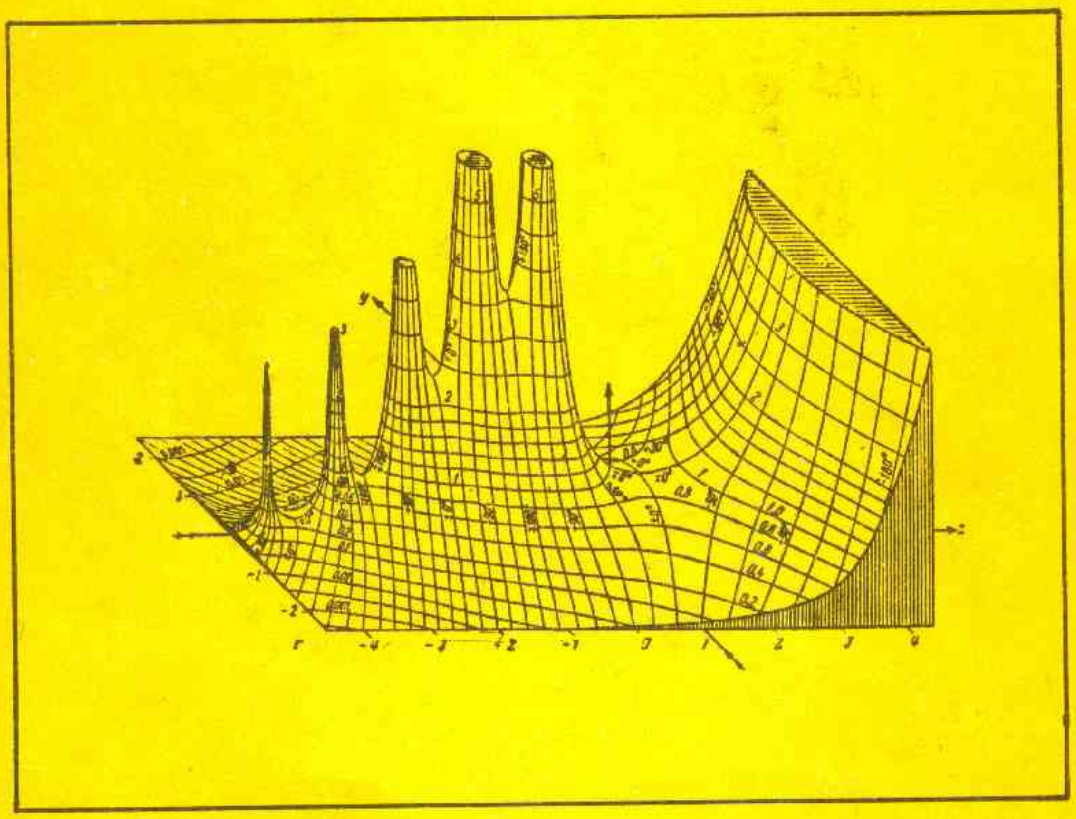
جهاد دانشگاهی

جنگ ریاضی دانشجو



جلد دوم، مهر ۱۳۶۷

به‌همت جمعی از دانشجویان گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران

جنگ ریاضی دانشجو

به‌همت جمعی از دانشجویان گروه ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه تهران

هیات تحریریه: شاهین آجودانی نمینی
امیر اکبری مجد آبادنو
ناصر بروجردیان
کامبیز محمودیان
بهزاد منوچهریان

مسؤول اجرائی: بهزاد منوچهریان

ویراستار: سیامک کاظمی

مسؤول فنی و صفحه‌آرا: نادر کثیری

حروفچینی: عبدی
چاپ:
جلد دوم، مهر ۱۳۶۷
بها: ۴۰۰ ریال
پخش: نشر روز، صندوق پستی ۱۴۹۹-۱۳۱۴۵، تلفن ۶۴۰۷۸۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

ناشر: جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

فهرست

مقدمه — دو

مقالات بلند

نظری اجمالی بر سیر تکامل نظریهٔ گروهها — ایزرائل کلاینر — ۱
مجموعهٔ محدب چیست؟ — ویکتور کلی — ۲۹
انتگرال لبنونهارت اویلر: نگرشی تاریخی بر تابع گاما — فلیپ دیویس — ۵۱
میدانهای اقلیدسی اعداد — هندریك لنسترا — ۷۳
معماری بنای ریاضیات — نیکولا بوربا کی — ۸۹
ملاحظاتی پیرامون مفهوم حد — روث ریکا استرویك — ۱۰۳
نگاهی به $1+2+\cdots+n$ از دیدگاه ریاضیات گسسته — لورن لارسن — ۱۱۳
جهان نیوتنی — روبرت هال — ۱۲۹
برنولیها و سری همساز — ویلیام دانهم — ۱۳۴
گروههایی که اجتماع سه زیرگروه هستند — هایمر، برایان. مویر — ۱۴۵

مقالات کوتاه

میز ناپدید شونده — لاری کنوپ — ۱۴۸
شمارشپذیری مجموعه‌ها — استفن کمپبل — ۱۵۰
برهان دیگری از قضیهٔ کوشی درمورد گروهها — جیمز مك کی — ۱۵۱
نکته‌ای درباب چندجمله‌ایهای مشخصه — ژوزف اشمید — ۱۵۲

گزارشها

گزارشی از سمینار ریاضی — بهزاد منوچهریان — ۱۵۳
نقش حل مسئله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان — پرویز شهریاری — ۱۵۴
تدریس کامپیوتر در نیکاراگوئه — مارلین سنت، آرتور وین — ۱۵۶
نظری اجمالی برکتابهای ریاضی منتشر شدهٔ دانشگاه تهران — بهزاد منوچهریان — ۱۶۰

تکملهٔ فهرست اسامی فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران — ۱۶۵

تصحیح — ۱۶۶

نظریهٔ گروهها مطرح می‌شود، به‌اختصار ذکر می‌شوند. من‌جمله مطالب زیر می‌آیند: مفاهیم گروه (مجرد)، زیرگروه نرمال، گروه خارج قسمت، گروه ساده، گروه آزاد، یکریختی، همریختی، خودریختی، سری ترکیبی، حاصلضرب مستقیم. قضایای منسوب به‌لاگرانژ، کوشی، کیلی، ژوردان، هولدر، نظریهٔ گروههای جایگشتی و نظریهٔ گروههای آبلی. درعین‌حال سعی کرده‌ایم بین جوانب تکنیکی و اطلاعات و تعابیر مقدماتی، توازنی وجود داشته باشد.

بررسی ما از سیر تکامل نظریهٔ گروهها به‌چند مرحله تقسیم می‌شود که بدین قرارند:

۱. منابع نظریهٔ گروهها.
۲. توسعهٔ نظریه‌های «تخصصی» گروهها.
۳. ظهور تجرید در نظریهٔ گروهها.
۴. تثبیت مفهوم مجرد گروه، طلوع نظریهٔ مجرد گروهها.
۵. انشعاب در سیر پیشرفت نظریهٔ گروهها.

پیش از آنکه به‌ترتیب به‌هریك از مراحل بپردازیم، اشاره‌ای داریم به‌زمینه‌ای در کل ریاضیات و بالاخص در جبر، که نظریهٔ گروهها در درون آن رشد یافت. هرچند "داستان" ما در مورد سیر تکامل نظریهٔ گروهها درسال ۱۷۷۰ آغاز می‌شود و تا قرن بیستم ادامه‌می‌یابد، ولی پیشرفتهای اساسی درقرن نوزدهم به‌دست آمدند. برخی از مشخصات کلی ریاضی آن قرن که در تکامل نظریهٔ گروهها مؤثر بودند، عبارت‌اند از: (الف) علاقهٔ وافر به‌دقت زیاد؛ (ب) پیدایش تجرید؛ (ج) تولد دوبارهٔ روش اصل موضوعی؛ (د) در نظر گرفتن ریاضیات به‌عنوان یکی از فعالیتهای بشری که بدون مراجعه به‌پدیده‌های فیزیکی یا انگیزهٔ گرفتن از آنها قابل‌انجام است. هریك از موارد فوق ارزش بررسی جامع وکاملی را دارند اما چنین‌کاری از اهداف (وحجم) این مقاله فراتر می‌رود.

در اواخر قرن هجدهم (بخش اعظم) جبر عبارت بود از مطالعهٔ جوابهای معادلات چندجمله‌ای. در قسرن بیستم جبر به‌دانش مطالعهٔ دستگاههای اصل‌موضوعی مجرد تبدیل شده است. این تحول از (اصطلاحاً) جبرکلاسیك و معادلات چندجمله‌ای به (اصطلاحاً) جبر مدرن و دستگاههای اصل موضوعی در قرن نوزدهم انجام پذیرفت. علاوه بر نظریهٔ گروهها، ساختمانهای حلقه‌های تعویض‌پذیر، میدانها، حلقه‌های تعویض‌ناپذیر و فضاهای برداری نیز ظاهر گشتند. این نظریات نیز در کنار نظریهٔ گروهها وگاهی درارتباط با نظریهٔ گروهها توسعه یافتند مثلاً نظریهٔ گالوا هم گروهها وهم میدانها را دربرداشت، نظریهٔ جبری اعداد شامل نظریهٔ گروهها به‌اضافهٔ نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر و نظریهٔ میدانها بود ونظریهٔ نمایش گروهها ترکیبی از نظریهٔ گروهها، جبر تعویض‌ناپذیر و جبر خطی بود.

۱. منابع نظریهٔ گروهها

تکامل نظریهٔ گروهها ناشی ازچهار جریان اصلی است که عبارت‌اند از (با ذکرنام خالق و تاریخ آن):

الف) جبرکلاسیك (لاگرانژ، ۱۷۷۰)
ب) نظریهٔ اعداد (گاوس، ۱۸۰۱)
ج) هندسه (کلاین، ۱۸۷۴)
د) آنالیز (لی، ۱۸۷۴؛ پوانکاره وکلاین، ۱۸۷۶)

هریك از موارد فوق را به‌نوبت شرح می‌دهیم.

الف) جبرکلاسیك (ژوزف لویی لاگرانژ، ۱۷۷۰)

در سال ۱۷۷۰، و زمانی که لاگرانژ رسالهٔ مهم خود "ملاحظاتی دربارهٔ حل جبری معادلات"[1] را می‌نوشت، مسائل اصلی جبر در ارتباط با معادلات چندجمله‌ای و عبارت بودند از پرسشهای "نظری" در زمینهٔ وجود و ماهیت ریشه‌ها (آیا هر معادله ریشه دارد؟ چند ریشه دارد؟ آیا ریشه‌ها حقیقی، مختلط، مثبت، ویا منفی هستند؟) و پرسشهای عملی در ارتباط با روش یافتن ریشه‌ها. در مورد اخیر، روشهای دقیق و روشهای تقریبی موجود بود. درآنچه به‌دنبال می‌آید، ما فقط روشهای دقیق را بررسی می‌کنیم.

در حدود ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد بابلیان روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم (اساساً با استفاده از روش مربع‌کامل‌کردن) را می‌دانستند. روشهای جبری برای‌حل معادلات درجهٔ سوم و چهارم نیز حدوداً درسال ۱۵۴۰ کشف شد. در دو قرن بعد، یکی از مسائل اصلی، حل جبری معادلهٔ درجهٔ پنجم بود و لاگرانژ در مقالهٔ فوق‌الذکر به‌آن پرداخت.

دراین مقاله لاگرانژ نخست روشهای شناخته شدهٔ حل معادلات درجهٔ سوم وچهارم را (که توسط ویت، دکارت، اویلر، و بزوت ارائه شده بود) مورد بررسی‌قرارداد ونشان دادکه خصیصهٔ مشترك همهٔ این روشها تحویل معادلات به‌معادلات کمکی موسوم به‌معادلات حلال است که درجهٔ اینها ازمعادلات نخست یك واحدکمتر است. سپس لاگرانژ سعی‌کرد روشی مشابه برای معادلات چندجمله‌ای درجهٔ n بیابد. وی به‌هر معادله، معادلهٔ حلالی بدین‌صورت نظیر کرد: فرض کنیم معادلهٔ اصلی $f(x)$ بوده وریشه‌های آن $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشند. تابع گویایی از ریشه‌ها و ضرایب $f(x)$ به‌صورت $R(x_1, \cdots, x_n)$ انتخاب می‌کنیم. (لاگرانژ روشهایی برای این‌کار ارائه کرد.) مقادیر مختلف $R(x_1, \cdots, x_n)$ تحت $n!$ جایگشت از ریشه‌های $f(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر این مقادیر را با $y_1, y_2, \cdots, y_k$ نمایش دهیم، معادلهٔ حلال عبارت است از $g(x) = (x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_k)$. (لاگرانژ نشان دادکه k، $n!$ را عاد می‌کند که این‌منشأ همان قضیه‌ای است که امروزه به‌قضیهٔ لاگرانژ درنظریهٔ گروهها موسوم است.) برای مثال، اگر $f(x)$ یك معادلهٔ درجهٔ چهار با ریشه‌های x_1, x_2, x_3, x_4 باشد و $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$ را برابر $x_1x_2 + x_3x_4$ بگیریم، از آنجاکه با اثر دادن ۲۴ جایگشت از x_1, x_2, x_3, x_4 بر تابع فوق تنها سه مقدارمتمایزحاصل می‌شود، معادلهٔ حلال یك معادلهٔ درجهٔ چهار، از درجهٔ سه خواهد بود. اما با اعمال این روش در مورد معادلهٔ

1. Réflexions sur la résolution algébrique des équations



اواریست گالوا

درجهٔ پنج، معادلهٔ حلال از درجهٔ شش خواهد بود!

هر چند لاگرانژ موفق به‌حل مسئلهٔ حل‌پذیری جبری معادلهٔ درجهٔ پنجم نشد، کار وی ازاهمیت بسزایی برخوردار است. وی برای نخستین‌بار پیوندی بین جوابهای یك معادلهٔ چندجمله‌ای وجایگشتهای ریشه‌هایش برقرارساخت. در واقع، مطالعهٔ جایگشتهای ریشه‌های یك معادله، اساس نظریهٔ عمومی لاگرانژ دربارهٔ معادلات جبری را تشکیل داد. او فکر می‌کرد که این نظریه، "اصول درست حل معادلات" را تشکیل می‌دهد. (این ایده توسط گالوا به‌تحقق‌پیوست.) هرچندلاگرانژ تنها ازجایگشتهاصحبت می‌کرد وتوجهی به "حساب" جایگشتها نداشت (هیچ صحبتی از ترکیب دوجایگشت و یا بسته بودن تحت این ترکیب نشده است)، می‌توان ادعا کرد که نطفهٔ مفهوم گروه (به‌عنوان یك گروه جایگشتی) درکارهای وی بسته شد. برای ملاحظهٔ جزئیات به [۱۲، ۱۶، ۱۹، ۲۵، و ۳۳] مراجعه کنید.

ب) نظریهٔ اعداد (کارل فریدریش گاوس، ۱۸۰۱)

در سال ۱۸۰۱ گاوس اغلب کارهایی را که تا آن زمان در نظریهٔ اعداد انجام شده بود در رساله‌ای با عنوان تحقیقات حسابی[1] جمعبندی کرد. این رساله، به‌علاوه، الهام‌دهندهٔ خطوط جدیدی بود که یك قرن تمام، ریاضیدانان را به‌خود مشغول داشت. تأثیر تحقیقات بر نظریهٔ گروهها چندان عمیق است که می‌توان گفت اساساً نظریهٔ گروههای آبلی متناهی در این‌رساله بنیاد نهاده شد. درواقع، گاوس بدون هیچگونه استفاده‌ای از اصطلاحات نظریهٔ گروهها، بسیاری از خواص مهم این گروهها را بررسی کرد. این گروهها در چهار هیأت متفاوت ظاهر می‌گشتند. گروه جمعی اعداد صحیح به‌پیمانهٔ m؛ گروه ضربی اعداد صحیحی که نسبت به m اول هستند، به‌پیمانهٔ m؛ گروه رده‌های هم‌ارزی فرمهای دوتایی درجهٔ دوم؛

1. *Disquisitiones Arithmeticae*

گروه ریشه‌های nام یك. هرچند این مثالها در مباحث نظریهٔ اعداد ظاهر می‌شدند، گاوس با آنها به‌عنوان گروههای آبلی رفتار می‌کرد و اثباتهایی را به‌کار می‌گرفت که‌نمونه‌های روشنی از اثباتهای جبری جدید هستند.

برای مثال. اعداد صحیح نامنفی به‌پیمانهٔ p (p یك عدد اول) را درنظر بگیرید. گاوس نشان داد که همهٔ آنها عبارت‌اند از توانهای یك عنصر؛ یعنی گروه Z_p^* متشکل از این اعداد، دوری است. به‌علاوه، او تعداد مولدهای این گروه را محاسبه کرد. (نشان داد که این تعداد برابر $\phi(p-1)$ است که در آن ϕ تابع اویلر می‌باشد.) برای هرعنصر مفروض Z_p^* مرتبهٔ عنصر را تعریف کرد (بدون استفاده ازاین اصطلاحات) ونشان داد که مرتبهٔ یك عنصر مقسوم‌علیهی از $p-1$ می‌باشد. سپس با استفاده از این نتیجه، "قضیهٔ کوچك" فرما را ثابت کرد: این قضیه چنین است: اگر p مقسوم علیهی از a نباشد: (پیمانهٔ p) $a^{p-1}=1$؛ به‌این ترتیب، گاوس مفاهیم نظریهٔ گروهها را برای اثبات نتایجی در نظریهٔ اعداد به‌کار گرفت. سپس نشان داد که اگر t عدد صحیح مثبتی باشد که $p-1$ را عاد می‌کند، Z_p^* عنصری از مرتبهٔ p خواهد داشت؛ که این مطلب عکس قضیهٔ لاگرانژ در مورد گروههای دوری است.

درمورد ریشه‌های nام یك (که از معادلات سیکلوتومیك ناشی می‌شدند)، نشان داد که اینها نیز تشکیل گروهی دوری می‌دهند وبسیاری از سؤالاتی‌را که درمورد Z_p^* مطرح کرده و پاسخ داده بود، درمورد این گروه نیز مطرح کرده و پاسخ داد.

قدمت مسئلهٔ نمایش اعداد صحیح به‌شکل فرمهای دوتایی درجهٔ دوم به‌دورهٔ فرما، اوایل قرن هفدهم، باز می‌گردد (برای نمونه می‌توان به‌این قضیهٔ فرما اشاره کرد: "هرعدد اول به‌صورت $4n+1$ را می‌توان به‌صورت مجموع دومربع نوشت.") گاوس بخش اعظم تحقیقات را به‌بررسی جامعی ازفرمهای دوتایی درجهٔ دوم ونمایش اعداد صحیح به‌صورت این‌گونه فرمها اختصاص داد. (یك فرم دوتایی درجهٔ دوم، عبارتی است به شکل $ax^2+bxy+cy^2$ که a، b، و c اعداد صحیح می‌باشند.) وترکیب چنین فرمهایی را معرفی کرد، وملاحظه کرد که اگر K و K' دوفرم باشند، ترکیب آنها را می‌توان با $K+K'$ نمایش‌داد. سپس نشان داد که این قانون ترکیب، شرکتپذیر و تعویض‌پذیر است؛ یك عنصر بی‌اثر دارد، وهرفرم یك وارون دارد و بنابراین همهٔ خواص یك گروه آبلی را بررسی کرد.

علی‌رغم این بینش قابل ملاحظه‌ای که گاوس داشت، نباید نتیجه گرفت که او مفهوم یك گروه مجرد و یا حتی یك گروه آبلی متناهی را در ذهن‌داشته است. هرچند در تحقیقات استدلالهای وی کاملاً کلی‌اند. اما هریك از انواع "گروه" را جداگانه بررسی کرد و هیچ روش مشترکی را که درهمهٔ حالات قابل استفاده باشد و بحث را از دیدگاه نظریه گروهها وحدت بخشد به‌کار نبرد. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۵، ۹، ۲۵، ۳۰، و ۳۳] مراجعه کنید.

ج) هندسه (فلیکس کلاین، ۱۸۷۲)

دراینجا مروری داریم برسخنرانی مشهور و مؤثر کلاین [۱۸] که درسال ۱۸۷۲ و به‌مناسبت



فلیکس کلاین

پذیرشش به‌عضویت هیأت علمی دانشگاه ارلانگن تحت عنوان "بررسی تطبیقی پژوهشهای اخیر در هندسه" ایرادکرد. هدف این سخنرانی، که به برنامه ارلانگن موسوم است، در نظر گرفتن هندسه به‌عنوان دانش مطالعهٔ ناورداها تحت گروههای تبدیلی گوناگون بود. در اینجا گروههایی چون گروههای تصویری، گروه حرکات صلب، گروه تشابهات، گروه هذلولوی، گروه بیضوی و هندسه‌های متناظر آنها ظاهر می‌شوند. (گروه آفین را کلاین ذکر نکرد.) حال برخی از پیش زمینه‌های برنامهٔ ارلانگن کلاین را شرح می‌دهیم.

قرن نوزدهم شاهد رشد نا گهانی هندسه، هم از نظر عمق و هم از نظر وسعت بود. هندسه‌های جدید ظاهر شدند: هندسهٔ تصویری، هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ دیفرانسیل، هندسهٔ جبری، هندسهٔ n-بُعدی، و هندسهٔ گراسمنی توسیع. روشهای مختلف هندسی برای احراز برتری رقابت می‌کردند. قیاسی دربرابر تحلیلی، مترید دربرابر تصویری، در اواسط قرن مسئلهٔ مهمی مطرح شدکه عبارت بود از: رده‌بندی روابط و ارتباطات متقابل هندسه‌ها و روشهای هندسی مختلف. این مسئله به‌مطالعهٔ "روابط هندسی" انجامید و توجه ریاضیدانان به مطالعهٔ اشکالی که تحت تبدیلات ناوردا هستند جلب شد و اندکی بعد خود تبدیلات در مرکز توجه قرار گرفتند. بنابراین مطالعهٔ روابط هندسی اشکال به مطالعهٔ تبدیلات متناظر انجامید. انواع گوناگون تبدیلات (همراستایی، تبدیلات مستدیر، تبدیلات انعکاسی، تبدیلات آفین) به موضوعهایی برای مطالعات تخصصی تبدیل شدند. نتیجتاً، ارتباط منطقی تبدیلها بررسی شد و به‌مسئلهٔ رده‌بندی تبدیلات و سرانجام به‌کار کلاین در استنتاج نظریهٔ گروهی هندسه انجامید.

استفادهٔ کلاین از گروهها در هندسه، مرحلهٔ نهایی انتقال ترتیب به‌هندسه بود. یك مرحلهٔ میانی، برپایی نخستین نظریهٔ اساسی رده‌بندی در هندسه، قضیهٔ ناورداهای کیلی-سیلوستر، در ۱۸۵۰ بود. در این مرحله مطالعهٔ ناورداهای فرمها تحت تبدیلاتی از متغیرهایشان مورد



سوفوس لی

نظر بود. می‌توان گفت این نظریهٔ رده‌بندی که پیش از برنامهٔ ارلانگن کلاین مطرح شد، به‌طور ضمنی ایدهٔ نظریهٔ گروهها را در بر داشت. البته کلاین صریحاً از گروهها استفاده می‌کرد. (برای ملاحظهٔ شرح کاملی از تفکر مبتنی برنظریهٔ گروهها در هندسه، که به‌برنامهٔ ارلانگن کلاین انجامید، به [۳۳] مراجعه کنید.) در بخش دیگری (۲-ح) به اهمیت برنامهٔ ارلانگن کلاین (و دیگر کارهایش) در تکامل نظریهٔ گروهها اشاره خواهیم داشت. از آنجاکه این برنامه صد سال پس از کار لاگرانژ و ۸۰ سال پس از کار گاوس انجام شد، پس از شرح بخشی از سیر تکامل نظریهٔ گروهها که با کار لاگرانژ و گاوس آغاز شده و حدوداً به‌سال ۱۸۷۰ ختم می‌شود، اهمیتش بیشتر جلوه خواهد کرد.

د) آنالیز (سوفوس لی، ۱۸۷۴؛ هانری پوانکاره و فلیکس کلاین، ۱۸۷۶)

در ۱۸۷۴، لی نظریهٔ گروههای تبدیلی (پیوستهٔ) خود را ارائه کرد. این نظریه اساساً همان چیزی است که امروزه به‌عنوان نظریهٔ گروههای لی معروف است. این گروهها با تبدیلات زیر نمایش داده می‌شوند

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

که در آن f_iها توابعی تحلیلی از a_iها و x_iها می‌باشند (x_iها و a_iها می‌توانند مقادیر مختلط یا حقیقی داشته باشند). برای مثال تبدیلاتی به‌صورت

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

که در آن a، b، c، و d اعدادی حقیقی هستند و $ad - bc \neq 0$ تشکیل یك گروه تبدیلی پیوسته می‌دهند.

لی خود را جانشین گالوا و آبل می‌دانست که آنچه را اینان درمورد معادلات جبری انجام داده بودند، وی برای معادلات دیفرانسیل انجام می‌داد. او در کارش از این مطلب الهام گرفته بود که تقریباً همهٔ معادلات دیفرانسیلی که بـا روشهای قدیمیتر انتگرال‌گیری شده‌اند تحت گروههای تبدیلی پیوسته‌ای که به‌سادگی می‌توان ساخت، ناوردا هستند. سپس به‌طور کلی به بـررسی معادلات دیفرانسیلی پرداخت کـه تحت یك گروه پیوستهٔ مفروض، ناوردا هستند وخواص ساده‌ای از این معادلات را که ازخواص شناخته شدهٔ گروه مفروض ناشی می‌شود، بررسی کرد. هرچند لی موفق نشد که عملاً نظریهٔ گالوای معادلات دیفرانسیل را فرمولبندی کند، اما کار وی درفرمولبندیهای این نظریه که بعدها توسط پیکار (۱۸۸۳–۱۸۸۷) و ویزوت (۱۸۹۲) انجام پذیرفت، از اهمیت اساسی برخوردار است.

پوانکاره و کلاین کارشان را در زمینهٔ توابع "خوددریخت" و گروههای متناظر آنها درحدود سال ۱۸۷۶ آغاز کـردند. توابع خوددریخت (کـه تعمیمی از تـوابع مستدیر، هذلولوی، بیضوی، و دیگر توابع آنالیز مقدماتی هستند) عبارت‌اند ازتوابعی از یك متغیر مختلط z، که درون ناحیه‌ای چون D تحلیلی بوده و تحت گروه تبدیلات

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq 0 \text{ و } a، b، c، \text{ و } d \text{ حقیقی بوده و})$$

یا تحت یکی از زیرگروههای آن ناوردا هستند. به‌علاوه، گروه مورد نظر می‌بایست ناپیوسته باشد (هرقلمرو فشرده فقط شامل تعداد متناهی تبدیل از یك نقطه بـاشد). مثالهایی از این گروهها عبارت‌اند ازگروه پیمانه‌ای (کـه درآن a، b، c، و d اعداد صحیح بـوده و $ad-bc=1$)، که با توابع پیمانه‌ای بیضوی متناظرند و گروههای فوشین (که در آن a، b، c، و d، اعداد حقیقی هستند و $ad-bc=1$)، کـه با توابع خوددریخت فوشین متناظرند. مانند برنامهٔ ارلانگن کلاین، اثر این کارها در نظریهٔ گروهها را نیز در بخش ۲-ج شرح خواهیم داد.

۲. توسعهٔ نظریه‌های «تخصصی» گروهها

دربخش ۱ چهارمنبع اساسی درتکامل نظریهٔ گروهها را به اختصار شرح دادیم. منبع اول ــ جبر کلاسیك ــ به‌نظریهٔ گروههای جایگشتی انجامید. منبع دوم ــ نظریهٔ اعداد ــ به‌نظریهٔ گروههای آبلی انجامید، منابع سوم و چهارم ــ هندسه و آنالیز ــ به‌نظریهٔ گروههای تبدیلی انجامیدند. حال مختصراً برخی از پیشرفتهایی را که دراین نظریه‌های خاص به‌دست‌آمد، ذکر می‌کنیم.

الف) گروههای جایگشتی

چنانکه پیشتر گفتیم، ازسال ۱۷۷۰ و با کار لاگرانژ، مطالعهٔ جایگشتها در ارتباط با مطالعهٔ جوابهای معادلات آغـاز شد. کار لاگرانژ احتمالاً نخستین نمونهٔ آشکار از تفکرمبتنی بر نظریهٔ گروهها در ریاضیات می‌باشد ومستقیماً به‌کارهای روفینی، آبل، و گالوا درثلث اول

قرن نوزدهم و مفهوم گروه جایگشتی انجامید.

روفینی و آبل با استفاده از ایده‌های لاگرانژ درمورد حلالها، حل‌ناپذیری معادلات درجهٔ پنجم‌را ثابت کردند. لاگرانژ نشان داد که یك‌شرط لازم حل‌پذیری معادلهٔ چندجمله‌ای کلی از درجهٔ n، وجود معادلهٔ حلالی از درجهٔ کوچکتر از n است. روفینی و آبل نشان دادند که به‌ازای $n > 4$ معادلهٔ حلال وجود ندارد. در این فرایند به‌میزان معتنابهی نظریهٔ جایگشتها را توسعه‌دادند. (برای ملاحظهٔ جزئیات به [۲، ۹، ۱۹، ۲۳–۲۵، ۳۰، و ۳۳] مراجعه کنید.) با این‌حال، گالوا بود که سبب پیشرفت اساسی درمفهوم نظریهٔ جایگشتهاشد وبسیاری وی را به‌عنوان بنیادگزار نظریهٔ گروهها (ی جایگشتی) می‌شناسند.

هدف گالوا فراتر از یافتن روشی برای حل‌پذیری معادلات بـود. وی می‌خواست بصیرتی از اصول کلی به‌دست‌آورد و از روشهای پیشینیان رضایتی نداشت. درجایی چنین می‌نویسد: «ازآغاز این‌قرن، روشهای محاسباتی به‌قدری پیچیده شده‌اند که حصول پیشرفتی ازطریق آنها غیرممکن شده است.» (کایرنان [۱۹، ص ۹۲])

گالوا به تمایز بین "نظریهٔ گالوا" (یعنی تناظر بین میدانها و گروهها) و کاربردش در حل معادلات پی بـرد و چنین نوشت کـه «اصول کلی و فقط یك کاربرد از» نظریه را تنظیم کرده است [۱۹، ص ۴۲]. «بسیاری از شارحان اولیهٔ نظریهٔ گالوا این تمایز را درك نکردند و درنتیجه تنها برکاربردهای این نظریه تأکید کردند.» (کایرنان [۱۹])

گالوا نخستین کسی بود که واژهٔ گروه را به معنای فنی آن به‌کاربرد و گردایه‌ای از جایگشتها را که تحت عمل ترکیب بسته باشد به‌این‌نام خواند: «اگر S و T جایگشتهایی از یك گروه باشند، ST نیز جایگشتی از همان گروه خواهد بـود» [۳۳، ص ۱۱۱]. وی دریافت که مهمترین خواص یك معادلهٔ جبری، درخواص گروهی که به‌طور یکتا به‌آن‌نظیر می‌شود، "گروه معادله" منعکس می‌شوند. برای توصیف این خـواص وی مفهوم اساسی زیرگروه نرمال را معرفی نموده و از آن استفادهٔ شایانی کرد. درحالی که نظریهٔ معادلات حلال، لاگرانژ، روفینی، و آبل را مشغول خود ساخته بود، ایدهٔ اساسی گالوا این بود که ازکنار آنها بگذرد زیرا ساختن یك معادلهٔ حلال نیازمند مهارت زیادی است ومبتنی برهیچ روش آشکاری نیست. گالوا دریافت که وجود یك معادلهٔ حلال با وجود زیرگروه نرمالی با اندیس اول درگروه معادله هم‌ارز است. واین کشف توجه وی‌را ازمعادلهٔ حلال به گروه معادله و زیرگروههایش منتقل ساخت.

گالوا گروه یك معادله را بدین‌صورت تعریف می‌کند. [۱۹، ص ۸۰]

> گیریم معادله‌ای داده شده باشد که m ریشه‌اش $a, b, c, \ldots$ بـاشند. همواره می‌تـوان گروهی ازجایگشتهای حروف $a, b, c, \ldots$ با این‌خواص یافت: (۱) هرتابعی‌از ریشه‌ها که تحت همهٔ جایگشتهای این‌گروه ناوردا باشد، یك تابع گویا می‌باشد. (تابع گویایی‌از ضرایب وکمیتهای الحاقی). (۲) به‌عکس، هرتابعی‌از ریشه‌ها که بتوان‌آن را به‌صورت گویا بیان‌کرد، تحت این جایگشتها ناوردا‌ست.

تعریف فوق اساساً بدین معنی است که گروه یك معادله متشکل است ازآن دسته از

جایگشتهای ریشه‌های معادله که همهٔ روابط بین ریشه‌ها برروی میدان ضرایب معادله را ناوردا نگاه می‌دارند ــ و این تعریف در اساس با تعریف امروزی معادل است. البته تعریف، وجود چنین گروهی را تضمین نمی‌کند و بنابراین گالوا نخست وجود این گروه را به‌اثبات رسانید؛ سپس بررسی کرد که اگر عناصر جدیدی به "میدان مبنا"، F، اضافه شود، گروه معادله چگونه تغییر می‌کند. روش به طرز شگفت‌انگیزی به روشهای استاندارد کنونی شباهت دارد.

فهم و اشاعهٔ کار گالوا به‌کندی انجام پذیرفت. در واقع، با وجودی که این کار در حدود سال ۱۸۳۰ انجام شد، درسال ۱۸۴۶ و پس از مرگ وی توسط لیوویل انتشار یافت. سوای این دستاوردهای تکنیکی، گالوا «سبب توسعهٔ ریاضیات در دو راستا شد. وی قضایایی را مطرح کرد، ولی بدون اثبات باقی گذاشت، که برهانهایی مبتنی برمحاسبات و مفاهیم پیچیدهٔ جدید را طلب می‌کنند. همچنین پوشاندن شکافهای دستاورد وی اساساً نیازمند روشن‌شدن روشهای وی و عصارهٔ نظریه گروهی آنها بود.» [۳۳]. برای ملاحظهٔ جزئیات به [۱۲، ۱۹، ۲۳، ۲۵، ۲۹، ۳۱، و ۳۳] مراجعه کنید.

شخص دیگری که سهم عمده‌ای در بسط نظریهٔ گروههای جایگشتی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم داشت، کوشی برد. وی درچند مقالهٔ مهم در ۱۸۱۵ و ۱۸۴۴ نظریهٔ گروههای جایگشتی را به‌عنوان موضوعی مستقل مطرح ساخت. (پیش از کوشی، گروههای جایگشتی موضوع مطالعهٔ مستقل نبودند ولی ابزار نسبتاً مفیدی برای بررسی جوابهای یك معادله به‌شمار می‌آمدند.) هرچند کوشی به‌خوبی از کارلاگرانژ و روفینی آگاه بود (دراین زمان دستاورد گالوا هنوز انتشار نیافته بود)، واسینگ عقیده دارد که کوشی مستقیماً از فرمولبندی حل معادلات جبری از دیدگاه نظریهٔ گروهها، الهام نگرفته بود. [۳۳]

در این کارها، کوشی نخستین توصیف سیستماتیك از گروههای جایگشتی را ارائه کرد. درمقالات سال ۱۸۱۵ هیچ نام خاصی برای مجموعه‌ای از جایگشتها که تحت عمل ترکیب بسته‌اند، به‌کار نبرد. اما اهمیت آنها را دریافت و به‌تعداد عناصر چنین مجموعه‌ای نامی اطلاق کرد، و آن را "اندیس تقسیم" نامید. در مقالات سال ۱۸۴۴ مفهوم گروهی از جایگشتها را که توسط عناصر معینی تولید شده‌اند، تعریف کرد [۲۲، ص ۶۵].

> هرگاه یك یا چند جایگشت شامل همه، یا تعدادی از، حروف $x, y, z, \ldots$ مفروض باشند، حاصلضربهای این جایگشتها درخودشان یا درعناصری دیگر، تحت هر ترتیب را جایگشتهای مشتق‌شده می‌نامیم. جایگشتهای مفروض به‌همراه جایگشتهای مشتق‌شده را دستگاهی از جایگشتهای مزدوج می‌نامیم.

کوشی در این کارها که بسیار تأثیرگذار بودند، چندین واژه، نماد و قضیه به‌نظریهٔ گروههای جایگشتی اضافه کرد، که هنوز باقی مانده‌اند. برای نمونه نماد جایگشتی $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$ را که امروزه نیز به‌کار می‌رود، و همچنین نماد جایگشتهای دوری را معرفی کرد. وی حاصلضرب دو جایگشت، درجهٔ یك جایگشت، جایگشت دوری و ترانهش را تعریف کرد.



کامیل ژوردان

تابع همانی را به‌عنوان یك جایگشت درنظر گرفت. وی آنچه را که امروزه حاصلضرب مستقیم دو گروه نامیده می‌شود، مورد بحث قرار داد و گروه متناوب را وسیعاً بررسی کرد. در اینجا، برخی از نتایجی که وی اثبات کرد، می‌آید:

۱) هرجایگشت زوج، حاصلضربی از دورهای سه‌بعدی است.

۲) اگر p (اول) مقسوم‌علیهی ازمرتبهٔ یك گروه باشد، زیر گروهی از مرتبهٔ p وجود دارد. (امروزه این مطلب به‌عنوان "قضیهٔ کوشی" شناخته می‌شود، هرچند نخستین بار گالوا بدون اثبات آن را بیان کرد.)

۳) همهٔ زیر گروههای S_3، S_4، S_5، و S_6 را معین کرد (با یك خطا در S_6).

۴) همهٔ جایگشتهایی که با یك جایگشت مفروض تعویض می‌شوند، تشکیل یك گروه می‌دهند (مرکزساز یك عنصر).

باید توجه کرد که همهٔ این نتایج درچهارچوب گروههای جایگشتی بیان و اثبات شد. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۶، ۸، ۲۳-۲۵، و ۳۳] مراجعه کنید.

تکامل بخش این دوخط توسعه ــ یك سمفونی از تمهای باشکوه گالوا و کوشی ــ مقالهٔ مهم و مؤثر ژوردان تحت عنوان (رساله‌ای دربارهٔ جایگشتها و معادلات جبری[1]) بود که در سال ۱۸۷۰ انتشار یافت. هرچند او درمقدمه چنین اظهار می‌کند که «هدف از این بررسی، توسعهٔ روش گالوا و و تبدیل آن به‌حوزهٔ مناسبی برای مطالعه است، از این‌طریق که نشان داده شود با چه سهولتی می‌توان همهٔ مسائل اصلی نظریهٔ معادلات را حل کرد.» اما در واقع نظریهٔ گروهها فی‌نفسه ــ نه به‌عنوان شاخه‌ای از نظریهٔ حل‌پذیری معادلات ــ هدف اصلی مطالعه قرار گرفت.

---

1. *Traité des substitutions et des équations algebriques*

تلاش برای ارائهٔ یك‌سنتز ریاضی بر اساس مفاهیم اساسی، از ویژگیهای قابل‌توجه کار ژوردان است (فلیکس کلاین)، به‌نظر می‌رسد که ژوردان مفهوم گروه (جایگشتی) را مفهومی اساسی می‌دانست. رهیافت او به‌وی امکان دادکه نتایج منسوب به‌کوشی، گالوا و دیگران را وحدت بخشد و توصیف یکپارچه‌ای ازآنها ارائه کند. کاربرد مفهوم گروه در نظریهٔ معادلات، هندسهٔ جبری، توابع متعالی، و مکانیك نظری نیز بخشی از این توصیف یکپارچه بود. «ژوردان درکتاب خود درسراسرهندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، ونظریهٔ توابع به‌جستجوی گروههای‌جایگشتی جالب پرداخته است.» (کلاین[۲۰]). در واقع، هدف او بررسی‌همهٔ شاخه‌هایی از ریاضیات بودکه نظریهٔ گروههای‌جایگشتی درآنها به‌کاررفته بود یامحتمل بودکه به‌کار رود. «این‌کتاب به‌مرور کل ریاضیات معاصر از دیدگاه وقوع تفکر نظریهٔ گروهی، از نوع جایگشتی می‌پردازد.» (واسینگ [۳۳])

رساله جوهر اصلی اغلب‌کارهای انتشاریافتهٔ ژوردان در زمینهٔ نظریهٔ گروهها تا زمان انتشارکتاب را دربر دارد (درطول سالهای ۱۸۶۰–۱۸۸۰ او بیش‌از ۳۰ مقاله در زمینهٔ نظریهٔ گروهها نگاشت.) و با معرفی برخی از مفاهیم اساسی توجه خواننده را به‌تعداد کثیری ازمسائل مشکل‌جلب می‌کند. برای‌مثال، ژوردان صریحاً نمادهایی‌برای خودریختی و همریختی گروهها (ی جایگشتی) معرفی‌می‌کند و برای نخستین‌بار واژهٔ "گروه حل‌پذیر" را درمعنای فنی آن به‌کار می‌برد؛ به‌تعریف سری ترکیبی می‌پردازد و بخشی از قضیهٔ ژوردان–هولدر را به‌اثبات می‌رساند، یعنی ثابت می‌کندکه اندیسها در دوسری‌ترکیبی‌یکسان هستند (در آن زمان هنوز مفهوم گروه خارج قسمت، صریحاً، شناخته شده نبود.)؛ بررسی مبسوطی از تعدی و اولیه بودن گروههای جایگشتی به‌عمل می‌آورد و به‌نتایجی می‌رسدکه بسیاری از آنها تا به‌امروز معتبر مانده‌اند. به‌علاوه ژوردان برهانی نیز بر این قضیه‌که به‌ازای $n > 4$، A_n ساده است، ارائه داد.

بخش مهمی از این رساله به‌مطالعهٔ "گروههای خطی" و برخی از زیرگروههای آن اختصاص دارد. امروزه این گروهها راگروههای‌کلاسیك می‌نامیم وعبارتند ازگروه خطی عمومی، گروه متعامد، وگروه خطی خاص. ژوردان این‌گروهها را تنها به روی میدانهای متناهی بررسی‌کرد و ساده بودن آنها را در برخی از حالات ثابت‌کرد. اما باید تذکر دادکه این‌گروهها را به‌عنوان‌گروههای جایگشتی بررسی می‌کرد نه به‌عنوان گروههای ماتریسی، یا تبدیلات خطی. [۲۹ و ۳۳]

کتاب ژوردان واقعهٔ برجسته‌ای در سیر تکامل نظریهٔ گروههاست. هرچند بزودی دیدگاه نظریهٔ جایگشتی، جای خود را به مفهوم گروه به‌عنوان گروهی از تبدیلات داد. (بند (ج) این بخش را ببینید). «رساله نقطهٔ عطفی است در سیر تکامل وکاربرد مفهوم‌نظریهٔ جایگشتی گروه. این‌کتاب بیانگرعلاقهٔ وافر ژوردان برای به‌دست‌آوردن یك سنتز مفهومی از ریاضیات آن زمان می‌باشد، او سعی داشت با تکیه بر مفهوم گروه جایگشتی به‌چنین سنتزی دست یابد، که مراحل بعدی گسترش ریاضی نشان داد در واقع چنین محدودیتی لازم نیست، که این‌هم سبب افتخارکتاب ژوردان است و هم محدودیتهای آن را نشان می‌دهد (واسینگ [۳۳]). برای جزئیات [۹، ۱۳، ۱۹، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۹، و ۳۳] را ببینید.

ب) گروههای آبلی

چنانچه پیشتر تذکر دادیم، منشأ اصلی نظریهٔ گروههای آبلی، نظریهٔ اعداد بود و با تحقیقات گاوس آغازشد. برخلاف نظریهٔ جایگشتها انواع تفکرنظریهٔ گروهی دراین‌زمینه، تقریباً تا ثلث آخر قرن نوزدهم تنها به‌صورت ضمنی و غیرمستقل مطرح بودند. تا آن زمان هیچگاه از واژهٔ "گروه" صریحاً استفاده نشد وهیچگونه ارتباطی با نظریهٔ در حال رشدگروههای جایگشتی برقرار نشد. حال نمونه‌ای از برخی ازکارهای نظریهٔ‌گروهی را که به‌طور ضمنی در نظریهٔ اعداد انجام شده‌اند، بخصوص در نظریهٔ اعداد جبری، ذکر می‌کنیم.

نظریهٔ اعداد جبری درارتباط با حدس فرما در زمینهٔ معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$؛ نظریهٔ فرمهای درجهٔ دوم گاوس وقوانین تقابلی بالاتر پدید آمد. میدانهای جبری اعداد وخواص حسابی آنها اهداف اصلی مطالعه بودند. در ۱۸۴۶ دیریکله، یکه‌های یك میدان اعداد جبری‌را بررسی‌کرد ونشان دادکه (با اصطلاحات ما) گروه این یکه‌ها حاصلضرب مستقیم یك گروه دوری متناهی ویك گروه آبلی آزاد از رتبهٔ متناهی می‌باشد. تقریباً در همین‌زمان، کومر "اعداد ایده‌آل" خویش را معرفی‌کرد، و یك رابطهٔ هم‌ارزی روی آنها تعریف‌کرد و از اینجا خواص اصلی تعداد رده‌های هم‌ارزی برای میدانهای سیکلوتومیك را نتیجه گرفت. (تعداد رده‌ها دریك میدان سیکلوتومیك، با اصطلاحات ما، مرتبهٔ‌گروه ردهٔ ایده‌آلی میدان سیکلوتومیك نامیده می‌شود.) پیش از او، دیریکله مطالعات مشابهی در زمینهٔ میدانهای درجهٔ دوم انجام داده بود.

درسال ۱۸۶۹، شرینگ، یکی ازدانشجویان سابق گاوس، ساختمان (گروه) رده‌های هم‌ارزی فرمهای درجهٔ دوم دوتایی گاوس را مورد بررسی قرار داد و بعضی از رده‌های اساسی را یافت‌که هر رده‌ای از فرمها را می‌توان به‌صورت ترکیبی از آنها نوشت. به‌زبان نظریهٔ گروهها، شرینگ پایه‌ای برای‌گروه آبلی رده‌های هم‌ارزی فرمهای درجهٔ دوم دوتایی یافت.

کرونکر کارکومر در زمینهٔ میدانهای سیکلوتومیك را به‌هرمیدان اعداد جبری تعمیم داد. او درسال ۱۸۷۰ در مقاله‌ای درباب نظریهٔ اعداد جبری تحت عنوان "تشریح برخی از ویژگیهای رده‌های اعداد مختلط ایده‌آل" دیدگاهی بسیار مجرد اتخاذ کرد. در آنجا وی مجموعه‌ای متناهی از "عناصر" دلخواه را درنظرگرفته وروی آنها عملی مجرد تعریف کرد که در قوانین خاصی صدق می‌کرد — قوانینی که می‌توان امروزه آنها را به‌عنوان اصول موضوع یك گروه متناهی به‌شمار آورد.

> گیریم $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ تعدادی متناهی ازعناصر باشد به‌قسمی‌که توسط فرایندی معین بتوان به‌هردوتای آنها عنصرسومی را نظیرکرد. بنابراین اگر f این فرایند را نمایش دهد و θ' و θ'' دوعنصر (احتمالاً مساوی) باشند، عنصری چون θ''' وجود داردکه مساوی $f(\theta', \theta'')$ باشد. به علاوه، $f(f(\theta', \theta''), \theta''') = f(\theta', f(\theta'', \theta'''))$، و $f(\theta', \theta'') = f(\theta'', \theta')$ و اگر θ''' از θ'' متمایز باشد، $f(\theta', \theta'')$ نیز از

$f(\theta', \theta''')$ متمایز است. با این فرض، عمل $f(\theta', \theta'')$ را با عمل ضرب تعویض می‌کنیم و بدین منظور به‌جای تساوی از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. بنابراین با استفاده از نهاد هم‌ارزی، "$\sim$"، "$\theta''' \sim \theta'' . \theta'$" را به‌وسیلهٔ معادلهٔ $\theta''' = f(\theta', \theta'')$ تعریف می‌کنیم.

کرونکر در جستجوی تعریفی ضمنی برای یک گروه آبلی متناهی، سعی کرد قوانین ترکیب "مقادیر" را به‌دست آورد و از بررسیهای مجرد فوق نتایج زیر را کسب کرد

۱) اگر θ "عنصر"ی از مجموعهٔ مورد بحث باشد، به‌ازای یک عدد صحیح مثبت k، داریم $\theta^k = ۱$. اگر k کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که این خاصیت را دارد، گوییم θ به k تعلق دارد. اگر θ به k تعلق داشته باشد و $\theta^m = ۱$، در این‌صورت m، k را عاد می‌کند.

۲) اگر عنصری چون θ به k تعلق داشته باشد، در اینصورت به‌ازای هر مقسوم علیه k، عنصری هست که به‌آن تعلق دارد.

۳) اگر θ و θ' به‌ترتیب به k و k' تعلق داشته باشند و k و k' نسبت به‌هم اول باشند، در این‌صورت $\theta\theta'$ به kk' تعلق دارد.

۴) یک "دستگاه پایه" از عناصر $\theta_۱, \theta_۲, \theta_۳, \ldots$ وجود دارد به‌قسمی که هر عنصر از مجموعهٔ داده شده را دقیقاً به یک صورت می‌توان به‌فرم $\theta_۱^{h_۱}\theta_۲^{h_۲}\theta_۳^{h_۳} \ldots$ $(h_i = ۱, ۲, \ldots, n_i)$ نمایش داد. اعداد $n_۱, n_۲, \ldots$ که $\theta_۱, \theta_۲, \theta_۳, \ldots$، به‌ترتیب، به‌آنها تعلق دارند به‌صورتی هستند که هریک از آنها بر عدد قبلی بخش‌پذیر است، و حاصلضرب $n_۱, n_۲, n_۳, \ldots$ برابر تعداد کل عناصر مجموعه است.

البته، نتایج فوق را می‌توان، به‌عنوان قضایای معروفی در گروههای آبلی متناهی تعبیر کرد. برای نمونه، (۴) را می‌توان قضیهٔ پایه برای این گروهها دانست. کرونکر پس از آنکه این چارچوب کلی را دایر ساخت، آن را برای حالاتی خاص، رده‌های هم‌ارزی فرمهای درجهٔ دوم و رده‌های ایده‌آل، به‌کاربرد و دریافت که به‌کاربردن نتیجهٔ (۴) برای حالت اول به‌نتیجهٔ شرینگ منجر می‌شود.

هرچند، کرونکر تعریف ضمنی خویش از گروه آبلی متناهی را با مفهوم گروه جایگشتی، که (در آن زمان) کاملاً تثبیت شده بود، ربط نمی‌داد، با این‌وجود از مزایای دیدگاه مجردی که اتخاذ کرده بود به‌روشنی آگاه بود.

> این اصول بسیار ساده ... نه‌تنها در مواردی که نشان داده شده، بلکه تقریباً در همه‌جا حتی در بخشهای مقدماتی نظریهٔ اعداد ــ به‌کار می‌روند. و از اینجا به‌سادگی دیده می‌شود که این اصول به‌قلمروی کلیتر و مجردتر تعلق دارند. بنابراین شایسته است که آنها را از همهٔ محدودیتهای غیرضروری آزاد کنیم. پس، ضرورتی ندارد که استدلال یکسانی را در حالات مختلف تکرار کنیم. به‌علاوه، چنانچه مطالب را با چنین کلیتی بیان کنیم، نحوهٔ عرضهٔ مطلب، ازسادگی، وچون تنها خصوصیات اساسی را حفظ کرده‌ایم، از شفافیت خاصی، برخوردار می‌شود.



گئورگ فروبنیوس

خطوط توسعهٔ فوق در سال ۱۸۷۹ و درمقاله‌ای مهم از فروبنیوس و استیکل برگر با عنوان «در زمینهٔ گروههای با عناصر تعویض شونده» پوشیده شد. هرچند فروبنیوس و استیکل بر گرکار کرونکر را مبنای کار خویش قراردادند، ولی صریحاً از مفهوم گروه آبلی استفاده کردند و علاوه بر آن، به‌این واقعیت مهم پی بردند، که مفهوم مجرد گروه هم شامل همنهشتیها و ترکیب فرمهای گاوس وهم شامل گروههای جایگشتی گالوا می‌باشد. (همچنین، در پانوشت، به‌گروههای از مرتبهٔ نامتناهی، مانند گروه یکه‌های میدانهای اعداد و گروه ریشه‌های واحد اشاره کردند.) یکی از نتایج مهم آنها برهانی از قضیهٔ پایه برای گروههای آبلی متناهی، مشتمل بر برهانی برای یکتایی تجزیه بود. مقایسهٔ فرمولبندی "مدرن" صریح آنها از این قضیه با فرمولبندی کرونکر ((۴) در بالا) جالب خواهد بود.

> گروهی را که تحویل‌ناپذیر (غیرقابل تجزیه) نباشد می‌توان به‌عاملهای مطلقاً تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد. چنین تجزیه‌ای را می‌توان به‌طرق گوناگون انجام داد. اما صرفنظر از روش این تجزیه، تعداد عاملهای تحویل‌ناپذیر همواره یکسان است و بین عاملهای دو تجزیه می‌توان تناظری برقرار کرد که عاملهای متناظر دارای مرتبهٔ برابر باشند. [۳۳، ص ۲۳۵]

در ادامه نشان دادند که این "عاملهای تحویل‌ناپذیر" گروههای دودی از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول می‌باشند. سپس این نتایج را در مورد گروههای اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n، فرمهای دوتایی درجهٔ دوم، و رده‌های ایده‌آلی در میدانهای اعداد جبری به‌کاربردند.

مقالهٔ فروبنیوس و استیکل برگر «بخش قابل‌ملاحظه‌ای از کار است که نظریهٔ مستقلی در باب گروههای آبلی متناهی برپایهٔ خودش و به‌شیوه‌ای که شباهت زیادی به‌دیدگاههای

جدید دارد، برپا می‌سازد.» (فاش [۳۵]). برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر دربارهٔ این بند به [۵، ۹، ۲۴، ۳۵، و ۳۳] مراجعه کنید.

ج) گروه تبدیلی

مانند نظریهٔ اعداد، در هندسه و آنالیز نیز ایده‌های مبتنی بر نظریهٔ گروهها تا ثلث سوم قرن نوزدهم به صورت ضمنی و غیرمستقل باقی ماندند. به‌علاوه استفادهٔ صریح کلاین (ولی) از گروهها در هندسه بیشتر از نظر مفهومی، و نه تکنیکی، در تکامل نظریهٔ گروهها اثر گذاشت. زیرا این کار به‌معنی انتقال مسیر حرکت آن نظریه از مطالعهٔ گروههای جایگشتی به‌مطالعهٔ گروههای تبدیلی بود (که البته، این امر به‌معنی کنار گذاشتن کامل گروههای جایگشتی نبود) این انتقال از این لحاظ نیز جالب است که سبب حرکت از گروههای متناهی به گروههای نامتناهی شد.

کلاین به‌ارتباط بین کارش و گروههای جایگشتی واقف بود اما از انشعابی که ایجاد کرده بود، نیز اطلاع داشت. او می‌گفت که وجه مشترک نظریهٔ گالوا و برنامهٔ او بررسی "گروههای تبدیلی" می‌باشد و می‌افزود که «مطمئناً عناصری که تبدیلات روی آنها اثر می‌کنند متفاوتند؛ در آنجا (نظریهٔ گالوا) با تعدادی متناهی از عناصر گسسته سروکار داریم حال آنکه در اینجا با تعدادی نامتناهی از عناصر یک خمینهٔ پیوسته سروکار داریم» [۳۳، ص۱۹۱]. در ادامهٔ این شرح، دریافت که تنها یک نظریهٔ گروهها، ی جایگشتی وجود دارد، «ما بر یک نظریهٔ تبدیلات، مطالعهٔ گروههای تولید شده به‌وسیلهٔ تبدیلاتی از یک نوع مفروض اصرار می‌ورزیم.» [۳۳، ص۱۹۱].

کلاین از اتخاذ دیدگاهی مجرد در نظریهٔ گروهها دوری گزید و حتی تعریف تکنیکی وی از یک گروه (تبدیلی) ناقص است. «حال گیریم دنباله‌ای از تبدیلات $A, B, C, \ldots$ داده شده باشند. اگر این دنباله دارای این خاصیت باشد که ترکیب هر دو تا از تبدیلات آن، تبدیلی به‌دست دهد که متعلق به‌این دنباله باشد در این صورت دنبالهٔ اخیر را یک گروه تبدیلات می‌خوانیم.» [۳۳، ص۱۸۵]. با این وجود، کار کلاین به‌طور قابل ملاحظه‌ای مفهوم گروه و کاربردپذیری آن در حوزه‌های دیگر ریاضی را گسترش داد. کلاین تلاش بسیار برای اشاعهٔ این دیدگاه کرد که ایده‌های مبتنی بر نظریهٔ گروهها در ریاضیات اهمیت اساسی دارند: «در سراسر ریاضیات جدید، نظریهٔ گروهها به‌صورت رشته‌ای متمایز ظاهر می‌گردد؛ و در حوزه‌های متنوعی به‌عنوان وسیله‌ای برای رده‌بندی و ترتیب‌دهی، به‌کار می‌رود.» [۳۳، ص۲۳۸].

گروهها از طریق مبحث دیگری نیز به‌هندسه مربوط می‌شوند، که عبارت است از "هندسهٔ حرکت"، یعنی استفاده از حرکات یا تبدیلاتی که در آنها اشیاء هندسی به عنوان عناصر گروه در نظر گرفته می‌شوند. قبلاً در سال ۱۸۵۶ هامیلتون (به‌طور ضمنی) "گروههای" اجسام منتظم را بررسی کرد. ژوردان در سال ۱۸۶۸ به‌رده‌بندی همهٔ زیر گروههای گروه حرکات در فضای سه‌بعدی اقلیدسی پرداخت و کلاین در سخنرانیهایی پیرامون بیست‌وجهی به‌سال ۱۸۸۴ معادلهٔ درجهٔ پنجم را با استفاده از گروه تقارنهای بیست‌وجهی "حل" کرد.

در اینجا وی به‌ارتباطی عمیق بین گروه دورانهای اجسام منتظم، معادلات چندجمله‌ای، و نظریهٔ توابع مختلط پی‌برد. (در این سخنرانیها، صحبت از گروه چهارتایی کلاین نیز به‌میان آمد.)

پیش از آن و در اواخر دههٔ ۱۸۶۰ لی و کلاین مشترکاً متعهد شده بودند که «اشیاء هندسی یا تحلیلی را که تحت گروههای تبدیلات به‌روی خودشان تصویر می‌شوند، بررسی کنند.» (این عبارت، توصیفی است که کلاین در سال ۱۸۹۴ از برنامهٔ مشترکشان ارائه داد.) در حالی که کلاین مطالعات خود را روی گروههای گسسته متمرکز ساخته بود، لی به‌مطالعهٔ گروههای تبدیلی پیوسته پرداخت. لی دریافت که نظریهٔ گروههای تبدیلی پیوسته ابزار بسیار نیرومندی در هندسه و معادلات دیفرانسیل است و به‌کار «تعیین همهٔ گروههای... تبدیلی (پیوسته)» پرداخت [۳۳، ص۲۱۴]. او در اوایل دههٔ ۱۸۸۰ و با رده‌بندی گروهها به‌هدف خود نایل گشت. (برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۳۳] مراجعه کنید.) رده‌بندی گروههای تبدیلی ناپیوسته چند سال قبل از آن توسط پوانکاره و کلاین انجام شده بود.

گذشته از این موفقیتهای تکنیکی در زمینهٔ گروههای تبدیلی پیوسته و ناپیوسته (که درهردو زمینه نظریه‌های گسترده‌ای به‌وجود آمد و رشد یافت که حتی امروز هم حوزه‌های تحقیقاتی فعالی هستند)، آنچه از نظر ما در پایه‌گذاری این نظریات مهم است، این است که

۱) آنها وسعت زیادی به‌مفهوم گروه دادند.
۲) مثالهای مهمی از گروههای نامتناهی به‌دست دادند ــ قبلاً تنها گروههای متناهی هدف مطالعه بودند.
۳) قلمروکاربردهای مفهوم گروه را وسعت بخشیدند به‌گونه‌ای که نظریهٔ اعداد، نظریهٔ معادلات جبری، هندسه، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل (عادی و جزئی) و نظریهٔ توابع (توابع خودریخت، توابع مختلط) را در بر گرفت.

همهٔ اینها پیش از ظهور مفهوم گروه مجرد رخ داد. در واقع این پیشرفتها ابزاری برای ظهور مفهوم گروه مجرد بودند که بعداً به‌شرح آن خواهیم پرداخت. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۵، ۷، ۹، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۴، ۲۹، و ۳۳] مراجعه کنید.

۳. ظهور تجرید در نظریهٔ گروهها

دیدگاه مجرد در نظریهٔ گروهها به‌کندی ظاهر شد. از زمان کار ضمنی لاگرانژ در نظریهٔ گروهها به‌سال ۱۷۷۰، حدوداً صد سال گذشت تا مفهوم گروه مجرد شکل گیرد. از یک تمایل در این فرایند حرکت به‌سوی تجرید و اصل موضوعی شدن، چند مرحلهٔ اساسی قائل می‌شود

> توسعهٔ کامل نظریه، نیازمند حدود یک قرن بود، نخستین پیشرفت آن همانند تکامل سایر شاخه‌های اصلی ریاضی در دورهٔ اخیر بود؛ نخست، کشف پدیده‌های مجزا، سپس تشخیص



آرتور کیلی

خصوصیات مشترک همهٔ آنها، بعد جستجوی مثالهای بیشتر. محاسبات مفصل و رده‌بندی؛ سپس پیدایش اصولی کلی که محاسبات بیشتر را، مگر در مواردی که برای کاربرد خاصی لازم باشد، زاید و غیرضروری ساخت؛ و سرانجام فرمولبندی اصول موضوع که ساختار دستگاه مورد تحقیق را به‌شکل مجرد در می‌آورد. [۳]

هرچند در این گفته جریان تا حدی ساده شده است (مانند هرحکم کلی دیگری که از این نوع باشد)، با این وجود، این گفته چارچوب مفیدی به‌دست می‌دهد. در واقع، در مورد نظریهٔ گروهها، نخست "پدیده‌های مجزا" آمدند ــ یعنی جایگشتها، فرمهای درجهٔ دوم دوتایی، ریشه‌های واحد وسپس تشخیص "خصوصیات مشترک" ــ مفهوم یك گروه متناهی که هم گروههای جایگشتی و هم گروههای آبلی متناهی را در برمی‌گیرد. (مقالهٔ فروبنیوس و استیکل برگ که در بخش۲ـب ذکر شد)؛ بعد جستجوی "مثالهای دیگر" ــ در این مورد گروههای تبدیلی (بخش۲ـ ج را ببینید)؛ و بالاخره فرمولبندی "اصول موضوع" ــ در این مورد اصول موضوع یك گروه که هردوحالت متناهی‌ونامتناهی‌را دربردارد. حال به‌بررسی اینکه چه موقع و چگونه مراحل میانی و نهایی تجرید رخ داد، می‌پردازیم.

