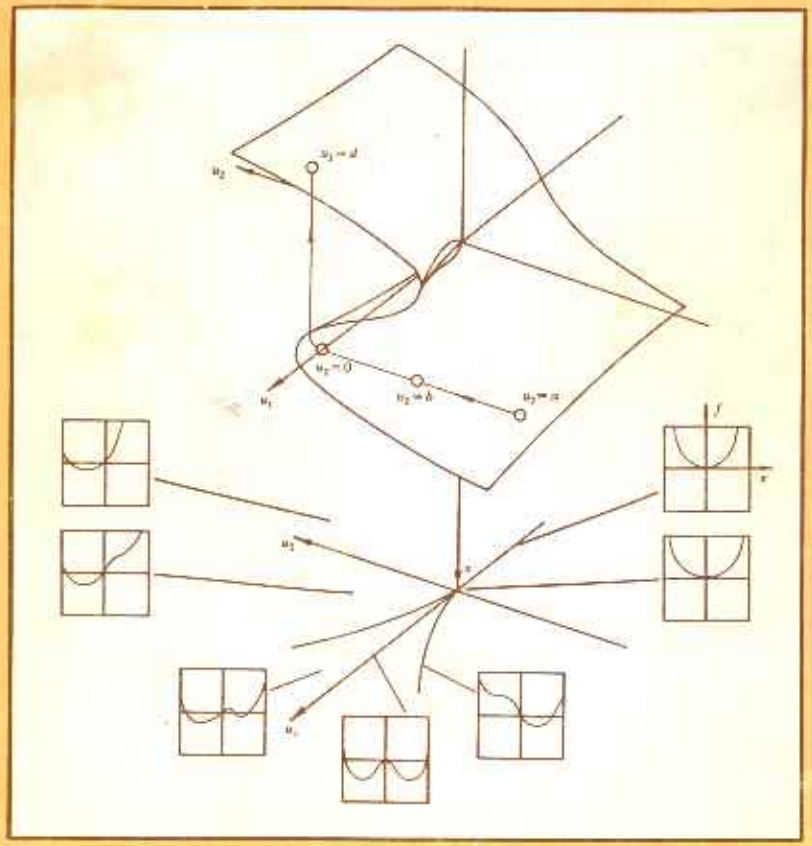
جنگ ریاضی دانشجو

دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران



جلد پنجم، بهمن ۱۳۶۸

جُنگ ریاضی دانشجو

□ جنگ ریاضی دانشجو به کوشش جمعی از دانشجویان گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، هرسال ۳ شماره منتشر می‌شود.

□ هدف از انتشار جنگ، ایجاد انگیزه و فراهم ساختن محیطی مناسب برای فعالیتهای فوق‌برنامهٔ دانشجویان و علاقمندان ریاضی، غنی کردن منابع مقاله‌های توصیفی-آموزشی به زبان فارسی، معرفی فعالیتهای مستقل و جالب توجه دانشجویان رشتهٔ ریاضی، و ایجاد ارتباط مؤثر میان دانشجویان این رشته است.

□ مقاله‌های جنگ بیشتر توصیفی‌اند، و قالب «قضیه-اثبات-برهان» در دههٔ اول مورد نظر نیست. این مقاله‌ها زمینه‌های تخصصی ریاضیات همچون آنالیز، جبر، هندسه و توپولوژی، و زمینه‌های عمومیتری چون تاریخ، فلسفه، و آموزش ریاضیات را دربرمی‌گیرند.

□ مخاطبین جنگ دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی هستند.

□ درمورد مقاله‌های ارسالی توجه به نکته‌های زیر لازم است:

۱. مقالهٔ ارسالی باید مطابق با چارچوب پیشگفته باشد.

۲. مقاله تألیفی و یا ترجمهٔ دقیق متن اصلی باشد؛ ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود.

۳. متن اصلی مقالهٔ ترجمه‌ای همراه با ترجمه فرستاده شود. همچنین شرح شکلها در صفحهٔ جداگانه‌ای ترجمه شود.

۴. مقاله‌ها روی کاغذ A4 ماشین شده یا به طور کاملاً خوانا نوشته شود. طول مقاله از ۳۰ صفحهٔ دست‌نوشت تجاوز نکند و در هرصفحه بیش از ۱۵ سطر نوشته نشود.

۵. هیئت تحریریه در رد، حک، و اصلاح مقالهٔ ارسالی آزاد است، و هرگونه تغییری به اطلاع فرستندهٔ مقاله خواهد رسید و در هرصورت مقالهٔ ارسالی پس فرستاده نخواهد شد.

مدیرمسؤول: بهزاد منوچهریان

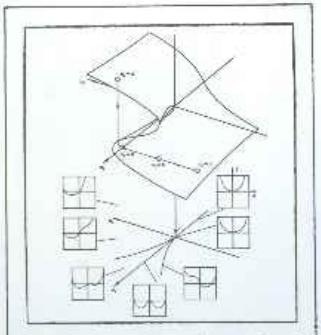
استاد مشاور: غلامرضا برادران خسروشاهی

زیر نظر هیأت تحریریه: شاهین آجودانی نمینی
امیر اکبری مجدآباد نو
ناصر بروجردیان
سعید ذاکری
فرشته ملک
بهزاد منوچهریان

مسؤول فنی و صفحه‌آرا: نادر کثیری

ناشر: جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران
حروفچینی، چاپ، و صحافی: شقایق
جلد پنجم، بهمن ۱۳۶۸
بها: ۴۰۰ ریال

نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.



یکی از هفت فاجعهٔ مقدماتی به نام شکن

مقالهٔ «پیشنیازهای ریاضی نظریهٔ...» را ببینید.

سخن هیئت تحریریه

مقاله‌ها

آنالیز ترکیبی — جیان‌کارلو روتا ۱
پیشنیازهای ریاضی نظریهٔ مقدماتی فاجعه‌ها — جان د. آثر ۱۴
کشف کوارکهای نیوتنها (چهارگانها) توسط هامیلتون — ونذر واردن ۲۷
قضیهٔ باناخ ـ تارسکی — رابرت م. فرنچ ۳۱
نیکلای بوربائی — پال هالموس ۵۳
آیا ریاضیات عناصری دارد؟ — پال هالموس ۶۶
اعداد اول و حرکت براونی — پاتریک بیلینگزلی ۸۱
ماشینهای با حالت متناهی — د. ج. هادنیر ۱۰۲
کمیابی ضربهای خارجی روی فضاهای اقلیدسی — برترام والش ۱۲۶
پاراداکس برتراند — ملوین لاکس ۱۳۵
گروههای ناآبلی از مرتبهٔ pq — س. ک. پربریان ۱۴۲

نکته‌ها

نکته‌ای درخصوص گروه متناوب — ا. ل. اسپیزناگل ۱۴۷
بازهم $f(x+y)=f(x)+f(y)$! — سعید ذاکری ۱۴۹
اعداد گنگ — ج. پ. جونز و س. تورودوسکی ۱۵۳
دترمینان ماتریسهای پاد متقارن — دیوید ج. یونتیو ۱۵۵
اثباتی مقدماتی برای یک مسئلهٔ معروف شمارش — جیمز د. فریل ۱۵۸

دیدگاه

آیا صدای ما بهسیای ما می‌رسد؟ ۱۶۱

گزارش

نگاهی به کارنامهٔ پنج‌سالهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی — امیر اکبری مجدآبادنو ۱۶۸

به‌نام خداوند متعال

سخن هیئت تحریریه

مجالی دست داده است تا در آستانهٔ انتشار پنجمین شمارهٔ جنگ ریاضی دانشجو سخنی کوتاه با خوانندگان عزیز درمیان بگذاریم. لازم دانستیم اشاره‌ای بسیار مختصر به‌ماهیت توصیفی مجله نماییم تا از برخی تعبیرهای اشتباه جلوگیری کرده باشیم.

بعضیها ناآگاهانه گمان برده‌اند که یك مجلهٔ ریاضی توصیفی یعنی مجله‌ای که در آن از هیچ بحث فنی خبری نیست، هیچ چیز اثبات نمی‌شود، اغلب مطالب آن صرفاً یك مشت حرف و نوعی کلی بافی است، و خلاصه، هیچگاه نمی‌توان آن را یك مجلهٔ ریاضی جدی تلقی کرد. این گمان، اگر نگوییم باطل، دست‌کم ساده‌نگرانه است. شکی نیست که در یك مقالهٔ توصیفی نمی‌توان به اندازهٔ مقاله‌ای کاملاً تخصصی چماق "تکنیك" را برسرخواننده کوفت، اما آیا این به معنای کم اهمیت بودن و جدی نبودن آن است؟ اگر هدف یك مقالهٔ توصیفی را آن بدانیم که در کمترین حجم ممکن بیشترین اطلاعات را به بهترین طریق در اختیار خوانندهٔ ناآشنا به موضوع بگذارد، و بتواند به نحوی شایسته "روح" مطلب را به او القاکند، آنگاه خواهیم دیدکه در یك مقالهٔ توصیفی نه تنها می‌توان بحثی فنی در سطحی مناسب آورد، بلکه در بسیاری موارد این روش ـ تلفیق کلام و برهان ـ تنها راه ممکن برای رسیدن به چنین هدفی است، و نوشتن چنین مقاله‌ای دوبار مشکلتر، دوبار وقت‌گیرتر، و ده بار سودمندتر از نگارش مقاله‌ای بی‌روح و منجمد است که خوانندهٔ با خواندنش چند گزارهٔ ریاضی می‌بیند، اما به مفهوم واقعی چیزی دستگیرش نمی‌شود. ریاضیدانان بزرگی موفق شده‌اند حتی مباحث کاملا تخصصی را در قالبی بریزندکه ما آن را "توصیفی" به معنای حقیقی، و نه رایج آن، می‌دانیم ـ برخی از آثار آدنولد از این زمره‌اند.

ما چنین چارچوبی برای کار جنگ برگزیده‌ایم، و امیدواریم که به آن وفادار بمانیم. و اعتقاد داریم که مجله‌های ریاضی‌ای که طیف خوانندگان آنها محدود به چند نفر، آن هم با گرایشهای خاص نیست، باید در چنین راهی گام بگذارند، که طریق‌صواب، و البته سخت دشوار است، به‌حکم آنکه هیچ چیز با ارزشی سهل و آسان نیست.

مشکلات عدیده در به‌ثمر رسانیدن هر شمارهٔ جنگ مانع از آن شده است که روند انتشار آن کاملاً منظم باشد، و دراین میان جز عذر خواهی از طالبان جنگ چه می‌توان کرد؟ امیدواریم این نقیصه را هر چه زودتر رفع کنیم.

در ادامهٔ راه انتشار جنگ به نظرات شما خوانندگان عزیز سخت نیازمندیم، و از شما می‌خواهیم دیدگاه خود را دربارهٔ آنچه هست و آنچه باید باشد، به نشانی ناشر ارسال کنید. ما باور داریم که "باید" نظر شما را درباب مجله بدانیم. اگر ندانیم چگونه به پیش برویم؟ و اگر به پیش نرویم چگونه بدانیم؟

جیان‌کارلو روتا

آنالیز ترکیبی•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

آنالیز ترکیبی ـ یا همانگونه‌که نامیده می‌شود، نظریهٔ ترکیبیاتی ـ یکی از قدیمیترین و درعین‌حال کم‌توسعه یافته‌ترین شاخه‌های ریاضیات است. علت‌این تضاد ظاهری تا پایان مقالهٔ حاضرمشخص خواهد شد.

فیلسوف پهناور ریاضیات‌کاربردی، که نمی‌توان تعریف مشخصی از آن ارائه داد، در شرف تقسیم به دو شاخهٔ مشخص، با فصل مشترکی ناچیز، می‌باشد. شاخهٔ نخست تمامی نوادگان مختلف آنچه را که در قرن گذشته «مکانیك عقلانی» یا «مکانیك تحلیلی» نامیده می‌شد دربرمی‌گیرد، وعلاوه برآنها فعالیتهای علمی شاخصی چون مکانیك پیوستار، نظریهٔ کشسانی، نورشناخت هندسی وشاخه‌های جوانتری چون پلاسما، شارش فراصوتی ومانند آنهارا نیزشامل می‌شود. این حوزه درپی استفاده ازکامپیوترهای سریع امروزی، به‌سرعت متحول می‌شود.

شاخهٔ دوم، ناظر بر آن چیزی است که هم در علوم طبیعی و هم در ریاضیات «پدیده‌های گسسته» نام گرفته است. واژهٔ «ترکیبیاتی» که نخستین‌بار ازسوی فیلسوف و دانشمند آلمانی‌جورج لایب نیتس در رساله‌ای کلاسیك به کار رفت، ازقرن هفدهم مورد استفادهٔ عموم قرار گرفته‌است. امروزه مسائل ترکیبیاتی به‌تعدادی روزافزون درهرشاخه‌ای از علم، حتی در آن شاخه‌هایی‌که از ریاضیات به ندرت بهره می‌گیرند، ظاهر می‌شوند. حال آشکار می‌شود که اگر علوم زیستی درتوسعهٔ خود به مرحله‌ای برسندکه استفاده از

• Rota, Gian - Carlo, "Combinatorial analysis," *The Mathematical Sciences: A Collection of Essays*, M. I. T. Press, 196-208.

ابزاری ریاضی اجتناب ناپذیر باشد، این ابزار را باید در نظریهٔ ترکیبیاتی جست. این مطلب، قبلاً نیز درشاخه‌هایی از زیست‌شناسی، چون زیست‌شناسی‌مولکولی و ژنتیك، که کثرت داده‌های آزمایشی سبب می‌شد به تدریج نظریه‌های موفقی پدید آیند، آشکار بود. فیزیك، که خود منشاء چنین پژوهشهای ریاضی بوده است، اکنون در مکانیك آماری و حوزه‌هایی چون ذرات بنیادی با مسائل دشواری روبه روست که تا وقتی نظریه‌های کاملاً[۴] جدیدی با ماهیت ترکیبیاتی برای فهم ساختار گستهٔ جهان مولکولی و زیراتمی گسترش نیابند، برآنها غلبه نمی‌یابد.

به این انگیزه‌ها باید تأثیر محاسبات سریع را نیز افزود. دراینجا نظریه‌های ترکیبیاتی به عنوان راهنمایی اساسی به محاسبات عملی نیاز دارند. به علاوه، علاقه‌ای که به مسائل ترکیبیاتی نشان داده می‌شود، بیش ازهرچیز از این واقعیت ناشی می‌شود که با استفاده ازکامپیوتر می‌توان صحت برخی ازفرضیه‌هایی راکه تاکنون دست نیافتنی بودند، بررسی کرد.

این نشانه‌ها به‌تنهایی برای پیش‌بینی افزایش کار درزمینهٔ نظریهٔ ترکیبیاتی، کفایت می‌کنند. نشانه‌ای دیگر، واحتمالاً مهمتر، حرکتی‌است که ازبطن ریاضیات به‌سمت‌بررسی اشیای ترکیبیاتی آغازشده است.

نخستین بارقه‌های اندیشهٔ ریاضی دردهن انسان متمدن را باید افکاری مبتنی بر ترکیبیات دانست. در دیرپاترین تمدنهای بشری، هرگاه مجالی برای جولان تخیل در دنیای اعداد و اشکال هندسی پیش آمد، این تفکرات بی‌درنگ به‌ضرایب دوجمله‌ای، مربعهای جادویی، یا نوعی رده‌بندی مقدماتی‌ازچندوجهی‌های فضایی رهنمون شدند. پس چرا، علی‌رغم چنین تاریخچه‌ای، نظریهٔ ترکیبیاتی هم‌اکنون درآغازحرکت به‌سوی علمی خود توان قراردارد؟ به‌نظرما دلایل این امر در دو رویداد نامعمول نهفته است.

نخست آنکه نظریهٔ ترکیبیاتی موجب پیدایش چندین شاخهٔ فعالتر درریاضیات امروزی شده است، این شاخه‌ها گاهی به‌بهای محدودشدن طیف مسائلی که درآنها به‌کار می‌روند، ازیکدیگرمستقل شده‌اند. مثالی ازاین نوع ـ واحتمالاً موفقترین آنها ـ توپولوژی جبری است (قبلاً آن را توپولوژی ترکیبیاتی می‌نامیدند) که، در قرن نوزدهم و توسط ریاضیدان فرانسوی، هانری پوانکاره، از حالت ریاضیات تفریحی خارج شده و به یك نظام هندسی مستقل تبدیل شد. هانری پوانکاره، دریك سلسله مقالاتی که درسالهای‌پایانی عمرش نگاشت، امکانات شگفت‌انگیز استدلالهای توپولوژیك را آشکار ساخت. چندین ریاضیدان راه پوانکاره راوتبال کردند، که ریاضیدانان آمریکایی‌شاخصی چون آلکساندر، لیفشیتز[۱]، وبلن[۲]، و ویتنی[۳] از آن جمله‌اند. امروزه، نظریهٔ همولوژی، کانون توپولوژی

1. Lefschetz 2. Veblen
3. Whitney

معاصر، همراه با مکانیك کوانتوم ونظریهٔ نسبیت یکی از بزرگترین دستاوردهای تفکر ناب دراین قرن قلمداد می‌شود ونخستین مبحثی است که به‌تنهایی مهرآمریکایی برپیشانی دارد. بسیاری از مسائل ترکیبیاتی که نخستین‌بار در توپولوژی مطرح شدند، هنوز حل نشده‌اند. (مثلاً[۴]، مسئلهٔ چهاررنگ، که به‌زودی آن‌را بررسی خواهیم کرد، یاحدس‌پوانکاره، ازاین جمله‌اند.) با این وجود، توپولوژی جبری در حل آرایهٔ هیجان‌انگیزی از مسائل دیرپای سراسرریاضیات موفق بوده است، وکاربردهایش در فیزیك انتظارات زیادی را برانگیخته است.

آنچه دربارهٔ توپولوژی نوشته‌ایم، می‌تواند در مورد تعدادی از دیگر مباحث ریاضی تکرار شود. این مطلب ما را به‌دومین دلیل اینکه چرا، نظریهٔ ترکیبیاتی ازمابقی شاخه‌های ریاضیات جدا شده است (و حتی گاهی گفته شده است که به فیزیك یا شیمی نظری نزدیکتر است تا ریاضیات)، رهنمون می‌سازد. این دلیل عبارت است ازتعدادکثیر مسائل ترکیبیاتی حل‌نشده، که بسیاری ازآنها اهمیت زیادی درعلوم‌کاربردی دارند. این مسائل طی سالها دست به‌دست گشته‌اند وهربار درراه خلق روشها یا نظریه‌های‌استانده‌ای که به‌حل آنها بیانجامد، با مشکلات فراوانی روبه‌رو شده‌اند. هنوزهم درمقایسه باتعداد کسانی‌که در هریك از سایر شاخه‌های ریاضی، که طی چند سال اخیر درسطح دانشگاهی مطرح شده‌اندکار می‌کنند، عدهٔ کمتری مایلند در نظریهٔ ترکیبیاتی کارکنند. جملهٔ جالبی از فیلسوف اسپانیایی خوزه اورتگای گاست[۱]، را ذکرمی‌کنم که در تفسیری بر دستاوردهای خارق‌العادهٔ فیزیك اظهار داشت که اتخاذ تکنیکهای پیشرفته و مجهزبه «احمقها» نیز این امکان را می‌دهدکه درکارهای پژوهشی موفق باشند. درحالی‌که بسیاری از دانشمندان امروزی احتمالاً از چنین اظهار نظری افراطی شانه خالی می‌کنند، با این وجود تردیدی نیست که به‌ویژه برای مبتدیان، انجام‌کاری پژوهشی‌درهریك ازدیگر شاخه‌های ریاضی که بیشتر توسعه‌یافته‌اند، بسیار آسانتراز انجام‌کاری بدیع درحوزه‌ای چون نظریهٔ ترکیبیاتی است. چراکه دراینجا داشتن کوله‌باری از استعداد وشهامت ضرودی است.

بدینسان، یکی از عواملی که توسعهٔ نظری نظریهٔ‌ترکیبیاتی را به‌تأخیرانداخته است، کامیابیهای فراوان، معدودکسانی است که برخی ازمسائل ترکیبیاتی مهم‌دوران خویش را حل کردند. زیرا، درست همانطورکه مردان‌عمل احساس می‌کنند نیازی به‌فلسفه‌بافی نیست، مسئله حل‌کن‌های موفق درریاضیات نیزمی‌پندارندکه به‌ابداع نظریه‌های جدید، که‌میخهای مشابه را در یك قالب در می‌آورند و به‌این ترتیب امکان حل مسائل مشابه را با صرف نیروی‌کمتری فراهم می‌سازند، نیازی نیست. اما پیچیدگی و تعداد روزافزون مسائل ترکیبیاتی‌ادامهٔ این روش را غیرممکن ساخته است. درواقع، دراینکه کسی به‌تنهایی بتواند یکی ازمسائل عمدهٔ ترکیبیاتی دوران ما را حل‌کند، جای تردید است.

1. Jose Ortegay Gasset

مسائل مبارزطلب

خوشبختانه بسیاری از مسائل ترکیبیاتی را می‌توان به زبان روزمره بیان کرد. به‌منظور ارائهٔ منظره‌ای‌کلی از وضعیت فعلی این حوزه، چند تا از مسائلی راکه هم‌اکنون فعالانه روی آنها کار می‌شود، برگزیده‌ایم. هریك ازاین مسائل درفیزیك، شیمی نظری یا برخی از شاخه‌های «عملی»‌تر ریاضیات کاربردی گسسته، چون برنامه‌نویسی، زمان‌بندی، نظریهٔ شبکه‌ها، ویا اقتصاد ریاضی، کاربردهایی دارند.

۱. مسئلهٔ آیزینگ[1]

یك تور مستطیلی شکل $m \times n$ ازمربعهای واحد، به‌رنگهای آبی وقرمز، تشکیل‌شده‌است. چنانچه تعداد یالهای مرزی بین مربعهای آبی و مربعهای قرمز ازپیش معلوم باشد، چند طرح رنگی متفاوت می‌توان ارائه داد؟

ازقضا، این مسئلهٔ به‌ظاهربی‌اهمیت معادل یکی ازمسائلی است‌که درحوزهٔ مکانیك آماری توجه زیادی را برانگیخته بود. موضوع مورد بحث بسیار مهم است: شرح رفتار ماکروسکوپی ماده برمبنای واقعیتهای شناخته شده درمورد سطوح اتمی یا مولکولی آن. مسئلهٔ آیزینگ‌که‌گزارهٔ فوق یکی ازصورتهای معادل آن است، ساده‌ترین مدلی است‌که با استفاده از فرضهای معقولی درسطح میکروسکوپی، رفتار ماکروسکوپی مورد انتظار را بازگو می‌کند.

حل‌کامل و دقیق این مسئله تا پنج سال پیش میسرنشد، هرچندکه ایده‌های اصلی آن ازسالهاپیش آغازشده بود. مشابه سه‌بعدی مسئلهٔ آیزینگ علی‌رغم کوششهای بسیارهمچنان حل نشده باقی مانده است.

۲. نظریهٔ تراوش (پرکولاسیون)[2]

باغ میوه‌ای راکه در آن درختهای میوه به‌طور منظم کاشته شده‌اند، درنظر بگیرید: آفتی روی چند درخت ظاهرمی‌شود و با احتمال p از درختی به‌درخت مجاورسرایت می‌کند. سرانجام چند درخت‌گرفتارآفت می‌شوند؟ آیا این‌آفت شکلی فراگیرداشته وسراسر باغ را آلوده خواهد ساخت؟ درختها باید چقدر دور ازهم‌کاشته شده باشندکه مطمئن باشیم p بقدری‌کوچك است‌که این‌آفت به‌طورموضعی عمل می‌کند؟

آلیاژبلورینی ازیونهای مغناطیسی وغیرمغناطیسی به‌نسبت p و q را درنظربگیرید. یونهای مغناطیسی مجاور بریکدیگر اثر می‌کنند، و بنابراین خوشه‌های با ابعادگوناگون قابلیتهای مغناطیسی متفاوتی دارند. اگرییونهای مغناطیسی به‌اندازهٔ کافی متمرکز باشند، خوشه‌های نامتناهی می‌توانند تشکیل شوند و دردمایی به اندازهٔ کافی پایین، درجهٔ فرو-

1. Ising 2. Percolation Theory

مغناطیسی طویل‌المدت می‌تواند در تمامی بلورگسترش یابد. پایینتر از چگالی معینی از یونهای مغناطیسی، چنین وضعیتی‌رخ نمی‌دهد. چه آلیاژهایی از دویون می‌توانندبه‌عنوان آهنرباهای دائمی به‌کار روند؟

با اندکی حوصله مشاهده می‌شودکه این دومسئله دونمونه ازمسئله‌ای واحد هستند، که مایکل فیشر، فیزیکدان بریتانیایی، آن را به‌طرز درخشانی حل کرد. فیشر مسئله را به‌زبان نظریهٔ گرافها ترجمه‌کرد و درحد فاصل نظریهٔ ترکیبیاتی واحتمال، نظریهٔ‌زیبایی را پدیدآورد. اکنون این مسئله دربسیاری از مسائل دیگرکاربردهایی پیداکرده است. یکی ازنتایج اصلی نظریهٔ تراوش (پرکولاسیون) این است‌که درهر گراف نامتناهی G (که در شرایط معینی، که آنها را حذف می‌کنیم، صدق می‌کند) یك احتمال بحرانی p_c وجود داردکه تشکیل خوشه‌های نامتناهی در G را تضمین می‌کند. اگراحتمال p، برای گسترش «واگیردار» اریك رأس G به‌نزدیکترین رأس مجاورش، از p_c کوچکتر باشد، هیچ خوشهٔ نامتناهی شکل نخواهدگرفت، درحالی‌که اگر $p \geqslant p_c$، خوشه‌های نامتناهی تشکیل خواهند شد. فیشر دستورهای محاسبهٔ احتمال بحرانی p_c، را به‌اتکای برهانهای ترکیبیاتی هوشمندانه، ابداع کرد.

۳. تعداد گردن‌بندها و مسئلهٔ پولیا

باتعداد نامتناهی مهره با k رنگ مختلف، گردن‌بندهایی را از n مهره می‌سازند. چند گردن‌بند مجزای مختلف می‌توان ساخت؟

این مسئله به‌طورکامل از مدتها پیش، و چندان دور، حل شده است‌که تقدم در حل مسئله مورد تردید است. فرض‌کنید تعداد گردن‌بندهای مختلف $c(n, k)$ باشد، فرمول‌آن به‌شرح زیراست

$$c(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d)\, k^{n/d}$$

دراینجا، ϕ تابعی است عددی‌که در نظریهٔ اعداد کاربردهای بسیاری دارد و نخستین‌بار اویلر آن را معرفی‌کرد. دراینجا نیز، این مسئله به‌صورتی‌که بیان شد، بی‌اهمیت جلوه می‌کند و به‌نظرمی‌رسدکه‌کاربردی نداشته باشد. اما این فرمول هنوزهم می‌تواند برای‌حل مسائل‌مشکلی‌درنظریهٔ جبرهای لی به‌کاررودکه این نظریه نیزبه‌نوبهٔ خود برفیزیك‌معاصر تأثیرعمیقی برجای نهاده است.

مسئلهٔ شمارش گردن‌بندها، مشکل نوعی مسائل شمارشی را،که تعدادقابل ملاحظه‌ای از مسائل ترکیبیاتی را دربرمی‌گیرند، آشکار می‌سازد. این مشکل را می‌توان به‌صورت زیربیان‌کرد. یك مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی S از اشیاء مفروض است، و به‌هر شیء یك عدد صحیح n — درمورد گردن‌بندها، تعداد مهره‌ها — نسبت داده می‌شود به‌طوری‌که هر n به‌حداکثرتعدادمتناهی، a_n، از اعضای S نسبت‌داده می‌شود. به‌علاوه،یك رابطهٔ هم‌ارزی

روی مجموعهٔ S مفروض است ــ در این حالت، دوگردن‌بند هم‌ارزند با «یکسانند»، هرگاه تفاوتشان تنها درچرخشی حول مرکزهای گردن‌بندها باشد، مسئله عبارت است از تعیین تعداد کلاسهای هم‌ارزی، چنانچه تنها اعداد صحیح a_n وچند دادهٔ ترکیبیاتی درمورد مجموعهٔ S داده شده باشند.

