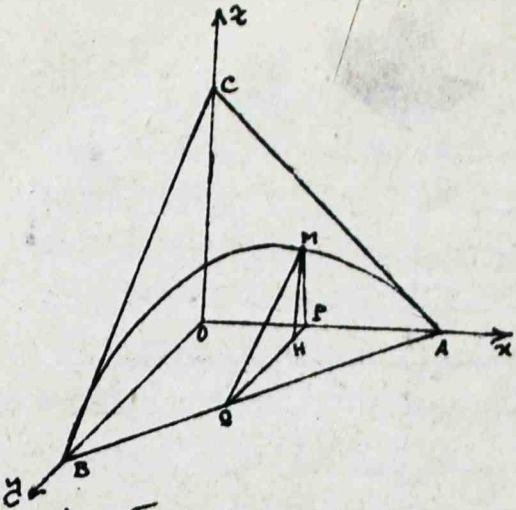
$+u^3+\frac{2}{x^3}=0$ این معادله با تبدیل $u^2=z$ چنین می شود: $z'+2z\frac{1}{x}=-\frac{4}{x^3}$

چون جامع این معادلهٔ خطّی را حساب کنیم z بدست آمده سپس u و بعد y حاصل میشود.

تبصره - بعد تبدیل $x=\frac{1}{t}$ معادلهٔ (۱) بمعادلهٔ $t^2u\dot{u}+t=(u^3+2t)$ تبدیل میشود

۱۱۷- **مسئله** - مطلوبست حجم قسمتی از فضا که در ناحیهٔ $(x>0, y>0, z>0)$ واقع بوده و بسطوح $x+y+z=a$ و $xy=az$ محدود باشد. (J.A. Serret)

حل - سطح $ax=xy$ بر دو محور x و y مرور کرده و مقطع صفحهٔ $x+y+z=a$ (صفحهٔ ABC) با آن هذلولی ABM می باشد. اگر سطحی موازی سطح zOy مرور دهیم صفحهٔ ABC را در امتداد خطی مانند MQ که با BC موازی است و سطح



سهمی‌گون $xy=az$ را با امتداد خط MP و بالاخره صفحهٔ xoy را در امتداد PR کدام محور oy موازی قطع می‌کند. و بدین قسم مثلثی مانند MPQ تشکیل می‌شود که قاعده‌اش عرض نقطهٔ Q یعنی $QP=a-x$ و ارتفاعش MH یعنی ارتفاع نقطهٔ M که مساوی مقدار z در دستگاه $x+y+z=a$ و $xy=az$ است می‌باشد و از اینجا چنین حاصل می‌شود $z=MH=\frac{x(a-x)}{a+x}$ بعضی که وسعت مقطع MPQ معادلست با $\frac{1}{2}\frac{x(a-x)^2}{a+x}$ پس:

$$V=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}dx=\left(\frac{17}{12}-\log 4\right).a^3$$

مسئله - عاملی تعیین کنید که چون در $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy$ ضرب شود آن را فاصلهٔ کلی تابعی نامی.

حل - اگر μ عامل مطلوب باشد لازم است که:

$$\frac{\partial[\mu(1-x^2y)]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu x^2(y-x)]}{\partial x}$$

یا پس از بسط و اجرای اختصارات لازمه

$$x^2(x-y)\frac{\partial\mu}{\partial x}+(1-x^2y)\frac{\partial\mu}{\partial y}=2\mu x(y-x)$$

یا: $\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x}$ از آنجا: $\frac{d\mu}{x^2(x-y)}=\frac{d\mu}{2\mu x(y-x)}$

بالنتیجه $\log\frac{\mu}{c}=\log\frac{1}{x^2}$ پس: $\mu=\frac{c}{x^2}$

مسائل حل کردنی

۱۱- **مسئله** - ثابت کنید که در هر سه‌وجهی توان دو وعد دیگر از دستهٔ A و دیگری از دستهٔ B چنان تعیین کرد که تفاضلشان مقدار مفروض ε باشد.