در ۱۸۵۴، کیلی، در مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ نظریهٔ گروهها، ارتباطش با معادلهٔ نمادی $\theta^n = 1$»، نخستین تعریف مجرد ازیك گروه متناهی‌را ارائه کرد. (در۱۸۵۸ ددکیند، در سخنرانیی درزمینهٔ نظریهٔ گالوا در گوتینگن تعریف دیگری ارائه کرد.) در اینجا تعریف کیلی را می‌آوریم:

مجموعه‌ای از نمادهای ... $\alpha, \beta,$ راکه همگی متمایز هستند وحاصلضرب هردوتا از آنها (ترتیب مهم نیست)، یا حاصلضرب یك عنصر درخودش، دراین مجموعه باشد، گروه می‌نامیم.

کیلی در ادامه چنین می‌گوید که

این نمادها در حالت کلی عکس‌پذیر (تعویض‌پذیر) نیستند اما شرکتپذیر هستند.

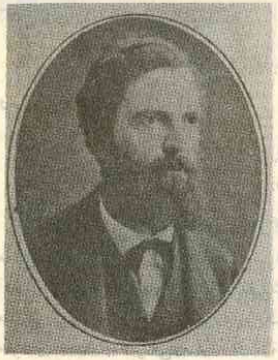
و

بنابراین اگر همهٔ عناصر گروه در یکی از نمادها ضرب شوند، به‌عنوان عامل دورتر یا نزدیکتر (از چپ یا از راست)، این عمل تولید دوبارهٔ گروه می‌باشد.

کیلی سپس مثالهای متعددی از گروهها، ازجمله گروه کوا ترنیونها (تحت عمل‌جمع)، ماتریسهای وارون‌پذیر (تحت عمل‌ضرب)، جایگشتها، فرمهای درجهٔ دوم گاوس و گروههایی که ازنظریهٔ توابع بیضوی ناشی می‌شوند، ارائه کرد. بعد او نشان دادکه (با اصطلاحات ما) هر گروه مجرد با یك گروه جایگشتی یکریخت است. این نتیجه امروز به "قضیهٔ کیلی" معروف است به‌نظر می‌رسد که او ازمفهوم گروههای یکریخت کاملاً آگاه بود، هرچنداین خاصیت را صریحاً تعریف نکرد. کیلی جدول ترکیب یك گروه (متناهی) را معرفی نمود و ادعاکرد که یك گروه مجرد توسط جدول ترکیبش معین می‌شود. در ادامه به‌تعیین همهٔ گروههای مرتبهٔ ۴ و ۶ پرداخت و با استفاده از جدول ترکیب نشان دادکه از هریك از اینها دوتا وجود دارد. به‌علاوه وی دریافت که هر گروه دوری از مرتبهٔ n «ازهرلحاظ شبیه دستگاه ریشه‌های معادلهٔ معمولی $x^n - 1 = 0$ است.»، و تنها یك گروه از مرتبهٔ یك عدد اول مفروض‌وجود دارد.

سمت گیری کیلی به‌طرف یك دیدگاه مجرد از گروهها ــ که موفقیت قابل ملاحظه‌ای در این مقطع از تکامل نظریهٔ گروهها به‌شمار می‌رود، (حداقل تا حدی) مرهون آشنایی‌او باکارجرج بول است. توجه به‌مبانی مجرد ریاضیات، ویژگی اصلی محافل اطراف بول، کیلی و پیش از آنها سیلوستر در دههٔ ۱۸۴۰، بود. اما موفقیت کیلی یك پیروزی شخصی بود. با وجودی که در آن زمان کیلی شهرت زیادی داشت، به‌تعریف مجرد وی ازیك گروه اهمیتی داده نشد. ظاهراً، جامعهٔ ریاضی هنوز آمادگی قبول چنین تجریدی را نداشت. گروههای جایگشتی تنها گروههای مورد بررسی بودند و به‌طورکلی، رهیافت صوری به‌ریاضیات هنوز به‌مرحلهٔ بلوغ نرسیده بود. چنان‌که موریس کلاین به‌شیوهٔ غیرقابل تقلید خود چنین می‌گوید [۲۱]: «تجرید زودرس باگوشهای ناشنوا مواجه شد، چه‌گوشهای ریاضیدانان‌وچه‌گوشهای‌دانشجویان.» برای‌ملاحظهٔ جزئیات بیشتربه [۲۲-۲۵، ۲۹، و ۳۳] مراجعه کنید.

تنها یك ربع قرن پس از ظهور مفهوم گروه مجرد بود که به‌اهمیت آن پی‌بردند. و کیلی در سال ۱۸۷۸ با انتشار چهار مقالهٔ کوتاه بارویکرد به‌دیدگاه مجردی که در ۱۸۵۴ اتخاذکرده بود، روی آورد. در این مقالات وی مسئلهٔ کلی یافتن همهٔ گروهها ازیك مرتبهٔ مفروض را مطرح ساخت وثابت کردکه هر گروه (متناهی) با یك گروه جایگشتی یکریخت است، اما، چنان‌که اظهار می‌داشت، این امر «ثابت نمی‌کند که بهترین یا ساده‌ترین راه بررسی‌مسئله درحالت کلی. درنظر گرفتن آن به‌صورت مسئله‌ای در زمینهٔ گروههای جایگشتی



هاینریش وبر

است؛ وبه‌روشنی دیده می‌شود که بهترین کار این است که خود مسئله را درحالت کلی بررسی کنیم و از آن نظریهٔ گروههای جایگشتی را نتیجه بگیریم.» [۲۲، ص۱۴۱]. برخلاف مقالات سال ۱۸۵۴ کیلی، مقالات اخیر او به‌چندکار اساسی در نظریهٔ گروهها الهام بخشیدند.

ریاضیدان دیگری که دیدگاه مجرد در نظریهٔ گروهها (وبه‌طور کلی در جبر) راجلو برد، وبر بود. دراینجا تعریف "جدید" او را از یك گروه (متناهی) که به‌سال ۱۸۸۲ ودر مقاله‌ای در باب فرمهای درجهٔ دوم ارائه کرد، می‌آوریم [۲۳، ص۱۱۳]

دستگاه G از h عنصر دلخواه $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$ را یك گروه از درجهٔ h نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برمبنای قاعده‌ای، تحت عنوان ترکیب یـا ضرب، از هردو عنصر آن بتوان عنصر سومی از دستگاه را به‌دست آورد که این قاعده را بدین‌صورت نمایش دهیم $\theta_r\theta_s=\theta_t$.

۲) رابطهٔ $(\theta_r\theta_s)\theta_t=\theta_r(\theta_s\theta_t)=\theta_r\theta_s\theta_t$ همواره درست باشد.

۳) از $\theta\theta_r=\theta\theta_s$ یا $\theta_r\theta=\theta_s\theta$ نتیجه شود $\theta_r=\theta_s$.

تعریف وبر و دیگر تعاریفی که تا آن زمان ازگروه مجرد ارائه شده بود تنها برای گروههای متناهی معنی‌داشت وبنابراین، تنها دو نظریهٔ گروههای جایگشتی وآبلی(متناهی) را، که به‌ترتیب از جبر کلاسیك (معادلات چندجمله‌ای) و نظریهٔ اعداد نشأت گرفته بودند، در بر داشت. گروههای نامتناهی کـه از نظریه‌های گروههای تبدیلـی (پیوسته و ناپیوسته) ناشی می‌شدند، مشمول این تعاریف نمی‌شدند. نخستین‌بار، وان‌دیك بودکه به‌سال ۱۸۸۲ در مقاله‌ای مهم و مؤثر تحت عنوان «مطالعاتی در نظریهٔ گروهها» آگاهانه همهٔ ریشه‌های تاریخی نظریهٔ گروهها ــ جبری، نظریهٔ اعدادی، هندسی و تحلیلی ــ را تلفیق کرد. به‌گفتهٔ وان‌دیك:

هدف از بررسی زیر، ادامهٔ مطالعهٔ خواص یك گروه به‌صورت مجرد آن می‌باشد. به‌خصوص، دربارهٔ محدوده‌ای بحث می‌کنیم کـه این خواص در آن محدوده‌در همهٔ شکلهای بروز گروه،ناوردا می‌مانند واینکـه چه روشی به‌تعیین دقیق محتوای اساسی این خواص از دید نظریهٔ گروهها می‌انجامد.

تعریف وان‌دیك از یك گروه مجرد،که هر دو حالت متناهی و نامتناهی را در بـر می‌گرفت برحسب مولدها (که آنها را "عمل" می‌نامید) ارائه شد و او روابط را تعریف کرد (تعریف قدری طولانی است [۷، ص ۵ و ۶]). او تأکید می‌کرد که «از این طریق همهٔ گروههـای دِکِدیخت به‌صورت گروهی واحد در می‌آیند.» و «اساس مفهوم گروه دیگر به‌شکل نمایش خاصی از اعمالش بیان نمی‌شود، بلکه روابط متقابل است که گروه را معین می‌کند.». سپس در ادامهٔ کارش گروه آزاد با n مولد را ساخت،و (در اساس بدون استفاده از اصطلاحات) نشان داد که هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده، گروه خارج‌قسمت یك گروه آزاد از رتبهٔ متناهی می‌باشد. آنچه از دیدگـاه اصل موضوعی در نظریهٔ گروهها اهمیت دارد، آن است که وان‌دیك در تعریف خود برای نخستین‌بار صریحاً وجود وارون را لازم دانست. «در بررسیهای ما لازم است فرض کنیم که اگر یك گروه شامل عملی چون T_k باشد باید شامل وارونی چون T_k^{-1} برای آن نیز باشد.» در مقاله‌ای دیگر (به‌سال۱۸۸۳) وان‌دیك این بسط تجریدی نظریهٔ گروهها را درمورد گروههای جایگشتی، گروه دورانهای متناهی (تقارنهای چند وجهی)، گروههای نظریهٔ اعداد و گروههای تبدیلی در نظر گرفت.

هرچند درطول بیست سال بعد اصول موضوع متعددی برای گروهها درمتون ریاضی ظاهر شد، بـا این وجود دیدگاه مجرد در نظریهٔ گروهها هنوز چندان موردپسند عام قرار نگرفته بـود. برای نمونه، کلاین، یـکی از سهامداران عمده در گسترش نظریهٔ گروههـا، می‌اندیشیدکه «فرمولبندی مجرد برای به‌دست آوردن برهان جالب است اما کمکی به‌یافتن ایده‌هاوروشهای‌جدید نمی‌کند.» واضافه می‌کردکه درحالت کلی «ضرر این روش [مجرد] آن است که تفکر را تشویق نمی‌کند.» [۳۳، ص۲۲۸].

علی‌رغم احتیاطهای کلاین، جامعهٔ ریاضی دراین زمان (اوایل دههٔ ۱۸۸۰) پذیرای فرمولبندی مجرد بود (واکنش نسبت به‌تعریف کیلی در سال ۱۸۵۴). علل اصلی آمادگی این پذیرش عبارت بودند از:

۱) دراین زمان چندین نظریهٔ "مشخص" ومهم از گروهها وجود داشت ــ گروههای جایگشتی، گروههای آبلی، گروههای تبدیلی ناپیوسته (متناهی و نـامتناهی) و گروههای تبدیلی پیوسته، و این برتجرید خصوصیات اساسی گروهها گواهی می‌داد.

۲) در حوزه‌ای مختلف ریاضی، از قبیل بخشهای گوناگون جبر، هندسه، نظریهٔ اعداد، و قلمروهای مختلف آنالیز ــ گروهها نقشی‌اساسی به‌عهده گرفته بودند. و این فکرپیش آمده بود که دیدگاه مجرد درنظریهٔ گروهها، برای این کاربردها اهمیت اساسی دارد و راه را برای کاربردهای دیگر هموار می‌سازد.

۳) رهیافت صوری که از طریق نفوذ نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق‌ریاضی در ریاضیات تقویت می‌شد، بردیگرحوزه‌های ریاضی ازقبیل آنالیز وبخشهای‌مختلف هندسه حکمفرما می‌شد.



هانری پوانکاره

دربخش بعد، سیر تکامل دیدگاه مجرد در نظریهٔ گروهها را مختصراً شرح می‌دهیم.

۳. تثبیت مفهوم مجرد گروه، طلوع نظریهٔ مجرد گروهها

مفهوم گروه مجرد به‌سرعت و در طول دههٔ ۱۸۸۰ و ۱۸۹۰ اشاعه یافت، هرچند در همین دوره نیز مقالات متعددی در زمینهٔ گروههای جایگشتی و گروههای تبدیلی به‌چاپ می‌رسید. دیدگاه مجرد به‌دو طریق ظاهر شد:

الف) مفاهیم و نتایجی که در زمینهٔ گروههای "مشخص" تعریف و اثبات شده بود، حال به‌صورت مجرد بازنویسی و اثبات شد.

ب) به‌تدریج مطالعاتی برمبنای دیدگاه مجرد آغاز شد.

مثال جالبی از حالت اول، اثباتی است که فروبنیوس برای قضیهٔ سیلو، که در سال ۱۸۷۲ توسط سیلو و تنها برای گروههای جایگشتی به‌اثبات رسیده بود، ارائه داد. این اثبات به سال ۱۸۸۷ و در مقاله‌ای با عنوان «برهان تازهٔ قضیهٔ سیلو»[1] ظاهر شد. هر چند فروبنیوس می‌پذیرفت که این واقعیت که هر گروه متناهی را می‌توان به‌صورت یک گروه جایگشتی نمایش داد، ثابت می‌کند قضیهٔ سیلو برای همهٔ گروههای متناهی برقرار است، با این وجود مایل بود این قضیه را از دیدگاهی مجرد به‌اثبات رساند: «از آنجا که گروه متقارن، که درهمهٔ این برهانها وارد می‌شود، نسبت به‌مضمون قضیهٔ سیلو کاملاً بیگانه است، سعی می‌کنم اثبات دیگری برای آن بیابم. . .» (برای مطالعه در سیر تکامل نظریهٔ گروهها،

1. Neuer beweis sylowschen satzes

در ارتباط با قضیهٔ سیلو به [۲۸ و ۳۲] مراجعه کنید.)

هولدر سهم عمده‌ای در نظریهٔ گروههای مجرد داشت و برخی از مفاهیم نظریهٔ گروهها را به‌طور مجرد معرفی کرد. برای نمونه در سال ۱۸۸۹ گروه خارج قسمت را به‌طور مجرد تعریف کرد (گروه "خارج قسمت" را در ابتدا به‌معنای گروه گالوای "معادلهٔ کمکی" و بعدها به‌عنوان یك تصویر همریخت در نظر می‌گرفتند و تنها در زمان هولدر به‌عنوان گروه همرده‌ها تعریف شد)، و برهان قضیهٔ ژوردان-هولدر را تکمیل نمود. یعنی این قضیه را که، گروههای خارج قسمت در یك سری ترکیبی تحت یکریختی ناوردا هستند. (برای ملاحظهٔ سهم ژوردان در این قضیه به‌بخش ۲ - الف مراجعه کنید.). او به‌سال ۱۸۹۳ و در مقاله‌ای در باب گروههای از مرتبهٔ p^3، pq^2، pqr، و p^4، مفهوم خودریختی گروه را به‌طور مجرد تعریف نمود. به‌علاوه، هولدر نخستین کسی بود که گروههای ساده را به‌طور مجرد بررسی کرد (پیش از آن این گروهها تنها در حالات مشخص ـ گروههای جایگشتی، گروههای تبدیلی و... مورد بررسی قرار گرفتند.). وی چنین می‌گوید [۲۹، ص ۳۳۸]: «بسیار جالب خواهد بود اگر بتوانیم همهٔ گروههای ساده با تعداد متناهی عمل را توصیف کنیم.» (منظور هولدر از "عمل"، عنصر است) و در ادامه همهٔ گروههای ساده از مرتبهٔ کمتر از ۲۰۰ را معین ساخت.

نمونه‌های دیگری از این گونه بررسیهای مجرد، مقالاتی است که ددکیند و میلر در سال ۱۸۹۷–۱۸۹۸ در زمینهٔ گروههای همیلتونی، یعنی گروههای غیرآبلی که همهٔ زیرگروههایشان نرمال‌هستند؛ انتشار دادند. آنها (مستقلاً) مشخصات این گروهها را به‌طور مجرد معین نموده و در این فرایند مفهوم تعویض کنندهٔ دوعنصر و زیرگروه تعویض کننده را معرفی کردند. (ژوردان قبلاً مفهوم تعویض کنندهٔ دوجایگشت را معرفی نموده بود.)

نظریهٔ گروه مشخصه‌ها و نظریهٔ نمایش برای گروههای متناهی نیز (که در انتهای قرن نوزدهم به‌ترتیب توسط فروبنیوس و برنساید، فروبنیوس، و مولین به‌وجود آمدند)، به‌نظریهٔ گروههای مجرد تعلق دارند. زیرا از آنها برای اثبات نتایجی مهم در زمینهٔ گروههای مجرد استفاده می‌شد. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۱۷] مراجعه کنید.

هرچند در اواخر قرن نوزدهم مفهوم گروه مجرد به‌خوبی جا افتاده بود، با این حال «روشی برای عرضهٔ این مفهوم در مقالات، کتابهای درسی و تك‌نگاریها، که مورد پذیرش عمومی باشد، وجود نداشت. تا آغاز قرن بیستم هیچ رساله‌ای در زمینهٔ نظریهٔ گروهها که مبتنی بر مفاهیم مجرد باشد، انتشار نیافت. انتشار اولین سری از این مقالات بود که تولد نظریهٔ گروههای مجرد را رقم زد.» (واسینگ [۳۲]).

نخستین تك‌نگاری که تماماً به نظریهٔ گروههای مجرد اختصاص داشت، کتابی است از دوسگیه تحت عنوان مبانی نظریهٔ گروههای مجرد که به‌سال ۱۹۰۲ انتشار یافت [۲۷]. در ابتدای کتاب مقدمه‌ای از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها براساس کار کانتور آمده است: دوسگیه را می‌توان نخستین جبردانی دانست که به‌کشف کانتور در زمینهٔ کاردینالهای ناشمارا را توجه کرد.» [۷]. سپس مفهوم یك نیم‌گروه با قانون حذف دوطرفه معرفی شده و اثباتی از اینکه هر نیم‌گروه متناهی یك گروه است، آمده است. همچنین برهانی با استفاده از مثالهای

ناقص برای استقلال اصول موضوع گروه آورده شده است. کتاب دوسگیه همچنین شامل شرحی از یکریختیها، همریختیها، درون ریختیها، تجزیهٔ یك گروه به حاصلضرب مستقیم، قضیهٔ ژوردان-هولدر، قضیهٔ اول یکریختی، گروههای آبلی شامل قضیهٔ پسایه، گروههای هامیلتونی و بالاخره نظریهٔ p-گروهها می‌باشد. همهٔ این‌مطالب از دیدگاه مجرد بیان شده بود و بحث گروههای "مشخص" در یك‌ضمیمه آمده است. «سبك دوسگیه، مغایرت واضحی با سبك دیك دارد. در کتاب او، از ملاحظات شهودی خبری نیست... و گرایشی به تجرید و عمومیت، تا حد امکان، در آن دیده می‌شود...» (چاندلر و مگنوس [۷]).

کتاب دوسگیه عمدتاً به گروههای متناهی اختصاص داشت. نخستین تك‌نگاری در زمینهٔ نظریهٔ گروهها، که به‌گروهها در حالت کلی می‌پرداخت و بررسی گروههای متناهی را به فصول خاص موکول می‌کرد، کتاب نظریهٔ مجرد گروهها اثر اشمیت بود که در ۱۹۱۶ انتشار یافت. اشمیت که بانی مکتب روسی نظریهٔ گروههاست، چهار فصل از کتابش را به‌ویژگیهای مشترك در بین گروههای متناهی و نامتناهی اختصاص داده است. بحث گروههای متناهی به‌فصل ۵ کتاب موکول شده و کتاب کلاً پنج فصل دارد. [۷، ۱۰، و ۳۳]

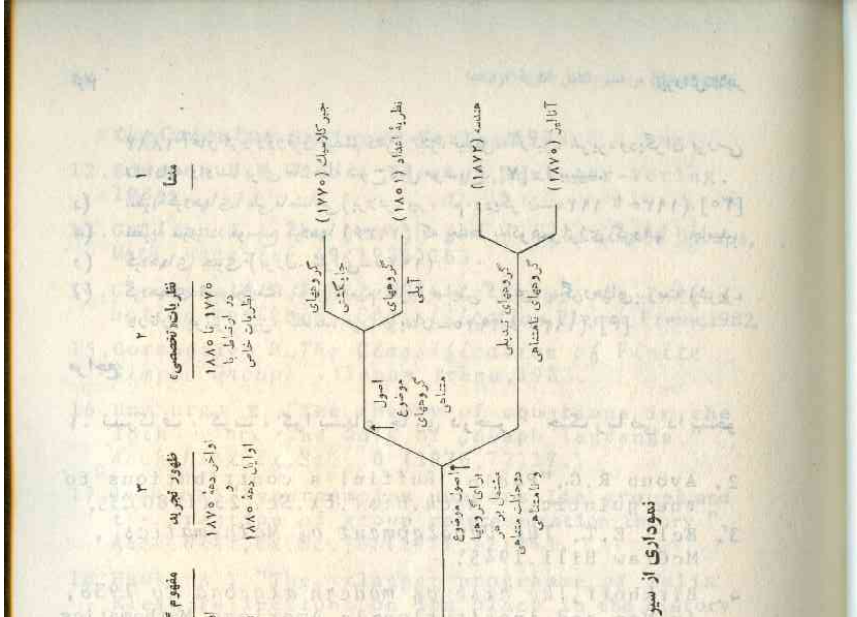
۵. انشعاب در سیر پیشرفت نظریهٔ گروهها

نظریهٔ گروهها از چندین منبع مختلف پدید آمد و این‌امر سبب ظهور نظریه‌های خاص مختلفی شد. این نظریه‌ها پیش از آنکه در اوائل دههٔ ۱۸۸۰ در نظریهٔ گروههای مجرد به‌هم بپیوندند، درحدود بیش از صد سال (از سال ۱۷۷۰) مستقلاً توسعه یافتند. در طول سی الی چهل سال بعد نظریهٔ گروههای مجرد به تدریج شکل گرفت و تثبیت شد. در پایان این دوره (حدود سال ۱۹۲۰) انشعاب این نظریه را به‌نظریه‌های مجزا می‌توان دید. در اینجا برخی از این پیشرفتها و خطوط جدید در نظریهٔ گروهها، که از سال ۱۹۲۰ آغاز شد، به‌اختصار ذکر می‌شوند (همراه با نام افراد مؤثر و تاریخ تقریبی)

الف) نظریهٔ گروههای متناهی. در اینجا مسئلهٔ اساسی که قبلاً توسط کیلی (۱۸۷۵) فرمولبندی شده و ژوردان و هولدر آن را مورد بررسی قرار داده بودند، عبارت است از یافتن همهٔ گروههای متناهی از یك مرتبهٔ مفروض. معلوم شد که حل این مسئله بیش از حد مشکل است و ریاضیدانان تنها حالات خاص را (که بخصوص از نظریهٔ گالوا منشأ می‌گرفتند)، مورد بررسی قرار دادند. مثلاً همهٔ گروههای ساده یا همهٔ گروههای حل‌پذیر را یابند. (قضیهٔ فیت-تامپسون در سال ۱۹۶۳، و رده‌بندی همهٔ گروههای سادهٔ متناهی در سال ۱۹۸۱). [۱۴، ۱۵، و ۳۰]

ب) تعمیم بعضی از نتایج نظریهٔ گروههای متناهی به‌نظریهٔ گروههای نامتناهی با شرایطی در مورد متناهی بودن؛ برهان اشمیت، در سال ۱۹۲۸. از قضیهٔ زیمك-کرول-اشمیت. [۵]

ج) نمایش گروهها (نظریهٔ ترکیباتی گروهها)، که مطالعه روی آن را وان‌دیك در



۱۸۸۲ آغاز کرد و در قرن بیستم دهن، تیتز، نیلسن، آرتین، شریر، و دیگران بررسی را ادامه دادند. برای ملاحظهٔ شرح کامل موضوع، [۷] را ببینید.

د) نظریهٔ گروههای آبلی نامتناهی (پرووفر، بیر، الم، و دیگران ــ ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰). [۳۰]

ه) نظریهٔ شریر در توسیع گروهها (۱۹۲۶) که بعدها به کوهمولوژی گروهها انجامید.

و) گروههای جبری (بورل، شوالی ــ ۱۹۴۰)

ز) گروههای توپولوژیك. شامل تعمیم نظریهٔ نمایش گروهها به گروههای پیوسته (شریر، کارتان، پونتریاگین، گلفاند، فون نویمان ــ ۱۹۲۵ و ۱۹۳۰). [۴]

مراجع

۱. بیرکاف، گرت، گرایشهای جاری در جبر، "جنگ ریاضی دانشجو

2. Ayoub R.G.,"Paolo Ruffini's contributions to the quintic," *Arch.Hist.Ex.Sc.*,23(1980)253.

3. Bell E.T., *The Development of Mathematics* , McGraw Hill.1945.

4. Birkhoff,*The rise of modern algebra to 1936*, in Men and institutions in American Mathematics, eds.D.Tarwater,J.T.White and J.D.Miller,Texas tech.Press,(1976)44.

5. Bourbaki N.,*Elements d' Histoire des Mathematiques*, Hermann,1969.

6. Burns J.E.,"The foundation period in the history of group theory",*Amer.Math.Monthly* ,20(1913) 141.

7. Chandler B. and Magnus.W,*The History of Combinatorial Group Theory:A Case study in the History of Ideas*,Springer-Verlag,1982.

8. Dahan A.,"L'es travaux de Cauchy sur les substitutions.Etude de son approche du concept de groupe," *Arch Hist.Ex.Sci.*,23(1980)279.

9. Dieudonneed1 J ,*Abrege d'Histoire des Mathematiques* ,(1700-1900),2vols.,Hermann,1978.

10. Dubreil P.,"Lagebre,en France,de 1900 à 1935," *Cahiers du Seminaire d'histoire des Mathematiques*, 3 (1981)69.

11. Edwards C.H.,*The Historical Development of*

the Calculus,Springer-Verlag,1979.

12. Edwards H.M,*Galois Theory* ,Springer-Verlag. 1984.

13. Gallian J.A,*The search for finite simple groups*, Math. Magazine 49(1976)163.

14. Gorenstein D,*Finite Simple Groups:An Introduction to Their Classification*,Plenum Press,1982.

15. Gorenstien D.,*The Classification of Finite Simple Groups* ,Plenum Press,1983.

16. Hamburg R.R.,"The theory of equations in the 18th century :The work of Joseph lagrange," *Arch.Hist.Ex.Sc.*, 8 (1976,77)17.

17. Hawkins T."Hypercomplex numbers, Lie groups,and the creation of group respresentation theory ", *Arch.Hist,Ex.Sc.*,8 (1971,72)243.

18. Hawkins T,"The Erlanger programme of Felix Klein:reflections on its place in the history of mathematics", *Hist.Math.*,11(1984)442.

19. Kiernan B.M. "The development of Galois theory from lagrange to Artin"*Arch.Hist.Ex.Sc.*,8(1971, 72).

20. Klein F,*Development of Mathematics in the 19th Century* (transl.from the 1928 German ed.by M.Ackerman),in Lie Groups:History,Frontiers, and Applications.Vol.IX.ed.R.Hermann,Math.Sci. Press 1979,1.

21. Kline M,*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. ,Oxford Univ.Press.1972.

22. Lichtenberg D.R,*The Emergence of Structure in Algebra*. ,Doctoral Dissertation,Univ.of Wisconsin,1966.

23. Merzbach U.,*Development of Modern Algebraic concepts from Leibniz to Dedekind*,Doctoral Dissertation,Harvard Univ.1964.

24. Miller G.A,*History of The Theory of Groups* , Collected Works,3 vols.Univ.of Illinois Press, 1935,1938,1946,427-467,1-18,1-15.

25. Novy.L, *Origins of Modern Algebra*, Noordhoff, 1973.

26. Schmidt O.J, *Abstract Theory of Groups*, W.H.-Freeman & Co.1966.(Translation by F.Holling and J.B.Roberts of the 1916 Russian edition).

27. de Seguier.J.A, *Théorie des Groupes Finis Elements de la Theorie des Groupes Abstraits*, Gauthier villars, Paris, 1904.

28. Shemetkov.L.A, "Two directions in the development of the theory of nonsimple finite groups", *Russ. Math. Surv*, 30(1975)185.

29. Silvestri R., "Simple groups of finite order in the nineteenth century, *Arch. Hist.Ex.Sc*, 20-(1979)313.

30. Tarwater J, White J.T., Hall C., and Moore.M.E. -(eds), *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, Texas Tech Press, 1981.

31. van der Waerden B.L., "Die algebra seit Galois", *Jahresbericht der Deutsch.Math. Ver*, 68(1966) 155.

32. Waterhouse W.C., "The early proofs of sylow's of theorem", *Arch.Hist.Ex.Sc*, 21(1979-80)279.

33. Wussing H, *The Genesis of the Abstract Group Concept*, M.I.T.Press 1984.(Translation by A.Shenitzer of the 1969 German edition.)

ویکتور کلی

مجموعهٔ محدب چیست*

ترجمهٔ ناصر بروجردیان

این مقاله ترجمه‌ای است از مقالهٔ نویسنده [۶۳] در بارهٔ تحدب در دائرةالمعارف جدید فرانسوی، که اندکی بسط یافته و با التفات ناشران دائرةالمعارف در اینجا می‌آید. هدف این مقاله بررسی کلی ولی مختصری از جنبه‌های مختلف نظریهٔ تحدب در سطحی نسبتاً مقدماتی است. جنبه‌هایی مورد تأکید قرار می‌گیرند که از نظر نویسنده در حال حاضر فعالترین جنبه‌ها و در سطح در نظر گرفته شده. قابل فهم‌ترین آنها هستند. البته در فضایی که به‌این مقاله تخصیص یافته، نمی‌توان مباحث موردنظر را به‌معنای معمولی کلمه خلاصه کرد؛ در عوض هریك از آنها با یك یا چند نمونه از قسمتهای روشن و برجسته‌اش معرفی می‌گردد. در مقاله هیچ اثباتی ارائه نمی‌شود.

همراه با قضایایی که درمتون مربوط به‌این موضوع به‌نام مصنف خود شناخته می‌شوند نام مصنف را می‌آوریم؛ اگرچه در برخی موارد اسامی نسبت داده شده‌کامل نیستند. در باقی حالات، کوششی برای نسبت دادن اسامی نشده است. اغلب مراجع ذکرشده اصلیترین و مهمترین منابع نیستند بلکه مقالاتی توصیفی یا رسالاتی هستند که مجموعه‌های مفیدی از مراجع اضافی را دربردارند. اگرچه این خطمشی احتمالاً نسبت «سود برحجم» فهرست مراجع را ماکسیمم می‌سازد، دارای این نتیجهٔ ناخوشایند است که اسامی بسیاری از برجستگان این‌رشته حذف می‌شود. اسامی آنها را می‌توان در مشخصات کتابشناسی مراجع ذکر شده یافت. مرجعی که در آخر پاراگراف، در داخل کروشه می‌آید، شامل اطلاعات مفید یا حداقل مراجع مفیدی در زمینهٔ حوزه‌ای از نظریهٔ تحدب است که به‌آن پاراگراف مربوط می‌شود. علاوه برمباحثی که صریحاً ذکرشده‌اند، فهرست مراجع شامل تعدادی کتاب، تك‌نگاری، درسنامه، گزارش سمپوزیم، وخلاصهٔ مقالات است که مفهوم تحدب نقشی اساسی در آنها دارد. اکثر اینها در پانزده سال اخیر ارائه شده‌اند.

* Klee Victor, "what is a convex set?", *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971)616.

پیش‌درآمد. موضوع مجموعه‌های محدب شاخه‌ای‌ازهندسه، آنالیز، وجبرخطی است که ارتباطات متعددی با دیگر بخشهای ریاضی دارد وکاربرد آن در متحد ساختن تعداد کثیری ازپدیده‌های ظاهراً متفاوت ریاضی است. این موضوع همچنین در ارتباط با بخشهایی از علوم و تکنولوژی است.

گرچه مجموعه‌های محدب به‌طرق گوناگونی‌تعریف می‌شوند (برای آگاهی به [۲۷] مراجعه‌کنید) مفیدترین تعریفها مبتنی برمفهوم بینیت است. اگر E فضایی باشدکه چنین مفهومی در آن تعریف شده باشد، یک زیرمجموعهٔ C از E را محدب نامیم هرگاه برای هردو نقطهٔ x و y از C، C شامل همهٔ نقاط بین x و y باشد. مهمترین حالت، وتنها حالتی که دراینجا مورد بحث قرارمی‌گیرد، آن است که E یک فضای برداری روی میدان‌اعداد حقیقی R، بویژه فضای اقلیدسی nبعدی E^n باشد[۱] و نقاط بین x و y همان نقاط پاره‌خط xy باشند. بنابراین، یک زیرمجموعهٔ C از یک فضای برداری حقیقی محدب است هرگاه C شامل هرپاره‌خطی که هردونقطهٔ انتهایی آن در C است، باشد. (مثلاً، یک مکعب در E^3 محدب است ولی مرز آن محدب نیست، زیرا مرز شامل پاره‌خط xy نیست مگر آنکه x و y هردو روی یکی از وجوه دوبعدی مکعب باشند.) اهمیت نظریهٔ تحدب در این است که مجموعه‌های محدب غالبا در بسیاری از بخشهای ریاضی ظاهر می‌شوند و اغلب به‌استدلالهای نسبتاً مقدماتی تن درمی‌دهند. این نظریه حتی در بعدهای نامتناهی بمیزان قابل‌ملاحظه‌ای مبتنی براستدلالهای دو و سه‌بعدی است.

اولین‌مطالعهٔ منظم تحدب توسط مینکوفسکی(۱۸۶۴–۱۹۰۹) انجام‌شدکه‌کارهایش [۷۱] شامل مهمترین مفاهیم این موضوع، حداقل در شکل اولیهٔ آنها، است. پیشرفتهای اولیهٔ نظریهٔ تحدب در بعد متناهی و جهت‌گیری اصلی آنها به‌سوی حل مسائل‌کمی بوده است؛ یک بررسی عالی از این مسائل توسط بونسن، و فنچل [۱۴] در ۱۹۳۴ انجام شده است. ولی از۱۹۴۰ به‌بعد، قسمتهای ترکیبیاتی، کیفی، ومستقل ازبعد نظریه، شاید به‌دلیل کاربردهای زیادآنها در دیگربخشهای ریاضی، غلبه یافتند. بحث این مقاله،پس ازمقداری مطالب مقدماتی که به‌همهٔ قسمتهای نظریه مربوط می‌شود، باجنبه‌های کمی وترکیبیاتی آغاز می‌شود زیرا این جنبه‌ها محدود به‌فضاهای از بعد متناهی‌اندکه با بیشترین احتمال برای خوانندگان آشنا هستند. بعداً، در بحث از جنبه‌های کیفی و مستقل از بعد نظریه، اندکی آشنایی با فضاهای برداری توپولوژیک لازم است. خواننده‌ای‌که چنین‌آشنایی ندارد می‌تواند توجه خود را به‌حالت فضای اقلیدسی nبعدی E^n محدودکند.

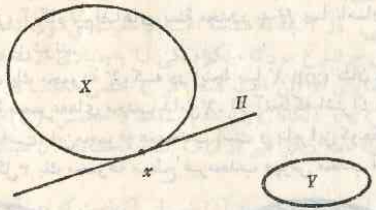
یکی از جاذبه‌های نظریهٔ تحدب در این است که هنوزتعداد زیادی مسائل حل‌نشده دارد که از لحاظ شهودی گیرا هستند و به‌سادگی بیان می‌شوند. تعداد کمی از این‌گونه مسائل را در اینجا می‌آوریم.

مقدمات. هردو نقطهٔ متمایز x و y از یک فضای برداری حقیقی E به‌گونه‌ای یکتا

---

۱. R^n وقتی با ضرب داخلی‌کانونیک آن در نظر گرفته می‌شود فضای اقلیدسی E^n نامیده می‌شود. ـ م.

خطی را مشخص می‌سازند. این خط متشکل از همهٔ نقاط به‌شکل $(1-\lambda)x+\lambda y$ است که λ روی تمام اعداد حقیقی تغییر می‌کند. مجموعهٔ نقاطی‌که برای آنها $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، به‌ترتیب نیم‌خط از x به‌طرف y و پاره‌خط xy را تشکیل می‌دهند. یک مجموعهٔ آفین مجموعه‌ای است‌که شامل‌همهٔ خطوط مشخص‌شده به‌وسیلهٔ جفتهای نقاط خود باشد؛ به‌عبارتی دیگر، انتقالی از یک زیرفضای برداری باشد. مثلاً، مجموعه‌های آفین E^3 عبارت‌اند از مجموعهٔ تهی، مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای، خطوط، صفحات، و خود E^3. یک ابرصفحهٔ H در E یک مجموعهٔ آفین با نقص بعد یا منهم بعد ۱ است؛ یعنی H به‌طور سره مشمول هیچ زیرمجموعهٔ آفینی از E غیر از خود E نیست. به‌ویژه،ابرصفحه‌های E^n زیرمجموعه‌های آفین $n-1$ بعدی آن‌هستند.به‌ازای‌هرابرصفحهٔ H، مجموعهٔ مکمل $E \sim H$ به‌طور یکتایی به‌صورت اجتماع دومجموعهٔ محدب قابل نمایش است. این مجموعه‌های محدب را نیم‌فضاهای باز محدود به H؛ و اجتماعهای آنها با H را نیم‌فضاهای بستهٔ محدود به H می‌نامند. گوییم دو مجموعهٔ X و Y بوسیلهٔ H جدا شده‌اند، هرگاه X در یکی از این نیم‌فضاهای بسته، و Y در نیم‌فضای بستهٔ دیگر باشد. گوییم مجموعهٔ X بر H در نقطهٔ x تکیه دارد هرگاه x عضوی از X باشد ولی از X بوسیلهٔ H جدا شده باشد. شکل۱ ابرصفحهٔ H (در این‌حالت، یک خط) در E^2 را نشان می‌دهدکه مجموعه‌های محدب X و Y را ازهم جداکرده و تکیه‌گاه X در نقطهٔ x است.

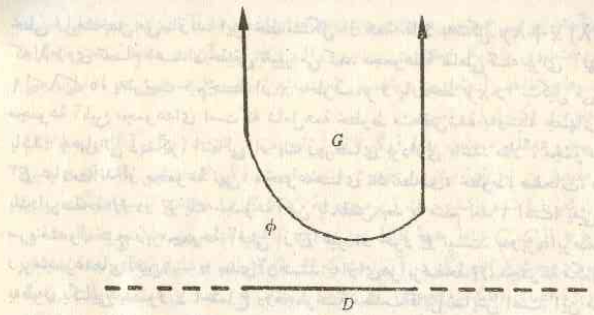


شکل۱

توابع محدب‌که در اکثر شاخه‌های نظریهٔ تحدب و در بخشهای متعددی از آنالیز اهمیت دارند، ارتباط بسیار نزدیکی با مجموعه‌های محدب دارند. فرض کنید ϕ تابعی با مقادیر حقیقی باشدکه دامنهٔ آن، D، در یک فضای برداری حقیقی قرار گرفته است. ϕ را محدب نامیم هرگاه D محدب باشد و ϕ بدازای همهٔ نقاط x و y از D و همهٔ اعداد λ مابین صفر و یک در نامساوی

$$\phi((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)\phi(x)+\lambda\phi(y)$$

صدق کند. به‌عبارت دیگر، ϕ تابعی محدب است اگر و فقط اگر بالای نمودار آن، G، مجموعه‌ای محدب باشد؛ G زیرمجموعه‌ای ازفضای حاصلضرب $E \times R$ متشکل‌ازجفتهای مرتب (x, τ) است به‌گونه‌ای‌که $x \in D$ و $\tau \geqslant \phi(x)$. شکل۲ یک تابع محدب ϕ: دامنهٔ

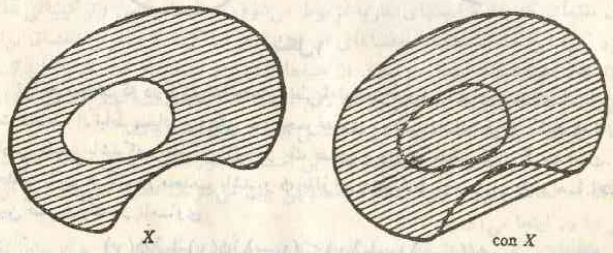


شکل ۲

آن D، و بالای نمودار آن G را نشان می‌دهد.

یك تابع را مقعر خوانیم هرگاه منفی آن محدب باشد، و آفین خوانیم هرگاه هم محدب و هم مقعر باشد. تابعی با مقادیر حقیقی روی E آفین است اگر و فقط اگر با یك نگاشت خطی در یك ثابت اختلاف داشته باشد. ابرصفحه‌های H در E دقیقاً مجموعه‌های صفرهای[1] فرمهای آفین[2] غیرثابت f روی E هستند. اگر H مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند x باشد که $f(x) = 0$، آنگاه نیم‌فضاهای بستهٔ محدود به H با نامساویهای $f(x) \leqslant 0$ و $f(x) \geqslant 0$ مشخص می‌شوند.

پوش محدب یك مجموعهٔ X، که در اینجا با $\operatorname{con} X$ نشان داده می‌شود، عبارت است از اشتراك همهٔ مجموعه‌های محدب شامل X. از آنجا که اشتراك مجموعه‌های محدب، مجموعه‌ای محدب است، این مجموعه هم محدب است و بنابراین کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل X است. (شکل ۳ یك مجموعهٔ مسطح غیرمحدب و پوش محدب آن را نشان می‌دهد.)



شکل ۳

۱. نقاطی را که تابعی روی آنها صفر است، صفرهای آن تابع گویند. ـ م.

۲. نگاشتهای آفین از E در R را فرمهای آفین روی E گویند. ـ م.

به عبارت دیگر، $\operatorname{con} X$ مجموعهٔ همهٔ ترکیبات محدب X است ـ یعنی، نقاطی به شکل $\sum_1^k \lambda_i x_i$ که x_iها نقاطی از X و λ_iها اعداد مثبت با مجموع ۱ هستند. برای هر چنین ترکیبی و هر تابع محدبی مانند ϕ که دامنهٔ آن شامل X است داریم

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi(x_i)$$

پوش محدب بستهٔ یك مجموعه عبارت است از بستار پوش محدب آن.

نقطهٔ x ازمجموعهٔ محدب C، یك نقطهٔ نهایی نامیده می‌شود هرگاه $C \sim \{x\}$ محدب باشد یا، به‌عبارت دیگر، x نقطهٔ داخلی هیچ پاره‌خطی در C نباشد. به‌طور کلی، یك وجه C؛ مجموعهٔ محدبی مانند $F \subset C$ است که توسط هیچ پاره‌خطی از C قطع نمی‌شود ـ یعنی هرگاه x و y اعضایی از C باشند و F شامل یکی از نقاط درونی پاره‌خط xy باشد آنگاه $xy \subset F$. (مثلاً، یك مکعب در E^3 شش ۲ـ وجه، دوازده ۱ـ وجه (یالها)، وهشت ۰ـ وجه (نقاط نهایی) دارد و پوش محدب نقاط نهایی خود است.)

اصطلاحات جسم و مخروط، توسط نویسندگان مختلف به‌شکلهای گوناگونی استعمال می‌شود. در اینجا جسم همواره به‌معنای یك زیرمجموعهٔ بستهٔ کراندار درون ناتهی E^n، و مخروط به‌معنای مجموعه‌ای در یك فضای برداری حقیقی است که اجتماعی از نیم‌خطهای آغاز شده از مبدأ است.

جنبه‌های کمی. در آنچه که هندسهٔ اعداد نامیده می‌شود، تحدب مفهومی اساسی است و در واقع این موضوع بود که مینکوفسکی را به‌بسیاری از تحقیقاتش هدایت کرد. یکی از جالبترین قضایای او این است که اگر C جسمی محدب در E^n و متقارن نسبت به‌مبدأ (یعنی، اگر $x \in C$ آنگاه $-x \in C$) باشد و حجمش، $V(C)$، حداقل 2^n باشد، آنگاه C دست‌کم یك نقطهٔ دیگر غیر از O را که مختصات آن همگی صحیح‌اند در بر دارد [۲۱].

یك بسته‌بندی از اجسام محدب، آرایشی از آنهاست که در آن هیچ دوجسمی نقاط درونی مشترك نداشته باشند. مسائل بسته‌بندی، علاوه بر اهمیتی که فی‌نفسه دارند، در نظریهٔ اعداد، نظریهٔ آگاهی، بلورشناسی، گیاهشناسی، ویروس‌شناسی و دیگر شاخه‌های علوم نیز پیش می‌آیند. اغلب، مسئلهٔ موردتوجه بسته‌بندی با بیشترین چگالی ممکن است. چگالترین بسته‌بندی قرصهای مستدیر همنهشت در E^2، آن است که قرصها در شش ضلعیهای منتظم نامتقاطع که E^2 را می‌پوشانند محاط شوند (شکل ۴). از مدتها پیش، حدس زده شده است که چگالترین بسته‌بندی گویهای کروی همنهشت در E^3، بسته‌بندی مکعبی کپلر است که با تقسیم‌بندی فرضی فضا به‌مکعبهای سیاه وسفید به‌گونه‌ای که یك صفحهٔ شطرنج سه‌بعدی تشکیل دهند، وقراردادن یك گوی هم‌مرکز با هرمکعب سیاه که برهمهٔ دوازده یال آن مماس باشد، به‌دست می‌آید؛ هرگوی با دوازده گوی دیگر در تماس است. لیکن، این حدس فقط در حالتی ثابت شده است که مراکز گویهای همنهشت در بسته‌بندی، یك شبکه تشکیل دهند (اگر x و y مراکز گویهایی باشند، آنگاه $y - x$ ۲ هم‌مرکز گویی باشد). [۳۵ و ۸۱]



شکل ۴

دستهٔ وسیعی از نتایج کمی وجود دارند که با اندازه‌گیریهایی از اجسام محدب مانند اندازه‌گیری حجم، مساحت سطح، و قطر آنها سروکار دارند. جواب بسیاری از مسائل اکسترمم‌سازی مربوط به‌این گونه اندازه‌گیریها، گویهای گروی یا سیمپلکسها هستند. (یك سیمپلکس در E^n عبارت است از پوش محدب $n+1$ نقطه که در هیچ ابرصفحه‌ای قرارندارند.) مثلاً، بنا به‌نامساوی هم‌محیطی[1] اگر S و V به‌ترتیب مساحت سطح و حجم جسم محدب C در E^n باشند، و ω_n حجم گوی واحد n بعدی باشد، آنگاه $S^n \geqslant n\omega_n V^{n-1}$، و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر C یك گوی بساشد. بنابراین، از میان همهٔ اجسام با حجم مفروض، گویها کوچکترین مساحت را دارند [۱۳، ۱۴، ۴۶، و ۴۷]. هر جسم محدبی، مانند C، از E^n در گویی یکتا با کمترین شعاع r جای می‌گیرد. بنا به‌نامساوی جانگ[2]، که در نظریهٔ تقریب کاربرد دارد، اگر قطر C برابر d باشد آنگاه $r \leqslant \sqrt{n/(2n+2)}\,.\,d$، و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر C یك سیمپلکس منتظم باشد [۲۷، ۴۷]. بنا به‌قضیهٔ لونر[3] هرجسمی در E^n، در بیضیوار یکتایی با کمترین حجم جای می‌گیرد [۲۸].

مجموعه‌های محدب در نظریهٔ احتمال هندسی اهمیت دارند. مثلاً، مسئلهٔ زیر توسط سیلوستر[4] (به‌شکلی دیگر) ارائه شده است. فرض کنید C جسمی محدب با حجم واحد در E^n باشد و $n+1$ نقطه از آن به‌طور تصادفی و مستقل از یکدیگر انتخاب شوند. در غیر از حالات تبهگون، پوش محدب این نقاط یك n-سیمپلکس است. امید ریاضی حجم این سیمپلکس، V_C، چقدراست؟ به‌ازای $n=2$، مقادیر V_C بین $1/12$ و $35/48\,\pi^2$ هستند که اولی وقتی C یك مثلث است و دومی وقتی C یك بیضی‌است به‌دست می‌آید. برای مقادیر بزرگتر n، V_C برای گوی معلوم است اما برای سیمپلکس این‌طور نیست [۶۱]، [۵۵، ۷۲، و ۷۳]

اگر $C_1, \ldots, C_k$ اجسامی‌محدب در E^n و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ اعداد مثبتی باشند، آنگاه مجموعهٔ همهٔ نقاط به‌شکل $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ که $x_i \in C_i$، جسم محدب دیگری مانند

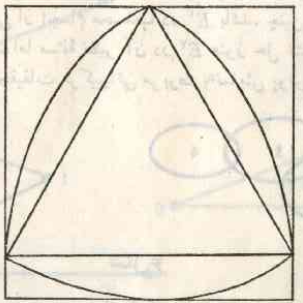
1. isoperimetric 2. Jung 3. Loewner
4. Sylvester

C است که با $\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k$ نشان داده می‌شود. با تثبیت $C_1, \ldots, C_k$، حجم C به‌شکل چندجمله‌ای همگنی از درجهٔ n با متغیرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ قابل بیان است. برخی از عمیقترین قسمتهای نظریهٔ کمی، مربوط به‌ضرایب این چندجمله‌ای است که حجمهای آمیختهٔ $C_1, \ldots, C_k$ نامیده می‌شوند. یك ابزار اساسی در بررسی حجمهای آمیخته، قضیهٔ برانن[1]-مینکوفسکی است که می‌گوید برای $0 < \lambda < 1$

$$\sqrt[n]{V((1-\lambda)C_1+\lambda C_2)} \geqslant (1-\lambda)\sqrt[n]{V(C_1)}+\lambda\sqrt[n]{V(C_2)}$$

(یعنی، ریشهٔ nام حجم، تابعی مقعر از λ است) وحالات تساوی را معین‌می‌کند. نامساویهای مربوط به‌حجمهای آمیخته، نامساوی هم‌محیطی و دیگر نامساویهای هندسی موردنظر را به‌دست می‌دهند. [۱۴، ۴۶، و ۴۷]

گوییم جسم محدب C در E^n دارای عرض ثابت b است هر گاه فاصلهٔ بین هردو ابرصفحهٔ موازی و تکیه‌گاه C، b باشد؛ به‌عبارت دیگر، قطر C، b است و با افزودن هر نقطهٔ E^n به C که در آن نباشد، قطر آن افزایش می‌یابد. از عبارت دوم نتیجه می‌شود که هرمجموعه با قطر نابیشتر از b، حداقل دریك جسم محدب با عرض ثابت b قرارمی‌گیرد. بنابراین مسئلهٔ زیر، از بورساك[2]، می‌تواند به‌حالتی‌که X در آن جسمی محدب با عرض ثابت است، تحویل شود: آیا می‌توان هرمجموعهٔ X با قطر ۱ در E^n را با $n+1$ مجموعه با قطر کمتر از ۱ پوشاند؟ برای $n \leqslant 3$ جواب مثبت است و برای $n > 3$، مسئله حل‌نشده است [۴۲]. اجسام محدب مسطح غیرمستدیر با عرض‌ثابت، توسط بسیاری از ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. خواص ویژهٔ آنها موجب کاربرد آنها در هماهنگی حرکات و دیگر مکانیزمها شده است. این گونه اجسام می‌توانند در یك مربع قرار گیرند و سپس به"چرخش" در آیند وهمچنان با چهارضلع مربع در تماس باشند (شکل۵). [۵، ۱۴، و ۸۷]



شکل۵

1. Brunn 2. Borsuk

تاکنون چند مسئلهٔ حل‌نشده در E^3 و E^4 ذکر کرده‌ایم، حال باذکر مسئلهٔ حل‌نشده‌ای در E^2 این بخش را به پایان می‌بریم. یك وتر جسمی محدب، پاره‌خطی است که دو نقطهٔ مرزی را بهم وصل می‌سازد، و یك نقطه را نقطهٔ وتر مساوی[1] گویند هرگاه همهٔ وترهای گذرنده از آن، طولهای مساوی داشته باشند. آیا هیچ جسم محدب مسطحی هست که دو نقطهٔ وتر مساوی داشته باشد؟ [۶۰]

جنبه‌های ترکیبیاتی. بیشتر نظریهٔ ترکیبیاتی تحدب با خاصیتهای اشتراك مجموعه‌های محدب سروکاردارد. اشتراك هرخانواده‌ای ازمجموعه‌های محدب، C، خودش محدب است، گرچه ممکن است تهی باشد. بنا به‌قضیهٔ هلی[2]، C ناتهی است به‌شرط آنکه مجموعه‌های محدب همگی در E^n باشند و هر $n+1$ تای آنها اشتراك ناتهی داشته باشند، و خانواده یا متناهی باشد و یا آنکه همگی اعضایش فشرده باشند. قضیهٔ هلی تعمیمها و کاربردهای متعددی دارد. از حالت یك بعدی این قضیه نتیجه می‌شود که اگر C مکعبی در E^n باشد، آنگاه هرخانواده‌ای از انتقالهای C که دو به‌دو اشتراك داشته باشند، اشتراك ناتهی دارند. در واقع، یك جسم محدب C دارای این خاصیت اشتراك است اگر و فقط اگر به‌طور آفین معادل یك مکعب باشد.[3] [۲۷، ۴۸، و ۸۷]

مسئلهٔ تعیین همهٔ خواص اشتراك مجموعه‌های محدب حتی در E^1 هم روشن و بدیهی نیست. این مسئله منجر به‌مفهوم گراف بازه‌ای[4] می‌شود که درحوزه‌های متنوعی چون ژنتیك مولکولی، روانشناسی، باستانشناسی، واکولوژی به‌کارمی‌رود. گراف اشتراك وابسته به‌یك خانواده ازمجموعه‌ها گراف مجردی است که به‌ازای هرعضوخانواده گره‌ای دارد و دو گره با یك یال گراف به‌هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر مجموعه‌های نظیرشان اشتراك داشته باشند. شکل۶ یك خانواده از مجموعه‌های محدب و گراف اشتراك آن را نشان می‌دهد. هر گراف متناهی می‌تواند به‌صورت گراف اشتراك یك خانواده از اجسام محدب در E^3 تجسم یابد، ولی در مورد E^2 و E^1 این گونه نیست. گراف بازه‌ای آن است که گراف اشتراك خانواده‌ای متناهی از اجسام محدب در E^1 باشد. چنین گرافهایی به‌روشهای گوناگونی مشخص شده‌اند اما مسئلهٔ نظیر آن در E^2 هنوز حل نشده است. [۸۴، ۸۶]

زمینه‌ای دیگر در تحقیقات ترکیبیاتی مربوط به‌نمایش پوش محدب است. در این



شکل۶

1. equichordal point 2. Helly

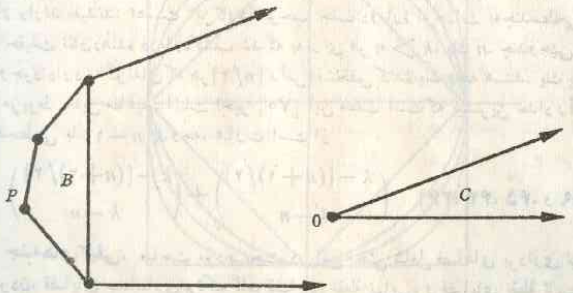
۳. احتمالاً یعنی سایهٔ یك مکعب تحت یك ایزومرفیسم آفین باشد. ـ م.

4. interval graph

زمینه، ساده‌ترین و کارسازترین نتیجه، قضیهٔ کاراتئودوری است که بنا به‌آن اگر $X \subset E^n$ و $u \in \operatorname{con} X$، آنگاه به‌ازای مجموعه‌ای مانند Y متشکل از $n+1$ نقطه یا کمتر از X، $u \in \operatorname{con} Y$. مثلاً، وقتی $X \subset E^2$، هرنقطه‌ای از $\operatorname{con} X$ متعلق است به X، به‌پاره‌خطی که با دو نقطه از X مشخص می‌شود، یا به‌مثلثی که به‌وسیلهٔ سه نقطه از X معین می‌شود. قضیهٔ کاراتئودوری تعمیمها و کاربردهای بسیاری دارد، از جمله اینکه برای هربخش فشرده $X \subset E^n$، $\operatorname{con} X$ نیز فشرده است. [۲۷، ۷۹]

گسترده‌ترین پیشرفتهای جنبهٔ ترکیبیاتی به‌ساختمان وجوه چندسطحی[1]های محدب مربوط‌اند. اگرچه اصطلاحات مربوطه هنوز استاندارد نشده‌اند، ما دراینجا لفظ چندسطحی را به‌معنای زیرمجموعه‌ای از E^n که اشتراك تعدادی متناهی از نیم‌فضاهای بسته است به‌کار می‌بریم. در این میان چندسطحی‌های کرانه‌دار، که چندوجهی[2] نامیده می‌شوند، و چندسطحی‌های مخروطی[3] اهمیت خاصی دارند. بنا به‌لم فارکاس[4]، یك مجموعهٔ چندوجهی است اگر و فقط اگر پوش محدب تعدادی متناهی نقطه باشد، و چندسطحی مخروطی است اگر و فقط اگر پوش محدب تعدادی متناهی نیم‌خط بیرون آمده ازمبدأ باشد. به‌طور کلی، پنج شرط زیر روی یك مجموعهٔ P در E^n هم‌ارزند: ۱) P یك چندسطحی است؛ ۲) P مجموعهٔ محدب بسته‌ای است که تعداد وجوه آن متناهی است؛ ۳) P پوش محدب یك دستگاه متناهی از نقاط و نیم‌خطهاست؛ ۴) P به‌صورت مجموع برداری $B+C=\{b+c: b\in B, c\in C\}$ از چندوجهی B و چندسطحی مخروطی C است؛ ۵) P پوش محدب بستهٔ اجتماع یك چندوجهی B و انتقال یك چندسطحی مخروطی است. شکل۷ یك چندسطحی دوبعدی P و مجموعه‌های B و C وابسته به‌آن را نشان می‌دهد. [۵۶]

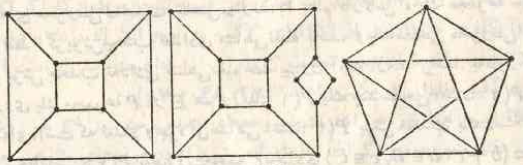
اولین نقطهٔ عطف در بررسی ترکیبیاتی چندسطحی‌ها، قضیهٔ سال ۱۷۵۲ اویلر است که بنا به‌آن برای هر ۳- چندوجهی داریم $v-e+f=2$، که v، e، و f به‌ترتیب تعداد



شکل۷

1. polyhedron 2. polytop 3. polyhedral cones
4. Farkas

رئوس، یالها، و ۲- وجه‌ها است. (معمولاً نقاط نهایی چندسطحی‌ها رأس نامیده می‌شوند.) بنا به تعمیم اشلافلی[1] و پیوانکاره اگر $f_i(P)$ تعداد وجوه iبعدی چندوجهی nبعدی P باشد، آنگاه $\sum_{i=-1}^{n}(-1)^i f_i(P) = 1-(-1)^n$. دومین نقطهٔ عطف، قضیهٔ سال ۱۹۳۴ اشتینیتز[2] است که مشخص کنندهٔ خواص گرافهای ۳- چندوجهی‌هاست. مانند ساختمانهای ترکیبیاتی متشکل از رئوس و یالها، قابلیت تسطیح (قابلیت نمایش در E^2 بدون تقاطع). و ۳- همبندی آنها (وجود سه مسیر مستقل بین هر دو رأس). اولین گراف شکل ۸ متناظر با یک مکعب است. دومین و سومین گراف شکل ۸ متناظر با دیج ۳- چندوجهی نیست، زیرا اولی ۳- همبند نیست و دومی قابلیت تسطیح ندارد. ولی سومین گراف متناظر با یک سیمپلکس چهاربعدی است. خواص گوناگونی از جمله n- همبندی برای گرافهای n- چندوجهی ثابت شده است اما مشخصات ترکیبیاتی آنها برای $n > 3$ شناخته نشده است. [۴۳]



شکل ۸

سومین نقطهٔ عطف در مطالعهٔ ترکیبیاتی چندسطحی‌ها، گسترش تکنیکهای محاسباتی برای مینیمم‌سازی نگاشتهای خطی روی چندسطحی‌هاست که از ۱۹۴۰ آغاز شد و هنوز ادامه دارد. این تکنیکها، موسوم به برنامه‌ریزی خطی، راه‌حلهایی برای دستهٔ وسیعی از مسائل عملی بهینه‌سازی به‌دست می‌دهند و همچنین درمحاسبات دیگری که با چندسطحی‌ها سروکار دارند مفیدند. اهمیت این کارها موجب جلب دوبارهٔ توجهات به‌چندسطحی‌ها شد و این حقیقت تکان‌دهنده دوباره کشف شد که به‌ازای هر $n > k$، یک n- چندوجهی با k رأس وجود دارد به‌گونه‌ای که هر $\lfloor n/2 \rfloor$ رأس، مشخص کنندهٔ یک وجه هستند. یک پیشرفت کاملاً مربوط به‌این مفاهیم، اثبات اخیر [۷۵] این مطلب است که بیشترین تعداد رأس یک n- چندسطحی با k $n-1$ وجه، عبارت است از

$$\binom{k-\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{k-n} + \binom{k-\lfloor (n+2)/2 \rfloor}{k-n}$$

[۲۶، ۴۳، ۴۵، و ۵۹]

جنبه‌های کیفی. مباحث مورد بحث در این بخش شامل فضاهای برداری نرم‌دار، قطبی‌بودن، قضایای جداسازی وتکیه‌گاه، قضایای نقطهٔ نهایی، و قضایای نقطهٔ ثابت‌است.