این مسئله را ریاضیدان مجارستانی، جورج پولیا، دررسالهٔ مشهوری که در ۱۹۳۶ انتشار یافت، حل کرد. پولیا فرمول صریحی برای جواب ارائه داد که ازآن پس در ناهمگون‌ترین مسائل شمارشی ریاضیات، فیزیک و شیمی به‌کار رفته است. (مثلاً، تعداد ایزومرهای یك مولکول مفروض از این فرمول به‌دست می‌آید.)

فرمول پولیا در حل تعدادکثیری ازمسائل شمارشی سهم عمده‌ای داشت، و تقریباً هرروز برای شمارش مجموعه‌های پیچیده وپیچیده‌تری ازاشیاء به‌کارمی‌رود. باهمهٔ اینها، به‌آسانی می‌توان مسائل شمارشی مهمی را ذکر کردکه تابه‌امروز دربرابر تمامی تلاشها ایستادگی کرده‌اند، برای نمونه یکی ازاین مسائل درپاراگراف بعدی آمده است.

۴. حرکت تصادفی که خودش را قطع نمی‌کند

یك حرکت تصادفی روی یك شبکهٔ مستطیلی شکل عبارت است از دنباله‌ای ازگامهای به‌طول واحد، که هریك به‌طور تصادفی روی محور x یا محور y، وبا احتمال مساوی برای هریك ازچهارجهت، انجام می‌شود. مسئله عبارت‌است ازارائهٔ فرمولی‌برای تعداد، R_n، حرکتهای تصادفی با n گام، که ازهیچ رأسی بیش‌از یك‌بارعبور نمی‌کنند. درمورد این مسئله مطلب چندانی نمی‌دانیم، هرچندکه فیزیکدانها داده‌های عددی فراوانی دراین باب گردآورده‌اند. چنانچه علاقه‌ای که نسبت به حل آن نشان داده می‌شود کاهش نیابد، احتمالا این مسئله یا دست‌کم حالت خاصی ازآن، تا چند سال آینده حل خواهد شد.

۵. مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد

به‌پیروی ازگومری[1]، کسی که در این زمینه کارهای بسیار نافذی انجام داده است، مسئله را به‌صورت زیرتوصیف می‌کنیم: «یك فروشندهٔ دوره‌گرد تنها به‌یك چیز دلبستگی دارد، وآن پول است. اوقصد دارد از چند نقطه، که معمولاً آنها را شهرها می‌نامیم، عبور کند، وسپس به‌نقطهٔ‌عزیمت خود باز گردد. هنگامی که او ازشهر iام به‌شهر jام می‌رود، هزینه‌ای برابر C_{ij} متحمل می‌شود. مسئلهٔ او یافتن مسیری ازهمهٔ نقاط (شهرها) است که هزینهٔ کل راکمینه سازد.»

این مسئله، آشکارا، نفوذ محاسبه درنظریهٔ ترکیبیاتی را به‌نمایش می‌گذارد. واضح است که یك جواب وجود دارد، زیرا تعدادکل حالات متناهی است. اما، آنچه جالب است تعیین کمینهٔ $S(n)$، تعداد گامهایی است که برای یافتن جواب ضروری است، که به

1. R. Gomory

تعداد شهرها، n، بستگی‌دارد. (یك «گام» را به‌صورت ابتدایی‌ترین عملی که یك‌کامپیوتر می‌تواند انجام‌دهد، تعریف می‌کنیم.) اگربا افزایش عدد صحیح n، عدد $S(n)$ به‌سرعت افزایش‌یابد (مثلا اگر $S(n)=n!$) می‌توان گفت مسئله لاینحل‌است، زیرا هیچ کامپیوتری، به‌استثنای چند مقدار کوچك n، قادر به‌یافتن‌جواب نیست. به‌کمك استدلالهایی هوشمندانه نشان داده شده است که: $S(n)\leq cn^2 2^n$، که c عددی است ثابت، اما هنوزمشخص‌نشده است که آیا این بهترین جواب ممکن است یا خیر.

تلاش برای حل مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد و مسائل مشابه آن درمورد کمینه‌سازی گسسته به شکوفایی و گسترش عظیم نظریهٔ چند وجهی‌ها در فضاهای n-بعدی کمک ــ به استثنای چندنتیجهٔ خاص ــ از زمان‌ارشمیدس عملا دست نخورده باقی‌مانده بود، انجامید. کارهای اخیرسبب شده است که نظریه‌ای‌بازیابی وتوان خیره‌کننده خلق شود. جای‌شگفتی است، که مطالعهٔ ترکیبیاتی چند وجهی‌ها از ارتباط نزدیکی بین آن و توپولوژی خبر می‌دهد که تاکنون‌کشف نشده است. همچنین این مطالعه به‌نظریه‌ای ارتباط پیدا می‌کندکه در ورای برنامه‌ریزی خطی و روشهای مشابهی که به‌طور گسترده‌ای در اقتصاد و تجارت ازآنها بهره می‌گیرند، نهفته است.

ایده‌ای‌که شرح دادیم، یعنی اینکه مسئله‌ای ازمرتبهٔ $S(n)$ را، که به‌عدد صحیح n بستگی دارد، چنانچه $S(n)$ بسیارسریع افزایش یابد حل ناپذیرفرض‌کنیم، تقریباً به‌همین شکل درمبحثی کاملاً متفاوت، یعنی نظریهٔ اعداد، ظاهر می‌شود. کارهای اخیر درزمینهٔ مسئلهٔ دهم هیلبرت (حل معادلات دیوفانتی در اعداد صحیح) بسرهمان اصول تکیه دارد و از روشهای مشابهی بهره می‌گیرد.

۶. مسئلهٔ چهاررنگ

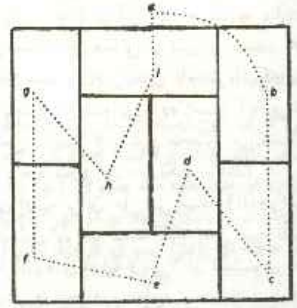
این‌مسئله یکی ازقدیمیترین ومشکلترین مسائل ترکیبیاتی است. اهمیت آن به‌جهت کارهایی است‌که برای حل آن انجام شده و کاربردهای نامنتظره‌ای که اغلب این‌کارها در مسائل دیگرداشته‌اند. ظاهر مسئله به‌طرز فریبنده‌ای ساده است: آیا می‌توان هرنگاشت مسطح را (هرناحیه را یك چند ضلعی با اضلاع مستقیم محصور می‌کند) با حداکثر چهار رنگ چنان رنگ‌کردکه هیچ دوناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند؟

بسیاری از تلاشهای اولیه برای حل این مسئله (تا حوالی ۱۹۳۵) برمبنای روش مستقیم بودند و نه‌تنها با شکست مواجه شدند بلکه حتی هیچ تأثیر مفیدی نیز برریاضیات برجای نگذاشتند. درنتیجهٔ کارهای اولیهٔ ویتنی[1] از انستیتوی مطالعات پیشرفته وکارهای مهم توت[2] (انگلیسی ــ کانادایی)، رهیافتی جدید و عمدتا غیرمستقیم به مسئلهٔ چهار رنگ پدید آمد که «هندسهٔ ترکیبیاتی» (یا گاهی نظریهٔ متروییدها) نامیده می‌شود. این نظریه نخستین نظریهٔ کلی است‌که درفهم‌رده‌ای ازمسائل ترکیبیاتی کاملاً موفق بوده است. اساس

1. H. Whitney 2. W. T. Tutte

این نظریه تعمیمی ازقوانین کیرشهوف درنظریهٔ مدار و درجهتی کاملا پیش‌بینی نشده ــ و غیرتوپولوژیك ــ است. مفهوم اساسی آن عبارت است ازعملگر بستاری که دارای خاصیت تبادل مك‌لین ـ اشتاینیتز[1] باشد. خاصیت تبادل عبارت است از رابطه‌ای، $\bar{A} \to A$، که روی همهٔ زیرمجموعه‌های A ازمجموعهٔ S تعریف شده‌است، به‌قسمی که، اگر x و y دو عضو S باشند و $x \in A \cup y$ ولی $x \notin \bar{A}$، آنگاه $y \in A \cup x$. درحالت کلی، رابطهٔ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ برقرار نیست، بنابراین ساختارحاصل یك فضای توپولوژیك نیست، و یك هندسهٔ ترکیبیاتی نامیده می‌شود. هم جبرخطی و هم توپولوژی مجموعه‌ـنقطه‌ای وجوه مشترك بسیاری با این نظریه دارند، ولی این نظریه اندکی عمیق‌تر از آنهاست.

شاخص‌ترین پیشرفتی که درزمینهٔ مسئلهٔ چهاررنگ حاصل شده‌است قضیه‌ای است منسوب به‌ویتنی[2]. برای بیان این قضیه، به‌مفهوم «گراف مسطح» نیازداریم، که عبارت است از گردایه‌ای ازنقاط صفحه، به‌نام رأسها، و پاره‌خطهای مستقیمی که هر یك از آنها دو رأس را به‌هم متصل می‌کنند و تنها در رأسها یکدیگررا قطع می‌کنند. این پاره‌خطها یال نامیده می‌شوند. هر گراف مسطح مرز «نگاشتی» است که صفحه را به دو «ناحیه» تقسیم می‌کند. ویتنی به‌تعریف گراف مسطح و نگاشت نظیرآن، فرضهای زیررا افزود: (الف) در هررأس دقیقاً سه یال مرزی به‌هم پیوندند؛ (ب) هیچ زوج ازنواحی، که با یالی مرزی از یکدیگر جدا نشده باشند، یك ناحیهٔ همبند تشکیل نمی‌دهند؛ (ج) هیچ سه ناحیه‌ای که با یالی مرزی از یکدیگر جدا نشده باشند، یك ناحیهٔ همبند تشکیل نمی‌دهند. تحت این فرضها، ویتنی نتیجه گرفت که می‌توان خم بسته‌ای رسم کرد که ازهریك ازنواحی نگاشت یك‌بار و دقیقاً یك‌بار عبورمی‌کند. مثالی درشکل ۱ ارائه شده است. قضیهٔ ویتنی از هنگامی که کشف شد تاکنون کاربردهای بسیاری یافته است.



شکل ۱

1. MacLane - Steinitz

۲. البته این مسئله در ۱۹۷۵ توسط کنت آپل و ولفگانگ هیکن، و به‌یاری کامپیوتر حل شد. م.

۷. اصل لانه کبوتری و قضیهٔ رمزی[1]

نمی‌توانیم این سیاههٔ مختصر ازمسائل ترکیبیاتی را بدون ارائهٔ مثالی عملی ازیك بحث ترکیبیاتی به‌پایان برسانیم. قضیه‌ای بسیارزیبا ولی‌کم وبیش ناآشنا را انتخاب کرده‌ایم، وبرهان کوتاهش را به‌طورکامل خواهیم آورد. خوانندهٔ مبتدی که بتواند در اولین بار خواندن برهان آن را دریابد برای مطلوب دانستن استعداد خود درنظریهٔ ترکیبیاتی دلیل خوبی خواهد داشت.

قضیه. چنانچه دنباله‌ای از (n^2+1) عدد صحیح متمایز مفروض باشد، می‌توان زیر دنباله‌ای با $(n+1)$ درایه یافت که افزایشی یا کاهشی باشد.

پیش‌ازشرح اثبات، چند مثال رابررسی می‌کنیم. به‌ازای $n=1$ داریم $n^2+1=2$ و $n+1=2$؛ دراین حالت حکم بدیهی است زیرا یك دنباله ازدوعدد صحیح همواره یا افزایشی است یا کاهشی. قرار دهید $n=2$، در نتیجه $n^2+1=5$ و $n+1=3$، و فرض کنید اعداد صحیح عبارت باشند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵. قضیه می‌گوید صرف‌نظر از اینکه این اعداد چگونه مرتب شده باشند، می‌توان رشته‌ای از دست‌کم سه‌عدد صحیح (نه لزوماً متوالی) انتخاب کرد که افزایشی یا کاهشی باشد، مثلاً

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

زیر دنبالهٔ ۳ ۲ ۱ چنین است (افزایشی است). در واقع، دراین حالت هر زیر دنبالهٔ سه‌تایی افزایشی است. مثالی دیگرعبارت است از

۳ ۵ ۴ ۲ ۱

دراینجاهمهٔ زیردنباله‌های افزایشی، ازقبیل ۳ ۴ و ۳ ۵، حداکثر دوعضودارند. اماچندین زیردنبالهٔ کاهشی ازسه (یا بیشترازسه) عددصحیح وجود دارد، مثلاً ۲ ۴ ۵ و ۱ ۴ ۵.

آخرین مثال عبارت است از

۵ ۱ ۳ ۴ ۲

دراینجا یك زیردنبالهٔ افزایشی با سه‌جمله، یعنی ۱ ۳ ۴، و دو زیر دنبالهٔ کاهشی با سه جمله، یعنی ۲ ۳ ۵ و ۲ ۴ ۵، وجود دارند؛ بنابراین،بازهم حکم قضیه اثبات‌می‌شود.

باتکرار این عمل، می‌توان گزاره را برای تمامی جایگشتهای متشکل از پنج عدد صحیح بررسی کرد. به‌طورکلی $5! = 120$ حالت داریم. به ازای $n=3$، باید $n^2+1=10$ عدد صحیح را درنظر بگیریم؛ و میزان کاری که برای بررسی حالت به حالت قضیه باید انجام شود، سرسام‌آور است، زیرا ۳ ۶۲۸ ۸۰۰ = ۱۰!. حالت داریم.

1. Ramsey

پس دیده می‌شود که اگر بخواهیم حکم را به‌ازای هرعدد صحیح n اثبات کنیم؛ باید بحثی کاملاً متفاوت پیش بگیریم.

برهان بدین‌قرار است. فرض کنید دنبالهٔ اعداد صحیح (درترتیب داده‌شده) عبارت باشد از

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n^2+2} \qquad (1)$$

می‌خواهیم زیر دنباله‌ای از دنبالهٔ (۱) بیابیم، که آن را به‌صورت

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_{n+1}}$$

شماره‌گذاری می‌کنیم، ودر آن درایه‌ها باهمان ترتیب دنبالهٔ (۱) آورده شده‌اند امایکی ازخواص زیررا دارند

$$a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_{n+1}} \qquad (2)$$

یا

$$a_{i_1} \geqslant a_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{i_{n+1}} \qquad (3)$$

برهان برمبنای برهان خلف استوار است. فرض کنید که هیچ زیر دنباله‌ای ازنوع دنبالهٔ (۲)، یعنی زیر دنباله‌ای افزایشی با $(n+1)$ جمله، موجود نباشد. بحث ما به‌این نتیجه می‌انجامدکه دراین صورت، باید زیردنباله‌ای ازنوع دنبالهٔ (۳)، یعنی زیر دنباله‌ای کاهشی با $(n+1)$ جمله وجود داشته باشد.

یك درایهٔ دلخواه ازدنبالهٔ (۱)، مثلاً a_i، را انتخاب کنید، و همهٔ زیردنباله‌های افزایشی‌دنبالهٔ(۱) راکه‌نخستین‌جملهٔ آنها a_i است درنظربگیرید. درمیان این‌زیردنباله‌ها، زیردنباله‌ای وجود داردکه تعداد جمله‌هایش بیشینه است. این تعداد را با l نمایش می‌دهیم. تحت شرایط اضافی ما، l می‌تواند هریك از اعداد ۱، ۲، ۳، . . . ، n، ولی‌نه $n+1$ یا هرعدد بزرگتری، باشد.

بنابراین، به‌هرجملهٔ a_i ازدنبالهٔ (۱) عدد صحیحی مانند l بین ۱ و n نسبت‌داده‌ایم. مثلاً، اگرهمهٔ زیردنباله‌های دوعضوی‌که با a_i آغازمی‌شوند کاهشی باشند،آنگاه $l=1$. حال به‌قسمت اصلی بحث می‌رسیم. فرض‌کنید تعداد جمله‌های دنبالهٔ (۱)که باروش‌فوق عدد l به‌آنها نسبت داده می‌شود، $F(l)$ باشد. حال

$$F(1)+F(2)+\cdots+F(n)=n^2+1 \qquad (4)$$

اتحاد ۴ راه دیگری برای‌این‌واقعیت‌است که به‌هریك (n^2+1) درایهٔ دنبالهٔ (۱)،یعنی a_i، عدد صحیحی بین ۱ و n نسبت داده‌ایم. ادعا می‌کنیم که دست‌کم یکی از جملات مجموع سمت چپ اتحاد (۴) باید عدد صحیحی بزرگتر یا مساوی $n+1$ باشد. زیرا

در غیر این‌صورت خواهیم داشت

$$F(1)\leqslant n,\ F(2)\leqslant n,\ \cdots,\ F(n)\leqslant n$$

و با جمع‌بندی روی این n نامساوی، خواهیم داشت

$$F(1)+F(2)+\cdots+F(n)\leqslant \underbrace{n+n+\cdots+n}_{n\text{ بار}}=n^2$$

واین نتیجه بااتحاد (۴) منافات دارد، زیرا $n^2<n^2+1$. بنابراین یکی از جملات مجموع سمت‌چپ اتحاد(۴) بایدوست‌کم $(n+1)$ باشد،فرض‌کنیم جملهٔ lام چنین باشد

$$F(l)\geqslant n+1$$

حال به‌دنبالهٔ (۱) بازمی‌گردیم تا معنای نتیجهٔ فوق را دریابیم. ما $(n+1)$ درایه از دنبالهٔ (۱) یافته‌ایم، که آنها را (درترتیب داده شده) با

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_{n+1}} \qquad (5)$$

نمایش می‌دهیم، وهریك ازاین درایه‌ها جملهٔ نخست زیردنباله‌ای افزایشی از دنبالهٔ (۱) با l جمله است و جملهٔ نخست هیچ زیردنباله افزایشی بزرگتری نیست.

ازاین مطلب بلافاصله نتیجه می‌شودکه دنبالهٔ (۵) کاهشی است. بیایید، مثلاً، ثابت کنیم‌که $a_{i_2}>a_{i_1}$. اگر چنین نباشد، باید داشته باشیم؛ $a_{i_1}<a_{i_2}$. درایهٔ a_{i_2} جملهٔ نخست زیردنباله‌ای افزایشی ازدنبالهٔ (۱) و با دقیقاً l جمله است. ازاینجا نتیجه می‌شود که a_{i_1} جملهٔ‌نخست دنباله‌ای از $l+1$ درایه است. یعنی پس‌از a_{i_1} زیردنباله‌ای‌افزایشی از l جمله راکه با a_{i_2} آغاز می‌شود، بیاوریم. اما این باانتخاب a_{i_1} منافات دارد. پس نتیجه می‌شودکه $a_{i_1}>a_{i_2}$. به‌همین طریق می‌توان ثابت کردکه $a_{i_2}>a_{i_3}$ و الی آخر؛ و برهان اینکه دنبالهٔ (۵) کاهشی است تکمیل می‌شود.

ازبررسی برهان فوق، دیده می‌شودکه گام اصلی آن را می‌توان‌به‌صورت زیر بیان کرد: اگر مجموعه‌ای از (n^2+1) شیء به n بلوك یاکمترافراز شود، دست‌کم یك بلوك $(n+1)$ شیء یا بیشتررا شامل خواهد شد، یا به‌طورکلی‌تر، اگر مجموعه‌ای از n شیء به k بلوك افراز شود و $n>k$، دست‌کم یك بلوك شامل دو شیء یا بیشتر خواهد بود. این گزاره، معمولاً اصل «لانه کبوتری» نامیده می‌شود، که خدمات زیادی بـه‌ریاضیات ارائه داده است. هر چند بیان اصل «لانه‌کبوتری» بدیهی است، اما غالباً کاربردهای آن خیره‌کننده‌اند. زیرا این اصل ثابت می‌کندکه یك شیء بـا خاصیت معینی وجـود دارد؛ بی‌آنکه وسیله‌ای برای یافتن این شیء دراختیار ما قراردهد؛ امـا همانند قضیه‌ای‌کـه ثابت‌کردیم، تنها وجود چنین شیئی به‌ما امکان می‌دهدکه به‌نتایج مهمی دست یابیم.

مدتی قبل، رمزی، فیلسوف وریاضیدان بریتانیایی تعمیم عمیقی ازاصل‌لانه‌کبوتری فراهم آورد، که دراینجا یکی ازصورتهای معادل آن را بیان می‌کنیم. فرض کنید S مجموعه‌ای نامتناهی و $P_l(S)$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی و l عضوی S، باشد. $P_l(S)$ را به k بلوک افراز می‌کنیم، مثلاً B_1، B_2، ...، B_k؛ یا به عبارت دیگر، هر زیر مجموعهٔ l عضوی S، به‌یکی و تنها یکی ازبلوکهای B_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ نسبت داده می‌شود. دراین‌صورت یك زیرمجموعهٔ نامتناهی R از S وجود داردکه $P_l(R)$ مشمول یکی ازبلوکهاست. مثلا به‌ازای یك k $1 \leqslant i \leqslant k$؛ $P_l(R) \subset B_i$، به‌عبارت دیگر، یك زیرمجموعهٔ نامتناهی R از S وجود داردکه همهٔ زیر مجموعه‌های l عضوی S دریکی‌از B_iها قرار می‌گیرند.

ظهور انفجار

اینك، به‌نظر می‌رسدکه فیزیك و ریاضیات هم‌پیمان شده‌اندکه، مانند آن علوم زیستی‌که سعی‌دارند به‌ریاضیات نزدیك شوند، کارهای بیشتر درزمینهٔ نظریهٔ ترکیباتی‌را به‌شرطی لازم برای پیشرفت تبدیل کنند. به‌همین جهت و بنابر دلایل دیگری‌که برخی ازآنها را برشمردیم، احتمالاً درچند سال آینده شاهد انفجار عظیمی درزمینهٔ فعالیتهای ترکیباتی خواهیم‌بود وریاضیات گسسته درزمینهٔ‌کارهای پژوهشی و همچنین متون درسی دانشگاهی دست‌کم به‌جایگاهی همپایهٔ ریاضیات کاربردی پیوسته دست خواهدیافت. پیش ازاین‌نیز درچند سال اخیر، میزان پژوهش درنظریهٔ ترکیباتی چنان افزایش یافته است‌که نشریهٔ ویژه‌ای برای آن چاپ می‌شود. درسال‌گذشته دست‌کم پنج کتاب ورساله در این مبحث انتشار یافته‌اند ودست‌کم پنج‌تای دیگر زیرچاپ است.

پیش ازآنکه این بررسی مختصررا به‌پایان برسانیم، برخی ازمباحث اصلی نظریهٔ ترکیباتی راکه بیشترین فعالیت را به خود اختصاص داده‌اند، برمی‌شمریم. این مباحث بدین‌قرارند:

۱. آنالیز شمارشی، عمدتاً به‌مسائل شمارش مؤثر مجموعه‌یی (درحالت کلی نامتناهی) از اشیائی چون ترکیبات شیمیایی، ساختارهای زیراتمی، سیمپلکسهای‌سادگی تحت محدودیتهای گوناگون، ساختارهای جبری متناهی، ساختارهای احتمالی گوناگونی چون مسیرها یا گردشها، صفها، جایگشتهای باوضعیت محدود، مربوط می‌شود.

۲. هندسه‌های متناهی وطرحهای بلوکی. کار از ساختن هندسه‌های متناهی و ساختارهای نزدیك به‌آن ازقبیل ماتریسهای آدامار ریشه می‌گیرد. روشهایی‌که در حال حاضر به‌کارمی‌رود، عمدتاًازنظریهٔ اعداد اقتباس‌شده‌اند. درنتیجهٔ استفاده ازکامپیوترهای امروزی، که بررسی صحت فرضیه‌های معقول را ممکن می‌سازند، این نظریه در سالهای اخیر پیشرفت سریعی داشته است، این نظریه‌کاربردهای مهمی درآمار و نظریهٔ کدها (رمزها) دارد.

۳. کاربرد در منطق. تکامل نظریهٔ تصمیم، منطق‌دانهارا وادارکرده‌است که‌ازروشهای

ترکیباتی استفادهٔ شایانی کنند.

۴. مکانیك آماری. این مبحث یکی ازقدیمیترین وفعالترین منابع کاردرزمینه‌های ترکیباتی به شمار می‌آید. برخی از بهترین کارهایی‌که دربیست سال اخیر در نظریهٔ ترکیباتی انجام شده‌است، توسط فیزیکدانها یا ریاضیدانهای‌کاربردی‌که در این زمینه کار می‌کرده‌اند، انجام شده است. برای نمونه، مسئلهٔ آیزینگ را ملاحظه کنید. ارتباط نزدیکی‌که این مبحث، به‌واسطهٔ ابزارهای مشترك‌نظریهٔ ترکیباتی، بانظریهٔ اعداد دارد مورد توجه قرار گرفته است واحتمال زیادی می‌رود‌که درنتیجهٔ تأثیرمتقابل این‌دومبحث درآیندهٔ نزدیك نتایج شگفت‌انگیزی را شاهد باشیم.

درخاتمه،می‌خواهیم به‌خواننده‌ای‌که می‌پندارد‌نظریهٔ ترکیباتی به‌مطالعهٔ مجموعه‌های متناهی محدود می‌شود، هشداردهیم. یك ردهٔ نامتناهی از مجموعه‌های متناهی چندان فراتر از یك مجموعهٔ متناهی نیست‌و از ملاحظات متناهی به‌مسائل نامتناهی راهی‌گشوده می‌شود. در نظریهٔ ترکیباتی‌بهتر ازهرجای دیگری می‌توان به‌سفسطه‌ای‌که درقول مشهور کرونکر نهفته است پی‌برد. کرونکر می‌گوید: «اعدادصحیح را خداوند خلق‌کرد و هرچیزدیگری، ساخت انسان است.» قولی‌صحیح‌ترمی‌تواند چنین باشد: «خداوند بی‌نهایت‌را خلق‌کرد، و انسان‌که ازدرك آن عاجز بود، مجموعه‌های متناهی را ابداع کرد.» این ستیز همیشگی بین متناهی و نامتناهی است‌که به ترکیبات جاذبه بخشیده است.

جان د. آثر

پیشنیازهای ریاضی نظریهٔ مقدماتی فاجعه‌ها●

ترجمهٔ ناصر بروجردیان

ضربه‌های به‌یك جوب پستتی به‌پس ویش تکینگیهای تبهگون خاصی را به‌نمایش درمی‌آورد.

مراد از این مقاله آشنا کردن غیرمتخصصان با برخی مفاهیم ریاضی نظریه مقدماتی فاجعه‌هاست؛ مفاهیمی که غالباً به‌شکل اصطلاحی نامأنوس، یا توهمات، در نوشتارهای ریاضی راه یافته‌اند. این وضعیت باعث بروز مباحثاتی در باب استفادهٔ درست و نادرست از نظریهٔ فاجعه‌ها شده است، و بنابراین شاید اقرار فوری این مطلب قرین دور اندیشی باشد که در این مقاله، نظریهٔ مقدماتی فاجعه‌ها عبارت است از مطالعهٔ تکینگیهای خانواده‌های پارامتری شده از توابع C^∞ با مقادیر حقیقی. ازاین پس، ما این ایده‌ها را صرفاً باعنوان "نظریهٔ فاجعه‌ها" یاد می‌کنیم، هرچند گاهی هم، بسته به‌گرایشهای کسانی که در مباحثات جاری ازاین اصطلاح بهره می‌گیرند، تعبیرات دیگری نیز ازآن به‌عمل می‌آید.

خوشبختانه، مؤلف مقاله‌ای مقدماتی نیاز به‌جانبداری ازکسی یاچیزی ندارد (که اگر هم جانبداری کنیم خطر زیادی بر ایمان ندارد) و می‌تواند بی‌واهمه از مثال (اگر نگوییم «مدل»)ها و نگرشهای بسیار جالب زیمان و رنه‌توم [۱، ۸، و ۹] تمجید کند. کتاب قابل ملاحظه‌ای که پوستر و استوارت [۶] اخیراً تألیف کرده‌اند، درعین حالی که نیازی ندارد وسواسیترین ریاضیدانان را قانع کند، شامل تعداد زیادی کاربردهای بنیادی است. مقاله گولابیتسکی [۵] مقدمه‌ای تابناك، برای این مبحث دریك سطح بالاتر به‌شمار می‌آید.