۱۲- **مسئله** - مطلوبست محاسبهٔ $\iiint(2x+3y+z)dxdydz$ در داخل سطح $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$

(لیسانس برد و سنهٔ ۱۹۰۶)

۱۳- **مسئله** - ۱- معادلهٔ $x+yy'=\frac{3ay'}{1+y'^2}$ را حل کنید. ۲- بین انجوبهٔ حاصل آن را

که نمایش تغییرات آن بر محور عرض مماس است بیابید و منحنی نمایش آنرا رسم کنید. ۳- حجم حادث از دوران منحنی اخیر دور محور عرض را معلوم نمائید. (لیسانس نانسی ۱۹۰۵)

۱۲۲- **مسئله**- منحنی $y=x^2$ و $z=\frac{2}{3}x^3$ مفروض است. اولاً مطلوب است مکان هندسی خطوطی که از مبدء بموازات مماسهای منحنی رسم شود. ثانیاً الفاف سطوحی که از مبدء بموازات سطوح مستقبل منحنی مرور کنند. ثالثاً زاویهٔ مماس بر منحنی با منصف الزاویهٔ xoz رابعاً تعیین دلو یا انحنای Developpante منحنی. (لیسانس نانسی ۱۹۰۵)

۱۲۳- **مسئله**- معادلهٔ $y^2z+6x^2y+39x^2+24y+3=0$ را حل کرده انبین اجوبهٔ آن آنرا که بر سطح $y^2=2z$ مرور می کند تعیین کرده و $x=0$ (Lignes asymptotiques) آنرا معلوم کنید. (لیسانس تولوز ۱۹۰۳)

۱۲۴- **مسئله**- مثلث OMP با اضلاع $OP=\sqrt{n}$ و $MP=\sqrt{n+1}$ چنان تغییر می کند که راس O ثابت مانده و جیب تمام زاویهٔ حادث بین ضلع متغیر OM و خط ثابت مفروضی دائماً مساوی جیب تمام $\overline{OMP}-(n+1)\overline{MOP}$ باشد. ثابت کنید که قوس منحنی مکان M بجسب شعاع حامل عدد جامعی بضوی (Integrale elliptique) باساس $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ بیان می شود. (J.A. Serret)

۱۲۵- **مسئله**- تحقیق کنید که طرف اول معادلهٔ:

$$z(z+\sin y)\sin y\cos dx+z(z+\sin x)\sin x\cos y\,dy+(\sin x+\sin y)\sin x\sin y=0$$

قابل کامل است و سپس معادله را حل کنید. (لیسانس بزانسون Besançon سنه ۱۹۰۹)

۱۲۶- **مسئله**- سطح $z=y\operatorname{Tg}x$ مفروض است اولاً مطلوب تعیین اشعهٔ انحناء و مراکز انحنای اصلی در نقطهٔ غیر مشخصی از این سطح ثانیاً (Lignes asymptotiques) این سطح را تعیین کنید ثالثاً مطلوبست مکان مراکز انحنای اصلی نقطهٔ غیر مشخص M از سطح فوق وقتی M بر یکی از این (Lignes asymptotiques) حرکت کند. رابعاً برای هریک از منحنیات حاصل طول قوس بین دو نقطهٔ معین را حساب کنید. (لیسانس منت پلیه Montpellier سنه ۱۹۰۸)

۱۲۷- **مسئله**- مطلوبست محاسبهٔ $\int e^{-t^2}dt$

(x_2, y_2) B بگذرد.

حل- معادلهٔ خطوطی که بر A بگذرند عبارتند از: $y - y_1 = a(x - x_1)$ برای اینکه نمایش این معادله از B نیز بگذرد باید: $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ از آنجا: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (۴)

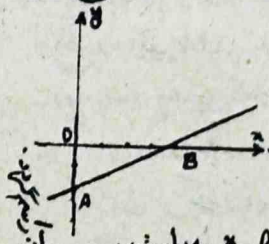
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

تبصره- چنانکه ملاحظه میشود در معادلهٔ خطوط ماریر یک نقطه مقدار a مبهم میماند این مطلب بخوبی از این اصل هندسی که بر یک نقطه بی‌نهایت خط مستقیم مرور می‌کند. وقتی مشخص بر دو نقطه بگذرد معادلهٔ آن کاملا مشخص است یعنی بر دو نقطه فقط یک مستقیم می‌گذرد.