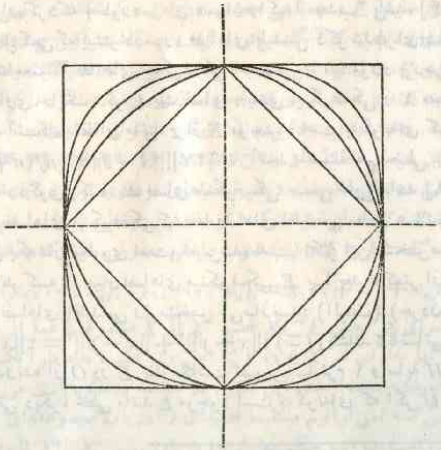
برای هر تابع با مقادیر حقیقی ϕ روی یک فضای برداری حقیقی E، هر دو تا از شرایط زیر سومی را نتیجه می‌دهند: زیر جمعی بودن (به ازای هر $x, y \in E$،

1. Schläfli 2. Steinitz

$\phi(x+y) \leqslant \phi(x)+\phi(y)$)؛ همگن مثبت بودن (به‌ازای هر $x \in E$ و $\lambda \geqslant 0$، $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$)؛ محدب بودن. نرم تابعی است که دراین شرایط صدق می‌کند و علاوه بر آن متقارن ($\phi(-x) = \phi(x)$) و مثبت ($x \neq 0$ نتیجه می‌دهد $\phi(x) > 0$) است. یک فضای برداری نرم‌دار عبارت است از یک فضای برداری E همراه با یک نرم روی آن. نرم را معمولاً با $\|\ \|$ نشان می‌دهند و به‌کمک آن مفهوم مفید فاصلهٔ دو نقطهٔ x و y به‌صورت $\|x-y\|$ تعریف می‌شود. گوی یکهٔ چنین فضایی مجموعهٔ همهٔ نقاط x است که برای آنها $\|x\| \leqslant 1$. وکرهٔ یکه با شرط $\|x\| = 1$ تعریف می‌شود. وقتی $r = 2$، تابع $\|x\|_r = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r)^{1/r}$ نرم معمولی اقلیدسی E^n است، بنابه‌یک نامساوی مینکوفسکی، این تابع به‌ازای هر $r \geqslant 1$ یک نرم است. به‌طورکلی، مفهوم تحدب نقشی اساسی درنظریهٔ نامساویها بازی می‌کند، و بسیاری از نامساویهای مفید صرفاً حاکی ازمحدب بودن توابع خاصی هستند. نرم مهم دیگری روی E^n با رابطهٔ

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

معین می‌شود. گوی یکهٔ $\|\ \|_\infty$ یک مکعب nبعدی و گوی یکه $\|\ \|_1$ چیزی است که چندوجهی مورب[1] نامیده می‌شود (به‌ازای $n = 3$ یک هشت‌وجهی منتظم). شکل ۹ کره‌های یکهٔ مربوط به $\|\ \|_r$ را در E^2 به‌ازای $r = 1, 3/2, 2, 3, \infty$ نشان می‌دهد. [۳۹]



شکل ۹

1. cross-polytope

مطالعهٔ فضاهای برداری نرم‌دار، به‌اعتباری، هم‌ارز مطالعهٔ ردهٔ خاصی از مجموعه‌های محدب است. این هم‌ارزی مشتمل بر مفهوم تابع مقیاس μ مجموعه‌ای مانند U است که به‌ازای هر $x \in E$، $\mu(x)$ به‌صورت کنارهٔ پایین همهٔ اعداد $\lambda > 0$ که برای آنها $x \in \lambda U$. تعریف می‌شود. برای هر نرم $\| \ \|$ روی E، گوی یکهٔ وابستهٔ آن، U، مجموعه‌ای محدب است که همهٔ خطوط گذرنده از مبدأ O، را در یک پاره‌خط بسته که O وسط آن است قطع می‌کند؛ علاوه بر این $\| \ \|$ تابع مقیاس U است. برعکس برای هر مجموعهٔ محدب U از نوعی که توصیف شد، تابع مقیاس وابسته به آن یک نرم است که گوی یکهٔ آن همان U است. بنابراین هر خاصیتی از یک فضای برداری نرم‌دار را می‌توان برحسب گوی یکه یا کرهٔ یکهٔ آن توصیف کرد. مثلاً گردی[1] یک فضای نرم‌دار را می‌توان با این طریق تعریف کرد که بگوییم به‌ازای هر x و y غیرهم‌خط با O، $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$ و با اینکه بگوییم کرهٔ یکه شامل هیچ پاره‌خطی نیست. هموواری فضای E را می‌توان به‌این صورت تعریف کرد که بگوییم به‌ازای هر دو نقطهٔ ناصفر x و y تابع $\phi(\lambda) = \|x+\lambda y\|$ در $\lambda = 0$ دیفرانسیل‌پذیر است و یا اینکه بگوییم کرهٔ یکه در هر نقطه یک ابرصفحه تکیه‌گاه یکتا دارد. فضای اقلیدسی nبعدی هم‌گرد است و هم‌هموار. رفتار فضای برداری نرم‌دار گاهی اوقات با نرم‌گذاری دوباره بهتر می‌شود، و معنای این‌عمل ارائهٔ یک نرم تازه است که مابین دو مضرب مثبت از نرم اولیه جا بگیرد، و در نتیجه توپولوژی مشابهی را در فضا ایجاد کند. مثلاً، هر فضای برداری نرم‌دار جدایی‌پذیر[2] را می‌توان به‌گونه‌ای نرم‌گذاری دوباره کرد که به‌طور هم‌زمان هموار و اکیداً محدب[3] باشد. [۲۴، ۲۵، و ۲۹]

همهٔ مسائل کمی که بیشتر درمورد فضاهای اقلیدسی ذکر شد، برای فضاهای نرم‌دار از بعد متناهی نیز که معمولاً فضاهای مینکوفسکی نامیده می‌شوند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بنا به‌نظیر نامساوی جانگ اگر E یک فضای nبعدی مینکوفسکی و X مجموعه‌ای در آن به‌قطر d باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند z از E موجود است به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $x \in X$ $\|x-z\| \leqslant (n/(n+1))d$ [۲۷]. تا آنجا که مسئلهٔ هم‌محیطی برای فضا مطرح است لزومی ندارد گوی یکهٔ یک فضای مینکوفسکی جسمی غایی باشد [۱۸]. مشخصات بسیاری از آن فضاهای مینکوفسکی که با فضاهای اقلیدسی معادل هستند، به‌عبارت دیگر آنهایی که گوی یکه‌شان بیضوی است، تعیین‌شده است. اکثر این مشخص‌سازیها در ارتباط با این حقیقت‌اند که در میان فضاهای مینکوفسکی E با بعد ناکمتر از ۳، هر کدام از شرایط زیر فضاهای اقلیدسی را مشخص می‌سازند: (الف) (جردن-فون نویمان) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$؛ (ب) (بلشکه-کاکاتانی[4]) برای هر ابرصفحهٔ H گذرنده از O در E یک نگاشت تصویر با نرم ۱ و سایهٔ H روی E وجود دارد ــ به‌عبارتی دیگر، خطی مانند L موجود است به‌گونه‌ای که اگر U گوی یکه باشد

1. rotundity 2. separable

۳. اکیداً محدب بودن همان گرد بودن است. ــ م.

4. Blaschke-Kakutani

آنگاه اشتراک $H \cap U$ با اشتراک U و "استوانه" $L+U$ مساوی است. [۳۹، ۵۸]

تا آنجا که کاربرد تحدب در دیگر بخشهای ریاضی مطرح است، قضایای جداسازی و تکیه‌گاه از اهمیت خاصی برخوردارند. آنها به‌طور گسترده‌ای در آنالیز تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند و در نظریهٔ بازیها، نظریهٔ جمع‌پذیری، و حتی برای اثبات بعضی از قضایای رنگ کردن در نظریهٔ گراف از آنها استفاده شده است. این قضایا به‌همراه قضیهٔ لیاپانوف[1] که حاکی از تحدب برد یک اندازهٔ برداری غیراتمی است [۹، ۴۹، و ۶۸]، از جمله ابزارهای مجرد اصلی در نظریهٔ کنترل بهینه هستند [۶۲]. قضایای جداسازی بیان‌کنندهٔ شرایطی هستند که تحت آن شرایط دو زیرمجموعهٔ ناتهی محدب جدا از هم X و Y از یک فضای برداری توپولوژیک E می‌توانند به‌وسیلهٔ یک ابرصفحه، یا به‌معنای ضعیفی که در بالا تعریف شد و یا به‌معناهای قوی دیگر، از یکدیگر جدا شوند. مثلاً، کافی است E از بعد متناهی و یا یکی از مجموعه‌ها درون ناتهی داشته باشد. یک نتیجه این است که اگر C مجموعه‌ای محدب با درون ناتهی و A یک مجموعهٔ آفین ناتهی و جدا از درون C باشد، آنگاه A در یک ابرصفحه که A را از C جدا می‌کند جای می‌گیرد. به‌ویژه، یک مجموعهٔ محدب بستهٔ C با درون ناتهی برهریک از نقاط مرزی خود تکیه می‌زند (مازار-بورگین[2])، گرچه این نتیجه در صورت تهی بودن درون C معتبر نیست، نقاط تکیه‌گاه C در مرز C چگال‌اند به‌شرط آنکه E فضایی باناخ باشد (بیشاپ-فلپس[3]) و همچنین به‌شرط آنکه E موضعاً محدب و C به‌طور ضعیف فشرده باشد. اگر A زیرمجموعهٔ آفینی از فضای برداری حقیقی E و ϕ تابعی محدب روی E و f نگاشت آفینی روی A باشد به‌گونه‌ای که روی A، $f \leqslant \phi$؛ آنگاه می‌توان f را به نگاشت آفین g روی E به‌گونه‌ای تمدید کرد که روی E، $g \leqslant \phi$. این نتیجه، اصلاحی جزئی در قضیهٔ کلاسیک هان-باناخ در آنالیز تابعی است که با به‌کارگیری قضیهٔ جداسازی در مورد نمودار f و بالای نمودار ϕ به‌دست می‌آید. به‌این دلیل و به‌دلیل روابط دیگر، می‌توان قضایای جداسازی و تکیه‌گاه را از خویشاوندان هندسی قضیهٔ هان-باناخ دانست. [۱۶، ۲۹، ۵۴، ۶۲، ۶۴، ۸۰، و ۸۳]

مفهوم قطبی در نظریهٔ تحدب و نظریهٔ فضاهای برداری توپولوژیک مفهومی اساسی است. فرض کنید E و F دو فضا باشند که توسط فرم دوخطی $\langle \ , \ \rangle$ با هم جفت شده‌اند، مثلاً، فرض کنید "$E = F = E$" و $\langle \ , \ \rangle$ ضرب داخلی معمولی باشند که با ضابطهٔ

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

معین می‌شود. برای هر بخش $X \subset E$ قطب X° از X مجموعهٔ همهٔ yهایی از F است که برای آنها به‌ازای هر $x \in X$، $\langle x, y \rangle \leqslant 1$. قطب، به‌خاطر آنکه اشتراکی از نیم‌فضاهاست، همیشه محدب است. این مفهوم در هندسه دونقش بازی می‌کند که هم‌زاد یکدیگرند. زمانی که نمی‌توانیم مستقیماً قضیه‌ای را دربارهٔ مجموعه‌های $X_1, X_2, \ldots$ ثابت کنیم، ممکن است بتوانیم حکم معادلی را دربارهٔ $X_1^\circ, X_2^\circ, \ldots$ ثابت کنیم. ازسوی دیگر، اگر قضیهٔ جالبی دربارهٔ $X_1, X_2, \ldots$ ثابت شده باشد ممکن شکل قطبی آن نیز

1. Lyapunov 2. Mazur-Bourgin 3. Bishop-Phelps

جالب باشد. برای $r \geq 1$ و $1/r + 1/s = 1$، گوی یکهٔ $\|\ \|_r$ قطب‌گوی یکهٔ $\|\ \|_s$ در E^n است. چندتا از این نوع جفتهای قطبی در شکل ۹ دیده می‌شوند. روابط نزدیکی بین مفاهیم قطب یك مجموعهٔ محدب، یا به‌اصطلاح تابع تکیه‌گاه یك جسم محدب، و مفهوم مزدوج توپولوژیك یك فضای برداری نرم‌دار وجود دارد. [۱۶، ۲۹، ۴۳، ۵۴، و ۶۴]

در مسائل عملی بهینه‌سازی، اغلب با هردو نوع توابع محدب و مقعر سروکار داریم، و هردوی آنها خواصی دارند که برای حل این گونه مسائل مفید است. فرض کنید f تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی باشد که دامنه‌اش، D، در یك فضای برداری توپولوژیك موضعاً محدب E قرار دارد. اگر f محدب باشد، آنگاه هر نقطهٔ مینیمم نسبی f مانند x_0، یك مینیمم مطلق است [۸۵، ۸۳، و ۸۸]. این به‌معنای آن است که اگر یك همسایگی U از x_0 به‌گونه‌ای موجود باشد که برای هر $x \in U \cap D$، $f(x_0) \leqslant f(x)$، آنگاه این نامساوی برای هر $x \in D$ نیز برقرار است. این مطلب توجیه‌کنندهٔ روشهای تکرارمتعددی است که برای یافتن یا تقریب زدن x_0 به‌کار می‌روند. [۸۸] اگر f مقعر و D فشرده باشد، آنگاه f در یکی از نقاط نهایی D مینیمم‌اش اختیار می‌کند. این یکی ازدلایل اهمیت نقاط نهایی در آنالیز تابعی است. دلیل دیگر در قضیهٔ کرین-میلمان[1] نهفته است که می‌گوید اگر C زیرمجموعه‌ای محدب وفشرده ازیك فضای موضعاً محدب باشد و اگر $X \subset C$، آنگاه C با پوش محدب X مساوی است اگر وفقط اگر بستار X همهٔ نقاط نهایی C را دربرداشته باشد. بنابراین، مجموعهٔ نقاط نهایی C کوچکترین مجموعه‌ای است که به‌وسیلهٔ آن، با استفاده از ترکیبات محدب، می‌توان همهٔ نقاط C را تقریب زد. تعمیمهایی ازقضیهٔ کرین-میلمان به‌بعضی مجموعه‌های غیرفشردهٔ موجود است و در حالت بعد متناهی امکان ظرافت بیشتری هم هست. مثلاً، اگر C مجموعهٔ محدب بسته‌ای در E^n باشد و هیچ خطی را هم دربرنداشته باشد، آنگاه C پوش محدب نقاط نهایی خود به‌همراه نیم‌خطهای نهایی‌خود است. (یك نیم‌خط نهایی از C، نیم‌خطی است که توسط هیچ پاره‌خطی "قطع" نمی‌شود.) [۳، ۶، ۲۲، ۲۹، ۵۴، ۶۴، و ۷۶]

هرگاه C مجموعه‌ای محدب و فشرده در یك فضای موضعاً محدب E، و X مجموعهٔ همهٔ نقاط نهایی آن باشد، از قضیهٔ کرین-میلمان نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ p از C گرانیگاه یك اندازهٔ احتمال μ روی بستار X، $\bar{X}$، است ــ یعنی به‌ازای هر فرم خطی پیوستهٔ f روی E داریم

$$f(p) = \int_{x \in \bar{X}} f(x) d\mu(x)$$

تعدادی از قضایای نمایش انتگرالی در آنالیز، نتایجی از همین موضوع‌اند. ولی زمانی که X بسته نیست، مطلوب است نمایش دقیقتری داشته باشیم که توسط اندازه‌ای فراهم شود که به‌جای $\bar{X}$، روی X باشد. بنا به‌قضیهٔ شوکت[2] که انگیزهٔ تحقیقات بسیاری در سالهای اخیر بوده است، اگر C متریك‌پذیر باشد امکان چنین نمایشی همواره وجود دارد.

1. Krein-Milman 2. Choquet

به‌ازای هر $p \in C$، یکتایی نمایش وابسته است به‌یك مفهوم مفید ومستقل ازبعد سیمپلکس. این ایده‌ها در حوزه‌های متعددی مانند نظریهٔ پتانسیل و نظریهٔ جبر عملگرها به‌کار برده شده‌اند. [۳، ۲۲، ۴۱، و ۷۶]

درخاتمه، با ذکر دوتا ازساده‌ترین ولی مهمترین قضایای نقطهٔ ثابت برای مجموعه‌های محدب، نظرگوشاهی به‌این قضایا می افکنیم. هردوقضیه از راههای بسیاری تعمیم یافته‌اند. بنا به‌قضیهٔ برادور-شادر-تیخونوف[1]، اگر C مجموعهٔ محدب فشرده‌ای در یك فضای موضعاً محدب و ϕ تابعی پیوسته از C در C باشد، آنگاه حداقل یك نقطهٔ p از C موجوداست به‌قسمی که $\phi(p) = p$. این قضیه و دیگر وابستگان آن در زاههای بسیاری به‌کار رفته‌اند مثلاً، در اثبات قضایای وجودی برای معادلات دیفرانسیل و انتگرال، قضایای مینیماکس در نظریهٔ بازیها. و خواص هندسی گوناگون مجموعه‌های محدب. (مثلاً، یك زیرمجموعهٔ فشرده از E^n یا فضای هیلبرت H. محدب است اگر و فقط اگر هرنقطهٔ فضا، نقطه‌ای در آن مجموعه را به‌گونه‌ای یکتا به‌عنوان نزدیکترین نقطه بپذیرد. هنوز معلوم نشده است که آیا می‌توان در این قضیه به‌جای "فشرده"، "بسته" در H را قرارداد، حتی در حالت $H = E^n$.) پیشرفت محاسباتی‌جدیدی [۶۶] امکان آن را فراهم ساخته است که قضیهٔ نقطهٔ ثابت را به‌عنوان ابزاری برای ساختن جوابهای انواع متعددی از دستگاهها، و نه صرفا برای اثبات وجود آنها، درنظر بگیریم. [۱۵، ۳۰]

بنا به‌قضیهٔ مارکوف-کاکاتانی[2]. اگر C زیرمجموعه‌ای محدب و فشرده از یك فضای برداری توپولوژیك و Φ خانواده‌ای جابه‌جا شونده از تبدیلات آفین پیوسته از C در C باشد، آنگاه حداقل یك نقطهٔ $p \in C$ موجود است به‌قسمی که برای هر $\phi \in \Phi$، $\phi(p) = p$. این قضیه در اثبات وجود میانگینهای ناوردا روی گروههای جابجایی، امکان تمدید تحت انتقال ناوردای متناهی جمع‌پذیر اندازهٔ لبگ روی همهٔ زیرمجموعه‌های کرانمدار E^n، و بسیاری موارد دیگر به‌کار می‌رود. توجه داشته باشید که موضعاً محدب بودن در قضیهٔ مارکوف-کاکاتانی لازم نیست. هنوز معلوم نشده است که این فرض در قضیهٔ نقاط نهایی کرین-میلمان و قضیهٔ نقطهٔ ثابت تیخونوف قابل حذف است یا خیر. [۱۵، ۱۶، و ۳۰]

مراجع

1. Alexandrov A.D., *Die Innere Geometrie der Konvexen Flachen*, Akademie-verlag. Berlin, 1955. (Translated from the (1948) Russian edition).
2. Alexandrov A.D., *Konvexe Polyeder*, Akademie-Verlag, Berlin, 1958. (Translated from the (1950). Russian edition by H. Abetz. under the scientific editorship of W. Süss).
3. Alfsen E, *Convex Compact Sets and Boundary*

1. Brouwer-Schauder-Tychonov 2. Markov-Kakutani

Integrals, Springer, Berlin, (1971)

4. Benson R.V., *Euclidean Geometry and Convexity*, Mc Graw-Hill New York, (1966).

5. Beretta L., Maxia.A., "Insiemi convessi eorbiformi," *Univ. Roma e Ist. Naz. Alta Mat. Rend Mat* (5) 1 (1940) 1.

6. Berge C., *Espaces Topologiques: Fonctions Multivoques*, Dunod, Paris, (1959).

7. Berge C., Ghouila-Houri.A., *Programming, Games, and Transportation Networks*, Methuen, London and Wiley, New York, 1965. (Translated by M. - Merrington and C.Ramanujacharyulu from the (1962) French edition).

8. Blaschke W., *Kreis und Kugel*, Teubner, Leipzig (1916)

9. Bolker E., "A class of convex bodies," *Trans Amer Math. Soc.*, 145 (1969) 323.

10. Boltyanskil V.G., Gohberg.I.Ts., *Theorems and Problems of Combinatorial Geometry* (Russian) Nauka Moscow, (1965).

11. Boltyanskil V.G., Yaglom.I.M., *Geometric Problems on Maxima and Minima* (Russian), Encyclopedia - of Elementary Mathematics. Nauka, Moscow, (1966) 270.

12. Boltyanskil V.G., Yaglom.I.M., *Convex figures and bodies* (Russian), Encyclopedia of Elementary Mathematics, Nauka, Moscow, (1966) 182.

13. Bonnesen T., *Les Problemes des Isoperimetriques et des Isepiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, (1928).

14. Bonnesen T., Fenchel.W., *Theorie der Kinvexen Korper*, Springer, Berlin (1934) (Reprinted by Chelsea, New York, (1948).

15. Bonsall F., *Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, (1962).

16. Bourbaki.N., *Espaces Vectoriels Topologiques*

(rev.ed.) Hermann, Paris, (1966). Chaps. 1-2 and (1967), Chaps. 3-5.

17. Brückner M., *Vielecke und Vielflache*, Teubner Leipzig, 1900.

18. Busemann H., "The foundations of Minkowskian grometry," *Comment Math. Helv.*, 24 (1950) 156.

19. Busemann H., *Convex Surfaces*, Interscience, Wiley, New York, (1958).

20. Busemann A. *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York, (1955).

21. Cassels J.W.S., *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer, Berlin, (1959).

22. Choquet G., *Lectures on Analysis* (ed. by J.Marsden, T.Lance, and S.Gelbart), Benjamin, New York, (1969).

23. Coxeter H.S.M., *Regular Polytopes*, Pitman, London (1948). Second ed. Macmillans, New York and Collier-Macmillan, London, (1963).

24. Cudia D.F., "Rotundity, in Convexity", Proc, Sympos, *Pure Math, Amer Math. Soc*, 7 (1963) 73.

25. Cudia D.F., *The Geometry of Banach Space Smoothness*, Trans. Amer. Math. Soc, 110 (1964). 284.

26. Dantzig G.B., *Linear Progamming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, (1963).

27. Danzer L., Crunbaum.B., and Klee.V., "Helly's Theorem and its relatives in Convexity", Proc. Sympos. *Pure Math, Amer. Math. Soc.*, 7 (1963) 101.

28. Danzer L., Laugwitz.D., Lenz.H., "Uber das Lownersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikorper einbechriebenen Ellipsoid", *Arch. Math. (Basel)* 8 (1957) 214.

29. Day M.M. *Normed Linear Spaces*, Springer. Berlin, (1958).

30. Dunford N., and Schwartz.J.T., *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, (1958).

31. Eberhard J., *Zur Morphologie der Polyeder*, Teubner, Leipzig, (1891).

32. Eggleston H.G., *Convexity*. Cambridge University Press. New York (1958).

33. Eggleston H.G., *Problems in Euclidean Space: Application of convexity*, Pergamon, New York, (1957)

34. Fan K., *Convex sets and Applications*, Lecture Notes. Argonne National Laboratory, Illinois, - (1959).

35. Fejes Toth, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und in Raum*, Springer, Berlin, (1953).

36. Fejes L., *Regular Figures*, Pergamon, London, (1964).

37. Fenchel W., ed., *Convex Cones, Sets and Functions*, lecture Notes, Princeton University, (1951).

38. Fenchel W., Proceedings of the colloquium on convexity, Copenhagen, Denmork (1965), University of Copenhagen, (1967).

39. Gale D., *The Theory of Linear Economic Models* Mc Graw-Hill, New York, (1956).

40. Goldstein A.A, *Constructive Real Analysis*, Harper and Row, New York, (1967).

41. Goullet de Rugy.A., *Geometrie des Simplexes*, Centre de Documentation Universitaire et - S.E.D.E.S. Reunis, Paris, (1968).

42. Grünbaum B., *"Borsuk's problem and related questions, in convexity*, Proc. Sympos. Pure Math 7, Amer. Math Soc. (1963). 271.

43. Grünbaum B., *Convex Polytopes*, Interscience - Wiley, London, (1967).

44. Grünbaum B., Klee.V., *Convexity and Applications* (L Durst, ed.). Proc. CUPM Geometry Conference, Santa Barbara, (1967). MAA Committee on the - Undergraduate Program in Mathematics, Berkeley, (1967).

45. Grünbaum B., Shepard. G.C, "Convex Polytopes", *Bull. London Math. Soc.*, 1 (1969). 257.

46. Hadwiger H., *Altes und Neues uber Konvexe Korper*, Birkhauser, Basel, (1955).

47. Hadwiger H., *Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie*, Springer, Berlin (1957).

48. Hadwiger H., Debrunner. H., Klee. V, *Combinatorial Geometry in the Plane* Holt, Rinehart and Winston, New York (1964).

49. Halkin H., "On the necessary condition for optimal control of nonlinear Systems," *J. Analyse Math* 12 (1964) 1.

50. Joffe A.D., Tikhomirov. V.M., "Duality of convex functions and extremum problems," *Russian Math. Surveys*, 23 (1968) 53. (Translated by T. Garrett from *Uspehi Math. Nauk*, 23, (1968) 51.

51. Karlin S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and economic*, Vols, 1-2, McGraw-Hill, New York, (1960).

52. Karlin S., Studden. W.J., *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis Statistics*, Interscience-Wiley, New York. (1960).

53. Kazarinoff N.D., *Geometric Inequalities*, Random House, New York, (1961).

54. Kelley J.L, Namioka. I. et al *Linear Topological Spaces* Van Nostrand, Princeton, N.J. (1963).

55. Kendall M.G., Moran P.A.P *Geometrical Probability* Hafner, New York, (1963).

56. Klee V., "Some Characterizations of Convex Polyhedra", *Acta Math.* 102 (1959) 79.

57. Klee V., ed., "Convexity," Proc symp. *Pure Math Amer Math. Soc.*, 7 (1963).

58. Klee V., Review of paper by. Rudin and K.T. - Smith, *Math. Rev.* 23A (1962) 376.

59. Klee V., *Convex polytopes and Linear programing*, Proceeding of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems. IBM

Data proecssing Division, white plains, N.Y., (1966).123.

60. Klee V., "Can a plane convex body two equichordal points?", *Amer.Math.Monthly*, 76(1969)59.

61. Klee V., "What is the expected volume of a Simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body ", *Amer.Math.Monthly* 76 (1969)286.

62. Klee V., *Separation and Support Properties of Convex Sets-a Survey*, Control theory and the calculus of Variations, Academic Press, New - York, (1969).235.

63. Klee V., "Convexite" *Encyclopaedia Universalis, Paris*, 4(1970)982.

64. Kothe G., *Topological Vector Spaces I*, Springer New York, (1969).(Translated from the 1965 - German edition by D.Y.H.Garling).

65. Krasnoselkil M.A., Rutickil.Ya.B., *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen, (1961). (Translated by L.F.Boron from the 1958 Russian edition.).

66. Kuhn H., *Approximate Search for Fixed Points*, Computing Methods in optimization problem-?, Academic Press, N.Y.(1969).199.

67. Kuhn H., Tucker.A.W., eds, *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, (1956).

68. Lindenstrauss J., "A short proof of Liapounoff's Convexity theorem," *J.Math.Mech.* 15-(1966)971.

69. Lyusternik L.A., *Convex Figures an Polyhedra*, Dover, New York, (1963).(Translated by T.J.-Smith from the 1956 Russian edition).

70. McMullen P., "The Maximum numbers of faces of a convex polytope", *Mathematika*, 17(1970)179.

71. Minkowski H., *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner Berlin, (1911).

72. Moran P.A.P., " A note on recent research in

geometrical probability", *J.Appl.Probability* 3(1966)453.

73, Moran P.A.P.," A Second noteon recent research in geometrical probability", *Advances in Appl . Probability*, 1(1969)73.

74. Moreau J.J., *Fonctionnelles Convexes*, Lecture Notes, Séminaire "Equations aux Dérivees partielles", "College de France, (1966-67)

75. Motzkin T.S., *Beityage zur Theorie der Linearen Ungleichungen*, Ph.D.Thesis, Basel 1933(Jerusalem, 1936).

76. Phelps R.R., *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, Princeton.N.J., (1966).

77. Pogorelov V., *Die Verbiegung Konvexen Flachen*, Akademie-Verlag.Berlin 1958.(Translated from the 1951 Russian edition.).

78. Popovicuiu T., *Les Fonctions Convexes* Hermann, Paris (1945).

79. Reay J.R., *Generalizations of a Theorem of Coratheodory*, Memoir No.54 Amer.Math.Soc(1965).

80. Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, princiton University Press, (1970).

81. Rogers C.A., *Packing and Covering* , Cambridge University Press, (1964).

82. Steinitz E., Rademacher.H., *Vorlesungen uber die Theorie der Polyeder*, Springer, Berlin, (1970).

83. Stoer J., Witzgall.C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer, Berlin(1970).

84. Tucker A.C.," Matrix characterizations of circular-arc graphs. *Pacific.J.Math*, 35(1971).

85. Valentine F.A., *Convex Stes*, McGraw - Hill , New York, (1964).

86. Wegner G., *Eigenschaften der Nerven homologisch-ein Facher Familien im R^n*, Ph.D.Thesis, Gottingen (1967).

87. Yaglom I.M., Boltyanski .V.G., *Convex Figures*,

Holt,Rinehart,and Winston,New York,(1961).

88.Zangwill W.,*Nonlinear Programming :A Unified Approach*,Prentice-Hall,Englewood Cliffs,N.J., (1969).

فیلیپ دیویس

انتگرال لئونهارت اویلر: نگرشی تاریخی بر تابع گاما•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

بسیاری از مـردم گمان می‌کنند نظریات ریاضی ثابت هستند. آنهـا گمان می‌کنند ایـ
نظریات در زمانی از تاریخ گذشته پدید آمده و تـا ابد بدون تغییر باقی می‌مانند. دلایل
خوبی برای چنین احساسی وجود دارد. پیش از هرچیز، فرمول مساحت دایره در زمـا
اقلیدس πr^2 بود و هم اکنون نیز πr^2 است. امـا برای کسی که از درون به ریاضیات
می‌نگرد، ریـاضیات تقریباً حالت یك موجود زنده را دارد که روزانه با جذب اطلاعات
جدید رشد می‌کند، و هرروز با نگرشی به خودش و جهان ازمواضع جدید، تغییر می‌کند
از طریق حذف بخشی از دستاوردهای گذشته‌اش کـه اکنون بی‌ربط به‌نظر می‌رسند، یـا
توازن همیشگی را حفظ می‌کند.

هدف این مقاله، نشان دادن این فرایند رشد است. مـا یك موضوع ریاضی، تابع
گاما، را انتخاب کرده‌ایم و نشان می‌دهیم که چگونه، از زمان اویلر تا انتشار مقالهٔ ریاضی
اخیر بورباکی، از نظرمفهوم ومحتوی رشد کرده وچگونه این رشد توسعهٔ عمومی‌ریاضیات
در دو و یك ربع قرن گذشته سهیم بوده است. درمیان به‌اصطلاح "توابع ریاضیات عالی"
بی‌تردید تابع گاما ازهمه اساسی‌تراست. بقدری ساده است که دانشجویان سال سوم‌دانشگاه
آن را مطالعه می‌کنند ودرعین‌حال بقدری عمیق است که باعث شده بزرگترین‌ریاضیدانها
روی آن کارکنند و بقدری فشرده است کـه می‌توان طرحی از موضوع را در یك مقا
مختصر آورد.

سال ۱۷۲۹ در مکاتبه‌ای بین یـك ریاضیدان سوئیسی در سن‌پطرزبورگ و یـ

Davis, Philip J."Leonhard Euler's integral: a historical profile of the gamma function," *Amer. Math. Monthly*, 57(1959)849.

ریاضیدان آلمانی درمسکو شاهد تولد تابع گاما بود. اولی: لئونهارت اویلر، در آن زمان ۲۲ ساله بود اما می‌رفت که ریاضیدانی خارق‌العاده و بزرگترین ریاضیدان قرن هجدهم شود. دومی کریستیان گلدباخ[1]، یك دانشمند، و مردی با استعدادهای بسیار بود که با اندیشمندان پیشرو مکاتبه داشت. به‌عنوان یك ریاضیدان، وی تا اندازه‌ای آماتور بود، اما در زمینهٔ نظریهٔ اعداد مسئله‌ای برای آیندگان به‌یادگار گذاشت که بیانش بقدری ساده و لی اثباتش بقدری مشکل است که حتی تا امروز نیز درافق دانش ریاضی به‌عنوان یك حدس باقی‌مانده است.

تولد تابع گاما، ناشی از ترکیب چند جریان ریاضی بود. اولی نظریهٔ درون‌یابی، که یك موضوع بسیار کاربردی است، و عمدتا محصول ریاضیدانان انگلیسی قرن هفدهم است که همهٔ ریاضیدانان گهگاه از پرداختن به‌آن لذت می‌بردند. جریان دوم حساب انتگرال و ساختن انتگرال نامعین به‌طور منظم و قاعده‌مند بود، فرایندی که برای چندین سال مداوما ادامه یافت. مسئلهٔ ظاهراً ساده‌ای در باب درون‌یابی مطرح شده بود و گلدباخ، دانیل برنولی وحتی پیش از آنها جیمز استرلینگ بدون کسب موفقیتی روی آن مطالعه کرده بودند. مسئله برای اویلر مطرح شد. اویلر راه حل خودرا در دو نامه برای گلدباخ نگاشت. واین نامه‌ها سرآغاز مکاتبات گسترده‌ای بود که درطول زندگی گلدباخ ادامه یافت. نامهٔ نخست به‌تاریخ ۱۳ اکتبر ۱۷۲۹ درمورد مسئلهٔ درون‌یابی بود، و نسامهٔ دوم به‌تاریخ ۸ ژانویهٔ ۱۷۳۰ از انتگرال گیری گفتگو می‌کرد واین دو را به‌هم مربوط می‌ساخت. اویلر برای گلدباخ تنها شرح مختصری از مطلب را نگاشت اما درطول یکسال همهٔ جزئیات را درمقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ رشته‌های متعالی که جملهٔ عمومی آنها را نمی‌توان به‌صورت جبری بیان کرد.»[2] انتشار داد.

از آنجایی که مسئلهٔ درون‌یابی ساده‌تراست، نخست به‌بررسی آن می‌پردازیم. یکی از ساده‌ترین دنباله‌های اعداد صحیح که بررسی آن به‌نظریهٔ جالبی منجر می‌شود عبارت است از

$$۱,\quad ۱+۲,\quad ۱+۲+۳,\quad ۱+۲+۳+۴,\ \cdots$$

اینها اعداد مثلثی هستند وبدان سبب چنین خوانده می‌شوند که تعداد اشیایی راکه می‌توان دریك آرایهٔ مثلثی با ابعاد مختلف قرار داد نمایش می‌دهند. nامین آنها را T_n می‌نامیم. فرمولی برای T_n وجود دارد که درجبر دبیرستانی آموزش داده می‌شود: $T_n=(۱/۲)n(n+۱)$.

این فرمول دقیقاً چه‌کاری انجام می‌دهد؟ اولاً محاسبه را با تبدیل تعدادکثیری عمل جمع به سه عمل ثابت: یك جمع، یك ضرب و یك تقسیم ساده می‌کند. بنابراین بسرای یافتن $T_{۱۰۰}$ به جای جمع نخستین صد عدد صحیح می‌توانیم این محاسبه را انجام دهیم. $T_{۱۰۰}=(۱/۲)(۱۰۰)(۱۰۰+۱)=۵۰۵۰$. ثانیا، گرچه صحبت از، مثلاً مجموع نخستین $۵\frac{۱}{۲}$ عدد صحیح معنی تحت‌اللفظی ندارد، ازفرمول بدست می‌آید

1. Christian Goldbach (1690-1764)

2. *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generals algebraice dari nequeunt*

$$T_{۵\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\left(۵\frac{۱}{۲}\right)\left(۵\frac{۱}{۲}+۱\right)=۱۷\frac{۷}{۸}$$

به‌این‌طریق: این فرمول قلمرومسئلهٔ اولیه را به‌مقادیری ازمتغیر، علاوه برآنهایی که نخست به‌ازای آنها تعریف شده بود. گسترش می‌دهد. و مسئلهٔ درون‌یابی بین دو مقدار آغازی معلوم را حل می‌کند.

درقرون هفدهم وهجدهم این‌نوع مسائل که تعمیمی ازیك مفهوم را ایجاب می‌کنند مکرراً پیش می‌آمد. برای نمونه جبرتوانها را درنظر بگیرید. کمیت a^m اصولاً به‌عنوان حاصلضرب متوالی m تا a تعریف می‌شود. این تعریف تنها هنگامی که m یك عدد صحیح مثبت باشد معنی دارد. اما $a^{۵\frac{۱}{۲}}$ چیست؟ حاصلضرب $۵\frac{۱}{۲}$ تا a؟ تعریف اسپرآمیز $a^{۰}=۱$ و $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$ و $a^{-m}=۱/a^m$ که این معما را حل می‌کند واین چنین درجبرمفید واقع می‌شود، نخستین‌بار در ۱۶۷۶ و توسط نیوتن به‌طور صریح نوشته شد. توجیه این قوانین براساس کاربردی است که دارند واین کاربرد ازاین واقعیت ناشی می‌شود که تعریف فوق ما را به‌سوی توابع نمایی پیوسته راهنمایی می‌کند و قانون توانها $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ برای همهٔ اعداد، چه اعداد صحیح مثبت باشند و چه نباشند، برقرار است.

معلوم شد مسائل دیگری که از این نوع هستند مشکلترند. مثلاً، لایب‌نیتس نماد d^n را برای nامین تکرار عمل دیفرانسیل‌گیری معرفی کرد. به‌علاوه $d^{-۱}$ را با $\int$ و d^{-n} را با انتگرال مکرر تعریف کرد. سپس او سعی کرد مفهومی برای نماد d^n که n عدد حقیقی دلخواهی است پیدا کند. $۵\frac{۱}{۲}$امین مشتق یك تابع واقعاً چیست؟ این پرسش می‌بایست حدود دو قرن در انتظار یك جواب قانع کننده می‌ماند.

حال به‌دنبالهٔ اعداد مثلثی باز می‌گردیم. اگر به جای علایم جمع، علایم ضرب را قرار دهیم، دنبالهٔ جدیدی به دست می‌آید: ۱, ۱.۲, ۱.۲.۳, ... این دنباله دنبالهٔ فاکتوریلها نامیده می‌شود. فاکتوریلها را معمولاً به شکل اختصاری ۱!, ۲!, ۳!, ... می‌نویسند و ۵ تای نخست آنها عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۶، ۲۴، و ۱۲۰. مقدار آنها بسیار سریع بزرگ می‌شود. عدد ۱۰۰! اگر به‌طورکامل نوشته شود ۱۵۸ رقم خواهد داشت. درمقام مقایسه، $T_{۱۰۰}=۵۰۵۰$ تنها ۴ رقم دارد. فاکتوریلها درهمه‌جای ریاضیات ظاهرمی‌شوند؛ به‌ندرت می‌توان صفحه‌ای از آنالیز ریاضی را گشود که روی آن فاکتوریلها پخش نشده باشند. باتوجه به‌این مطلب، آیا می‌توان فرمول آسانی برای محاسبهٔ فاکتوریلها پیداکرد؟ $!۵\frac{۱}{۲}$ چه باید باشد؟ (شکل ۱). این همان مسئله درون‌یابی است که به تابع گاما منجر می‌شود، مسئله درون‌یابی استرلینگ، برنولی و گلدباخ. چنانکه می‌دانیم، این دو مسئله به هم مربوط‌اند زیرا وقتی که فرمولی دردست باشد، می‌توان مقادیرمیانی را درآن قرارداد. وحال مسئلهٔ شگفت‌انگیزی پیش می‌آید. برای فاکتوریلها، هیچ فرمولی از نوع ساده‌ای که برای T_n پیدا شد وجود ندارد و در واقع نمی‌تواند وجود داشته باشد. این مطلب به طور ضمنی در عنوانی که اویلر برای مقاله‌اش انتخاب کرد مستتراست. ترجمهٔ عنوان مقاله ازلاتین چنین است: «دربارهٔ رشته‌های متعالی که جملهٔ عمومی آنها را نمی‌توان به‌صورت

فاکتوریلها

n:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...	۱۰
$n!$:	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰	...	

شکل ۱. آزمون هوش

سؤال: چه عددی باید درخط پایین ودر وسط ۵ و۶ سطر بالا قرارداد؟
جواب اویلر: ... ۸۸۵۲ر۲۸۷. جواب آداما: ... ۳۰۰۲ر۲۸۰.

جبری بیان کرد». جواب درون‌یابی فاکتوریلی ازمحدودهٔ "جبرمحض" فراتررفت. استفاده از فرایندهای نامتناهی موردنیاز بود.

برای اینکه مسئله‌ای راکه اویلر با آن مواجه بود بهتردرك کنیم، فرموله‌کردن مسئله به‌سبك امروزی مفید واقع خواهد شد. تابع ساده‌ای بیابیدکه دراعداد صحیح ۱,۲,۳,... مقادیرفاکتوریلی ۱, ۲, ۶, ... را اختیارکند. امروزه، یك تابع به‌عنوان رابطه‌ای بین دومجموعه از اعداد، که درآن به‌هرعدد از یك مجموعهٔ عددی ازمجموعهٔ دوم نظیرمی‌شود، تعبیر می‌گردد. وچیزی که روی آن تأکید می‌شود رابطه است نه‌ماهیت قواعدی‌که رابطه را تعیین می‌کنند. برای اینکه محصلان مفهوم تابع را درکلیترین صورت آن درنظرآورند، معلمان ریاضی بدین خوگرفته‌اند که یك منحنی پر از پیچ و تاب و ناپیوستگی رسم کنند. بسیاری از آنان گمان می‌کنند که کلیترین شکل تابع می‌بایست بدین صورت باشد. پس اگرنقاط (۱, ۱)، (۲, ۲)، (۳, ۶)، (۴, ۲۴)، ... داده شده باشند با قبول دیدگاهی که درآن مفهوم تابع همان است که گفتیم، مسئلهٔ درون‌یابی عبارت است از یافتن خمی‌که از نقاط داده شده عبورکند. حل این مسئله بسیار ساده است. تعداد نامحدودی روش برای حل آن وجود دارد. کافی است قلمی در دست بگیرید و یك منحنی رسم کنید ــ هرمنحنی می‌تواند باشد ــ که از نقاط داده شده عبورکند. چنین خمی خود به‌خود تابعی تعریف می‌کندکه مسئلهٔ درون‌یابی را حل می‌کند. ازاین طریق و با چنین آزادی درطرز برخورد با مفهوم‌تابع، مسئله به‌طور پیش‌پا افتاده‌ای حل می‌شود وریاضیات فقط اندکی غنیترمی‌شود. وظیفه‌ای که اویلر برای خسود تعیین‌کرده بود. چیز دیگری بسود. در اوایل قرن هجدهم، تابع کم و بیش با یك فرمول مترادف بود ومنظور ازفرمول عبارتی بودکه بتوان آن را از عملیات مقدماتی با جمع و تفریق، ضرب، تقسیم، توان رساندن، ریشه‌گیری، توابع نمایی، لگاریتمها، دیفرانسیل گیری، انتگرال گیری وسریهای نامتناهی، به‌دست آورد، یعنی عباراتی که ازفرایندهای عادی آنالیز ریاضی بدست می آیند. چنین فرمولی یك "عبارت تحلیلی" نامیده می‌شد. وظیفهٔ اویلراین بودکه اگر بتواند. عبارتی تحلیلی بیابدکه به‌طور طبیعی از متون ریاضی برخاسته باشد وهنگامی‌که یك عدد صحیح درآن گذاشته می‌شود فاکتوریلها را به‌دست دهد و برای دیگرمقادیر متغیر نیز با معنی باشد.

شرح دقیق جریان یك کشف علمی به ترتیب تاریخی کاری دشوار است. این مطلب به‌خصوص درمورد ریاضیات صادق‌است زیرا سنت چنین‌است که درمقالات و کتب ریاضی، شرح تلاشهای نادرست اولیه و گرایش دوران ناشیگری ذکر نمی‌شود و ممکن است یك مبحث ریاضی، برای افزایش اثر آن در ذهن خواننده، ازجلو به‌عقب با درجهت عکس و یا در جهات جانبی شرح و بسط داده شود. به‌گونه‌ای‌که یك ریاضیدان معروف گفته است قضیهٔ ریاضی باید مستقیما و به‌صورت "عطیه‌ای آسمانی" برمحصلان نازل شود تا آن را بررسی کرده وقبول کنند نه اینکه آن را درك کنند. ظاهرا اویلر با آزمایش حاصلضربهای نامتناهی اعداد، دریافت‌که اگر n یك عدد صحیح مثبت باشد، داریم

$$\left[\left(\frac{۲}{۱}\right)^n \frac{۱}{n+۱}\right]\left[\left(\frac{۳}{۲}\right)^n \frac{۲}{n+۲}\right]\left[\left(\frac{۴}{۳}\right)^n \frac{۳}{n+۳}\right]\cdots = n! \qquad (۱)$$

خواننده می‌تواند با کنارگذاشتن همهٔ نکات ظریف درمورد همگرایی یك حاصلضرب نامتناهی، درسنی این رابطه را با حذف همهٔ عوامل مشترکی‌که درصورت ومخرج عبارت سمت چپ ظاهرمی‌شوند تحقیق‌کند. به‌علاوه عبارت سمت چپ (حداقل به‌طور رسمی) برای هر n (بجز اعداد صحیح منفی) تعریف شده است. اویلرهمچنین توجه‌کردکه اگر مقدار $n = ۱/۲$ در فرمول قرارداده شود عبارت سمت چپ (پس از کمی درستکاری) به حاصلضرب نامتناهی ریاضیدان معروف انگلیسی، جان والیس[1] تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{۲\cdot۲}{۱\cdot۳}\right)\left(\frac{۴\cdot۴}{۳\cdot۵}\right)\left(\frac{۶\cdot۶}{۵\cdot۷}\right)\left(\frac{۸\cdot۸}{۷\cdot۹}\right)\cdots = \frac{\pi}{۲} \qquad (۲)$$

با این کشف اویلر می‌توانست کار را متوقف کند. مسئلهٔ او حل شده بود. در واقع تمامی نظریهٔ تابع گاما را می‌توان براساس حاصلضرب نامتناهی (۱) بنا کرد. امروزه این حاصلضرب به شکل مناسبتر

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+۱)^n}{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+m)} \qquad (۳)$$

نوشته می‌شود، اما اوکار را ادامه داد. وی دریافت‌که این حاصلضرب پدیدهٔ عجیب ذیل را نشان می‌دهد. برای برخی از مقادیر n، یعنی اعداد صحیح، اعداد صحیح را به دست می‌دهد ولی برای مقدار دیگری، یعنی $n = ۱/۲$، عبارتی شامل π به دست می‌دهد. حال π به‌معنی دوایـر و مساحت آنها است. و مساحت نیز به معنی انتگرال می‌باشد، و او بـا انتگرالهایی که پدیدهٔ مشابهی را نمایش می‌دهند آشنا بود. بنابراین جستجوی تبدیلی که این حاصلضرب را به‌صورت یك انتگرال بیان‌کند، به‌ذهن وی خطورکرد.

او انتگرال $\int x^n(۱-x)^n dx$ را در نظر گرفت. حالات خـاص آن قبلاً توسط

1. John Wallis(1616-1703)

والیس، نیوتن، و استرلینگ بررسی شده بود. محاسبهٔ آن مشکلات زیادی به همراه دارد و انتگرال نامعین مربوط به آن همواره یك تابع مقدماتی از x نیست. فرض کنید که n یك عدد صحیح باشد، اما e مقداری دلخواه باشد. اویلر $(1-x)^n$ را طبق قضیهٔ دو جمله‌ای بسط داد و بدون مشکل دریافت که

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx=\frac{1\cdot 2\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)} \qquad (۴)$$

حال ایدهٔ اویلر، جداسازی $1\cdot 2\cdots n$ از مخرج بود. به‌طوری که او عبارتی برای $n!$ به صورت انتگرال داشته باشد. او در این راه پیش رفت. (در اینجا ما از فرمول نویسی و نامگذاریهای اویلر تبعیت می‌کنیم. فرمولهایی را که در مقالهٔ اصلی اویلر آمده‌اند با * مشخص می‌کنیم. اویلر به‌جای f، یك f ساده قرار می‌داد.) او f/g را به‌جای e قرار داد و دریافت که

$$\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx=\frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)} \qquad (۵)$$

و بنابراین

$$\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)}=\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx\,(1-x)^n \qquad (۶)^*$$

اویلر ملاحظه کرد که اگر در عبارت سمت چپ قرار دهد $g=0$ و $f=1$، عامل $1\cdot 2\cdots n$ را می‌تواند مجزا سازد. اما در این صورت، عبارت سمت راست به‌یك فرم نامعین تبدیل می‌شد که آن را به‌شکل ماهرانهٔ زیر نوشت

$$\int\frac{x^{e/g}dx(1-x)^n}{0^{n+1}} \qquad (۷)^*$$

حال سعی کرد مقدار عبارت (۷)* را بیابد. نخست $x^{e/(f+g)}$ را جانشین x کرد. این عمل، عبارت

$$\frac{g}{f+g}x^{-f/(g+f)}dx \qquad (۸)^*$$

را به‌جای dx به‌دست می‌داد و بنابراین، عبارت سمت راست (۶)* به‌صورت زیر درآمد

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\frac{g}{f+g}dx\,(1-x^{e/(f+g)})^n \qquad (۹)^*$$

حال دوباره، اویلر آزمایش قراردادن $f=1$ و $g=0$ را انجام داد. احتمالاً نخست این انتگرال را به‌صورت

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int_0^1\left(\frac{1-x^{g/(f+g)}}{g/(f+g)}\right)^n dx \qquad (۱۰)$$

تبدیل کرده و سپس فرم نامعین زیررا به‌دست آورد

$$\int dx\frac{(1-x^0)^n}{0^n} \qquad (۱۱)^*$$

حال، عبارت مناسب $z/(x^z-1)$ را، که در آن z به‌سمت صفر می‌گراید، درنظر گرفت. وچنانچه خودش می‌گوید بـا استفاده از یك قـانون شناخته شده (هوپیتال) از صورت و مخرج دیفرانسیل گرفت وعبارت زیررا به‌دست آورد

$$\frac{-x^z\,dz\,lx}{dz} \qquad (lx=\log x) \qquad (۱۲)^*$$

که برای $z=0$ به $-lx$ تبدیل می‌شود. بنابراین

$$\frac{1-x^0}{0}=-lx \qquad (۱۳)^*$$

و

$$\frac{(1-x^0)^n}{0^n}=(-lx)^n \qquad (۱۴)$$

بنابراین او نتیجه گرفت که

$$n!=\int_0^1(-\log x)^n dx \qquad (۱۵)$$

این رابطه، وی را به‌خواسته‌اش رساند. یعنی به‌عبارتی برای $n!$ به صورت انتگرالی که درآن مقادیری غیراز اعداد صحیح مثبت را می‌توان قرار داد. به‌خواننده توصیه می‌کنیم که انتقاد خودش از روش استنتاج اویلر را فرمولبندی کند.

دانشجویان درحساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته عموماً انتگرال اویلر را اولین بار به‌صورت

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad e=2{,}71828\cdots \qquad (۱۶)$$

می‌بینند. این صورت اصلاح شدهٔ انتگرال (۱۵) و همچنین علامت یونانی Γ بـه آدرین ماری لژاندر منسوب است. لژاندر انتگرال (۴) را که اویلر استنتاجش را با آن شروع کرد انتگرال اول اویلر و (۱۵) را انتگرال دوم اویلر نامید. انتگرال نخست اویلر را معمولاً به‌عنوان تابع بتا می‌شناسند و حال به‌شکل مناسب

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (۱۷)$$

نوشته می‌شود. با ابزارهایی که در حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته در دسترس‌اند، به سادگی دیده می‌شود (درک و بازنویسی دستاوردهای بزرگ گذشته چقدر آسان به‌نظر می‌رسد!) که انتگرال بسرای $x>0$ معنی دارد و بنابراین یك تابع $\Gamma(x)$ را به دست می‌دهدکه برای این مقادیر تعریف شده است. به‌علاوه برای اعداد صحیح ومثبت n داریم

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (۱۸)$$

ثابت می‌شودکه برای هر $x>0$ داریم

$$x\Gamma(x)=\Gamma(x+1) \qquad (۱۹)$$

که این رابطه، رابطهٔ به‌اصطلاح بازگشتی برای تابع گاما است و درسالهای پس‌از اویلر، چنانکه خواهیم دید، نقش مهمی در گسترش نظریهٔ تابع گاما بازی می‌کند. این حقایق به اضافهٔ احتمالاً رابطهٔ بین دو انتگرال اویلر

$$B(m,n)=\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)/\Gamma(m+n) \qquad (۲۰)$$

و فرمول مهم استرلینگ

$$\Gamma(x)\sim e^{-x}x^{(x-1/2)}\sqrt{2\pi} \qquad (۲۱)$$

که یك عبارت تقریبی نسبتاً ساده برای $\Gamma(x)$، هنگامی‌که x بزرگ باشد، به‌دست می‌دهد، تقریباً تمام مطالبی هستندکه دانشجویان درحساب دیفرانسیل‌وانتگرال پیشرفته دربارهٔ تابع گاما می‌آموزند. ازلحاظ ترتیب تاریخی، می‌توان گفت این مفاهیم درحدود سال ۱۷۵۰ قرار دارند. بازی هنوز شروع نشده است.

همان طورکه علاقهٔ ساده به تعمیم فاکتوریل به مقادیر بین اعداد صحیح، منجر به کشف تابع گاما شد، علاقه به تعمیم آن به‌مقادیر منفی و مقادیرمختلط به توسعهٔ بیشتراین مفهوم و پیدایش تعبیرعمیقتری انجامید. پرسشهای ساده و بازی آزادانه با نمادها پایه و اساس این گسترش بوده‌اند. مقدار $!(-\frac{1}{2})$ چیست؟ $!\sqrt{-1}$ چیست؟درسالهای‌نخست قرن نوزدهم، این جریان وسعت یافت و به‌صفحهٔ مختلط منتقل شد (مجموعهٔ همهٔ اعداد به شکل $x+iy$ که در آن $i=\sqrt{-1}$) و بدین ترتیب به‌صورت بخشی از توسعهٔ عمومی نظریهٔ توابع یك متغیرمختلط، که می‌رفت یکی ازبخشهای اساسی ریاضیات شود، درآمد. انتقال به صفحهٔ مختلط. ابتدا توسط کارل فریدریش گاوس انجام شد. کسه به عنوان نقطهٔ شروع کار خود، حاصلضرب اویلر را انتخاب کرد. در این زمان، نامهای معروف بسیاری درگیراین مسئله بودند، و ثبت وشرح همهٔ گامهایی که به جلو برداشته شد زمانی طولانی می‌خواهد و ما ناچاریم به‌یك دورنمای وسیعتر قانع باشیم.

تا ایسن زمان سه حقیقت مهم معلسوم شده بود. انتگرال اویلر، حاصلضرب اویلر و

رابطهٔ بازگشتی یا معادلهٔ تابعی $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1),\ x>0$ که این آخری، تعمیم این قانون واضح حساب است که برای اعـداد صحیح مثبت داریم $n!=(n+1)!/(n+1)$، این رابطهٔ به خصوص به این دلیل مفید است که می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از آن، مسئلهٔ تعیین فاکتوریل یك‌عدد حقیقی رابه‌مسئلهٔ تعیین‌فاکتوریل یك‌عدد مناسب‌بین صفرو یك‌تبدیل کنیم.مثلاً اگر درفرمول بالا $n=\frac{3}{2}$ راقرار دهیم،خواهیم‌داشت $!(\frac{3}{2})=\frac{5}{2}!(\frac{1}{2})$. اگر بتوانیم $!(\frac{1}{2})$ را بیابیم، سپس می‌توانیم $!(\frac{5}{2})$ را محاسبه‌کنیم. این فرایند تحویل به‌اعداد کوچکتر را می‌توان ادامه داد و دید که

$$!\left(5\tfrac{1}{2}\right)=\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{7}{2}\right)\left(\tfrac{9}{2}\right)\left(\tfrac{11}{2}\right)!\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad (۲۲)$$

و از آنجا که از (۱) و (۲) داشتیم $!(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ می‌توانیم جواب سؤالمان رابیابیم. واضح است‌که چنین ابزاری برای انجام محاسبات با تابع گاما بسیار مفیداست.از رابطهٔ بازگشتی می‌توان اطلاعات دیگری نیز کسب کرد. گرچه فرمول $(n+1)n!\Rightarrow(n+1)!$ به‌عنوان فشردهٔ اتحاد ریاضی

$$(n+1)\cdot 10200\cdots n=10200\cdots n\cdot(n+1)$$

فقط برای $n=1,2,\ldots$ معنی دارد، بسا جایگذاری‌کور‌کورانهٔ دیگرمقادیر می‌توان نتایج جالبی به‌دست‌آورد.مثلاً باجایگذاری $n=0$ خواهیم داشت $1=0!$، جایگذاری متوالی $n=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots$ و استفاده از رابطهٔ فوق خواهیم داشت

$$!\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(-\tfrac{2}{1}\right)\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{2}{5}\right)\left(-\tfrac{2}{7}\right)\left(-\tfrac{2}{9}\right)!\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad (۲۳)$$

و ازآنجاکه مقدار $!(\frac{1}{2})$ را محاسبه نموده‌ایم $!(-\frac{1}{2})$ را نیز می‌توانیم به‌دست آوریم. از این طریق و با به‌کار بردن رابطهٔ بازگشتی می‌توانیم فاکتوریلهای اعداد منفی را نیز محاسبه کنیم.

حال بار دیگر به‌انتگرال اویلر می‌پردازیم. می‌توان نشان دادکه برای مقادیری از متغیرکه منفی باشد، ازطریق قضایای عادی‌آنالیز نمی‌توان مقداری به‌انتگرال نسبت داد؛ زیـرا انتگرال واگراست. از طـرف دیگر، اگر بـه جای x عـدد مختلط بـه صورت $a+ib\ (a>0)$ را قرار دهیم، انتگرال حاصل معنی دارد، و مقدار معینی را بـه دست می‌دهد. بنابراین، انتگرال با چنین جایگزینی، تبدیل به‌یك تابع با مقدارمختلط می‌شودکه به‌ازای هـرعدد مختلط واقع در نیمصفحهٔ راست صفحهٔ مختلط تعریف می‌گردد و به‌ازای مقادیر حقیقی بر تابع گاما معمولی منطبق است. حاصلضرب اویلرحتی از ایـن هم قویتر است. هرعدد مختلطی بجز $0,-1,-2,\ldots$ را می‌توان جانشین متغیرکرد وحاصلضرب نامتناهی همگرا خواهد بود و مقداری معین به‌دست می‌دهد. پس ظاهـراً چند روش کاملا متفاوت، ازلحاظ نظری وعملی، برای توسعهٔ دامنهٔ تعریف تابع گاما در اختیار داریم. آیا

این روشهای گوناگون نتیجهٔ یکسانی دارد؟ جواب مثبت است اما چرا؟

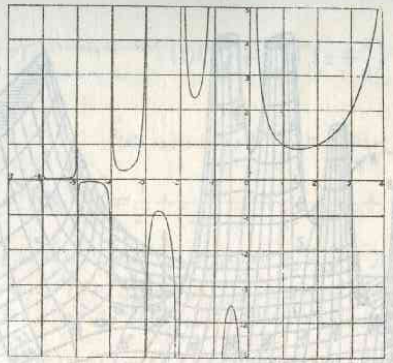
جواب این سؤال را می‌توان در مفهوم تابع تحلیلی یافت که نقطهٔ مرکزی نظریهٔ توابع یك متغیرهٔ مختلط است و نتیجه‌ای است از مفهوم قدیمیترعبارت تحلیلی. همان گونه که اشاره کردیم در ریاضیات قدیمیتر تعریف این عبارت مبهم بود ومنظور از آن تابعی بود که به‌روشی طبیعی درآنالیز ریاضی بـه وجود آمده باشد. هنگامی‌که بعدها توسط فوریا کشف شدکه توابعی با عمومیت بسیار وتوابعی با مشخصات غیرجالب را می‌توان با روی هم نهادن تعداد نامتناهی سینوس‌وکسینوس عادی تولیدکرد، معلوم گشت‌که محك "به‌وجود آمدن به‌روش طبیعی" را بایدکنار گذاشت. این‌کشف به‌طور همزمان وسعتی به‌مفهوم تابع و محدودیتی به‌مفهوم عبارت تحلیلی بخشید.

توابع تحلیلی در رفتارشان چندان آزاد نیستند، به‌عکس از قیود داخلی پیچیده‌ای برخوردارند.اگراین توابع به‌طور دقیق به‌صورت توابعی‌که یك مشتق مختلط دارند یا به عبارت دیگر، توابعی‌که دارای بسط به‌صورت سری توانی

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots$$

می‌باشند، تعریف شوند،پدیدهٔ قابل توجه "عمل روی یك فاصله" را از خود نشان می‌دهند. این امر بدین معنی است که رفتار یك تابع تحلیلی روی یك بازه، هر چند کوچك، برای تعیین رفتارش در هرجای دیگرکافی است. با استفاده ازاین اطلاع، دامنهٔ بالقوهٔ تعریف و مقادیرش را می‌توان به‌دست آورد. به‌علاوه، توابع تحلیلی از اصل ثبات رابطهٔ تابعی پیروی می‌کنند؛ اگـر یك تابع تحلیلی در بخشهایی از دامنهٔ تعریفش در یك رابطهٔ تابعی معین صدق‌کند، باید درهمهٔ دامنهٔ تعریفش نیزچنین‌کند. به‌عکس چنین رابطه‌ای را می‌توان برای بسط تعریف تابع به‌نواحی نامعلوم به‌کار برد. معلومات ما از فرایند تمدید تحلیلی، نامی که بـراین پدیده نهاده شده، براساس کارهـای برنهارد ریمان و کارل وایرشتراس می‌باشد. تابعی بامقدارمختلط که ازجایگذاری اعداد مختلط درانتگرال اویلرنتیجه می‌شود یك تابع تحلیلی است. تابعی نیز که از حاصلضرب اویلر پدید می‌آید، تحلیلی است. اگر رابطهٔ بازگشتی برای تابع گاما در ناحیه‌ای برقرار باشد باید در هرناحیهٔ دیگری‌که تابع به‌صورت تحلیلی قابل تمدید است، برقرار باشد و در واقع می‌توان رابطه را برای انجام چنین تمدیدی به‌کار برد. همهٔ بخشهای صفحهٔ مختلط، به جز مقادیر $0, -1, -2, \dots$ برای تابع گامای مختلطی قابل دسترسی اندکه توسیع یکتای انتگرال اویلر به‌مقادیرمختلط است (شکل۳).