● Auer Jan W., "Mathematical preliminaries to elementary Catastrophe theory," *Mathematics Magazine*, January 1980, 13-20.

تعاریف

فرض کنید R^n نمایانگر فضای n-تایی‌های از اعداد حقیقی باشد. بنابراین یك تابع n متغیرهٔ F بامقادیر حقیقی، که آن را با $F:R^n\to R$ نشان می‌دهیم، به‌هر

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$$

یك عدد حقیقی یکتای $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$ نظیر می‌کند. گفتن اینکه تابع F، C^∞ است به‌این معنی است که همهٔ مشتقات جزئی F از هر مرتبه‌ای وجود دارند و پیوسته‌اند. مثلاً، به‌ازای $n=2$، فرض کنید $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2$؛ ازآنجا که این تابع در نظریهٔ فاجعه‌ها اهمیت دارد، مامتغیرهای x_1، x_2 را به‌ترتیب با u، x نشان‌می‌دهیم تا باقراردادی که درزیر برای خانواده‌های توابع وضع کرده‌ایم، سازگارباشند. بدینسان، $F(x,u)=x^3+xu$ (شکل ۱). نمودار این تابع رویه‌ای در R^3 است؛ در واقع این فاجعه پرچین[1]، مشهور به‌تابازکن‌جهانی[2] تابع $f(x)=x^3$ (که بعداً پیرامون‌آن‌صحبت خواهیم کرد)، است. مشتقات جزئی مرتبهٔ اول F عبارت‌اند از

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+u\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial u}=x$$

در حالی که مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم F عبارت‌اند از

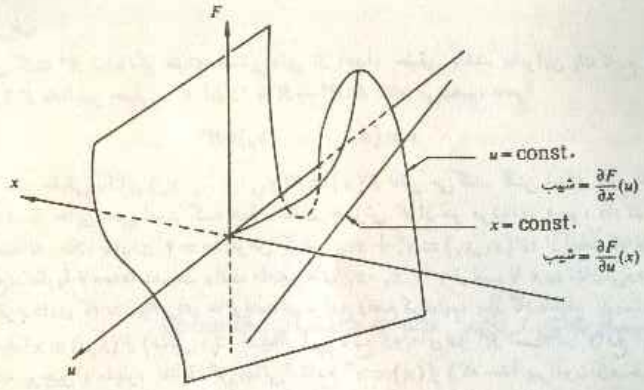
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial x}=1$$

بدیهی است که، F، C^∞ است.

گوییم F در $x_0\in R^n$ دارای یك **تکینگی (یا نقطهٔ بحرانی)** است هرگاه مشتق آن در x_0، یعنی بردار $DF(x_0)=(\partial F/\partial x_1\,(x_0),\cdots,\partial F/\partial x_n\,(x_0))$، بردار ۰ باشد. به‌عبارت دیگر، F در x_0 تکینگی‌دارد هرگاه تمامی مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن در x_0 صفرشود؛ درغیراینصورت x_0 **یك نقطهٔ منظم** F است. بنابراین، مثلاً، $(0,0)=0$ یك تکینگی $F(x,u)=x^3+xu$، مثال شکل ۱، است.

سرانجام، **یك** تابع C^∞، $F:R^n\times R^r\to R$ را درنظر بگیرید. نقاط R^r را با $u=(u_1,\cdots,u_r)$ و نقاط $R^n\times R^r$ را با $(x,u)=(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_r)$ نشان می‌دهیم. درنتیجه، به‌ازای هر u ثابت، می‌توان تابع C^∞، $F_u:R^n\to R$ را به‌دست آورد که برای هر $x\in R^n$ به‌صورت $F_u(x)=F(x,u)$ تعریف می‌شود. به‌این ترتیب F را می‌توان به‌عنوان یك‌خانواده r - پارامتری C^∞ از توابع C^∞ از R^n در R تعبیر کرد؛ متغیرهای $u_1,\cdots,u_r$ پارامترهای این خانواده نامیده می‌شوند. مثلاً، تابع $F_0(x)=x^3$ یك خانوادهٔ ۱-پارامتری است که به‌ازای $u=0$ تابع $F(x,u)=x^3+xu$

1. fold
2. universal unfolding



شکل ۱. فاجعهٔ پرچین $F(x,u)=x^3+xu$ ، تاباز کن جهانی تابع $f(x)=x^3$.

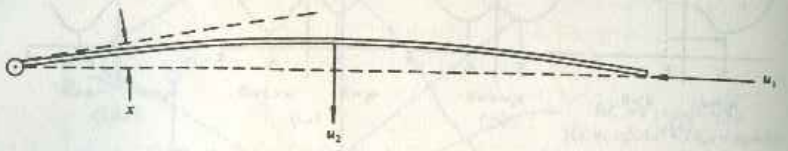
را پدید می‌آورد. نقاط تکین F_u در تجزیه و تحلیل ایده پایداری توابع ابزار مهمی به‌شمار می‌آیند، که بعداً به‌آن بازخواهیم گشت اما، در ابتدا خواهیم دید که خانواده‌های C^∞ در عمل چگونه ظاهر می‌شوند.

کاربردها

موفقترین کاربردهای نظریهٔ فاجعه‌ها تا به‌امروز، تجزیه و تحلیل تغییرات ناپیوسته در سیستمهایی است که یك تابع پتانسیل انرژی F بر آنها حاکم است. رفتار اینگونه سیستمها را حالتهایی مشخص می‌کنند که تابع پتانسیل F در آنها کمینه است. یکی از مثالهای مشروع از چنین فرایندی در متون نظریهٔ فاجعه‌ها مثال میلهٔ تابدار است. برای رسیدن به‌اصول ریاضی حاکم بر این مثال، یك ساده‌سازی مقدماتی از آن را در نظر می‌گیریم.

همانطور که تقریباً هر کسی بنا بر تجربه می‌داند، وقتی نیرویی، که به‌طور یکنواخت درحال افزایش است، میله یا سنوتی را ازطول متراکم می‌کند، تا زمانی که نیروی اعمال شده به‌حد معینی، مثلا u_1، نرسد، میله خم نخواهد شد: در آن لحظه میله «تاب» برمی‌دارد. مثلا یك چوب بستنی را که مابین انگشتهای شصت وسبابه فشرده می‌شود درنظر بگیرید؛ از آنجا که پهنای چوب بستنی معمولی ازضخامت آن بسیار بیشتر است، می‌توانیم فرض کنیم که فقط دریك جهت عمود برعرضش خم خواهد شد (البته این چوب ممکن است در ضمن تاب برداشتن بشکند یا آنکه به‌طور برگشت‌ناپذیری تغییرشکل دهد، اما نیازی نیست ما نگران این پیشامدها باشیم).

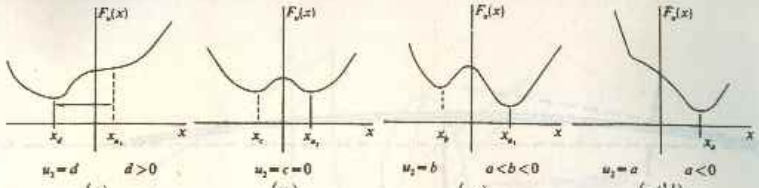
به‌شکلی دیگر، اگر همزمان با اعمال نیروی طولی خم کنندهٔ u_1، یك نیروی عرضی



شکل ۲. میلهٔ خمیده، هرگاه نیروی طولی u_1 به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد که میله را «خم»، یا آنکه آن را به‌اندازهٔ زاویهٔ x منحرف کند، یك نیروی عرضی یا مورب u_2 که به‌حد کافی بزرگ باشد، می‌تواند موجب «پرش» میله به‌یك وضعیت (خمیدهٔ) تازه شود.

به‌اندازهٔ u_2 را نیز وارد آوریم، آنگاه میله (چوب بستنی) ممکن است ناگهان به‌وضعیتی جدید «پرش» کند: سیستم به ازای یك تغییر هموار در «پارامترها» یا «متغیرهای کنترل» u_1 و u_2 یك تغییر ناپیوسته در x «متغیر رفتار» را به‌نمایش می‌گذارد. به‌تعبیر نظریهٔ فاجعه‌ها، یك «تغییر فاجعه‌آسا» بر سیستم وارد آمده است.

تحت فرضیات ساده‌کننده می‌توانیم این رفتار را به صورت زیر بررسی کنیم؛ محاسبات صریح را می‌توان درمرجع [۶، ص ۲۹۱] پیدا کرد. به‌ازای مقادیر ثابتی از نیروهای u_1 و u_2، وضعیتی واقعی که میله بخود گرفته (شکل ۲)، وضعیتی است که انرژی پتانسیل ناشی ازخواص کشسانی میله ونیروهای وارده را کمینه می‌کند، واین وضعیت با زاویهٔ خمیدگی x اندازه‌گیری می‌شود. انرژی پتانسیل را با $F(x, u_1, u_2)$، یا به‌اختصار با $F_u(x)$، که $u=(u_1,u_2)$ نشان می‌دهیم. با بهره‌گیری ازشهود چوب بستنی‌دردك این مطلب دشوار نیست که باتوجه‌به‌وابستگی $F_u(x)$ به u_1 و u_2 این تابع ممکن است برای یك مقدار یادومقدار x یکی مثبت‌ودیگری منفی، کمینه داشته باشد. مثلا، وقتی $u_1, u_2 = 0$ به‌اندازهٔ کافی کوچك است، فقط یك کمینه در $x = 0$ وجود دارد: میله خم نمی‌شود. حال فرض کنید که به‌ازای برخی مقادیر u_1 و u_2، میله به‌اندازهٔ زاویهٔ مثبت x جابجا شود؛ اگر u_2 منفی و به‌اندازه کافی بزرگ باشد، مثلا $u_2 = a < 0$ (متناظر باراندن میله به‌سمت بالا)، انرژی پتانسیل یك کمینه، در $x = x_0 > 0$، خواهد داشت (شکل ۳ الف). وقتی u_2 بیشترمثبت می‌شود، مثلا $u_2 = b$، یك کمینهٔ دوم (درمقدار منفی $x = x_0$) برای انرژی پتانسیل در رقابت با کمینهٔ مثبت x ، اکنون در $x = x_{01}$، پدید می‌آید (شکل ۳ ب). وقتی u_2 به‌صفر می‌رسد (شکل ۳ ج)، این کمینهٔ جدید سرانجام با کمینهٔ مثبت x، برابری می‌کند. اما، تازمانی که u_2 به‌مقدار مثبت معین d نرسیده باشد، میله به‌کمینه درمقدار منفی $x = x_0$ «پرش» نخواهد کرد. این روند متناظر ناپدید شدن کمینهٔ $F_u(x)$ در x مثبت است (شکل ۳ د). در مثال مربوط به‌چوب بستنی وقتی $u_2 < 0$، نیرویی قابل ملاحظه لازم است تا موجب پرش آن ازیك سمت به‌سمت دیگر شود.



شکل ۳. تابع پتانسیل میلهٔ خم شونده، با u_2 درحال افزایش.

به‌این‌ترتیب، در این مثال، خانوادهٔ پارامتری C^∞ توابع عبارت است از $F(x, u_1, u_2) = F(x, u)$، که در آن $x \in R$ و $u \in R^2$. مجموعه نقاط تکین $F_u(x)$، یعنی $\{(x, u) | DF_u(x) = 0\}$، رویه‌ای در R^3 ایجاد می‌کند که به‌آن فاجعهٔ شکن‌دار[1] می‌گویند (شکل ۴). ولی، در مثال چوب بستنی، موضع شکستگی لزوماً در مبدأ نیست. فرایند خم شدن که در بالا پیرامون آن بحث کردیم، با مسیری از $u_2 = a$ تا $u_2 = d$ برروی رویه به‌تصویر کشیده شده است.

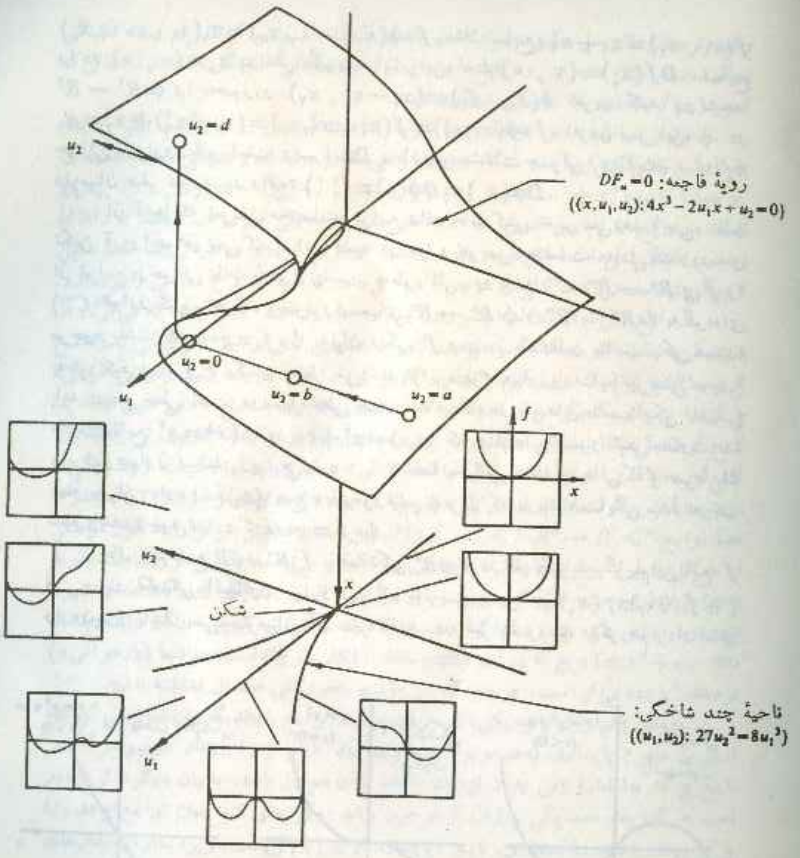
نظریهٔ مورس

به یك معنی، نظریهٔ فاجعه‌ها نتایج کلاسیك خاصی ازویتنی و مورس دربارهٔ تکینگیها را تعمیم می‌دهد. ما بررسی صوری خود از نظریهٔ فاجعه‌ها را با این نظریهٔ کلاسیك آغاز می‌کنیم.

دربررسی نقاط تکین سه ایدهٔ اساسی وجود دارد: پایداری[2]، رده‌بندی[3]، و عنصر عام[4]. برای بیان دقیقتر این ایده‌ها، بیاد آورید که در R^n، می‌توانیم به‌کمك رابطهٔ فیثاغورس از فاصلهٔ دو نقطهٔ x_0 و x'_0 سخن به‌میان آوریم. از اینرو، **گوی باز** $B_\delta(x_0)$ به‌مرکز x_0 وشعاع δ مجموعهٔ نقاطی از R^n است که فاصلهٔ آنها تا x_0 از δ کمتراست. گویهای باز یك **توپولوژی روی** R^n تعریف می‌کنند، و مامجموعه‌ای چون $U \subseteq R^n$ با $x_0 \in U$ را یك‌همسایگی x_0 گوییم‌هرگاه‌یك گوی‌باز به‌شکل $B_\delta(x_0) \subseteq U$ موجود باشد. مجموعهٔ U را مجموعهٔ باز گویند هرگاه همسایگی همهٔ نقاط خود باشد. بیان اینکه یك خاصیت $P(x)$ **در حوالی** x_0 برقرار است به‌معنای آن‌است که یك همسایگی x_0 وجود دارد که $P(x)$ به‌ازای همهٔ نقاط آن همسایگی برقرار است.

اولین نتیجهٔ کلاسیك مهم دراررتباط بارفتار یك تابع $f: R^n \to R$ در حوالی یك نقطهٔ منظم x_0 است. این نتیجه می‌گوید که هرگاه $Df(x_0) \neq 0$ (یعنی، اگر x_0 یك نقطهٔ منظم f باشد)، آنگاه روی یکی از همسایگیهای x_0 مانند U می‌توان به‌گونه‌ای

1. cusp catastrophe 2. stability 3. classification 4. genericity



شکل ۴. فاجعهٔ شکن‌دار، $F(x, u_1, u_2) = x^4 - u_1x^2 + u_2x$.

"تعویض مختصات" کرد که f روی U دقیقاً تابع مختصات (یا تصویر)

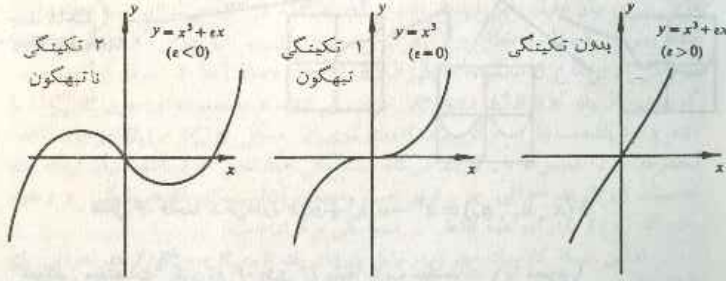
$$\pi_1 : (x_1, \cdots, x_n) \to x_1$$

باشد. دقیقاً، معنی این مطلب آن است که یك دیفئومورفیسم (وابر ریختی) ϕ، یعنی، یك تابع C^∞ وارون‌پذیر $\phi: U \to V \subseteq R^n$ با وارون C^∞، به‌گونه‌ای وجود دارد که

$f(x_1, x_2)=x_1+x_2^2$. مثلا تابع، $f\circ\phi(x_1, \cdots, x_n)=\pi_1(x_1, \cdots, x_n)$ را در $x_0=(0, 0)$ در نظر بگیرید. بنابراین، $Df(x_0)=(1, 0)\neq 0$. تابع $\phi:R^2\to R^2$ را به‌صورت $\phi(x_1, x_2)=(x_1-x_2^2, x_2)$ تعریف کنید. در نتیجه، $f\circ\phi(x_1, x_2)=f(x_1-x_2^2, x_2)=(x_1-x_2^2)+x_2^2=x_1$. افزون بر این، ϕ، در حوالی ۰ وارون‌پذیر است، زیرا $D\phi$، ماتریس مشتقات جزئی $\partial\phi_i/\partial x_j$، در x_0 دترمینان صفر ندارد. در واقع، $D\phi(x_0)=D\phi(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

از آنجا که تعویض مختصات، توابع را از لحاظ کیفی تغییر نمی‌دهد (یعنی، نقاط تکین آن را عوض نمی‌کند)، این قضیه در مورد تعویض مختصات، معادل یك رده‌بندی از توابع در حوالی نقاط منظم آنهاست. به‌طور کلی، دو تابع $f, g:R^n\to R^m$، C^∞ (یا C^ω) هم‌ارز گوییم هرگاه دیفئومورفیسمهای $\phi:R^n\to R^n$ و $\psi:R^m\to R^m$ به گونه‌ای موجود باشند که $\psi\circ f=g\circ\phi$. به‌بیان دیگر، f و g در مختصات مناسب یکی هستند؛ به‌طور کیفی، f و g یکسان به‌نظر می‌رسند. (این مفهوم هم‌ارزی مشابه غیرخطی تعویض پایه درجبر خطی است: دو تبدیل خطی هم‌ارزند، هرگاه در پایه‌های مناسب یکی باشند.) مثلا، دو تابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^3+\varepsilon x$ که $\varepsilon\neq 0$، به‌طور کیفی متفاوت‌اند، بنابراین هم‌ارز نیستند: زیرا g یا ۰ و یا ۲ نقطهٔ بحرانی دارد درحالی‌که f صرفاً یك نقطهٔ بحرانی دارد (شکل ۵)، هیچ دیفئومورفیسم ϕ و ψ که در یك همسایگی مبدأ تعریف شده باشد، وجود ندارد که $\psi\circ f=g\circ\phi$.

حال یك تابع $f:R^n\to R$ با نقطهٔ تکین $x_0\in R^n$ در نظر بگیرید. گوییم این تابع f در x_0 یك **تکینگی ناتبهگون**[1] دارد هرگاه ماتریس هسین[2] $\left[\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\,(x_0)\right]$ وارون‌پذیر باشد؛ یعنی، دترمینان آن صفر نباشد. در غیراینصورت، اگر هم بردار مشتق



شکل ۵. $f(x)=x^3$ ناپایدار است.

1. nondegenerate singularity 2. Hessian

وهم دترمینان ماتریس همین در x_0 صفر باشند، آنگاه گوییم f در x_0 یك تکینگی تبهگون دارد. مثلا، در $x_0=0$، تابع $f(x)=x^3$ یك تکینگی ناتبهگون دارد، درحالی‌که $f(x)=x^3$ دارای یك تکینگی تبهگون است.

حال می‌توانیم دومین نتیجهٔ عمدهٔ نظریهٔ کلاسیك مورس را بیان کنیم: اگر x_0 یك نقطهٔ تکین ناتبهگون f باشد، آنگاه به‌ازای برخی مقادیر $k\leqslant n$، f در یکی از همسایگیهای x_0 هم‌ارز تابع $g(x_1, \cdots, x_n)=-(x_1^2+\cdots+x_k^2)+(x_{k+1}^2+\cdots+x_n^2)$ است. در واقع، k اندیس همین، تعداد عناصر منفی در نمایش قطری آن است؛ k را غالباً اندیس تکینگی می‌نامند. این قضیه یك رده‌بندی از انواع توابع در حوالی یك نقطهٔ تکین ناتبهگون به‌دست می‌دهد: به‌ازای هر n، $k=0, 1, \cdots, n$ فقط یك نوع اساسی وجود دارد.

درواقع، می‌توان مطالب بیشتری در این باره اظهار داشت. همانگونه که می‌توان از «نزدیکی» نقاط R^n به یکدیگر صحبت کرد، همچنین می‌توانیم نزدیکی توابع $f, g:R^n\to R$ (یا، بطور کلی، $f, g:R^n\to R^m$) را نیز تعریف کنیم. به‌بیانی تقریبی، f, g را نزدیك یکدیگر می‌خوانیم، هرگاه به‌ازای یك عدد صحیح نامنفی معین مانند k، f و همهٔ مشتقات جزئی آن از مرتبه کمتر یا مساوی k، در هر نقطهٔ $x\in R^n$، نزدیك مقادیر تابع f و همهٔ مشتقات جزئی متناظر با آن باشند. از این ایده می‌توان بهره گرفت و همسایگی، و در نتیجه یك توپولوژی (C^∞ ویتنی: [۱۰، ص ۴۲]) روی مجموعه $C^\infty(R^n)$، مجموعهٔ همهٔ توابع $f:R^n\to R$، C^∞ تعریف کرد. از این ایده، همچنین می‌توان به طور موضعی و نه کلی و فراگیر[1] استفاده کرد تا توابعی را که در برخی همسایگیها، نزدیك یکدیگرند به‌هم مربوط ساخت، هرچند حتی در سایر نواحی R^n از یکدیگر دور باشند. به‌طور شهودی، در این متن، g نزدیك f است هرگاه یك انحراف کوچك از آن داشته باشد. مثلا، $g(x)=x^3+\varepsilon x$ که در آن $\varepsilon\neq 0$ به‌اندازهٔ کافی کوچك است، موضعاً (در حوالی ۰) نزدیك $f(x)=x^3$ است، هرچند که این حالت به‌طور کلی مصداق نداشته باشد.

دو مفهوم هم‌ارزی و نزدیکی، که هر دو مشابهت توابع با یکدیگر را اندازه می‌گیرند، از طریق مفهوم پایداری به‌هم مربوط می‌شوند. یك تابع f را **پایدار** گوییم هرگاه هر تابع g که به‌اندازهٔ کافی به آن نزدیك باشد، با آن هم‌ارز باشد. به‌بیان دیگر، f پایدار است هرگاه یك همسایگی U_f از f موجود باشد به‌گونه‌ای که تمام توابع g در U_f با f هم‌ارز باشند. مثال متعارف تابع ناپایدار، $f(x)=x^3$ است، زیرا به‌ازای مقدارهای کوچك $\varepsilon\neq 0$، $g(x)=x^3+\varepsilon x$ در نزدیکی f واقع می‌شود، اما هم‌ارز f نیست (شکل ۵).

تابعی را که نقاط تکین آن ناتبهگون و مجزا باشند، تابع مورس می‌نامند. نتیجهٔ عمدهٔ نظریهٔ مورس به‌این شرح است که توابع مورس موضعاً پایدارند. به‌بیان روشن و دقیق، اگر f یك نقطهٔ تکین ناتبهگون (با اندیس k) در $x_0\in R^n$ داشته، و g به‌اندازه کافی به f نزدیك باشد، آنگاه g در حوالی x_0 شبیه f به‌نظر می‌رسد: g نیز یك نقطهٔ

1. globally

تکین ناتبهگون با اندیس k در نقطه‌ای مانند x'_0 نزدیک x_0 دارد.

البته، اهمیت این نتیجه به‌پاسخ این پرسش بستگی دارد که چند تابع مورس موجوداست. پاسخ ساده، وتصادفی است: "تقریباً همهٔ" توابع، توابع مورس هستند. ترجمهٔ صوری عبارت "تقریباً همه" شامل مفاهیم توپولوژیك بازومجموعه چگال است. یادآوری می‌کنیم که یك زیر مجموعهٔ $\mathcal{G}$ از فضای توپولوژیك $\mathcal{T}$ (به حالت $\mathcal{T}=C^\infty(R^n)$ توجه دارید) را باز می‌نامیم هرگاه به ازای هر f در $\mathcal{G}$ اگر g به‌اندازهٔ کافی به f نزدیك باشد، آنگاه g نیز در $\mathcal{G}$ باشد، و $\mathcal{G}$ را چگال می‌نامیم هرگاه هر f در $\mathcal{T}$ یا در $\mathcal{G}$ و یا دربستار آن باشد، یعنی دارای این خاصیت باشدکه gهایی در $\mathcal{G}$ هستند که به اندازه دلخواه به f نزدیکند. مثلا: "تقریباً همه" نقاط گوی بسته در صفحه، نقطهٔ درونی گوی هستند.

بطورکلی، اگر در یك خانواده از توابع $\mathcal{T}$ (با یك توپولوژی) مجموعهٔ توابع $\mathcal{T}_p$ که خاصیت p دارند، یك اشتراك شمارش‌پذیر از بازهای چگال باشد، خاصیت p را عام[1] می‌نامیم. به‌ویژه، اگر خود $\mathcal{T}_p$ یك باز چگال باشد، این مطلب برقرار است. یکی ازنتایج کلاسیك درباب چگال بودن، قضیهٔ تقریب وایرشتراس است: چندجمله‌ایها درمجموعهٔ توابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی بازهٔ $[a,b]$ چگال‌اند، زیرا هر یك از اینگونه توابع یا چندجمله‌ای‌اند یا اینکه به‌اندازهٔ دلخواه به یك چندجمله‌ای نزدیکند. اما، چندجمله‌ایها در فضای توابع پیوسته بامقادیرحقیقی روی $[a,b]$ باز نیستند،بنابراین عام هم نیستند.

حال می‌توانیم آخرین نتیجهٔ کلاسیك خود را به‌دقت بیان کنیم: خانوادهٔ توابع مورس M در $C^\infty(R^n)$ باز و چگال است. بنابراین، تقریباً همهٔ توابع $f:R^n\to R$ تابع مورس هستند. به‌علاوه، هر تابع پایدار $f:R^n\to R$ تابع مورس است: هر همسایگی U از f یك تابع مورس g دارد، واگر U به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، g هم‌ارز f خواهد بود، درنتیجه f نیز باید یك تابع مورس باشد. بنابراین، دراین‌حالت توابع پایدار عام هستند. اما، درحالت کلی این مطلب صادق نیست.

قضیه متر[2]

برخلاف نظریهٔ مورس، مرکز توجه نظریهٔ فاجعه‌ها تکینگیهای تبهگون است. مثلا، دیدیم که $f(x)=x^3$ در مبدأ یك تکینگی تبهگون دارد، ودیدیم که f پایدار نیست. باهمهٔ اینها، ما می‌توانیم f را در میان خانواده ۱- پارامتری C^∞ «پایدار»

$$F(x,t)=x^3+ux$$

«محاط کنیم» (ر. ك. شکل ۱. مفهوم پایداری برای خانواده‌های پارامتری ازتوابع کاملا

1. generic 2. Mather

شبیه همان نیست که دربالا برای توابع معمولی تعریف کردیم، اما اختلاف آنها برای مقاصد ما نقشی اساسی ندارد). این‌عمل محاط کردن توابع ناپایدار درمیان خانواده‌های پایدار برای رده‌بندی توم[1] ازتوابع با تکینگیهای تبهگون امری کاملا بنیادی است.