- برای اینکه خوانندگان محترم بخوبی بتوانند این مسائل و قوانین را استعمال کنند بذکر مثال مبادرت می‌کنیم:

مثال-۱- نمایش معادلهٔ $y = x^2 - 4$ را رسم نموده معادلهٔ کلیهٔ خطوطی که بر آن عمود یا موازی آنند معین کنید

حل- چون در معادلهٔ فوق یک مرتبه x و یکمرتبه y را مساوی صفر قرار دهیم بترتیب تقسیم می‌شود: $y = x^2 - 4$ پس خطی که نمایش معادلهٔ (۱) است محور x ها را در نقاط A(-۲,۰) و B(۲,۰) قطع می‌کند



خط AB نمایش تابع (۱) است

برای تعیین معادلهٔ خطوط عمود یا موازی با AB معادلهٔ (۱) را بصورت $y = \frac{x^2}{2} - 4$ می‌نویسیم. از اینرو دیده می‌شود که ضریب زاویه‌ای خطوطی که عمود بر AB باشند -2 و ضریب زاویه‌ای آنهائی که با آن موازیند $\frac{1}{2}$ است

یعنی معادلهٔ خطوط عمود بصورت $y = -2x + b$ و معادلهٔ خطوط موازی بصورت $y = \frac{x}{2} + b$ است.

مثال-۲- مطلوب است معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A(۱,۱) و خط طاصل بین دو نقطهٔ $(-۳,۲)$ و $(-۱,۱)$ عمود شود یا موازی آن

حل-۱- خط عمود- معادلهٔ کلیهٔ خطوطی که بر نقطهٔ A بگذرند اینست: $y - 1 = a(x - 1)$

حال باید a را چنان تعیین کرد که این خط بر BC عمود شود برای این مقصود معادلهٔ BC را می‌نویسیم:

$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - (-3)}{-1 - (-3)}$ یا $y = -2x + 1$ چون ضریب زاویه‌ای این خط -2 است $a = \frac{1}{2}$ خواهد بود

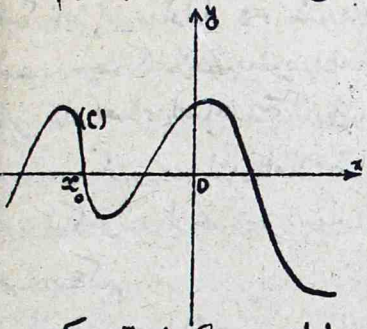
پس معادلهٔ خط عمود اینست: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ یا $2y = x + 1$

۲- خط موازی- در این حالت $a = -2$ پس معادلهٔ خط موازی اینست: $y - 1 = -2$

$y = -2x + 3$ (۱) از آنجا:

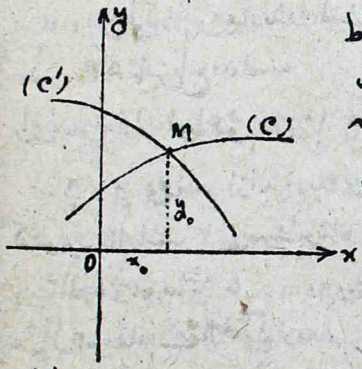
تمرین- نقاط A(۰,۱) و B(۱,۰) و C(۱,-۱) و D(۲,۲) مفروض‌اند. اولا مطلوب است معادلهٔ خطوط AB و AC و AD و BC و BD و CD ثانیا معادلهٔ خطوطی که از نقطهٔ D بموازات یا عمود بر AB و AC و BC رسم شوند. (دوهطلبهٔ علمی بطبع رسید)

۱۹- استعمال نمایش توابع در حل معادلات - فرض کنیم منحنی



نمایش تابع $y=f(x)$ و x_0 طول یکی از نقاط تقاطع (C) با محور طول باشد. چون عرض این نقطه صفر است $f(x_0)=0$ یعنی x_0 ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ است و از این رو این قاعده نتیجه میشود: برای حل معادلهٔ $f(x)=0$ بوسیلهٔ ترسیم نمایش تابع $y=f(x)$ را رسم می کنیم طول نقاط تقاطع منحنی حاصل با محور طول ریشه های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ را معین می کند.

۲۰- استعمال نمایش توابع در حل دستگاه ها- فرض کنیم C و C' منحنی نمایش



دو تابع $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ و $M(x_0,y_0)$ یکی از نقاط تقاطع دو منحنی باشد. چون C' و C و M واقع است $y_0=f(x_0)$ و $y_0=\varphi(x_0)$ بعبارتی که مختصات نقطهٔ M یک ریشه از جوابهای دستگاه: $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ است و از اینجا این نتیجه بدست می آید:

برای حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بوسیلهٔ ترسیم نمایش هر یک از معادلات دستگاه را رسم می کنیم. مختصات نقاط تقاطع دو منحنی حاصل جوابهای دستگاه می باشند با العکس برای بدست آوردن مختصات نقاط تقاطع دو منحنی $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ کافی است دستگاهی را که از این دو معادله تشکیل میشود حل کنیم. جوابهای این دستگاه مختصات نقاط تقاطع دو منحنی خواهد بود.