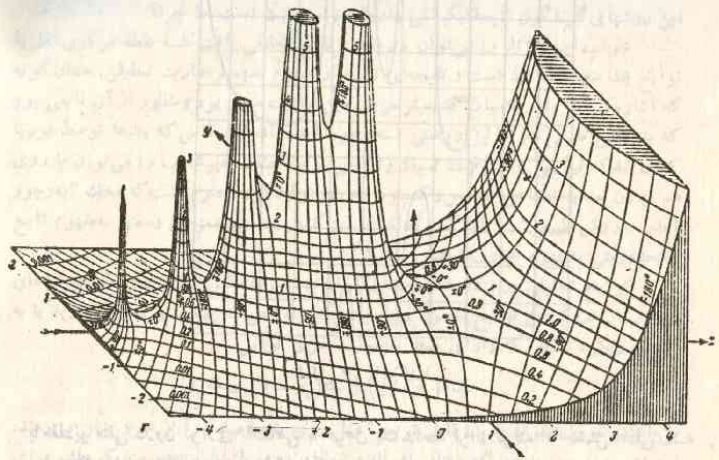
برای اینکه بفهمیم چـرا باید نقـاط متعددی وجـود داشته بـاشند، عبـارت $\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x$ را درنظر می‌گیریم. اگر x به‌سمت صفر میل‌کند خواهیم داشت $\Gamma(0)=1/0$. و بسته به‌اینکه x ازطریق مقادیرمثبت یامنفی به‌سمت صفرمیل‌کند مقدارآن $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد بود. پس معادلهٔ تابعی (۱۹). این رفتار را درهریك از اعداد صحیح منفـی چندین بار موجب می‌شود. تابع‌گاما (حقیقی) شامل تعـداد نامتناهی بخش ناهمند است که این بخشها متناوبا بالا و پایین گسترده شده‌اند. هریك از بخشهای متناظر



شکل ۲. تابع گاما

با مقادیر منفی درون نواری نامتناهی با عرض یك واحد قرار گرفته اما بخش اصلی کـه بـا xهای مثبت متناظراست و شامل فاکتوریلهاست، از عـرض نامتناهی برخوردار است (شکل۲). بنابراین برای تابع گاما نقاط متعددی وجود داردکـه درآنها از دیدگاه عادی (متغیرحقیقی)، تابع رفتاری نامطبوع وغیرعادی دارد. اما از دیدگاه مختلط، ایـن نقاط دارای رفتارمنفرد (منفرد از دید شرلوك هولمز) استحقاق بررسی خاصی را دارند و بخش مهمی ازداستان را تشکیل می‌دهند. درتصاویرتابع گامای مختلط این‌نقاط به‌صورت ردیفی نامتناهی از "استالاگمیتها" نشان داده می‌شوند که هریك ازتعاعی نامتناهی دارد (در شکل ضرورتـا بریده شده‌اند) هنگامی که به سمت بینهایت می‌روند بسیار و بسیار سوزن مانند می‌شوند. این نقاط به‌قطب موسوم‌اند. قطبها نقاطی هستندکه درآنها تابع رفتاری نامتناهی، ازنوع سادهٔ خاصی، دارد، رفتاری همانند رفتار توابع ساده‌ای چون هذلولی $y=1/x$ در $x=0$ و یا $y=\tan x$ در $x=\pi/2$. نظریهٔ توابع تحلیلی به‌ویژه به‌رفتاراین‌نقاط منفرد علاقه‌مند است وفضای بسیاری را به مطالعهٔ نقاط منفرد اختصاص داده است. توابع تحلیلی شامل‌انواع بسیاری ازنقاط منفرد می‌باشند؛ توابعی راکه تنها نقاط منفردشان قطبها باشند، توابع مرومورفیك می‌نامند. توابع به اندازهٔ کافی خوشبخت نیز وجود دارندکـه شامل هیچ نقطهٔ منفردی نیستند. چنین توابعی، ردهٔ خاصی از توابع مختلط مقدار را تشکیل می‌دهند و به‌توابع تام موسوم‌اند. این توابع همانند چندجمله‌ایها هستند درحالی‌که توابع مرومورفیك شبیه نسبت چند جمله‌ایها می‌باشند. تـابع گاما یك تـابع مرومورفیك است. عکس‌آن $1/\Gamma(x)$ هیچ نقطهٔ منفـردی ندارد. هیچ مشکلی در هیچ نقطه وجود ندارد و درنقاط $0, -1, -2, \dots$ مقدارآن برابرصفراست وحادث شدن صفر به‌دفعات نامتناهی، تابع سینوس را به‌یاد می‌آورد.

در پی بسط تابع گاما به اعداد مختلط اتحادهای جالب بسیاری پدیدار شدند و هر



شکل ۳. قدرمطلق تابع گاما‌ی مختلط، که قطبها را در اعداد صحیح منفی نمایش می‌دهد

چند برخی از آنها را می‌توان بدون مراجعه به متغیرهای مختلط به دست آورد، و به‌دست نیز آمده‌اند، ولی هنگامی که ازاین دیدگاه گسترده‌تر مورد بررسی قرار گیرند مفهومی بس عمیقتر می‌یابند. با توجه به‌رابطهٔ انعکاسی اویلر

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z \qquad (۲۴)$$

به‌سادگی و با استفاده از رابطهٔ بازگشتی تابع گاما نشان داده می‌شود که حاصلضرب $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ تابعی تناوبی بادورهٔ تناوب ۲ است، اما علیرغم این واقعیت که $\sin\pi z$ یکی از ساده‌ترین توابع تناوبی است، چه کسی می‌توانست رابطهٔ (۲۴) را پیش‌بینی کند؟ پیش از هرچیز، آیا مثلثات با دنبالهٔ $1, 2, 6, 24, \ldots$ که همهٔ بحث ما ازآن شروع شد، ارتباط دارد. در اینجا مثال خوبی از الگوهای ظریفی که ریاضیات تناوب را بسیار اسرارآمیز می‌سازند وجود دارد. از دیدگاه مختلط دلیلی جزئی برای این اتحاد ازشباهت بین صفرهای سینوس وقطبهای تابع گاما ناشی می‌شود.

فرمول تکرار نیز وجود دارد

$$\Gamma(2z)=(2\pi)^{-1/2}2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \qquad (۲۵)$$

که توسط اژاندر کشف شد و گاوس درمطالعاتش روی توابع فوق هندسی آن را به‌فرمول ضرب بسط داد

$$\Gamma(nz)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nz-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) \qquad (۲۶)$$

فرمولهای زیبایی برای مشتقات تابع گاما وجود دارد، مثلاً

$$d^2\log\frac{\Gamma(z)}{dz^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\cdots \qquad (۲۷)$$

سری فوق مثالی است از نوعی سری نامتناهی که میتاگ لفلر[1] بعدها نظریهٔ خود در مورد تجزیهٔ توابع مرومورفیک به‌کسرهای جزئی را براساس آن ابداع کرد. رابطهٔ نزدیکی بین تابع گاما و تابع زتا وجود دارد که درمطالعهٔ توزیع اعداد اول، اهمیت اساسی داشته است

$$\zeta(z)=\zeta(1-z)\Gamma(1-z)2^z\pi^{z-1}\sin 1/2\,\pi z \qquad (۲۸)$$

که در آن

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+\cdots \qquad (۲۹)$$

رابطهٔ فوق تاریخچهٔ جالبی دارد. نخستین‌بار توسط ریمان و به‌سال ۱۸۵۹ ثابت شد و رسماً به‌او منسوب بود اما در ۱۸۹۴ کشف شدکه یك شکل تغییر یافتهٔ این اتحاد درکاری که اویلردر ۱۷۴۹ انجام داده بود، دیده می‌شود. اویلرادعا نکردکه فرمول را ثابت کرده است. اما، درستی اتحاد را به‌ازای اعداد صحیح و ۱/۲ و ۳/۲ "تحقیق کرد". به‌ازای ۱/۲ این بررسی با جایگذاری مستقیم صورت می‌گیرد، اما برای تمام مقادیردیگر، از سریهای نامتناهی استفاده‌کرد. او بیش از یك صد سال جلوتراز پرپایی یك نظریهٔ استوار دربارهٔ اینگونه سریها، با شهودی عاری از خطا، و با روشی که اکنون روش جمعبندی آبل نامیده می‌شود، اقدام به‌یافتن مجموع این سریها کرد. حالت ۳/۲ حتی ازاین هم جالبتر است. دراین‌مورد اوهم سری واگرا را به‌کارگرفت وهم محاسبهٔ عددی را، ونتیجهٔ عددی تا ۵ رقم اعشار تطابق داشت. این اعمال وی را به درستی اتحادش متقاعد ساخت. برهانهای دقیق امروزی به‌نظریهٔ سریهای واگرا نیازی ندارند، اما مفهوم تمدید تحلیلی ضروری است.

از نظر یکپارچگی تابع گاما روی تمام صفحهٔ مختلط، یافتن فرمولی که برای همهٔ اعداد مختلط صادق باشد، ازاهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چنین فرمولی درسال۱۸۴۸ توسط نیومن به‌دست آمده است

$$1/\Gamma(z)=ze^{\gamma z}\{(1+z)e^{-z}\}\{(1+z/2)e^{-z/2}\}\cdots\quad \gamma=0.5772156649\ldots \qquad (۳۰)$$

1. G. Mittag-Leffler (1846-1927)

این فرمول اساساً تجزیه‌ای است از $1/\Gamma(z)$ و شباهت بسیاری بـه تجزیهٔ چند جمله‌ایها دارد. ازآن به‌روشنی دیده می‌شودکه درچه تقاطی تابع صفرمی‌شود. با صفرقرار دادن هر یك ازعاملها می‌بینیم که به‌ازای $z=0$، $z=-1$، $z=-2$، ...، $1/\Gamma(z)$ برابرصفر است. این رابطه، نقطهٔ شروع پژوهشهای خاص وایرشتراس در تابع گاما بود. وایرشتراس علاقه‌مند بودکه دریابد توابعی را که چند جمله‌ای نیستند چگونه می‌توان تجزیه کرد. چند تجزیهٔ منفرد درآن زمان شناخته بودند. رابطهٔ نیومن (۳۰) وتجزیهٔ قدیمیتر سینوس

$$\sin \pi z = \pi z\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\cdots \qquad (۳۱)$$

از این زمره بودند. تجزیهٔ چند جمله‌ایها عمدتاً یك موضوع جبری است اما بسط آن بـه توابعـی مانند سینوس که تعدادی نامتناهی ریشه دارند مستلزم ساختن نظریه‌ای در بـاب حاصلضربهای نامتناهی، به‌طور منظم واصولی، بود. درسال ۱۸۷۶ وایرشتراس موفق بـه ایجاد نظریهٔ وسیعی دربارهٔ تجزیه شدکه این‌حاصلضربهای نامتناهی شناخته شده و نیز بعضی از توابع دو تناوبی را به‌عنوان حالات خاص در بر می گرفت.

کار فـرمول (۳۰) از نمایش ریشه‌های $1/\Gamma(z)$ بسیار فراترمی‌رود. ایـن فرمول بلافاصله نشان می‌دهدکه عکس تابع گاما، تابعی است که کارکردن با آن از کارکردن بـا خود تابع گاما مشکلات کمتری دارد. این تابع یك تابع تام است، یعنی یکی ازآن توابع شاخصی که در استدلالهای متناهی شامل هیچ نقطهٔ منفردی نیست. وایرشتراس به‌قدری از نتایجی که از بررسی $1/\Gamma(z)$ نصیبش گشته بود به‌هیجان آمدکه نماد مخصوصی برای آن معرفی کرد. او $1/\Gamma(u+1)$ را فاکتوریل u نامیده و به‌صورت $Fc(u)$ نمایش داد.

نظریهٔ توابع یك متغیرهٔ مختلط آش شله‌قلمکاری ازخمها و نیز روشها را تحت‌لوای واحدی درمی‌آورد. در درون این نظریه، و بـا مطالعاتی بسیار گسترده‌که در زمینهٔ انواع گوناگون سریهای نامتناهی‌انجام شد،کوششهای ناموفق استرلینگ درحل مسئلهٔ درون‌یابی برای فاکتوریلها سرانجام به‌بار نشست. استرلینگ روی سریهایی به‌شکل

$$A+Bz+Cz(z-1)+Dz(z-1)(z-2)+\cdots$$

کار زیادی انجام داده بود. این سریها مخصوصاً برای برازاندن چند جمله‌ایها به‌مقادیری کـه به‌ازای اعـداد صحیح $z=0, 1, 2, \ldots$ داده می‌شود، مفید هستند. روش یـافتن ضرایب A، B، C، ... کاملاً شناخته شده بود. امـا هنگامی‌که میزان برازش مورد نیاز نامتناهی باشدکاری بس دشوارترلازم است زیرا دراین صورت بایك سری نامتناهی واجد شرایط مواجه هستیم‌کـه همگراییش باید مورد بررسی قرارگیرد. استرلینگ کار را بـا سری $1, 2, 6, 24, \ldots$، شروع کرد و چندجمله‌ایهای درون‌یابی را از طریق سریهای فوق یافت. مقدار فاکتوریلها بسیار سریع رشد می‌کنند. استرلینگ این مطلب را دریافت واین حدس را مطرح کردکه اگرکسی‌کار رابا لگاریتم فاکتوریلها به‌جای خود فاکتوریلها آغازکند شاید مقدار فاکتوریلها به‌اندازهٔ کافی کوچك شودکه بتوان مسئله را حل‌کرد. تا

سال ۱۹۰۰ و هنگامی‌که شارل هرمیت سری استرلینگ را برای $\log\Gamma(1+z)$ نوشت، مسئله درهمین سطح باقی ماند.

$$\log\Gamma(1+z) = \frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\log 2+\frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\log 3-2\log 2)+\cdots \qquad (۳۲)$$

وی نشان دادکه این اتحاد به‌ازای هرعدد مختلط z به‌شکل $a+ib$، $a>0$ درست است. استرلینگ خود می‌توانست این اتحاد را بنویسد امـا آوردن برهان مسئلهٔ دیگری بـود. یك نقطهٔ شروع ساده‌تر، تابع $\psi(z)=(d/dz)\log\Gamma(z)$ است‌که حال تابع دی گاما یا پسی نامیده می‌شود. استفاده ازاین تابع به‌سری استرلینگ منجرمی‌شود

$$\frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = -\gamma+(z-1)-\frac{(z-1)(z-2)}{2\cdot 2!}+\frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{3\cdot 3!}-\cdots \qquad (۳۳)$$

کـه در سال ۱۸۴۷ و تـوسط اشترن یکی از معلمین ریمـان، ثابت شد به‌ازای $a>0$ همگراست. همهٔ اینها امروزه حالات خاصی ازنظریهٔ گستردهٔ همگرایی سریهای درون‌یابی هستند.

توابع، سنگ بنای آنـالیز ریاضی هستند. درقرون هجدهم و نوزدهم ریاضیدانان علاقهٔ وافری به‌توسعهٔ خواص و روابط متقابل توابع خاص داشتند و وقت زیادی را بـه این موضوع اختصاص می‌دادند. توانهـا، ریشه‌ها، توابع جبری، توابع مثلثـاتی، توابع نمایی، توابع لگاریتمی، تابع گاما، تابع بتا، تابع فوق هندسی،توابع بیضوی، تابع تتا، تابع بسل، تابع ماتیو. تابع وبـر، تابع استراو[1]، تابع آیری[2]، تابع لامه[3]، و صدها تابع خاص دیگر برای تحقیق انتخاب شده بودند و ویژگیهای اصلی آنهـا مشخص شده بود. این هنری است‌که این روزها چندان رواج ندارد. زمانه تغییرکرده است و نقاط توجه و تأکید جـا بـه‌جا شده است. ریاضیدانان دورهٔ کنونی به‌مسائل مجردترعلاقه‌مندند. به جای توابع خاص و منفرد، رده‌های بزرگی از توابع مورد مطالعه قرار می‌گیرند. جامعه‌شناسی جانشین فردشناسی شده است. درمیدان توابع خاص، به صورتی‌که امروز مورد نظراست، عمدتاً گروهی کوچك و پرشور و حرارت از علاقه‌مندان باقی مانده‌اند و نیز کسانی‌کـه کارشان در فیزیك یـا مهندسی است به خاطرضرورت مستقیماً با این موضوعات روبرو می‌شوند.

اوایل دهـهٔ ۱۹۵۰ محاسبات گسترده‌ای در زمینهٔ تابع گاما درصفحهٔ مختلط انتشار یافت.این جریـان در ۱۹۵۰ با انتشار یك جدول شش رقمی‌که در انگلیس،محاسبه شده بود، آغازگشت و بـه دنبال آن در روسیه یك جدول شش رقمی بسیار مبسوط منتشرشد.

1. Struve 2. Airy 3. Lamé

سپس در ۱۹۵۴ یك جدول دوازده رقمی توسط ادارهٔ کل استاندارد واشنگتن انتشار یافت. دیگر انتشارات مربوط به تابع گاما و توابع وابسته بدآن، در این کشور، در انگلیس و در ژاپن ظاهر گشت. در گذشته محاسبات اصلی تابع گاما به مقادیر حقیقی محدود بود. به نظر می‌رسید که دو جدول خوب یکی کارگاوس به‌سال ۱۸۱۳ و دیگری کار لژاندر به‌سال ۱۸۲۵ پاسخگوی تمامی احتیاجات ریاضی یك قرن باشند. تکنولوژی مدرن به‌تابع گاما نیز رسیده است. جداول سالهای ۱۸۰۰ به طرز دشواری با دست محاسبه شده بود اما جداول اخیر توسط کامپیوترهای الکترونیکی رقمی محاسبه شده است.

اما از این سیل فعالیتهای محاسباتی چه نتیجه‌ای حاصل شد؟ تا زمان کوششهای اولیهٔ دیویس از دانشگاه ایندیانا در اوایل سال ۱۹۳۰ مقادیر مختلط تابع گاما چندان مطرح نبود. یکی از حوادث عجیب آن بود که تابع گامای مختلط در حل مسائل نظری متعدد در نظریهٔ اتمی ونظریهٔ هسته‌ای ظاهر شد. برای مثال، توابع موج شعاعی برای حالات انرژی مثبت در یك میدان کولنی، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی منجر می‌شود که جوابش تابع Γ گامای مختلط را در بردارد. تابع گامای مختلط در فرمولهای مربوط به‌پراکندگی ذرات باردار نیروهای هسته‌ای بین پروتونها، در فرمول تقریبی فرمی برای احتمال تابش β ودر بسیاری جاهای دیگر ظاهر می‌گردد. اهمیت این مسائل برای فیزیکدانان، دارای این اثر جنبی بوده که ریاضیات محاسباتی بالاخره، پس از دو و یك ربع قرن پیشرفت جنبه‌های نظری. با این پیشرفت همگام شده است.

به‌موازات رشد آنالیز، هم در ابداع توابع خاص و هم در طرح رده‌های وسیعی از توابع، رده‌بندیهای متعددی به منظور سازمان دادن آنها جهت مطالعات مناسب، صورت گرفته‌است. ریاضیدانان قدیمیتر، توابع را از بیرون، با دید عملیاتی یعنی با بررسی اینکه چه عملیاتی ازجبر یا آنالیز باید برای دستیابی به‌آنها انجام شود سازماندهی می‌کردند. امروزه تمایل بسیار بیشتری وجود دارد که از درون به توابع نگریسته شود و ساختمان آنها، به‌صورتی که ایجاد شده بررسی گردد و تعیین شود که شامل چه خصوصیات هندسی می‌باشند. در رده‌بندی قدیم، در پایینترین و قابل دسترسترین سطح، توانها، ریشه‌ها و همهٔ آنچه که از آنها و به‌کمك اعمال عادی جبر ساخته می‌شوند، قرار می‌گیرند. اینها توابع جبری نامیده می‌شدند. حساب دیفرانسیل و انتگرال با عملی که مشخصهٔ آن است یعنی، گرفتن حد، لگاریتمها و توابع نمایی را واردکار کرد. مفهوم اخیرچنان که اویلر نشان داد، سینوس وکسینوس مثلثاتی را نیز دربر دارد که از زمانهای قدیم قابل دسترسی بودند. دیواری غیرقابل عبور بین توابع جبری و توابع جدیدی که از حد ساخته می‌شوند وجود دارد. این دیوارعبارت از این واقعیت است که اگر کسی بخواهد مثلاً، یك تابع مثلثاتی را با استفاده ازمفاهیم متناهی جبر بسازد در این امر موفق نخواهد شد. به‌زبان فنی‌تر، توابع جبری نسبت به‌فرایندهای جبری بسته هستند و توابع مثلثاتی همواره فراتراز قلمرو آنها می‌باشند. (یك نظیرساده: اعداد صحیح زوج نسبت به‌اعمال جمع وتفریق وضرب بسته‌اند؛ نمی‌توان یك عدد صحیح فرد را با استفاده ازاین ابزارها واز مجموعهٔ اعداد صحیح زوج به‌دست آورد.) این واقعیت باعث شد که مفهوم توابع متعالی مطرح شود. اینها توابعی

هستند که جبری نیستند. توابع مثلثاتی، لگاریتمها، توابع نمایی، توابع بیضوی و به‌طور خلاصه عملاً همهٔ توابع خاصی که برای مطالعات خاص انتخاب شده‌اند از توابع متعالی به‌شمار می‌آیند. ولی چنین رده‌ای از توابع، بیش از آن حد بزرگ است که بتوان روی آن کار کرد. برای سهولت کار، تقسیم‌بندی ریزتری موردنیاز بود. یك ابزار اساسی آنالیز معادلهٔ دیفرانسیل است که رابطهٔ بین یك تابع وسرعت رشدآن رابیان می‌کند. دریافته‌اند که برخی ازتوابع متعالی، از قبیل توابع مثلثاتی گرچه توابع متعالی هستند و بنابراین در یك معادلهٔ جبری صدق نمی‌کنند، با این وجود در معادلهٔ دیفرانسیلی که ضرایبش جبری هستند صدق می‌کنند. جوابهای معادلات دیفرانسیل جبری ردهٔ وسیعی از توابع متعالی را تشکیل می‌دهند (که البته شامل همهٔ توابع متعالی نیست). در بین آنها تعداد زیادی ازتوابع خاص وجود دارد که درفیزیك ـ ریاضی مطرح‌اند.

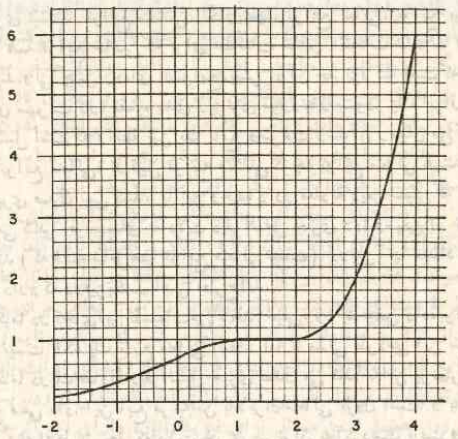
تابع گاما در کجای این تقسیمات می گنجد؟ خیلی زود تشخیص داده‌بودند که این تابع تابعی جبری نیست بلکه یك تابع متعالی است. اما تا مدتی طولانی این سؤال مطرح بود که آیا تابع گاما دریك معادلهٔ دیفرانسیل جبری صدق می کند؟ به‌این پرسش، هولدر به‌سال ۱۸۸۷ پاسخ منفی داد. این تابع مرتبه‌اش بالاتراز متعالی بودن است. و به‌اصطلاح متعالیا متعالی است. ونه ازطریق حل معادلات جبری می‌توان به‌آن دست یافت و نه ازطریق حل معادلات دیفرانسیل جبری. این مسئله سالیان دراز علاقمندان بسیاری پیدا کرده بود و در سال ۱۹۲۵ الکساندر استروسکی (که حال استاد بازنشستهٔ دانشگاه بال سویس است) برهانی متناوب برای قضیهٔ هولدر ارائه داد.

حل مسائل رده‌بندی بسیار دشوار است. برای نمونه موارد زیررا ملاحظه کنید: آیا می‌توان معادلهٔ $x^۲+۸x+۱$ را بسا استفاده از رادیکالها حل کرد؟ آیا π متعالی است؟ آیا می‌توان $\int dx/\sqrt{x^۳+۱}$ را برحسب توابع مقدماتی مشخص نوشت؟ آیا می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dx=(۱/x)+(۱/y)$ را با انتگرالگیری حل کرد؟ مسائلی کلی که این مسائل نمایندهٔ آنها هستند، حتی امروز نیز علیرغم پیدایش نظریه‌های معروفی چون نظریهٔ گالوا، نظریهٔ لی، نظریهٔ انتگرالهای آبلی که از چنین مسائل ساده‌ای پدید آمده‌اند بدون حل باقی‌مانده است. هریك ازاین مسائل ممکن است با روش خاصی که حاصل نبوغ خارق‌العاده‌ای باشد، حل شود.

باردیگر به‌مسئلهٔ درون‌یابی بازمی گردیم. نشان داده‌ایم که چگونه، تعداد نامحدودی جواب برای این مسئله وجود دارد. با درنظرداشتن این نکته می‌توان جواب عجیبی را که به سال ۱۸۹۴ توسط ژاك‌آدامار داده شده است، ذکر کرد. آدامار فرمولی نسبتاً ساده شامل تابع گاما یافت که به‌ازای اعداد صحیح مثبت فاکتوریلها را فراهم می‌سازد (شکلهای ۱ و ۳ را ببینید) اما تابع آدامار

$$y=\frac{۱}{\Gamma(۱-x)}\frac{d}{dx}\log\left[\Gamma\left(\frac{۱-x}{۲}\right)/\Gamma\left(۱-\frac{x}{۲}\right)\right] \qquad (۳۴)$$

مغایرت شدیدی با تابع گاما دارد. دارای هیچ نقطهٔ منفردی درصفحهٔ مختلط متناهی نیست

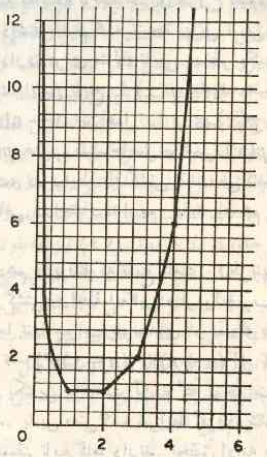


شکل۴. بینهایت تابع وجود دارند که فاکتوریلها را تولید می‌کنند. تابع $F(x)=(1/\Gamma(1-x))\,(d/dx)\log\{\Gamma((1-x)/2)/\Gamma(1-x/2)\}$ یک تابع تحلیلی تام است که در اعداد صحیح مثبت بر تابع گاما منطبق است و در معادلهٔ تابعی $F(x+1)=xF(x)+(1/\Gamma(1-x))$ صدق می‌کند.

یک جواب تحلیلی تام برای مسئلهٔ درون‌یابی است و بنابراین از دیدگاه نظریهٔ توابع جواب ساده‌تری است. با توجه به این ابهامات چرا جواب اویلر را رجح است؟

از دیدگاه انتگرالها، جواب روشن است. انتگرال اویلر همه جا ظاهر می‌شود و مقید به‌رده‌ای از توابع خاص می‌باشد. فراوانی و سادگی آن باعث اهمیت اساسی آن شده است. وقتی با یک مورد مشکل و بحرانی سروکار داریم، شکل اصلی این انتگرال و اشکال دیگرش موجب فایده و اهمیتش می‌شوند. از دیدگاه درون‌یابی چنین ادعایی نداریم. باید نگرشی عمیقتر بر تابع گاما داشته باشیم و نشان دهیم که از بین همهٔ جوابهای مسئلهٔ درون‌یابی، این تابع به‌مفهومی ساده‌ترین جواب است. این موضوع تا حدی به‌جنبهٔ زیبایی‌شناختی ریاضیات مربوط است.

قبلاً دیدیم که انتگرال اویلر در رابطهٔ بازگشتی $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ صدق می‌کند و این معادله به‌ما امکان می‌دهد که تمام مقادیر حقیقی تابع گاما را تنها با اطلاع از مقادیر آن در فاصلهٔ صفر و یک محاسبه کنیم. از آنجا که جواب مسئلهٔ درون‌یابی به‌طور یکتا معین نمی‌شود باید شرایط جدیدی به‌مسئله اضافه کنیم و تحقیق کنیم که مسئلهٔ جدید دارای جواب یکتاست یا خیر. اگر چنین باشد، امیدوار خواهیم بود که این جواب یکتا بر جواب اویلر



شکل۵. تابعی که نشان داده شده، فاکتوریلها را تولید می‌کند. درمعادلهٔ تابعی تابع گاما صادق است، ومحدب است.

منطبق باشد. یکی از شرایطی که طبیعتاً اضافه می‌شود، رابطهٔ بازگشتی است. اگر چنین کاری انجام دهیم باز درمی‌یابیم که تابع گاما تنها تابعی نیست که در این رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند و فاکتوریلها را تولید می‌کند. به‌سادگی می‌توان یک تابع "شبه" گامای $\Gamma_s(x)$ ساخت؛ کافی است که آن را، مثلا، بین ۱و۲ به‌هرطریقی تعریف کنیم. (تنها شرط آن است که $\Gamma_s(2)=1$, $\Gamma_s(1)=1$) و بگذاریم که رابطهٔ بازگشتی دامنهٔ مقادیر آن را در همه جا گسترش دهد.

برای مثال اگر $\Gamma_s(x)$ را در همهٔ فاصلهٔ ۱و۲ برابر ۱ تعریف کنیم رابطهٔ بازگشتی ما را به‌تابع زیرمی‌رساند (شکل ۵)

$$\begin{aligned}
&\Gamma_s(x)=1/x && 0<x\le 1;\\
&\Gamma_s(x)=1, && 1\le x\le 2;\\
&\Gamma_s(x)=x-1, && 2\le x\le 3;\\
&\Gamma_s(x)=(x-1)(x-2), && 3\le x\le 4;\ \ldots
\end{aligned} \qquad (35)$$

حال ممکن‌است بسته به‌اینکه با چه چیزی شروع کنیم، به‌نتیجهٔ نسبتاً شگفت‌انگیزی برسیم. حتی اگر احتیاج داشته باشیم که نتیجهٔ نهایی تابعی تحلیلی باشد راههایی برای براوردن این نیاز وجود دارد. برای مثال: تابعی درنظر بگیرید که هم تحلیلی باشد وهم تناوبی با دورهٔ تناوب یك. این تابع را $p(x)$ بنامید. حال اطمینان حاصل کنید که $p(1)=1$. تابع $1+\sin 2\pi x$ این عمل را برای $p(x)$ انجام می‌دهد. حال تابع گامای معمولی را در $p(x)$ ضرب کنید. حاصل این عمل، $\Gamma(x)\,p(x)$، یك تابع "شبه" گاما خواهد بود که تحلیلی است، در رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند و فاکتوریلها را به دست می‌دهد! بنابراین شرایط کافی دراختیار نداریم. باید باز هم شرایطی به مسئله اضافه کنیم اما چه شرایطی؟

دراواسط قرن نوزدهم دریافتند که تابع گامای اویلر تنها تابع پیوسته‌ای است که به طور همزمان در رابطهٔ بازگشتی، رابطهٔ انعکاس و فرمول ضرب صدق می‌کند. وایرشتراس بعدها نشان داد که تابع گاما تنها جواب پیوسته‌ای از معادله بازگشتی است که برای آن، به‌ازای جمیع مقادیر x، $\{\Gamma(x+n)\}/\{(n-1)n^x\}\to 1$. با افزودن این شرایط به‌مسئلهٔ درون‌یابی می‌توان جواب یکتایی به دست آورد که برجواب اویلر منطبق است اما این شرایط بسیار سنگین هستند. بدین معنی که شرایط افزوده شده چندان طبیعی نیستند زیرا بستگی به‌خواص تحلیلی عمیقتر تابع گاما دارند. تحقیق ادامه یافت.

شرایط زیبایی‌شناختی نه در بررسیهای تحلیلی قدیمی بلکه در رهیافتی جدید، داخلی و ارگانیك به‌نظریهٔ توابع که در آغاز قرن اخیر پدید می‌آمد، پیدا شدند. درنظریهٔ جدید توابع، به‌کمك نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و نظریهٔ در حال پیدایش توپولوژی آن قدر که به‌خواص اساسی هندسی می‌پرداختند، به معادلات و اتحادها توجه نداشتند. شرط مطلوب درمفهوم تحدب یافت شد. یك خم محدب است هرگاه حکم زیردرمورد آن صادق باشد. اگر دونقطهٔ دلخواه از خم را درنظر بگیریم و آنها را با یك خط راست به‌هم وصل کنیم بخشی ازخم که بین این دونقطه قراردارد زیرخط قرار گیرد. یك خم محدب لرزش ندارد و نمی‌توان آن را بمانند پشت شتر انگاشت. در آغاز قرن، تحدب در جو ریاضی پدیدار شده ومعلوم شده بود که جزء لاینفکی از بسیاری پدیده‌های مختلف است. درطول یك نسل این مفهوم کشف شد، تعمیم داده شد، مجرد شد. به خاطر نفس خودش مورد بررسی قرار گرفت و به‌کار رفت. باکارهای بران در ۱۸۸۷ و مینکوفسکی در ۱۹۰۳ در زمینهٔ اجسام محدب که توجه را به‌این مفهوم جلب کرد و درکارهای یِنسن[1] در ۱۹۰۶ که باعث شد این مفهوم مستقلاً موردنظر قرار گیرد، ایدهٔ تحدب توسعه یافت ودرقضیهٔ مقدارمیانگین، درنظریهٔ پتانسیل، در توپولوژی و اخیراً در نظریهٔ بازیها و در برنامه‌ریزی خطی، مورد استفاده قرار گرفت. به‌این ترتیب، درآغاز این قرن کاربرد تحدب در زمینهٔ تابع گاما در دستور کار قرار گرفت.

خمهایی که تابع گاما را می‌سازند، همگی محدب هستند. نگاهی به‌شکل ۲ درستی

1. J. L. W. V. Jensen

این مطلب را نشان می‌دهد. اگر، بمانند پارا گراف قبل، توسط ضرب تابع گاما درعامل $1+\sin 2\pi x$ تابع شبه‌گاما یی بسازیم که در رابطهٔ بازگشتی صدق کند این مطلب دیگر درمورد آن درست نخواهد بود. شاید این فکر برای اغلب ریاضیدانان پیش‌آمده باشد که تابع گاما تنها تابعی است که مقادیر فاکتوریل را به‌دست می‌دهد، در رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند و به‌ازای $x>0$ محدب است. متأسفانهٔ این مطلب درست نیست. شکل ۵ تابع شبه‌گاما یی را نشان می‌دهد که دقیقاً همهٔ این خواص را دارد. تاسال ۱۹۲۲ فرمولبندی درست این‌مسئله به‌درازا کشید اما حل آن چندان نیز دور ازدسترس نبود. تابع گاما نه‌تنها محدب است بلکه لگاریتمی محدب است. بدین معنی که نمودار $\log\Gamma(x)$ نیز به‌ازای $x>0$ محدب است. این حقیقت در فرمول (۲۷) نیز به‌طور ضمنی مستتراست. تحدب لگاریتمی ازتحدب عادی قویتر است چرا که آن را ایجاب می‌کند اما از تحدب عادی نتیجه نمی‌شود. حال هارالد بور[1] و مالراپ[2] می‌توانستند این حقیقت شگفت‌انگیز را به اثبات برسانند که تابع گاما تنها تابعی است که لگاریتمی محدب بوده ودر رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند. برهان اولیهٔ آنها، چندین سال بعد توسط امیل آرتین، استادکنونی دانشگاه پرینستون، ساده شد واکنون قضیهٔ همراه با روش اثبات آرتین به‌قضیهٔ بور-مالراپ-آرتین موسوم است. صورت دقیق آن چنین است

> تابع گامای اویلر تنها تابع تعریف شده به‌ازای $x>0$ است که مثبت است، به‌ازای $x=1$ مقدارش برابر ۱ است، در رابطهٔ بازگشتی $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ صدق می‌کند و لگاریتمی محدب است.

این قضیه درنظراول، بقدری شگفت‌انگیز و بقدری راضی‌کننده بود که آن گروه از تجریدیون معاصر که تحت عنوان نیکولابوربا کی قلم می‌زنند، آن را به عنوان نقطهٔ شروع توصیف تابع گاما انتخاب کردند. برهان: یك صفحه، کشف: ۱۹۳ سال.

نکات بسیاری در مورد تابع گاما می‌دانیم. از زمان اویلر تا بحال بیش از ۴۰۰ مقالهٔ اساسی در زمینهٔ تابع گاما نگاشته شده است. اما هنوز نکات کمی باقی مانده که نمی‌دانیم و می‌خواهیم بدانیم. شاید، سختترین مسائل حل نشده در رابطه با گویا بودن و متعالی بودن باشد. برای نمونه عدد ... $\gamma=0.577721$ را، که در فرمول (۳۰) ظاهر گشت، درنظر بگیرید. این عدد همان ثابت اویلر-مچرونی است. می‌توان چندین عبارت متفاوت برای آن ارائه کرد. از قبیل

$$\gamma=-d\Gamma(x)/dx|_{x=1} \qquad (36)$$

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n \qquad (37)$$

هرچند مقدارعددی γ تا صدرقم اعشارمعلوم شده، اما تازمان نگارش این مقاله هنوزمعلوم نیست که γ گویاست یا نه. مسئلهٔ دیگری ازاین نوع و درارتباط با مقادیرتابع گاما وجود

1. Harald Bohr 2. J. Mollerup

دارد. گرچه، می‌توان ثابت کرد حاصلضرب $\Gamma(1/4)/\sqrt[4]{\pi}$ متعالی است امـا هنوز حتی معلوم نیست که آیا $\Gamma(1/4)$ گویاست یا خیر.

جورج گاموف، فیزیکدان شاخص، از لاپلاس نقل می‌کند که وی گفته است هنگامی که سطوح شناخته شدهٔ یك مبحث گسترش یابند، مرزهایش نیز توسعه می‌یابند. واضح است که لاپلاس در ذهن خود تصویری از گسترش یك دایره دریك صفحهٔ نامتناهی داشته است. گاموف این مطلب را در فیزیك انکار می‌کند و در ذهن خود، تصویری از یك دایره دارد که در سطح کروی گسترده شده باشد. چنانچه دایـره گسترش یابد، در ابتدا مرزش توسعه می‌یابد اما سپس منقبض می‌شود. این نویسنده نیز تا آنجا که مربوط بدریاضیات می‌شود، با نظر گاموف موافق است. تاکنون چنین بوده است: هرنسل نکتهٔ جالبی برای ارائه در مورد تابع گاما یافته است، شاید نسل بعد نیز چنین کند.

مراجع

1. Artin E, *Einfuhrung in die Theorie der Gamma - function*, Leipzig, 1931.
2. Bourbaki N, *Elements de Mathematique*, Book IV, ch.VII, la fonction Gamma, Paris 1951.
3. Davis.T.H, *Tables of the Higher Mathematical Functions*, Vol.I. Bloomington, Indiana, 1933.
4. Euler L, *Opera Omnia*, Vol(I_{14}, Leipzig -Berlin). 1924.
5. Fuss Ed.P.H., *Correspondance Mathematique et Physique de Quelques Celebress Geometres du XVIII^{ieme} Siecle*, Tome I, St.Petersbourg, 1843.
6. Hardy.G.H., *Divergent Series*, Oxford, 1949, ch. II.
7. Losch.F., Schoblik.F., *Die Fakultat und Verwandte Funktionen*, Leipzig, 1951.
8. Nielsen N., *Handbuch der Therorie der Gamma Funktion* Leipzig. 1906.
9. *Table of the Gamma Function for complex Arguments*, National Bureau of standards, applied math.Ser. 34. Washington, 1954. (Introduction by Hernert E.Salzer).
10. Whittaker E.T., Watson.G.N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1947. Ch.12.

هندریك لنسترا

میدانهای اقلیدسی اعداد •

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

این مقاله که درباب میدانهای اقلیدسی اعداد است، بخشی ازمقدمهٔ رسالهٔ دکترای هندریك لنستراست که بوسیلهٔ الف ون‌در پورتن[1] از هلندی به‌انگلیسی ترجمه شده است. فهرست اسامی برخی از ریاضیدانانی که در زمینهٔ موضوع این مقاله کار کرده‌اند، بدقرار زیراست.

۱. اقلیدس حدود ۳۰۰ قبل از میلاد
۲. دیوفانتوس اسکندرانی حدود ۲۵۰
۳. پیرفرما ۱۶۰۱–۱۶۶۵
۴. لئونهارت اویلر ۱۷۰۷–۱۷۸۳
۵. ژوزف لویی لاگرانژ ۱۷۳۶–۱۸۱۳
۶. کارل فریدریش گاوس ۱۷۷۷–۱۸۵۵
۷. اگوستین لویی کوشی ۱۷۸۹–۱۸۵۷
۸. گابریل لامه ۱۷۹۵–۱۸۷۰
۹. ژاکوب ژاکوبی ۱۸۰۴–۱۸۵۱
۱۰. لژون دیریشله ۱۸۰۵–۱۸۵۹
۱۱. ژوزف لیوویل ۱۸۰۹–۱۸۸۲
۱۲. ارنست ادوارد کومر ۱۸۱۰–۱۸۹۳
۱۳. پیرلودن وانتزل ۱۸۱۴–۱۸۴۸
۱۴. گاتهولد آیزنشتاین ۱۸۲۳–۱۸۵۲
۱۵. لئوپولد کرونکر ۱۸۲۳–۱۸۹۱
۱۶. برنهارد ریمان ۱۸۲۶–۱۸۶۶
۱۷. آدولف هورویتس ۱۸۵۹–۱۹۱۹
۱۸. کورت هنسل ۱۸۶۱–۱۹۴۱
۱۹. هرمان مینکوفسکی ۱۸۶۴–۱۹۰۹
۲۰. هری شولتزون‌دیور ۱۸۸۲–۱۹۷۳
۲۱. امیل آرتین ۱۸۹۸–۱۹۶۲
۲۲. هرولد داونپورت ۱۹۰۷–۱۹۶۹
۲۳. تئودور ساموئل موتزکین ۱۹۰۸–۱۹۷۰

• Lenstra Hendrik W., "Euclidean number fields," *The Mathematical Intelligencer*, 1(1979) 6

1. Alf van der Poorten

قضیهٔ آخر فرما

دراول ماه مارس سال ۱۸۴۷ دانشمند فرانسوی لامه[1] یکی از اعضای آکادمی علوم پاریس یك خبر تکان دهنده به‌همکاران دانشمند خود داد. او ادعا کرد که دراثبات قضیهٔ آخرفرما موفق شده است. این قضیه چنین می گوید: اعداد صحیح ومثبت x ، y ، z ی یافت نمی‌شوند به طوری کـه برای $n>2$ معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ برقرار باشد. وقتی $n=2$ باشد جوابهای بسیاری برای این مسئله وجود دارد. مثلا[2]

$$3^2+4^2=5^2,\quad 5^2+12^2=13^2,\quad 8^2+15^2=17^2,\quad \cdots$$

کـه سه‌تاییهای فیثاغورثی هستند. حقوقدان فرانسوی، فرما، در حاشیهٔ نسخه‌ای از کتاب حساب[3] دیوفانتوس نوشته بود که برای nهای بزرگتر چنین سه‌تاییهایی پیدا نمی‌شوند و اضافه‌کرده بود که برای این مطلب اثباتی شگفت‌انگیز یافته، اما حاشیهٔ مزبور خیلی کوچکتر از آن است که بتواند آن را در بر بگیرد:

"تفکیك یك توان سه بـه دو توان سه یا یك توان چهار بـه دو توان چهار یا به‌طورکلی هرتوانی بعد ازتـوان دو به‌دو توان مشابه، امکان نـدارد؛ من اثباتی زیبا برای این‌مطلب کشف کرده‌ام، ولی این حاشیه باریکتر ازآن است که آن را در خود جای دهد."

هرقضیهٔ دیگری که فرما بدین شیوه اعلام کرده بود تا ۱۸۴۷ اثبات شد مگر آخرین آنها که همین قضیه باشد.

لامه ایدهٔ اساسی اثباتش را به لیوویل نسبت می‌داد. ایـن ایده عبارت بود از کار روی اعدادی به‌شکل زیر

$$a_0+a_1\zeta+\cdots+a_{n-1}\zeta^{n-1} \qquad (1)$$

که a_0 ، a_1 ، ... ، a_{n-1} اعداد صحیح

و ζ عددی مختلط است به‌طوری‌که $\zeta^n=1$ و $\zeta\neq 1$. در اینجا لامه فرض کرد که n عدد فرد اولی باشد و چنین فرضی همان طور کـه از قبل معلوم شده بود محدودیت اساسی در اثبات قضیهٔ آخرفرما به‌وجود نمی‌آورد، با کمك این اعداد عبارت x^n+y^n به n عامل قابل تجزیه است $x^n+y^n=(x+y)(x+\zeta y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y)$ پس معادلهٔ فرما چنین شکلی پیدا می کند:

$$(x+y)(x+\zeta y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y)=z^n \qquad (2)$$

بعد لامه اصل زیر را که یك روش کلاسیك در نظریهٔ معادلات دیوفانتی است، در مورد این شکل معادله به‌کار برد

1. Lamé 2. *Arithmetica*

۳. مطالبی که با عرض کمتر یا داخل گیومده آمده‌اند، درمتن اصلی بهزبانهای غیرانگلیسی بوده‌اند.ـم.

(۳) اگر حاصلضرب دو عدد که با یکدیگر عامل مشترکی ندارند به‌صورت توان nام باشد، آنگاه هر دو عدد به‌صورت توان nام هستند.

به‌ازای اعداد صحیح مثبت، صحت این اصل را می‌توان با تجزیهٔ اعداد به عوامل اول و بررسی وضع هر یك از اعداد اول متمایز، تحقیق کرد.

لامه فرض کرد که (۳) برای اعداد نوع (۱) هم صادق خواهد بود و با استفاده از استدلالی که در اینجا چندان اهمیتی برای ما ندارد بدین نتیجه رسید که (۲) فقط وقتی ممکن است که یکی‌از سه عدد x، y، و z صفر باشد؛ درستی قضیهٔ آخرفرما از این مطلب نتیجه می‌شود. بعداز لامه لیوویل رشتهٔ سخن را به‌دست گرفت و گفت که ایدهٔ منسوب به‌او درمورد اعداد مختلط نوع (۱) چیز جدیدی نیست و می‌توان مشابه آن را در کارهای اویلر، لاگرانژ، گاوس، و ژاکوبی هم دید. ضمنا، لیوویل گفت که به نظرش می‌رسد لامه به‌طور ضمنی فرض کرده که اعداد نوع (۱) هم به‌طور یکتا به‌عوامل اول تجزیه می‌شوند. دراینجا لیوویل گفت: "آیادرآنجا فضایی خالی برای پرکردن وجود ندارد؟"

بدین‌ترتیب قضیهٔ آخرفرما به‌طرح سؤالی انجامید که شاید ازخود قضیه جالبتر باشد:

(۴) آیا تجزیهٔ یکتا به‌عوامل اول در مورد اعداد به‌شکل (۱) هم برقرار است؟

دراین قسمت روشهایی راکه معاصران لیوویل برای پاسخ دادن بهاین سؤال به‌کار بردند، بررسی می کنیم.

دومین اشکالی که لیوویل به‌لامه گرفت به‌وجود مفسوم‌علیه‌های عدد۱ مربوط می‌شود؛ یعنی اعدادی کـه ۱ را عاد می کنند و امروزه آنها را یکه می نامند. نقش ایـن اعداد در ادعایی نظیر (۳)، در مثال زیر دیده می‌شود

$$(-4)\cdot(+9)=6^2$$

اعداد ۴ — و ۹ — هیچ عامل مشترکی ندارند و حاصلضربشان یك مجذور کامل است اما با وجود این نه ۴ — مجذور یك عدد صحیح است و نـه ۹ —. هرچند، هرکدام یك یکه است، یعنی حاصلضرب ۱ — در یك مجذور کامل است.

درمورد اعداد به‌صورت (۱) یکه‌های بسیار بیشتری خواهیم داشت. برای مثال از

$$(\zeta+\zeta^{n-1})(\zeta+\zeta^3+\zeta^{n-1})(\zeta+\zeta^5+\zeta^{n-1})\cdots(\zeta+\zeta^{2n-3}+\zeta^{n-1})=1 \quad (\text{فرد } n,\ n>1)$$

درمی‌یابیم که هر عامل سمت چپ عبارت، یك یکه است. خواص بخشپذیری بر $\zeta+\zeta^{n-1}$ نقش مهمی در اثبات لامه ایفا می‌کنند. اما این عدد ۱ را عاد می کند، پس هر عدد دیگری را نیز عاد می‌کند ومشاهدهٔ اخیرتمامی استدلال لامه را، حتی اگرفرض می کردیم که تجزیهٔ یکتا به‌عوامل اول هم برقرار باشد، باطل می‌کند.

دیگرروی موضوع یکه‌ها تأمل نمی‌کنیم. پیشرفتهای بعدی نشان داده‌اند که مسائل

مربوط بـه این مبحث مشکلتر از مسائل مربوط به‌یکتایی تجزیهٔ اعداد است. ولی بجاست یادآوری کنیم که حتی امروز، به‌نظر می‌رسد بسیاری از مؤلفان کتابهای درسی نظریهٔ اعداد فراموش می‌کنند که برای کسب نتایجی نظیر (۳) باید اطلاعاتی دربارهٔ یکه‌ها و نیز تجزیه به‌اعداد اول داشت.

دو هفته بعد از ایراد این سخنان، وانتزل[1] روشی برای پاسخگویی به‌سؤال لیوویل ابداع کرد. تا آغاز قرن اخیر، وانتزل به خاطر اثبات ساده‌ای کـه از حل‌ناپذیری معادلات درجه پنجم داده بود و نیز به خاطر اینکه اولین اثبات چـاپ شده از عدم امکان تثلیث زاویه و تضعیف مکعب متعلق به‌او بود، مشهور شده بود، ولی چون در جوانی فوت کرد هرگز نتوانست استعدادش را کاملاً نشان دهد — این روزها وانتزل کاملاً فراموش شده است.

ایدهٔ وانتزل چنین است: فرض کنیم n عدد صحیح دلخواهی ناکمتراز ۳ باشد و ζ یك ریشهٔ اولیهٔ $\zeta^n=1$ باشد، مثلاً $\zeta=e^{2\pi i/n}$. وانتزل گفت‌که برای نشان دادن اینکه اعداد (۱) تجزیهٔ یکتا دارند کافی است به‌جای مفهوم مشهور تقسیم با باقیمانده کـه در مورد اعـداد صحیح معمولـی معتبر است قاعده‌ای بیابیم، زیرا پس از آن می‌تـوان از استدلالهایی که به‌زمان اقلیدس بازمی‌گردد و قضیهٔ‌مورد نظرکه به‌تجزیهٔ یکتا به‌عوامل اول منجر می‌شود استفاده کرد.

برای اینکه نشان داده شود چگونه می‌توان این قاعده را یافت، وانتزل ابتدا حالت $n=۴$ را درنظر می‌گیرد. دراین حالت اعداد (۱) همان اعداد $a+b\sqrt{-۱}$ هستندکه a و b اعداد صحیحی می‌باشند و هنج چنین عددی این‌طور تعریف می‌شود

$$N(a+b\sqrt{-۱})=(a+b\sqrt{-۱})(a-b\sqrt{-۱})=a^۲+b^۲$$

حال عدد $a+b\sqrt{-۱}$ را بر $c+d\sqrt{-۱}$، که c و d هر دو صفر نیستند، تقسیم می‌کنیم و داریم

$$\frac{a+b\sqrt{-۱}}{c+d\sqrt{-۱}}=t+u\sqrt{-۱}$$

که در آن

$$t=(ac+bd)/(c^۲+d^۲)$$
$$u=(bc-ad)/(c^۲+d^۲)$$

البته این به معنای تقسیم دقیق نیست، زیرا t و u لازم نیست اعداد صحیح باشند. اما همواره می‌توانیم t و u را با اعداد صحیح t' و u' تقریب بزنیم، به‌طوری که

$$t=t'+v, \quad u=u'+w$$

1. Wantzel

که

$$|v|\leqslant ۱/۲, \quad |w|\leqslant ۱/۲$$

پس خواهیم داشت

$$a+b\sqrt{-۱}=(t'+u'\sqrt{-۱})\cdot(c+d\sqrt{-۱})$$
$$+(v+w\sqrt{-۱})\cdot(c+d\sqrt{-۱})$$

اگر بنویسیم $r=vc-wd$ و $s=vd+wc$ رابطهٔ قبلی این‌طور می‌شود

$$a+b\sqrt{-۱}=(t'+u'\sqrt{-۱})\cdot(c+d\sqrt{-۱})+(r+s\sqrt{-۱}) \quad (۵)$$

بنابراین می‌توان $t'+u'\sqrt{-۱}$ را به‌عنوان خارج قسمت و $r+s\sqrt{-۱}$ را به عنوان باقیماندهٔ $a+b\sqrt{-۱}$ درتقسیم بر $c+d\sqrt{-۱}$ انگاشت. برای آنکه بتوانیم تـام باقیمانده را بر $r+s\sqrt{-۱}$ اطلاق کنیم و — نباید فراموش کنیم — برای آنکه شیوهٔ اقلیدس را بتوانیم به‌کار بریم، باید $r+s\sqrt{-۱}$ ازعدد $c+d\sqrt{-۱}$ که مقسوم‌علیه است کوچکتر باشد. دراینجا به‌وسیلهٔ هنج بزرگی وکوچکی اعداد را اندازه می‌گیریم و در واقع داریم

$$N(r+s\sqrt{-۱})=(r+s\sqrt{-۱})\cdot(r-s\sqrt{-۱})$$
$$=(r+w\sqrt{-۱})\cdot(c+d\sqrt{-۱})$$
$$\cdot(r-w\sqrt{-۱})\cdot(c-d\sqrt{-۱})$$
$$=(r^۲+w^۲)\cdot N(c+d\sqrt{-۱})$$
$$\leqslant((۱/۲)^۲+(۱/۲)^۲)\cdot N(c+d\sqrt{-۱})$$
$$<N(c+d\sqrt{-۱})$$

و این تمام کاری است که برای حالت $n=۴$ لازم است. امروزه ما همهٔ این مطلب را به این‌صورت بیان می‌کنیم که وانتزل ثابت کرد: اعداد $a+b\sqrt{-۱}$، کـه a و b اعدادی صحیح‌اند، یك "حلقهٔ اقلیدسی" نسبت به‌هنج تشکیل می‌دهند. استدلالهای اقلیدسی که چند بار به آن اشاره کردیم، نشان می‌دهد کـه قضیهٔ تجزیه یکتای اعداد بـه عوامل اول در حلقه‌های اقلیدسی برقرار است.

وانتزل حالت $n=۳$ را به عنوان دومین مثال انتخاب کـرد. سپس رابطـهٔ $\zeta^۲=\zeta-۱$ را به دست آورد. پس‌اعداد (۱) را به‌صورت $a+b\zeta$ می‌توان نوشت که a و b اعداد صحیح هستند. حال هنج — یا پیمانه بقول خود وانتزل — این‌طور تعریف می‌شود

$$N(a+b\zeta)=(a+b\zeta)\cdot(a+b\zeta^{2})=a^{2}-ab+b^{2}$$

به‌طریقی کاملاً مشابه می‌توان با تقسیم $a+b\zeta$ بر $c+d\zeta$ دید که

$$a+b\zeta=(t'+u'\zeta)(c+d\zeta)+(r+s\zeta)$$

که t'، u'، r، و s اعداد صحیح‌اند و

$$r+s\zeta=(v+w\zeta)\cdot(c+d\zeta)$$

$$|v|\leqslant 1/2,\quad |w|\leqslant 1/2$$

برای اینکه $r+s\zeta$ باقیمانده نامیده شود به‌آسانی می‌توان شرط را بررسی کرد

$$N(r+s\zeta)=(v^{2}-vw+w^{2})\cdot N(c+d\zeta)$$

$$\leqslant(3/4)\cdot N(c+d\zeta)<N(c+d\zeta)$$

این در حالت $n=3$ بود. در حالت کلی وانتزل چنین استدلال کرد:

"به‌وضوح دیده می‌شود که همان نحوهٔ نمایش اعداد مختلط با اشکال پیچیده‌تر که به ریشه‌های $r^{n}=1$ بستگی دارند به‌ازای مقادیر مختلف n انجام‌پذیر است. برای این منظور کافی است پیمانهٔ عبارت

$$\alpha+\beta r+\gamma r^{2}+\cdots+\mu r^{n-1}$$

به‌ازای مقادیر α، β، γ، ...، μ بین ۰ و ۱ همیشه کمتر از ۱ باشد. این مطلب به‌طرق مختلف قابل تحقیق است."

اینجا اصطلاح پیمانهٔ عبارت زیر

$$u_{0}+u_{1}\zeta+\cdots+u_{n-1}\zeta^{n-1} \qquad (6)$$

که

$$u_{0}, u_{1}, \ldots, u_{n-1}$$

حقیقی‌اند

به صورت حاصلضرب اعداد (۶)، هنگامی که ζ مقادیر مختلف ریشه‌های اولیهٔ $\zeta^{n}=1$ را اختیار می‌کند، تعبیر می‌شود. در این مبحث یك ریشهٔ $\zeta^{n}=1$ اولیه گفته می‌شود اگر هیچ m با شرایط زیر موجود نباشد

$$\zeta^{m}=1,\quad 0<m<n$$

می‌توان نشان داد اگر u_{0}، u_{1}، ...، u_{n-1} اعدادی صحیح باشند، آنگاه هنج عددصحیحی نامنفی است، و فقط در صورتی برابر صفر است که عبارت (۶) خودش صفر باشد. جنبهٔ قابل توجه ادعای وانتزل این است که این ادعا حتی در حالت $n=4$، که او

به‌عنوان مثال نشان داده، درست نیست. مطمئناً هیچکس نمی‌تواند ادعا کند که پیمانهٔ

$$N(v+w\sqrt{-1})=v^{2}+w^{2}$$

هرگاه v و w هردو بین ۰ و ۱ باشند، کوچکتر از ۱ است. اما حتی اگر ما تمامی اعداد α، β، γ، ...، μ را بین $-1/2$ و $+1/2$ می‌گرفتیم، همان طور که کوشی بعدها با ذکر یك مثال ناقض نشان داد، باز ادعای وانتزل در حالت کلی صحت نداشت.

دراول ماه مارس، روزی که لامه ادعای خود را اعلان نمود، کوشی، با اعتمادآشکار به درستی روش لامه، خواستار سهمی از امتیاز احتمالی این موفقیت برای خود شد. او ادعا کرد روشی را که احتمالاً به‌اثبات قضیهٔ آخرفرما منجر می‌شد چند ماه زودتر به آکادمی ارائه داده بود.

"آقای کوشی که سخت سرگرم کارهای دیگر است وقت این‌را که ازاساسی بودن این فرضیه مطمئن شود پیدا نمی‌کند."

سلسله یادداشتهایی که در این زمان کوشی در گزارشهای[1] آکادمی نوشت اساساً در جهت دادن پاسخ مثبت به سؤال لیووبل (۴) بود. به‌علاوه، اگر فرض کنیم که کوشی در این کوشش موفق می‌شد، برخی از نتایج تجزیهٔ یکتا به‌عوامل اول را که به‌نظرش به‌اثبات قضیهٔ آخرفرما مربوط بود، استنتاج می‌کرد. به دلایلی که بعداً آشکار خواهد شد ما دیگر به‌بحث در مورد آن نتایج نخواهیم پرداخت. به‌هرحال، عقیدهٔ رایج مبنی براینکه کوشی تجزیه‌پذیری یکتای اعداد (۱) را بدیهی می‌دانسته توجیه‌پذیر نیست.

کوشی کار را با تلاش درجهت اثبات مجدد فرضیهٔ وانتزل آغازکرد: تحلیل حالت $n=4$ قبلاً توسط دیریشله انجام شده بود؛ و در حقیقت عین همان استدلال برای حالت $n=3$ صادق بود

ولی این ایراد مطرح می‌شود که به‌راحتی نمی‌توان همان روش نمایش را در مورد اعداد مختلط پیچیده‌تر که به ریشه‌های معادلهٔ $x^{n}=1$ بستگی دارند، به‌کار برد.

آنگاه کوشی تعدادی مثال در جهت نقض ادعای وانتزل، که از آن سخن گفتیم، ارائه کرد و سپس چنین نتیجه گرفت

با توجه به موارد فوق ملاحظه می‌شود که نظریهٔ عمومی اعداد مختلط هنوز باید تدوین شود.

کوشی چند ماه خود را با این مسئله مشغول کرد و تنها نتایجی جزئی به‌دست آورد. او نشان داد که اعداد (۱) واقعاً در حالات زیر حلقهٔ اقلیدسی درست می‌کنند

$$n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15$$

1. *Comptes Rendus*

کوشی ظاهراً متوجه نبود که به‌ازای مقادیر فرد k اعداد (۱) برای $n=k$ با مقادیری که همین اعداد به‌ازای $n=2k$ خواهند داشت، برابر هستند؛ و به‌ازای ریشه‌های اولیهٔ $\zeta^{2k}=1$ تنها در یك علامت منها با ریشه‌های اولیهٔ $\zeta^{k}=1$ تفاوت دارند. اما به‌هرحال نتیجه‌ای که کوشی به‌دست آورد درست بود. اثبات او احتمالاً اشتباه است ولی کلی گویی وی قضاوت را مشکل می‌کند.

کوشی علاوه براین نتایجی که برای مقادیر کوچك n به‌دست آورد روشهایی تحلیلی یافت که او را قانع کرد برای مقادیر بزرگ n نیز ــ مثلاً n بزرگتر از ۱۰ ــ اعداد (۱) حلقهٔ اقلیدسی تشکیل می‌دهند. اما در عین تلاشهای پیگیرو مکرر او نتوانست به‌طور قطعی مطلب را اثبات کند.

توضیح این شکست کوشی به وسیلهٔ پست از آلمان برایش رسید. از کلمات زیز می‌توان به‌قدرت ریاضیات فرانسوی و آلمانی آن زمان پی‌برد. این مطلب از نوشتهٔ کومر در ۱۸۴۷ که دربررسی اولین جلد از کارهای ریاضی[1] ژاکوبی آمده، انتخاب شده است. ضمن ستایش گاوس، ژاکوبی و دیریشله می‌نویسد:

> می‌توان علاوه‌براینان گروهی از ریاضیدانان آلمانی را برشمرد که یا با کمك مستقیم خود حیات نوینی به‌علم بخشیده‌اند و یا خود ازآن الهام گرفته‌اند. با این وصف ایده‌ها و روشهای اصلی در این قلمرو که توسط آلمانیها عرضه گردیده مختص افراد ذکرشده یعنی گاوس، ژاکوبی و دیریشله می‌باشد. در حال حاضر در فرانسه تنها یك تن وجود دارد که می‌توان او را همردیف این سه تن به حساب آورد یعنی کوشی که اندیشهٔ فوق‌العاده عمیق او در بسیط‌ترین و خالصترین حوزه‌های علم ریاضی خلاقیتهای نوینی را به همراه آورده است که در تمامی آنها پیشرفت دانش را موجب گردیده است. حال اگرما ازلحاظ ریاضیدانان طراز اول وزنهٔ اصلی و برتراز فرانسویان هستیم، چه سه اخترتابناك ما همگی به‌یك اندازه و در ردهٔ اول درخشش قرار دارند، با این حال می‌توان به اختصاص مقامهای دوم و سوم به ریاضیدانان فرانسوی که از نظرتعداد حائز نامورانِ بیشتری هستند، به‌راحتی گردن نهاد.
>
> صرفنظر از اینها درگذشته افراد بینهایت برجستهٔ دیگری نیز بوده‌اند که همچون ستارگان می‌درخشند تا حدی که این دسته حتی مقامات بعدی تا مقام شانزدهم را هم به‌خود اختصاص داده‌اند.

کمی تعجب‌آور است که سؤالی در پاریس به صورت معما درآمده باشد ولی در آلمان مدتی قبل به‌آن پاسخ داده شده باشد. در ۲۸ آوریل ۱۸۴۷ کومر به‌لیوویل چنین می‌نویسد:

> اما درمورد قضیهٔ مقدماتی برای این اعداد مختلط، که یك عدد مختلط مرکب را جز به یك‌روش نمی‌توان به‌عوامل اول تجزیه کرد، شما به‌حق از

1. *Mathematische Werke*

> نقص اثبات و همچنین در چند مورد دیگراظهار تأسف کرده‌اید؛ من می‌توانم به شما اطمینان دهم که این نقص اثبات معمولاً وقتی اعداد مختلط به شکل $\alpha_0+\alpha_1\nu+\alpha_2\nu^2+\cdots+\alpha_{n-1}\nu^{n-1}$ هستند وجود ندارد، و در سایر موارد می‌توان این نقص را با واردکردن نوع جدیدی از اعداد مختلط که آنها را اعداد مختلط ایده‌آل می‌نامم، رفع کرد.