فرض کنید f یك تکینگی در x_0 داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر $Df(x_0)=0$. برای سادگی فرض می‌کنیم $x_0=0$، مبدأ R^n باشد، وفرض می‌کنیم که $f(0)=0$، زیرا ما همیشه می‌توانیم در صورت لزوم، مختصات را به کمك انتقال عوض کنیم تا چنین وضعیتی بدست آید. همچنین، ازآنجا که فقط رفتار تابع درحوالی تکینگی مورد توجه ماست، همهٔ توابعی راکه درحوالی 0 با f مساوی هستند یك کاسه می‌کنیم. و این مجموعه از توابع را جرم[2] f (در 0) می‌نامیم و با f نشان می‌دهیم. مجموعهٔ همهٔ جرمهای توابع $f:R^n\to R$، C^∞ که درآن $f(0)=0$، را با G_n نشان می‌دهیم.

سرانجام، ما به‌ایدهٔ تابازکن که درشکل ۱ مطرح شد، می‌رسیم. یك تابازکن r-پارامتری ازیك‌جرم f، جرمی است به صورت $\tilde{F}\in G_{n+r}$ که یك خانواده r-پارامتری ازتوابع $F:R^n\times R^r\to R$ نمایندهٔ آن است به‌طوری که $F(x,0)=f(x)$. به‌ازای‌هر (x_0,u_0) نزدیك 0، خانوادهٔ F یك جرم $\tilde{F}_{x_0}$ در x_0 نزدیك $\tilde{f}$ تعریف می‌کند. بنابراین F تای f را باز می‌کند با آنکه آن را تغییر شکل می‌دهد. از این پس، برای رعایت اختصار،ما جرم $\tilde{f}$ راباخود f نشان خواهیم‌داد. مثلا، $F(x,u)=x^3+xu$ یك‌تابازکن ۱- پارامتری $f(x)=x^3$ است، درحالی‌که $F(x,u)=x^3+\sin(u_1)x+u_2x^2$ یك تابازکن ۲- پارامتری x^3 است. بنابراین هر تکینگی معین به‌طورکلی تعدادی نامتناهی تابازکن دارد.

از آنجا که تعداد تابازکن‌های ممکن زیاد است، بازشناسی تابازکن‌های خاصی که نقش بارزی را بازی می‌کنند، امرمهمی است. به‌این مسئله درقضیهٔ مهمی از متر پاسخ داده می‌شودکه بنا به‌آن یك تابازکن به‌نام تابازکن «جهانی» با خواص: (الف) کمترین تعداد پارامتر را دارد؛ (ب) پایدار است؛ و (ج) به طور کیفی همانند دیگر تابازکن‌هاست، گلچین می‌شود. برای تشریح این نتیجه به مفهوم "نقص بعد" یك جرم نیاز داریم.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر W یك زیرفضای $n-r$ بعدی از فضای برداری (حقیقی) V با بعد n باشد، نقص بعد W عبارت است از $n-(n-r)=r$. به‌بیانی دیگر، نقص بعد W، بعد فضای خارج قسمت V/W است. نقص بعد در فضاهای بینهایت بعدی‌اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا، حتی زمانی که V و W بینهایت بعدی هستند،ممکن‌است بعد V/W، یعنی نقص بعد W، بازهم متناهی باشد.

ازآنجا که تمام جرمهای G_n دررابطهٔ $f(0)=0$ صدق می‌کنند، مجموعهٔ G_n یك فضای برداری می‌شود که معمولا بعدی نامتناهی دارد. همانند بالا، یك جرم $f\in G_n$ را

1. Rene Thom 2. germ

که درمبدأ تکینگی دارد، درنظر بگیرید، بنابراین $Df(0)=0$. فرض کنید G_n آن زیرفضایی از $\langle \partial f/\partial x \rangle$ باشد که از جرمهای به‌صورت $b(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\partial f/\partial x_i\,(x)$ تشکیل یافته است، که در آن $a_i(x)$ها جرمهایی درمبدأ هستند. هر $b(x)$ عبارت است از یك ترکیب خطی (با ضرایبی که جرم هستند) ازمشتقات جزئی f. ازآنجاکه $Df(0)=0$، همهٔ $\partial f/\partial x_i$ها درمبدأ صفر می‌شوند؛ بنابراین $b(0)=0$، درنتیجه $b(x)$ واقعاً در G_n واقع است (فضای $\langle \partial f/\partial x \rangle$ ایده‌آل پدید آمده توسط این مشتقات جزئی در R-جبر همهٔ جرمهای در مبدأ است). حال $\operatorname{codim} f$، **نقص بعد** جرم f، را به صورت بعد فضای خارج قسمت $G_n/\langle \partial f/\partial x \rangle$ تعریف می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که $\operatorname{codim} f$ عبارت‌است ازتعدادجرمهایی درمبدأ که با f هم‌ارز نیستند. دربسیاری‌موارد، می‌توان محاسبه $\operatorname{codim} f$ را با استفاده ازشکل‌مناسبی ازقضیهٔ تیلور انجام داد؛ کمی بعد به‌این مطلب خواهیم پرداخت. اما، حالا می‌توانیم قضیهٔ متردا بیان‌کنیم.

قضیه. یك جرم f یك تابازکن جهانی پایدار دارد اگر و فقط اگر $\operatorname{codim} f$ متناهی باشد.

درواقع، اگر $\operatorname{codim} f=r$ و $b_1(x)$، ...، $b_r(x)$ جرمهایی درمبدأ باشند که نمایندهٔ یك پایه برای فضای خارج قسمت $G_n/\langle \partial f/\partial x \rangle$ باشند، آنگاه $F(x,u)=f(x)+\sum_{i=1}^{r} b_i(x)u_i$ یك تابازکن جهانی (پایدار) f است.

به‌عنوان مثال، جرم $R\to R: f(x)=x^3$ را در نظر بگیرید. اولاً، با استفاده از قضیهٔ تیلور به‌آسانی مشاهده می‌شود که هر تابع C^∞، g که $g(0)=0$، می‌تواند به‌صورت $g(x)=dg/dx(0)x+p(x)x^2$ بیان شود، که در آن $p(x)$ یك تابع C^∞ است. ثانیاً، $\partial f/\partial x=df/dx=3x^2$، بنابراین $[g]$ در $G_1/\langle \partial f/\partial x \rangle$ که g نمایندهٔ آن‌است با حذف قسمتهایی که x^2 دارند به‌دست‌می‌آید: یعنی $[g]=dg/dx(0)x$، یك مضرب حقیقی از x. بنابراین فضای برداری $G_1/\langle \partial f/\partial x \rangle$ دارای پایهٔ x است ویك‌بعدی است. با استفاده ازقضیهٔ متر $f(x,u)=x^3+xu$، تابازکن جهانی‌پایدار $f(x)=x^3$ است.

به‌آسانی می‌توان نشان داد که f (درحوالی ۰) پایدار است اگر و فقط اگر $\operatorname{codim} f=0$، بنابراین به‌یك‌معنی، $\operatorname{codim} f$ ناپایداری f را اندازه‌گیری‌می‌کند. به‌ویژه، هرتابع مورس نقص بعد ۰ دارد.

قضیهٔ توم

حال به‌فهرست مشهور هفت فاجعهٔ مقدماتی توم می‌رسیم (ر. ك. جدول ۱). این قضیه جرمهای با نقص بعد حداکثر ۴، وبا تکینگیهای تبهگون را رده‌بندی می‌کند. این هفت نوع، فاجعه‌های مقدماتی نامیده می‌شوند. بنا به‌قضیهٔ متر، این‌گونه جرمها، تابازکن‌های پایدار با حداکثر چهار پارامتر دارند. این تکینگیها با قوه مهم‌اند زیرا همانگونه که

جدول ۱. هفت فاجعهٔ مقدماتی توم.

نام	تابازکن جهانی $F(x,u)$	$\operatorname{codim} f$	$\operatorname{Germ} f$
پرچین	x^3+u_1x	۱	x^3
شکن	$x^4-u_1x^2+u_2x$	۲	x^4
دم چلچله‌ای	$x^5+u_1x^3+u_2x^2+u_3x$	۳	x^5
نافی هذلولوی	$x^3+y^3+u_1xy-u_2x-u_3y$	۳	x^3+y^3
نافی بیضوی	$x^3-xy^2+u_1(x^2+y^2)-u_2x+u_3y$	۳	x^3-xy^2
پروانه	$x^6+u_1x^4+u_2x^3+u_3x^2+u_4x$	۴	x^6
نافی شلجمی	$x^2y+y^4+u_1x^2+u_2y^2-u_3x-u_4y$	۴	x^2y+y^4

دیدیم، پارامترها ذریك تابازکن متناظر بامتغیرهای کنترل هستند، واگر اینها مختصات فضا وزمان باشند، بیش ازچهارتا مورد نیاز نیست. اما، دربسیاری از مثالها کنترلها فضا وزمان نیستند، و عموماً بیش از چهارتا مورد نیاز است (مثلاً، برای دستیابی به‌جزئیات بیشتر ر. ك. مرجع ۶).

به‌طور اخص بنابرقضیهٔ توم، هرجرم تکینه‌دار بانقص بعد حداکثر ۴ به‌طور کیفی همانند یکی ازجرمهای فهرست شده درجدول ۱ (با تابازکن‌های پایدار متناظر) است. تابازکن‌ها باتقریب اضافه کردن یك فرم درجه دوم ناتبهگون ازمتغیرهای دیگر و ضرب در $+1$ و -1 یکتا هستند. به‌عبارت دیگر، قضیهٔ توم یك‌فهرست تمام وکمال (باتقریب هم‌ارزی) از همهٔ تابازکن‌های پایدار باچهار پارامتر یا کمتراست: هر تابازکن دیگری حتماً هم‌ارز یکی‌از تابازکن‌های فهرست شده است.

جرمهایی که درفهرست به چشم می‌خورند حداکثر دو متغیر «رفتار» (x_1,x_2) با (x,y) نشان داده شده است) دارند. علت این‌امر آن است‌که، هرجرم باتکینگی‌تبهگون $f:R^n\to R$ با $n\geqslant 3$ لزوماً بانقص‌بعدحداقل‌شش است؛ این‌نتیجه‌ای‌است‌که می‌توان با درنظرگرفتن رتبهٔ ماتریس هسین f در ۰، اثبات کرد.

سرانجام، می‌توان ثابت‌کرد که‌مجموعهٔ خانواده‌های r-پارامتری C^∞، F که به‌ازای هر $u\in R^r$ تابازکن‌های‌پایدار F_u تولیدمی کنند، درمجموعهٔ همهٔ خانواده‌های r-پارامتری، باز وچگال‌اند. مشروط به‌آنکه $r\leqslant 5$. این مطلب دیگر به‌ازای $r\geqslant 6$ صادق نیست. به‌ویژه، نتیجه می‌شودکه خاصیت «تابازکن توم بودن» عام است: به‌ازای $r\leqslant 4$، عموماً، یك تابازکن، باید یکی ازاعضای فهرست هفتگانه باشد.

ازنظرتوم اهمیت پایداری‌تابازکن‌ها درکاربردهای فیزیکی، این‌است که‌رویدادها درطبیعت برای آنکه مشاهده‌پذیر باشند، علیرغم‌وجود اعوجاجهایی تاشی ازامکان‌ناپذیری ایجاد شرایط یکسان به‌طور دقیق، باید به‌طور تجربی قابل تکرار باشند؛ بنابراین خانواده‌هایی از توابع که این رویدادها را تولید می‌کنند، باید پایدار باشند. اما، در

ارزیابی کار تو م، این نکته مهم است که تصدیق شود مفاهیم دیگری از پایداری نیز وجود دارد، ومدلهای دیگری ازفرایندها موجود است که پایداری ندارند وبامشاهدات تجربی نیز سازگارند [۶].

مراجع

دراینجا مجموعه‌ای ازمنابع مقدماتی‌دربارهٔ نظریه فاجعه‌ها آمده است که تقریباً به‌ترتیب ارتقاء سطح‌ریاضی‌آن درفهرست درج شده‌اند. برای‌دستیابی به‌مراجع‌بیشتربه‌مرجع [۶] مراجعه کنید، این مرجع درواقع شامل یك راهنمای‌کامل درمتون نظریه فاجعه‌ها است.

1. Zeeman E. C., "Catastrophe theory." *Sci. Amer.*, April 1976, 65-83.
2. Woodcock A. E. R., Davis M., *Catastrophe Theory*, Dutton, 1978.
3. Poston Tim, Stewart I. N., *Taylor Expansions and Catastrophes*, Pitman, 1976.
4. Callahan J., "Singularities and plane maps I, II," *Amer. Math. Monthly*, **81**, 1974, and **84**, 1977.
5. Golubitsky M., "An introduction to catastrophe theory and its applications," *SIAM Rev*, **20**, 1978.
6. Poston Tim, Stewart I. N., *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, 1978.
7. Brocker Th., Lander L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge Univ. Press, New York, 1975.
8. Zeeman E. C., *Catastrophe Theory*, Selected Papers 1972-1977. Addison-Wesley, 1977.
9. Thom Rene, *Structural Stability and Morphogenesis* (translated by D. H. Fowler), Benjamin - Addison-Wesley, 1975.
10. Golubitsky M., Cuilleman V., *Stable Mappings and Their Singulatities*, Springer-Verlag, 1973

وندر واردن

کشف کواترنیونها (چهارگانها) توسط هامیلتون●

ترجمهٔ ویدا میلانی ، دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه تهران

منابع معاصر مسیر حرکت هامیلتون را از نارساییهای مکرر درضرب سه‌تایی‌ها تا جهش شهودی به‌بعد چهارم توصیف می‌کنند.

مقدمه

اعداد مختلط معمولی $(a+ib)$ (یا، به‌صورتی که قبلاً نوشته می‌شدند، $(a+b\sqrt{-1})$ مطابق دستورهای‌مشخصی، جمع، وضرب می‌شوند. قاعدهٔ ضرب به‌صورت زیر است

ابتدا ضرب مطابق قواعد جبر دبیرستان انجام می‌شود

$$(a+ib)(c+id)=ac+adi+bci+bdi^2$$

و سپس -1 را به‌جای i^2 می‌نشانند،

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

اعداد مختلط را به‌صورت زوجهای (a,b) نیز می‌توان تعریف کرد. ضرب دو زوج (a,b) و (c,d) به‌صورت زوج $(ac-bd\ ,\ ad+bc)$ تعریف می‌شود. زوج $(1,0)$ را ۱ و زوج $(0,1)$ را i می‌نامیم. ازاینرو به نتیجهٔ زیر نیز می‌رسیم

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

بااین تعریف تمام اسرارواحد موهومی $i=\sqrt{-1}$ فاش می‌شوند: i صرفاً همان زوج

● van der Waerden B. L., "Hamilton's discovery of quarternions," *Mathematics Magazine*, November 1976, 227-234.

(۰،۱) است.

اعداد چهارگان $a+bi+cj+dk$ که ویلیام هامیلتون در شانزدهم اکتبر سال ۱۸۴۳ آنها را کشف کرد، بنابر قواعد ثابتی، مانند اعداد مختلط درهم ضرب می‌شوند؛ به‌بیان دیگر

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$
$$ij=k,\ jk=i,\ ki=j,$$
$$ji=-k,\ kj=-i,\ ik=-j$$

این اعداد را می‌توان به صورت چهارتاییهای (a,b,c,d) نیز تعریف کرد. چهارگانها یك جبر تقسیم تشکیل می‌دهند؛ یعنی، نه‌تنها می‌توان آنها را جمع، تفریق، وضرب کرد، بلکه تقسیم هم می‌شوند (به‌استثنای تقسیم برصفر). دراین مورد تمام قواعد محاسباتی جبر دبیرستان صادقند؛ وتنها قانون جابه‌جایی $AB=BA$ صادق نیست زیرا ij بـا ji یکی نیست.

چگونه هامیلتون به‌این قواعد ضرب رسید؟ مشکل او چه بود و چگونه به‌راه حـل دست یافت؟ ما به‌کمك مدارك ومقالاتی‌که در جلد سوم مجموعهٔ مقالات ریاضی هامیلتون [۳] نشر یافته‌اند، به‌اطلاعات دقیقی دراین باب می‌رسیم:

اول، ازطریق آنچه که هامیلتون در ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ یـادداشت کـرده است [۳، ص ۱۰۳–۱۰۵]؛

دوم، ازطریق نامه‌ای به‌جان گریوز[1] به‌تاریخ ۱۷ اکتبر ۱۸۴۳ [۳، ص ۱۰۶–۱۱۰]؛

سوم، به‌کمك مقاله‌ای در خلاصه مذاکرات آکادمی سلطنتی ایرلند [۲، (۱۸۴۴) ص ۴۲۴–۴۳۴] که در ۱۳ نوامبر ۱۸۴۳ ارائه شده است [۳، ص ۱۱۱–۱۱۶]؛

چهارم، ازطریق پیشگفتار مفصل «گفتارهای هامیلتون درزمینه چهارگانها» درژوئن ۱۸۵۳ [۳، ص ۱۱۷–۱۵۵، به‌ویژه ص ۱۴۲–۱۴۴]؛

پنجم، به‌یاری نامه‌ای که هامیلتون پیش از مـرگ، چند روز قبل ازدوم سپتامبر ۱۸۶۵، به پسرش آرکی بالد[2] نوشت [۳، ص۱۵–۱۶].

می‌توان هریك ازمراحل اندیشهٔ هامیلتون را ازروی تمام این مدارك به‌دقت دنبال کرد. این هم رویداد نادری است که می‌توان هنگام طرح مسئله، نزدیك‌شدن ریاضیدان به‌راه حل گام به‌گام، و سپس باجرقه‌ای در جهت حل‌پذیر ساختن مسئله، آنچه را به‌ذهن او

1. John Graves 2. Archibald

خطور می‌کند مشاهده کرد.

تاریخچهٔ مختصر اعداد مختلط

در قرون وسطی، به هنگام حـل معادلات درجه دوم بـه عباراتی به‌صورت $A+\sqrt{-B}$ برخورد می‌کردند. آنها را «جوابهای ممتنع» یا اعداد اصم: اعدادممتنع، می‌نامیدند. اعداد منفی نیز «ممتنع» نامیده می‌شدند. «کاردان[1]» اعداد $A+\sqrt{-B}$ رادرحل معادلات درجه سومی‌که، درحالتهای تحویل ناپذیر[2]، تمام ریشه‌هایشان حقیقی‌بودند، به‌کارمی‌برد. بامبلی[3] نشان داد که محاسبه به‌کمك عباراتی چون $A+\sqrt{-B}$، بدون‌هیچگونه تناقضی، میسر است، اما او این عبارات را دوست نداشت: او آنها را «سفسطه‌آمیز» و آشکارا بی‌ارزش نامید. عبارت «عدد موهومی» ازدکارت گرفته شده است.

اویلر درانجام آزادانهٔ عملیات بااعدادمختلط هیچ‌گونه تردیدی روا نمی‌داشت. وی فرمولهایی‌چون $\cos\alpha=1/2(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$ را به‌صحنهٔ محاسبات واردکرد. نمایش هندسی اعداد مختلط به‌عنوان‌بردار ویانقطهٔ واقع درصفحه راآرگاند[4] (۱۸۱۳)، وارن[5] (۱۸۲۸) و گاوس (۱۸۳۲) ابداع کردند.

آرگاند، اعداد مختلط را به‌صورت پاره‌خطهای جهت‌دار در صفحه معرفی کرد.او بردارهای پایهٔ ۱ و i را به‌عنوان بردارهای یکهٔ متعامد تعبیر کرد. جمع همان جمع معمولی بردارهاست،که نیوتن مارا باآن آشنا ساخت (قانون متوازی الاضلاع سرعتها یانیروها). درآن‌هنگام طول یك‌بردار «قدر مطلق» و زاویهٔ بردار باجهت‌مثبت محور x را «آرگومان» عدد مختلط عنوان کردند. بنابرنظرآرگاند، ضرب اعداد مختلط به‌نحوی انجام می‌گیرد که قدرمطلقها درهم ضرب وآرگومانها بایکدیگر جمع می‌شوند. وارن و گاوس، مستقل از آرگاند، اعداد مختلط را به‌شیوهٔ هندسی نمایش دادند وبرای جمع وضرب‌آنها تعبیر هندسی بیان کردند.

«پدر، آیا می‌توانی سه‌تایی‌ها را درهم ضرب کنی؟»

هامیلتون نمایش هندسی اعداد مختلط را می‌شناخت وآن را بـه‌کار می‌برد. اما، او در مقاله‌های منتشر شده‌اش، بر تعریف اعداد مختلط به‌صورت زوج (a,b)، که جمع‌وضرب آنها برطبق قواعد خاصی‌انجام می‌گیرند، تأکید ورزیده است. درهمین‌ارتباط، هامیلتون این مسئله را در تـرد خویش مطرح کرد: «پی بردن به اینکه اعداد سه‌تایی (a,b,c) چگونه مانند زوجهای (a,b) دربکدیگر ضرب می‌شوند.»

هامیلتون، همانگونه که خود اظهار داشته است، مدتهای مدیدی امیدوار بود که قاعدهٔ ضرب سه‌تاییها را کشف کند. اما دراکتبرسال ۱۸۴۳ این‌امید بسی قویتروجدیتر

1. Cardan 2. casus irreducibilis 3. Bombelli 4. Argand
5. Warren

زندگینامهٔ هامیلتون

سر ویلیام هامیلتون، که در سال ۱۸۰۵ در دوبلین ایرلند زاده شد، کودکی با استعداد فوق‌العاده بود که از همان دوران کودکی استعداد خود را بروز می‌داد. وی علاوه بر تسلط کامل به‌هفت زبان، به‌شش زبان دیگر آشنایی داشت. در سال ۱۸۲۷ در حالی که هنوز فارغ‌التحصیل نشده بود، به‌استادی نجوم و مدیریت رصدخانه گمارده شد و کوتاه زمانی پس از آن به‌سمت منجم سلطنتی منصوب شد، و این مقام را تا پایان عمر پرثمر خود حفظ کرد. احتمالاً امروزه کاری را در زمینهٔ دینامیک بیش از سایر کارهایش می‌شناسند. به‌گفتهٔ اردوین شرودینگر «اصل هامیلتون بنیان فیزیک مدرن، همان چیزی است که فیزیکدان انتظار دارد هر پدیدهٔ فیزیکی مطابق با آن باشد». کشف بزرگ دیگر وی دستگاه چهار تائیها (کواترنیونها) است. جرقهٔ هوشی که باعث این کشف شد در سال ۱۸۴۳ زده شد، و این مقاله شرح همین کشف است. یک قرن بعد، دولت ایرلند با چاپ تمبری یادگاری، بر این کار بزرگ وی ارج نهاد.



شد. وی در نامه‌ای به‌پسرش آرکی بالد می‌نویسد [۳ ، ص ۱۵]:

«... اشتیاق کشف قانون ضرب سه‌تایی‌ها بار دیگر در من توان و شوری عظیم را زنده کرده است. ...»

هامیلتون سه‌تاییهای خود را مثلاً به‌اعداد مختلط $a+bi+cj$ به‌صورت $a+ib$ نوشت. او بردارهای یکهٔ i، j، 1 را به‌صورت «پاره خطهای جهت‌دار» دو به‌دو متعامد با طول واحد در فضا نشان داد. بعداً هامیلتون خودش کلمهٔ بردار را به‌کار برد، که من نیز از این پس آن را به‌کار خواهم برد. پس از آن وی در جستجوی نمایش ضربهایی به‌صورت $(a+bi+cj)(x+yi+zj)$ به‌عنوان بردارهای در یک فضا بود. هامیلتون لازم دانست که، اولاً، ضرب جمله به‌جمله امکان‌پذیر باشد؛ و ثانیاً، طول حاصلضرب بردارها برابر با حاصلضرب طول هریک از بردارها باشد. هامیلتون این قاعده را «قانون قدرمطلق» نامید.

امروزه ما می‌دانیم دو شرطی که هامیلتون مطرح کرد تنها می‌توانند به‌فضاهای با ابعاد ۱، ۲، ۴، و ۸ تعمیم یابند. این موضوع را هورویتس ثابت کرد [۵]. بنابراین تلاش هامیلتون بایستی در سه بعد به‌شکست می‌انجامید. ایدهٔ ژرف این بود که این روند را تا چهار بعد ادامه دهد، زیرا که تمام تلاشهایش در راه رسیدن به‌هدف، در سه بعد با شکست روبه‌رو شد.

هامیلتون در نامه‌ای به‌پسرش که در بالا از آن یاد کردیم، دربارهٔ نخستین تلاشش نوشت:

«هر صبح در اوایل ماه اکتبر ۱۸۴۳، هنگامی که برای صرف صبحانه به‌پایین می‌آمدم تو و برادرت ویلیام ادوین ازمن می‌پرسیدید، «خوب، پدر، آیا می‌توانید سه‌تاییها را ضرب کنید؟» و من همیشه ناگزیر بودم با حرکت غمگینانهٔ سرم پاسخ دهم، «خیر، من فقط می‌توانم آنها را جمع و تفریق کنم.»»

از روی مدارک دیگر می‌توانیم اطلاعات دقیقتری راجع به‌تلاشهای اولیهٔ هامیلتون به‌دست آوریم. هامیلتون برای راه بردن «قانون قدرمطلق» دست‌کم در مورد اعداد مختلط $(a+ib)$ مانند اعداد مختلط معمولی، $ii=-1$ را قرارداد به‌نحوی که برای اعداد $(a+cj)$، $jj=-1$ برقرار شود. اما ji و ij چه بودند؟ ابتدا هامیلتون فرض کرد $ij=ji$ و محاسبه‌ای به‌صورت زیر انجام داد

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)$$
$$+j(az+cx)+ij(bz+cy)$$

واکنون از خود می‌پرسید، با ij چکار می‌توان کرد؟ آیا شکلی مانند $\alpha+\beta i+\gamma j$ خواهد داشت؟

نخستین تلاش. چون $i^2=-1$ و $j^2=-1$، باید مجذور ij برابر یک باشد. بنابراین، بنابه‌نوشتهٔ هامیلتون، در این تلاش باید یکی از دو مورد $ij=1$ یا $ij=-1$ را انتخاب کرد. اما همانگونه که محاسبات نشان می‌دهند، در هیچیک از این دو حالت قانون قدرمطلق برقرار نخواهد بود.

دومین تلاش. هامیلتون حالت بسیار سادهٔ زیررا درنظر گرفت:

$$(a+ib+jc)^2=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+2ijbc$$

آنگاه مجموع مربعات ضرایب ۱ و i و j را درسمت راست محاسبه کرد و به‌این‌عبارت رسید

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

بنابراین گفت که، قاعدهٔ ضرب باقراردادن $ij=0$ برقرار خواهد بود. و به‌علاوه، با گذراندن صفحه‌ای از نقاط ۰ و ۱ و jc، ساختار ضرب مطابق نظرات آرگاند و وارن در این صفحه برقرار خواهد بود: بردار $(a+bi+cj)^2$ در همین صفحه واقع است و زاویه‌ای که این بردار با بردار ۱ می‌سازد دو برابر زاویهٔ بین بردارهای $(a+bi+cj)$ و ۱ است. هامیلتون این مطلب را بامحاسبهٔ تانژانت دو زاویه نشان داد.

سومین تلاش. هامیلتون، در گزارش خود می‌گوید که بعداً فرض $ij=0$ را که در

دومین تلاشش به‌جا آورده بود، به‌نظرش کاملا صحیح نمی‌آمد. او در نامه‌ای به‌گریوز[1] می‌نویسد [۳، ص ۱۰۷]:

"مرا بین که برای یك لحظه تصور کردم $ij=0$ — ولی این امر عجیب و ناجور به‌نظرمی‌رسید. من مشاهده کردم که همان نتیجه با فرضی که به‌نظرمن سهلترمی‌رسد، یعنی با قراردادن $ij=-ji$، به‌دست می‌آمد. از اینرو، $ij=k$ و $ji=-k$ را با درنظرگرفتن اینکه k صفر یاغیرصفر بود، قراردادم."