مثال - مطلوبست مختصات نقاط تقاطع دو منحنی $y=x^3+6x-1$ و $y=2x^3+2x-1$

حل - از دستگاه دو معادلهٔ فوق چنین نتیجه می شود: $2x^3+2x-1=x^3+6x-1$ یا $x^3-4x=0$ از آنجا: $x=0$ و $x=\pm 2$ مقادیر متناظر y عبارتند از: $y=-1$ و $y=19$ و $y=-21$ پس دو منحنی یکدیگر را در نقاط $(-1,0)$ و $(19,2)$ و $(-21,-2)$ قطع می کنند. (دنباله دارد.)

(در مطبعهٔ علمی بطبع رسید)

من بعد تقاضای اشتراک

بدون وجه بلا جواب خواهد ماند. (دفتر مجلهٔ ریاضیات)

اطلاع

از آقایان محترمي که با ما مکاتبه نموده و جواب میخواهند متمنی هستیم باندازهٔ تمبری که برای جواب لازمست تمبر ارسال نمایند. در غیر اینصورت مراسلات بدون جواب خواهند ماند. (دفتر مجلهٔ ریاضیات)

مسائل حساب

مسائل (۲) و (۳) و (٤) **فروردین پارسای**

مسائل (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) **حسین سینا** محصل مدرسهٔ صنعتی

۱٤ ـ در چه‌زمانی بین (۱ و ۲) ـ (۲ و ۳) ـ (۳ و ٤) (٤ و ٥) و ... و (۱۰ و ۱۱) دو عقربهٔ ساعت برهم منطبق مي شوند ؟ یا بر امتداد یکدیگر قرار می گیرند ؟ یا بر هم عمود میشوند ؟

۱٥ ـ در چه زمانی بین ۳ و ٤ بعد از ظهر زاویهٔ عقربه های ساعت ۳۰ درجه میشوند ؟

۱٦ ـ در چه ساعتی بین ٤ و ٥ دوعقربهٔ ساعت بر امتداد یکدیگر قرار میگیرند

۱۷ ـ بین ظهر و نصف شب چند مرتبه عقربه‌های ساعت برهم عمود میشوند؟

۱۸ ـ ساعتی که در روز ۱٥ ثانیه کند است ظهر دوشنبه تصحیح شده شنبه آینده وقتی این ساعت ظهر را نشان بدهد ساعت حقیقی چیست؟

۱۹ ـ ساعت فوق الذکر ظهر شنبه آتیه چه ساعتی را نشان میدهد ؟

۲۰ ـ دو ساعت داریم که یکی روزی ۷ ثانیه تند و دیگری روزي ۸ ثانیه کندکار میکنند این دو ساعت را موقع ظهر تصحیح مي کنیم وقتی یکی از آنها ٥ دقیقه از دیگري جلو تر باشد ساعت حقیقي چیست ؟

عنوان .....

آدرس .....

(کتاب علوم تفریحی)

از مطالعهٔ کتاب **علوم تفریحی تألیف آقای مصاحب** غفلت نکنید • ما از این کتاب تعریف نمی‌کنیم شما خودتان از آنهائی که آنرا خریده و خوانده‌اند بپرسید و بعد تا تمام نشده آنرا از کتابخانه هاي عمدهٔ طهران خریداری کنید • برای خرید کلي به کتابخانهٔ مرکزی رجوع نمائید •

خیابان شاهپور ـ کتابخانهٔ مرکزي • نمرهٔ اعلان ٥

(هتل مقدم)

(چهار راه حسن آباد)

از منظرهٔ باشکوه این هتل و ارکسر عالی آن که جدیداً بابهترین طرز برای پذیرائی واردین تشکیل شده است استفاده فرمائید.

(میز های بیلیارد برای بازی نیز حاضر است)

فامیلهای محترم می توانند در این هتل از مهمانهای گرامی خود با بهترین ترتیب پذیرائی نمایند.

بعد از یکهفته

همه شب دانسهای اروپائی را از ساعت ۹ ببعد مشاهده فرمائید. نمره اعلان ٦