عکس‌العمل کوشی:

> "اگر آقای کومر باعث شده بودند که در پیدا کردن پاسخ مسئله چند قدم دیگر برداشته شود یا حتی اگر ایشان موفق شده بودند که همهٔ موانع را از سرراه بردارند، اینجانب اولین نفری بودم که کوششهای ایشان را مورد تمجید قرار می‌دادم، زیرا آنچه که مخصوصاً باید از جانب ما آرزو شود این است که فعالیتهای کلیهٔ دوستداران علم منجر به‌شناخت و اشاعهٔ حقیقت گردد."

در یکی از شماره‌های بعدی گزارشها بعد از کومر، کوشی نشان داد که به‌ازای $n=23$ اعداد (۱) خاصیت تجزیهٔ یکتا به‌عوامل‌اول‌را ندارند. باذکراین مطلب به‌شرح کارهایی که در آکادمی پاریس در نیمهٔ نخست سال ۱۸۴۷ دراین باره انجام گرفت، خاتمه می‌دهیم.

در آلمان پیشرفت مشابهی چند سال زودتر به‌دست آمده بود، اما به‌طریقی که کمتر سرراست و مستقیم بود.

در آلمان علاقه به اعداد به شکل (۱) از تلاش برای اثبات قضیهٔ آخرفرما نشأت نگرفت ــ هرچند از احتمال کاربرد آنها دراین جهت آگاهی داشتند ــ بلکه از علاقه به تعمیم "قانون تقابل مربعی" گاوس (۱۸۰۱) نشأت گرفت. قانون تقابل مربعی می‌گوید اگر p و q یك زوج عدد فرد اول متفاوت باشند آنگاه دو همنهشتی

$$x^2\equiv p \ (\text{پیمانهٔ } q)$$

$$y^2\equiv q \ (\text{پیمانهٔ } p)$$

یا هردو جواب صحیح دارند و یا هیچیك ندارند، به‌جز هنگامی که p و q هردو به‌صورت $4k+3$ باشندکه دراین صورت یکی از دو همنهشتی جواب دارد و دیگری ندارد. مسئله این بود که این قاعده را برای توانهای بالاتر از ۲ تعمیم دهند.

خود گاوس در ۱۸۳۲ میلادی نشان داده بود که برای اینکه بتوان چنین قانونی را برای توانهای ۴ به طور مناسبی فرمولبندی کرد، به‌اعداد (۱) به‌ازای $n=4$ احتیاج است. در ۱۸۳۶ ژاکوبی برای قضیه‌ای که گاوس بیان کرده بود اثباتی ساده ارائه داد و علاوه بر این توانست یك قانون تقابل مکعبی را با استفاده از اعداد (۱) به‌ازای $n=3$ ثابت کند. از نتایجی که او به‌دست آورد به‌نظر می‌رسید که برای توانهای بالاتر n ابتدا باید به‌سؤال زیر جواب داد:

(۷) آیا می‌توان هرعدد اول p را که به پیمانهٔ n همنهشت با ۱ باشد، با ضربت هنج یک عدد (۱) نوشت؟

موضوع درحالات $n=3$ و $n=4$ معلوم شده و برای $n=5, 8, 12$ ژاکوبی درسال ۱۸۳۹، بدون انتشار اثبات خود، به‌این سؤال پاسخ مثبت داد.

در پیشرفتهایی که در آلمان رخ داد (۷) همان جایی را به خود اختصاص داد که سؤال لیوویل (۴) درفرانسه داشت. این دومسئله بستگی نزدیکی باهم دارند: اگر یکتایی تجزیه به عوامل اول را در مورد اعداد (۱) فرض کنیم نشان دادن اینکه خاصیت توضیح داده شده در (۷) واقعاً برقرار خواهد بود، مشکل نیست. شك نیست که ژاکوبی، و چند سال بعد، آیزنشتاین از اینکه عکس مطلب هم بسادی درست باشد آگاهی داشته‌اند: پاسخ مثبت به (۷) تجزیهٔ یکتا را ایجاب می‌کند. کومر در سال ۱۸۴۷ برای حالتی که n اول باشد یك اثبات زیبا از عکس مطلب ارائه داد. [۱۱، جلد۱، ص.۲۴۱، ۲۴۲]

اما این اولین کارکومر درمورد این مسئله نبود: درسال۱۸۴۴ او دستخطی به آکادمی برلین ارائه داد که فکر می‌کرد در آن ثابت کرده جواب (۷) به‌ازای تمام مقادیر اول n، مثبت است. استدلال او به‌تجزیهٔ یکتا بستگی نداشت، ولی حاوی اشتباه دیگری بود. به‌هر حال، کومر به‌موقع و احتمالاً با الهام از ژاکوبی متوجه شدکه (۷) در حالت $n=23$ نادرست است، و اثبات نادرست [وی] در سال ۱۹۷۷ چاپ شد. [۷]

به‌نظر می‌رسدکه شرح این اتفاق، پس ازآنکه درطی ۶۶ سال دهان به‌دهان گشت، به صورتی درآمد کـه (همان‌طور کـه در سخنرانی هنسل در ۱۹۱۰ ایراد شد) امروزه دنیای ریاضیات این واقعه را بـا این روایت می‌شناسد: گفته شدکـه کومر فکر می‌کرده قضیهٔ آخرفرما را اثبات کرده‌است ولی دیرپشله نشان دادکه اثبات براساس فرض نادرست تجزیهٔ یکتا بوده است. ایـن شرح ماجراست که اتفاقاً به‌طور بدی ثبت شده است؛ باور کردن این مطلب کـه کومر تقریباً یك اشتباه را دو بار مرتکب شده، مشکل است.

روایت‌قابل‌قبول‌تراین‌است که‌کومر درسال۱۸۴۵ معی‌می‌کرد یك‌نظریهٔ رضایت‌بخش به‌وسیلهٔ ایجاد اعداد مختلط ایده‌آل بیابد(نامهٔ سابق‌الذکر به‌لیوویل‌را نگاه کنید) ودرمارس سال۱۸۴۷ درهمان زمانی‌که در پاریس‌هنوز می‌خواستند ازطریق‌تجزیهٔ یکتا پیش بروند، کومر به‌این عقیده رسیدکه از نظریهٔ ایده‌آلهایش در اثبات قضیهٔ آخرفرما استفاده‌کند. از مکاتبات کومر با کرونکر به‌نظر می‌رسد که کومرکاری بهتراز این نمی‌توانست انجام دهد و هنگامی‌که می‌خواست نتایج خود را به‌آکادمی برلین اعلان کند چنین نوشت:

"قضیهٔ فرما پیش ازآنکه یك مسئلهٔ مهم علمی باشد به‌یك معما نزدیك است."

کومر می‌خواست قضیهٔ آخرفرما را برای یك ردهٔ بزرگ، و احتمالاً نامتناهی از اعـداد اول مانند n ثابت‌کند. معلوم نیست‌که آیا واقعاً این رده از اعداد اول به‌طوری که کومر درآن زمان ادعا کرد، نامتناهی است یا خیر. روشهای وی و اصلاحاتی کـه بعدها روی آنها صورت گرفت، به خصوص توسط وندیور[1]، در دههٔ هفتاد قرن اخیر وگ‌اشتاف[2] را

1. Vandiver 2. Wagstaff

قادر ساخت‌که با کمك یك کامپیوترالکترونیکی قضیهٔ فرما را برای هر $n<125000$ اثبات‌کند و حالت کلی اثبات نشده باقی‌ماند. در خاتمهٔ بحثمان دربارهٔ قضیهٔ آخرفرما به نظرمی‌رسد نقل بخشی از اظهارات کنوث با ارزش باشد. او در کتاب هنر برنامه نویسی کامپیوتری‌اش به‌این مسئله اشاره می‌کند: "ثابت‌کنید وقتی n عددی صحیح و بزرگتراز ۲ باشدمعادلهٔ "$z^n=x^n+y^n$" جواب صحیح مثبت ندارد." در قسمت پاسخ به‌قمریدات به‌این مطلب برمی‌خوریم: " توجه: یکی از افرادی‌کـه پیش‌نویس مقدماتی این‌کتاب را مطالعه کرده بودگزارش دادکه یك اثبات درست یافته‌که حاشیه نسخه‌ای که او در اختیار داشته برای نوشتن اثبات بسیار کوچك بوده است."

ما بیش از این نه روی قضیهٔ آخرفرما مکث خواهیم کرد و نه روی موضوعی که کومر نظریهٔ خـود را برای آن آفریده بود: قوانین تقابل توانی nام کـه او بعدها سعی داشت آنها را اثبات کند و این قوانین در نظرکومر خیلی بیش از نتایج حاصله از قضیهٔ آخرفرما ارزش داشت. نتایجی که شهرت کومر به‌خاطرآنهاست. حال به‌اظهارات او در سال ۱۸۵۰ (دراین مورد) نگاهی بیفکنیم:

"در بررسیهای من پیرامون نظریهٔ اعداد مختلط وکاربرد آن دراثبات قضیهٔ فرما که سه سال قبل درآکادمی علوم صورت گرفت ومن افتخار تشریح آن را دارم، توفیق آن نصیبم شد که قانون تقابل عمومی در مورد باقیماندهٔ نمای بسیار بالا را کشف کنم که با توجه به‌موقعیت کنونی نظریـهٔ اعداد، به‌عنوان مسئلهٔ مرکزی و سرفصل این علم قابل بررسی است."

در اینجا به نکته‌ای نسبتاً فرعی کـه کومر در ۱۸۴۴ آن را بررسی کـرده بود، برمی‌گردیم.

همان‌گونه‌که مشاهده‌کردیم، به‌ازای $n=23$ جواب (۴) و جواب (۷) هردو منفی است. اثباتی‌که برای مطلب ارائه شد مشکل نیست: با استفاده از "تناوبهای گاوس" نشان داده شدکه $p=47$ نمی‌تواند هنج یك عدد به‌شکل (۱) به‌ازای $n=23$ باشد. کومرکه ابتدا فقط به‌حالت اول بودن n توجه داشت، از خـود پرسید: آیا ۲۳ اولین مثال است؟ به‌ازای $n=5, 7, 11, 13, 17, 19$ محاسبات اونشان دادکه حقیقتاً هرعدد اول p که (پیمانهٔ n) $p\equiv 1$ وکوچکتراز ۱۰۰۰ باشد،هنج یك عدد (۱) است. اماچگونه می‌توانست همین مطلب را برای تمام اعداد اول (پیمانهٔ n) $p\equiv 1$ ثابت‌کند؟ کومر ملاحظه نمودکه اثبات یکتایی تجزیه کافی خواهد بود و برای اینکار به‌روشی کـه بعدها وانتزل هم بدان متوسل شد، روآورد: الگوریتم تقسیم اقلیدسی.

از شرح خلاصه‌ای‌که در مورد کار وانتزل ارائه دادیم واضح است که مسئله تا حد تقریب‌کردن عبارت دلخواه

$$u_0+u_1\zeta+\cdots+u_{n-1}\zeta^{n-1}$$

گویا هستند $u_{n-1}, \ldots, u_1, u_0$

با عدد

$$u'_0+\xi u'_1+\cdots+u'_{n-1}\xi^{n-1}$$

که $u'_0, u'_1, \ldots, u'_{n-1}$ صحیح‌اند

ساده می‌شود. بنابراین اختلاف

$$(u_0-u'_0)+(u_1-u'_1)\xi+\cdots+(u_{n-1}-u'_{n-1})\xi^{n-1}$$

هنجی کمتر از ۱ دارد.

کومر این مسئله را برای $n=5$ طی نامه‌ای که در دوم اکتبر سال ۱۸۴۴ به کرونکر نوشته، حل کرده است. اثباتی ساده‌تر را که وی چند روز بعد یافت می‌توان به‌صورت زیر بازسازی کرد.

هنج $f(\xi)=u_0+u_1\xi+u_2\xi^2+u_3\xi^3+u_4\xi^4$ این‌طور تعریف می‌شود:

$$N(f(\xi))=f(\xi)\cdot f(\xi^2)\cdot f(\xi^3)\cdot f(\xi^4)$$

که $\overline{f(\xi)}=f(\xi^4)$ و $\overline{f(\xi^2)}=f(\xi^3)$؛ بنابراین $f(\xi)f(\xi^4)$ و $f(\xi^2)f(\xi^3)$ هر دو اعداد حقیقی ناکمتر از صفر هستند. حال از نامساوی میانگینها (بین میانگینهای حسابی و هندسی) نتیجه می‌شود

$$\sqrt{N(f(\xi))}\leqslant(1/2)(f(\xi)\cdot f(\xi^4)+f(\xi^2)\cdot f(\xi^3))$$

از یك محاسبهٔ ساده نتیجه می‌شود که طرف راست برابراست با

$$(1/4)\cdot\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(u_i-u_j)^2$$

برای حل مسئله به‌ازای $n=5$ کافی است مطالب زیر، که در آنها $v_i=u_i-u'_i$، به‌اثبات برسند

(۸) به‌ازای هر انتخاب از پنج عدد حقیقی u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 می‌توان پنج عدد حقیقی v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 را چنان یافت که

(۹) u_i-v_i عددی صحیح باشد (به‌ازای $i=0, 1, 2, 3, 4$)

(۱۰)
$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2<2$$

نامساوی مفید برای اثبات این است (به‌ازای vی حقیقی دلخواه):

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2=5\cdot\sum_{i=0}^{4}(v_i-v)^2-\Big(\sum_{i=0}^{4}(v_i-v)\Big)^2\leqslant 5\cdot\sum_{i=0}^{4}(v_i-v)^2$$

حال v_i را طوری انتخاب می‌کنیم که (۹) برقرار باشد، و $0\leqslant v_i\leqslant 1$. سپس با $v=1/2$ از نامساوی فوق چنین نتیجه خواهد شد که

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2\leqslant 5\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=6\frac{1}{4}$$

که به‌خوبی نمی‌توان (۱۰) را از این نتیجه گرفت. برای حصول نتیجهٔ بهتر فرض کنیم k و l وجود دارند که $0\leqslant k<l\leqslant 4$ به‌طوری که $|v_k-v_l|\leqslant 1/5$. روشن است که تمام v_iها در فاصله‌ای به طول نابیشتر از ۴/۵ قرار می‌گیرند و اگر فاصله طویلتر (اما کوچکتر از ۱) باشد، ۱ را از بزرگترین v_i کم می‌کنیم؛ این مطلب به‌درستی (۹) لطمه‌ای نمی‌زند.

حال اگر در نظر گیریم که v معدل v_k و v_l باشد خواهیم داشت $|v_k-v|\leqslant 1/10$ و $|v_l-v|\leqslant 1/10$. به‌بقیهٔ v_iها اگر لازم باشد $+1$ یا -1 می‌افزاییم و بنابراین خواهیم داشت $|v_i-v|\leqslant 1/2$. می‌بینیم

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2\leqslant 5\cdot\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$=3/85<4$$

که درستی (۱۰) را نشان می‌دهد. پس به‌ازای $n=5$، اعداد (۱) یك حلقهٔ اقلیدسی تشکیل می‌دهند.

کومر ادعا کرد که می‌تواند از پس حالت $n=7$ هم به روشی مشابه برآید. لذا به‌ازای مقادیر معلوم $u_0, u_1, \ldots$، باید بتوان اعداد $v_0, v_1, \ldots$ را، به‌طوری که u_i-v_i عددی صحیح باشد، یافت ($i=0, 1, \ldots, 6$) و

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 6}(v_i-v_j)^2<6 \qquad (11)$$

ولی استدلالی که برای $n=5$ ارائه کردیم فقط رابطهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 6}(v_i-v_j)^2\leqslant 8\frac{23}{28}$$

هرچند می‌توان قبول کرد که کومر (۱۱) را اثبات کرده است و این وقتی آشکار می‌شود که بررسی کنیم بهترین نتیجه برای اعداد n، و نه ۵ یا ۷، چه‌وقت به‌دست می‌آید[۱۳]:

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(v_i-v_j)^2\leqslant\frac{n^2-1}{12}$$

که حالت تساوی مثلاً برای $u_i=i/n$، $i=0, \ldots, 1, n-1$ لازم است. در حالت خاص می‌توان "<4" در (۱۰) را با "$\leqslant 2$" و "<6" در (۱۱) را با "$\leqslant 4$" عوض

کرد. وقتی $n=۱۱$ به‌دست می‌آید "$۱۰ \leqslant$" و گذشته از اشکالی کوچك در مورد علامت تساوی، این همان چیزی است که برای اثبات درستی نامساوی در حالت $n=۱۱$ و اینکه اعداد (۱) تشکیل حلقهٔ اقلیدسی می‌دهند، موردنیاز است. کومر به‌این مطلب اشاره نکرده است. با روش مزبور حالات n برابر ۱۳، ۱۷، ۱۹ تعیین نشده باقی می‌مانند.

زمانی که کومر نظریهٔ ایده‌آلهای خود را ارائه داد، سؤالاتی که بحث ما به‌آنها اختصاص داشت ازصحنه کنار رفتند. ما دیگربیش ازاین به‌تاریخچهٔ این موضوع نخواهیم پرداخت و صحبت خود را به بحثی مختصر دربارهٔ نتایجی که اکنون شناخته شده هستند، محدود می‌کنیم.

چند سال قبل میزلی و مونتگمری ([۱۶] تمام nهایی را تعیین کردند که به ازای آنها اعداد(۱)، وقتی ζ یك ریشهٔ اولیهٔ $۱=\zeta^n$ باشد،دارای خاصیت تجزیهٔ یکتا به‌عوامل اول هستند. همان‌طورکه در بحث نتایج کوشی دیدیم می‌توانیم استدلال را به حالاتی که (پیمانهٔ ۴) $۲ \equiv n$، محدود کنیم. برای چنین nهایی پاسخ به (۴) مثبت است اگر و تنها اگر n دارای یکی از سی مقدار زیر باشد:

$$۱, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹, ۲۰, ۲۱, \quad (۱۲)$$

$$۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸, ۳۲, ۳۳, ۳۵, ۳۶, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۸, ۶۰, ۸۴$$

قسمت مشکل قضیه قسمت قنها اگر آن است: اثبات اینکه جواب (۴) برای تمام مقادیر دیگر n که (پیمانهٔ ۴) $۲ \not\equiv n$، منفی است. اثبات قسمت اگر با به‌کار بردن روشهایی که توسط مینکوفسکی ارائه شده‌اند، به‌طور عادی انجام می‌پذیرد و موضوع "حلقهٔ اقلیدسی" نقشی در آن ندارد.

معلوم شده است که به‌ازای سیزده مقدار از سی مقدار (۱۲)، اعداد (۱) یك حلقهٔ اقلیدسی نسبت به‌هنج، تشکیل می‌دهند. آنها عبارت‌اند از

$$۱, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۶, ۲۰, ۲۴ \quad (۱۳)$$

هفده مقدار باقیمانده به‌استثنای $n=۳۲$ هرگز بررسی نشده‌اند. در این حالت خاصیت اقلیدسی برقرار نمی‌ماند. اگر ζ یك ریشهٔ‌اولیهٔ $۱=\zeta^{۳۲}$ باشد،آنگاه تقسیم $۱+(۱+\zeta)^۵$ بر $(۱+\zeta)^۶$ به‌طوری که باقیمانده هنجی کوچکتر از $N((۱+\zeta)^۶)=۶۴$ داشته باشد، غیرممکن است.

اعداد (۱۳) دقیقاً تمام nهایی، (پیمانهٔ ۴) $۲ \not\equiv n$، هستند که به‌ازای آنها $\varphi(n) \leqslant ۱۰$. دراینجا $\varphi(n)$ نشان دهندهٔ تعداد اعداد صحیح m $(n \geqslant m \geqslant ۱)$ است که نسبت به n اول‌اند. به‌سادگی می‌توان‌مشاهده کرد که $\varphi(n)$ درست همان تعداد ریشه‌های اولیهٔ $۱=\zeta^n$ است. علاوه‌براین، $\varphi(n)$ کوچکترین d با این خاصیت است که همهٔ اعداد (۱) می‌توانند به‌صورت زیر بیان شوند

$$a_۰+a_۱\zeta+\cdots+a_{d-۱}\zeta^{d-۱} \qquad a_۰, a_۱, \ldots, a_{d-۱} \text{ اعداد صحیح}$$

بنابراین می‌توان $\varphi(n)$ را به‌عنوان نشان دهندهٔ تعداد اعداد (۱) در نظر گرفت و به‌سیزده حالت (۱۳) به‌عنوان آسانترین سیزده حالت نگاه کرد.

اقلیدس اشاره کرد که وقتی $n=۱$، حلقه‌ای اقلیدسی خواهیم داشت. حالت $n=۲$ را در آثار گاوس [۹، ص۱۱۷–۱۱۸] و دیریشله [۶، جلداول، ص۵۴۰–۵۴۱] می‌توان یافت. اینکه حالت $n=۳$ مشابه اینهاست به‌طورکلی معلوم بود ولی قبل از وانتزل [۳، ص ۴۳۰–۴۳۴] ظاهراً هیچ‌کس فکر نمی‌کرد ارزش داشته باشد اثباتی برای آن ارائه دهد. البته در یادداشتهایی ازگاوس که پس از مرگ وی منتشرشد اثباتی برای این حالت می‌توان یافت [۹، ص ۳۹۱–۳۹۳]. اثبات حسالت $n=۵$ اولین بار توسط اوسپنسکی [۱۸] چند سال قبل از اثبات کومر، ارائه شد. آیزنشتاین [۸، جلد ۲، ص ۵۸۵–۵۹۵] ازعهدهٔ اثبات درحالت $n=۸$ برآمد ([۱۲] و [۱۵])، با توجه به‌یکی از پیشنهادات وی به نظر می‌رسد برای حالت $n=۱۲$ هم وی اثباتی ارائه داده باشد ولسی من اثباتی نیافته‌ام که زودتراز ۱۹۷۲ چاپ شده باشد [۱۳] و [۱۵]. اثبات حالات

$$n=۷, ۹, ۱۱, ۱۵, ۲۰$$

در [۱۳] یافت می‌شود. ایالا [۱۷] اثباتی طولانی ــ یك ساعت کار با کامپیوتر یونیواك ۱۱۰۸[1] ــ برای حالت $n=۱۶$ یافت. بالاخره اثبات حالت $n=۲۴$ بااستفاده ازخواص شبکهٔ $\Gamma_۸$ صورت پذیرفته است [۱۴].

مراجع

1. Cajori F., Wantzel, Pierre Laurent *Bull. Amer. Math. Soc.* 24(1918), 339.
2. Cauchy., A. *Ovuevres Completes, ser 1*, tome X, Gauthier Villars Paris (1897).
3. *Comptes Rendusdel'Academides Science* 24 (1847).
4. Diekson., L.E. *History of the theory of numbers*, vol II, ch, XXVI, Chelsea, New York (1952). (reprint).
5. Dickson. L., et al. *Algebraic Numbers*, Chelsea Bremsc, n.d. (reprint).
6. Dirichlet. G., Lejeuine *Werke*, Chelsea, Bronx – (1969). reprint.
7. Edwards. H.M., The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes, *Arch. History Exact Sci* 14 (1975), 219. Postscript, ibid. 17(1977) 381.

1. UNIVAC 1108

8.Eisenstein.G.,*Mathematische Werke* ,Chelsea , New York (1975).

9.Gauss.F.c.*Werke*,Eweiter Band,Gottingen (1876).

10. Jacobi.C.G.J., *Gesammelte Werke* ,Sechster, Band,Chelsea,New York(1969)reprint.

11.Kummer.E.E., collected papers,Springer, Berlin (1975).

12.Lakein.R.B.,Euclid's algorithm in Complex quartic fields, *Acta Anth*,20 (1972),393.

13.Lenstra.H.W.,Euclid's algorithm in Cyclotomic fields,*J.London Math Soc.*(2)10 (1975).

14.Lenstra.H.W.,Quelgues exemples d'anneaun auclidiens.*C.R.Pacad.Sc.Paris*,Sér.A.,286(1978), 683.

15.Masley.J.M.,Euclidean rings of integers in cyclotomic fields. *J.Reine Angew Math.* 272-(1975),45.

16.Masley.J.M.,Montgomery.H.L.,Cyclotomic fields with unique Factorization, *J.Reine Angew Math.* 286/287 (1976),248.

17.Ojala.T.,Euclid's algorithm in the Cyclotomic fields Q(16) *Math,Comp*, 31 (1977),268.

18.Ouspensky.J.,Note sur les numbers entiers dependant d'une racine cinquiemede l'unité , *Math.Ann* 66(1909),109 Cf.*Jbuch Fortschr.Math* 37 (1906),241.

19.Smith.H.J.S.,*Report on the Theory of numbers*, Chelsea,Bronu (1965).(reprint).

20.Wagstaff.S.,Jr.The irregular primes to 125,000. *Math.Comp.* 32.(1978),583.

21.Weil.A., *Lacyclotomie jadi set naguere*, Sem Bourbaki (1973/74). exp.452,Lecture Notes Math 431 Springer,Berlin (1975).

نیکولا بورباکی·

معماری بنای ریاضیات•

ترجمهٔ کامبیز محمودیان، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

۱. یك ریاضی یا چند ریاضی؟ ارائهٔ منظره‌ای از کل رشتهٔ ریاضی آنچنان که هست، به‌خاطر وسعت وتنوع این موضوع، امرخطیری است که درنگاه اول مشکلاتی تقریباً رفع نشدنی در پی دارد. همان‌طور که در دیگرعلوم دیده می‌شود، از اواخر قرن نوزدهم تعداد ریاضیدانان و فعالیتهای ریاضی نیز بسیار زیاد شده است. مقالاتی که دربارهٔ ریاضیات محض درطول یك سال عادی درجهان منتشر می‌شود، بالغ برچندین هزارصفحه است. البته تمام این مقالات از ارزش یکسانی برخوردار نیستند، اما پس از جداسازی ناخالصیها ازمطالب ناب، بازهم این حکم درست است که علم ریاضی هر ساله با انبوهی ازنتایج تازه، غنیتر می‌شود، واینکه ریاضیات دائماً به‌شاخه‌هایی منشعب می‌شود و نظریه‌های جدیدی در آن پدید می آیند که درمعرض اصلاحاتی مبتنی برمبانی جدید، و مقایسه‌وترکیب بایکدیگر، قراردارند. هیچ‌ریاضیدانی‌نمی‌تواند تمام جزئیات این‌تحولات را پی گیری کند، حتی اگر تمام وقتش را به‌این کار اختصاص دهد. بسیاری از ریاضیدانان درگوشه‌ای ازقلمروی ریاضیات منزل می گزینند، بدون آنکه قصد ترك آن را داشته‌باشند.

• Bourbaki N., "the architecture of mathematics," *Amer. Math. Monthly*,57(1950)221.

نیکولا بورباکی. نام مستعاری است که‌گروهی ازریاضیدانان (عمدتاً فرانسوی) درسال۱۹۳۹ انتخاب کردند وتحت این نام، شروع به‌تألیف مجموعهٔ جامعی درریاضیات کردند. اعضای گروه بورباکی متغیرند و درمیان آنها، ریاضیدانان نامداری چون آندره ویل، ژان دیودونه، و هنری کارتان بوده‌اند. خصیصهٔ رهیافت بورباکی به‌ریاضیات، تأکید برمطالعهٔ ساختارهای‌مجرد ریاضی و درعین حال، اجتناب ازتعمیم به‌خاطر نفس تعمیم است.م

* ترجمهٔ مجاز توسط آرنولددرسدن ازفصلی در جریانهای عظیم اندیشهٔ ریاضی باویرایش لولیونه (Cahiers du Sud، ۱۹۴۸).

آنها نه تنها موضوعاتی را که به حوزهٔ خاص خودشان مربوط نیست تقریباً به طور کامل نادیده می‌گیرند، بلکه نمی‌توانند زبان و اصطلاحات همکارانشان را که مشغول کار در گوشه‌ای دور از حوزهٔ کار آنهـا هستند، بفهمند. حتی در میان آنهایی که از گسترده‌ترین آموزشها برخوردار بوده‌انـد، کسی نیست کـه احساس کمبود در نـواحی خـاصی از جهان وسیع ریاضیات نکند. اشخاصی مثل پوانکاره و هیلبرت که مهر نبوغشان را تقریباً بر هر قلمرویی زده‌انـد، حتی در میان افرادی که بزرگترین دستاوردها را داشته‌اند، بسیار استثنایی هستند.

بنابراین، ارائهٔ تصویری دقیق از آنچه خود ریاضیدانـان قـادر نیستند آن را در کلیتش به‌تصور درآورند، به‌شخص ناآشنا، مطرح نیست. معهذا، منطقی است کـه پرسیده شود آیا این تولید انبوه درجهت توسعهٔ ارگانیسم نیرومندی پیش می‌رود که رشد آن باعث انسجام و یگانگی بیشترش می‌شود و یا کثرت وتنوع تولیدات ریاضی، جلوهٔ خارجی تمایل ذاتی ریاضیات به پراکندگی وانشعاب است؟ آیا قلمروی ریاضیات در حال تبدیل به‌یك "برج بابل"[1] نیست که در آن نظامهای خودمختار بیشتر و بیشتر از یکدیگر جدا می‌شوند و این جدایی نه تنها در اهدافشان بلکـه در روشهایشان و حتی در زبانشان رخ می‌دهد؟ به‌عبارت دیگر آیا امروز یك ریاضی وجود دارد یا چندین ریاضی؟

گرچه شاید طرح این سؤال امروزه ضرورت بیشتری داشته باشد تا زمانهای پیش، ولی به‌هیچ وجه مسئلهٔ تازه‌ای نیست و از آغاز پیدایش علم ریاضی مطرح بوده است. در حقیقت، صرفنظر از ریاضیات کاربردی، همواره یك نـوع دوگـانگی بین سرچشمه‌هـای هندسه و حساب وجـود داشته است (البته در شکلهای اولیه‌شان) زیـرا حساب در ابتدا علم مقادیر گسسته بود، حال آنکـه هندسه همواره علم کمیات پیوسته بـوده است. ایـن دوجنبه باعث به‌وجود آمدن دو دیدگاه شده‌اند که از هنگام کشف اعداد گنگ با یکدیگر در تضاد بوده‌انـد. در واقـع، دقیقاً همین کشف بودکـه تلاشهای اولیه برای وحـدت بخشیدن به ریاضیات، یعنی ایـدهٔ حسابی کردن فیثاغورثی‌ها ("همه چیز عدد است") را به‌شکست کشانید.

اگرمی‌خواستیم تحولات اندیشهٔ وحدت ریاضیات را از دورهٔ فیثاغورث تـا عصر حاضردنبال کنیم، بسیار ازمنظورمان دور می‌شدیم. به‌علاوه این کار بیشترمناسب یك‌فیلسوف است تا یك ریاضیدان. زیرا یك مشخصهٔ عمومی تلاشهای مختلف برای جمعبندی ریاضیات در یك کل منسجم ــ چه افلاطون ودکارت را درنظر بگیریم، چه لایب‌نیتس، و چه حسابی‌کردن و یا صورتگرایی منطقی قرن نوزدهم را ــ این است که همهٔ این تلاشها در رابطه با یك دستگاه فلسفی کم و بیش گسترده به‌عمل می‌آمده‌انـد وهمواره بـا نظرهایی از پیش تعیین شده، راجع به روابط ریاضیات با جهان دوگانهٔ دنیای خارج و دنیای ذهن شروع

---

۱. اشاره به‌برجی درشهر بابل است که به‌روایت تورات، اخلاف نوح که همزبان بودند خواستند آن را بسازند تا به‌خدا برسند ولی برسرهمین بلندپروازی، جبان‌شدند که زبان یکدیگر را نمی‌فهمیدند [نقل از دایرةالمعارف فارسی].-م.

شده‌اند. دراین مورد نمی‌توانیم کاری بهتر از این انجام دهیم که خـواننده را بـه‌بررسی تاریخی وانتقادی برونشویك [۹] ارجاع دهیم. کارما متواضعانه‌تر و محدودتر است؛ مـا روابط ریاضیات با واقعیت یا با دیگر انواع مهم تفکر را بررسی نمی‌کنیم؛ بلکـه قصد داریم در قلمروی ریاضیات باقی بمانیم وسعی می‌کنیم برای سؤالی که مطرح کـرده‌ایم، ازطریق تحلیل خود روندهای ریاضی، پاسخی بیابیم.

۲. صورتگرایی منطقی و روش اصل موضوعی. بعـد از شکست کمابیش آشکار دیدگاههای مختلف که در بالا به آنها اشاره کردیم، در ابتدای قرن حاضر به نظرمی‌رسید که کوشش برای درك ریاضیات به‌عنوان علمی که دارای هدف و روش کاملاً مشخصی است، به‌کنار گذارده شده است. درعوض ایـن تمایل وجود داشت کـه به ریاضیات بـه عنوان "مجموعه‌ای از نظامهای مبتنی بر مفاهیمی خـاص و دقیقاً مشخص شده» نگـریسته شود که به‌یکدیگر با "هزار طریق ارتباط" مربوطاند و این امکان هست که روشهای هر یك ازاین نظامها یك یا چند تای دیگر از آنها را پربارتر کند [۱، ص ۴۴۷]. اما امروزه ما معتقدیم که برخلاف ظواهر، تکامل داخلی ریاضیات بـاعث وحـدت بیشتری در میان بخشهای مختلف آن شده است، بـه‌طوری که چیزی شبیه یك هستهٔ مرکزی بوجود آمده است که بیش از هر زمان دیگری یکپارچـه و منسجم است. خصوصیت اساسی این تکامل، بررسی اصولی روابط موجود بین نظریه‌های گوناگون ریاضی بوده است کـه به چیزی انجامیده است که عموماً به‌عنوان "روش اصل موضوعی" شناخته می‌شود.

واژه‌های "صورتگرایی" و "روش صورتگرایانه" نیز اغلب به‌کار می‌روند، اما باید از اشتباهی که ممکن است از به‌کارگیری این لغات بد تعریف بـه‌وجـود آیـد، ازابتدا جلوگیری شود. این واژه‌ها ازطرف مخالفان روش اصل موضوعی نیز مکرراً به کار برده می‌شوند. همه می‌دانند که در یك نگاه سطحی، ریاضیات به صورت همان "دنبالهٔ طویـل استدلالها" که دکارت از آنها صحبت می‌کند جلوه‌گر می‌شود. هرنظریهٔ ریاضی زنجیره‌ای از قضایاست که هر یك ازآنها از قضایای قبلی و برطبق قوانین دستگـاه منطقی بـه‌دست می‌آید. این دستگاه منطقی اساسا همان دستگاهی است کـه از زمـان ارسطو تحت عنوان "منطق صوری" تدوین شده و به‌طور مناسبی با مقاصد خاص ریاضیدانان تطبیق داده شده است. بنابراین، توضیح واضحات بی‌معنایی خواهد بود که بگوییم این "استدلال قیاسی" یك اصل وحدت بخش برای ریاضیات است. یك چنین توضیح سطحی مسلماً نمی‌توانـد پیچیدگی آشکار نظریه‌های ریاضی مختلف را توجیه‌کند. ارزش این توجیه به‌همان‌اندازه است که فیزیك و زیست‌شناسی را براین اساس که هر دو از روش تجربی استفاده می‌کنند، یك علم واحد بدانیم. روش استدلال به‌وسیلهٔ دنباله‌هایی ازقیاسها، چیزی جز یك مکانیسم تبدیل نیست که همان طورکه برای دسته‌ای ازقضیه‌ها قابل اجراست، برای هـردستهٔ دیگر هم قابل اجراست؛ و درنتیجه قادرنیست این قضیه‌ها را توصیف کند. به‌عبارت دیگر، این قیاسها آن شکل خارجی هستند که ریاضیدان به‌افکارش می‌دهد، وسیله‌ای که مطلب را برای

دیگران قابل دستیابی می‌کند[۱]، و به‌طورخلاصه، زبان مناسب برای ریاضیات؛ همین‌وبس؛ و نباید معنای دیگری برای آن درنظر گرفت. وضع قوانین این زبان، معرفی واژه‌هایش‌و مشخص کردن قواعد نحوی آن، همگی واقعاً مفیدند. در واقع، مجموعهٔ این‌کارها یك‌جنبه از روش اصل موضوعی است که می‌توان آن را به‌درستی‌صورتگرایی منطقی نامید. با این حال تأکید می‌کنیم که این تنها یك جنبه از این روش است، و در واقع کمتر از بقیهٔ‌جنبه‌ها جالب است.

آنچه راکه روش اصل موضوعی‌هدف اساسی خود قرار می‌دهد، دقیقاً همان چیزی است که صورتگرایی منطقی نمی‌تواند به‌تنهایی فـراهم کند، یعنی درك عمیق ریـاضیات. همان‌طور که روش تجربی مبتنی براعتقادی پیشین [مقدم برتجربه] به قوانین طبیعی دائمی است، سنگ بنای روش‌اصل موضوعی نیز این اعتقاد است که ریاضیات نه‌تنها مجموعه‌ای ازقیاسها که به‌طور تصادفی رشد یابد، نیست، بلکه مجموعه‌ای ازشگردهای زیرکانـه هم نیست که حاصل ترکیبات شانسی باشند و در آنها پیروزی فقط بـا زیـرکیهای تکنیکی محض به دست آید. آنجا که شخص سطحی‌نگر فقط دویـا چند نظریـهٔ‌کاملاً مجـزا را می‌بیندکه ازطریق دخالت یك ریاضیدان نابغه یکدیگر را «به‌طور غیرمنتظره‌ای تـأیید و تقویت» می‌کنند [۱، ص ۴۴۶]، روش اصل موضوعی به‌ما می‌آموزدکه دنبال دلایل‌عمیق چنین کشفی باشیم: ایده‌های مشترك دراین نظریه‌ها را کـه زیر انبوه جـزئیات مخصوص به هریك ازآنها دفن شده است، بیابیم، آنها را جلوآورده، و به‌طرز صحیحی شناسایی و موشکافی کنیم.

۳. مفهوم ساختار. این‌کار را به‌چه صورتی می‌تـوان انجام داد؟ در اینجاست که روش اصل موضوعی بیشترین نزدیکی را با روش تجربی پیدا می‌کند. این روش همانند روش تجربی، نیروی خود را از دکارتی‌گرایی می‌گیرد «مشکلات را به بخشهایی تقسیم می‌کند تا برآنها بهترغلبه‌کند». در تبیین یك نظریه، روش اصل موضوعی سعی می‌کند تا شاه فنرهای اساسی مباحث را از هم جدا کند، سپس هرکدام را جداگانه در نظر گرفته و به‌شکل مجرد فرمولبندی‌کند ونتایجی را که به‌تنهایی از آن قابل حصول است، بـه‌دست آورد. پس از این، به‌نظریهٔ مورد بررسی باز می‌گردد و اجزای جدا شدهٔ قبلی را مجدداً با هم ترکیب می‌کند و جویای چگونگی تأثیر این اجزای مختلف بریکـدیگر مـی‌شود. حقیقتاً چیز تازه‌ای در این پیش و پس رفتن کلاسیك بین تحلیل و ترکیب، وجود ندارد. اصالت وتازگی این روش کاملاً مربوط است به‌نحوهٔ‌کاربردآن.

برای روشن‌کردن روندی کـه هم اکنون مختصراً بیان‌کردیم، بـه‌وسیلهٔ یك مثال، یکی ازقدیمترین (و درعین حال ساده‌تـرین) نظریـه‌های اصل موضوعـی یعنی نظریـهٔ "گروههای مجرد" را انتخاب می‌کنیم. مثلاً سه عمل زیر را درنظر می‌گیریم: (۱) جمع

۱. در واقع هر ریاضیدانی می‌داندکه اگرچه‌تحقیق هرحله به‌هرحلهٔ درستی استنتاجـات‌کاری نکند وسعی نکند درمورد ایده‌هایی که منجر به‌ساختن این دنبالهٔ استنتاجات و ترجیح آن بردیگر استنتاجها شده‌اند، بصیرتی به‌دست آورد، اثبات را حقیقتاً درك نکرده است.

اعداد حقیقی، مجموع این اعداد (مثبت، منفی، یا صفر) را به‌طور معمولی تعریف می‌کنیم؛ (۲) ضرب اعداد صحیح "به‌پیمانهٔ یك عدد اول p" (که عناصر تحت بررسی اعداد ۰، ۱، ۲، ...، $p-1$ هستند). و توافق می‌کنیم کـه حاصلضرب این اعـداد، بـاقیمانـدهٔ تقسیم حاصلضرب معمولیشان بر p است؛ (۳) "تـرکیب" انتقالها در فضای اقلیدسی سه بعدی؛ "حاصل ترکیب" (یا "حاصلضرب") دو انتقال S و T (با همین ترتیب) را به‌عنوان انتقالی تعریف می‌کنیم که با انجام انتقال T و سپس انتقال S به‌دست می‌آید. در هر یك از این سه نظریه، با روشی که در هر نظریه تعریف می‌کنیم، به هردوعنصر x و y (با همین‌ترتیب) ازمجموعهٔ مورد نظر (در اولی مجموعهٔ اعداد حقیقی، در دومـی مجموعـهٔ اعداد ۰، ۱، ۲، ...، $p-1$، درسومی مجموعهٔ همهٔ انتقالها) عنصر سوم کاملاً معینی نظیر می‌شود. توافق می‌کنیم که در هر سه حالت این عنصرسوم را با $x\tau y$ نمایش دهیم (این عنصرسوم، اگر x و y اعداد حقیقی باشند، مجموع آنها، اگر اعداد صحیح تا بیشتر از $p-1$ بـاشند، حاصلضربشان "به‌پیمانهٔ p" و اگر انتقال باشند، حاصل ترکیبشان خواهد بود). حال اگر خواص گوناگون این "عمل" را در هر یك از سه نظریـه بـررسی کنیم، هماهنگی قـابل ملاحظه‌ای را ملاحظه می‌کنیم. اما در هر یك از این نظریه‌ها، خواص به هم مربوطاند و تجزیه و تحلیل روابط منطقی‌شان ما را به‌انتخاب تعدادکمی از آنهاکه مستقل هستند (یعنی هیچکدام ازآنها نتیجهٔ منطقی بقیه نیستند) هدایت می‌کند. برای مثال[۱] می‌توان سه‌خاصیت زیر را برگزید؛ ما آنها را با استفاده از زبان نمادی خود که برای هر سه نظریه یکسان است، بیان‌می‌کنیم، اما برگرداندن این‌زبان‌به‌زبان خاص‌هریك‌ازاین‌نظریه‌ها کار آسانی‌است:

الف) برای تمامی عناصر x، y، و z داریم

$$x\tau(y\tau z)=(x\tau y)\tau z$$

(خاصیت شرکت‌پذیری عمل $x\tau y$)؛

ب) یك عنصر e وجود دارد، به‌طوری‌که برای هرعنصر x داریم

$$e\tau x=x\tau e=x$$

(e برای جمع اعداد حقیقی عدد صفر، برای ضرب "به‌پیمانهٔ p" عدد یك و برای ترکیب انتقالها، انتقال "همانی" است که همهٔ نقاط فضا را ثابت نگه می‌دارد)؛

ج) متناظر با هرعنصر x، یك عنصر x' موجود است، به‌طوری‌که

$$x\tau x'=x'\tau x=e$$

(x' برای جمع اعداد حقیقی عدد $x-$ است، برای ترکیب انتقالها، "معکوس" انتقال x یعنی انتقالی است که هر نقطه راکه به‌وسیلهٔ x جابجا شده به‌جای اولیه‌اش باز می‌گرداند

۱. در این انتخاب، هیچ چیزی مطلق نیست؛ دستگاههای متعددی از اصول مـوضوع شناخته شده‌اند که با دستگاهی که ما صریحاً ذکر کرده‌ایم "معادل‌اند"؛ یعنی اصول موضوع هریك‌از این دستگاهها نتیجهٔ منطقی اصول موضوع هریك از دستگاههای دیگراست.

و برای ضرب به "پیمانهٔ p" وجود x' از یک استدلال حسابی ساده نتیجه می‌شود.)[1]

پس معلوم می‌شود که خواصی که به‌همین طریق و با استفاده از زبان نمادی مشترک در این سه نظریه قابل بیان هستند، نتایج سه اصل فوق هستند. به‌عنوان مثال نشان می‌دهیم که از

$$x\tau y = x\tau z$$

نتیجه می‌شود

$$y = z$$

می‌توان این کار را در هر یک از نظریه‌ها با استدلالی خاص آن نظریه انجام داد. اما می‌توانیم با روش زیر که در همهٔ حالات قابل استفاده است، پیش برویم. از رابطهٔ

$$x\tau y = x\tau z$$

به‌دست می‌آوریم

$$x'\tau(x\tau y) = x'\tau(x\tau z)$$

(x' معنایی دارد که در بالا تعریف شد)؛ و با استفاده از (الف) داریم

$$(x'\tau x)\tau y = (x'\tau x)\tau z$$

بنا به (ج) این رابطه به‌شکل

$$e\tau y = e\tau z$$

در می‌آید و بالاخره با کاربرد (ب) داریم

$$y = z$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. در این استدلال به‌طبیعت عناصر x و y مورد نظر ابداً کاری نداشتیم: برای ما مطرح نبود که آنها اعداد حقیقی‌اند یا اعداد صحیح نابیشتر از $p-1$ و یا انتقال هستند. تنها شرط مهم این بود که عمل $x\tau y$ روی این عناصر خواص (الف)، (ب)، و (ج) را دارا باشد. حتی اگر صرفاً برای جلوگیری از تکرارهای ملال‌آور باشد، به‌سادگی دیده می‌شود که یکبار و برای همیشه به‌دست آوردن نتایج سه خاصیت (الف)، (ب)، و (ج) کار مناسبی است. از لحاظ سهولت زبانی، مسلماً مطلوب است که اصطلاحات مشترکی را برای این سه مجموعه اتخاذ کنیم. می‌گویند مجموعه‌ای که در آن عمل $x\tau y$ با خواص (الف)، (ب)، و (ج) تعریف شده است، به ساختار گروهی

۱. مشاهده می‌کنیم که با قیمانده‌های اعداد x، x^2، ...، x^{p-1} بر p همگی نمی‌توانند متمایز باشند. با بیان این واقعیت که دو تا از این باقیمانده‌ها مساوی‌اند، به‌آسانی نشان داده می‌شود که یک توان "x" از x وجود دارد که با قیمانده‌ٔ یک [در تقسیم بر p] دارد. حال اگر x' با قیمانده‌ٔ تقسیم x^{m-1} بر p باشد، نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب "به‌پیمانهٔ p" x و x' برابر یک است.

مجهز شده است (یا به‌طور خلاصه یک گروه است)؛ خواص (الف)، (ب)، و (ج) اصول موضوع[1] ساختارهای گروهی نامیده می‌شوند، و به‌دست آوردن نتایج آنها عبارت است از ساختن نظریهٔ اصل موضوعی گروهها.

حال می‌توان روشن کرد که به‌طور کلی از یک ساختار ریاضی چه درکی باید داشت. مشخصهٔ مشترک مفاهیم مختلفی که با این نام کلی معرفی می‌شوند این است که آنها را می‌توان در مورد مجموعه‌هایی از عناصر که ماهیتشان مشخص نشده، به‌کار برد؛ برای تعریف یک ساختار، یک یا چند رابطه که این عناصر در آنها شرکت دارند، مفروض گرفته می‌شود[2] (در حالت گروهها، این رابطه $z = x\tau y$ بین سه عنصر دلخواه بود). سپس فرض می‌شود که رابطه یا روابط داده شده در این روابط خاصی (که صریحاً بیان می‌شوند و اصول موضوع ساختار مورد نظر هستند) صدق می‌کنند.[2] ساختن نظریهٔ اصل موضوعی یک ساختار مفروض،

۱. بدیهی است که اکنون دیگر هیچ ارتباطی بین این تعبیر واژهٔ "اصل موضوع" و معنی قدیمی این "حقیقت بدیهی" وجود ندارد.

۲. در اینجا نظرگاهی طبیعی برمی‌گزینیم و به‌سؤالهای پر دردسر نیم فلسفی درباره‌ٔ ریاضی که از مسئلهٔ "ماهیت" "موجودات" یا "اشیاء" ریاضی برمی‌خیزد کاری نداریم. همین کافی است که بگوییم در نتیجهٔ مطالعات اصل موضوعی قرن نوزدهم و بیستم، به‌تدریج کمتر و کمتر اولیهٔ مطالعه ذهنی این "اشیاء" که در ابتدا به‌عنوان "تجریدهای" ایده‌آل تجربیات حسی که تمام‌شان را حفظ کرده‌اند، در نظر گرفته می‌شوند، جای خود را به یک نوع ایدهٔ وحدت بخشی داد. ایده‌ای که تدریجاً تمام مفاهیم ریاضی را ابتدا به‌مفهوم عدد طبیعی و سپس به مفهوم مجموعه تحویل کرد. مفهوم مجموعه که زمانی پدیده‌ای به‌عنوان مفهومی "اولیه" و "تعریف نشدنی" شناخته می‌شد، مورد دوخطهای بی‌پایان قرار گرفته است، و این به‌علت کلیت زیاد مفهوم مجموعه‌است و نیز تصویر ذهنی بسیار مبهمی که این مفهوم می‌طلبد. این مشکلات رفع نشدند تا اینکه در پرتو تحقیقات اخیر، دوری صورت گرفت که طی آن مفهوم مجموعه (و همراه آن عموم شیء مسائل مبهم) یکی پس از دیگری به "اشیاء" ریاضی (لازم‌میان برداشته شدند. بر اساس این دیدگاه جدید، ساختارهای ریاضی به‌همه‌ای در بیت کلمه یعنی اشیاء ریاضی محسوب می‌شوند. خواننده تبیین کاملتری از این نظرگاه را در مقاله‌های دیودونه [۲] و کارتان [۳] خواهد یافت.

۳. در عمل، این تعریف ساختارهای ریاضیات به اندازهٔ کافی کلی نیست و لازم است حالتی را در نظر گرفته شود که در آن تعریف کنندهٔ ساختار نه‌فقط بین عناصر مجموعهٔ مورد نظر، بلکه بین بخشهایی از این مجموعه و حتی به‌طور کلیتر بین عناصری از مجموعه‌هایی که به‌زبان "سلسله مراتب انواع" از "درجهٔ" بالاتری قرار دارند برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر در این باب به‌کتاب [۴] رجوع کنید.

۴. اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید در مورد گروهها علاوه بر خواص (الف)، (ب)، و (ج) این را هم به‌عنوان اصل موضوع به‌حساب آوریم که رابطهٔ $z = x\tau y$ یک و فقط یک z برای x و مفروض y به‌دست می‌دهد. معمولاً فرض می‌شود که این خاصیت به‌طور ضمنی از نحوهٔ نوشتن رابطه استنباط می‌شود.

عبارت است از استنتاج نتایج منطقی اصول موضوع ساختار، با نادیده گرفتن هـر فرض دیگری دربارهٔ عناصر تحت بررسی (به ویژه، هرفرضی دربارهٔ ماهیت آنها).

۴. انواع بزرگ ساختارها. روابطی که نقطهٔ شروع تعریف یك ساختار را تشکیل می‌دهند، می‌توانند دارای مشخصات بسیارمتفاوتی باشند. رابطه‌ای که درساختار گروه مطرح است، چیزی است که "قانون ترکیب" نامیده می‌شود، یعنی رابطه‌ای بین سه عنصر که عنصر سوم را به‌گونه‌ای یکتا به‌عنوان تابعی از دوعنصر اول به‌دست می‌دهد. هنگامی که روابط تعریف‌کنندهٔ یك ساختار "قوانین ترکیب" هستند، ساختار مربوطه یك ساختار جبری نامیده‌می‌شود. (مثلاً ساختار یك میدان با دوقانون ترکیب، همراه بـا اصول مـوضوع مناسب، تعریف می‌شود: جمع وضرب اعداد حقیقی ساختار یك میدان را روی مجموعهٔ این اعداد تعریف می‌کنند.)

نوع مهم دیگری ازساختارها آنهایی هستند که با یك رابطهٔ ترتیب تعریف‌می‌شوند. این نوع ساختار، رابطه‌ای است بین دوعنصر x و y که اغلب به‌شکل "x نابیشتر از y است" بیان می‌شود وما عموماً آن را با xRy نمایش‌می‌دهیم. دراینجا ابداً فرض‌نمی‌شود که این رابطه یکی از دو عنصر x و y را به‌طور یکتا به عنوان تابعی از دیگری مشخص می‌کند. اصول موضوعی که این رابطه ازآنها پیروی می‌کند اینها هستند: (الف) برای هر x داریم xRx ، (ب) ازروابط xRy و yRx نتیجه می‌شود $y=x$، (ج) روابط xRy و yRz نتیجه می‌دهند xRz. مثالی ازمجموعه‌ای که چنین ساختاری دارد، مجموعهٔ اعداد صحیح (یا حقیقی) است، وقتی که نماد $\leq$ جایگزین نماد R شده باشد. اما باید ملاحظه شودکه ما خاصیت زیررا، که به‌نظرمی‌رسد ازمفهوم متداول "ترتیب" جدا ناشدنی باشد، در اصول موضوع نگنجانیده‌ایم: «برای هر زوج عنصر xوy، یا xRy و یا yRx برقرار است.» به‌عبارت‌دیگر، حالتی که x و y غیرقابل مقایسه‌اند، مستثنی نشده است. این امردر نگاه اول ممکن است عجیب به‌نظرآید، اما به راحتی می‌توان مثالهـایی ازساختارهـای ترتیبی بسیارمهمی آوردکه درآنها این پدیده رخ می‌دهد. مثلاً وقتی X وY بخشهایی از یك مجموعه باشند و رابطهٔ XRY به‌معنی "X مشمول Y است"، باشد، چنین اتفاقی‌می‌افتد و نیز وقتی‌که x و y اعداد صحیح مثبت بـاشند و xRy بـه معنی "x، y را می‌شمارد" باشد، وهمچنین اگر f و g توابع با مقادیر حقیقی، تعریف شده روی فاصلهٔ $a\leq x\leq b$ باشند و fRy به‌معنی "برای هر x، $f(x)\leq g(x)$" باشد، با چنین حالتی سروکارداریم. این مثالها همچنین نشان‌دهندهٔ تنوع قلمروهایی هستند که ساختارهای ترتیبی‌درآنها ظاهر می‌شوند وعلت توجه به‌مطالعهٔ آنها را روشن می‌سازند.

می‌خواهیم چندکلمه‌ای هم راجع بـه‌یك دستهٔ بـزرگ سوم ازساختارهـا، یعنی ساختارهای توپولوژیك (یا توپولوژیها) صحبت‌کنیم. این ساختارها، فرمولبندی ریاضی مجردی ازمفاهیم شهودی همسایگی، حد وپیوستگی، که تصور مـا از فضا راهنمای مـا به سمت آنها بوده است، بـه‌دست می‌دهند. میزان تجریـد لازم برای فرمـولبندی اصول موضوع این قبیل ساختارها قطعاً بیشترازموارد مثالهای قبلی است. برطبق‌اقتضای این‌مقاله خوانندهٔ علاقه‌مند را به رساله‌های مخصوص ارجاع می‌دهیم. مثلاً به [۵] مراجعه کنید.

۵. یکسان سازی روش ریاضی. احتمالاً توضیحاتی که تا اینجا داده‌ایم، بـرای اینکه خواننده تصوری نسبتاً دقیق از روش اصل مـوضوعی بـه‌دست آوردکافی است. از مطالب گفته شده باید روشن شده باشدکه برجسته‌ترین خصوصیت این روش این است که باعث صرفه‌جویی زیادی درفکرکردن می‌شود. "ساختارها" ابزارهایی برای ریـاضیدان هستند؛ به‌محض اینکه اومیان عناصر تحت مطالعه‌اش روابطی را تشخیص دهدکه دراصول موضوعی ازیك نوع شناخته شده صدق می‌کنند، بلافاصله تمامی زرادخانهٔ قضایای کلی که متعلق به‌آن نوع ساختارهاست، دراختیار اوست. ازسوی دیگر، سابقاً اومجبور بود برای خودش وسایل کار روی مسئله‌اش را بسازد وتوان این وسایل بستگی بـه‌استعداد شخصی داشت وغالباً مملو از فرضهای محدودکنندهٔ ناشی از ویژگیهای مسئلـهٔ مورد مطالعه بود. می‌توان گفت روش اصل موضوعی چیزی جز "روش تیلور" برای ریاضیات نیست.

البته، این قیاس خوبی نیست؛ ریاضیدان نه مثل یك ماشین کار می‌کند و نه مثل یك کارگر روی تسمهٔ متحرك. مانمی‌توانیم بیش‌ازحد برآن نقش‌اساسی تأکیدکنیم که شهودی خاص[1] در تحقیقات او بازی می‌کند، شهودی که یك شهود عام نیست، بلکه نوعی غیب‌گـویی مستقیم (پیش‌از همهٔ استدلالات) دربارهٔ رفتاری است‌کـه ظاهراً او حق دارد از اشیاء ریاضی انتظار داشته باشد زیرا آشنایی دیرینه‌اش با آن اشیاء، آنها را بـه‌اندازهٔ موجودات دنیای واقعی برایش ملموس کرده است. امروزه هر ساختاری زبان خویش را با خود همراه دارد و نیز حامـل ایده‌های شهودی خاصی است که از نظریاتی استخراج می‌شود که ساختار مورد نظر ازآن نظریه‌ها و با استفاده از تحلیل اصل موضوعی به‌دست آمده است، و برای شخص محققی کـه ناگهان این ساختار را در پدیدهٔ مورد مطالعه‌اش کشف می‌کند، این کشف مانند یك تغییر ناگهانی است که با یك ضربه در جریان شهودی تفکر او پیش می‌آید واین جریان را درجهتی نامنتظره هدایت می‌کند و دورنمای ریاضیی راکه ریاضیدان به‌طرفش درحرکت‌است، با نوری تازه روشن می‌سازد. برای اینکه مثالی قدیمی بیاوریم، پیشرفتی را درنظر می‌گیریم که در ابتدای قرن نوزدهم با نمایش هندسی اعـداد مـوهومی حاصل شد. ایـن پیشرفت از دیـدگاه ما، عبارت است از کشف یك ساختار مشهور توپولوژیك، که همان توپولوژی صفحهٔ اقلیدسی است، درمجموعهٔ اعداد مختلط، بـا تمام امکانات کاربردی کـه دارد. ایـن موضوع در دستان گـاوس، آبل، کـوشی، و ریمان درکمتر از یك قرن زندگی تـازه‌ای به آنالیز بخشید. در پنجاه سال اخیر چنین موردی مکرراً پیش‌آمده‌است. فضاهای هیلبرت و به‌طورکلیتر: فضاهای تابعی، ساختارهایی توپولوژیك درمجموعه‌هایی که عناصرشان دیگر نقطه نیستند بلکه تابع هستند برقرار مـی‌کنند. از این عجیبتر، در نظریهٔ اعداد p-آدیك هنسل پیش آمده کـه در آن، توپولوژی ناحیه‌ای را مورد تهاجم قرارمی‌دهدکه قبلاً قلمرو بی چون و چرای گسستگی و ناپیوستگی بـود، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح را؛ اندازهٔ هار[2] که دامنهٔ کاربـرد مفهوم

---

۱. مانند همهٔ شهودها، این نیز غالباً به‌خطا می‌رود.

2. Haar

انتگرال را بسیار گسترش داد، و تحلیل بسیار عمیق خواص گسسته‌های پیوسته را ممکن ساخت. هاسدورف اینها نمونه‌های واضحی از پیشرفت ریاضی و ارتباط خلقی هستند که در آنها جزءهای از بلوغ باعث اشد وجود ساختاری در یک نظریه آشکار شود که پیش از این بدون تأمل بر مفهوم نقشی در آن نظریه داشته باشد، و به این طریق در آن نظریه صحت گسترده‌تری پدید آمده است.

همهٔ اینها دلالت بر آن دارند که امروزه ریاضیات کمتر از همیشه به صورت یک بازی مکانیکی صرف با فرمولهای متفرداست و بیشتر از همیشه شهود و بصیرت خلاق در تمام جنبه‌های آن چکمه‌ها می‌دارد. اما از این پس، ریاضیات از ابزارهایی قوی‌تر از هر وقت توسط نظر به انواع بزرگ ساختارها فراهم شده است. در یک نگاه، ریاضیات علوم‌های وسیعی را در بر می‌گیرد که اکنون به وسیلهٔ روش اصل موضوعی متحد شده‌اند و فی‌المثل روشنفکرانه آشفته به نظر می‌رسند.

۶. یک بررسی کلی، حال بیایید در پرتو دیدگاه اصل موضوعی نظری به کل جهان ریاضی بیفکنیم. روشن است که دیگر از مرتب ساده‌ی نظریه‌های ریاضی به طریق قبلی خبری نیست. اگر این مرتب ساده‌ها - درست مانند اولیای پرستشهای اساطیری انواع حیوانات، محدود به این بود که نظریه‌هایی را که بیشترین شباهت خانوادگی را با یکدیگر دارند، در کنار هم بگذارند. [حال]، به جای اینکه با شاخه‌های مجزایی مانند نظریهٔ آنالیز، نظریهٔ اعداد و هندسه روبرو باشیم که موزه‌های واضحی داشته باشند، به عنوان مثال خواهیم دید که نظریهٔ اعداد اول همسایهٔ نظریهٔ ایده‌آلهای جبری است، یا اندیشهٔ اقلیدسی در مورد نظریهٔ معادلات انگرالی واقع است. اصل سازمان بخش در ریاضیات، مفهوم سلسله مراتب ساختارهاست که از ساده به پیچیده و از عام به خاص می‌روند.

در مرکز جهان ریاضی انواع بزرگ ساختارها یافت می‌شوند، که اصلیترین آنها را در بالا ذکر کردیم. آنها را می‌توان ساختارهای مادر نامید. در هر یک از این انواع نیز اختلاف و گوناگونی قابل ملاحظه‌ای وجود دارد. در هر نوع مورد بررسی، باید بین کلیترین ساختار با کمترین تعداد اصل موضوع، و ساختاری که شامل تعدادی اصول موضوع اضافی است که از هر کدامشان انواعی از نتایج تازه حاصل می‌شود، فرق گذاشت. مثلاً نظریهٔ گروهها علاوه بر نتایج کلی که برای همهٔ گروهها معتبرند و تنها به اصول موضوعی که در بالا بیان شد بستگی دارند، در بردارندهٔ نظریه‌های خاصی است مانند نظریهٔ خاص گروههای متناهی (که با افزودن اصل موضوع متناهی بودن تعداد عناصر گروه به دست می‌آید) و نظریهٔ خاص گروههای آبلی (که در آنها برای هر x و y، $xy = yx$) و نظریهٔ گروههای آبلی متناهی (که در آنها فرض می‌شود هر دو اصل موضوع برقرارند). همین طور در نظریهٔ مجموعه‌های مرتب به طور خاص به آن مجموعه‌هایی (مثل اعداد صحیح یا اعداد حقیقی) توجه می‌شود که هر دو عنصر آنها قابل مقایسه‌اند و این مجموعه‌ها تماماً مرتب نامیده می‌شوند. در بین اینها نیز بیشتر توجه معطوف به مجموعه‌هایی است که خوشترتیب خوانده می‌شوند (در آنها همانند مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر از صفر، هر زیرمجموعه یک "کوچکترین عضو" دارد). درجه‌بندی مشابهی بین ساختارهای توپولوژیک

وجود دارد. [ریاضیدان] پیشرفت [ریاضی] را [نیز] همچون تسخیر قلعه‌ها [یکی پس از دیگری] می‌بیند. در اینجا نیز، وان ایسلن هستهٔ مستحکمی از ساختارهایی را که هسدورف می‌شناسد، که مرز آن آنها را ساختارهای چند گانهٔ نامید. آنها به طور همزمان آمیزه‌ای از دو یا چند ساختار مادر را در بر دارند و این به همان صورت که این ساختارها جزء یکدیگر قرار گرفته باشند (گسسته در آن صورت هیچ نوع جدیدی حاصل نخواهد شد) بلکه به این صورت که ساختارهای مادر بدون رابطه یک با چند اصل موضوع که از اصلی بین آنها برقرار می‌شوند، به طور اگر گاهی با هم ترکیب شده‌اند، مثلاً جبر توپولوژیک وجود دارد. این رشته بررسی ساختارهایی است که در آنها یک یا چند قانون ترکیب و یک توپولوژی به طور همزمان حضور دارند و شرط مرتبط کننده آنها با هم، این است که عملهای جبری (برای توپولوژی تحت بررسی) توابع پیوسته‌ای از متغیرهایی باشند که روی آنها عمل می‌شود. توپولوژی جبری نیز اهمیت گسترده‌ای دارد که در آن مجموعه‌هایی از نقاط در فضاهایی که خواص توپولوژیک معرفی شده‌اند (مینیفلدها، سیمپلکسها، و غیره) خود به عنوان اعضایی در نظر گرفته می‌شوند که روی ترکیب روی آنها عمل می‌کنند. ترکیب ساختارهای توپولوژی و ساختارهای جبری نیز نتایج پرثمری داده که از یک سو به نظریهٔ تقسیم‌پذیری و نظریهٔ ایده‌آلها و از سوی دیگر به انتگرالگیری و "نظریهٔ طیفی" عملگرها که توپولوژی نیز به آن ملحق می‌شود، می‌انجامند.