در حذف فرض $ij=0$ و قرار دادن $ij=-ji$ به‌جای آن کاملا حق با هامیلتون بود. مثلا، اگرداشتیم $ij=0$، آنگاه قدرمطلق‌حاصلضرب ij صفر می‌شد، که با قانون قدرمطلق متناقض بود.

چهارمین تلاش. درحالتی کلی‌تر، هامیلتون $(a+ib+jc)$ و $(x+ib+jc)$ را در یکدیگر ضرب کرد. در این حالت دوپاره خطی که در هم ضرب می‌شوند نیز در یك صفحه، یعنی صفحهٔ مار برنقاط ۰ و ۱ و $ib+jc$ واقع‌اند. نتیجهٔ عمل ضرب به‌صورت $ax-b^2-c^2+i(a+x)b+j(a+x)c+k(bc-bc)$ درآمد. هامیلتون از این محاسبه چنین نتیجه گرفت [۳، ص۱۰۷]:

"... ضریب k همچنان صفر می‌شود، و به‌آسانی دیده می‌شود که $(a+x)c$، $(a+x)b$، و $ax-b^2-c^2$ مختصات صحیح نقطهٔ حاصلضرب است، به این معنا که با جمع دوران ازخط واحد به‌شعاع حامل a, b, c. در صفحهٔ خودش ودوران ازهمان خط واحد به‌شعاع حامل نقطهٔ دیگر x, b, c، شعاع حامل نقطهٔ حاصلضرب حاصل می‌شود، وطول این شعاع حامل عبارت است ازحاصلضرب طولهای دوشعاع حامل‌قبلی. تساوی $ij=-ji$ نیزتأیید می‌شود، ولی‌هنوزاطلاعی از مقدار k دردست نیست."

جهش به‌بعد چهارم

پس از این نتیجهٔ دلگرم‌کننده، هامیلتون با جسارت به‌مطالعهٔ حالت کلی مبادرت کرد. («آنگاه باشجاعت‌تمام به‌مطالعهٔ حاصلضرب کلی‌سه‌تاییها اقدام کردم ...» [۳، ص۱۰۷].) محاسبه او به‌شرح زیر بود:

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+k(bz-cy)$$

دریك تلاش پیگیرانه قرارداد $k=0$، و پرسید: «آیا قانون قدرمطلقها برقرار است؟»

1. Graves

به‌بیان دیگر، آیا اتحاد زیر برقرار است؟

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

"خیر، سمت راست عبارت اخیر جملهٔ $(bz-cy)^2$ راکم دارد. واگرما مانند قبل فرض کنیم $ij=k$ و $ji=-k$، در بسط حاصلضرب $(a+ib+jc)(a+iy+jz)$، این عبارت همان مجذور ضریب k است."

و اکنون نوبت آن بینشی فرا می‌رسد که به‌کل مسئله جهت تازه‌ای بخشید، هامیلتون درنامه‌اش به‌گریوز این بینش را مورد تأکید قرارداد [۳، ص۱۰۸]:

"واکنون این مفهوم که به‌منظورانجام محاسبات باسه‌تاییها، ما به‌نحوی ناگزیریم بعد چهارمی را بپذیریم، به‌من الهام شده است."

این بعد چهارم برای خود هامیلتون یك «پارادوکس» به‌شمار می‌رفت، و او برای منتقل کردن این پارادوکس به‌جبر، شتاب به‌خرج می‌داد [۳، ص۱۰۸]:

"... یا با انتقال پارادوکس به‌جبر، [ما] مجبور به‌قبول تمام جداگانهٔ موهومی سومی به‌نام k، نه بادرنظرگرفتن تنها i یا j، بلکه برابر با حاصلضرب این دو به‌ترتیب به‌عنوان مضروب فیه ومضروب هستیم، ولذا[من] به‌معرفی چهارگانها به‌صورت $a+ib+jc+kd$ و یا (a,b,c,d) مجبور شدم."

هامیلتون اولین کسی نبودکه دربارهٔ هندسهٔ چندبعدی به‌اندیشه پرداخت. او در پانوشت نامه‌اش به‌گریوز نوشت:

"نویسنده درحال حاضر (به‌واسطهٔ نامه‌ای از یك دوست) اطلاع یافته است که در مجلهٔ ریاضی کمبریج شمارهٔ آخر ماه مه سال ۱۸۴۳، مقاله‌ای تحت عنوان هندسهٔ تحلیلی ابعاد توسط آقای کیلی[1] منتشر شده است، اما متاسفانه نمی‌داند که دیدگاههای آقای کیلی وخودش تاچه‌اندازه به‌یکدیگر شبیه‌اند ویابایکدیگر تفاوت دارند."

در این رابطه منظور از عبارت «در حال حاضر» همان روزی است که او به‌گریوز نامه می‌نوشت. دریادداشت شانزدهم اکتبر ۱۸۴۳ هیچ نامی ازمقالهٔ کیلی برده نشده است.

1. Cayley

لذا چنین به‌نظر می‌رسد که هامیلتون، مستقل از کیلی، به‌فرضیهٔ فضای چهار بعدی دست یافته است.

پس ازآنکه هامیلتون $ij=-ji=k$ را به‌عنوان چهارمین بردار مستقل پایه معرفی کرد، محاسبات راادامه داد [۳، ص۱۰۸]:

"دیدم که احتمالاً $ik=-j$، زیرا $ik=iij$ و $i^2=-1$؛ و باروشی مشابه انتظار می‌رفت که $kj=ijj=-i$."

از به‌کارگیری کلمهٔ «احتمالاً» می‌توان پی‌برد که هامیلتون این مسیررا تاچه اندازه با احتیاط ادامه‌می‌داد. اوبه‌ندرت دربه‌کاربستن قانون شرکت‌پذیری $i(ij)=(ii)j$ به‌خود اطمینان داشت، زیرا که هنوز مطمئن نبود قانون شرکت‌پذیری برای چهارگانها برقرار باشد. به‌همین‌ترتیب، هامیلتون برای محاسبهٔ ki می‌توانسته قانون شرکت‌پذیری را به‌کار برده باشد

$$ki=-(ji)i=-j(ii)=(-j)(-1)=j$$

به‌جای آن، وی باتعمیم نتیجه را به‌دست آورد. اونوشت [۳، ص۱۰۸]:

"...که به‌اعتبارآن فکرکردم احتمالاً $jk=i$, $ki=j$، زیرا احتمال‌می‌رفت که $ji=-ij$، همچنین می‌بایست $ik=-ki$, $kj=-jk$ را داشته باشیم."

سرانجام می‌بایست k^2 تعیین می‌شد. هامیلتون همچنان محتاطانه پیش می‌رفت:

" و از آنجاکه مرتبهٔ ضرب این اعداد موهومی مهم نیست، نمی‌توانیم از روی

$$i^2\times j^2=(-1)(-1)=+1$$

استنباط کنیم که $k^2=ijij=+1$. احتمال زیادی وجود داردکه

$$k^2=ijij=-iijj=-1$$."

فرض‌اخیر، $k^2=-1$، راکه هامیلتون ادعامی‌کند، دربرقراری‌قانون قدرمطلق ضروری است. اوبااعمال این فرض چنین نتیجه گرفت [۳، ص۱۰۸]:

"فرضیات من اکنون کامل شده بودند، یعنی

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$ij=-ji=k$$

$$jk=-kj=i$$

$$ki=-ik=j$$."

واینك هامیلتون صحت برقراری قانون قدرمطلق را می‌آزمود.

"اما من آزمایش سازگار بودن این روابط را با قانون قدرمطلق ضروری می‌دانستم...، بدون نشان دادن این سازگاری، باید کل تحقیقات را یك شکست تلقی می‌کردم."

از اینرو وی دوچهارگان اختیاری را مطابق باقوانین اخیردرهم ضرب کرد

$$(a\,,\ b\,,\ c\,,\ d)(a'\,,\ b'\,,\ c'\,,\ d')=(a''\,,\ b''\,,\ c''\,,\ d'')$$

$(a''\,,\ b''\,,\ c''\,,\ d'')$ را محاسبه کرد و مجموع مربعات را تشکیل داد

$$(a'')^2+(b'')^2+(c'')^2+(d'')^2$$

ودرنهایت خوشحالی دریافت‌که این مجموع مربعات واقعاً با حاصلضرب زیربرابر است

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)$$

درنامهٔ هامیلتون به‌پسرش اطلاعات بیشتری را در مورد شرایط خارجی که در ذهن وی به‌این بینش انجامید به‌دست می‌آوریم. بلافاصله پس از ایراد جملهٔ "نه، من تنها می‌توانم آنها را جمع وتفریق کنم"، هامیلتون چنین ادامه داد [۳، ص ۱۶–۲۰]:

"اما درشانزدهم همان ماه [اکتبر ۱۸۴۳] – که یك روز دوشنبه وروز تشکیل شورای آکادمی سلطنتی ایرلند بود– در حالی که به‌همراه مادرت برای شرکت و ریاست آکادمی، طول راهرو سلطنتی را طی می‌کردم، وباوجودی که او از اینجا وآنجا بامن سخن می‌گفت، جریانات فکری اخیر ذهن مرا به‌خود مشغول کرده بود، درنهایت درذهنم به‌نتیجه‌ای دست یافتم که ازگفتنش عاجزم که چگونه در همان لحظهٔ نخست اهمیت آن برمن آشکارشد. گویی پیش روی من یك مدار الکتریکی وصل شد، وجرقه‌ای راه مرا روشن کرد و من منادی سالهای آینده وسالهای مملو ازکارها وافکار متمرکزسمتگیری شده را روبه‌روی خود دیدم. ای کاش عمرمن کفاف می‌داد تا خود انتقال دهندهٔ این کشف باشم. در همان لحظه دفترچه‌ای برداشتم ودرون آن مطلبی وارد کردم، دفترچه‌ای‌که هنوز هم وجود دارد. درحالی‌که قادر به‌کنترل حرکات نامعقول خودنبودم به‌هنگام عبور ازکنار پل "بروگام" با یك چاقو روی سنگ پل این فرمول اساسی را با علائم k،j،i کنده‌کاری کردم،

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

که متضمن حل مسئله است. البته این نقش سنگی مانند یك کتیبه درخلال سالهای متمادی فرسوده شده است."

آنچه دردفتر یادداشت هامیلتون ثبت شده، دوباره در صفحهٔ عنوان [۳] بـه‌چاپ رسیده است وشامل این رابطه‌هاست:

$$i^2=j^2=k^2=-1$$
$$ij=k\ ,\ jk=i\ ,\ ki=j$$
$$ji=-k\ ,\ kj=-i\ ,\ ik=-j$$

احتمالا هامیلتون قبل از آن نیز نتیجه محاسبات خسته‌کننده‌اش را که نشان می‌داد مجموع مربعات

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

درمقایسه با حاصلضرب

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

جملهٔ $(bz-cy)^2$ را کم دارد، روی تکه کاغذی نوشته بوده است.

هامیلتون آنچه راکه قبل وهنگام راه رفتن درطول راهروانجمن سلطنتی به وقوع پیوست، درهمان روز در دفترچهٔ خود چنین یادداشت کرد:

"اکنون اعتقاد دارم که ترتیب افکارم را به‌یادمی‌آورم. معادلهٔ $ij=0$ باشرایط

$$(ax-y^2-z^2)^2+(a+x)^2(y^2+z^2)$$
$$=(a^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$$

پیشنهاد شد، وبنابراین درستی رابطهٔ

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

راآزمودم وپی بردم که اضافه‌کردن جملهٔ $(bz-cy)^2$ بسمت راست، ضروری است. این موضوع مرا وادار کرد که ij را نادیده بگیرم وآن را به‌عنوان یك عدد موهومی جدید پیشنهاد کنم."

هامیلتون باخط کشیدن زیرکلمات «وادار شده» و«پیشنهاد» تأکید داشت که با دو حقیقت کاملا متفاوت سروکار دارد. اولین‌حقیقت یك نتیجهٔ منطقی اجباری بودکه بلافاصله

از محاسبه به‌دست می‌آمد: آن عبارت از این بودکه قـراردادن ij مساوی صفر ناممکن بود، زیرا درآن صورت قانون قدرمطلق برقرار نمی‌بود. حقیقت دوم جرقه‌ای بودکه در راهرو درذهن اودرخشید وآن پیشنهاد ij به‌عنوان یك عدد موهومی جدید بود.

بی‌درنگ پس ازاین درخشش ذهن، همه مسائل دیگر آسان شد. محاسبات

$$ik=iij=-j \quad و \quad kj=ijj=-i$$

به‌سهولت‌تمام درذهن‌هامیلتون انجام‌شدند.فرضهای $jk=-kj=i$ و $ki=-ik=j$ بلافاصله نتیجه شدند و محاسبهٔ k^2 نیز به سهولت صورت‌گرفت

$$k^2=ijij=-iijj=-1$$

وبدینسان هامیلتون دراثنای راه رفتنش قواعد محاسباتی راکه دردفترش یادداشت کرده، کشف کرد. دفتر یادداشت وی فرمولهایی را برای ضرایب حاصلضرب زیر در بر دارد:

$$(a+bi+cj+dk)(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)$$

به‌عبارت دیگر

$$a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta$$
$$a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma$$
$$a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta$$
$$a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha$$

به‌همان ترتیب است طرح واره‌ای برای تأیید این حقیقت‌کـه در مجموع مربعات این ضرایب تمام جملات آمیخته (همچون $ad\alpha\delta$) حذف خواهند شد و تنها

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

باقی خواهد ماند. دریادداشت همان روز باردیگر همه چیز به‌طورکامل بیان شده بود.

هشت‌تایی‌ها

نامه به‌گریوزکه درآن هامیلتون‌کشف چهارگانها (کواترنیونها) را اعلام کرده بود، در هفدهم اکتبر ۱۸۴۳ یعنی یك روز پس از این اکتشاف نوشته شده بود. دانه‌هایی کـه هامیلتون افشانده بود بر خاکـی حاصلخیز افتاده بودند، زیراکه دردسامبر ۱۸۴۳، جان گریـوز، جبری خطی را با هشت عنصریکهٔ $1,i,j,k,l,m,n,o$ یعنی جبر هشت‌گانهارا یافت. گریوز ضرب آنها را به‌صورت زیر تعریف کرد [۳، ص۶۴۸]:

$$i^2=j^2=k^2=l^2=m^2=n^2=o^2=-1$$
$$i^2=jk=lm=on=-kj=-ml=-no$$
$$j=ki=ln=mo=-ik=-nl=-om$$
$$k=ij=lo=nm=-ji=-ol=-mn$$
$$l=mi=nj=ok=-im=-jn=-ko$$
$$m=il=oj=kn=-li=-jo=-nk$$
$$n=jl=io=mk=-lj=-oi=-km$$
$$o=ni=jm=kl=-in=-mj=-lk$$

دراین دستگاه قانون قدرمطلق نیز برقرار است

$$(a_1^2+\cdots+a_8^2)(b_1^2+\cdots+b_8^2)=(c_1^2+\cdots+c_8^2) \qquad (1)$$

هامیلتون درهشتم ژوئیهٔ ۱۸۴۴ درپاسخ به‌گریوز [۳، ص۶۵۰] خاطرنشان‌کردکه قانون شرکت‌پذیری $A\cdot BC=AB\cdot C$ آشکارا درمورد چهارگانها برقرار است، ولی درمورد هشت‌گانها اینطور نیست.

باردیگر کیلی در ۱۸۴۵ هشت‌گانها راکشف کردو به‌همین دلیل آنها را اعداد کیلی می‌نامند. گریوز همچنین با ۱۶ عنصر به‌تلاشهایی دست زد ولی موفقیت‌آمیز نبود، زیرا ما امروزه می‌دانیم که اتحادهایی به‌شکل (۱) تنها برای مجموع مربعات ۱، ۲، ۴، ۸ عنصر برقرارند. باشرحی مختصر ازتاریخچه این رابطه‌ها این مقاله را به‌پایان می‌بریم.

فرمول حاصلضرب برای مجموع مربعات

احتمالا اویلر قانون قدرمطلق برای اعداد مختلط را شناخته بود

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

فرمولی مشابه برای مجموع چهارمربع

$$(a_1^2+\cdots+a_4^2)(b_1^2+\cdots+b_4^2)=(c_1^2+\cdots+c_4^2)$$

توسط اویلر کشف شد؛ این فرمول در نامهٔ اویلر به‌گولدباخ در چهارم مه ۱۷۴۸ نوشته شده‌بود [۴]. فرمول (۱) راکه‌گریوز و کیلی بااستفاده ازهشت‌گانها، برای هشت مربع اثبات کردند، توسط دگن[1] درسال ۱۸۱۸ نیز کشف شده بود [۶]. دگن اشتباهاً فکر می‌کردکه می‌تواند قضیه را به ۲ⁿ مربع تعمیم دهد.

مسئله‌ای که ابتدا توسط هامیلتون مطرح شد، چنین است: آیا دوسه‌تایی (a,b,c) و

1. Degen

(x,y,z) را می‌توان چنان درهم ضرب کرد که در آن قانون قدرمطلق برقرار بماند؟ به‌بیان دیگر، آیا می‌توان (u,v,w) رابه‌صورت توابع درخطی از (a,b,c) و (x,y,z) چنان تعریف کردکه اتحاد

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(u^2+v^2+w^2) \qquad (2)$$

نتیجه شود؟

نخستین کسی که عدم برقراری این اتحاد را نشان داد لژاندر بود. وی در اثر بزرگش باعنوان نظریهٔ اعداد درصفحه ۱۹۸، اظهار داشت که اعداد ۳ و ۲۱ را می‌توان به‌صورت مجموع سه‌مربع نمایش داد

$$3=1+1+1$$
$$21=16+4+1$$

اما درمورد حاصلضرب $63=21\times 3$ چنین امکانی وجود ندارد، زیرا ۶۳ عددصحیحی به‌صورت $8n+7$ است. ازاین‌مطلب نتیجه‌می‌شود که‌اتحاد (۲) ناممکن‌است؛ تااین‌اندازه که فرض شده (u,v,w) توابع دوخطی از (a,b,c) و (x,y,z) با ضرایب گویا هستند. اگر هامیلتون توسط لژاندر از این موضوع آگاه می‌شد احتمالا از تلاش درراه ضرب سه‌تایی‌ها دست می‌کشید.

سرانجام هورویتس درسال ۱۸۹۸ به‌این پرسش که به‌ازای چه‌مقادیری از n رابطهٔ

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)=(c_1^2+\cdots+c_n^2)$$

برقرار است، پاسخ داد. وی، با استفاده از ضرب ماتریسها، نشان داد کـه تنها امکانها عبارت‌اند از: $n=1,2,4,8$، [۵]. خواننده برای توضیحات تاریخی بیشتر می‌تواند به مراجع [۱] یا [۲] مراجعه کند.

مراجع

1. Curtis C. W., *The Four and Eight Square Problem and Division Algebras*, Studies in Mathematics, vol. 2(Ed. by A. A. Albert), p. 100, Mathematical Association of America, 1963.
2. Dickson L. F., "On quaternions and their generalizations and the history of the eight square theorem," *Ann. of Math.* **20**(1919)155.
3. *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, vol III. Algebra, Edited for the Royal Irish Academy, by H. Halberstam and R. E. Ingram, Cambridge University Press, 1967.

4. Fuss P. H. (Editor), *Correspondence Mathematique et Physique* I, St. Petersburg, 1843.
5. Hurwitz Ueber, *die Composition der quadratischen Formen Von beliebig vielen Variabeln*, Nachr. der Koniglichen Gesellschaft der Wiss Gottingen (1898) 309-316; *Mathematische Werke*, Bd. II, Basel, 1932, pp.565-571.
6. Degen C. P., *Adumbratio Demonstrationis Theorematis Arithmeticae Maxime Generalis Memories de l' Academie de St. Petersburg*, VIII, (1822)207.

رابرت م. فرنچ

قضیهٔ باناخ ـ تارسکی●

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

برش دادن پرتقال به‌قطعات متناهی چنان‌که بشود از کنار هم قرار دادن مجدد آنها دو پرتقال به‌وجود آورد، که ابعاد و حجم هریك دقیقاً با پرتقال اول یکی باشد، باور کنیم یا نکنیم، از لحاظ نظری میسر است. بله درست است: به‌یاری پشتکار و مهارت کافی می‌توان از هر شیء جامد سه‌بعدی دو شیء جدید پدید آورد که با شیء اولی دقیقاً یکی باشند.

ریاضیدانانی که این نتیجه را می‌شنوند (مگر آنها که قضیهٔ باناخ ـ تارسکی را می‌دانند)، عموماً به‌نحوی ناخشنودی خود را ابراز می‌دارند؛ آنان می‌دانند که چیزهای غریب خلاف شهود همواره وقتی پیش می‌آیند که موضوع متضمن بینهایت باشد. بیشتر ریاضیدانان برای نخستین‌بار در دورهٔ لیسانس به‌این موضوع برمی‌خورند و آن را (در کنار خمهای فضاپر کن، توابع کانتور، و مجموعه‌های اندازه ناپذیر) در مقولهٔ مطالب شگفت، در ضمیر خود ضبط می‌کنند. اما علیرغم سهولت نسبی اثبات این قضیه که توسط استفان باناخ و آلفرد تارسکی در سال ۱۹۲۴ براساس اصل انتخاب کشف شد، اکثر ریاضیدانان، بیش از یك دانشمند غیر متخصص در این زمینه، با این نتیجه برخورد نکرده‌اند.

ریاضیات بینهایت تقریباً همواره خلاف شهود است، و از همان آغاز، در آخر قرن نوزدهم که ژرژ کانتور این نتیجهٔ کاملا حیرت‌انگیز را اثبات کرد که برمبنای آن بینهایت به‌ابعاد گوناگونی درمی‌آید، وضع به‌همین منوال بوده است. این نتیجه در ابتدا جامعهٔ ریاضی را چندان برآشفت که هانری پوانکاره یکبار از آن چون بیماریی که ریاضیات را گرفتار کرده است یاد کرد، و گفت که ریاضیات باید از این بیماری بهبود حاصل کند.

مراد از این مقاله نه توضیح نکات باریك درمورد بینهایت است و نه ارائهٔ اثباتی

● French Robert M., "The Banach-Tarski theorem." *The Mathematical Intelligencer*, **10** , 1988, 21-28.

دقیق ازقضیهٔ باناخ ـ تارسکی. بلکه، چندمفهوم ساده دربارهٔ بینهایت توضیح داده خواهد شد که برای توضیحات بعدی ایده‌های اصلی اثبات این قضیهٔ شگفت، شالوده‌ای اساسی به‌حساب می‌آید.

مطلبمان را باکمی هندسهٔ مقدماتی آغازکنیم. دو زیر مجموعهٔ صفحه را همنهشت گویند هرگاه یکی از آنها تنها باتبدیل و دوران در صفحه بتواند دقیقاً برديگری منطبق شود. معنای همنهشتی این است‌که فاصلهٔ بین نقاط مجموعهٔ اول پس ازآنکه برای انطباق بامجموعهٔ دوم حرکت کرده است، بدون تغییر باقی بماند. اما همنهشتی را نباید باتناظر یك‌به‌یك اشتباه گرفت. مثلا، مجموعهٔ اعداد زوج $\{\ldots, 6, 4, 2\}$ بامجموعهٔ اعدادطبیعی $\{\ldots, 3, 2, 1\}$، همنهشت نیست، زیرا هیچ‌راهی برای جایگذاشت یك مجموعه برروی دیگری وجود ندارد، حتی اگر بنوان این دومجموعه را درتناظر یك به‌یك قرار داد. اما هیچ چیز مانع این نیست که مجموعه‌ای نامتناهی با زیر مجموعهٔ حقیقی خود همنهشت شود. مثلا دو مجموعهٔ نامتناهی $\{\ldots, 3, 2, 1\}$ و $\{\ldots, 7, 6, 5\}$ را درنظر بگیرید. همنهشتی باانتقال تمام عناصر چهار واحد مجموعهٔ اول به‌راست، به‌نمایش درمی‌آید.

هم‌ارزی از طریق تجزیهٔ متناهی

به‌پرتقالمان برگردیم. قبل از اینکه عملا تبدیل آن را به‌دو پرتقال آغاز کنیم، به‌مفهوم «هم‌ارزی از طریق تجزیهٔ متناهی» نیاز داریم. این ایده علیرغم نـام پیچیده‌اش ایده‌ای ساده‌است. اساساً، یك شیء X را به‌پاره‌های متناهی جدا ازهم تقسیم وسپس بازآرایی می‌کنیم تاشیء جدید Y به‌دست‌آید.[1] تحت این‌شرایط، گوییم X باتجزیهٔ متناهی‌هم‌ارز Y است. این نوع هم‌ارزی متعدی است. به‌عبارت دیگر، اگریك مجموعهٔ X هم‌ارز Y، و Y نیز به‌نوبه خود هم‌ارز Z باشد، آنگاه X و Z نیز ازطریق تجزیهٔ متناهی بایکدیگر هم‌ارزند.

اینك، به‌نخستین «پارادوکس» کوچك خود نظرکنیم: مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، $\mathbf{N}$، ازطریق تجزیهٔ متناهی با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت هم‌ارز است مگر در یك عنصر، مثل مجموعهٔ اعداد صحیح که فاقد یکی ازاعضایش، مثلا ۵، باشد. برهانهای گوناگونی برای این حقیقت وجود دارد، اما استدلالی که درزیر می‌آید آموزنده‌ترین برهان برای آن چیزی خواهد بود که دربی می‌آید. اولا، دوزیر مجموعه از $\mathbf{N}$ بسازید: مجموعهٔ B متشکل ازتمام مضارب ۵، و متمم آن A شامل تمام اعداد غیر ازمضارب ۵. بنابرتعریف، این دو مجموعه از هم جدایند واجتماع آنها عبارت است از $\mathbf{N}$. حال درموضعی هستیم که روش‌اصلی این‌اثبات وتمام برهانهای دیگری راکه دراین مقاله می‌آیند، ازجمله‌خود قضیهٔ باناخ ـ تارسکی، ارائـه دهیم. ایـن روش را «انتقال بینهایت» می‌نامیم. ما B را

۱. توجه‌کنید که «بازآرایی» یك مجموعهٔ معلوم بدین‌معنی است‌که مجموعه، درحالت اولیه‌اش همنهشت مجموعه درحالت نهایی آن است.

به‌اندازهٔ ۵ واحدبه‌سمت بینهایت‌انتقال می‌دهیم، تامجموعهٔ‌جدید B' یعنی $\{\ldots, 15, 10\}$، که بنابه‌تعریف با B همنهشت است، به‌دست آید. حال، از یك‌سو، یك اجتماع مجزا از مجموعه‌های (AUB) داریم، که بااعداد صحیح مثبت برابر است و اتحاد مجزای دومی ازمجموعه‌های (AUB')، کـه با اعداد صحیح مثبت بدون عضو ۵ مساوی است. امـا، همان‌گونه‌که گفتیم، B و B' به‌وضوح بایکدیگر همنهشت‌اند، و حتی همین امر در مورد A و خودش واضحتر است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم‌که مجموعهٔ اعداد صحیح با مجموعهٔ اعداد صحیح که فاقد عضو ۵ باشد، از طریق تجزیهٔ متناهی بایکدیگر هم‌ارزند.

اثبات بعد قدری پیچیده‌تر است اما براساس همان اصل انتقال به‌سمت بینهایت‌که برای اثبات هـم‌ارزی ازطریق تجزیهٔ متناهی N و $N\backslash\{5\}$[1] به‌کار رفت، استوار است. حال یك دایره ودایرهٔ دیگررا که فاقد یك تك نقطه است، در نظر می‌گیریم، حکـم این است که این دومجموعه ازطریق تجزیهٔ متناهی بایکدیگر هم‌ارزند. دراینجا ازچگونگی روند استدلال وبرهان طرحی ارائه می‌دهیم.