جلوتر که می‌رویم، نهایتاً به نظریه‌هایی می‌رسیم که به دو سنتی که در ساختارهای کلی کاملاً تمامین، شخصیت معینتری پیدا می‌کنند. در این نقطه ما سه نظریه‌های ریاضیات کلاسیک، آنالیز توابع یک متغیر حقیقی یا مختلط، هندسهٔ دو- و سه-بعدی اقلیدسی، و نظریهٔ اعداد را می‌خوریم. اما اینها، دیگر آن خودمختاری سابق را ندارند. آنها به محل تقاطع چندین ساختار ریاضی کلیتر که بر هم تأثیر می‌گذارند، بدل شده‌اند.

برای اینکه تصویر درستی از اوضاع در دست داشته باشیم، باید بلافاصله به این طرح اجمالی یک قیدره را بیافزاییم که باید این طرح را تنها به عنوان یک تقریب نخستین دقیق از وضعیت واقعی ریاضیات، آن گونه که هست، در نظر گرفت. این طرحی است شماگونه، ایده‌آلی و همچنین منجمد و ایستا.

شماگونه است زیرا در وندهای واقعی، وقایع به آن روش ساده و منظمی که در بالا وصف شد، رخ نمی‌دهند. علاوه بر سایر اتفاقات، خرکتهای معکوس غیر منتظره نیز رخ می‌دهند که در آنها یک نظریهٔ خاص، مانند نظریهٔ اعداد حقیقی، کمک اساسی به ساختن یک نظریهٔ کلی مانند توپولوژی یا انتگرالگیری می‌کند.

ایده‌آلی است زیرا در واقع از حقیقت است که در تعلیمی قلمروهای ریاضی، نقش هر یک از ساختارهای بزرگ به روشنی مشخص شده باشد. در نظریه‌های خاصی (مثلاً در نظریهٔ اعداد) نتایج متعدد منفردی باقی هستند که تا کنون نتوانسته‌اند آنها را رده‌بندی کنند و یا به طور قانع کننده‌ای با ساختارهای شناخته شده مربوط سازند.

و بالاخره منجمد و ایستاست زیرا هیچ چیز بیش از این با روش اصل موضوعی

مغایر نیست که تصور ایستایی از علم [ریاضی] داشته باشیم. ما نمی‌خواهیم به‌خواننده القا کنیم که مدعی ترسیم وضعیت قطعی این علم هستیم. ساختارها نه ازلحاظ تعداد ونه از لحاظ محتوای اساسی، تغییرناپذیر نیستند. کاملاً محتمل است که پیشرفت آتی ریاضیات، تعداد ساختارهای اساسی را افزایش دهد وسودمندی اصول موضوع جدید یا ترکیبات جدیدی از اصول موضوع را آشکار سازد. با توجه به پیشرفت حاصل از ساختارهایی که فعلاً شناخته‌شده هستند، می‌توانیم انتظار داشته‌باشیم که با ابداع ساختارها[ی جدید] پیشرفتهای مهمی به‌دست آید. ازسوی دیگر، اینها به‌هیچ‌وجه عمارتهای پایان‌یافته‌ای نیستند. درواقع بسیار عجیب می‌بود اگر تمامی عصارهٔ مطالب تاکنون از اصول موضوع استخراج شده بودند. پس با توجه به‌این کیفیات اساسی، بهتر می‌توانیم از حیات درونی ریاضیات، از وحدت و در عین‌حال کثرت آن، آگاهی یابیم. [ریاضیات] مانند شهر بزرگی است که محله‌های دور ازمرکز و حومهٔ آن دائماً به‌شکلی نامنظم و بیقواره به‌سوی نواحی اطراف شهر رشد می‌کنند، در حالی که مرکز شهر گهگاه نوسازی می‌شود، هربار برطبق نقشه‌ای روشنتر و نظمی باشکوهتر. قسمتهای قدیمی با کوچه‌های پر پیچ و خمش درهم کوبیده می‌شوند و خیابانهایی تازه، مستقیمتر، بهتر و جادارتر به سوی پیرامون شهر کشیده می‌شود.

۷. بازگشت به‌گذشته و نتیجه‌گیری. دیدگاهی که سعی کردیم درپاراگرافهای بالا آن را عرضه کنیم، به‌طور ناگهانی شکل نگرفته است، بلکه مرحله‌ای از یک سیر تکاملی است که در بیش از نیم قرن درحال پیشرفت بوده است و ازمخالفتهای جدی عده‌ای از فیلسوفان و ریاضیدانان نیز برکنار نبوده است. بسیاری از این ریاضیدانان در مدتی طولانی، نمی‌خواستند در روش اصل‌موضوعی چیزی ببینند جز یک‌موشکافی منطقی بیهوده، که نمی‌تواند هیچ‌نظریه‌ای را ایجاد کند. این نظر انتقادی را می‌توان با حادثه‌ای صرفاً تاریخی توجیه کرد. اولین بررسی اصل‌موضوعی و افرادی که بزرگترین جنبشها را دراین زمینه باعث شدند (کارهای مربوط به‌حساب توسط ددکیند و پئانو، و مربوط به هندسهٔ اقلیدسی توسط هیلبرت) با نظریه‌هایی "تک ظرفیتی" سروکار داشتند، یعنی نظریه‌هایی که تماماً با دستگاه کامل اصول موضوعشان مشخص می‌شوند. به همین دلیل آنها را نمی‌توان برای هیچ‌نظریهٔ دیگری بجزهمانی که از آن استخراج شده‌اند، به‌کار برد (درست برخلاف آنچه مثلاً در مورد نظریهٔ گروهها دیدیم). اگر این امر در مورد همهٔ ساختارهای دیگر نیز صادق بود، اتهام بی‌ثمر بودن، که علیه روش اصل موضوعی عنوان می‌شد، کاملاً بجا بود.[۱] اما توسعهٔ بیشتر این روش، توان خود را آشکار ساخته است و مخالفتهایی را که

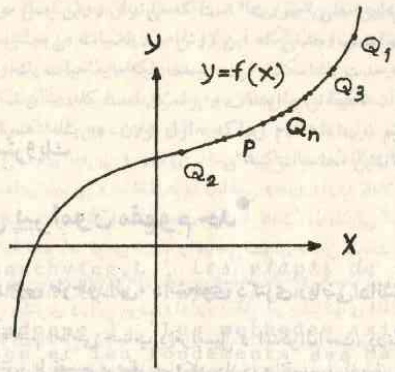
۱. تعداد بسیار زیادی‌ساختار خوش‌آسا، مخصوصاً درابتدای پیدایش روش اصل‌موضوعی، ساخته شدند که کاملاً بدون‌کاربرد بودند و تنها ارزششان این بودکه نقش هریک از اصول موضوع را، با بررسی اینکه در صورت حذف یا تغییر آن چه اتفاقی می‌افتد، نشان دهند. طبعاً افراد وسوسه می‌شدند که چنین نتیجه بگیرند که اینها تنها نتایجی هستند که می‌توان از روش اصل موضوعی انتظار داشت.

هنوز دراینجا و آنجا با آن می‌شود، تنها این طور می‌توان توجیه کرد که برای ذهن‌انسان مشکل است که بپذیرد درکار با مسئله‌ای واقعی، نوعی از شهود که مستقیماً ازعناصرمفروض به‌دست نمی‌آید (و غالباً در مرحلهٔ بالاتر و مشکلتری از تجرید، قابل حصول است) ممکن است به‌همان اندازه ثمربخش باشد.

تا آنجاکه به‌ایرادات فلاسفه مربوط می‌شود، بایدگفت که این ایرادات با قلمرویی ارتباط دارندکه ما به‌علت عدم صلاحیت‌کافی باید وارد آن نشویم؛ در اینجا مسئلهٔ بزرگ روابط بین دنیای تجربی و دنیای‌ریاضی مطرح است.[۱] ظاهراً این امرکه ارتباطی نزدیک بین پدیده‌های تجربی و ساختارهای ریاضی وجود دارد، کاملاً باکشفیات اخیر درفیزیک، به شکلی غیرمنتظره، تأیید شده است. اما ما کاملاً از دلایلی که در پس این واقعیت نهفته است بی‌اطلاعیم (با فرض اینکه واقعاً می‌توان به‌این کلمات معنایی نسبت داد) و شاید همیشه هم نسبت به‌آنها جاهل بمانیم. مسلماً نکته‌ای هست که امکان دارد در آینده فلاسفه را به‌تأمل بیشتری دراین مورد وادارد: قبل از پیشرفتهای انقلابی فیزیک جدید، نیروی زیادی صرف تلاش دراستخراج ریاضیات ازحقایق تجربی می‌شد، به‌ویژه ازشهود فضایی بیواسطه. اما ازسویی فیزیک‌کوانتومی نشان داده است که این شهود ماکروسکوپی‌ازجهان واقع، پدیده‌های میکروسکوپی را هم که سرشتی کاملاً متفاوت دارند، شامل می‌شود. پدیده‌های اخیر مربوط به‌قلمروهایی از ریاضیات می‌شوند که یقیناً مطالعهٔ آنها به‌خاطر کاربردشان در علوم تجربی نبوده است. و از سوی دیگر روش اصل موضوعی نشان داده است، "حقایقی" که امید می‌رفت ریاضیات ازآنها به‌دست آید، جنبه‌های‌خاصی ازمفاهیمی عام بودند که اهمیتشان محدود به‌این قلمروها نمی‌شد. در نتیجه، پس از همهٔ این‌سخنها و کارها که گفته شد و انجام شد، این‌گونه به‌نظر می‌آید که این ارتباط نزدیک، که به‌تحسین هماهنگی ضروری داخلی آن دعوت می‌شدیم، چیزی جز تماس تصادفی دونظام نبوده است که ارتباط واقعی‌شان بسیار پوشیده‌تر از آن است که بتوان آن را پیشاپیش فرض کرد.

بنابراین، ازنظرگاه اصل موضوعی، ریاضیات مانند انباری ازفرمهای مجرد است— یعنی ساختارهای ریاضی؛ و بسیار اتفاق می‌افتد — بی‌آنکه بدانیم چرا — که جنبه‌های خاصی از واقعیت تجربی خود را با آنها تطبیق می‌کنند، چنان‌که گویی ازقبل با یکدیگر درتطابق بوده‌اند. البته نمی‌توان انکارکرد که اغلب این صورتها دراصل محتوای شهودی کاملاً مشخصی داشته‌اند، اما دقیقاً کنارگذاشتن عمدی همین محتواست که امکان داده است به‌این صورتها تمام توانی که ازآنها می‌بینیم، داده شود و برای تعبیرات جدید و افزایش

۱. دراینجا ما ایراداتی راکه درمورد به‌کار بستن قواعد منطق صوری دراستدلالات نظریه‌های اصل موضوعی مطرح‌شده، درنظر نمی‌گیریم. این ایرادات مربوط به‌اشکالات منطقی است که درنظریهٔ مجموعه‌ها با آن مواجه می‌شویم. کافی است اشاره کنیم که می‌توان براین مشکلات به‌طریقی که کمترین تردیدی دردرستی استدلالات باقی نگذارد، غلبه کرد؛ [۲] و [۳] مراجع ارزشمندی برای این منظورند.



شکل ۱

PQ_n، . . . به‌خطی که مماس در نقطهٔ P نامیده می‌شود نزدیک و نزدیکتر می‌گردند. اگر نمودار مربوط به تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه مشتق $f(x)$، شیب خط مماس است. روشهای زیادی برای نمایش مشتق وجود دارد: بعضی از آنها عبارت‌اند از $f'(x)$، dy/dx، و $D_x y$.

اگر (x, y) مختصات P و $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ مختصات Q_n باشند، آنگاه

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

شیب PQ_n است و مشتق $f(x)$ برابر است با

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

منظور این مقاله، بحث در مورد این است که معنای "حد" چیست. به عنوان مثال، فرض کنید $f(x)=x^2$، و $P=(2, 4)$. دراین صورت شیب PQ_n برابر است با

$$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x}$$

$$=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x \qquad (1)$$

بنابراین

$$f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0}(4+\Delta x)=4$$

مسئله در رابطهٔ (۱) پیش می‌آید. به‌شرطی که $\Delta x \neq 0$، دو عبارت باهم برابرند. هرگاه $\Delta x=0$، طرف راست رابطه برابر ۴ است در صورتی که سمت چپ آن $\frac{0}{0}$ است که همان طور که گفتیم فاقد معناست. اما در سطر بعدی Δx را برابر صفر قرار دادیم. عدد سمت راست چه چیزی به ما می‌دهد؟ به نمودار $y=x^2$ نگاه کنید. اگر $Q_n \neq P$، دربارهٔ خط PQ_n و شیب آن می‌توان صحبت کرد، در صورتی که وقتی $Q_n=P$، خطی وجود نخواهد داشت، بنابراین شیبی هم وجود ندارد. با چه مجوزی دربارهٔ شیب خطی که وجود ندارد صحبت می‌کنیم؟ لایب نیتس "مماس را به‌عنوان خطی که دو نقطهٔ بینهایت نزدیک خم را به یکدیگر متصل می‌سازد، تعریف کرد"، اما "نقاط بینهایت نزدیک" چه نقاطی هستند؟ [۲، ص ۲۱۵]

نیوتن، یکی از واضعان حساب دیفرانسیل وانتگرال، ازاین مشکل آگاه بود، وسعی کرد به‌انتقاداتی که‌از روش فلکسیون[1]های اومی‌شد پاسخ گوید: ("فلکسیون" سرعت است. سرعت مشتق مسافت نسبت به‌زمان‌است؛ بنابراین خواننده می‌تواند "فلکسیون" را به‌عنوان مشتق در نظر بگیرد. "کمیتهای میرا" عبارت‌اند از کمیتهایی که آنها را Δx و Δy نامیده‌ام. اگر t، (علامت نیوتن برای زمان) راکه اغلب یك متغیر مستقل بود، به‌کار بریم Δt نیز می‌تواند به‌عنوان یك "کمیت میرا" در نظر گرفته شود.)

> شاید اعتراض شود که کمیتهای میرا هیچ نسبت غایی ندارند، زیرا نسبت آنها، قبل از اینکه کمیتها صفر شده باشند نسبت غایی نیست، و هنگامی که صفر شوند، هیچ است. . . و به همین طریق، منظور از نسبت غایی، نسبت کمیتها قبل یا بعد از صفر شدن آنها نیست بلکه نسبتی است که کمیتها همراه با آن صفر می‌شوند. [۱۶، ص۲۹۹-۳۰۰]

در سال ۱۷۳۴ بیشاپ برکلی بداین مسئله چنین جواب می‌دهد:

> و این فلکسیونها چه هستند؟ سرعتهای نموهای میرا. و این نموهای میرا چه هستند؟ آنها نه‌کمیتهای متناهی‌اند، و نه‌کمیتهای بینهایت‌کوچك، و بعهذا این طورهم نیست که چیزی نباشند. آیا نمی‌توانیم آنها را ارواح کمیتهای مرده بنامیم؟ [۱، جلد III. ص ۴۴] یا [۱۶، ص ۳۳۸]

بیشاپ برکلی روی سؤال "آیا $\Delta x=0$ یا خیر" تأکید کرد. (دراین نقل قولها آنچه را که من Δx نامیده‌ام، او با ۰ نشان داده است.)

> تاکنون فرض کرده‌ام که x جریان دارد، و دارای یك نمو حقیقی‌است؛ نتیجتاً، ۰ چیزی هست. تا اینجا براساس این فرض پیش رفته‌ام، فرضی که بدون آن نمی‌توانسته‌ام حتی یك گام پیش روم. حال می‌خواهم‌این فرض‌را رها کرده وبه‌جایش فرض جدیدی متناقض با اولی بگذارم؛ فرض می‌کنم که x نموی ندارد یا اینکه ۰ هیچ است. این فرض دوم

1. fluxion

اولی را نقض می‌کند و بالا آن ناسازگار است با هرچه که مستلزم آن باشد نیز ناسازگار است... به‌نظر می‌رسد که این ناسازگارترین راه استدلال است، و این چنین عملی در ادبیت مجاز نخواهد بود. [۹، جلد III، ص ۲۶-۲۷]

جمع‌بندی کوتاهی از تلاشهای نیوتن و لایب‌نیتس برای پاسخگویی به این انتقادات در صفحه ۲۶۸ اثر کلاین [۱۱] آمده است.

برای رادیکالهای جوان (و نه چندان جوان) امروز باید جالب باشد که کارل مارکس درباره این مسئله اندیشناک بود. استروبک گزارش می‌دهد که "مارکس به جنگ مسئله‌ای رفت که تعدادی از تیزترین ذهنهای گذشته را به خود جلب کرده بود و به اساس فرایند دیالکتیکی، یعنی به ماهیت تغییر، سروکار داشت." [۱۵، ص ۱۸۵]

در طول قرن هجدهم، ریاضیدانان تلاش کردند که حساب دیفرانسیل و انتگرال را روی بنیان منطقی محکمی قرار دهند. گزارشهای زیادی از این جریان نظیر گزارش بوبر [۲، ۳، و ۴] و گزارش کجوری [۵، ۶] در دست است، و قصد این مقاله نگارش آنها نیست. با این حال شاید جالب باشد که بعضی از عبوری را که کجوری [۶، ص ۲۲۹] در باره پرداخت عامهٔ ریاضیدانان آغازقرن نوزدهم از مفهوم حد ذکر کرده، بررسی کنیم. همچنان که مشاهده خواهیم کرد، این سیوم تفاهمها تا قرن بیستم نیز ادامه یافته است.

نخستین عیب، فقدان دقت در مفهوم بینهایت کوچک است. این مطلب بر می‌گردد به اینکه آیا $\Delta x = 0$ یا خیر. با نامیدن Δx یا dx به نام "بینهایت کوچک" می‌توان از پس این مشکل بر آمد و سعی کرد تقسیم بر صفر یا تقسیم بر یک بینهایت کوچک را تعریف کرد. کجوری نقل می‌کند که ویلیامسون در کتابی که در ۱۸۸۴ نوشته، دیفرانسیل dx را به عنوان "کمیتی کوچکتر از هر کمیت مشخص، هر قدر کوچک" تعریف می‌کند.

آمج[1] در ۱۹۰۲ می‌نویسد "هر بینهایت کوچک ε خودش بوسیلهٔ نامساوی زیر تعریف می‌شود

$$|\varepsilon| < |a|$$

به ازای کلیهٔ مقادیر a قطع نظر از اینکه چقدر کوچک باشند." [۸] او برای انجام عملیات روی این بینهایت کوچک، دو نوع بینهایت را از هم تمیز داد: "بینهایت مطلق" که آن را با ∞ نشان می‌داد و "بینهایت متغیر" که آن را با (∞) نشان می‌داد. این ها را به تساویهای زیر می‌رساند

$$\frac{1}{\infty} = 0 \text{ (صفر مطلق)}, \qquad \frac{1}{(\infty)} = \varepsilon \text{ (بینهایت کوچک)}$$

$$\frac{1}{0} = \infty, \qquad \frac{1}{\varepsilon} = (\infty),$$

جادسون[2] در ۱۸۸۱ می‌نویسد

1. Emch 2. Judson

(۷) متغیری را که به‌طور نامتناهی کاهش یابد و به‌دلیل نامتناهی بودنش بتوان آن را از هر مقدار از پیش تعیین شده کمتر کرد، بینهایت کوچک می‌نامیم. از آنجا

○ برای نشان دادن بینهایت کوچک استفاده خواهیم کرد. بنابراین "وقتی $x = \bigcirc$" را بخوانیم "وقتی x به‌طور نامتناهی کاهش می‌یابد".

(۸) گرام یک مقدار ثابت است.

دومین عبارت بیانگر این مطلب است که اگر متغیر یک کسر بدون حد افزایش یابد مقدار کسر به‌طور نامتناهی کاهش می‌یابد، هرچند که مقدار کسر به‌صفر، به‌عنوان یک حد عمل می‌کند، ولی این مقدار بدون حد کاهش می‌یابد، زیرا مقدار کسر هیچ‌گاه با هیچ افزایشی در متغیر صفر نمی‌شود. [۱۰]

فرهنگ ریاضیات که توسط داویز و یک [۷] تهیه شده نیز بین دو نوع صفر تمایز قائل شده است [۱۱، ص ۵۹۲]

بیرامون ۰ مطلق هیچ بحثی نمی‌تواند وجود داشته باشد، کلیهٔ ۰ های مطلق برابرند. اما بقیه ۰ ها چیزی جز کمیتهای بینهایت کوچک یا بینهایت کوچکها نیستند، و این فرض که این ۰ ها با یکدیگر فرق دارند، با این فرض که نسبت دوتا از این گونه صفرها ممکن است مقداری متناهی باشد، هیچ ناسازگاری ندارد.

همین فرهنگ بینهایت کوچک را به صورت "یک کمیت بی‌اندازه کوچک" تعریف می‌کند. [۷، ص ۳۱۲]

اگر احساس شود که دو نوع "صفر" کافی نیستند، همان گونه که جرج ایلی [۱۲] به‌این نتیجه رسید، می‌توان موضوع را با معرفی سه نماد زیر روشنتر کرد:

$$\textcircled{1} \quad a - a = \textcircled{1}$$

معرف هیچ صفر مطلق نیست. یعنی هیچ تعدادی از دفعات وجود ندارد که بتوان صفر را به آن تعداد از ۱۲ کم کرد به‌طوری که مطلقاً چیزی باقی نماند. از آنجایی که یک بینهایت کوچک را می‌توان بینهایت دفعه از a کم کرد به‌طوری که حاصل تفریق صفر باشد، لذا $\textcircled{1}/\textcircled{1} = \infty$، که $\textcircled{1}$ معرف یک بینهایت کوچک است.

$$\frac{12}{\text{صفر}} \text{ یا } \ominus = \textcircled{1}/12$$

که در آن

اگر خواننده از این همه علامت برای بینهایت کوچک و نحوهٔ کاربرد آن سردرگم و گیج شده است، نگران نباشد زیرا نویسنده هم به‌همین مشکل دچار است.

عیب دیگری که در فهرست کجوری آمده، فقدان یك نظریهٔ رضایت‌بخش از اعداد حقیقی است. این امر در کار وایرشتراس و ددکیند و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم نمود پیدا کرد.

درفهرست کجوری این دکترین نیز که "آنچه تا حد درست است در خود حد نیز درست است" آمده است. فرهنگ ریاضیات [۷، ص ۳۳۹] می‌گوید: "در همهٔ این گونه موارد، هر خاصیتی که به ازای جمیع حالتهای اندازهٔ متغیر درست باشد، در حد هم درست است." ارائهٔ مثال ناقض آسان است: فرض کنید یك چند ضلعی منتظم درون یك دایره محاط است و تعداد اضلاع آن افزایش می‌یابد، مساحت همهٔ چند ضلعیها ازمساحت دایره کوچکتر است، در صورتی که حد این مساحتها برابر مساحت دایره است. یك مثال که وضوح کمتری دارد این است: دنباله‌ای از اعداد گویا می‌تواند دارای یك حد غیر گویا باشد. درمورد معنی "هر خاصیتی" باید محتاط بود.

کجوری این سؤال را نیز مورد بحث قرار می‌دهد که آیا عملاً می‌توان به حد رسید یا خیر. درطی دهها سال، ریاضیدانان با شور وحرارت این مسئله را مورد بحث و مباحثه قرار داده‌اند. حتی در سال ۱۹۲۱ مك کوی[1] از دریافتن اینکه فارغ‌التحصیلان دبیرستان معتقدندکه یك متغیر نمی‌تواند به‌حد خود برسد رنج می‌برد:

> این فکرکه متغیر الزاماً باید حد خود را به‌عنوان یك محل مقدس تلقی‌کند و نباید جرأت ورود در خلوت آنرا داشته باشد، ازنظر استدلال ریاضی نه قابل دفاع است و نه موجبی برای آن وجود دارد. نویسنده هنوز با مسئله‌ای درنظریهٔ حد روبرو نشده است که این موضوع که متغیر به حد خود می‌رسد یا نه کوچکترین اهمیتی داشته باشد.[۱۴]

راه حل امروزی مسئله که به‌وسیلهٔ برکلی تبیین شده درمفهوم حد نهفته است. کارل بویر "بیان‌مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال درسطح دانشگاههای جدید" را به‌آگوستن لویی کوشی نسبت می‌دهد [۳، ص ۲۰۰]. در درس آنالیزی که کوشی در سال ۱۸۲۱ در پلی‌تکنیك داده تعریف زیرین برای حد دیده می‌شود: "وقتی مقادیر متوالی نسبت داده شده به‌یك متغیر، به‌طور نامتناهی به‌یك مقدار ثابت نزدیك شوند به‌نحوی‌که فاصلهٔ آنها از این مقدار به‌دلخواه کوچك شود، در این صورت این مقدار ثابت را حد آن مقادیر خواهیم نامید." [۳، ص ۲۰۰؛ ۴، ص ۱۷۲] همچنین [۶، ص ۲۲۹] را ببینید. ولی، به این فرمولبندی می‌توان اعتراضاتی داشت. "مقادیر متوالی" چه هستند؟ "به‌طور نامتناهی نزدیك شدن" چه معنی می‌دهد، "به دلخواه کوچك" یعنی چه؟ به این اعتراضات با تعریف به‌اصطلاح "اپسیلن - دلتا"یی حد پاسخ داده می‌شود. نمونهٔ نوعی چنین تعریفی به صورت زیر است:

"$\lim_{x\to a} f(x)=L$" به‌این معناست که برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، یك $\delta > 0$ وجود دارد

1. Mckelvey

به‌طوری‌که‌هر گاه $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه $0 < |f(x)-L| < \varepsilon$". بویر[۴، ص ۶۰۸] این تعریف را به‌وایرشتراس و هاین (۱۸۷۲) نسبت می‌دهد و علاوه برآن می‌گوید:

> دراین تعریف دقیق و پیروح، هیچ اشاره‌ای به‌موجوداتی‌که جریان دارند و مقادیری با ابعاد بالاتر تولید می‌کنند، هیچ تمسکی به نقاط متحرك یا خطوط، هیچ اشاره‌ای به کمیتهای بینهایت کوچك،دیده نمی‌شود. هیچ‌چیزی جز اعداد حقیقی، عمل‌جمع(و وارون آن، تفریق) و رابطهٔ "کوچکتر از" درآن‌وجود ندارد. زبان‌بدون‌ابهام وعلامت‌گذاری وایرشتراس و هاین، مفهوم تغییرپذیری را ازحساب دیفرانسیل و انتگرال دورکرد. و ضرورت استفادهٔ دائم از بینهایت‌کوچکهای ثابت را منتفی ساخت. "عصر دقت" واقعاً فرا رسیده بود، و روشهای ابتکاری و دیدگاههای شهودی جای‌خودرا به‌دقت‌منطقی دادند.

جنبه‌ای ازتأثیر این‌دقت، تعریفی است که آموختن آن به‌دانشجوی سال اول مشکل است. دانهم جکسون[1] توضیح زیر را برای تعریف حد ارائه می‌دهد، و به‌عنوان مثال مشتق تابع $y=x^2$ درنقطهٔ $x=1$ را به‌کار می‌برد

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

> وقتی x برابر ۱ است این‌معادله دارای‌معنا نیست، زیرا با تقسیم برصفر سروکار دارد، و تقسیم برصفر ازجمله چیزهایی است‌که ریاضیدان وقتی مشغول‌کار ریاضی است، ازآن حرفی نمی‌زند. ولی برای مقادیری از x که متمایز از ۱ بوده، و هر اندازه بخواهید نزدیك ۱ باشد، معادله دارای معنای کاملاً معینی است، و نشان می‌دهدکه وقتی x به ۱ میل‌کند، نسبت مربوط به مقدار ۲ نزدیك و نزدیکتر خواهد شد. به ویژه، اگر حدی برای خطا معین شده باشد، به‌شرطی‌که تفاوت x و ۱ به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، مقدار نسبت با آن حد خطا مطمئناً برابر ۲ خواهد بود. این نسبت تابعی از x است؛ وقتی x به اندازهٔ کافی نزدیك ۱ است، مقادیر متناظر تابع در محدودهٔ عددی مشخصی قرار می‌گیرند. اگر بگوییم این نسبت به‌عدد ۲ به‌عنوان یك حد میل می‌کند، و یا به زبان فنی‌تر حساب دیفرانسیل و انتگرال، بگوییم ۲ مشتق تابع x^2 در نقطهٔ $x=1$ است، چیزی بیشتر ازآنچه قبلاً گفتیم، نگفته‌ایم. [۹، ص ۱۵ و ۱۶]

بخش مهمی از تعریف "اپسیلن-دلتا"یی حد در عبارت "... اگر حدی برای خطا معین شده باشد، به‌شرطی که تفاوت x و ۱ به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، مقدار نسبت با آن حد خطا مطمئناً برابر ۲ خواهد بود" آمده است. در عبارت "حد خطا" معنای فنی حد به‌کار نرفته است. در تعریف "اپسیلن-دلتا"یی حد، "حدی‌که برای خطا داده شده" با اپسیلن (ε) و "تفاوت بین x و ۱" به وسیلهٔ دلتا (δ) مشخص می‌شود. چون ε از پیش داده می‌شود، می‌تواند هر عدد مثبتی باشد (مثلاً، اعداد کوچکی مانند ۰٫۱ یا ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱)

1. Dunham Jackson

و به‌شرطی که یك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که شرط بالا را برآورده سازد، آنگاه حد آن برابر L خواهد بود. وقتی ε داده شده باشد، وجود دلتاست که تعیین می‌کند که حد مربوط L است یا خیر. مهم نیست که در $x = a$ حد اتفاقی می‌افتد. من در تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال به دانشجویان سال اول این مطلب را به این صورت توضیح می‌دهم کید "آیا عددی وجود دارد که وقتی x به ۱ نزدیك و نزدیکتر می‌شود، $(x^2-1)/(x-1)$ به آن عدد نزدیك و نزدیکتر شود؟ اگر چنین است، آن عدد حد این کسر است."

در این مورد که به دانشجوی سال اول حساب دیفرانسیل و انتگرال چقدر از روش "اپسیلن-دلتا" یی حد را باید آموخت اختلاف نظر زیادی میان ریاضیدانان وجود دارد. مك‌دافی[1] این اختلاف را چنین خلاصه می‌کند

به نظر می‌رسد یك مکتب فکری وجود دارد که معتقد است محصل باید تعداد زیادی مسئلهٔ مکانیك وفیزیك را بدون استدلال ظریف و دقت خیلی زیاد حل کند، ظاهراً با این ایده که بعد از کسب تجربهٔ کافی، ضمیر ناخودآگاه دانش‌آموز مسئله را در ذهن او تحلیل و تثبیت می‌کند. این مکتب به‌عنوان "طرز فکر استاندارد مهندسی" شناخته شده است.

مکتب دیگری وجود دارد که تمایل دارد کاربردها به حداقل رسانده شود و حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌منزلهٔ یك نظام فکری محض ومتعالی تدریس گردد. در این مکتب، قسمت اعظم وقت کلاس روی نظریهٔ متمرکز حقیقی صرف می‌شود و معدودی از دانشجویان حتی ممکن است در بازی با ε و δ تبحر یابند، که به‌اعتقاد معلم (تا روز امتحان نهایی) نشان‌دهندهٔ درجهٔ بالایی از هوش و ذکاوت است. این روش مورد توجه دکترهای ریاضی جوان است، ودربین مدیران چندان مورد توجه نیست. [۱۳]

استدلال طرفداران مکتب اول این است که آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال فایده‌ای ندارد مگر آنکه دریابیم برای حل مسائل زیادی که بدون استفاده از تکنیکهای حساب دیفرانسیل وانتگرال بسادگی نمی‌توانند حل شوند، چه چیزی خوب ومفید است. دانشجوی مبتدی حساب دیفرانسیل و انتگرال علاقهٔ زیادی به نکات باریك منطقی ندارد؛ و اگر وقت زیادی روی فهمیدن تعریف "اپسیلن-دلتا" یی حد صرف کند، نمی‌فهمد که حساب دیفرانسیل و انتگرال دربارهٔ چیست، و نمی‌تواند آن را برای حل مسائل به‌کار برد، و ممکن است علاقه‌ای را هم که به موضوع داشته از دست بدهد.

استدلال مخالفین این مکتب چنین است

روبرو نشدن با همهٔ نکات منطقی، به شیوهٔ درست و منطقی، قابل سرزنش است و از لحاظ عقلانی شایسته نیست؛ تأکید روی تعاریف و اثباتهای دقیق، نتیجهٔ بسیار خوبی در بر دارد وآن عبارت است از اجتناب از سوء تفاهمها و حصول سریعتر فهم واقعی مطلب. [۱۷، ص ۴]

دلیل دیگری که برای تمایل دوم می‌توان ارائه داد این است که اگر مفهوم حد به‌طور

1. MacDuffee

صحیح به دانشجویان عرضه شود تواند یك ماجرای هیجان‌انگیز فکری باشد. اگر دانشجو خودش بتواند برای تابعی که پیش پا افتاده نباشد، به ازای هر ε داده شده یك δ صحیح به دست آورد، دارای ادراکی واقعی از کمال بوده، و فهم درستی از مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌دست می‌آورد.

من در تدریس خود، از تمایل نخست با کمی تعدیل پیروی می‌کنم؛ تکنیکها را باید یاد داد، اما باید سعی کرد دانشجویان بفهمند که چرا تکنیکها مؤثر واقع می‌شوند. به عنوان مثال، همراه با مسائل ماکسیمم و مینیمم، من مسئلهٔ بررسی نقاط انتهایی را در کلاس مورد بحث قرار می‌دهم و در امتحان هم به‌صورت مسئله مطرح می‌کنم. یعنی، اگر دانشجو تکنیکهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را بدون اینکه بفهمد به‌کار برد، جواب غلط به دست خواهد آورد.

وقتی تعریف مشتق عرضه می‌شود، تأکید می‌کنم که با قرار دادن $\Delta x = 0$ بعضی مشکلات منطقی پیش می‌آید، اما از نظر انجام تکلیف بعدی و گذراندن امتحان، تمام‌کاری که دانشجو باید انجام دهد این است که $\Delta y/\Delta x$ را به‌شکلی درآورد که در آن $\Delta x = 0$ "دارای معنا باشد"، و سپس قرار دهد $\Delta x = 0$. هنوز دانشجویی را ندیده‌ام که از انتقادات برکلی به طور جدی پریشان خاطر باشد.

پیوست

پس از اینکه این مقاله نوشته شد، یکی از همکاران توجه مرا به آنالیز غیر استاندارد آبراهام رابینسون[1] جلب کرد. رابینسون نظریه‌ای درباب کمیتهای بینهایت کوچك ارائه می‌دهد و در صفحهٔ ۲ می‌گوید که نظریات لایب‌نیتس در مورد بینهایت کوچکها "می‌تواند به‌طور کامل مورد تأیید قرار گیرد" و می‌تواند "منجر به رهیافت مُعْجِبْتَشی به آنالیز کلاسیك و شاخه‌های دیگر ریاضیات شود." او معتقد است که تاریخ حساب دیفرانسیل و انتگرال نیازمند تجدید نظر است، و بینهایت کوچکهای لایب‌نیتس را باید به عنوان منادی آنالیز غیر استاندارد تلقی کرد نه به منزلهٔ مفاهیم اشتباه آلودی که به وسیلهٔ نظریهٔ δ-εیی حد اصلاح شده است.

مراجع

1. Berkeley George, *Works* (ed.by Alexander Campbell Fraser), 4 vols., Oxford, 1901.
2. Boyer Carl B., *The History of Calculus and its Conceptual Development* (The concepts of calculus), Dover Publications, 1959.
3. Boyer Carl B., *The History of the Calculus*, An

1. Abraham Robinson, *Non-Standard Analysis*, North-Holand Publishing Company, Amsterdam 1966.

Overview. Historical Topics for the Mathematics Classroom, Thirty-first Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C.,1969.376.

4. Boyer Carl B.,*A History of Mathematics*, John Wiley and Sons.Inc.1963.

5. Cajori Florian,"Discussion of fluxions:From Berkeley to Woodhouse,"*Amer.Math.Monthly* ,24 (1917) 145.

6. Cajori Florain,"Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz",*Amer.Math. Monthly* ,30 (1923)223.

7. Davies Charles,Peck William G.,*Mathematical Dictionary*,A.S.Barnes and Company,1855.

8. Emch Arnold,"On limits",*Amer. Math. Monthly*, 9 (1902)5.

9. Jaekson Dunham,"Variables and limits", *The Mathematical Teacher* ,9(1916)11.

10. Judson H.,"An investigation of the mathema - tical Relations of zero and infinity," *The Analyst*,8(1881)105.

11. Kline Morris,"Logic versus Pedagogy," *Amer. Math.Monthly*,77(1970)264.

12. Lilley George,"Zero,infinitesimals .Intinity and the fundamental symbol of indetermination," *Amer.Math.Monthly* ,4 (1897)255.

13. MacDuffee C.C.,"Objectives in calculus," *Amer. Math.Monthly*,54(1947)335.

14. McKelvey J.V.,"The teaching of limits in the high school",*Amer. Math.Monthly* ,28(1921)68.

15. Struik Dirk Jan,"Marx and mathematics,"*Science and Society* ,12(1948)181.

16. Struik Dirk Jan,*A Source Book in Mathematics, 1200-1800*,Harvard University Press,1969.

17. Taylor Angus E.,"Convention and revolt in mathematics,"*The Mathematical Teacher*",55 (1962)2.

لورن لارسن

نگاهی به $1+2+\dots+n$ از دیدگاه ریاضیات گسسته●

ترجمهٔ فرهاد ذاکرحسین، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

ریاضیات علم کامپیوتر از ریاضیات علوم طبیعی متمایز است. مطالعهٔ جدی فیزیك و شیمی معمولاً بدزمینه‌ای در ریاضیات پیوسته: حساب دیفرانسیل وانتگرال، معادلات دیفرانسیل، آنالیز حقیقی، و مختلط نیاز دارد. از طرف دیگر، در مطالعهٔ علم کامپیوتر محتملتر است که دانشی از ریاضیات گسسته: منطق، ترکیبیات، نظریهٔ گرافها، تحقیق درعملیات، وجبر کاربردی لازم آید. هم ریاضیات پیوسته و هم ریاضیات گسسته ازنیاز به حل مسائل جهان واقعی منشأ می‌گیرند و هر دو مفاهیمی را بیان می‌کنند که نهایتاً قابل کاربردند. هر دو زمینه‌ای برای رشد مهارتهای عمومی درحل مسائل فراهم می‌کنند. ایده‌آل این است که دانشجویان درهردو حوزه زمینه‌ای داشته باشند زیرا این دوحوزه از بسیاری لحاظ با یکدیگر اشتراك دارند و یا به‌موازات هم قرارگرفته‌اند.

هدف این مقاله، نگاهی است به‌بعضی روشهای حل مسائل که نوعاً در اولین درس ریاضیات گسسته پیش می‌آیند. برای بسه هم پیوستگی بحث، نشان خواهیم دادکه چگونه هریك از ایده‌های طرح شده را می‌توان برای اثبات فرمول معروف

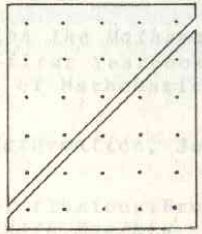
$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

به کار برد. در پایان هـر بخش تمریناتی خواهد آمدکـه خواننده برای درك بهتر روش می‌تواند از آنها استفاده کند.

۱. ترسیم یك شکل. اولین مرحلهٔ مهم در فهم یك مسئله: ترسیم و نشانگذاری یك شکل یا یك نمودار است. مانند شکلهای ۱ و ۲.

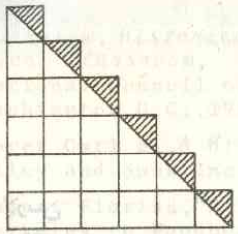
به‌علاوه در ریاضیات گسسته، غالباً مفید است کـه اشیاء توسط نقاط و ارتباط بین

● Larson Loren C., "a discrete look at $1+2+\dots+n$," *College Mathematics Journal*, 75(1985)369.



$$۲(۱+۲+\cdots+n)=n(n+۱)$$

شکل ۱



$$۱+۲+\cdots+n=(۱/۲)(n^۲)+(۱/۲)(n)$$

شکل ۲

اشیاء به‌وسیلهٔ پاره‌خطهایی که نقاط متناظرزا به‌هم وصل می‌کنند، نمایش داده شود. برای مثال، شکل ۳ جریان آب را نشان می‌دهد که از یك منبع S از درون چند کانال، با سرعتهایی که روی پاره‌خطها مشخص‌شده، به‌نقطهٔ پایانهٔ T جاری است. چون سرعتهای ورودی و خروجی درهمهٔ ایستگاههای پمپ (نقاط اتصال) درطول مسیر برابراست، بنابراین خروجی کل در S باید برابر ورودی کل در T باشد یعنی

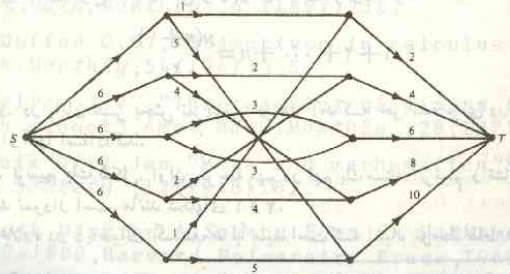
$$(۵)(۶)=۲+۴+۶+۸+۱۰$$

و یا

$$۱+۲+۳+۴+۵=\frac{(۵)(۶)}{۲}$$

شکلی مشابه، درحالت کلی فرمول آشنای زیررا به‌دست می‌دهد

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

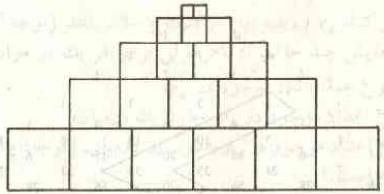


شکل ۳

تمرین. شبکه‌ای همانند شبکهٔ مثال قبل بسازیدکه نشان دهد

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تمرین. نمودار شکل ۴ تشکیل شده است از دو مربع ۱×۱، سه مربع ۲×۲، چهار مربع ۳×۳، پنج مربع ۴×۴، وشش مربع ۵×۵. نشان دهید که چگونه با گسترش این شکل می‌توان فرمول کلی $۲(۱+۲+\cdots+n)=n(n+۱)$ را ثابت کرد.



شکل ۴

تمرین. مجموع $۱+۲+\cdots+n$ را با استفادهٔ مناسب ازقضایای زیر بیابید.

الف) قضیهٔ پیك. مساحت یك چند ضلعی شبکه‌ای ساده (یك چندضلعی که رئوسش نقاط شبکه‌ای هستند و اضلاعش متقاطع نیستند) با فرمول $I+(۱/۲)B-۱$ که در آن I و B به‌ترتیب تعداد نقاط شبکه‌ای درونی و مرزی چند ضلعی می‌باشند، معین می‌شود.

ب) قضیهٔ اویلر (دربارهٔ گرافهای مسطح همبند). داریم $V-E+F=۲$، که V، E، و F، به‌ترتیب تعداد رئوس، یالها، و وجوه در گراف می‌باشند.

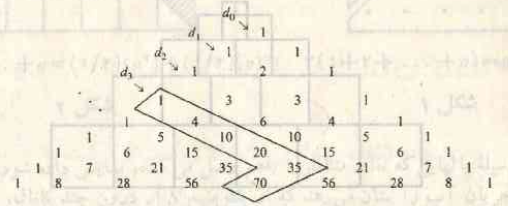
۲. جستجوی یك الگو. فرایند طرح الگوریتم، معمولاً با بررسی حالتهای خاص مراتب پایین آغاز می‌گردد با این امیدکه الگوهایی کشف شودکه بتوان آنها را به‌حالتهای مراتب بالاتر تعمیم داد. "جستجوی الگوها" موضوع مشترکی در همهٔ ریاضیات گسسته است. به عنوان مثال، اولین گام در کشف فرمول مجموع اولین n عدد صحیح مثبت S_n، محاسبهٔ S_n برای $n=۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
S_۱&=۱ &&=۱\\
S_۲&=۱+۲ &&=۳\\
S_۳&=۱+۲+۳ &&=۶\\
S_۴&=۱+۲+۳+۴ &&=۱۰\\
S_۵&=۱+۲+۳+۴+۵ &&=۱۵
\end{aligned}$$

با این نقطهٔ شروع، حدس زدن فرمول عمومی $S_n=[n(n+۱)]/۲$ مشکل نیست.

(براساس این نقطهٔ شروع، باکاربرد ساده‌ای از استقرای ریاضی می‌توان فرمول را ثابت کرد؛ بخش ۳.)

ضرایب دوجمله‌ای زمینه‌ای غنی برای کشفیات ریاضی فراهم می‌کنند. الگویی که مناسب این مبحث است، این است که مجموع k عدد اول در یک "قطرنزولی" در مثلث پاسکال برابر است با kامین عدد در قطر نزولی بعدی. بنابراین (شکل ۵) داریم $۱+۴+۱۰+۲۰+۳۵=۷۰$.



شکل ۵. تصویرفرمول "چوب هاکی".

شکل ۵، برحسب ضرایب دوجمله‌ای، نشان می‌دهد که

$$\binom{۳}{۰}+\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۳}+\binom{۷}{۴}=\binom{۸}{۴}$$

به‌طور کلی

$$\binom{n}{۰}+\binom{n+۱}{۱}+\binom{n+۲}{۲}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+۱}{k} \qquad (*)$$

که این فرمول با استفادهٔ مکرر از فرمول جمع ثابت می‌شود

$$\begin{aligned}\binom{n+k+۱}{k}&=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k}{k-۱}\\&=\binom{n+k}{k}+\left[\binom{n+k-۱}{k-۱}+\binom{n+k-۱}{k-۲}\right]\\&=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-۱}{k-۱}+\left[\binom{n+k-۲}{k-۲}+\binom{n+k-۲}{k-۳}\right]\\&\vdots\\&=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-۱}{k-۱}+\cdots+\binom{n}{۰}\end{aligned}$$

زیرا به‌ازای $i<۰$ داریم $\binom{n}{i}=۰$.

قطر $d_۱$ در رابه‌های ۱، ۲، ۳، ... را دارا می‌باشد. بنابراین در (*) فرض کنید $n=۱$ و قرار دهید $k=n-۱$. نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که

$$۱+۲+\cdots+n=\binom{۱}{۰}+\binom{۲}{۱}+\cdots+\binom{n}{n-۱}=\binom{n+۱}{n-۱}=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

تمرین. فرض کنید r_n ردیف nام از مثلث پاسکال باشد (توجه کنید که r_n، $n+۱$ عضو دارد). با آزمایش چند حالت اول فرمولی برای هر یک از موارد زیر بیابید:

(الف) مجموع همهٔ اعداد موجود در r_n،

(ب) مجموع اعداد موجود در r_n به‌طور یک درمیان،

(ج) مجموع اعداد موجود در r_n به‌طور دو درمیان. [توجه: پاسخ (ج) به‌مقدار n (به‌پیمانهٔ ۶) وابسته است.]

۳. استقرای ریاضی. استقرای ریاضی، مهمترین روش اثبات در ریاضیات گسسته است. استقرا، روش عمده برای اثبات این مطلب است که یک الگوریتم پیشنهادی همواره، خروجی مطلوب را به‌ازای یک ورودی دلخواه تولید می‌کند.

یک مرحلهٔ اساسی در فرمولبندی اثبات از طریق استقرای ریاضی، انتخاب فرض استقرایی مناسب است. به‌عنوان مثال، مسئلهٔ زیر را در نظر بگیرید

ضریب $x^۲$ در بسط $(۱+x)^{n+۱}$، $n+\cdots+۲+۱$ است

فرض کنید $P(n)$ را معادل این گزاره گرفته باشیم که ضریب $x^۲$ در $(۱+x)^{n+۱}$، $n+\cdots+۲+۱$ است. وقتی $n=۱$، نتیجه درست است. فرض می‌کنیم که نتیجه برای $n=k$ نیز صحیح است. حال $(۱+x)^{k+۱}=(۱+x)(۱+x)^{k+۲}$، و با استقرا ضریب $x^۲$ در $(۱+x)^{k+۱}$، $k+\cdots+۲+۱$ می‌باشد؛ یعنی به‌ازای ثابتهای $a_۰$، $a_۱$، و $a_۲$ داریم

$$(۱+x)^{k+۲}=(۱+x)(a_۰+a_۱x+(۱+۲+\cdots+k)x^۲+a_۳x^۳+\cdots)$$

نتیجه می‌شود که ضریب $x^۲$ در $(۱+x)^{k+۲}$ عبارت‌است از $a_۱+(k+\cdots+۲+۱)$. متأسفانه، بدون اطلاع از $a_۱$ نمی‌توانیم مرحلهٔ استقرا را طی کنیم. این وضعیت در استدلالهای استقرایی بسیار زیاد پیش می‌آید. گزاره‌های ابتدایی $P(۱)$، $P(۲)$، ... اطلاعات کافی به‌دست نمی‌دهند که با استفاده از آنها بتوان مرحلهٔ استقرا را به‌انجام رساند. وقتی چنین اتفاقی می‌افتد؛ طبیعی است که گزاره‌ها را به‌شکل قویتر و کلیتری چون $Q(۱)$، $Q(۲)$، ... فرمولبندی کنیم (به طوری که $Q(n)$، به‌ازای هر n، $P(n)$ را نتیجه دهد) و یکبار دیگر به‌جستجوی یک اثبات استقرایی بپردازیم.

بنابراین فرض می‌کنیم $Q(n)$ نشان‌دهندهٔ این گزاره باشد که ضرایب $x^۵$، $x^۱$، $x^۲$

در بسط $(1+x)^{n+1}$، به‌ترتیب 1، $n+1$، $\dots+n+2+1$ هستند. توجه کنید که $Q(n)$ به‌ازای هر $n \geq 1$، $P(n)$ را نتیجه می‌دهد.

بررسی اینکه $Q(1)$ صحیح است، آسان است. فرض می‌کنیم که $Q(k)$ درست باشد. سپس با استفاده از فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+2} &= (1+x)(1+x)^{k+1} \\ &= (1+x)[1+(k+1)x+(1+2+\dots+k)x^2+\dots] \\ &= 1+(k+2)x+(1+2+\dots+(k+1))x^2+\dots\end{aligned}$$

عبارت اخیر نشان می‌دهد که $Q(k+1)$ صحیح است؛ بنابراین، با استقرا، $Q(n)$ برای هر $n \geq 1$ برقرار است؛ پس، $P(n)$ برای هر $n \geq 1$ صحیح می‌باشد.

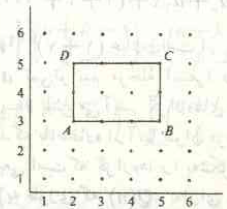
بنا برقضیهٔ دو جمله‌ای، ضریب x^2 در $(1+x)^{n+1}$، عبارت است از $\binom{n+1}{2}$. این نتیجه و نتیجهٔ قبل تواماً نشان می‌دهند که برای $x \geq 1$ داریم

$$1+2+\dots+n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین. استقرای ریاضی را به کار برید و نشان دهید که ضریب x^2 در بسط $(1+x+x^2+\dots+x^n)^n$ عبارت است از $1+2+\dots+n$. [توجه: یك استدلال شمارشی (بخش ۴) نشان می‌دهد که ضریب x^2، $\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$ است.]

۴. استدلالهای شمارشی. تحلیل الگوریتمها به‌زمینه‌ای نظری و عملی در ترکیبیات شمارشی (یعنی ترکیبها و تبدیلها) نیازدارد. اغلب چنین پیش می‌آید که یك مسئلهٔ شمارشی را می‌توان به چندین طریق مختلف حل کرد و این تکنیك جالبی برای اثبات اتحادهای حسابی فراهم می‌کند.

مثلاً یك شبکهٔ مربعی $n \times n$ ازنقاط راکه درشکل۶ برای $n=6$ نشان داده شده، در نظر بگیرید. نقاط شبکه‌ای را می‌توان با زوج مرتب (i, j) مشخص کرد، که در آن $(1 \leq i \leq n)$ عدد مربوط به‌ستون و $(1 \leq j \leq n)$ عدد مربوط به‌سطراست.



شکل ۶. چند مستطیل با اضلاع افقی وعمودی (همچون $ABCD$) می‌توان با استفاده از این نقاط شبکه‌ای ساخت؟

یك راه عمل، مشخص کردن یك نقطهٔ شبکه‌ای، مثلاً (i, j)، و شمارش تعداد مستطیلهایی است که گوشهٔ چپ پایین آنها در رأس (i, j) قرار دارد. $n-i$ انتخاب برای بعد افقی و $n-j$ انتخاب برای بعد عمودی داریم و بنابراین $(n-i)(n-j)$ تا ازاین گونه مستطیلها وجود دارد. از اینجا نتیجه می‌شودکه تعدادکل‌مستطیلها در یك شبکهٔ مربعی $n \times n$ برابراست با

$$\begin{aligned}&\text{(تعداد مستطیلهایی که گوشهٔ پایین سمت چپ آنها در } (i, j) \text{ است)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n-i)(n-j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-i)\sum_{j=1}^{n}(n-j) \\ &= [1+2+\dots+(n-1)]^2\end{aligned}$$

از طرف دیگر، یك مستطیل درشبکهٔ $n \times n$ با دو سطر و دو ستون (یعنی اضلاع مستطیل) به‌طور یکتا مشخص می‌شود. $\binom{n}{2}$ طریق برای انتخاب ستونها و $\binom{n}{2}$ طریق برای انتخاب سطرها وجود دارد. بنابراین، تعداد مستطیلها $\binom{n}{2}^2$ است.

ازمساوی قراردادن این جواب با جوابی که قبلاً بدست آمد، داریم

$$1+2+\dots+(n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

تمرین. درشبکهٔ $n \times n$، فرض کنید S_n تعداد مستطیلهایی باشد که گوشهٔ پایین سمت چپ آنها یا درستون اول است یا درسطراول (یا هردو).

(الف) نشان دهید $S_n = (n-1)^2$.

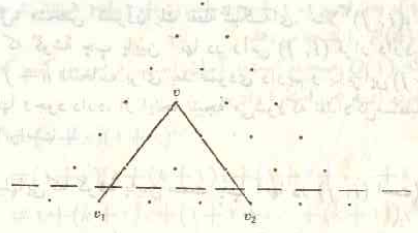
(ب) نشان دهید که شبکهٔ $n \times n$ دقیقاً دارای $S_n+S_{n-1}+\dots+S_1$ مستطیل است.

(ج) با استفاده ازاین نتایج ونتایج این بخش نشان دهیدکه

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۵. تناظر یك‌به‌یك. یکی ازتازه‌ترین رشته‌های تحقیق در ترکیبیات، ارائهٔ اثباتهای دوسویی از اتحادهای ترکیبیاتی می‌باشد. ایدهٔ کار این است که تناظری یك‌به‌یك مابین دو مجموعه ترتیب می‌دهند؛ مجموعه‌ها به دقت انتخاب می‌شوند به‌طوری که طرف راست و چپ اتحادها تعداد اعضای مجموعه‌های مربوطه را بشمارند.

درشکل۷، یك تناظر طبیعی بین رأسها در n سطر بالایی و زوجهای رأسها (زوجهای



شکل ۷

نامرتب) در $n+1$امین سطر از آرایهٔ مثلثی می‌بینیم. بالاخص، فرض کنید v رأسی از میان n رأس بالایی باشد. از v می‌توانیم با پیمودن مسیر سمت چپی (اگر در هراتصال، شاخهٔ سمت چپ را در نظر بگیریم) یا با پیمودن مسیر سمت راستی (اگر در هراتصال، شاخهٔ سمت راست را درنظر بگیریم) به $n+1$امین سطر برسیم. این دو مسیردو رأس v_1 و v_2 در $n+1$امین سطر خاتمه می‌یابند. فرض کنید v با زوج $\{v_1, v_2\}$ متناظر باشد.

بدعکس، اگر $\{v_1, v_2\}$ زوج نامرتبی از رئوس موجود در $n+1$امین سطر باشد، یك رأس یکتای v درمیان n رأس اولیه وجود دارد که، به طریقی که در پاراگراف قبل توصیف شد، متناظر با زوج $\{v_1, v_2\}$ خواهد بود.

$1+2+\cdots+n$ رأس در n سطر بالایی و $\binom{n}{2}$ زوج در $(n+1)$امین سطر وجود دارد و بنابراین

$$1+2+\cdots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

تمرین. (الف) نشان دهیدکه یك تناظر یك‌به‌یك بین مجموعهٔ زوجهای مرتب اعداد صحیح $\{(a, b) : 1 \leqslant a < b \leqslant n\}$ و مجموعهٔ زوجهای مرتب اعداد صحیح $\{(a, b) : 1 \leqslant a < b \leqslant n+1\}$ وجود دارد و مجموعهٔ اخیر $\binom{n}{2}$ و مجموعهٔ اولی $1+2+\cdots+n$ عضو دارد.

(ب) نشان دهیدکه یك تناظر یك‌به‌یك بین مجموعهٔ سه‌تاییهای مرتب اعدادصحیح $\{(a, b, c) : 1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant n\}$ و مجموعهٔ سه‌تاییهای مرتب اعداد صحیح $\{(a, b, c) : 1 \leqslant a < b < c \leqslant n+2\}$ وجود دارد. کدام اتحاد حسابی نظیر این تناظر است؟

۶. رابطه‌های بازگشتی. الگوریتمهای بازگشتی، روندهایی‌که براساس بازگشت به‌خودشان طراحی می‌شوند، یك ردهٔ مهم ازالگوریتمها را درعلم کامپیوترتشکیل می‌دهند. تحلیل چنین الگوریتمهایی به طور طبیعی به مسائلی می‌انجامد که مشتمل بر رابطه‌های

بازگشتی هستند.

دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{x_n : n=1, 2, \cdots\}$ را که به طور بازگشتی با فرمول

$$nx_n=(n-2)x_{n-1}+1, \quad x_1=1$$

تعریف می‌شود، درنظر بگیرید. چند جملهٔ اول دنباله به‌آسانی محاسبه می‌شوند

$$1, 1/2, 1/2, 1/2, \cdots$$

به‌سادگی نشان داده می‌شودکه پس ازآن، دنباله ثابت می‌ماند زیرا $x_{n-1}=1/2$ نتیجه می‌دهدکه $nx_n=(n-2)(1/2)+1=n/2$.

راه دیگری برای نگرش به‌رابطهٔ بازگشتی وجود دارد. هرطرف رابطه را در $n-1$ ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید

$$n(n-1)x_n=(n-1)(n-2)x_{n-1}+(n-1)$$

و حالا فرض می‌کنیم $y_n=n(n-1)x_n$. با این جانشینی، معادلهٔ بالا به‌صورت

$$y_n=y_{n-1}+(n-1)$$

و یا

$$y_n-y_{n-1}=n-1$$

درمی‌آید. چون این تساوی برای هر n برقرار است، نتیجه می‌شودکه

$$(y_{n-1}-y_n)+(y_n-y_{n-1})+\cdots+(y_2-y_1)$$
$$=n+(n-1)+(n+2)+\cdots+1$$

و یا

$$1+2+\cdots+n=y_{n-1}-y_1$$

اما $y_{n+1}=(n+1)nx_{n+1}$ (پس $y_1=0$) و چون می‌دانیم که $x_n=1/2$ برای $x \geqslant 2$، و نتیجه می‌شود که

$$1+2+\cdots+n=n(n+1)x_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین. ماتریس 2×2 زیرداده شده است

$$M_n=\begin{pmatrix}1+2+\cdots+n & n\\ n+1 & 2\end{pmatrix}$$

ستون دوم را ازستون اول کم کرده و ماتریس ترانهاده را به دست آورید. نتیجه، ماتریس M_{n-1} خواهد بود. چون هیچکدام از این اعمال مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، باید

داشته باشیم $\det M_n = \det M_{n-1}$. با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی، $\det M_n$ را محاسبه کنید و با به‌کارگیری این نتیجه، اثبات دیگری از فرمول مجموع حسابی به‌دست دهید.

تمرین. یک رابطهٔ بازگشتی برای دنبالهٔ $\{x_n : n = ۱+۲+\cdots\}$ که به‌صورت $x_n = [n(n+۱)]/۲$ تعریف می‌شود، بیابید (یعنی x_n را برحسب $x_{n-۱}$ بیان کنید). با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی، نشان دهید که $x_n = ۱+۲+\cdots+n$.

۷. تابع مولد. تابع مولد برای دنباله‌ای از اعداد به‌صورت $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$، به‌عنوان سری

$$a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots$$

تعریف می‌شود. برای مثال، تابع مولد برای دنبالهٔ ثابت

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۱, \cdots$$

سری نامتناهی هندسی زیراست

$$۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots$$

که ما آن را به‌عنوان سری توانی تابع $۱/(۱-x)$، وقتی $|x| < ۱$، می‌شناسیم.

این سری هندسی تا آنجایی که به‌توابع مولد مربوط می‌شود، دارای خاصیت بسیار مهمی است. حاصلضرب آن در یک تابع مولد دیگر

$$(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)(a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots)$$

سری زیر را به‌دست می‌دهد

$$a_۰ + (a_۰ + a_۱)x + (a_۰ + a_۱ + a_۲)x^۲ + \cdots + (a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n)x^n + \cdots$$

توجه کنید که ضرایب در این حاصلضرب، مجموعهای جزئی ضرایب درسری اصلی هستند. بنابراین می‌بینیم که

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)\left(\frac{۱}{۱-x}\right) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)$$
$$= ۱ + (۱+۱)x + (۱+۱+۱)x^۲ + \cdots$$
$$= ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + nx^{n-۱} + \cdots$$

و

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^۲ = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)(۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots)$$
$$= ۱ + (۱+۲)x + (۱+۲+۳)x^۳ + \cdots$$
$$+ (۱+۲+\cdots+n)x^{n-۱} + \cdots \qquad (۱)$$

این اتحاد نشان می‌دهد که ضریب $x^{n-۱}$ در بسط $۱/(۱-x)^۳$ به‌سری توانی، عبارت است از $۱+۲+\cdots+n$.

طریق دیگری برای یافتن سری توانی $۱/(۱-x)^۳$ این است که $|x| < ۱$ را در نظر گرفته و دوبار از سری توانی $۱/(۱-x)$ مشتق بگیریم. بنابراین اگر از فرمول

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{n-۱} + \cdots$$

آغاز کنیم، مشتق اول نتیجه می‌دهد

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + (n+۱)x^n + \cdots$$

و مشتق دوم می‌دهد

$$\frac{۲}{(۱-x)^۳} = ۲ + ۶x + \cdots + n(n+۱)x^{n-۱} + \cdots$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{(۱-x)^۳} = ۱ + ۳x + \cdots + \frac{n(n+۱)}{۲}x^{n-۱} + \cdots \qquad (۲)$$

چون نمایش یک تابع به‌صورت سری توانی، یکتا است، ضرایب $x^{n-۱}$ در (۱) و (۲) باید برابر باشند، یعنی

$$۱ + ۲ + \cdots + n = [n(n+۱)]/۲$$

تمرین. سری توانی $۱/[ax^۲ - (a+۱)x + ۱]$، $a \neq ۱$ را به‌دو طریق متفاوت محاسبه کنید و فرمول مجموع سری هندسی متناهی را با مساوی قراردادن ضرایب x^n به دست آورید. یک طریق محاسبهٔ سری توانی این است که کار را با $۱/[ax^۲ - (a+۱)x + ۱] = [۱/(۱-ax)][۱/(۱-x)]$ شروع کنیم و راه دیگر این است که با تجزیه به‌کسرهای جزئی شروع کنیم

$$\frac{۱}{ax^۲ - (a+۱)x + ۱} = \frac{۱}{۱-a}\left[\left(\frac{۱}{۱-x}\right) - \left(\frac{a}{۱-ax}\right)\right]$$

۸. حساب دیفرانسیل. بخش قبل نشان می‌دهد که حساب دیفرانسیل در ارتباط با ریاضیات گسسته ابزاری مفید است. به‌عنوان مثالی دیگر، اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم

$$(۱-x)(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n) = ۱ - x^{n+۱}$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم تا به‌دست آید

$$-(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n) + (۱-x)(۱ + ۲x + \cdots + nx^{n-۱}) = -(n+۱)x^n$$

و حال مشتق دوطرف این تساوی را می‌گیریم تا حاصل شود

$$-(1+2x+\cdots+nx^{n-1})-(1+2x+\cdots+nx^{n-1})$$
$$+(1-x)(2+\cdots+n(n-1)x^{n-2})$$
$$=-n(n+1)x^{n-1}$$

ازقراردادن $x=1$، فرمول حسابی $1+2+\cdots+n=[n(n+1)]/2$ به‌دست می‌آید.

تمرین. فرمولهایی برای سریهای متناهی زیر بیابید

(الف) $$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$$

(ب) $$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

[راهنمایی: محاسبه را با $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$ شروع کنید.]

۹. تفاضلات متناهی. مشتق یك تابع $f(x)$، یا در x به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Df(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

هرگاه این حد موجود باشد. D عملگر مشتق‌گیری است که وقتی روی یك تابع عمل می‌کند، مشتق آن تابع را تولید می‌کند.

در ریاضیات گسسته عملگر مشابهی وجود دارد که می‌توان آن را روی توابع اعمال کرد. اولین تفاضل یك تابع f در n به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$$

علامت Δ، عملگر تفاضل را نشان می‌دهد. اگر یك تابع f دنبالهٔ

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

را تعریف کند، آنگاه تابع Δf دنبالهٔ

$$\Delta f(0), \Delta f(1), \Delta f(2), \ldots, \Delta f(n), \ldots$$

را تعریف می‌کند.

دنبالهٔ تفاضلی ما را به حساب تفاضلات متناهی راهنمون می‌سازد که کاملاً نظیر حساب دیفرانسیل معمولی است. بعضی تشابهات درجدول زیر نشان داده شده‌اند که در آن برای اعداد صحیح مثبت k داریم $x^{(k)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-(k-1))$.

حساب دیفرانسیل		حساب تفاضلات	
$D(cf)=cD(f)$	۱.	$\Delta(cf)=c(\Delta f)$	۱′.
$D(af+bg)=aDf+bDg$	۲.	$\Delta(af+bg)=a(\Delta f)+b(\Delta g)$	۲′.
$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gDf-fDg}{g^2}$	۳.	$\Delta\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\Delta f-f\Delta g}{g^2}$	۳′.
$Dx^n=nx^{n-1}$	۴.	$\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$	۴′.
$\int_1^n x^k\,dx=\frac{n^{k+1}-1}{k+1}$	۵.	$\sum_{x=1}^{n} x^{(k)}=\frac{(n+1)^{(k+1)}-1^{(k+1)}}{k+1}$	۵′.

به آسانی می‌توان درستی (۵′) را با استفاده از (*) در صفحهٔ ۸۱ تحقیق کرد. وقتی $k=1$، فرمول (۵′) نتیجه می‌دهد

$$1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)^{(2)}-1^{(2)}}{2}$$
$$=\frac{(n+1)n-1(1-1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

تشابهاتی نیز در مورد مشتق مراتب بالاتر وجود دارد. همان‌طورکه $D^2f=D(Df)$ و $D^n f=D(D^{n-1}f)$، می‌توانیم $\Delta^n f=\Delta(\Delta^{n-1}f)$ را به ازای هر n تعریف کنیم. فرمول متناظر با سری تیلور زیر

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (۶)$$

عبارت است از

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^{(k)} \quad (a \text{ عدد صحیح}) \qquad (۶′)$$

این تساوی از قضیهٔ ۲ از [۲]، با توجه به‌اینکه $(n-a)^{(k)}/k!=\binom{n-a}{k}$، به‌دست می‌آید.

به‌عنوان یك مثال، فرض کنیدکه f توسط روابط زیر تعریف شده است

$$f(0)=0, \quad f(n)=1+2+\cdots+n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

از سری مکلورن مشابه (۶) استفاده خواهیم کرد

$$f(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k f(0)}{k!}\,n^{(k)} \qquad (7')$$

تا فرمولی برای $f(n)$ بیابیم. جدول زیر مقادیر f، Δf، $\Delta^2 f$، ... را $n=0,1,2,3,\ldots$ به‌دست می‌دهد.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
f:	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵ ...
Δf:	۱	۲	۳	۴	۵	۶ ...
$\Delta^2 f$:	۱	۱	۱	۱	۱	۱ ...
$\Delta^3 f$:	۰	۰	۰	۰	۰	۰ ...

همهٔ سطرهای متوالی متحد با صفرهستند. از ($7'$) به‌دست می‌آید

$$1+2+\ldots+n=\frac{f(0)}{0!}\,n^{(0)}+\frac{\Delta f(0)}{1!}\,n^{(1)}+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!}\,n^{(2)}$$

$$=0+n+\frac{1}{2!}n(n-1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین. با استفاده از ($7'$)، فرمولی برای مجموع اولین n مکعب بیابید

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(n)=1^3+2^3+\ldots+n^3$$

۱۰. ترکیبیات سازنده. ما تعدادی از مفاهیم ریاضی را که در ریاضیات گسسته مهم هستند، یعنی تکرار، استقرا، بازگشت، شمارش، توابع مولد وتفاضلات متناهی را تا اینجا بررسی کرده‌ایم. البته این مفاهیم در ریاضیات تازگی ندارند. در واقع آنها از زمان اویلر جزئی از جریان اصلی ریاضیات بوده‌اند، اما امروزه به خاطر کاربردشان در مسائلی که در زمینهٔ محاسبه وعلم کامپیوتر پیش می‌آیند، ازاهمیت فزاینده‌ای برخوردارند. این طبیعت متناهی کامپیوتر است که ما را به تفکر در ریاضیات گسسته رهنمون می‌سازد.

آخرین مثال ما،خصیصهٔ سازنده والگوریتمی ریاضیات گسستهٔ جدید را نشان می‌دهد. یك دسته کارت متشکل از $T_n=[n(n+1)]/2$ عدد کارت را در نظر می‌گیریم وآنها را

به‌تعداد دلخواهی دسته تقسیم می‌کنیم. حال با برداشتن یك‌کارت از هردسته، یك دستهٔ جدید تشکیل می‌دهیم. این فرایند را تکرار می‌کنیم. یك‌کارت ازهردسته برداشته و دستهٔ جدیدی تشکیل می‌دهیم. با کمال تعجب دیده می‌شودکه تعداد دسته‌ها سرانجام به n دسته با اندازهٔ کاهنده می‌گراید؛ n کارت در بزرگترین دسته و $n-1$ کارت در دستهٔ بعد، و الی آخر خواهد بود.

به‌عنوان یك مثال فرض کنیدکه یك دسته کارت متشکل از $T_6=21$ کارت را به‌سه دستهٔ ۵، ۹، و ۷ کارتی تقسیم کنیم. می‌توانیم دسته‌ها را به هرترتیبی مرتب کنیم، مثلاً از چپ به راست، و این وضعیت را با سه‌تایی (۵, ۹, ۷) نشان دهیم. بعد از برداشتن یك کارت از هر یك ازاین دسته‌ها، چهار دسته به‌دست می‌آوریم‌که با (۳, ۴, ۸, ۶) نمایش داده می‌شود. دراینجا دسته‌ای راکه جدیداً به‌وجودآمده درانتهای سمت چپ قرار داده‌ایم وگذاشته‌ایم‌که دسته‌های باقیمانده به‌همان ترتیب خودشان باشند اما به‌ترتیب ۶، ۸، و ۴ کارت داشته‌باشند. این‌مرحله را بااستفاده ازعلایم بصورت (۳, ۴, ۸, ۶) ← (۵, ۹, ۷) نشان می‌دهیم.

اگر به‌تولید دسته‌های جدید ادامه دهیم، دنبالهٔ زیر پدید می‌آید

(۵, ۹, ۷) ← (۳, ۴, ۸, ۶) ← (۴, ۲, ۳, ۷, ۵) ← (۵, ۳, ۱, ۲, ۶, ۴)

دراین حالت ما فقط در سه مرحله به ۶ دسته با اندازه‌های مختلف می‌رسیم. (که معمولاً بیشترطول می‌کشد؛ مثلاً اگر با (۳, ۵, ۶, ۷) آغازکنیم،۲۵ مرحله لازم است.) جالب است که با ادامهٔ تکرار مراحل این الگوریتم، یك دستهٔ مرتب تولید خواهد شد. (با علامت‌گذاری ما)

(۵, ۳, ۱, ۲, ۶, ۴) ⟶ (۶, ۴, ۲, ۱, ۵, ۳) ⟶ (۶, ۵, ۳, ۱, ۴, ۲)

⟶ (۶, ۵, ۴, ۲, ۳, ۱) ⟶ (۶, ۵, ۴, ۳, ۱, ۲) ⟶ (۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱)

اثبات اینکه این فرایند همیشه به‌این طریق خاتمه می‌یابد، بیانش نسبتاً پیچیده است، اما این اثبات مبتنی است بر انواع ایده‌های پیشنهادی در این مقاله: جستجوی الگوها، استقرا، بازگشت. (برای ملاحظهٔ جزئیات اثبات، [۱] را ببینید.) یادآوری این نکته اهمیت داردکه کامپیوترمی‌تواند یك ابزار مفید در مطالعهٔ این وضعیت باشد. اگرافرازی از یك دسته کارت (به‌عنوان ورودی) داده شده باشد، می‌توان برنامهٔ ساده‌ای نوشت که تمام آرایشهای میانی راکه به‌الگوی حدی نهایی می‌انجامد، به‌عنوان خروجی چاپ‌کند. این جهشی است که توجه به الگوها و حدس زدن را برای ما آسانتر خواهد کرد. حتی ممکن است‌که سؤالات دیگری را القا کند؛ مثلاً ماکسیمم تعداد (یامتوسط تعداد) مراحل قبل ازخاتمه چندتاست؟ آیا راهی برای پیش‌بینی تعداد مراحل برای یك آرایش مفروض وجود دارد؟ چند افراز مختلف k مرحله را ایجاب می‌کند؟ پرداختن به این سؤالات در وضعیتهای مختلف ما را به حدسها و سؤالات بیشتری راهنمون خواهند شد و الی‌آخر. همچنان که این مثال نشان می‌دهد حتی یك دانشجوی مبتدی در ریاضیات گسسته می‌تواند

بطور فعال در فرایند خلاقیت شرکت داشته باشد.

تمرین. الگوریتم این بخش، باز نشان می‌دهد که

$$۱+۲+\cdots+n=[n(n+۱)]/۲$$

الگوریتم را اصلاح کنید تا نشان دهد که

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

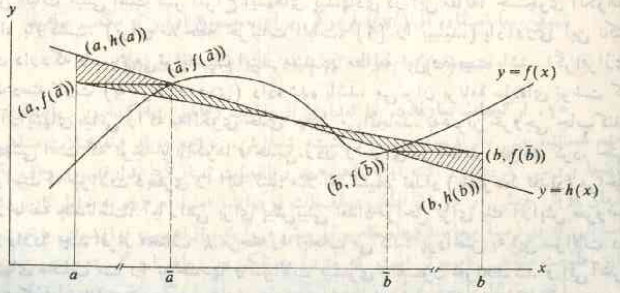
مراجع

1. Gardner, Martin., "Mathematical Games", *Sci. Amer* 249(August 1983)12.
2. Johnsonbaugh, Richard., *Discrete Mathematics* Macmillan Publishing Company, New York. (1984).
3. Long, Calvin., Pascal's Triangle, "Difference Tables and Arithmetic sequences of order N, *The College Mathematics Journal*. 15(September 1984)290.
4. Roberts., Freds., *Applied Combinatorics*, Prentice Hall Inc Englewood cliffs, New Jersey, (1984).

بدون شرح

تربیع کنندهٔ گاوس به‌عنوان مساحت یك ذوزنقه

$$(۱/۲)(b-a)(f(\bar{a})+f(\bar{b}))=(۱/۲)(b-a)(h(a)+h(b))$$



روپرت هال

جهان نیوتنی •

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

کتاب *اصول ریاضی*[1] آیزك نیوتن اولین بار ۳۰۰ سال پیش به چاپ رسید. این کتاب فوراً تأثیری بزرگ [در افکار دانشمندان] گذاشت، و انتشارش ظهور علم جدید را خبر داد.

ادموند هالی پس از اینکه سیزده ماهی در ویرایش و نشر کتاب کوشش کرد و ضمن آن چند بار خشم نیوتن زودرنج را فرو نشاند، در ۵ ژوئیه ۱۶۷۸ به نیوتن نوشت "من سرانجام کار کتاب شما را به پایان رساندم؛ امیدوارم که این شما را خشنود کند." نویسنده ۲۰ نسخهٔ مجانی دریافت کرد؛ هالی همچنین ۴۰ نسخهٔ دیگر برای او فرستادتا هر نسخه با جلد معمولی به قیمت ۵ شیلینگ به نفع هالی فروخته شود (قیمت نسخه‌های با جلد چرمی ۹ شیلینگ بود). بیشترین براورد این است که هالی به هزینهٔ خود ۴۰۰ نسخه از کتاب را چاپ کرد؛ در آن زمان انجمن سلطنتی سرمایه‌ای نداشت. انجمن اولین گزارشهای کارهای نیوتن در مکانیك و سپس کتاب I از *اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی*[2] را با اشتیاقی بی‌سابقه دریافت کرده بود؛ تنها جان فلامستید[3] اخترشناس بود که با ترشرویی بـه دستاورد نیوتن نگاه کرد؛ و بدتر از این، رابرت هوك[4] تجربه‌گر "ادعاهایی درمورد کشف قانون کاهش جاذبه بـه نسبت عکس مجذور فاصله از مرکز" داشت. دیگران از ابتدا بـه *اصول* لقب "بی‌نظیر" دادند.

ادعاهای هوك ــ سبب آخرین قطع رابطهٔ این دو مرد که انتشار کتاب *اپتیك*[5] نیوتن را تا سال ۱۷۰۴ به تأخیر انداخت ــ نیوتن را بر آن داشت تا تاریخ مکانیك سماوی را

• Hall Rupert A. ,"making sense of the universe", *Twas Newsletter*, Summer 1987,13.

1. *Principia Mathematica*
2. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*
3. John Flamsteed
4. Robert Hooke
5. *Opticks*

(آن‌گونه‌که نیوتن آن را می‌دید) به هالی نسبت دهد. در سال ۱۶۶۶ نیوتن قانون عکس مجذور وهمچنین رابطه‌اش را با r^3/T^2 (در قانون‌سوم کپلر درمورد حرکت سیارات) و r/r^2 (شتاب دایره‌ای) که بعدها اولین‌بار هویگنس آن را منتشر کرد، کشف کرده بود. نیوتون علاوه براین استنتاج که "نیروهایی که سیارات را در مدارهای خود نگه می‌دارند باید با عکس مجذور فاصله‌شان از مرکزی که حول آن دوران می‌کنند متناسب باشند"، از روی‌طول پاندول ثانیه شمار، مقداری راکه گالیله برای‌شتاب ناشی از جاذبه در روی زمین تخمین زده بود اصلاح‌کرد. از این راه او توانست نیروی لازم برای نگهداری ماه روی مدارش را با نیروی جاذبه در سطح زمین مقایسه‌کند و دیدکه جوابها نسبتا به هم نزدیک‌اند. (تطبیق بهتر می‌شد اگر نیوتن برای قطر زمین براورد کمتر از واقع گالیله را به‌کار نبرده بود.)

با وجود این، در سال ۱۶۶۶ نیوتن هنوز به جاذبهٔ جهانی فکر می‌کرد و نه به حرکت بیضوی سیارات[1]. اکنون روشن است که حدود ده سال قبل از انتشار اصول، نیوتن هنوز تصور می‌کردکه حرکت سیارات ناشی از نوعی مکانیسم اتری است؛ علاوه براین، مکاتبات مختصر هوک با نیوتن که در سال ۱۶۷۹ از طرف هوک (دبیر انجمن سلطنتی در آن زمان) آغاز شد، موجب گردیدکه‌نیوتن به اهمیت فراوان قانون دوم کپلر، یعنی قانون مساحتهای‌مساوی، پی‌برد. این قانون نه‌تنها تغییر درسرعت مداری‌سیاره‌را توضیح می‌داد بلکه در حالت کاملاً کلی، حرکت جسم را در حول مرکزی‌که جسم به جانب آن شتاب می‌گیرد، تشریح می‌کرد. کلیدا‌ثبات سازگاری بین‌مدار بیضوی و قانون عکس‌مجذور در اینجاست. این نکته در قضیهٔ I اصول اثبات شده است.

شگفت‌آور است‌که نیوتن با اینکه این روابط اساسی را در ژانویهٔ ۱۶۸۰ اثبات کرده بود، "محاسبات راکنار گذاشت" تا زمانی که‌ادموند هالی (که شاید بعد از نیوتن، بهترین ریاضیدان انگلیسی آن زمان بود) بدکمبریج رفت تا از نیوتن بخواهد که قانون عکس مجذور را از نظر نجومی تفسیر کند. ظرف ۳ ماه ساده‌ترین‌طرح یك مکانیك جدید، بدون نادیده گرفتن‌ستاره‌های دنباله‌دار و پرتابه‌ها، در دست هالی بود و آن را به انجمن سلطنتی عرضه‌کرد. کار بر روی جزر ومد، جریان مایعات، نظریهٔ ذره‌ای نور، حرکت موج و سرعت موج و سرعت صوت (و خیلی چیزهای دیگر) همه بعد از آن، اکثرا در طی سال ۱۶۸۵، صورت گرفت. این‌نشان می‌دهدکه ادعای نیوتن که‌کتاب اصول را در ۱۸ ماه نوشته، دور از حقیقت نبوده است؛ قدرت و سرعت ابداع ریاضی او این‌گونه بود.

در ضمن اینکه نیوتن کتاب را می‌نوشت، کتاب تغییر و رشد می‌کرد. در اصل قرار بود که‌این کتاب، مانند طرح اولیهٔ ارائه‌شده به‌انجمن‌سلطنتی در نوامبر ۱۶۸۴، مجموعه‌ای از قضایای مربوط به یکدیگر باشد. بعد چون تحقیقات نیوتن در مورد مکانیك استدلالی سیالات آنقدر گسترش یافت که نظریهٔ شگفت‌انگیز موج (که آن را از پایه بنا نهاد)، و تحلیل دوران گردابها را در برگرفت، او این قسمت ازکار خود را جداگانه در کتاب II آورد، و کتاب اول را به نظریهٔ اساسی حرکت مداری محدود کرد. او همچنین تصمیم

1. motion in planetary ellipses

گرفته بود که به صورت نسبتاً تفصیلی، ولی قابل فهم، همخوانی مکانیك سماوی خود را با گردش ماه، سیارات و اقمار، تقدیم اعتدالین، مسیر ستاره‌های دنباله‌دار و جزر و مد، نشان دهد. گردآوری حجم وسیعی از داده‌ها تلاشهای فراوانی به همراه داشت و موجب دوستی با فلامستید شد. نیوتن در تابستان ۱۶۸۶ و در حالی که‌نسبت به هوك خشمگین‌بود، عجولانه، تصمیم گرفت کتاب III راکلاً حذف کند؛ بالاخره تا حدی دراثر تشویق هالی آن را دوباره و باشکل ریاضی‌تری‌تصنیف کرد. نسخهٔ اصلی کتاب III بعد از مرگ نیوتن به‌طور جداگانه بدنام نظام جهان[1] به چاپ رسید. گرچه قسمتهای آغازین اصول بیشترین توجه ریاضیدانان را بـه خود جلب کرده بود، کتاب III جهان نیوتنی را به خوانندگان بیشتری معرفی کرده است. هالی حق داشت که برضرورت کتاب III پافشاری کند.

نیوتن در طی آخرین سالهای عمرش، که بر اثر مشاجره با لایب نیتس بر سر اینکه چه‌کسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را کشف کرده، آزرده‌خاطر شده بود، ادعا کرد که نه فقط طرح حساب نهایات کوچکها را در اصول آورده است بلکه نبحر او در این روشها بوده کـه نوشتن کتاب را امکان‌پذیر کرده است. هیچیك از این دو ادعا بیش از نیمی راست نیست. از روی لم خلاصه شده[2] در "گشتاورهـا" (کـه در آن اصطلاح فلوکسیون به‌کار نرفته است) هیچ خواننده‌ای نمی‌توانسته تکنیکهایی راکه نیوتن از سال ۱۶۶۴ به‌بعد به‌کاربرد بازسازی‌کند. تا آنجاکه می‌دانیم تنها یك قضیه در اصول (دربارهٔ مادهٔ جامد باکمترین مقاومت) ممکن است با محاسبات فلوکسیونی اثبات شده باشد، به‌این دلیل اثباتی از آن درکتاب نیامده است. مسلم است‌که جز در این مورد، قضیه‌ها به‌همان صورتی که‌نیوتن طرح کرده‌است، چاپ شده‌اند. در واقع، درقضیه‌ها از نهایت کوچکهای هندسی با نبوغ زیادی استفاده می‌شود اما به هیچ‌وجه مسئلهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال به صورت رسمی آن مطرح نیست. تنها مهارت خارق‌العادهٔ نیوتن در ریاضیات به او امکان دادکه‌طرحی به‌عظمت و پیچیدگی اصول را به‌پایان رساند، ولی‌این مهارت درچهارچوب روشهای ریاضی قرن هفدهم به‌کار رفت، و به‌هیچ‌وجه از ریاضیات نوینی که خود نیوتن، و لایب‌نیتس، مستقلاً و با ابهام ایجادکرده بودند، استفاده نشد.

ستایش جان لاك از دوست خود نیوتن، نشان‌دهندهٔ این‌است‌که اصول از ابتدا کتابی مهم در فلسفه و همچنین در ریاضی جلوه کـرد. نیوتن عقاید راسخی در مبانی متعالی و غایات عالم، و در نوع شناخت انسان از آنها داشت. فرایافت او از زمان، فضا و نیرو موجب شد مباحثی عمده در متافیزیك مطرح شود. مسائل مستتر در فلسفهٔ طبیعی نیوتن در مورد تجانس و سادگی طبیعت، در ارتباط تنگاتنگ با این مباحث قرار داشتند. نیوتن اعتقاد داشت‌که دنیای نامرئی با آنچه مرئی‌است‌تقارن دارد، و اینکه دنیای‌میکروسکوپی از تناسب دنیای ماکروسکوپی پیروی‌می‌کند، و اینکه علم‌نیرو و حرکت‌که او برای‌جاذبه بناکرده بود ممکن است مدلی باشدبرای‌توضیح دسته‌های دیگری از پدیده‌ها. گرچه معلوم شد بررسیهای آزمایشی‌شخصی‌نیوتن در نیروهای اپتیکی و شیمیایی بی‌نتیجه است،ولیکن

1. *The System of the World* 2. terse

تعمیمی که او به مفهوم‌سازگاری‌اساسی جهان داد،درتمام سطوح از قلمروساختار تا قلمرو حرکت، محرك بزرگی برای آینده بود.

تا سال ۱۶۸۷ آنهایی که به‌خوبی قدرت نیوتن را به عنوان یك ریاضیدان جوان درك کرده بودند (بارو[1]، کالینز[2]، اسلوس[3]) همگی جان سپرده بودند ـ ولی لایب‌نیتس، که اولین مقالهٔ او در زمینهٔ حساب‌دیفرانسیل و انتگرال سه‌سال پیش از آن به‌چاپ رسیده بود، زنده بود. استاد کمبریج به‌این عنوان که‌واضع چندآزمایش منهورانه در نور است و پیشنهادهای بی‌پروایی در تفسیر آنها کرده است، معروف بود. ظهور غیرمنتظرهٔ او به‌عنوان مؤسس یك سیستم جدید ریاضی برای فیزیك، معارض گستاخ دیدگاه جهانی پذیرفته شدهٔ دکارت و قانونگذار جدید علم، جهان را متعجب کرد. آنان که ابتکارهای قبلی نیوتن در اپتیك را رد کرده بودند (درواقع هرفردی خارج از بریتانیا) بعید بود که ازنیروی جاذبهٔ دور ازفهم استقبال کنند. هم لایب‌نیتس وهم هویگنس، و بسیاری دیگر درطی نیم قرن بعد گونه‌های متفاوتی ازنظریه‌های نوسدکارتی[4]را درمقابل نظریهٔ مکانیك نیروی نیوتنی به‌وجود آوردند. هیچ کس نتوانست درستی رابطه‌های ریاضی راکه بافت اصول را تشکیل می‌دهند انکارکند، اما تعداد اندکی (درخارج بریتانیا) می‌توانستند مفهومهای فیزیکی راکه به‌این روابط معنی می‌داد بپذیرند. تحول "مکانیك نیوتنی" سال ۱۶۸۷ که (برای خیلیها) قابل تردید بود به "مکانیك کلاسیك" که تاج افتخار فعالیتهای فکری قرن نوزدهم است، چندین نسل از ریاضیدانان و فیلسوفان را درگیر روشنگری، تحقیق، و گسترش عقاید و روشهای نیوتن کرد.

درکار تجدیدنظر. نیوتن خود اولین و شاید برجسته‌ترین بود. گرچه فلسفهٔ طبیعی در دومین‌چاپ اصول (۱۷۱۳)، که راجرکوتس[5] آن را ویرایش کرد و دوباره به‌لاتین نوشته شد،نسبت به‌اولین چاپ آن تغییر نکرداما چاپ دوم ازنظرنکات علمی بسیار تکامل یافته‌تر بود. تمام نظریهٔ ماه، قسمت عمده‌ای ازمکانیك سیالات، و تبیین نظام جهان بادقت بیشتری مورد بحث قرار گرفته بود. در اینجا نیوتن افکاری دربارهٔ رابطهٔ خدا و طبیعت مطرح کرد، که طرح آن در پایان اپتیك آمده بود. درچاپ دوم، تعداد نسخه‌ها بیشتربود (۷۱۱ نسخه)، که این برای بنتلی[6] فیلسوف که به‌انتشار آن کمك کرد سودی‌برابر با ۲۰۰ پوند داشت و درسال بعد، همین چاپ در آمستردام دوباره منتشر شد. تغییرات در چاپ سوم (۱۷۲۶) تنها در حد رفع اشتباهات بود.

تا این زمان نیوتن، قهرمان و رئیس انجمن سلطنتی[7]، حاکم مطلق علوم بریتانیا شده بود. بعضی از جوانان اروپا برای تحسین این مرد بزرگ آمدند و پیرو عقاید او شدند. نظریهٔ نور و رنگها،که به صورت تجربی به‌ثبوت رسید، بزودی درهمه‌جا پذیرفته شد. از سال ۱۷۲۵، اروپاییها (به‌ترتیب هلندیها، ایتالیاییها، فرانسویها، وآلمانیها) به‌علم فیزیك نیوتنی گرویدند، گرچه این گرایش هرگز کامل نبود. نیروی زنده (انرژی جنبشی) لایب‌نیتس

1. Barrow 2. Collins 3. Sluse 4. neo-cartesian
5. Roger Cotes 6. Bently 7. Royal Society

می‌بایستی تبدیل به سیستم "نو-نیوتنی" می‌شد، و نظریهٔ موجی نور تن به‌مرگ نمی‌داد. نیوتن در الگوریتم حساب دیفرانسیل وانتگرال به‌علت تأخیر بیش از اندازه در انتشار، شکست خورده بود، به طوری‌که علم ریاضی لاگرانژ و لاپلاس‌که به تازگی شکل گرفته بود به‌زبانی سخن می‌گفت که نیوتن با شدت تمام کوشش کرده بود دربارهٔ آن سکوت کند.

خالصترین خط فکری نیوتنی در نخبگان ریاضی کمبریج تا قرن نوزدهم ادامه یافت. سنت نیوتنی در دو شخصیت بزرگ اسکاتلندی کمبریج، ویلیام تامسون و جیمز کلارك ماکسول، به‌آسانی دیده می‌شود. در زمان آنها آشکار شدن اشکالهای نهفته درساختار علمی با شکوهی که نیوتن به‌دست داده بود (و هیچ وقت کاملا سازگار نبود) شروع شد، زیرا دوران طویل "فلسفهٔ مکانیکی" رو به پایان نهاده و بازسازی نظریهٔ نور و رنگها ضروری شده بود. فیزیك تجربی به‌سمت ساختار دقیقتری پیش می‌رفت، ونظریهٔ ریاضی پیچیده‌تری لازم بود. با این حال، اصول، که از ستونهای اصلی نیرو، جرم و حرکت شروع‌کرده بود، سکوی جهشی برای همهٔ این تحولات بود. نیوتن نه‌تنها برای مکانیك، بلکه برای تمام علم فیزیك (ازجمله الکتریسیته و شیمی)، مجموعهٔ سازگاری از مفاهیم سازمان‌دهنده، و مدلی برای تجربه‌کردن ارائه دادکه پیشرفتهای بعدی را ممکن ساخت.

با اینشتین بودکه مطلق بودن زمان وفضا راکه نیوتن‌آنها را پایه‌های اساسی فیزیك اعلام داشته بود، باطل کند، و درنتیجه فضای متری سادهٔ اقلیدسی راکه نیوتن ومعاصرانش درآن زندگی‌می‌کردند ازمیان برداشت. ذرات صلب وسنگین نیوتنی ازبین‌رفته‌اند (گرچه تصویری که او از سلسله مراتب نظم ذرات به‌دست داد، باقی مانده است)، و مسلم است که خواص مکانیکی اجرام بزرگ با آنچه او فرض می‌کرد، متفاوت هستند. با تمام این احوال، دنیای فیزیکی عادیی که ما می‌بینیم، همان طورکه نیوتن آن را می‌دید، هنوز به خوبی با علم نیوتنی بیان می‌شود. از همه مهمتر نیوتن الگویی از روش تحقیق را بنیاد نهاد که از زمان او تا حال معتبر باقی مانده است، روشی که با تلفیق ریاضیات و تجربه، بینشهای جدیدی پدید می‌آورد و سازگاری بین کوچکترین و بزرگترین موجودات را در نظریهٔ فیزیکی حفظ می‌کند.

ویلیام دانهم

برنولیها و سری همساز•

ترجمهٔ امیراکبری مجدآباد نو

در هر مقدمه‌ای بر مبحث سریهای نامتناهی، باید در اوائل بحث به نخستین مثال ناقض بزرگ از سری واگرایی که جملهٔ عمومیش به صفر میل می‌کند ــ یعنی سری همساز $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ــ اشاره شود. در متون درسی جدید برهانی متداول، منسوب به دانشمند فرانسوی قرن چهاردهم نیکول‌اورم[1] [۳، ص۹۲] به‌کار می‌رود، که در آن واگرایی سری با دسته‌بندی مجموعهای جزئی ثابت می‌شود

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\frac{2}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{4}{2}$$

و به‌طور کلی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{n+1}{2}$$

که از آن نتیجه می‌شود که وقتی n به بینهایت میل کند، مجموعهای جزئی به طور دلخواه افزایش می‌یابند.

ممکن است ریاضیدانان مجرب فراموش کنند که چطور این پدیده در نظر دانشجوی

• Dunham William, "the Bernoullis and the harmonic series", *The College Mathematics*, 18(1987)18.

1. Nicole Oresme

ناآشنا شگفت‌انگیز جلوه می‌کند ــ که با جمع کردن جملاتی که مداوماً کوچکتر می‌شوند، به مجموعی بزرگتر از هرمقدار از قبل تعیین‌شده می‌رسیم. موریس کلاین‌مورخ ریاضیات [۵، ص ۴۴۳] متذکر می‌شود که در ابتدا وقتی این ویژگی سری همساز کشف شد، اگرچه آسیب کلی به جایی نمی‌رساند، ولی مزاحم به نظر می‌رسید.

به نظر نمی‌رسید که چنین سری غیرعادیی مفید باشد، اما توجه خاندان ریاضیدان و فاضل قرن هفدهم، برنولیها، را جلب کرد. در واقع یاکوب برنولی در رسالهٔ ۱۶۸۹ خود تحت عنوان "رساله‌ای در باب سریهای نامتناهی"[1] برهانی کاملاً متفاوت، و همین‌قدر ماهرانه، از واگرایی سری همساز ارائه داد. یاکوب در "رساله" که اکنون ضمیمهٔ شاهکار او فن حدس زدن[2] است که پس از مرگش انتشار یافت، سخاوتمندانه این برهان را به برادرش، یوهان، نسبت می‌دهد. این برادر، درطول زندگی یاکوب گاه‌وبیگاه با او رقابت داشت، با این که بحث "برنولیایی" درمتون تاریخ ریاضیات چون اثر کلاین [۵، ص۲۴۴] و اثر استرویک [۶، ص ۳۲۱] به‌طور خلاصه آمده است، اطلاعات راجع به‌این ماجرا آن‌قدر کم است که نظری اجمالی به آن را ایجاب می‌کند.

برهان مورد نظر، به‌طور غیر منتظره‌ای، به سری همگرای

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

متکی است. خوانندهٔ امروزی می‌تواند به سادگی، با استقرای ریاضی، ثابت کند که

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

و سپس n را به بینهایت میل دهد و نتیجه بگیرد که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

ولی، یاکوب برنولی به روش کاملاً متفاوتی با مسئله برخورد کرد. در بخش XV از "رساله"، او سری نامتناهی

$$N=\frac{a}{c}+\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\frac{a}{4c}+\cdots$$

را در نظر گرفت، سپس قرار داد

$$P=N-\frac{a}{c}=\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\frac{a}{4c}+\frac{a}{5c}+\cdots$$

---

1. Tractatus de Seriebus Infinitis 2. *Ars Conjectandi*

و از تفریق جمله به جمله به دست آورد

$$\frac{a}{c}=N-P=\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{2c}\right)+\left(\frac{a}{2c}-\frac{a}{3c}\right)+\left(\frac{a}{3c}-\frac{a}{4c}\right)+\cdots$$

$$=\frac{a}{2c}+\frac{a}{6c}+\frac{a}{12c}+\frac{a}{20c}+\cdots \qquad (1)$$

بنابراین، او به ازای $a=c$، نتیجه گرفت که

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\frac{1}{1}=1 \qquad (2)$$

متأسفانه، "برهان" برنولی نیازمند به تفریق دو سری واگرای N و P بود. این افتخاری برای برنولی است که به خطرات ذاتی در استدلالش پی‌برد، و توصیه کرد که این شیوه نباید بدون احتیاط به‌کار رود. او به منظور روشن ساختن نظرش، استدلال قبلی را برای سری

$$S=\frac{2a}{c}+\frac{3a}{2c}+\frac{4a}{3c}+\cdots$$

و

$$T=S-\frac{2a}{c}=\frac{3a}{2c}+\frac{4a}{3c}+\frac{5a}{4c}+\cdots$$

به‌کار بست. با تفریق جمله به جمله، به

$$\frac{2a}{c}=S-T=\frac{a}{2c}+\frac{a}{6c}+\frac{a}{12c}+\frac{a}{20c}+\cdots \qquad (3)$$

رسید که تناقض آشکاری با (۱) دارد.

برنولی این تناقض را به‌طریق زیر تحلیل و رفع کرد: استنتاج (۱) معتبر است زیرا که جملهٔ "آخر" سری N صفر است (یعنی داریم $\lim_{k\to\infty} a/(kc)=0$)، درحالی که استنتاج (۳) نامعتبر است زیرا جملهٔ "آخر" سری S ناصفر است (چون

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)a/(kc)=a/c\neq 0$$

به زبان امروزی، برنولی به درستی تشخیص داده بود که صرف‌نظر از همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$، سری جدید $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ به x_1 همگراست به شرطی که $\lim_{k\to\infty}x_k=0$. بنابراین، او نه‌تنها نیاز به "احتیاط" در بحث اولیه‌اش را توضیح داد بلکه نشان داد که با معیارهای آن روز، بینش عمیقی در مورد مسئلهٔ کلی همگرایی و واگرایی دارد.

پس‌از آنکه یاکوب خاصیت (۲) را به‌این‌طریق، به خاطر خشنودی خودش، ثابت کرد، به خودسری همساز پرداخت. او با به‌کارگیری تحلیل برادرش از سری همساز، در بخش XVI از "رساله" اعلام کرد:

XVI. مجموع سری همساز نامتناهی $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$، نامتناهی است.

وی برای اینکه استدلال‌کند "مجموع سری همساز نامتناهی

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

نامتناهی است" کار را با معرفی زیر آغازکرد

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

که با تبدیل به کسوری که صورتشان ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و غیره هستند، به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}+\cdots$$

سپس یاکوب با به‌کارگیری (۲) محاسبات زیر را انجام داد

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=1$$

$$D=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=C-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=D-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$F=\frac{1}{20}+\cdots=E-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

با جمع ستونی این آرایه، و دوباره با این فرض ضمنی که جمع جمله به جملهٔ سریهای نامتناهی مجاز است به نتایج زیر رسید

$$C+D+E+F+\cdots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\cdots$$

$$=A$$

از سوی دیگر، با جمع جداگانهٔ جملات تشکیل دهندهٔ سمت چپ و سمت راست معادلات آرایهٔ بالا، رابطهٔ زیر را به دست آورد

$$C+D+E+F+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=1+A$$

بنابراین، $A=1+A$. به زبان خود یاکوب، "کل" مساوی "جزء" است ـ یعنی، سری همساز $1+A$ مساوی جزء Aی خود می‌باشد ـ که برای مقداری متناهی ناممکن است. او از اینجا نتیجه گرفت که $1+A$ نامتناهی است.

یاکوب برنولی مطمئناً به اهمیت استنتاج برادرش واقف بود و هنگامی که جملهٔ زیر را می‌نوشت بر نکتهٔ برجستهٔ این استنتاج تأکید داشت

مجموع یك سری نامتناهی که جملهٔ نهاییش به صفر میل می‌کند شاید متناهی، و شاید نامتناهی باشد.

این برهان به‌طور واضح نما یانگر یك برخورد طبیعی با عملیات روی سریها و نیز طبیعت "بینهایت" است. به علاوه، این برهان سری نامتناهی را به عنوان یك موجود، بدون توسل به ایدهٔ جدید مجموعهای جزئی، مورد بررسی قرار می‌دهد. معهذا، قبل از انتقاد افراطی از برهان او که به وضوح رنگ و بوی قرن هفدهمی دارد، باید اذعان کنیم که برنولی این برهان را یك قرن و نیم قبل از ظهور نظریهٔ واقعاً دقیقی از سریها، ابداع کرد. به علاوه، نه می‌توانیم سادگی و روشنی استدلال او را انکار کنیم و نه این حقیقت را که، اگر این برهان به وسیلهٔ آنالیز نوین تقویت شود می‌تواند به‌عنوان جانشینی مناسب برای برهان متداول به‌کار رود.

در واقع، این بحث مثالی از تاریخ ریاضیات در بهترین حالتش را در اختیار ما می‌گذارد. تجلیلی از گذشته و در عین‌حال، افزودن تکانی که برای کلاسهای درس امروزی نیز جنبهٔ تازگی و ابتکار دارد. شاید، با مطالعهٔ فوق، برخی از دانشجویان امروزی هم در آن اشتیاق و حیرتی سهیم شوند که باعث شد یاکوب برنولی "رساله"اش را با شعر زیر، ختم کند [۷]

چنین روح بزرگی در لحظات سکنی گزیده است.
و در محدودترین حدود نه حدودی مانگار.
چه‌قدر از مشاهدهٔ لحظه در بینهایت لذت می‌برم!
دولهٔ وسعت در کوچکی، چه الوهیتی!

قبصره. یاکوب برنولی، که مشتاق بررسی دیگر سریهای نامتناهی بود، به زودی در بخش XVII "رساله" توجهش به سری زیر جلب شد

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad (۴)$$

که محاسبهٔ آن "مشکلتر از حد انتظار است"، اظهار عقیده‌ای که حقیقت را به‌طور کامل بیان نمی‌کند. او همگرایی (۴) را به وسیلهٔ مقایسهٔ جمله به جملهٔ آن با سری بزرگتر و در عین حال همگرای

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots\right)$$

$$=2(1)=2$$

ثابت کرد. اما، یاکوب حریف محاسبهٔ مجموع (۴) نبود؛ او با ناراحتی نوشت،

چنانچه کسی مجموع فوق را بیابد و با ما مکاتبه کند که چه عاملی تا به حال کوششهای ما را نافرجام گذاشته است، از او بسیار سپاسگزار خواهیم بود.

البته، محاسبهٔ (۴) در برابر تلاشهای نسل دیگری از ریاضیدانان تا ۱۷۳۴ مقاومت کرد؛ در این زمان که لئونهارت اویلر بی‌همتا روشی بسیار هوشمندانه ابداع کرد تا نشان دهد که مجموع فوق $\pi^2/6$ است. این نتیجه، که متأسفانه یاکوب برنولی زنده نبود تا آن را ببیند، مطمئناً از غیرمترقبه‌ترین و عجیب‌ترین چیزها در تمامی ریاضیات است. برای ملاحظهٔ برهان اصلی رجوع کنید به [۴]، صفحات ۸۳–۸۵. شرح جدیدی از استدلال اویلر را می‌توان در [۲]، صفحات ۴۸۶ – ۴۸۷ یافت.

مراجع

1. Bernoulli Jakob, *Ars Conjectandi*, Basel, (1713).
2. Boyer Carl B. *A History of Mathematics*, Princeton University Press, (1985).
3. Edwards C.H, *The Historical Development of the Calculus* Springer-Verlag. New York, (1979).
4. Euler Leonhard, *Opera Omnia* (1), Vol.14 (C. Boehm and G. Faber, editors), Leipzig, (1925).
5. Kline Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, (1972).
6. Struik D.J, (editor), *A Source Book in Mathematics (1200-1800)*, Harvard University Press, (1969).
7. Translated from the Latin by Helen M. Walker, as noted in David E. Smith's *A Source Book in Mathematics*, Dover, New York, (1959), p. 271.

بروك هایمر، برایان، موير

گروههایی که اجتماع سه زیرگروه هستند•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

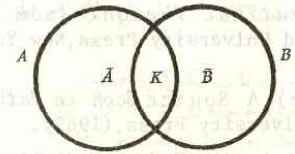
در این مقاله، گروههایی را که می‌توان به صورت اجتماع سه زیرگروه بیان کرد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای کامل بودن مطلب، نخست حالت دو زیرگروه را مطرح می‌کنیم. هرچند این مطلب برای خواننده آشناست، ولی اثباتی که از آن می‌آوریم مشابه با برهانهای بعدی است.

لم۱. بجز در حالات بدیهی، یك گروه را نمی‌توان به‌صورت اجتماع دو زیرگروه بیان کرد.

برهان: فرض کنید G یك گروه باشد ودو زیرگروه A و B از G وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$A\cup B=G$$

واضح است که $A=G$ یا $B=G$ (یعنی $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$) دو حالت ممکن را نمایش می‌دهند. از این پس چنین حالات بدیهی را که یکی از دو زیرگروه، زیرمجموعه‌ای از دیگری است، کنار می گذاریم. پس فرض کنید که شکل ۱ وضعیت موجود را نمایش می‌دهد.



$\bar{A}=A\setminus B$
$\bar{B}=B\setminus A$
$K=A\cap B$

شکل۱

• Bruckheimer M., Bryan A. C., and Muir A., "groups which are the union of three subgroups", *Amer. Math. Monthly*, 77(1970)52.

که در آن $A'\neq\varnothing$ و $B'\neq\varnothing$. اگر $a'\in A'$ و $b'\in B'$ آنگاه

$$a'b'\in A\Rightarrow b'\in A$$

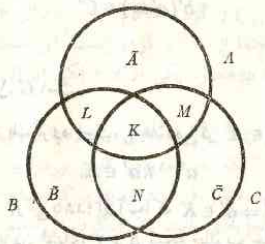
$$a'b'\in B\Rightarrow a'\in B$$

که هردو حالت، خلاف فرض می‌باشند. پس $a'b'\notin A\cup B=G$ که این نیز بابسته بودن G تحت قانون ترکیب منافات دارد.

حال، به‌حالت سه زیرگروه می‌پردازیم وفرض‌می‌کنیم که A، B، و C سه‌زیرگروه G باشند به‌قسمی که

$$A\cup B\cup C=G$$

اگر $A\subseteq B$ (و دیگر حالات مشابه) عملاً با حالت دو زیرگروه سروکار داریم. بنابر لم ۱ چنین چیزی ممکن نیست. پس شکل ۲ وضعیت موجود را نمایش می‌دهد که در آن A'، B'، و C' لزوماً مجموعه‌های ناتهی هستند.



شکل۲

لم۲. $L=M=N=\varnothing$.

برهان: اگر $l\in L$ و $c'\in C'$ آنگاه

$$c'l\in C\Rightarrow l\in C$$

$$c'l\in B\Rightarrow c'\in B$$

$$c'l\in A\Rightarrow c'\in A$$

که هرسه‌خلاف فرض‌می‌باشند، ازآنجاکه $C'\neq\varnothing$ بایدداشته‌باشیم $L=\varnothing$، وبه‌طریق مشابه $M=N=\varnothing$.

لم۳. هریك از مجموعه‌های A'، B'، و C'، وارونهای عناصرش را در بر دارد.

برهان: اگر a' عنصری از A' باشد وارونش a'^{-1} در یکی از دو مجموعهٔ A' یا

K قراردارد. فرض کنید $a'k=e\in K$. حال $a'^{-1}=k\in K$ به $a'\in K$ می‌انجامد. پس $a'^{-1}\in A'$.

لم ۴. اگر $a'\in A'$ و $b'\in B'$، آنگاه $a'b'\in C'$.

برهان: برهان مانند لمهای قبل، از طریق یافتن تناقض به‌دست می‌آید.

لم ۵. اگر $a'_1, a'_2\in A'$، آنگاه $a'_1a'_2\in K$.

برهان: عنصر $a'_1a'_2$ در یکی از دو مجموعهٔ A' یا K قراردارد. فرض می‌کنیم که عنصری از A' باشد و عنصر $b'a'_1a'_2$ را، که در آن b' عنصری از B' است، در نظر می‌گیریم. با دوبار استفاده از لم ۴ خواهیم داشت

$$(b'a'_1)a'_2\in B'$$

از طرف دیگر، با استفاده از فرض و با به‌کاربردن لم ۴ خواهیم داشت

$$b'(a'_1a'_2)\in C'$$

پس $a'_1a'_2\in K$.

لم ۶. K یك زیرگروه نرمال G است.

برهان: به‌وضوح K یك گروه است. به‌علاوه اگر $a'\in A'$ و $k\in K$ باشد، آنگاه

$$a'^{-1}ka'\in K$$

زیرا ka' عنصری از A' یا K می‌باشد؛ از آنجا که $ka'\in K\Rightarrow a'\in K$، ka' با یدعنصری از A' باشد، حال با به‌کاربردن لمهای ۳ و ۵ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

آن همرده‌های چپ K که به‌صورت $a'K$ هستند، به‌وضوح زیرمجموعه‌های A' می‌باشند. در واقع

لم ۷. $a'K=A'$.

برهان: فرض کنیم عنصری چون $a'_1\in A'$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $a'_1\notin a'K$. در این‌صورت بنابر لمهای ۳ و ۵ داریم $a'^{-1}a'_1=k\in K$. بنابراین برای یك $k\in K$، $a'_1\in a'K$.

ازلم فوق همراه با لم ۴ نتیجه می‌شود که گروه خارج‌قسمت G/K گروه چهارتایی کلاین است.

قضیهٔ ۱. یك گروه G، اجتماع سه زیرگروه (غیربدیهی) است اگر و فقط اگر، با گروه چهارتایی کلاین همریخت باشد.

برهان: نیمی ازقضیه قبلاً ثابت شده است؛ حال کافی است نشان دهیم که اگر G با V همریخت باشد آنگاه به‌صورت اجتماعی ازسه زیرگروه است. گیریم K هستهٔ همریختی

و A'، B'، و C' همرده‌های آن باشند. ساختار A را که در آن

$$A=A'\cup K$$

در نظر بگیرید.

(الف) A بسته است، زیرا

$$\left.\begin{aligned}A'A'=K&\Rightarrow a'a'_1\in K\\A'K=A'&\Rightarrow a'k\in A'\end{aligned}\right\}\text{برای هر } a', a'_1\in A \text{ و هر } k\in K \text{ داریم}$$

(ب) $a\in A\Rightarrow a^{-1}\in A$، زیرا در V هرعنصر وارون خودش است.

که این مطلب اثبات را به‌انجام می‌رساند.

از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که مرتبهٔ G در صورت متناهی بودن به‌صورت $4m$ است. واضح است که گروههای زیادی ازمرتبهٔ $4m$ وجود دارند که اجتماع سه زیرگروه نیستند. برای نمونه گروه دوری C_{4m} و گروه متناوب A_n، به‌ازای $n>4$، از این جمله‌اند. یك گروه موضعاً دوری[1] نیز اجتماع سه زیرگروه نیست. این مطلب از لم ۵ و مثلاً با ملاحظهٔ زیرگروه پدیدآمده توسط دوعنصر، یکی از A' و یکی از B'، نتیجه می‌شود. این زیرگروه نمی‌تواند دوری باشد.

ازطرف دیگر می‌توان مثالهای متعددی از گروههای مرتبهٔ $4m$، که اجتماع سه زیرگروه هستند ارائه داد. پیش از آنکه به‌بررسیهای کلیتر بپردازیم، مثالهایی در این زمینه ارائه خواهیم داد. در این مثالها به‌تجزیهٔ یك گروه به‌زیرگروهها (۳ زیرگروه) اشاره می‌کنیم و گروهی که دارای چنین تجزیه‌ای باشد یك ۳-گروه می‌نامیم.

مثال ۱. واضح است که V خود دارای چنین تجزیه‌ای می‌باشد

$$V\to\{C_2, C_2, C_2\}$$

مثال ۲. پنج گروه از مرتبهٔ ۸ وجود دارد. با صرف‌نظر کردن از C_8، گروههای $C_4\times C_2$، $C_2\times C_2\times C_2$، D_4، و Q (گروه کواترنیونها) باقی می‌مانند که هریك تجزیه‌ای به‌صورت زیردارد

$$C_4\times C_2\to\{C_4, C_4, V\}$$

$$C_2\times C_2\times C_2\to\{V, V, V\}$$

$$D_4\to\{C_4, V, V\}$$

$$Q\to\{C_4, C_4, C_4\}$$

1. locally cyclic

گروه G را موضعاً دوری نامیم هرگاه هرزیرگروه آن که دارای مولدی متناهی باشد، مولدی تك عنصری نیز داشته باشد (دوری باشد). برای نمونه گروه جمعی اعداد گویا، هر گروه دوری دلخواه، و ... از این جمله‌اند.ـم.

توجه به‌این نکته ضروری است که تنها ۴ تجزیهٔ ممکن برای یك گروه از مرتبهٔ ۸ وجود دارد، ومثال فوق نمونه‌ای ازهریك ارائه می‌دهد. (دوتجزیهٔ $\{X, Y, Z\}$ و$\{X_1, Y_1, Z_1\}$ را یکسان گوییم هرگاه یکریختیهای $X \to X_1$، $Y \to Y_1$، و$Z \to Z_1$ موجود باشند.)

مثال۳. گروه دو وجهی D_{2m} از مرتبهٔ $4m$ که توسط روابط

$$a^{2m} = b^2 = (ab)^2 = e$$

تعریف می‌شود، به‌ازای هرمقدارm به‌سه زیرگروه تجزیه می‌شود. زیرگروه K که در آن

$$K = \{e, a^2, \ldots, a^{2(m-1)}\}$$

نرمال است وگروه خارج‌قسمت D_{2m}/K، V می‌باشد. این تجزیه عبارت است از

$$D_{2m} \to \{C_{2m}, D_m, D_m\}$$

مثال۴. گروه شبه‌دوری[1]، از مرتبهٔ $4m$ که توسط روابط

$$a^{2m} = e, \quad a^m = (ab)^2 = b^2$$

تعریف می‌شود، به‌ازای هرعدد زوج m، به‌سه‌زیرگروه تجزیه می‌شود. زیرگروه K، که در آن

$$K = \{e, a^2, \ldots, a^{2(m-1)}\}$$

نرمال است و گروه خارج قسمت G/K، V است. زیرگروههای این تجزیه، C_{2m} و دو زیرگروه شبه‌دوری، هریك از مرتبهٔ $2m$، هستند.

بلافاصله این‌دو سؤال مطرح می‌شوند:

(الف) آیا یك ۳-گروه می‌تواند دو تجزیهٔ متفاوت داشته باشد؟

(ب) آیا دو ۳-گروه متمایز می‌توانند تجزیهٔ یکسانی داشته باشند؟

همانگونه‌که انتظار می‌رود، هردو سؤال فوق با توجه به‌مثالهای زیر دارای پاسخ مثبت هستند.

مثال۵. $C_2 \times D_4$ دارای دو تجزیهٔ متفاوت است

$$C_2 \times D_4 \to \{C_4 \times C_2, D_4, D_4\}$$

و

$$C_2 \times D_4 \to \{C_4 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2\}$$

مثال۶. گروهی از مرتبهٔ ۱۶ که توسط روابط زیر تعریف می‌شود

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad abc = bca = cab$$

دارای تجزیه‌ای به‌صورت $\{C_4 \times C_2, D_4, D_4\}$ است که، طبق مثال ۵، تجزیه‌ای از

1. dicyclic

$C_2 \times D_4$ نیزهست.

اگر یك ۳-گروه غیرآبلی باشد، آنگاه زیرگروههای یك تجزیه می‌توانند (موضعاً) آبلی (Q) ویا غیرآبلی (π) باشند. ازاین دیدگاه چهارنوع تجزیهٔ ممکن خواهیم داشت

$$\{\pi, \pi, \pi\}, \{Q, \pi, \pi\}, \{Q, Q, \pi\}, \{Q, Q, Q\}$$

اما ثابت می‌کنیم‌که تجزیه‌ای به‌صورت $\{Q, Q, \pi\}$ امکان‌پذیر نیست.

لم۸. اگر $G \to \{A, B, C\}$ و B و A آبلی باشند، آنگاه C نیز آبلی است.

برهان: ازآنجاکه $K \subset A$، K آبلی‌است. اگر c' وc'_1 متعلق به C' باشند، می‌توان نوشت $c' = a'b'$ و $c'_1 = a'_1 b'_1$ که در آن $a', a'_1 \in A'$ و $b', b'_1 \in B'$؛ و از اینجا نتیجه می‌شود که C' آبلی است. به‌طریق مشابه، عناصر C' وK نیز جابه‌جا می‌شود.

مثال‌زیر، نشان می‌دهد که هرسه نوع تجزیهٔ باقیمانده وجود دارند.

مثال۷.

$Q \to \{C_4, C_4, C_4\}$	به‌شکل	$G \to \{Q, Q, Q\}$ است
$D_6 \to \{C_6, S_3, S_3\}$	به‌شکل	$G \to \{Q, \pi, \pi\}$ است
$S_3 \times V \to \{D_6, D_6, D_6\}$	به‌شکل	$G \to \{\pi, \pi, \pi\}$ است

این نتایج را در قضیه‌ای جمعبندی می‌کنیم.

قضیه۲. هرتجزیهٔ یك ۳-گروه به‌یکی ازشکلهای $\{Q, Q, Q\}$، $\{\pi, \pi, \pi\}$، و $\{Q, \pi, \pi\}$ است.

اگر یك ۳-گروه مانند G، آبلی باشد مرکزش خود G است. برای ۳-گروههای غیرآبلی دو نتیجهٔ زیر را داریم.

قضیه۳. یك ۳-گروه غیرآبلی‌دارای یك تجزیهٔ آبلی یعنی، $G \to \{Q, Q, Q\}$ است، اگر و فقط اگر مرکز G، K باشد.

برهان: گیریم $\{A, B, C\}$ تجزیه‌ای از G و Z مرکز G باشد.

نخست فرض می‌کنیم A، B، وC آبلی باشند در این صورت $K \subseteq Z$. حال فرض می‌کنیم $K \subset Z$. برای هر $c' \in C'$ می‌توان عنصری مانند $b' \in B'$ یافت به‌قسمی که $c' = a'_1 b'$، $a'_1 \in A' \cap Z$. پس برای هر $b \in B$ داریم: $c'b = bc'$. ازآنجاکه $K \subseteq Z$ این رابطه نشان می‌دهدکه عناصر B وC جابه‌جا می‌شوند.

برای هرعنصر $a' \in A'$ نیز می‌توان عنصری چون $k \in K$ یافت‌که $a' = a'_1 k$. پس برای هر $b \in B$ داریم $a'b = ba'$ وبنابراین عناصر A و B نیز جابه‌جا می‌شوند. به‌طریق مشابه می‌توان نشان دادکه عناصر A و C نیز جابه‌جا می‌شوند.

این بدین‌معنی است‌که G آبلی است‌که این تناقض است پس $Z = K$.

به‌عکس فرض کنیم $Z=K$؛ برای هر عنصر ثابت $a'_1\in A'$ و برای هر $a'\in A'$ عناصری چون $k\in K$ وجود دارد به قسمی که $a'=a'_1k$ و از اینجا نتیجه می‌شود که A آبلی است. به‌همین ترتیب B و C نیز آبلی هستند.

قضیهٔ ۴. اگر G دارای تجزیه‌ای چون $\{A, B, C\}$ از نوع $\{Q, \pi, \pi\}$ باشد آنگاه Z، یعنی مرکز G، در A قرار دارد.

برهان: فرض کنید $b'_1\in B'\cap Z$. برای هر $b'\in B'$ عنصری چون $k\in K$ وجود دارد به‌قسمی که $b'=b'_1k$ و از این مطلب نتیجه می‌شود که عناصر B' و K جابه‌جامی‌شوند. بنابراین B آبلی است که خلاف فرض است. به‌طریق مشابه $C'\cap Z=\varnothing$.

مثال ۸. برای $D_5\to\{C_6, S_3, S_3\}$ مرکز G یعنی Z چنان‌است که $Z\cap A'\neq\varnothing$.

از قضایای ۳ و ۴ دیده می‌شود که اگر G تجزیه‌ای چون $\{A, B, C\}$ از نوع $\{Q, \pi, \pi\}$ داشته باشد مرکزش Z، یا زیرمجموعهٔ سره‌ای از K است یا حداکثر عناصری از A' را نیز شامل می‌باشد. آیا هنگامی که از نوع $\{\pi, \pi, \pi\}$ است امکانات دیگری نیز وجود دارد؟ واضح است که حالتی که Z شامل عناصری از A' و B' باشد ولی شامل عنصری از C' نباشد، امکان‌پذیر نیست، زیرا $Z\cap A$ و $Z\cap B$ گروه هستند و یک گروه را نمی‌توان به‌صورت اجتماع غیربدیهی دو زیرگروه نوشت (لم ۱). اما این امکان وجود دارد که Z شامل عناصری از A'، B'، و C' باشد. در این حالت لزوماً Z خود یک ۳-گروه با تجزیهٔ $\{Z\cap A, Z\cap B, Z\cap C\}\to Z$ است. (البته، در دیگر حالات نیز ممکن است Z یک ۳-گروه باشد.) وجود چنین تجزیه‌ای ایجاب می‌کند که K غیرآبلی باشد زیرا اگر K آبلی باشد، برای نمونه می‌توان ثابت کرد که A آبلی است. روش اثبات مشابه برهان قضیهٔ ۲ است.

مثال ۹. در تجزیهٔ $S_3\times V\to\{D_6, D_6, D_6\}$ هیچ‌یک ازمجموعه‌های $Z\cap A'$، $Z\cap B'$، و $Z\cap C'$ تهی نیست.

فرض کنید $I'(A)$ مجموعهٔ خودریختیهای درونی G باشد که توسط عناصر A تعریف می‌شوند، در این صورت $I'(A)$ زیرگروهی از $I(G)$، گروه خودریختیهای درونی G، خواهد بود؛ بدیهی است که: $I(G)=I'(A)\cup I'(B)\cup I'(C)$، پس قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۵. گروه خودریختیهای درونی یک ۳-گروه مانند G یا خودش یک ۳-گروه است یا تبهگون است، بدین معنی که $I(G)$ یا برابر یکی از ۳ زیرگروه $I'(A)$، $I'(B)$ یا $I'(C)$ است.

باید توجه داشت همان گونه که در مثال بعد نشان خواهیم داد تبهگونی به‌صورتی که در قضیهٔ ۵ تعریف شد با ۳-گروه بودن $I(G)$ منافاتی ندارد. اما تا آنجاکه با ساختار $I(G)$ در ارتباط با تجزیهٔ $G\to\{A, B, C\}$ سروکار داریم تعریف فوق مناسب است.

مثال ۱۰.

$Q\to\{C_4, C_4, C_4\}$; $I(G)=V$ (ناتبهگون)

$D_6\to\{C_6, S_3, S_3\}$; $I(G)=I'(S_3)=S_3$ (تبهگون)

$C_2\times D_2\to\{C_2\times C_2, D_2, D_2\}$: $I(G)=I'(D_2)=V$ (تبهگون)

$C_2\times D_2\to\{C_2\times C_2, C_2\times C_2\times C_2, C_2\times C_2\times C_2\}$: $I(G)=V$ (ناتبهگون)

به‌ازای یک تجزیهٔ آبلی از یک ۳-گروه غیرآبلی G، از قضایای ۱ و ۳ نتیجه می‌شود که $I(G)=G/Z=V$. بنابراین داریم:

قضیهٔ ۶. یک ۳-گروه غیرآبلی دارای یک تجزیهٔ آبلی است اگر وفقط اگرگروه خودریختیهای درونی آن گروه، چهارتایی کلاین باشد.