گیریم C دایره‌ای به‌شعاع واحد، و o نقطه‌ای باشدکه روی محیط C قراردارد(در واقع همان نقطه که آن را «برمی‌داریم»). از نقطهٔ o در امتداد محیط دایره بـرخلاف حرکت عقربهٔ ساعت به‌اندازهٔ یك واحد، شعاع دایره، حرکت می‌کنیم. نقطه‌ای‌که درآن توقف می‌کنیم ۱ می‌نامیم، وسپس به‌حرکت ادامه می‌دهیم. دقیقاً یك‌واحد بعد می‌ایستیم و نقطه‌ای که در آن توقف کرده‌ایم بـا ۲ علامت می‌زنیم و الـی آخـر. مجموعهٔ نقاط $\{o, 1, 2, 3, \ldots\}$ را B می‌نامیم.

عیناً مانند استدلال قبلی، A نمایش نقاطی این‌باز (ازدایره) خواهد بودکه در B نیستند. حال تصورکنیدکه مجموعهٔ B پیچ تعیین کانال تلویزیون است. پیچ را یك‌درجه به‌سمت‌چپ‌بچرخانید. این‌چرخاندن‌پیچ مجموعهٔ $\{o, 1, 2, \ldots\}$ را بر $\{1, 2, 3, \ldots\}$ منطبق می کند. مجموعهٔ دوم را B'می‌نامیم، وبا B و B' آشکارا همنهشت‌اند. از آنجاکه دایرهٔ C برابر AUB ودایرهٔ فاقد نقطهٔ o برابر AUB' است، نتیجه می‌گیریم که دایره و دایرهٔ فاقد آن تك نقطه‌ای از طریق تجزیهٔ متناهی بایکدیگر هم‌ارزند.

بعداً، می‌خواهیم نشان دهیم‌که یك مربع یك دریك بسته را می‌توان چنان تجزیه و مجدداً ترکیب کردکـه یك مثلث متساوی‌الساقین بسته با ارتفاعی برابر یکی از اضلاع مربع اول بسازد.

اولین کاری‌که باید بکنیم بریدن مربع درامتداد یکی از اقطارش است تا دو مثلث قائم‌الزاویه به‌دست آوریم (شکل ۱). مثلث متساوی‌الساقین مطلوب باکنار هم قراردادن دو مثلث قائم‌الزاویه به‌طریقی‌که یك ساقشان برهم منطبق شود و وترهایشان در یك نقطه بایکدیگر تلاقی کند، درست می‌شود اما این‌روش کارآمدنیست. وقتی‌مربع‌را می‌بریم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ‌کامل درست نمی کنیم. قطرمربع‌تنهابرای ایجاد یکی از وترها می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، نه هردو. به‌علاوه، درتعریف هم‌ارزی ازطریق تجزیهٔ متناهی‌باید

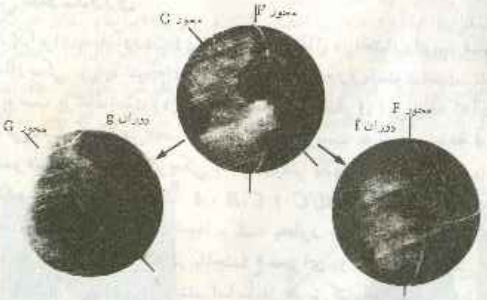
۱. یعنی مجموعهٔ N فاقد عضو ۵. م.

آیا با گویهای صلب هم این کار را می‌توانیم انجام دهیم؟ پاسخ مثبت است؛ به‌تعبیر شهودی، باید به کار بستن روش هاوسدورف را در مورد کره‌هایی توخالی که پوستشان رفته‌رفته ضخیمتر وضخیمتر می‌شود، تصور کنیم. سرانجام، این ساخت را در مورد یك گوی «توخالی» که داخلش تنها حاوی یـك نقطه است، برای ایجاد دوکـرهٔ هم‌ارز که هریك فاقد نقطهٔ مرکزی خودهستند، اعمال می‌کنیم. به‌این‌ترتیب نزدیکترین چیز ممکن به‌یك گوی صلب ــ یعنی: گویی صلب وفاقد مرکز ــ را ساخته‌ایم. تا این‌حد که پیش رفته‌ایم، دیگر نشان دادن اینکه کرهٔ صلب ازطریق تجزیهٔ متناهی باکرهٔ صلب فاقد مرکزش هم‌ارز است، کار نسبتاً ساده‌ای است. این روند اثبات قضیهٔ باناخ ـ تارسکی را کامل می‌کند: یك کره ازطریق تجزیهٔ متناهی بادو نسخهٔ خود هم‌ارز است.

حال به‌اثبات پارادوکس هاوسدورف، تکیه‌گـاه اصلی قضیهٔ باناخ ـ تـارسکی، نگاهی بیفکنیم. توجه‌کنیم که ساختمان هاوسدورف فقط متوجه‌سطح کره است ونه‌خود کره.

دومحور F و G از کرهٔ معلوم S را انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم زاویهٔ بین‌این دومحور درمرکز کره ۳۵° باشد. چنین قرارداد می‌کنیم که f دورانی ازکره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ ۱۸۰° حول محور F، و g دورانی از کره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ ۱۲۰° حول محور G باشد. f و g را انتقالهای کره می‌نامیم (شکل ۳).

ماازترکیبات این انتقالها برای‌توصیف رشته‌دورانهای گوناگون کره بهره‌برده‌ایم. مثلا، انتقال مرکب gf^2 عملی را مشخص می‌کندکه از یك دوران ۱۸۰° حول محور F وبدنبال آن دو دوران ۱۲۰° حـول G، تشکیل یافته است. بـرای پرهیز از تعداد زیاد



شکل۳. انتقالهای کره مرکب از دورانهای حول محورهای F و G زاویه بین محورها طوری انتخاب شده که fg با gf برابر نباشد.

نمادهای غیرضروری، از g به‌جای g^2 استفاده می‌کنیم. (به‌یادداشته باشید کـه $\bar{g}$ نه‌تنها نمایانگر دوران ۲۴۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، بلکه نمایانگر دوران ۱۲۰° در جهت خلاف هم است.) از این پس f، g، $\bar{g}$، را انتقالهای مقدماتی خواهیم نامید. باتوجه به‌یك وضعیت معلوم کره، اگردوبار f دریك ردیف اعمال شود، کره به وضعیت اولیهٔ خـود باز خواهد گشت. مـی‌نویسیم $f^2=1$ که f به‌معنای انتقال همانی باشد. به همین‌ترتیب، از آنجا که g نمایانگر دوران ۱۲۰° است، $g^3=1$.

این دومشاهده به‌ما اجازه می‌دهد که انتقالهای پیچیده را به‌حالات ساده‌ترتحویل کنیم. مثلا، $f^5=g^2f$. $f=g^2f$. $(g^2)(g^2)(f^2)(f)=1$. $g^5f^3=(g^3)(g^2)(f^2)(f)=1$. از سوی دیگر، ازآنجا که دو محور F و G دقیقاً چنان انتخاب شده‌اندکه fg با gf برابرنیست،راهی برای ساده‌کردن انتقال مرکب $gfgfgfg$ وجود ندارد. به‌عبارت دیگر، دریك وضعیت معلوم کره، وقتی ابتدا انتقال g وسپس f را اعمال‌کنیم، کره دروضعیتی متفاوت با آنچه بااعمال ابتدا f وسپس g بود، قرار خواهد داشت.

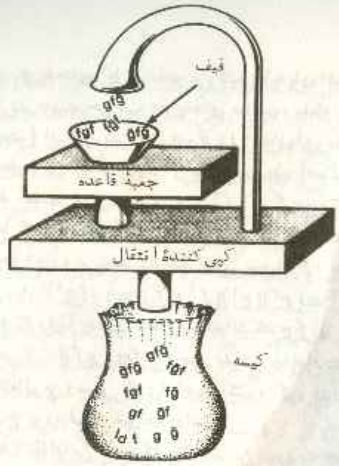
نظرما صرفاً متوجه انتقالهایی است که به‌نازلترین صورت خود تحویل می‌یابند، و می‌خواهیم از یك ماشین تکرار برای تولید مجموعهٔ Q، مشتمل برتمام اینگونه انتقالها، استفاده کنیم (شکل ۴).

برای راه انداختن ماشینی،انتقال‌همانی۱ را به‌داخل‌قیف می‌اندازیم.ماشین‌سه‌قاعدهٔ زیررا اجرا می‌کند: (۱) هرگاه‌تنها انتقال‌موجود درقیف ۱ باشد ماشین سه‌انتقال‌مقدماتی f، g، و $\bar{g}$ را تولید می‌کند؛ (۲) هرگاه یك انتقال وارد جعبه شود به‌طوری‌که‌آخرین عنصرسمت‌چپ‌آن f باشد،انتقال جدید تولیدمی‌شود ــ اولی باافزودن یك دوران اضافی g به‌انتقال موجود درجعبه؛ دومی باافزودن یك دوران اضافهٔ $\bar{g}$ به‌انتقال موجود در جعبه (مثلا، اگر fgf به‌جعبهٔ قاعده برود، $gf\bar{g}f$ و $\bar{g}f\bar{g}f$ خارج خواهند شد)؛ (۳) وقتی یك انتقال که‌آخرین عنصر سمت چپ آن g یا $\bar{g}$ است وارد جعبهٔ قاعده شود، یك‌انتقال جدید باافزودن یك دوران اضافهٔ f به‌آن ایجاد می‌شود (مثلا، اگـر $gf\bar{g}$ داخل جعبهٔ قاعده بشود $fgf\bar{g}$ حاصل می‌شود).

سپس انتقالهای تولید شده درجعبهٔ قاعده به‌داخل تکثیرکنندهٔ انتقالها، که یك‌نسخه ازهر انتقال می‌گیرد وبه‌قیف برمی‌گرداند، می‌افتند؛ سپس انتقال اصلی به‌کیسهٔ بزرگ زیر ماشین می‌افتد. این‌روشی است‌که Q، مجموعهٔ انتقالهای ۱، f، g، $\bar{g}$، fg، gf، $\bar{g}f$، ...، طبق آن تولید می‌شود. زاویهٔ بین محورهای F و G به‌این دلیل انتخاب شد که مطمئن باشیم هرعضو Q نمایانگر یك وضعیت یکتای کره نسبت به‌وضعیت اولیه باشد.

ماشین تکراری کامل

این ماشین چهارنکه با قیف، جعبهٔ قاعده، تکثیرکنندهٔ انتقال وکیسهٔ جمـع‌آوری اساس ماشین تکرار قویتری را که برای قضیهٔ باناخ ـ تارسکی نیاز داریـم، تشکیل می‌دهد. ماشین باروش تکرار کامل نه‌تنها باید توان تولید تمام انتقالهای Q را داشته باشد بلکه

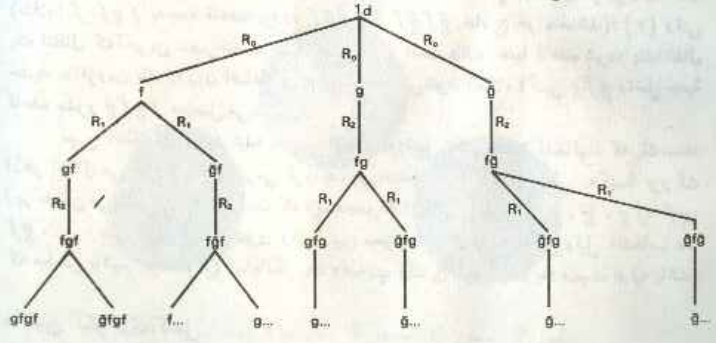


قاعدهٔ ۱: $1\mathrm{d} \to \mathrm{f},\mathrm{g},\bar{\mathrm{g}}$

قاعدهٔ ۲: $\mathrm{f}\ldots \to \mathrm{gf}\ldots, \bar{\mathrm{g}}\mathrm{f}\ldots$

قاعدهٔ ۳: $\bar{\mathrm{g}}\ldots \to \mathrm{f}\bar{\mathrm{g}}\ldots$

$\bar{\mathrm{g}}\ldots \to \mathrm{fg}\ldots$



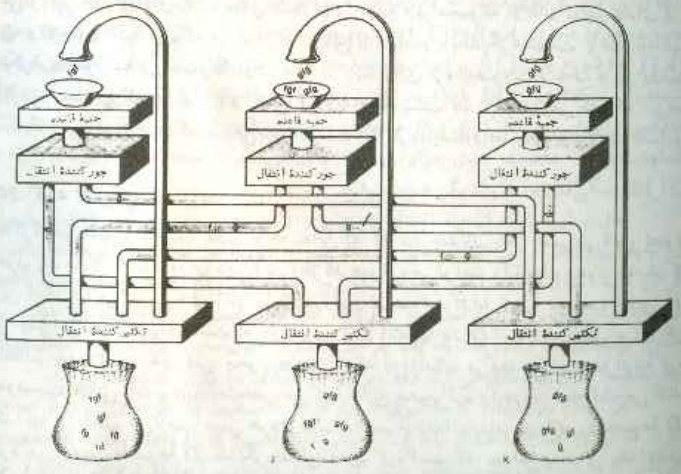
شکل ۴. ماشینی ساده برای تولید مجموعهٔ تمام انتقالهای ممکن.

باید بتواند آنها را در سه زیر مجموعهٔ I، J، و K که اجتماع آنها برابر تمام Q باشد وخواص زیررا داشته باشند، جود کند:

$$fI=J\bigcup K\,; \qquad gI=J\,; \qquad gI=K$$

معنی این تساویها چیست؟ اولی را درنظر گیرید، $fI=J\bigcup K$، که بدین‌معناست که اگر f (یك دوران ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) را در مورد تمام انتقالهای I اعمال کنید، دقیقاًمجموعه‌انتقالهای $J\bigcup K$ را به‌دست‌می‌آورید. به‌همین‌ترتیب $gI=J$، معین بااعمال g (یك دوران ۱۲۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) روی تمام انتقالهای موجود در I، دقیقاً تمام انتقالهای J را به‌دست می‌آورید. ازاینرو، I با J هم‌ارز است. همینطور، به‌دست می‌آوریم که I با K هم‌ارز است.

شکل ۵ نشان می‌دهد که ماشین تکرارکنندهٔ دهندهٔ این سه مجموعه از انتقالها، یعنی I، J و K را ایجاد خواهد کرد. تفاوت مفهومی عمده با ماشین اول (شکل ۴) در جمع‌کردن مرتب‌کننده‌های سه انتقال است. نقش این مرتب‌کننده‌ها ساده است: تنها بر اولین انتقال مقدماتی ازچپ هرانتقال که به‌داخل جورکننده وارد می‌شود، استوار است، آنها مشخص می‌کنند که چه چیزی از لوله به‌زیر خواهد افتاد. ماشین به‌طور متوالی (پشت سرهم) عمل می‌کند. ابتدا روی تمام انتقالهای قیف Iاش عمل می‌کند. سپس روی هرچه در قیف Jاش هست ودست‌آخر قبل ازبازگشت به‌قیف I روی هرچه در قیف



شکل ۵. ماشین تکرارکنندهٔ دهنده انتقالها را تولید و جور می‌کند.

	چرخهٔ ۰	چرخهٔ ۱	چرخهٔ ۲	چرخهٔ ۳
محتویات کیسهٔ I	۱	۱	$۱, fg, \bar{g}f, f\bar{g}$	$۱, fg, \bar{g}f, f\bar{g}, fgf$
محتویات کیسهٔ J	تهی	f, g	f, g	$f, g, f\bar{g}f, gf\bar{g}, gf\bar{g}$
محتویات کیسهٔ K	تهی	$\bar{g}$	$\bar{g}, gf$	$g, \bar{g}f, gf\bar{g}, gfg$

شکل ۶. نتایج اولین تکرار تولید انتقال دماشین جورکننده.

Kاش باشد عمل می‌کند. به‌این‌دلیل، می‌توانیم از چرخه‌های ماشین‌سخن به‌میان آوریم. اگر بنا باشد انگشت خودرا روی‌کلید روش اثبات قضیهٔ باناخ-تارسکی بگذارم، روی انتخاب این روش هوشمندانه برای تولید سه مجموعهٔ متمایز I ، J ، و K از مجموعهٔ Q تمام انتقالهای-کره درتنگ نخواهم کرد. شکل ۶ چند حالت از تولید ایسن ماشین را نشان می‌دهد.

حداقل به‌طور تجربی، باید واضح باشدکه حالا میان زیر مجموعه‌های گوناگون Q روابط مطلوبی داریم، یعنی: $fI=J\bigcup K$ ؛ $gI=J$ ؛ $gI=K$.

آیا برخی قطعات روی هم خواهند افتاد؟ بنابسر پارادوکس هاوسدورف که ما می‌توانیم کره (منهای مجموعه‌ای شمارا) را به‌سه زیر مجموعه ازنقاط ازهم جدای A ، B، و C چنان تقسیم کنیم که A، B، C، و $B\bigcup C$ دوبه‌دو بایکدیگرهمنهشت باشند. باماشین تکراری خود سه زیرمجموعهٔ ازهم جدا از انتقالهای کره به‌صورت I ، J، و K درست کردیم به‌طوری‌که I ، J ، K و $J\bigcup K$ دوبه‌دو همنهشت‌اند. اگر فکرمی‌کنیدکه این‌حد مطابقت بیش‌ازآن‌است که تصادفی باشد،درست فکر کرده‌اید. ماواقعاً به‌نتیجه‌نزدیک شده‌ایم.

دو کره از یکی

به‌کرهٔ خودمان برگردیم. بدون توجه به‌این‌که آن را چندبار به‌هر طریق قابل تصور حول یك مرکز ثابت دوران دهید، درآخرکار همواره می‌توانید دقیقاً یك محور بیابید که این امکان را فراهم می‌کند تاتنها بایك دوران، ازحالت اولیهٔ کسره به‌حالت نهایی آن برسید. این همان چیزی است‌که درمورد تمام انتقالها در Q انجام می‌دهیم. برای هر انتقال، بدون توجه به‌طولش، محور دوران راکه به‌ما امکان می‌دهد ازوضعیت اولیهٔ کره به‌وضعیت نهایی آن برویم، مشخص می‌کنیم. این محورکره را دردو نقطه قطع‌می‌کند، که‌آنها را قطب می‌نامیم. سپس هردو قطب را همراه انتقالهایشان در Q، درمجموعهٔ D گرد می‌آوریم. مجموعهٔ D نشانگر نقاطی روی کره است که حداقل به‌ازای یك انتقال Q، حرکت نمی‌کنند. (یعنی ازآنجاکه D درمقایسه باکرهٔ‌کامل، مجموعه‌ای است‌شمارش-

پذیر، بی‌نهایت کوچك است.) تمام نقاط دیگر روی‌کره به‌ازای هرانتقال در Q حرکت می‌کنند. این‌مجموعه ازنقاط، که آن را D^* یاگاهی $S\setminus D$ (که S کره است) می‌نامیم، همان است‌که مطلوب ماست وبه‌هرحال واقعاً همان کرهٔ کامل است.

چگونه باید سه مجموعهٔ دیگر ازنقاط چون A ، B، و C راتعریف کنیم به‌طوری‌که اجتماع مجزای آنها با D^* برابر باشند؟ به‌ازای هسر نقطهٔ p در D^*، بـا اعمال تمام انتقالهای Q، نقاط حاصل را درمجموعهٔ $Q(p)=\{p, f(p), \bar{g}(p), g(p), fg(p), \ldots\}$ گرد می‌آوریم. به‌سهولت می‌توان نشان دادکه به‌ازای هر دو نقطهٔ مجزا، چون p و p' ، مجموعه‌های $Q(p)$ و $Q(p')$ یا همانندند یا مجزا. از هریك ازمجموعه‌هایی کـه به‌این طریق به‌دست آمده‌اند، یك نقطه بردارید. تمام اینگونه نقاط را در مجموعهٔ M گـرد آورید. (امکان ایجاد مجموعهٔ M قبول ضمنی اصل انتخاب راایجاب می‌کند.) یك‌لحظه تفکر شما را قانع خواهد کرد که مجموعهٔ D^* بامجموعه‌ای که ازاعمال تمام انتقالهای Q درمورد نقاط M حاصل می‌شود، برابر است.

واپسین گام کوچك اثبات ازتجزیهٔ D^* به‌سه زیر مجموعهٔ ازهم جدای A،B،وC تشکیل شده‌است، به‌طوری A ، B ، C و $B\bigcup C$ دوبه‌دو بایکدیگر همنهشت باشند. انجام این‌کار با وسیله‌ای که اکنون دراختیار داریم، ساده است. سه‌مجموعهٔ انتقالهای I، J، و K راکه بااین دقت ساخته‌ایم به‌یادآورید. A را به‌عنوان مجموعهٔ نقاط حاصل ازاعمال تمام انتقالهای I برروی‌مجموعهٔ M، تعریف کنید. همینطور B و C به‌ترتیب بااعمال‌تمام انتقالهای J و K روی مجموعهٔ M، ساخته مـی‌شوند. این ساختار تجزیهٔ مطلوب D^* را به‌سه مجموعهٔ مجزای A ، B، و C به‌دست می‌دهد. زیرا fI با $J\bigcup K$ برابراست، یعنی، $f(A)$ به‌وضوح با $B\bigcup C$ برابراست. ازآنجاکه f تنها یك‌دوران 180°است،می‌توانیم نتیجه‌بگیریم کهA و $B\bigcup C$ بایکدیگر همنهشت‌هستند. بااستدلالی مشابه، برابری $gI=J$ به‌وضوح ایجاب می‌کند که A و B همنهشت باشند، و $gI=K$ ایجاب می‌کند که A و C همنهشت‌باشند. خاصیت تعدی هم‌ارزی به‌مااجازه می‌دهدکه نتیجه بگیریم A ، B ، C، و $B\bigcup C$ همگی‌دوبه‌دو بایکدیگر همنهشت‌اند.

حال برای‌استفاده ازحیلهٔ انتقال به‌بینهایت آماده‌ایم. تصویرپیچ تغییرکانال‌تلویزیون را به‌یاد بیاورید. فرض‌کنید به‌جای آن یك پیچ کروی با دو محور دوران داشته باشیم. فرض کنید انتقال f نمایانگر چـرخاندن پیچ به‌اندازهٔ 180° حـول محور اول باشد؛ برای انطباق مجموعهٔ A برمجموعهٔ $B\bigcup C$، فقط نیاز است که یك‌بارپیچ را حول این محور بپیچانیم. با روشی مشابه، یك چرخش 120° حول محور دوم (یعنی انتقال g) A را مستقیماً روی B منطبق می‌کند ودوبار چرخاندن، A را روی C منطبق می‌کند.

سرانجام درجایگاه نتیجه‌گیری هستیم‌که مارا مستقیماً به تجزیه‌ای رهنمون خواهد بود که برای اتمام ساختمان باناخ-تارسکی لازم است. به‌یادداشته باشید که هدف ما بریدن کره به‌تعدادی متناهی قطعه است که پس از بازسازی آنها دوکره هم‌اندازه و هم حجم بـا اولی حاصل شود. همانطورکـه قبلا هم گفته‌ایم، نقطهٔ شروع مـا پارادوکس

هاوسدورف است. ایدهٔ اصلی چنین است: گیریم سطح کره به‌چهار مجموعهٔ A، B، C، و D قابل تقسیم باشد، چنان که A، B، C، و $B \cup C$ همگی متقابلا هم همنهشت باشند؛ می‌توانیم ازمجموعهٔ $B \cup C$ به‌عنوان «الگوی برش» برای تولید زوج مجموعه‌هایی که درواقع می‌خواهند کنار یکدیگر قرارگرفته ودوکره را بسازند استفاده کنیم. این الگورا دربالای A قرارداده ودومجموعهٔ A_1 و A_2 را که به‌ترتیب با B و C هم‌ارزند می‌بریم. ازآنجا که B و C هردو با A هم‌ارزند، تجزیهٔ A به A_1 و A_2 پارادوکسی است. سپس B و C را نیز با روشی مشابه به ترتیب به B_1 و B_2 و C_1 و C_2 تجزیهٔ می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم S را به‌صورت زیر به‌زیرمجموعه‌های ازهم جدا تجزیه کنیم:

$$\begin{aligned} S &= A \cup B \cup C \cup D \\ &= (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2) \cup D \\ &= (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D) \cup (A_2 \cup B_2 \cup C_2) \end{aligned}$$

از $(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D)$ یك‌کرهٔ S_1 را می‌سازیم، که از طریق‌تجزیهٔ متناهی باکرهٔ S همنهشت است (ازآنجاکه A با A_1 همنهشت است و B نیزبا B_1 همنهشت است وغیره). تنها ذره‌ای‌تفصیل‌باقی‌می‌ماند. آیا می‌توانیم کرهٔ دوم رااز $(A_1 \cup B_2 \cup C_2)$ بسازیم؟

آسوده خیال باشید، این‌همه راه نیامده‌ایم‌که به‌جواب نه‌برسیم! ابتدا، توجه‌کنید که $A_2 \cup B_2 \cup C_2$ می‌تواندتقریباً طوری‌بازسازی شود تاکرهٔ دوم S_2 راکه می‌سازد، با کرهٔ اصلی برابر باشد؛ آنچه جا افتاده است مجموعهٔ D است که همانطورکه نشان دادیم، اندازه‌اش درمقایسه بااندازهٔ S «ناچیز» است. نشان دادن اینکه یك کره ویك‌کره که مجموعهٔ D ازآن ازطریق‌تجزیهٔ متناهی برداشته شده، همنهشت‌اند، اساساً شبیه اثباتی است که در مورد همنهشتی یك دایره ویك دایره فاقد یك نقطه از طریق تجزیهٔ متناهی، ارائه شد. بنابراین D S_2 و S_2 ازطریق تجزیهٔ متناهی همنهشت‌اند واین اثبات راتمام می‌کند. ما نشان داده‌ایم‌که کرهٔ S، وقتی به‌طور مناسبی قطعه قطعه شود، می‌توان آن را تجزیه کرد و سپس دوباره چنان بازسازی می‌شود که دوکرهٔ S_1 و S_2 هر دو از طریق تجزیهٔ متناهی با S همنهشت باشند.

کاربردها

پس تاکنون نشان داده‌ایم که اگریك توپ بسکتبال بادقت کافی قطعه قطعه شود، می‌تواند دوتا [توپ] تولید کند. چه از این بهتر برای دنیای ورزش، ولی در مورد امور بانکی چطور؟ آیا یك چك بانکی، حتی با کمترین مبلغ، می‌تواند دوتا مثل خودش تولید کند؟ متأسفانه‌خیر. ا. لیندن باوم[1] ثابت‌کردکه هیچ مجموعهٔ بسته‌ای درصفحه نمی‌تواندتجزیهٔ پارادوکسی داشته باشد، ومتأسفانه چك بانکی یك مجموعهٔ بسته درصفحه است.

1. A. Lindenbaum

ما قبلا روش «ضخیم کردن» را به‌وسیلهٔ انتقال کره‌های توخالی به کره‌های توپر توصیف کرده‌ایم.

برای تولید این نسخه به کمك قضیهٔ باناخ-تارسکی، ما به اصل انتخاب نیاز داریم. آنچه می‌توانست به‌طور شهودی ازاین اصل واضحتر باشد این است‌که می گوید امکان دارد باهر خانواده ازمجموعه‌های غیر تهی آغازکرد و یك مجموعهٔ جدید به‌وسیلهٔ انتخاب یك عضو ازهریك از مجموعه‌های خانوادهٔ مزبور ایجادکرد.

درستی اصل انتخاب، مانند اصل موضوع پنجم اقلیدس درحدود دویست‌سال‌پیش، طی همان قرنی‌که یك موضوع داغ مورد بحث بین جامعهٔ ریاضیدانان همین موضوع بود. به این پرسش درحوالی آغاز سال ۱۹۶۰ پاسخ داده شد. معلوم شد که اصل انتخاب، نظیر اصل موضوع پنجم اقلیدس، نه‌درست است ونه غلط، بلکه ازدیگر اصول دستگاه مستقل است. اگرآن را درست بگیریم ــ و به‌طورِ طبیعی بیشترازاین‌چه می‌تواند باشد؟ ــ ازنظر ریاضی مجبوریم نتیجهٔ عجیب‌باناخ- تارسکی راکه ازآن حاصل می‌شود قبول کنیم.