بالاخره، رابطهٔ بین ساختار ۳-گروه و تبهگونی $I(G)$ را بررسی می‌کنیم. این رابطه توسط قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ ۷. گروه خودریختیهای درونی یک ۳-گروه تبهگون است اگر و فقط اگر مرکز آن عناصری به‌جز عناصر K را نیز در داشته باشد.

برهان: فرض کنید $a'_1\in A'\cap Z$. از آنجا که برای هر $b'\in B'$ عناصری چون $c'\in C'$ وجود دارد به‌قسمی که $b'=c'a'_1$. اگر آن خودریختی درونی G را که توسط g تعریف می‌شود با $i(g)$ نمایش دهیم. آنگاه $i(b')=i(c')$. پس $I'(B')=I'(C')$ و $I'(B)=I'(B')\cup I'(K)=I'(C)$. یعنی $I(G)$ تبهگون است.

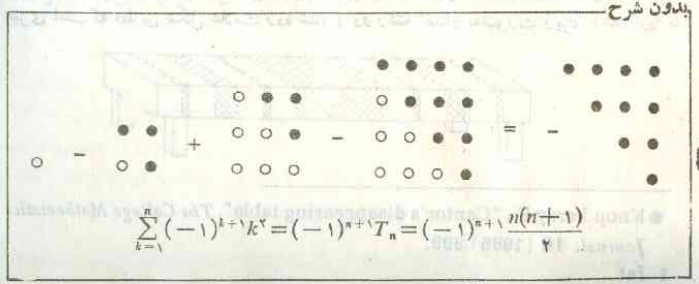
درواقع، از آنجاکه هرعنصر $a'\in A'$ به‌ازای یک عنصر $k\in K$ به‌صورت $a'=a'_1k$ است، خواهیم داشت $i(a')=i(k)$. پس $I'(A)=I'(K)$ و در نتیجه $I(G)=I'(B)$. به‌عکس، از $I'(B)\subseteq I'(C)$ نتیجه می‌شود

(الف) $i(b')=i(k)\Rightarrow b'\in kZ\Rightarrow Z\cap B'=\varnothing$

یا

(ب) $i(b')=i(c')\Rightarrow b'\in c'Z\Rightarrow Z\cap A'=\varnothing$

بدون شرح



$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}T_n=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

ص ۱۴۶ پ‌ق

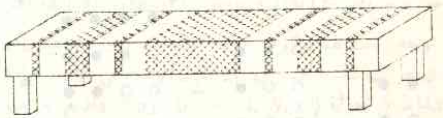
لاری کنوپ

میز ناپدید شوندهٔ کانتور•

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو

گهگاه مفیداست به‌محصلین متذکر شویم که‌در ریاضیات چیزی بیش از فرمولها ودستورالعملهای عادی است وحتی ایده‌های ساده ممکن‌است نتایجی منطقی دربرداشته باشندکه شهود انسان را مغشوش سازد. استدلال مصور زیر برخواص یك مجموعهٔ "جسیم"[1] مبتنی است، وتنها زمینهٔ لازم برای مطالعهٔ آن، حد دنباله‌ها و مجموع یك سری هندسی است.

در آغاز، میزی (یا هرشیئی)که دارای طول متناهی l باشد، انتخاب کنید. محصلین را ترغیب کنیدکه میز را با حذف دقیقاً نیمی از آن ناپدید کنند. شهود (شهود فردمبتدی [دانشجوی سال اول]) می گویدکه این‌غیرممکن‌است. برای نشان دادن اینکه چنین‌نیست، نقطهٔ وسط میز را علامت بگذارید وقطعهٔ به‌طول $l/4$ و به‌مرکز نقطهٔ وسط را حذف کنید. (برای نشان دادن قطعه‌ای از میز که حذف می‌شود با تکه‌ای گچ آن قسمت را علامت بگذارید.) در این مرحله، $1/4$ میزحذف شده است و هرکدام از قطعات باقیماندهٔ طولی کمتر از $l/2$ دارند. بعد، $1/8$ میز را به‌وسیلهٔ قطعاتی به‌طول $l/16$ و به‌مراکز دوقسمت باقیمانده حذف کنید. حالا، مقداری از میز کـه حذف شده است $1/8+1/4$ است، و هرکدام از قطعات باقیمانده طولی کمتر از $l/4$ دارند. این روند را ادامه دهید، حاصل میزی است که مطابق شکل علامت زده شده و دو رشتهٔ اعداد به‌صورت زیر:



• Knop Larry E., "Cantor's disappearing table", *The College Mathematics Journal*, **16** (1985) 398.

1. fat

قسمتی از میز که حذف شده است: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$

طولهای باقیماندهٔ کمتر از: $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{8}, \frac{l}{16}, \dots$

از آنجاکه کل قسمتی از میز که کنار گذاشته شده مجموع سری هندسی فوق است، همان‌طورکه وعده کرده بودیم، دقیقاً نیمی از میز حذف شده است. از طرف دیگر، طول هر قطعهٔ باقیمانده نه کوچکتر از "۰" و نه بزرگتر از حد دنبالهٔ فوق ــ که "۰" است ــ می‌باشد. قطعه‌ای ازمیز که طول غیرصفرداشته باشد باقی‌نمانده است: میزناپدید شده‌است.

لحظه‌ای سکوت، پاسخ طبیعی این نتایج است. آیا حقیقتاً چیزی از میز باقی‌مانده است؟ به‌علت روش اجرا شدهٔ فوق، به‌نظر نمی‌رسدکـه تلاش برای تعیین نقاط باقیمانده فایده‌ای داشته باشد. با این‌حال، نشان دادن اینکه هنوز میز وجود دارد، آسان است. تنها ابزار موردنیاز، شیئی بلندتر از $1/4$ طول میز است. (برای میزهای کوچك، یك کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال عـالی است.) کافی است شیئ را روی میز قـرار دهید و تحقیق کنیدکه آیا آن شیء خواهد افتاد یا نه. برای افتادن، شیئ باید از میان قطعه‌ای که حذف شده است، عبورکند. از آنجایی‌که شیئ بلندتر از $1/2$ است، متناسب با هیچ قطعهٔ حذف شده‌ای نیست، نه، نخواهد افتاد: هنوز میزوجود دارد و، در حقیقت، $1/2$ میزهنوز آنجاست. فقط می‌توان گفت قطعه‌ای ازمیز که طول غیرصفر داشته باشد باقی‌نمانده است.

برای تکمیل کار، از محصلین بخواهید که نشان دهند چگونه ممکن است میزی با حذف $1/4$ آن ناپدید شود. آیا می‌توان همین‌کار را با حذف $1/10$ میزانجام داد؟ این نمایش فقط ۱۰ دقیقه از وقت‌کلاس، به‌علاوهٔ کمی کار خارج کلاس، در صورت تمایل محصلین، را اشغال می‌کند. محصلین این نتایج را خواهند پذیرفت ــ منطق این‌نتایج بیش از حد ساده و سرراست است ــ اما محصلین از این نتایج احساس راحتی نخواهند کرد: نصف میز باقی‌مانده است، اما هیچ قطعه‌ای با طول غیرصفر وجود ندارد! رازها در میان ایده‌هایـی ساده پنهان شده‌اند و ممکن است در آنجا ریاضیات عمیقتری از آنچه‌که آنها تصورمی کرده‌اند، موجود باشد. نشان دادن این‌مطلب به‌محصلین، ارزش وقتی‌راکه صرف آن می‌شود، دارد.

استفن کمپبل

شمارشپذیری مجموعه‌ها•

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو

در درسهای مقدماتی، معمولاً شمارشپذیری اعداد گویا با استفاده از استدلالهای مبتنی بر قطری‌سازی ثابت می‌شود. ولی روش‌دیگری نیز هست که شاید از لحاظ شهودی مناسبتر باشد. این ایده از من نیست؛ من آن را ۱۵ سال پیش شنیده‌ام. اما پس از آن هرگز به‌شخص دیگری که آن را شنیده باشد، برخورد نکرده‌ام.

گوییم عدد اصلی دو مجموعه یکی است هرگاه هریك از آن دو مجموعه را بتوان به‌طریقی یك‌بیك به دیگری نگاشت. یك مجموعه شمارشپذیر است هرگاه عدد اصلی آن با عدد اصلی اعداد صحیح یکی باشد.

قضیهٔ ۱. مجموعهٔ اعداد گویا شمارشپذیر است.

برهان: واضح است که اعداد صحیح را می‌توان با اعداد گویا نگاشت. حال ملاحظه کنید که هر عدد گویای a/b یك عدد صحیح در مبنای ۱۱ است که در آن / به‌عنوان نمادی اضافی به‌جای ۱۰ به‌کار می‌رود. فهو المطلوب.

مثلاً داریم

$$\frac{۲}{۳}=۲(۱۱^۲)+۱۰(۱۱^۱)+۳(۱۱^۰)=۳۵۵$$

توجه کنید که ما در واقع نشان داده‌ایم که مجموعهٔ همهٔ نمایشهای اعداد گویا شمارشپذیر است.

بدیهی است که با نوشتن عبارات به‌شکل "نمادهای پردازش کلمات" و به‌کارگیری مبناهایی بزرگتر، به‌آسانی می‌توان شمارشپذیری بسیاری از مجموعه‌های دیگر را نشان داد. مثلاً، مجموعهٔ چندجمله‌ایها روی اعداد گویا را می‌توان با استفاده از مبنای ۱۶ با نمادهای

$$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, /, +, -, ٪, \&, x\}$$

به‌اعداد صحیح نگاشت که در آن، ٪ اندیس آغازی، & اندیس پایانی و x متغیر مستقل است.

• Campbell Stephen L., "countability of sets", *Amer. Math. Monthly*, 83(1976)480.

جیمز مك‌کی

برهان دیگری از قضیهٔ کوشی در مورد گروهها•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

از آنجا که $ab=۱$ نتیجه می‌دهد $ba=b(ab)b^{-۱}=۱$. پس در جدول ترکیب یك گروه متناهی، عناصر همانی به‌طور متقارن پخش شده‌اند. هر سطر جدول ترکیب، دقیقاً یك عنصر همانی را در بردارد، و بنابراین اگر گروه از مرتبهٔ زوج باشد، تعداد عناصر همانی روی قطر اصلی زوج است. پس، تعداد جوابهای معادلهٔ $x^۲=۱$ زوج است.

با تعمیم این مطلب، برهان ساده‌ای از قضیهٔ کوشی به‌دست می‌آید.

قضیهٔ کوشی. اگر عدد اول p مرتبهٔ گروه متناهی G را بشمارد، آنگاه تعداد جوابهای معادلهٔ $x^p=۱$ در G، مضربی از p خواهد بود.

فرض می‌کنیم G از مرتبهٔ n باشد، و عنصر همانی G را با ۱ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ

$$S=\{(a_۱, \cdots, a_p) \mid a_i \in G,\ a_۱a_۲\cdots a_p=۱\}$$

$n^{p-۱}$ عنصر دارد. یك رابطهٔ هم‌ارزی روی S بدین صورت تعریف می‌کنیم که دو p تایی را هم‌ارز گوییم هرگاه یکی، جایگشتی دوری از دیگری باشد.

اگر همهٔ مؤلفه‌های یك p تایی یکسان باشند، ردهٔ هم‌ارزی آن تنها یك عنصر دارد، در غیر این صورت، اگر دو مؤلفهٔ یك p تایی متمایز باشند، ردهٔ هم‌ارزی آن شامل p عنصر است.

اگر تعداد جوابهای معادله $x^p=۱$ را با r نمایش دهیم، آنگاه r برابر با تعداد رده‌های هم‌ارزی تك عنصری است. اگر تعداد رده‌های هم‌ارزی p عنصری را با s نمایش دهیم، آنگاه $r+sp=n^{p-۱}$ و در نتیجه $p|r$.

• McKay James H., "another proof of Cauchy's group theorem",

ژوزف اشمید

نکته‌ای در باب چندجمله‌ایهای مشخصه•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

هدف این مقاله، ارائهٔ برهانی برای درستی گزارهٔ زیر است.

گزاره: اگر A و B به ترتیب ماتریسهای $n\times m$ و $m\times n$ روی حلقهٔ تعویضپذیر و یکه‌دار R باشند و I_n و I_m ماتریسهای یکه از مرتبه‌های n و m باشند، آنگاه چندجمله‌ایهای مشخصهٔ AB و BA در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$t^n \det(tI_n - AB) = t^n \det(tI_m - BA)$$

نتیجه: ضرایب چندجمله‌ای مشخصهٔ AB و BA تا آنجا که ممکن است، برابرند. دو حالت خاص عبارت‌اند از $trAB = trBA$ و (تعمیمی از) اتحاد لاگرانژ.

نتیجه: اگر $AB = I_n$ و $BA = I_m$، آنگاه $m = n$.

برهان: در این حالت از گزارهٔ فوق نتیجه می‌شود $t^n(t-1)^m = t^m(t-1)^n$ و این، $m = n$ را ایجاب می‌کند.

برهان گزاره: دو ماتریس درجهٔ دوم C و D از مرتبهٔ $n+m$ روی $R[t]$ را در نظر می‌گیریم

$$C = \begin{pmatrix} tI_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & tI_m \end{pmatrix}$$

با ضرب این ماتریسها خواهیم داشت

$$CD = \begin{pmatrix} tI_n - AB & tA \\ 0 & tI_m \end{pmatrix}, \qquad DC = \begin{pmatrix} tI_n & A \\ 0 & tI_m - BA \end{pmatrix}$$

و حال، نتیجهٔ مورد نظر از تساوی $\det CD = \det DC$ به‌دست می‌آید.

• Schmid Josef, "a remark on characteristic polynomials", *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970) 998.

گزارشی از سمینار آموزش ریاضی

بهزاد منوچهریان

به‌دنبال تشکیل میزگرد کاربرد ریاضیات درخرداد ماه‌سال ۶۶، از آنجا که جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران همواره سعی در ترویج ارزشهای نهفتهٔ ریاضیات و بررسی مشکلات اشاعهٔ این علم شریف در کشور دارد، تصمیم گرفتیم سمیناری پیرامون آموزش ریاضی درجمهوری اسلامی ایران ترتیب دهیم.

با همکاری صمیمانهٔ آقای دکتر ارسلان شادمان استاد گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم پس از شش ماه تهیهٔ مقدمات، سمینار در روزهای پنجم و ششم اسفندماه سال ۶۶ در دانشکدهٔ علوم تشکیل شد. در روز اول، پس از سخنان نمایندهٔ برگزارکنندگان سمینار (بهزاد منوچهریان)، آقای دکتر حدادعادل پیرامون آموزش ریاضیات در مقاطع قبل از دانشگاه سخن گفت و آقای دکتر شادمان ضمن ایراد سخنانی یاد پروفسور نقی فاطمی را، که خداوند سلامتش بدارد، گرامی داشت. دیگر سخنرانان روز اول عبارت بودند از آقای سید محمدکاظم نایینی دبیر شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی که پیرامون روش آموزش ریاضی صحبت کرد و آقایان پرویز شهریاری معلم با سابقهٔ ریاضیات، دکتر احمد شفیعی ده‌آباد استاد ریاضی دانشگاه تهران، یحیی تابش استاد دانشگاه صنعتی اصفهان و دکتر شاهورانی رئیس دانشکدهٔ علوم دانشگاه شهید بهشتی که به ترتیب پیرامون نقش حل مسئله، مسائل آموزش ریاضی، کاربرد کامپیوتر در آموزش ریاضیات، و آموزش هندسه صحبت کردند.

روز دوم آقایان میرزا جلیلی کارشناس ریاضی آموزش و پرورش در مورد افت تحصیلی دانش‌آموزان و تدوین کتب درسی؛ مهندس حسین جلی از سازمان پژوهشهای علمی و صنعتی دربارهٔ برخی قضایای ریاضی، دکتر رحیم زارع نهندی در مورد کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضیات، دکتر محمد حسن بیژن‌زاده مدیر گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم پیرامون تحول آموزش ریاضیات و آقای عمید رشولیان مربی گروه ریاضی دانشگاه تهران درمورد پاره‌ای از مشکلات آموزشی دبیران ریاضی سخنرانی کردند.

در جنب سمینار، با همکاری کتابخانهٔ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی آموزش و پرورش و بسیاری از ناشران داخلی، نمایشگاهی از کتب درسی ریاضی تشکیل شد و همچنین سه فیلم آموزشی ریاضی در طی سمینار به نمایش در آمد.

سمینار با استقبال دانش‌آموزان، دانشجویان و استادان دانشگاه روبرو شد ولی متأسفانه، جای بسیاری از دبیران و معلمان علاقه‌مند، علیرغم دعوت عامی که به عمل آمده بود، در این سمینار خالی بود.

به نظر برگزار کنندگان، در این سمینار که برای اولین بار در ایران تشکیل می‌شد، سخنرانیهای شنیدنی و مفیدی ایراد شد ولی اگر قرار باشد برگزاری این گونه سمینارها با توفیق و فایدهٔ گسترده‌تری همراه باشد، باید بر کیفیت و تعداد آنها افزود و چه بسا لازم باشد هرازگاه با سازمانی مسؤول برگزاری چنین سمیناری در یکی از مقاطع تحصیلی شود تا مشکلات و رهنمودها بهتر عرضه شوند. در این میان از انجمن ریاضی ایران،

وزارت آموزش و پرورش، و دانشگاه تربیت‌معلم انتظار می‌رود با توجه به مسؤولیتی که به‌عهده دارند نظایر این سمینار را در سطوح مختلف و حتی در شاخه‌های گوناگون ریاضی و در مورد آموزش آنها برگزار نمایند.

نقش حل مسئله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان*

پرویز شهریاری

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه بر نگذرد

از طرف جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، از من خواسته شده تا در زمینهٔ "نقش حل مسئله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان" به‌کوتاهی صحبت کنم. ولی ایراد این سخنرانی از دو جهت دشوار است:

اول اینکه، باید درجمعی صحبت کنم که خود صاحب تجربه‌های فراوان در این زمینه‌اند و، به همین مناسبت، از همین ابتدا باید عرض کنم که احتمالاً هیچ‌مطلب تازه‌ای برای آنها نداشته‌باشد.

دوم اینکه، موضوع بحث در بادی امر بسیار ساده به‌نظر می‌رسد. همهٔ معلمان و دانش‌آموزان به حل مسئله عادت کرده‌اند و بدون آن، ادامهٔ تحصیل رسمی را غیر ممکن می‌دانند. دشواری کار از همین‌جا آغاز می‌شود. مطلب هرچه بدیهی‌تر و آشناتر باشد، درک قانونمندیهای آن دشوارتر و به نظم در آوردن این قانونمندیها از آن هم دشوارتر می‌شود.

ولی چاره‌ای نیست. پیشرفت و تکامل به‌مفهومی، یعنی انتقال تجربه و به ناچار، من‌هم باید تجربهٔ یک عمر معلمی خودم را به دیگران منتقل کنم، شاید اغراق نباشد اگر ادعا کنیم که به تعداد معلمان خوب، روش آموزشی خوب وجود دارد. روش آموزش، در نهایت خود یک هنر است و هنر را نمی‌توان قالب‌بندی کرد و با آشنا شدن به این قالبها، هنرمند شد. ولی حتی در نابترین هنرها هم، انتقال تجربه‌می‌تواند موجب شکوفایی آن استعدادها شود و بسیاری از قابلیتهای خفته را بیدار کند.

مسئله یعنی چه؟ و منظور از حل مسئله چیست؟ شاید ساده‌ترین تعریفی که بتوان ارائه داد، این باشد که: مسئله، یعنی برخورد با یک دشواری و روبرو شدن با موضوعی ناآشنا و ناشناخته. در نتیجه، حل مسئله به معنای رفع این دشواری و گشودن راز ناشناخته‌ها می‌شود.

تجزیه و تحلیل دقیقتر این تعریف می‌تواند ما را به تعریفی دقیقتر و روشنتر راهنمایی کند: حل مسئله، یعنی کشف و اختراع. حل مسئله، یعنی دست یافتن به آنچه که قبل از آن، دست‌نیافتنی شمرده می‌شد.

از همین‌جاست که اهمیت حل مسئله روشن می‌شود. اگر بخواهیم دانش‌آموزان امروز به کاشفان و مخترعان فردا تبدیل شوند، باید از همان سالهای اول تحصیل، به کشف و اختراع، یعنی به حل مسئله عادت کنند. حقیقت این است که هر انسانی، در طول زندگی خود، ناچار است هر روز و هر

* این مقاله متن سخنرانیی است که در سمینار آموزش ریاضی، اسفند ۶۶، در دانشکدهٔ دارم دانشگاه تهران، ایراد شده است.

ساعت مسئله‌هایی را حل کند که در برابرش خودنمایی کرده‌اند. عادیترین و گاه دشوارترین این مسئله‌ها، تنظیم مخارج زندگی براساس درآمد خانواده است. و البته، ما معلمان ریاضی می‌دانیم که در بسیاری موارد، با مسئله‌ای برخورد می‌کنیم که جواب ندارد و یا غیر قابل حل است. ما در ریاضیات، اثبات بی‌جوابی و یا اثبات غیر قابل حل‌بودن مسئله را، براساس داده‌ها، به‌معنای حل شدن مسئله می‌دانیم.

پیش‌از آنکه به‌تعریف "مسئلهٔ خوب" بپردازیم، بهتر است به برخی نکته‌ها، که به اعتقاد من در آموزش ریاضیات اهمیتی جدی دارند، اشاره کنیم.

۱. در آموزش ریاضی (وشایددرهرآموزشی)، به درک طبیعی دانش‌آموز تجاوز نکنید و آن را حقیر نشمارید. از یک طرف، نکته‌های درست را از بیان دانش‌آموز بیرون بکشید و آن را پرورش دهید و از طرف دیگر، سعی کنید دلیل اشتباههای او را بفهمید و وادارش کنید تا کم‌وبودهای درکی و استدلالی خود را جبران کند.

به‌همین‌مناسبت، شاید یکی از بهترین شیوه‌های آموزش ریاضی، شیوهٔ سقراطی باشد، با پرسشهای ساده و متوالی.

۲. اگر برای تدریس از شیوهٔ پرسش و پاسخ سقراطی پیروی نمی‌کنید و خود به عنوان یک سخنران همهٔ موضوع را توضیح می‌دهید، دست‌کم در برخی از نقطه‌های گرهی، نظر دانش‌آموزان را بخواهید و بر مبنای نظر آنها، بحث خود را دنبال کنید. در این روش کار، تجربه نشان داده است که نباید همه چیز را با همهٔ جزءهای آن تشریح کرد. بعضی نکته‌ها را برای خود دانش‌آموزان باقی بگذارید و بعد، در همان‌جلسه و یا جلسهٔ بعد، دربارهٔ این نکته‌ها، دانش‌آموزان را مورد پرسش قرار دهید.

۳. به دانش‌آموزان اجازه ندهید در موقع درس دادن، آنچه را بیان می‌کنید یا روی تخته می‌نویسید، تندنویسی کنند. این کار، که متأسفانه کم‌و بیش هم معمول‌است، دانش‌آموزان را گرم نوشتن می‌کند و از تفکر دربارهٔ موضوع و درک نکته‌های گرهی آن باز می‌دارد. روش من این‌است که‌از دانش‌آموز می‌خواهم فقط گوش کند و تنها بعضی واژه‌ها و یا اشاره‌ها را روی دفتر خود یادداشت کند و بعد، همان روز وقتی که به منزل رسید (تأکید می‌کنم، همان روز و نه هفتهٔ بعد) موضوع درس را به تفصیل و با دقت در دفترچهٔ خود بنویسد. این نوشته‌ها را معلم باید بازبینی کند و دربارهٔ نارسایی‌های احتمالی آن با دانش‌آموز به گفتگو بنشیند. به‌نظر من، این روش، هم موجب یادگیری بهتر دانش آموز می‌شود و هم شیوهٔ درست نوشتن را به او می‌آموزد.

۴. دانش‌آموزان را باید واداشت تا روی مفهومها و تعریفها دقت کنند و از بیان جمله‌های ناقص و بی‌معنی اجتناب کنند. بین تعریف و خاصیت فرق قائل شوند، استدلال درست را از استدلال نادرست باز شناسند و . . .

مسئله‌ای را با داده‌های ناکافی به دانش‌آموز بدهید و از او بخواهید آن‌را تکمیل کند. استدلالی نامعقول و یا غیر ریاضی را مطرح کنید و از دانش‌آموز بخواهید نامعقول و یا غیر ریاضی بودن آن را برای شما روشن کند.

۵. به کاربرد ریاضیات، اهمیت بدهید. سعی کنید مفهومها و رابطه‌های انتزاعی ریاضیات، در صحنهٔ عمل و ضمن استفاده از آنها در قانونمندیهای طبیعت و زندگی علمی و اقتصادی جامعهٔ انسانی، جان بگیرند و برای دانش‌آموز صورتی ملموس پیدا کنند.

۶. ج. برنسال رجل اجتماعی چند سدهٔ قبل انگلستان می‌گوید: "درعلم بیش از هرجای دیگری از فعالیتهای انسانی، باید به‌مطالعهٔ گذشته پرداخت. این مطالعه، برای درک زمان حاضر و امکان تسلط بیشتر بر طبیعت در آینده ضرورت دارد."

به تاریخ ریاضی، کم بیاندیشید. از هر فرصتی و هر موقعیتی برای گریز به تاریخ استفاده کنید، و بخصوص، به تاریخ ریاضیات در کشور خودمان. این گریزها، درس را زنده‌تر می‌کند و شوق فراگیری را در دانش‌آموز بالا می‌برد.

لباچفسکی، ریاضیدان بزرگ و بانی هندسهٔ نااقلیدسی می‌گوید: "شکوفا کردن نبوغ، یعنی ساختن و پر بهره کردن درك و تفکر آزاد."

همین جملهٔ لباچوفسکی می‌تواند راهنمای ما برای بازشناختن "مسئلهٔ خوب" از "مسئلهٔ بد" باشد.

در یك تقسیم‌بندی کلی، می‌توان دو ویژگی زیر را برای "مسئلهٔ خوب" برشمرد:

۱. مسئله‌ای عادی نباشد، تازگی داشته باشد، راه حل آن از قبل فرموله نشده باشد.

۲. خارج از قدرت و توان دانش‌آموز نباشد. کار در سطح بالا، به معنای آن نیست که معما و چیستان در برابر دانش‌آموز بگذاریم.

اما، نکتهٔ ضروری در پرورش قدرت ابتکار دانش‌آموزان، این است که معلم، خود قدرت ابتکار داشته باشد.

اگر معلم، خلاقیت و نیروی کشف نداشته باشد، چگونه می‌توان از دانش‌آموز او انتظار داشت که این شیوه را یاد بگیرید؟

از حوصله و تحمل شما برای شنیدن سخنان کسی که فقط یك علاقه‌مند ریاضیات است، متشکرم و از گذشتی که دربارهٔ خطاهای احتمالی من در این سخنان داشتید، سپاسگزارم.

تدریس کامپیوتر در نیکاراگوئه

کامپیوتر در یك کشور در حال توسعه

مارلین سنت و آرتور وین

نیکاراگوئه کشوری است فقیر و در حال توسعه، با اقتصادی که به‌وسیلهٔ یك جنگ طولانی به‌شدت فلج شده است. چرا یك چنین کشوری احتیاج به کامپیوتر دارد؟ فردی که قصد دارد پاسخ بامعنایی به این سؤال دهد باید از کامپیوتر، توانایی‌های آن، محدودیتهای آن، دامنهای آن، و هزینه‌های آن اطلاع داشته باشد. او همچنین باید با نیکاراگوئه، ساختار جامعهٔ آن، و طرز تفکر مردم آن آشنا باشد. خلاصه او باید یك متخصص کامپیوتر نیکاراگوئه‌ای باشد. ولی، چنین افرادی نادرند.

چرا این سؤال مهم است؟ چرا نمی‌توان آن را بی‌پاسخ گذاشت تا آنکه مسائل حساس‌تر حل شوند؟ بیست سال قبل در هلند، ما نه ایدهٔ دقیقی در مورد اینکه با کامپیوترها چه‌کنیم داشتیم (بعضی ادعا می‌کنند که هنوز هم نداریم) و نه متخصصین کافی داشتیم تا ورود کامپیوتر به عرصهٔ جامعه را هدایت کنند. با این حال با آزمایش و خطا و بدون هیچگونه فاجعهٔ مهمی یك جامعهٔ انفورماتیکی به وجود آمد و تکامل یافت. چرا نیکاراگوئه نمی‌تواند مسیر مشابهی را دنبال کند؟ دو تفاوت مهم وجود دارد: فقر، و قیمت نازل میکروکامپیوترها.

فقر، جامعهٔ در حال توسعه را بسیار شکننده می‌کند. منابع آن، چنان محدود هستند که اگر اشتباهی پیش آمد، جانشینی برای منابع از دست

رفته وجود ندارد. بنابراین، حوادث ناگواری که به‌صورت اجتناب‌ناپذیری با آغاز به‌کارگیری کامپیوتر همراه‌اند، می‌توانند نتایج مخربی بر کل جامعه داشته باشد.

از طرف دیگر، قیمت نازل میکروکامپیوترها و حضور تعداد زیادی غربی "جهان‌وطن" که به استفاده از تسهیلات کامپیوتر در روی میز کارشان عادت کرده‌اند، رشد انفجار آمیز تعداد کامپیوترها را در این کشور سبب شده است. (در دو سال گذشته تعداد آنها دو برابر شده است.) مانند مردم ۲۰ سال پیش هلند، نیکاراگوئه‌ایها نیز نمی‌توانند منتظر باشند که کامپیوتر خود به خود تمام مشکلات آنها را حل کند. نیاز مبرم و سریعی به آگاهی افراد بومی موجود است تا از اتخاذ فرضهای غیرواقعی، استفادهٔ نابجا از منابع محدود و از وابستگی روزافزون به تکنولوژی و متخصصین خارجی، جلوگیری شود.

دانشگاه

همین‌طور، در سایر رشته‌های فنی نیز کمبود متخصصین احساس می‌شود. این وضعیت معمولاً در هر کشور در حال رشد وجود دارد، اما در نیکاراگوئه مسئله حادتر است، چرا که پس از انقلاب ۱۹۷۹ بسیاری از متخصصین فنی ترجیح دادند که برای کار پر درآمدتر به امریکا بروند تا آنکه منتظر سرنوشت خود تحت حکومتی متمایل به‌سوسیالیسم شوند. این حکومت خیلی زود تصمیم گرفت که تمامی دوره‌های آموزش عالی فنی را در یك دانشگاه فنی به نام دانشگاه ملی مهندسی[1]، و یا به‌اختصار UNI متمرکز کند. بعضی از بخشها (برای مثال، بخش مهندسی کشاورزی و مهندسی صنایع) از یکی از دو دانشگاه دیگر به این دانشگاه ملحق شدند و بقیه (مانند بخش علوم کامپیوتر) برای نخستین بار ایجاد شدند.

1. Universidad Nacional de Ingenieria

کار کردن در دانشگاه UNI فرد را به کمبودها عادت می‌دهد؛ در آنجا کمبود همه‌چیز هست جز کمبود دانشجو. واضحترین کمبودی که به چشم بازدیدکننده می‌خورد، کمبود فضاست. دانشگاه در ساختمانی که قبلاً دبیرستان بوده است جای گرفته است؛ بخش وسیعی از این ساختمان در زلزلهٔ ۱۹۷۲، که قسمت عمده‌ای از مرکز ماناگوا را ویران کرد، از بین رفت. بیشتر محوطهٔ دانشگاه مخروبه است. قسمتهایی که بازسازی شده‌اند به‌طور همزمان برای کارهای گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثلاً، اتاق ۲۰ متر مربعی که ما در آن کار می‌کردیم، دفتر ۸ معلم، کتابخانهٔ دانشجویان و کارمندان، اتاق ملاقات و جلسات و بعضی اوقات کلاس درس است. یکی از جاذبه‌های این اتاق این است که دارای دستگاه تهویهٔ مطبوعی است که (اگر برق قطع نباشد) هم به میزان سروصدا و هم به‌تعداد مراجعان اتفاقی می‌افزاید. اگر بحث بسیار داغ شود (که در امریکای لاتین غالباً پیش می‌آید) گاهی از افراد خواسته می‌شود که بحث خود را در بیرون ادامه دهند. آنجا، در راهروها، دانشجویان معمولاً جلسات خود را برپا کرده و غالباً به صورت گروهی مطالعه می‌کنند.

کلاسها گاهی در راهروها و گاهی در کلاسهای موقتی در میان خرابه‌ها برگزار می‌شوند. دولت اخیراً مقداری مصالح ساختمانی (که به سختی می‌توان به دست آورد) به دانشگاه اختصاص داده است تا با استفاده از آنها کلاسهای درس ساخته شوند: ۲ ردیف آجر سیمانی، سقفی از ورقه‌های فلزی موج‌دار و پارتیشنهایی از تختهٔ چندلا. قسمتی از پارتیشنها رنگ آمیزی شده‌اند تا بتوانند به‌عنوان نوعی تخته‌سیاه نیز مورد استفاده قرار گیرند. نه دری وجود دارد و نه پنجره‌ای. باد آزادانه می‌وزد (که در چنین کشور گرمی، چیز مطلوبی است) و رهگذران غالباً متوقف شده و

دقایقی گوش می‌دهند.

مبلمان و ملزومات به سختی به دست می‌آید. شریك بودن در میز، امری عادی است. سر صبح اگر میز خود را اشغال شده یافتید، سعی کنید یك صندلی خالی پیدا کرده و از روی راننوی خود به عنوان میز استفاده کنید. تخته‌پاك‌کن کنجی است که به راحتی به کسی عاریه نمی‌دهید. پولی موجود نیست که با آن، جزوات درسی تکثیر و یا چاپ شوند. یك کتاب‌واردانی معادل حقوق یك ماه قیمت دارد، بسیار بیش از مقداری که عموم دانشجویان بتوانند بپردازند.

جادارترین کمبود در دانشگاه، کمبود معلمین شایسته‌است. بعد از انقلاب تعداد کثیری از معلمین دانشگاه یا کشور را ترك کردند و یا به مقامهای بالاتر فرا خوانده شدند، مثلاً، شهردار فعلی ماناگوا، یك استاد مشهور فیزیك بوده است. با این وضع، مشاغل خالی (در دانشگاه) می‌بایست توسط افرادی اشغال می‌شد که فاقد پیش‌زمینه‌های لازم برای فهم کامل موادی که تدریس می‌کنند، بودند. در نتیجه، بسیاری از معلمین از سؤال خوششان نمی‌آید و کلاسهایشان مانند یك رستگاه تکثیر جزوه است. تنها کاری که معلمین می‌کنند، دیکته کردن جزوهٔ درسی به دانشجویان است. امتحانات نیز معمولاً توانایی دانشجو را در حفظ کردن مطالب این جزوه‌ها می‌آزمایند. هنگامی که ما اعلام کردیم که امتحانات به‌صورت جزوه باز خواهد بود، باعث اضطراب و نگرانی دانشجویان شدیم، زیرا [به این ترتیب] درك مطلب مورد امتحان قرار می‌گرفت و این مستلزم روشی در مطالعه است که آنها به‌آن عادت ندارند.

هدف رسمی این است که بعد از هشت سال، در تمام کلاسها معلمین شایستهٔ نیکاراگوئه‌ای تدریس کنند. در این فاصلهٔ زمانی، غالب معلمین خارجیانی از ملتهای گوناگون هستند. بیشتر آنها از امریکای لاتین هستند، به‌خصوص کوبایی‌ها، و همچنین هواداران نیکاراگوئه از شیلی، پرو، گواتمالا و از این قبیل. تعدادکمی از امریکای شمالی هستند وبقیه از اروپای غربی و یا کشورهای سوسیالیست (غالبا از شوروی و آلمان شرقی).

بخش علوم کامپیوتر

بخش علوم کامپیوتر در UNI واقعا ساختهٔ مدیر فعلی آن است که تبعهٔ آلمان غربی و قبلاً وابسته به GMD بوده است. او دانشجویانی را که معلمین آینده خواهند بود انتخاب کرد، مصالح ساختمانی برای ایجاد بخش را فراهم کرد، و از همه مهمتر، یك شبکهٔ وسیع تدارکاتی در آلمان، سوئیس و انگلستان سازمان داد که یك جریان دایمی ـ گرچه همیشه ناکافی ـ از انتقال تجهیزات و وسایل به نیکاراگوئه را برقرار کرده است. تا کنون ۵ میکروکامپیوتر، ۳ چاپگر، ۵۰۰ کتاب و یك تعمیرگاه کوچك ولی نسبتاً مجهز سخت‌افزار اهدا شده‌است.

وظیفهٔ اصلی بخش، آموزش دانشجویان است. در دو سال اول، دانشجویان رشتهٔ کامپیوتر یك برنامهٔ درسی عمومی می‌گذرانند، و به سطحی می‌رسند که می‌توان آن را تقریباً قابل مقایسه با دبیرستانهای اروپایی دانست. در چهار سال بعدی آنها دورهٔ تقریبا ساده شده‌ای از برنامهٔ درسی علوم کامپیوتر در اروپای غربی را دنبال می‌کنند. این بخش همچنین درس مقدماتی به دانشجویان سایر رشته‌ها تدریس می‌کند. دروس برنامه‌نویسی با استفاده از تخته‌سیاه تدریس می‌شده‌اند؛ [ولی] اکنون دانشجویان در گروههای هشت‌نفری به‌دور میکروکامپیوترهای اهدایی حلقه می‌زنند. مشاهدهٔ آنها به‌هنگام توفیق در اجرای اولین برنامه‌شان جالب است، ولیکن، با پذیرش ۵۰۰ دانشجو در هر سال فشاری عمده برامکانات بخش وارد می‌شود.

یك وظیفهٔ مهم بخش، مشاوره است. بسیار زیاد اتفاق می‌افتد که یك پروژهٔ کمك خارجی،

میکروکامپیوتری را به یك مؤسسهٔ نیکاراگوئه‌ای اهدا می‌کند. افرادی که در آن مؤسسه هستند غالباً پس از ترك متخصصین خارجی دچار مشکل می‌شوند. این افراد سرانجام برای راهنمایی به این بخش مراجعه می‌کنند. این فرصت گرانبهایی در اختیار دانشجویان قرار می‌دهد تا دربارهٔ مسائلی که در شغل خود با آن روبرو خواهند شد، بصیرتی به دست آورند.

دانشجویان

پذیرش در دانشگاه مبتی بر نتایج یك امتحان است، ولیکن بیشتر به نفع داوطلبان ساکن مناطق کشاورزی و فرزندان خانواده‌های فقیر اقدام می‌شود. مبلغ شهریه (۴۵ر۰ دلار امریکا در سال) حتی برای فقیرترین افراد قابل پرداخت است. ولی کمك مالی به‌ندرت داده‌می‌شود و تعداد کمی از خانواده‌ها توان پرداخت مخارج زندگی فرزندان خود را که به دانشگاه می‌روند، دارا هستند. از اینرو، اکثر دانشجویان هنوز از طبقهٔ متوسط شهری هستند و درس خود را با یك کار تمام‌وقت در می‌آمیزند. خط‌مشی پذیرش شامل تبعیضی به نفع زنان نیست، ولی احتیاجی هم نیست. آنها هم‌اکنون بیش از نیمی از دانشجویان را تشکیل می‌دهد. این نسبت بالای دانشجویان زن (به خاطر داشته باشید که این یك دانشگاه فنی است) بیشتر به دلیل جنگ و حضور مردان در جبهه است.

در نهایت، تعداد دانشجویان کامپیوتر در هر سال در حدود ۷۵ نفر خواهد بود. هم‌اکنون ۲۵ نفر در سال سوم و یا چهارم هستند و نیمی از آنها را دانشگاه به‌کار گرفته است. اگر آنها از قبول موقعیتهایی که توسط بخش خصوصی پیشنهاد می‌شود خودداری کنند، معلمین نسلهای بعدی خواهند بود. دانشجویانی که ما داشتیم باهوش بودند و در تئوری چیزهای بسیاری می‌دانستند؛ ما جزوات درسی دروس ریاضی ۲ سال اول را دیده بودیم و گوناگونی مواد جالب توجه بود. ولی سطح ادراك دانشجویان از این درسها، بسیار پایین بود. مطالبی که باید برای آنها توضیح می‌دادیم، از معنی "اگر و تنها اگر" تا چگونگی محاسبهٔ تعداد میکروثانیه در میلی ثانیه را شامل می‌شد.

تقریباً تمام دانشجویان به‌سختی کار می‌کردند. بعضی در ساعت ۸ صبح می‌آمدند و تا ۶ بعد از ظهر کار می‌کردند، و سپس تا ساعت ۹ر۳۰ در کلاسها شرکت می‌کردند. در آخر هفته‌ها، آنها غالباً برای مطالعهٔ دسته جمعی گرد هم می‌آمدند. بسیاری از آنها هم‌اکنون دارای توانایی تدریس قابل توجهی می‌باشند. آنها درس مقدماتی و یا یکی از دروسی را که سال قبل گرفته‌اند، تدریس می‌کنند. باهوشترین دانشجو حتی درس جدیدی را تدریس کرد؛ به این طریق کسه مطلب را از کتاب فرامی گرفت وبلافاصله آن‌را به‌دانشجویان تدریس می‌کرد.

کار ما

کار اصلی ما طراحی و تدریس درسهای علوم کامپیوتر برای سالهای سوم و چهارم بود. دروسی که ما بر روی آنها کار کردیم (برای آنکه تصوری از اصطلاحات اسپانیایی کامپیوتر داشته باشید) Electronica Digital, Sistemas Operativ, Lenguajes Formales ، Organizaciön de Computadoras بود. ماجزوات درسی را با همکاری نزدیك دانشجویی که‌می‌بایستی آن‌را سال بعد تدریس می‌کرد می‌نوشتیم. ما نسخهٔ اولیه‌ای به زبان اسپانیایی ناقص خودمی‌نوشتیم، آنگاه او نسخهٔ دومی به‌اسپانیایی واقعی می‌نوشت که ما در نهایت آن‌را کنترل می‌کردیم تا مطمئن‌شویم که موضوع را به‌درستی فهمیده است.

معمولا دانشجویان می‌توانند کمی انگلیسی بخوانند، ولیکن عملاً هیچیك از آنها نمی‌تواند

صحبت کند و یا آن را بفهمد. درنتیجه، ما بایستی به اسپانیایی درس می‌دادیم. ما قبل از رفتن به نیکاراگوئه به‌مدت تقریباً یکسال اسپانیایی خوانده بودیم. که معلوم شد این مقدار چندان کافی نیست. درماه‌اول ما غالباً برای ادای لغات من‌من می‌کردیم، ولی بعدها این مانع زبانی بسیار کم‌اهمیت‌تر شد. آماده کردن جزوات درسی از قبل، به‌نحو قابل توجهی به‌جمع‌آوری لغات مورد نیاز کمک می‌کرد. با این‌حال، ارائهٔ یک مثال جالب درطول کلاس همچنان یک کار مخاطره‌آمیز بود و غالباً در فهم سؤال دانشجویان دچار مشکل می‌شدیم. علیرغم این مانع زبانی، احساس می‌کردیم که بسیار مورد محبت و قدردانی هستیم و از کار خود بسیار لذت می‌بردیم. کمبودها مسائل بسیاری ایجاد می‌کردند ولی یک نوع روحیهٔ ابتکار و پیشگامی، آمیخته با تمامی شور جوانی جومنحصر به‌فردی از امید، پیشرفت و احساسی قوی برای شروع مجدد به‌وجود می‌آورد. در نیکاراگوئه علاقه دارند که این روحیه را روحیهٔ انقلابی بخوانند.

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی

● Sint Marleen, Veen Arthur "teaching computer science in Nicaragua", *News letter* 14(1987) 35.

نظری اجمالی بر کتابهای ریاضی منتشر شدهٔ دانشگاه تهران

بهزاد منوچهریان

در این شماره به کتب ریاضیی که توسط مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه تهران از بدو تأسیس تا پایان سال ۱۳۶۶ منتشر شده‌اند، نظری می‌افکنیم. باملاحظهٔ فهرست این کتابها به‌آمار واستنتاجاتی دست می‌یابیم که پاره‌ای از آنها در زیر می‌آید.

اولین کتاب ریاضی یک سال پس از تأسیس مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه تهران منتشر شده‌است. میانگین تعداد کتب ریاضی منتشر شده در طول این ۴۱ سال (از ۱۳۲۵ تا ۱۳۶۶) در حدود ۱٫۸۵ کتاب درسال است. البته درسالهای ۲۵، ۴۷، ۵۱، ۵۳، و ۶۱–۶۴ هیچ کتاب ریاضی منتشر نشده‌است. همچنین نسبت کتب ریاضی به کل کتب منتشره درهمین‌مدت ۷۵/۲۰۶۷ یعنی حدود ۳٫۶٪ است.

اکثریت قریب به‌اتفاق مؤلفین (مترجمین) این کتب در گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران نیز تدریس می‌کرده‌اند و البته این امری طبیعی است. در بین مؤلفین (مترجمین) آقای دکتر علینقی وحدتی با ۷ عنوان کتاب بیشترین تعداد کتاب را عرضه کرده است، بعد از وی آقایان دکتر جمال عصار با ۶ عنوان و دکتر علی افضلی‌پور با ۵ عنوان کتاب قرار دارند و البته تمام این کتب تألیفی بوده ومؤلفین آنها از اساتید متقدم ریاضی دانشکدهٔ علوم بوده‌اند. در بین مؤلفین نام مرحوم دکتر هشترودی ریاضیدان بنام، به چشم می‌خورد که تألیفات ایشان همواره مطالب نوین روز را عرضه می‌کرده است. کتاب مدخل منطق هوزت تنها اثر مرحوم دکتر مصاحب دربین انتشارات دانشگاه تهران است که هنوز هم به‌عنوان یک اثر تألیفی در زمینهٔ منطق به‌زبان فارسی، اصالت و اهمیت خاص

خود را حفظ کرده است. کتابهای اساتید گرامی آقایان آل بویه و افضلی‌پور از عمق و محتوای خاصی برخوردار بوده‌اند و کتابی چون ریاضیات در شیمی از این لحاظ که به‌کاربرد ریاضیات در علمی دیگر نظر افکنده اثر بدیعی در بین آثار متقدم چاپ دانشگاه تهران است.

شاخهٔ ریاضیات عمومی و آنالیز با ۲۸ عنوان، موضوعی است که تعداد کتب انتشاریافته‌اش بیشتر از دیگر شاخه‌هاست؛ بعد از این شاخه هندسه (اعم از ترسیمی، رقومی، تحلیلی و دیفرانسیل) با ۱۶ عنوان و آمار واحتمالات با ۱۴ عنوان قراردارند.

کار ترجمه در ریاضیات (درکشور ما) بعداز تألیف رایج‌شده است و این‌امر درکتب ریاضی منتشرهٔ دانشگاه تهران به‌خوبی نمایان است. در سال ۱۳۵۲ اولین اثر ترجمه‌ای ریاضی منتشر شده، بعد درسال ۵۴ یک عنوان، درسال ۵۶ دو تا، درسال ۵۷ یکی، درسال ۵۸ یکی، و در سال ۵۹ و ۶۰ هرکدام یک عنوان منتشرشده است. بنابراین از ۷۵ جلد کتاب ریاضی تعداد ۹ تا ترجمه هستند؛ یعنی ۱۲٪ این کتب ترجمه‌ای هستند.

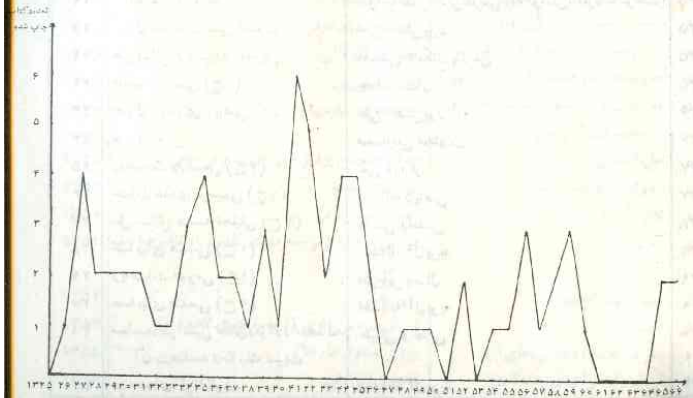
ضمناً توجه شود که در این فهرست:

۱. تنها کتب جدید و اولین چاپ هرکتاب به حساب آمده است.

۲. بعضی کتابها شامل دو جلد هستند.

تعداد کتب ریاضی به‌زبان فارسی حدود ۳۰ برابر این تعداد است و همچنین تعداد کتبی که نامبردگان این فهرست و دیگر اساتید و مدرسین ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران منتشر کرده‌اند، بیش از اینهاست، ولی غرض ما نمایاندن ابعاد گوناگون تاریخ ریاضیات در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران است و در این راه شاید آوردن فهرست کتب ریاضی منتشرهٔ دانشگاه تهران وجهی از این مطالب را بنمایاند.

ابتدا به‌نمودار و سپس به‌فهرست توجه فرمایید.



فهرست کتابهای منتشر شدهٔ ریاضی دانشگاه تهران

ردیف	عنوان کتاب	مؤلف (مترجم)	سال انتشار
۱	حوزهٔ فضاهای ریمانی	محسن هشترودی	۱۳۲۶
۲	هندسه تحلیلی	علینقی وحدتی	۱۳۲۷
۳	ریاضیات درشیمی (ج ۱)	تقی هورفر	۱۳۲۷
۴	جبر و آنالیز	محمدعلی مجتهدی	۱۳۲۷
۵	کنکسیون نرمال	محسن هشترودی	۱۳۲۷
۶	آنالیز ریاضی، اصول نظریهٔ توابع مختلط (ج ۱)	علی افضلی‌پور	۱۳۲۸
۷	هندسه ترسیمی و هندسه رقومی	احمد بیرشك	۱۳۲۸
۸	هندسه تحلیلی	مصطفی کامکار پارسی	۱۳۲۹
۹	جبر و آنالیز	مصطفی کامکار پارسی	۱۳۲۹
۱۰	آنالیز ریاضی	منوچهر وصال	۱۳۳۰
۱۱	هندسه تحلیلی	احمد سادات عقیلی	۱۳۳۰
۱۲	هندسه عالی	اسدالله آل‌بویه	۱۳۳۱
۱۳	احتمالات و آمار ریاضی (ج ۱)	محمد حسین مهدوی اردبیلی	۱۳۳۱
۱۴	حساب جامع و فاضل	محمدعلی مجتهدی	۱۳۳۲
۱۵	احتمالات و آمار ریاضی (ج ۲)	محمد حسین‌مهدوی اردبیلی	۱۳۳۳
۱۶	هندسه دیفرانسیل	احمد بهفروز	۱۳۳۴
۱۷	حل‌مسائل هندسه تحلیلی (ج ۱)	علینقی وحدتی	۱۳۳۴
۱۸	مدخل منطق صورت	غلامحسین مصاحب	۱۳۳۴
۱۹	رسالهٔ جبر و مقابله	خواجه‌نصیرالدین‌طوسی (به‌کوشش اکبر داناسرشت)	۱۳۳۵
۲۰	اصول نظریهٔ ریاضی احتمال	علی افضلی‌پور	۱۳۳۵
۲۱	حل مسائل ریاضیات عمومی	مصطفی کامکار پارسی	۱۳۳۵
۲۲	هندسه ترسیمی (ج ۱)	جمال عصار	۱۳۳۵
۲۳	اصول روشهای ریاضی آمار	علی افضلی‌پور	۱۳۳۶
۲۴	جبر و آنالیز	محمدعلی مجتهدی	۱۳۳۶
۲۵	ریاضیات درشیمی (ج ۲)	تقی هورفر	۱۳۳۷
۲۶	حساب عددی ترسیمی (ج ۱)	عبدالله ریاضی	۱۳۳۷
۲۷	حل مسائل هندسه تحلیلی (ج ۲)	علینقی وحدتی	۱۳۳۸
۲۸	حسابهای هندسی (ج ۱)	اسدالله آل‌بویه	۱۳۳۹
۲۹	ریاضیات عمومی (ج ۱)	منوچهر وصال	۱۳۳۹
۳۰	حسابهای هندسی (ج ۲)	اسدالله آل‌بویه	۱۳۳۹
۳۱	محاسبه‌دیفرانسیل مطلق‌ومواردواستعمال آن درهندسه ومکانیك نسبیت	علینقی وحدتی	۱۳۴۰
۳۲	هندسه‌های نگونا گون	اسدالله آل‌بویه	۱۳۴۱

ادامهٔ فهرست

ردیف	عنوان کتاب	مؤلف (مترجم)	سال انتشار
۳۳	ریاضیات عمومی (ج ۲)	منوچهر وصال	۱۳۴۱
۳۴	حساب عددی (ج ۲)	عبدالله ریاضی	۱۳۴۱
۳۵	حساب عددی	محمود آق‌اولی	۱۳۴۱
۳۶	حساب ترسیمی (ج۲)	عبدالله ریاضی	۱۳۴۱
۳۷	حل مسائل‌هندسه و آنالیز	احمد بهفروز	۱۳۴۱
۳۸	مکانیك ریاضیات عمومی	ابوالقاسم احمد وزیری	۱۳۴۲
۳۹	حل مسائل هندسه تحلیلی (ج ۲)	علینقی وحدتی	۱۳۴۲
۴۰	متمم جبر وآنالیز (ج ۱)	جمال عصار	۱۳۴۲
۴۱	ریاضیات‌عمومی (جبروآنالیز) (ج۱)	مصطفی کامکار پارسی	۱۳۴۲
۴۲	متمم جبر و آنالیز (ج۲)	جمال عصار	۱۳۴۲
۴۳	محاسبات ماتریسی وموارد استعمال آن	احمد سادات عقیلی	۱۳۴۳
۴۴	آنالیز (ج۲)	جمال عصار	۱۳۴۳
۴۵	اصول آنالیز ریاضی (ج۱)	علینقی وحدتی	۱۳۴۴
۴۶	اصول آنالیز ریاضی (ج۲)	علینقی وحدتی	۱۳۴۴
۴۷	محاسبات انتگرالهای معین وغیرمعین (ج ۱)	جمال عصار	۱۳۴۴
۴۸	تانسورها و هندسه ریمانی	محمد هادی شفیعیها	۱۳۴۴
۴۹	حل‌المسائل جبر وآنالیز (ج۱)	حسن عطاری نژاد	۱۳۴۵
۵۰	حل‌المسائل جبر وآنالیز (ج۲)	حسن عطاری نژاد	۱۳۴۵
۵۱	مقدمات جبروآنالیز (ج ۱)	احمد سادات عقیلی	۱۳۴۵
۵۲	مبانی‌حساب دیفرانسیل و انتگرال	محمود آق‌اولی	۱۳۴۵
۵۳	اصول‌متغیرهای‌مختلط (آنالیزریاضی)	علی افضلی‌پور	۱۳۴۶
۵۴	تمرینات و مسائل هندسه تحلیلی و محاسبات ماتریسی	محمدهادی شفیعیها	۱۳۴۶
۵۵	حل‌المسائل آنالیز	جمال عصار، پرویز شهریاری، باقر امامی	۱۳۴۸
۵۶	اصول و روشهای آمار	مرتضی نصفت	۱۳۴۹
۵۷	کاشانی‌نامه	ابوالقاسم قربانی	۱۳۵۰
۵۸	آمار	فوکس فورژو (ترجمهٔ مهری کامبوزیا، ناصرصاحب جهرمی)	۱۳۵۲
۵۹	ریاضیات پایه‌ای	علی مدنی	۱۳۵۲
۶۰	احتمال	ا. کریف، س. لوی (ترجمهٔ مهری کامبوزیا)	۱۳۵۴
۶۱	نظریهٔ احتمال وکاربردهای آن	پرویز جبه‌دار مارالانی	۱۳۵۵
۶۲	آنالیز(انتگرالهای چندگانه)	محمود آق‌اولی	۱۳۵۶

ادامه فهرست

ردیف	عنوان کتاب	مؤلف (مترجم)	سال انتشار
۶۳	ریاضیات در الکترونیک	پ. هاوس (ترجمهٔ شاهرخ امیر ارجمند، اردشیر گیوی)	۱۳۵۶
۶۴	نظریهٔ احتمال	ریرفورته (ترجمهٔ مهری کامبوزیا، محمدعلی قینی)	۱۳۵۶
۶۵	نگرهٔ آمار	ا.م. مود، ف.ا. کریبل، د.س. بوشن (ترجمهٔ علی افضلی پور)	۱۳۵۷
۶۶	آنالیز (ج ۱)	محمود آقااولی	۱۳۵۸
۶۷	جبر جدید	فرانك آیرد (ترجمهٔ محمد رئوف، درویش محمد بهفروزی)	۱۳۵۸
۶۸	جبر خطی	علیرضا امیرمعز، اسدالله کارشناس	۱۳۵۹
۶۹	مقدمه‌ای بر آمار ریاضی	روبرت و.هوگ، الن ت. گرینگ (ترجمهٔ نوروز ایزد دوستدار)	۱۳۵۹
۷۰	آنالیزعددی وروشهای کامپیوتری	ر. ج. پنینگیتون (ترجمهٔ پرویز جبه‌دار مارالانی، منصور نیکخو)	۱۳۵۹
۷۱	نظریهٔ اساسی احتمال	روبرت آس. اچ (ترجمهٔ نوروزایزد دوستدار)	۱۳۶۰
۷۲	آنالیز(ج ۱)	علینقی زند، محمدگودرزی، بیژن شمس، کاظم للهی	۱۳۶۵
۷۳	جبر	علینقی زند، محمدگودرزی، بیژن شمس، کاظم للهی	۱۳۶۵
۷۴	مقدمه‌ای براحتمالات و آمار	عباسعلی زالی، جمشید جعفری شبستری	۱۳۶۶
۷۵	آنالیز حقیقی	نوروز ایزد دوستدار	۱۳۶۶

تکملهٔ فهرست اسامی فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام‌خانوادگی	سال فارغ‌التحصیلی	موضوع رساله	استاد راهنما
۱۶۱	علی پارسیان	۱۳۶۶	حد غیرمجاز انتگرال	ارسلان شادمان
۱۶۲	ناصر بروجردیان	۱۳۶۶	متریك ریمانی القایی	احمد شفیعی ده‌آباد
۱۶۳	مسعود آذین‌نژاد	۱۳۶۶	بررسیهای وجودی در ساختار محل طرحهای بسلوکی غیرکامل متعادل	غلامرضا برادران خسروشاهی
۱۶۴	شهریار فرهمندنژاد	۱۳۶۶	تبدیل حافظ اندازهٔ ارگودیك بول و تعمیم آن	نوروز ایزد دوستدار
۱۶۵	فرشته ملك	۱۳۶۷	تریدهای T-K-W	غلامرضا برادران خسروشاهی
۱۶۶	ویدا میلانی	۱۳۶۷	قضیهٔ برتینی برای نرمالیتهٔ ضعیف	رحیم زارع نهندی
۱۶۷	اشرف دانشخواه	۱۳۶۷	قضیهٔ اصلی زاریسکی برای واریته‌های نرمال ضعیف	رحیم زارع نهندی
۱۶۸	فرض‌الله میرزاپور	۱۳۶۷	تعمیمی از قضیهٔ کارتان به نگاشتهای هولومورف ویژه	ارسلان شادمان
۱۶۹	علی حاتم	۱۳۶۷	توسیع حرکت تحلیلی مختلط بدزعم سولیوان و ترستون	ارسلان شادمان

تصحیح

در جنگ ریاضی ۱، تعدادی اغلاط چاپی وجود دارد، لطفاً آنها را بشکل زیر تصحیح کنید.

صفحه	سطر	غلط	درست
۶	پاورقی ۲	تکلمه	تکمله
۱۴	۷	کس	کسی
۲۲	۳	اشتیلیجس	استیلیس
۲۳	۲۱	استادانه‌ای	استادانهٔ
۲۵	۱۷	بخش ۱	بخش ۲۱
۲۶	پاورقی ۷	۱۹۸۷	۱۹۶۷
۳۹	۱۳	وضوع	وضوح
۶۵	۲۰	$\dots+(-1)^n\lambda(n-1)$	$\dots+(-1)^n\lambda(n-1))$
۱۰۱	۲۲	$x \xrightarrow{f} x$	$x \xrightarrow{f} x'$
۱۰۲	۶	(f, G):	(f, φ):
۱۱۹	۳	سعید عباس‌بندی	ترجمهٔ سعید عباس‌بندی
۱۲۱	۸	از معنی است	ازمعنی تهی است
۱۲۲	۷	$\gamma \equiv -\sqrt{۲}$	$\gamma = -\sqrt{۲}$
۱۲۴	۲۶	π	r
۱۲۴	۲۶	$<r$ یا، $=$، یا $>\delta$	$r<$، $=$، یا $>\delta$
۱۲۴	۶	$x>$، یا $=$، یا $>$ ۰	$x<$، $=$، یا $>$ ۰
۱۲۶	۱۸	$x \equiv \gamma = \delta$	$x = \gamma + \delta$
۱۳۷	ستون دوم-۱۱	گرهها	گروهها
۱۳۹	ستون دوم-۵	نوافلینا	نوافلینا
۱۴۷	ردیف ۱۳۴	ناصرحاجب جهرمی	ناصرصاحب جهرمی

مقالات بلند

نظری اجمالی بر سیر تکامل نظریهٔ گروهها	ایزرائل کلاینر	۱
مجموعهٔ محدب چیست؟	ویکتور کلی	۲۹
انتگرال لئونهارت اویلر: نگرشی تاریخی بر تابع گاما	فلیپ دیویس	۵۱
میدانهای اقلیدسی اعداد	هندریك لنسترا	۷۳
معماری بنای ریاضیات	نیکولا بورباکی	۸۹
ملاحظاتی پیرامون مفهوم حد	روث ربکا استرویك	۱۰۳
نگاهی به $n+\cdots+2+1$ از دیدگاه ریاضیات گسسته	لورن لارسن	۲۱۳
جهان نیوتنی	روپرت هال	۱۲۹
برنولیها و سری همساز	ویلیام دانهم	۱۳۴
گروههایی که اجتماع سه زیرگروه هستند	هایمر، برایان، موير	۱۴۰

مقالات کوتاه

میز ناپدید شونده	لاری کنوپ	۱۴۸
شمارشپذیری مجموعه‌ها	استفن کمپبل	۱۵۰
برهان دیگری از قضیهٔ کوشی در مورد گروهها	جیمز مك‌کی	۱۵۱
نکته‌ای درباب چندجمله‌ایهای مشخصه	ژوزف اشمید	۱۵۲

گزارشها

گزارشی از سمینار ریاضی	بهزاد منوچهریان	۱۵۳
نقش حل مسئله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان	پرویز شهریاری	۱۵۴
تدریس کامپیوتر در نیکاراگوئه	مارلین سنت، آرتور وین	۱۵۶
نظری اجمالی بر کتابهای ریاضی منتشر شدهٔ دانشگاه تهران	بهزاد منوچهریان	۱۶۰
تکملهٔ فهرست اسامی فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران		۱۶۵
تصحیح		۱۶۶