دیگر بحث نظری بس‌است؛ حال بگذارید سروقت کاربردهای عملی سرگرم‌کننده برویم. آنچه نیاز دارید عبارت است ازیك چاقوی تیز، تکه‌ای کوچك نان، کمی ماهی، وعدهٔ زیادی تماشاچی. سپس اگرنان را به‌دقت ببرید و مطابق آنچه گفته شد بازسازی کنید چه‌کسی می‌داند که چه خواهد شد؟

پال هالموس

نیکلای بورباکی•

ترجمهٔ سعید ذاکری

نامش یونانی، ملیتش فرانسوی، و سرگذشتش عجیب وغریب است. اویکی از بانفوذترین ریاضیدانهای قرن بیستم بشمار می‌آید. افسانه‌های بی‌شماری راجع به‌او برسر زبانهاست، وتعداد آنها هرروز نیز بیشتر می‌شود. تقریباً هر ریاضیدانی چند داستان دربارهٔ اومی‌داند وظاهراً بدش نمی‌آید که چند ماجرای دیگرهم دربارهٔ او بشنود. درسراسردنیا نوشته‌های اورا می‌خوانند وبه‌گونهٔ وسیعی به‌آن استناد می‌کنند. جوانانی در ریودوژانیرو هستند که تمامی آموزش ریاضی خودرا ازآثار او بر گرفته‌اند، وریاضیدانهای مشهودی دربرکلی وگوتینگن یافت می‌شوند که تأثیر کارهای اورا برریاضیات زبان‌آور می‌دانند. هرجاکه جماعتی از ریاضیدانها گردهم می‌آیند، او هواخواهانی احساساتی و مخالفانی پر هیاهو دارد. باهمهٔ این‌حرفها، عجیبترین واقعیت دربارهٔ او این است که وی وجودخارجی ندارد.

این مرد فرانسوی، که نامش یونانی است وبه‌واقع وجود ندارد، کسی نیست جز نیکلای بورباکی (بر وزن توزیانی). حقیقت امر آن است که نیکلای بورباکی نام دسته‌جمعی مستعاری است که مجمعی غیررسمی ازریاضیدانها آن‌را برگزیده‌اند. (عبارت فریبنده‌ای که درزبان فرانسوی به‌عنوان معادل مجمع به‌کار می‌رود، یعنی "انجمن بی‌نام و نشان"، دراینجا کاملا مصداق پیدامی‌کند.) این گروه باتام‌مستعار، سر گرم نوشتن‌رساله‌ای جامع‌درباب ریاضیات‌است، که ازکلیترین اصول‌پایه‌آغاز، وازقرارمعلوم، به‌تخصصیترین شاخه‌های کاربردی ختم می‌شود. این برنامهٔ عظیم در ۱۹۳۹ بـه‌جریان افتاد، و تاکنون بیش از ۲۰ جلد (در حدود ۳۵۰۰ صفحه) ازاین اثر فناناپذیر منتشر شده است.

اینکه چرا این افراد نام بورباکی را برخود نهادند، در هـاله‌ای از رمـز و راز پوشیده است. بنابه‌دلایلی، بعضیها فکر می‌کنند کـه این انتخاب از نـام یکی از افسران کمابیش سرشناس ارتش درجنگ بین‌فرانسه وآلمان الهام گرفته شده است. این‌شخص،

• Halmos Paul R. "Nicolas Bourbaki." *Scientific American*, Vol. 196, PP. 77-81, 1957.

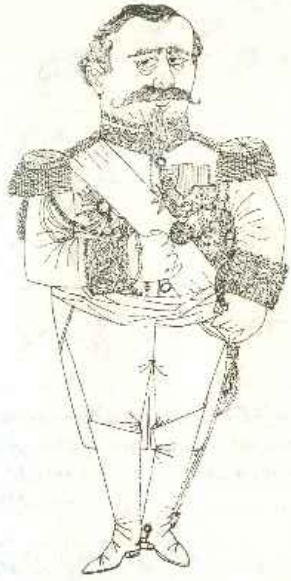


طرح فوق، **نیکلای بورباکی** را به‌گونهٔ طنزآلودی در قـالب این گـروه پرجنب و جوش از ریاضیدانهای فرانسوی نشان می‌دهد. به‌نظر می‌رسدکه بورباکی درهر مقطع زمانی بین ۱۰ تا ۲۰ عضو داشته باشد. هرنوع شباهت میان اعضای اصلی و افراد فوق کامـلا غیرعمدی و تصادفی است.

یعنی ژنرال شارل دنی سانه بورباکی[1]، شخصیتی کاملا چندگـونه داشـت. در ۱۸۶۲، یعنی در ۴۶ سالگی، فرصت یافت که پادشاه یونان شود، امااین پیشنهاد را ردکرد. اینکه نام اوهنوز به‌خاطره‌ها مانده است، عمدتاً به‌دلیل ناملایماتی است کـه ازجنگ نصیبش شده بود. در ۱۸۷۱، پس از اینکه به‌همراه اندك باقیماندهٔ سربازانش از فرانسه گریخت، به سوئیس رفت ودرآنجا بودکه تصمیم به‌خودکشی گرفت. ولی ظاهراً باید تیرش به‌خطا رفته باشد، زیرا می‌گویند که تا ۸۳ سالگی درقید حیات بود. نقل می‌کنند که مجسمه‌ای ازاو درشهر نانسی برپاست. همین موضوع می‌تواند حاکی از رابطه‌ای باشد میان او و ریاضیدانهایی که نام اورا به‌عاریت گرفتند، چراکه چندین‌نفر ازآنها، درزمانهای‌مختلف، وابسته به‌دانشگاه نانسی بوده‌اند.

یکی ازافسانه‌ها دربارهٔ نام‌بورباکی آن است که درحدود سالهای ۱۹۲۷ تا ۱۹۳۲ برای دانشجویان سال اول اکول نرمال سوپریور[2] (کـه اغلب ریاضیدانهای فـرانسوی پرورش یافتهٔ آنجا هستند) سالی یکبار یك سخنرانی برگزار می‌شد که سخنران‌آن‌مهمان سرشناسی به‌نام نیکلای بورباکی‌بود؛ این مهمان درواقع کسی نبود جز بازیگری آماتور که به‌هیئت یك‌ریش‌سفید عظیم‌الشأن تغییر قیافه می‌داد، وسخنرانی اویك‌نوع دوپهلوسخن گفتن استادانه درباب ریاضیات بود.

1. Charles Denis Sauter Bourbaki 2. Ecole Normale Superieure



ژنرال بورباکی، که نامش نه نیکلای، بلکه شارل دنی ساته بود، دراین‌تصویر براساس یك حکاکی‌نشان داده شده‌است. اوهمان کسی است که یکبار پیشنهاد سلطنت یونان را به او دادند.

دراینجا لازم است راجع به‌نامعتبر بودن اکثر داستانهایی که دربارهٔ بورباکی نقل می‌کنند، در قالب چند کلمه هشداری بدهیم. هرچند که اعضای ایـن سازمان مرموز هیچ سوگندی برای افشانکردن کارهایشان نخورده‌اند، اغلب آنها چندان ازشنیدن‌لطیفه دربارهٔ خودشان لذت می‌برند که ماجراهایی‌که دربارهٔ خود نقل می‌کنند عمداً ساختگی و جعلی است. ازسوی دیگر، برای افراد غیرعضو ظاهراً این امکان وجود ندارد که از موضوع گفتگوهای آنها مطلع شوند؛ بنابراین آنچه این‌گونـه افراد خارجی نقل می‌کنند، غالباً داستانهایی رنگ و لعاب داده شده‌بیش نیست. هدف این مقاله توصیف فعالیتهای علمی بورباکـی، ونقل چند نمونه از داستانهایی است کـه دربارهٔ او (آنها؟) ذکر می‌کنند. کمترین چیزی‌که درمورد این داستانها می‌توان گفت آن است که صحت برخی از آنها غیرقابل تحقیق است، لکن این موضوع چیزی ازسر گرم‌کننده بودنشان نخواهدکاست.

نشر آثار علمی بانام مستعار، صد البته چیزی نیست‌که ابتکار این‌گروه باشد. ویلیام سیلی گاست[1]، آماردان انگلیسی، تحقیقات راهگشای خود درباب نظریهٔ نمونه‌های کوچك را بانام مستعار "دانشجو" منتشرمی‌کرد، شاید به‌این دلیل‌که کارفرمای خود (که‌نوشابه‌

1. Wiliam Sealy Gosset

های تقلبی می‌ساخت) را به‌دردسر نیندازد. درهمان زمانی‌که بورباکی کارخود را آغاز کرد، جماعت دیگری از شوخ‌طبعان شخصیتی به‌نام ا. س. پوندیکژی[1] را، کـه به‌عنوان عضو انستیتوی‌سلطنتی‌پلداویا[2] درنظر گرفته شده‌بود، آفریدند. این دوآفریده (پوندیکژی وانستیتوی‌سلطنتی‌پلداویا) ازمقاله‌ای در باب ادراك ماوراء حسی الهام گرفته شده بود که هرگز نوشته نشد. کار اصلی پوندیکژی عمدتاً به‌مقولات عجیب و غریب ریاضی مربوط می‌شد. افتخارآمیزترین فعالیت او، تنها مورد شناخته شدهٔ استفاده ازنام مستعار درجهٔ دوم است. ماجراآن بودکه پوندیکژی بافرستادن‌مقاله‌ای درباب نظریهٔ ریاضی شکارحیوانات بزرگ به مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی آمریکا[3]،درنامهٔضمیمه‌ای‌درخواست‌کردکه مقاله‌را بانامی مستعار منتشرکند، چرا که ماهیت مقاله به‌وضوح فکاهی بـود. این موضوع مـورد قبول ویراستار مجله قرارگرفت، ودرنتیجه مقاله (در ۱۹۳۸) بانام ه. پتار[4] منتشر شد.

قبایل بدوی، وگاهگاهی هم دانشمندان، ممکن است در وجـود یك نام بـه‌خاصیتی جادویی پی‌ببرند. شاهدی براین مدعا، مقاله‌ای است کـه اگر نویسندگانش نام دیگری داشتند، هرگز به مخیله‌شان خطور نمی‌کرد که آن را بنویسند. جرج گـاموف[5] ودوستش هانس بته[6] ملنفت فرصتی طلایی وشگفت‌آورکه برایشان پیش‌آمده بود شدند وازآن‌بهره بردند، وآن هنگامی بود که فیزیکدانی جوان وزیرك بانامی غیرعادی پابه‌صحنه گذاشت. دراول آوریل ۱۹۴۸، این سه تن مقاله‌ای کاملا رسمی دربارهٔ منشاء عناصر شیمیایی در فیزیکال ریویو[7] منتشر کردندکه تنها جنبهٔ غیرعادی آن عنوان نویسندگانش بود. البته،این عنوان چنین خوانده می‌شد: آلفر[8]، بته، گاموف[9].

حال‌که موضوع بحثمان مقاله‌هایی است کـه تحت نامهای عجیب و غریب منتشر شده‌اند، خوب است ماجرای موریس دودافائل[10]را نیز نقل کنیم. این مرد شریف، به‌کمك ابتداییترین وسایل چاپ، باانتشار بعضی از مقالات کلاسیك استادان بزرگ بنام خود، شهرت ریاضی ابدی‌ای برای خود دست و پاکرد. جالب آنکه شخص مزبور کوچکترین تلاشی برای پنهان کردن فعالیتهایش نمی‌کرد. در ۱۹۳۶ مقاله‌ای را به‌نام خودش منتشر کردکه تنها ۲۴ سال پیش ازآن به‌وسیلهٔ شارل امیل پیکار[11] انتشاریافته‌بود. نسخهٔدافائل کلمه به‌کلمه ونماد به‌نماد بانسخهٔ پیکار یکی بود، به‌جزآنکه دافائل یك چیز را حذف کرده بود: به‌دلایلی نامفهوم، او یکی ازپی‌نوشتهایی را کـه پیکار درآن خوانندگـان را به‌یکی از مقالات قبلیش ارجاع داده بود، از مقاله حذف کرده بود. امـا دانشمندنمایی

1. E. S. Pondiczery 2. Poldavia
3. *The American Mathematical Monthly* 4. H. Petard
5. George Gamow 6. Hans Bethe
7. *The Physical Review* 8. Alpher
۹. توجه به‌این نکته جالب است که تلفظ عامیانه این سه نام نزد انگلیسی زبانها کاملا شبیه به‌آلفا، بتا، وگاما، یعنی سه‌حرف نخست الفبای یونانی است. به‌علاوه، حضوراین سه نام پس ازعنوان "منشاء عناصرشیمیایی" به‌وضوح درپردارندهٔ نوعی ایهام ظریف است. ـ م.
10. Maurice de Duffahel 11. Charles Emile Picard

بالاخره کاردست دافائل داد. حقیقت این است که ممکن است بتوان دریك زمان سربعضی ویراستاران کلاه گذاشت، ولی نمی‌توان برای همیشه، همهٔ منتقدین را فریب داد. قضا را یکی ازمنتقدین مقالهٔ پیکار-دافائل آنقدر با آثار پیکار آشنایی داشت که نکراری بودن را تشخیص دهد؛ وبدین‌ترتیب دوران انتشار مقالات دافائل خیلی زود به‌سر رسید.

کارهای بورباکی ازآن دست نیستند که باید ازکسی پنهانشان کرد؛ این‌آثارصرفاً تفریحی سالم برای نویسندگانشان هم به‌شمار نمی‌آیند، بلکه ریاضیاتی جدی‌اند، و یقیناً ازآثار دیگران سرقت نشده‌اند. اینکه گروه دراپتدا نام مستعار را برای خود برگزید، نیمی برسبیل مزاح، ونیم دیگر برای‌اجتناب ازآوردن فهرستی بلندبالااز‌نام نویسندگان‌در صفحهٔ نخست آثارشان بود؛و اینکه این سنت ادامه یافت، بیشتر به‌خاطر داشتن نامی دسته‌جمعی بود تا دستاویزی برای پنهان‌کاری. نام اعضای بورباکی، برای اکثر ریاضیدانها رازی سر به‌مهر باقی مانده است. طریقهٔ عضویت در بورباکی، مثل اغلب مجامع، درزمانهای گوناگون فرق می‌کند، لکن سبك وطرز فکر کار ثابت باقی می‌ماند. خوب است بتوانیم این سبك و طرز فکر خاص را با کمك صفتی توصیف کنیم (صفت پذیرفته‌شده بورباکیایی[1] است)، تامجبورنباشیم به"مکتب فرانسوی جوان" یا الفاظ زائد مشابه ارجاع دهیم.

دراواسط دههٔ ۱۹۳۰ بورباکی برای نخستین‌بار در صحنه ظاهر شد، وآن هنگامی


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

858

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

II

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE I

STRUCTURES TOPOLOGIQUES

CHAPITRE II

STRUCTURES UNIFORMES

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

این کتاب جلد کاغذی، که این عکس هم صفحهٔ عنوان وهم روی جلدآن‌است، تنها قسمتی‌ازکتاب III از بخش I رسالهٔ بورباکی است. عنوان کتاب III، توپولوژی عمومی است.

1. Bourbachique

بود که اعضای بورباکی دست به‌کارانتشارنکات، نقدها، ومقالات دیگری درگزارش کار[1] آکادمی علوم فرانسه وجاهای دیگر شدند. رسالهٔ عظیمی که بعدها مبادرت به‌تدوین آن کردند، درمقاله‌ای تشریح شده است؛ این مقاله به‌زبان انگلیسی ترجمه و (در ۱۹۵۰) در مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی آمریکا تحت‌عنوان "معماری بنای ریاضیات"[2] منتشرشد. درپی‌نوشتی ازاین‌مقاله، می‌خوانیم: "پروفسور ن. بورباکی،عضو سابق آکادمی‌سلطنتی پلداویا [هم‌مسلك پوندیکژی!]، که اکنون مقیم تانسی در فرانسه است، مؤلف رساله‌ای جامع در باب ریاضیات است، که تحت عنوان اصول ریاضیات[3] دردست انتشار است، وتاکنون ۱۰جلد ازآن به‌طبع رسیده است." درضمن، این مقاله تبیین جالبی ازنظرگاه بورباکی در باب مفهوم "ساختار" درریاضیات به‌دست می‌داد، و در حقیقت توصیفی استادانه از روحیهٔ بورباکی بود. مقاله دیگری، که در ۱۹۴۹ در مجلهٔ منطق صوری[4] انتشار یافت، عنوان بلندپروازانهٔ "مبانی ریاضیات برای ریاضیدانهای حرفه‌ای" را برخود داشت. این‌مقاله کاملا تخصصی بود، لکن شخصیت نویسندگانش از طریق صورتگرایی تجلی می‌یافت. مقالهٔ مزبور باچنین جملاتی خاتمه می‌یافت: "من اعلام می‌کنم که قادرم تمامی ریاضیات عصر حاضررا برپایهٔ این مبانی بنا کنم؛ واگر موردی در روند کار من بکر وتازه به‌نظر می‌رسد، منحصراً مدیون این واقعیت است که من به‌جای اکتفا کردن به‌چنین حرفهایی،سعی می‌کنم این مطالب را به‌همان روشی ثابت کنم که دیوژن[5] وجود حرکت را ثابت کرد؛ و همچنانکه رسالهٔ من بزرگ وبزرگتر می‌شود، اثبات من نیز کامل وکاملترخواهد شد."

این مقاله مؤسسهٔ متبوع مؤلف را "دانشگاه نانکاگو"[6] (نانسی به علاوهٔ شیکاگو) معرفی می‌کرد. دلیل اساسی این‌ترکیب آن است که یکی ازپایه‌گذاران مکتب بورباکی ایك عضو هیئت علمی دانشگاه شیکاگوست. نام این شخص آندره ویل[7] است (که ضمناً برادر راهب معروف، سیمون ویل، نیزهست). اگرچه آندره‌ویل برای عامهٔ‌مردم‌ناشناخته است، بسیاری ازهمکارانش حاضرند ثابت کنند که او بزرگترین ریاضیدان‌زندهٔ دنیاست. کارهای اودرزمینهٔ نظریهٔ جبری اعدادوهندسهٔ جبری بسیار عمیق ومهم‌اند؛تأثیراو بر گسترش ریاضیات قرن بیستم چشمگیر است، وحتی درمباحثی که سهم او نه‌چندان اساسی و پیگیر بوده است (مانند ساختارهای یکنواخت وآنالیز همساز بر روی گروههای توپولوژیك)، کارهای او گشایندهٔ درهایی جدید و الهام‌بخش تحقیقاتی عالیتر گردیده است. بدنیست بگوییم که واژهٔ نانکاگو، باردیگر درسری جدیدی‌ازکتابهای پیشرفته ریاضی که‌تحت‌عنوان جذاب انتشارات انجمن ریاضیات دانشگاه نانکاگو منتشرمی‌شود، ظاهر شده است.

1. *Comptes Rendus*

۲. ترجمهٔ فارسی این مقاله را می‌توانید در جنگ ریاضی دانشجو ۳، ص ۸۹-۱۰۲، ملاحظه کنید.-م.

3. *Elements de Mathematique*, Hermann et Cie, Paris, 1939.

4. *The Journal of Symbolic Logic* 5. Diogenes

6. Nancago 7. Andre Weil

بنا بریکی ازداستانهایی که‌دربارهٔ بورباکی نقل‌می‌کنند، پیدایش‌اثرعمدهٔ‌بورباکی، تحت عنوان کلی اصول ریاضیات، مدیون گفتگویی بین ویل و ژان دلسارته[1] در باب چگونگی آموزش حساب دیفرانسیل وانتگرال است. اما توجه به‌این نکته لازم است که انگیزهٔ اصلی‌پیدایش این اثر هرچه‌باشد، هدف فعلی آن بی‌گمان آموزش درسطح‌ابتدایی نیست. اگرچنین نباشد، درست مانند این است که بحثی‌راجع به‌بهترین راه به‌دست‌دادن درکی ازموسیقی مردم‌پسند، به‌رساله‌ای کامل درباب هارمونی وموسیقی‌شناسی منجر شود. (ریاضیدانها حساب دیفرانسیل وانتگرال‌را همان‌قدر "پیش‌پا افتاده" می‌دانند که‌موسیقی‌دانها نسوای سازدهنی را).رسالهٔ بورباکی (که به‌زبان فرانسوی نوشته شده است)، کندوکاوی است درکل ریاضیات از نظر گاهی موشکافانه.

ازقرارمعلوم کل این رساله مرکب ازچندین بخش خواهد بود، لکن ۲۰ جلدی‌که تاکنون انتشار یافته است، حتی بخش I را نیز، که عنوانش ساختارهای اساسی آنالیز است، کامل‌نمی‌کند. نام شش قسمت بخش I، آدم عامی (یا ریاضیدان عهد بوق) را، که ریاضیات ازنظرش حساب، هندسه، ودیگر مباحث قدیمی ازاین دست به‌شمارمی‌آید، به‌تعجب وامی‌دارد. این شش قسمت عبارت‌اند از: (۱) نظریهٔ مجموعه‌ها، (۲) جبر، (۳) توپولوژی عمومی، (۴) توابع یك متغیر حقیقی، (۵) فضاهای برداری توپولوژیك، و(۶) انتگرالگیری.

همراه باهرجلد این کتابها، چهارصفحهٔ جداگانه آمده است که مشتمل برمجموعه‌ای ازراهنمایی‌ها برای‌استفادهٔ صحیح ازرسالهٔ مزبور است. این‌راهنماییها دربارهٔ پیشنیازهای لازم برای مطالعهٔرساله به‌تفصیل سخن می‌گویند (درحدوددوسال ریاضیات دانشگاهی)، نظام کتاب را توصیف می‌کنند، وبر "ترتیب منطقی ثابت ودقیق"ای‌که فصلها، کتابها، و بخشها را باید برمبنایشان خواند تأکید می‌ورزند. این راهنماییها همچنین ترفندهای آموزشی مؤلفان را، که بعضی ازآنها به‌واقع ترفندهای بسیار سودمندی هم هستند، توضیح می‌دهند. یکی‌ازاین‌ترفندها، که‌مؤلفان دیگرتوانستند به‌گونهٔ مفیدی ازآن تقلیدکنند، هشدار به‌خواننده درمواقعی است که مطلب به ویژه لغزنده می‌شود، یعنی خواننده ممکن است به‌اشتباه بیفتد: گذرگاههای لغزنده دراین‌رساله بایك منحنی Z برجسته ("پیچ خطرناك") درحاشیه مشخص شده‌اند.



منحنی Z درrساله بورباکی نمایانگر "پیچ خطرناك" در بحث است.

1. Jean Delsarte

یکی از ترفندهای کمتر پسندیدهٔ بورباکی، نگرش نسبتاً توهین‌آمیز آنها در مورد جانشینی واژه‌های تخصصی است که‌آن را "بدزبانی" می‌خوانند. این‌عقیده‌ای رایج‌است که پایبندی اکید به‌وضع اصطلاحات صحیح ودقیق، احتمالا به‌نوشته‌ای فضل فروشانه و غیرخواندنی منجرخواهد شد. این موضوع به‌ویژه درمورد بورباکی صادق است، چراکه وضع‌اصطلاح ونمادگذاری‌درآثار اومعمولا باآنچه که مقبولیت عام یافته‌متفاوت‌است. نکتهٔ بامزه آنجاست که اغلب "بدزبانی"هایی که بورباکی آنهارا به‌عنوان‌جانشینی "خودمانی" برای اصطلاحات فنی تلقی می‌کند، عملا کاربرد رسمی یافته است: مؤلفان آثار ریاضی، بیزار ازبه‌یادآوردن بدعتهای خودشان، باخیال‌آسوده ازهمان اصطلاحاتی بهره می‌گیرند که دیگر افراد جامعهٔ ریاضی ازآنها استفاده می‌کنند.

تقریباً هرجلد ازآثار بورباکی حاوی مجموعه‌ای بی‌نظیر از تمرینات است. آدم منفعل نمی‌تواند ریاضیات یاد بگیرد، وتمرینات بورباکی می‌کوشد خواننده رابه‌چالش و تحرك فراخواند. مؤلفان مربوطه در ابداع تمرینهای جدید، و بازنویسی و بازآرایی تمرینهای قدیمی، هنرمندی فراوانی به خرج داده‌اند. سیاست آنها معمولا این بوده است که از صاحبان اصلی این تمرینها نامی نبرند، اما ظاهراً این کار مایهٔ دلخوری کسی نشده است. حتی چنین به‌نظر می‌رسد که "سرقت" یکی از مقاله‌های ریاضیدانی توسط بورباکی، و استفاده ازآن به عنوان تمرین، برای آن ریاضیدان افتخار محسوب می‌شود.

یکی دیگر ازابداعات بورباکی عبارت است از تعبیهٔ صفحاتی تا شده در میان کتابهایش، مشتمل برجمعبندی تعریفها ومفروضات مهم؛ این‌صفحات درواقع به‌منزلهٔ‌کتاب لغت کوچکی برای هرجلد ازرسالهٔ بورباکی است که نقش یك واژه‌یاب جمع و یك راهنما برای اصطلاحات غیربورباکیایی وبورباکیایی‌را بازی می‌کند. تنها نکتهٔ‌پراهمیتی که دراین رسالات فراموش شده است، ارائه راهنماییهایی کافی‌درزمینهٔ کتابشناسی است. روش ارائهٔ هرمبحث توسط بورباکی، روشی اصولی‌وژرف‌نگرانه است، که اغلب مرور تاریخی بسیار درخشانی برآن مبحث را نیز دربرمی‌گیرد. اما نقص این مرورهای تاریخی آن است که به‌موارد کلاسیك خیلی‌کم وآن‌هم باکراه اشاره می‌کند، وتقریباً هیچ ذکری ازپیشرفتهای جدید نیز به‌میان نمی‌آورد. البته دراین‌کار هیچ قصد عوام فریبی درکار نبوده است (بورباکی ادعا نکرده است که همهٔ ریاضیات جدید حاصل اکتشافات اوست)، اما این رویه ممکن است متخصص تاریخ ریاضی آینده رابه اشتباه بیندازد.

آنچه تاکنون گفته‌ایم، جنبه‌های ظاهری کارهای بورباکی بوده است، لکن‌اسلوب کار او، روحیهٔ حاکم برآن، وکیفیاتی راکه موجب جاذبه در برابر هواداران، ودافعه در برابر مخالفان می‌شود، مشکلتر می‌توان توصیف کرد. این‌مقولات را، درست مانندکیفیات موسیقی، باید به‌جای فهمیدن، احساس کرد.

یکی از عللی که باعث شد از همان آغاز کار، دانشجویان به‌افکار بورباکی روی آورند، این بود که بورباکی نخستین بررسی منظم و اصولی از برخی مباحث (نظیر

توپولوژی عمومی وجبر چندخطی) را، که پیش از آن در هیچ‌جا به‌صورت کتاب وجود نداشت، ارائه داد. درواقع، بورباکی پیشگامی بود درامر تلخیص وتدوین حجم عظیمی ازمقالات که طی دهها سال دربسیاری مجلات به‌بسیاری زبانها نوشته شده بود. جنبه‌های اساسی‌رهیافت بورباکی عبارت‌اند ازنگرشی ریشه‌ای درباب طریقهٔ درست انجام‌کارها، اصرار بسیار بروضع اصطلاحات ساختهٔ خود، سازمان دادن شسته ورفته و مقتصدانه‌ای به‌ایده‌ها، وبالاخره شیوه‌ای برای ارائهٔ مطالب به‌گونه‌ای که آنچنان بسرگفتن همهٔ نکات پایبند باشد که هیچ محلی‌برای جولان تخیل باقی‌نگذارد ودرنتیجه رساله را به‌نوشته‌ای سرد وغیرصمیمی بدل کند.

نمونه‌ای از جامعیت وفراغت بال در بررسیهای بورباکی را می‌توان در رهیافت او به‌تعریف عدد "۱" دید. اوپیش از آوردن خود تعریف، تقریباً ۲۰۰ صفحه را به‌آماده کردن زمینه اختصاص داده است؛ پس از آن عدد ۱ را برحسب نمادهای بسیار فشرده و خلاصه شده تعریف کرده ودریك پانوشت توضیح داده است که صورت خلاصه نشدهٔ این تعریف در دستگاه نمادگذاری او نیازمند دهها هزار نماد خواهد بود. اتصاف آن است که بگوییم کمترین تأثیر چنین‌کاری این است که منخصص جدید منطق ریاضی می‌فهمد که مفاهیمی چون عدد ۱ آنقدرها هم که به‌نظر می‌رسد ساده نیست.

اکنون وقت آن است که بپرسیم به‌راستی‌چگونه یك‌کارجمعی باچنین وسعتی‌تاکنون نوشته شده است؛ سهم بزرگی ازاین‌افتخاررا باید به‌ژان دیودونه[1] (که اصلا اهل‌تانسی واکنون دردانشگاه نورث وسترن[2] است) داد، که تقریباً ازهمان ابتدای کار رئیس مؤلفین بورباکی‌بوده‌است. ازآنجاکه دیودونه صاحب‌تألیفات‌بسیاری درریاضیات‌تحت نام‌خودش است، به‌دشواری می‌توان کارهای شخصی اورا ازتألیفاتش برای بورباکی تمیز داد. در این‌باره ماجرای جالبی نقل می‌کنند، وآن اینکه یك‌بار دیودونه، تحت نام بورباکی، مقاله‌ای منتشر کردکه بعداً معلوم شد اشتباه کوچکی درجایی ازآن وجود دارد. این خطا، درمقاله‌ای باعنوان "درباب اشتباهی از ن. بورباکی"، تصحیح شد، در حالی‌که امضای ژان دیودونه را درپای خود داشت.

به‌نظر می‌رسدکه تعداد اعضای بورباکی بین ۱۰ تا ۲۰ نفر باشد. به‌جزیك‌استثنای مهم، همهٔ اعضای بورباکی همواره فرانسوی بوده‌اند. این‌مورد استثناء ساموئل‌ایلنبرگ[3] است (که اصلا اهل ورشو واکنون دردانشگاه کلمبیا است). اوکه دردوران جوانی بین دوستانش به S^2P^2[4] معروف بود، آنقدر بمحیط اطرافش توجه نشان می‌داد کـه تنها ۶ ماه پس ازورودش به‌ایالات متحده، بیشتر ازاغلب امریکاییها دربارهٔ امریکا چیزمی‌دانست. ازآنجا که او زبان فرانسوی را همچون یك بومی صحبت می‌کرد و معلوماتش در باب توپولوژی جبری ازهر فرانسوی بیشتر بود، قانون نانوشتهٔبورباکی درمورد نپذیرفتن‌غیر-

1. Jean Dieudonne 2. Northwestern 3. Samuel Eilenberg

۴. اصطلاح S^2P^2 مخفف عبارت "Smart Sammy the Polish Prodigy" به معنای «ساموئل ناقلا، اعجوبهٔ لهستانی» است.م.

فرانسویها شکسته شد تا او پذیرفته شود.

خط مشی فرانسوی مدارانهٔ بورباکی صرفاًمعلول حس وطن‌پرستی آنها نیست،بلکه یك ضرورت وابسته به‌زبان است (چراکه بنیان‌کاررا فرانسویها گذارده بودند). وقتی که مجمعی ازپیش‌کسوتان همچون ویل، دیودونه، کلود شوالیه[1]، و آنری کارتان[2]، به‌همراه همکارانشان دریك‌جا جمع شوند، بی‌گمان نفوذ فرانسوی‌مآبی غیرقابل‌اجتناب خواهدبود. درچنین شرایطی، برای آنکه آدم بتواند درگفتگوهای‌آنها شرکت‌کند، نه‌تنها بایدبتواند زبان فرانسوی را سریع وبلند صحبت‌کند، بلکه باید از جدیدترین اصطلاحات و تکه‌کلامهای دانشجویان پاریسی هم‌مطلع باشد. حتی اگرفرض کنیم همهٔ افراد حاضر درجلسه حائزچنین شرایطی باشند، باز به‌دشواری می‌توان تصورکردکه درمجامع مشهوربورباکی اصولا چگونه کاری انجام می‌شود. اما تصور ماهرچه باشد، واقعیت این است‌که کارانجام می‌شود. اعضا همه‌ساله درگوشه‌ای دنج جمع می‌شوند تا در مورد خط مشیهای اساسی تصمیم گیری کنند.

بخش اعظم فعالیت این جلسات مصروف تهیهٔ یکی از جلدهـای رسالهٔ بورباکی می‌شود. هنگامی‌که موضوع‌خاصی برای‌بررسی درنظرگرفته می‌شود، یکی‌ازاعضا عهده‌دار تهیهٔ اولین نسخهٔ دستنوشت در آن زمینه می‌شود. این کار به واقع آزمونی سخت برای این شخص است. وقتی کارتهیهٔ ایـن نسخهٔ دستنوشت به‌پایان رسید، نسخه‌هـایی ازآن به‌بقیهٔ اعضا داده می‌شود. درنشست بعد، این نسخه بدون هیچ اغماض و گذشتی مورد نقد و بررسی قرارمی‌گیرد، و حتی ممکن است که به‌کلی رد شود. بـه‌عنوان نمونه، اولین نسخهٔ دستنوشت کتاب بورباکی درباب انتگرالگیری‌را دیودونه نوشت، که به"هیولای دیودونه" مشهور شد. می‌گویند این هیولای دیودونه چه ازلحاظ طرز فکر وچه ازلحاظ محتوی بسیار شبیه به‌یك کتاب معروف امریکایی در همین موضوع بـود؛ نویسندهٔ کتاب مذکوررا دراینجاصرفاً "فلانی" می‌نامیم. هیولای دیودونه هرگز منتشرنشد، چراکه‌تصمیم‌گیرندگان مربوطه آن‌را با قیل‌وقال ردکردند. غرولند ویل در این تصمیم بی‌تأثیر نبوده است: "اگر می‌خواستیم چنین نوشته‌ای را بپذیریم، دیگر این کارها لازم نبود، کافی بود تنها کتاب "فلانی" را به‌زبان فرانسوی ترجمه کنیم و به‌بررسی آن بپردازیم."

پس ازآنکه نخستین نسخهٔ دستنوشت بررسی شد، کارتحریر دومین نسخه، احتمالا به‌دست عضو دیگری، آغازمی‌شود. وایز روند تکرار می‌گردد: حتی‌بعید نیست‌که روی آن شش یاهفت‌بار تجدیدنظر شود. حاصل این‌کار طاقت‌فرسا یك کتاب درسی نیست که بتوان باخیال آسوده آن را به‌یك مبتدی سپرد، بلکه یك کتاب مرجع، یاتقریباً یك دایرة‌المعارف است که بدون آن ریاضیات قرن بیستم خواهی نخواهی باآنچه که امروز هست کاملا متفاوت می‌بود.

جوان‌گرایی بورباکی را برای فعالیتهای آینده‌شان باید به‌فال نیك گرفت، امـا

1. Claude Chevallier 2. Henri Cartan

همین موضوع یکی از عوامل اصلی ناخشنودی مخالفان آنهاست. مثلا یك‌بار کارمندان انجمن ریاضی امریکا[1] یك درخواست عضویت به‌امضای ن. بورباکی دریافت کردند. این نامه چندان موجب سرگرمی آنها نشد و آن را یك شوخی ازجانب دانشجویان پنداشتند، و به‌درخواست مذکور پاسخ منفی دادند. منشی انجمن درنامهٔ جوابیه ضمن تعارفی خشك وخالی پیشنهاد کرد بورباکی می‌تواند تقاضای عضویت مؤسساتی بکند [یعنی آن نوع عضویتی که مخصوص به‌مؤسسات است نه‌افراد]. ازآنجا که حق عضویت مؤسساتی به‌نحو قابل توجهی بیشتر ازحق عضویت انفرادی است، ونیز ازآنجا که بورباکی نمی‌خواست کسی فکر کند او [به‌عنوان یك شخص] وجود ندارد، دیگرهیچ تقاضایی به‌انجمن نرسید وهیچکس چیزی راجع به آن نشنید.

آری، واقعاً ممکن است این شوخی ازجانب دانشجویان بوده باشد، اما این دانشجویان‌اند که جوان‌اند، وریاضیات علم جوانهاست. تأکید بورباکی برجوان‌گرایی قابل تحسین است. مصداقی از این جوان‌گرایی را می‌توان در اینجا دید که دیودونه و ویل، علیرغم اینکه بنیانگذاران بورباکی‌بوده‌اند، بارسیدن به‌سن ۵۰سالگی، بازنشستگی خودرا ازگروه اعلام کردند. آنها قبلا اعلام کرده بودندکه در۵۰ سالگی از بورباکی کناره خواهند گرفت وبه‌این قول خود وفاکردند.

شایسته است سخن‌خودرا بااین هشداربه‌خواننده خاتمه دهیم که چشم به‌راه‌شایعات وداستانهای رنگ ولعاب داده شدهٔ ساخته بورباکی دربارهٔ نویسندهٔ این مقاله باشد؛ چرا که بورباکی ظاهراً خوشش نمی‌آیدکه اسرارش برای همگان فاش شود، ونیزیدطولایی درمضمون کوك‌کردن برای فاش کنندگان اسرارش دارد. بی‌گمان، پیش از این مقاله ماجرای بورباکی درجاهای دیگر نیز توصیف شده است. در ۱۹۴۹ آندره دولاشه[2]، در کتاب کوچکش درباب‌آنالیز ریاضی، ازبورباکی به‌عنوان "ریاضیدان چندسر" نام‌برد، وتاآنجا پیش رفت که برخی ازرهبران بورباکی را به‌نام ذکر کرد. یکی دو سال پیش ازآن، کتاب سال دایرةالمعارف بریتانیکا پاراگراف کوچکی دربارهٔ بورباکی به‌عنوان یك‌گروه منتشر کرد. نویسندهٔ این‌پاراگراف رالف ف. باوس[3] بودکه درآن‌وقت‌ویراستار مسئول مجلهٔ متمتیکال ریویوز[4] بود وحالا همکار دیودونه در نورث وسترن است. کمی پس ازانتشارآن پاراگراف، ویراستاران بریتانیکا نامهٔ خشم‌آلودی به‌امضای ن. بورباکی دریافت کردند که درآن نسبت به‌ادعای باوس دربارهٔ عدم وجودشخصی به‌نام بورباکی اعتراض جدی شده بود. گیجی ویراستاران و دستپاچگی باوس وقتی بیشتر شدکه یکی ازاعضای گروه ریاضی دانشگاه شیکاگو نامه‌ای صادقانه ولی زیرکانه به‌آنها نوشت ودر آن تلویحاً، ونه‌مستقیماً، اشاره کردکه شخص بورباکی به‌واقع وجود دارد. به‌علاوه، نامه‌ای از منشی انجمن ریاضی امریکا (همان منشی‌ای که درخواست عضویت

1. American Mathematical Society
2. Andre Delachet
3. Ralph P. Boas
4. *Mathematical Reviews*

بورباکی رامعوق‌گذاشته‌بود) وضعیت را برای ویراستاران بریتانیکا روشن کرد.

اما بورباکی انتقام خود را گرفت. اوبا به کارگرفتن همهٔ اذناب و ایادی و منابع بین‌المللی خود این شایعه را ساخت که باوس وجود ندارد. به‌گفتهٔ بورباکی، باوس نام دسته‌جمعی‌مستعار گروهی ازریاضیدانهای جوان امریکایی است‌که باهمکاری هم به‌عنوان ویراستاران متمتیکال (ریویوز فعالیت می‌کنند.

هیچ «ریاضیات‌نوین»ای در تقابل با «ریاضیات کلاسیك» وجود ندارد، بلکه امروزه یك ریاضیات واحد داریم که بی‌هیچ شکاف‌عمیقی ادامه‌دهندهٔ ریاضیات گذشته است، و بالاتر از همه، می‌کوشند مسائل بزرگی را که نیاکانمان برای‌مابه ودیعت گذارده‌اند حل کنند. اگر می‌بینیم که ریاضیدانان برای نیل به‌این هدف ایده‌های مجرد جدیدی را توسعه داده‌اند بدان‌خاطر است که این ایده‌ها، با پرتو افکندن‌برقلب مسائل،وحذف جزئیات‌پردردسر، به ما امکان داده‌اند که در برخی زمینه‌ها گامهایی اساسی برداریم؛ زمینه‌هایی که تنها پنجاه‌سال پیش از این دست نیافتنی می‌نمود. با وجود این، ریاضیدانانی که به خاطر علاقه به تجرید، ایده‌های مجرد را توسعه می‌دهند، معمولاً ریاضیدانان چندان برجسته‌ای نیستند.

آن دیودونه

پال هالموس

آیا ریاضیات عناصری دارد؟●

ترجمهٔ فرشتهٔ ملك، دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه تهران

سرآغاز

بیش از ۲۴۰۰ سال پیش، از نظر امپدوکلس[1]، چهار عنصر شیمیایی آتش، آب، خاك، و هوا وجود داشت، و این عناصر را دو نیروی متضاد، یعنی همسازی و ناهمسازی، پیوسته به یکدیگر نزدیك یا از هم دور می‌کرد. یکصد سال بعد، ارسطو دو طرح رده‌بندی دوتایی را به جای این دو نیرو قرار داد: به جای همسازی-ناهمسازی، او رده‌بندی خشك-تر و داغ-سرد را جایگزین کرد. کیمیاگران سخت‌کوش قرون وسطی پی بردند که طبیعت پیچیده‌تر از اینهاست. آنان ماده را برحسب درخشندگی، سنگینی، احتراق‌پذیری، انحلال‌پذیری و . . . رده‌بندی کردند. در سدهٔ ۱۶۰۰، بویل تعریفی شبیه به تعریف اعداد اول ارائه داد ــ قریب به این مضمون که عنصر ماده‌ای است که می‌تواند مواد دیگر را بسازد، ولی خودش نمی‌تواند به مواد دیگر تجزیه شود ــ و بدینسان شیمی تجزیه از صحنه خارج شد. یکصد سال پس از او، لاوازیه (تا حدودی ملهم از بینش نیوتن، که وزن را مهمترین ویژگی ماده دانست) توفیق یافت تعریف بهبود یافته‌ای تنظیم کند که برای نخستین‌بار به جدولهای کمی عناصر شیمیایی، مشابه جدولهای امروزی، انجامید.

شیمیدان می‌خواهد بداند مواد از چه چیزهایی ترکیب یافته‌اند و این ترکیب چگونه انجام می‌پذیرد. فهرستی منظم از عناصر شیمیایی که در ابتدا به طور ناقص و ناشیانه ترتیب یافته بود، فی‌نفسه، پاسخی مطلوب به سؤالهای شیمیدانها نیست، ولی به

● Halmos, P.R. "Does mathematics have elements?", *The Mathematical Intelligencer*, **3**(1981)143-153.

1. Empedocles

سامان بخشیدن به معلومات و تأکید بر آن چیزهایی که ممکن است هنوز مجهول باشد کمك می‌کند.

بی‌گمان بسیاری از ریاضیدانها به این نکته توجه داشته‌اند که در ریاضیات نیز برخی ایده‌های اساسی وجود دارد که در زمینه‌های کاملا متفاوتی قد علم می‌کنند و چنان با یکدیگر ترکیب و بازترکیب می‌شوند که تا حدودی یادآور چگونگی تشکیل همهٔ مواد از عناصر است. معرفت شهودی ناخودآگاه نسبت به این "عناصر" احتمالا به آن نوع بینش تحقیقاتی‌ای کمك می‌کند (شاید هم آن را می‌سازد) که وجه تمایز ریاضیدانهای بزرگ و آدمهای معمولی است. اما جای این سؤال هست که این عناصر ــ عناصر ریاضیات ــ کدام‌اند؟

مثالها

در اینجا سه مثال از سه مفهوم اساسی می‌آوریم که شاید بتوان آنها را به عنوان عناصر ریاضی محسوب کرد: سریهای هندسی، ساختارهای خارج‌قسمت، و بردارهای ویژه. از نظر من اینها از سه تیرهٔ گوناگون، و محتملا به لحاظ عمق در سه سطح متفاوت‌اند؛ به عنوان نخستین گام به سوی رده‌بندی مورد نظرمان، می‌توان برای توصیف این سه، واژه‌های محاسباتی، قیاسی[1]، و مفهومی را به‌کار برد.

سریهای هندسی. در یك حلقهٔ یکدار که لزوماً جابه‌جایی نیست (مثل حلقهٔ ماتریسهای مربعی 3×3 با درایه‌های حقیقی)، هرگاه $ab-1$ وارونپذیر باشد، آنگاه $ba-1$ نیز وارونپذیر است. هر چند که این حکم موجه به نظر می‌آید، افراد معدودی می‌توانند نقداً اثباتی برای آن پیدا کنند؛ آشکارکننده‌ترین رهیافت، وابسته به موضوعی متفاوت و به ظاهر نامربوط است.

هر شاگردی می‌داند که

$$1-x^2=(1+x)(1-x)$$

و بعضیها حتی می‌دانند که

$$1-x^3=(1+x+x^2)(1-x)$$

تعمیم این عبارتها به شکل

$$1-x^{n+1}=(1+x+\ldots+x^n)(1-x)$$

نیز خیلی دور از ذهن نیست. دو طرف رابطهٔ اخیر را بر $1-x$ تقسیم می‌کنیم و n را

---

1. categorical

به بینهایت میل می‌دهیم؛ هرگاه $|x|<1$، x^{n+1} به صفر میل می‌کند و نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

این بحث سادهٔ کلاسیك با جبر مقدماتی آغاز می‌شود، اما پیکرهٔ موضوع را آنالیز تشکیل می‌دهد: اعداد، قدرمطلقها، نامساویها، و همگرایی نه تنها برای اثبات لازم‌اند، که برای با معنی بودن معادلهٔ آخر ضروری نیز هستند.

در نظریهٔ عمومی حلقه‌ها، صحبتی ازاعداد، قدرمطلقها، نامساویها، و حدود به میان نمی‌آید ـ این مفاهیم به‌کلی با حلقه‌ها بیگانه‌اند. با وجود این، یك عبارت کلاسیك پرمحتوا و مؤثر، یعنی "اصل پایداری شکل تابعی"، به دادمان می‌رسد و اثبات تحلیلی الهام‌بخشی را به زبان جبر محض به دست می‌دهد. ایدهٔ اصلی آن است که وانمود کنیم $1/(1-ba)$ را می‌توان به شکل یك سری هندسی بسط داد، بنابراین

$$(1-ba)^{-1}=1+ba+baba+bababa+\cdots$$

حال نتیجه می‌گیریم (در واقع این‌طور نیست، اما برسبیل مزاح وانمود می‌کنیم که چنین است) که

$$(1-ba)^{-1}=1+b(1+ab+abab+ababab+\cdots)a$$

و اگر یکبار دیگر وانمود کنیم که با سریهای هندسی سر و کار داریم، به دست خواهیم آورد

$$(1-ba)^{-1}=1+b(1-ab)^{-1}a$$

اینك دست از این وانمودکردنها برمی‌داریم و تحقیق می‌کنیم که رابطهٔ اخیر، برخلاف غیر مجاز بودن روش به دست آوردنش، درست است. یعنی اگر $c=(1-ab)^{-1}$ به‌طوری‌که $c(1-ab)=1$، آنگاه $(1-ab)c=1$ و اردون $1+bca$ خواهد بود. همین که حکم مسئله به این صورت بیان شود، اثبات آن به محاسبه‌ای مکانیکی (و کاملا قانونی) مبدل خواهد شد.

چرا این بسط نتیجه را به دست می‌دهد؟ جریان از چه قرار است؟ چرا به نظر می‌رسد که فرمول محاسبهٔ مجموع یك سری هندسی نامتناهی، حتی برای حلقهٔ مجردی که در آن همگرایی بی‌معنی است، به‌کارمی‌آید؟ این فرمول متضمن کدام حقیقت کلی است؟ من پاسخ این پرسشها را نمی‌دانم، لکن فهمیده‌ام که این فرمول در جاهای دیگری که قاعدتاً نباید به کار بیاید، به‌کار می‌آید، و من مرددم که آیا می‌توان آن را شایستهٔ نامیدن یکی از عناصر (محاسباتی) ریاضیات دانست یا خیر.

ساختارهای خارج‌قسمت. تفاضل متقارن دوزیرمجموعهٔ A و B ازمثلاصفحه، که گاهی آن را با $A\Delta B$ نشان می‌دهند، عبارت است از مجموعه نقاطی که یا در A هستند و یا در B، ولی نه درهر دو. سؤال: آیا عمل Δ شرکت‌پذیر است؟

پاسخ به‌این پرسش به‌یاری عملیات ساده امکان‌پذیر است، ولی ازآنجاکه این راه مستلزم سر وکار داشتن با مجموعه‌های متعدد، و در نظر گرفتن حالات زیادی است، روشی مطلوب و دلچسب نیست. راه بسیار بهتری برای حدس جواب، و در عین حال برای اثبات درستی آن حدس وجود دارد که مسئله را درکالبد یك نظریهٔ جامع از ساختارها می‌گنجاند.

اعداد صحیح را می‌توان با یکدیگر جمع و از یکدیگر تفریق کرد؛ به بیان بهتر اعداد صحیح نسبت به عمل جمع تشکیل گروهی آبلی می‌دهد. توابع با مقدار صحیح روی یك مجموعهٔ ناتهی دلخواه نیز به‌همین ترتیب می‌توانند با یکدیگر جمع و از یکدیگر تفریق شوند، و آنها نیز گروهی آبلی تشکیل می‌دهند. بین زیر مجموعه‌های یك مجموعه (و به‌ویژه زیر مجموعه‌های صفحه) و برخی توابع با مقدار صحیح خاص، تناظر مفید و مشهوری برقرار است: به هر مجموعهٔ A تابع χ_A، یعنی تابع مشخص آن، متناظر است که روی A مقدار ۱ و روی متمم A مقدار ۰ را به خود می‌گیرد. حال می‌پرسیم که وقتی دو مجموعه به کمك Δ با یکدیگر ترکیب می‌شوند، بر سر توابع مشخص متناظرشان چه می‌آید؟ بهترین راه برای یافتن پاسخ، محاسبهٔ مجموع توابع مشخص آنهاست:

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)=\begin{cases}0 & ;\ x\notin A,\ x\notin B \quad \text{هرگاه}\\ 1 & ;\ x\in A\Delta B \quad \text{هرگاه}\\ 2 & ;\ x\in A,\ x\in B \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

به‌بیان دیگر، بنابر آنکه x در $A\Delta B$ باشد یا نباشد، $\chi_A(x)+\chi_B(x)$ فرد یا زوج می‌شود. به بیانی باز هم متفاوت، $\chi_{A\Delta B}(x)$ همنهشت است با مجموع $\chi_A(x)$ و $\chi_B(x)$ به هنگ ۲.

همین جاست که جرقه در ذهن افروخته می‌شود و پیروزی کامل می‌گردد: ساختار تفاضل متقارن روی مجموعه‌ها مانند جمع توابع مشخص آنها به‌هنگ ۲ است. چون جمع به‌هنگ ۲ شرکت‌پذیر است، تفاضل متقارن نیز چنین است.

به‌پیانی تجریدی، در رستهٔ گروههای آبلی، این دو مبحث یکی هستند. مضمون این بحث آن است که گردایهٔ زیرمجموعه‌هایی از صفحه همراه با عمل Δ، (ایزومورف با) خارج‌قسمت گروه آبلی همهٔ توابع با مقدار صحیح روی صفحه به هنگ زیر گروه همهٔ توابع با مقدار صحیح زوج است. (آیا به‌نظر شما بدیهی نیست که صفحه در اینجا نقش خاصی بازی نمی‌کند؟ هر مجموعهٔ غیرتهی را می‌توان به‌همین ترتیب برای ساختن یك "گروه بولی" به‌کار گرفت.)

عنصر ریاضی‌ای که دراینجا جلب‌توجه می‌کند، شکل‌بندی ساختارهای خارج‌قسمت است. اعداد صحیح به‌هنگ اعداد زوج مثالی آشنا از این مفهوم است. بسیاری از دیگر جلوه‌های این مفهوم به نظریه‌های عمیقی می‌انجامند؛ یك جفت مثال تحلیلی مشهور در این باب عبارت است از مجموعه‌های اندازه‌پذیر به هنگ مجموعه‌های با اندازهٔ صفر، و عملگرهای روی فضای هیلبرت به‌هنگ عملگرهای فشرده.

مقادیر ویژه. روزی پنج ملوان در یك جزیرهٔ متروك یك کپه نارگیل جمع کردند و با یکدیگر قرار گذاشتند که صبح روز بعد آنها را بین خود تقسیم کنند. شب هنگام یکی از ملوانها پنهانی بیدار شد و خواست نارگیلها را به‌پنج قسمت مساوی تقسیم کند، اما فهمید که در این صورت یك نارگیل اضافه می‌آید. آن نارگیل اضافی را به‌میمونی داد و سهم خودرا از بین پنج قسمت مساوی برداشت و مخفی کرد و بقیه نارگیلها را مخلوط کرد و دوباره خوابید. بعد ملوان دوم بیدار شد و همان کار را، با همان نتیجه، تکرار کرد [یعنی یك نارگیل به‌میمونی داد و یك پنجم بقیه را برداشت و خوابید]، و ملوانهای سوم و چهارم و پنجم نیز مشابه همین کار را انجام دادند. صبح، تعداد نارگیلهای باقیمانده، بدون احتساب یکی، بر پنج قابل‌قسمت بود. کمترین تعداد نارگیلهایی که آن کپه نارگیل اولی می‌توانست داشته باشد چقدر است؟

هرکس می‌تواند پاسخ این معمای قدیمی را تنها به کمك کاغذ، مداد، و اندکی شکیبایی بیابد؛ برای این‌کار کافی است تنها "عقبگرد" کند. روش دیگر آن است که، به ازای x نارگیل در یك کپه، $S(x)$ یعنی تعداد نارگیلهایی را که یك ملوان در آن کپه باقی می‌گذارد امتحان کند. محاسبهٔ این تعداد بسیار ساده است: $S(x)=\frac{4}{5}(x-1)$. عدد صحیح x را یك "جواب" می‌نامیم هرگاه با شروع از x و شش‌بار اعمال S روی آن، حاصل عدد صحیح شود؛ به این مفهوم، مسئلهٔ ما عبارت است از یافتن کوچکترین جواب مثبت. چون $S(x)=\frac{4}{5}(x-1)$، داریم

$$S^6(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^6 x-\left(\left(\frac{4}{5}\right)^6+\left(\frac{4}{5}\right)^5+\ldots+\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر x و y،

$$S^6(x)-S^6(y)=\left(\frac{4}{5}\right)^6(x-y)$$

این رابطه ایجاب می‌کند که هرگاه x و y هر دو جواب مسئله باشند، آنگاه به هنگ 5^6 با یکدیگر همنهشت‌اند؛ به‌عکس، هرگاه x جوابی از مسئله، و y به هنگ 5^6 همنهشت باشد، آنگاه y نیز جواب خواهد بود.

ساده‌ترین "جواب" منصور برای مسئله، عبارت است از "بردار ویژه" وابسته به "معادلهٔ مقدار ویژهٔ" $S(x)=x$؛ این جواب -4 است و بنابراین کوچکترین جواب مثبت $15621=5^6-4$ خواهد بود. نتیجه: مفهوم پایایی[1] (نقطهٔ ثابت، مقدار ویژه، بردار ویژه) یکی از عناصر احتمالی ریاضیات است.

این سه مثال $(1-ba)^{-1}$، $AB-BA$، 5^6، مربوط به هرکس و هرکجا که باشند، بخشی از فرهنگ عمومی ریاضیات در حال حاضر به شمار می‌آیند. به هرحال، مثال مربوط به سریهای هندسی معمولاً به ن. ژاکوبسن[2] و دیگری که مربوط به مقدار ویژه است به پ. دیراك[3] منسوب است.

جبر جهانی

من سه مثال بالا را برگزیدم و انتخاب من نه تنها به‌خاطر این بود که این سه مثال امکان وجود سه نوع گوناگون از عناصر ریاضیات را نشان می‌دهند، بلکه به این دلیل هم بود که این سه مثال، حقیقتاً کیفیتی دارند که در عین برجستگی نادر است: در هر یك از این مثالها، عنصر موردنظر را می‌توان چنان در حل مسئله به‌کار گرفت که کارآمد و دست‌کم اندکی شگفت‌آور باشد. به هر نمونهٔ دیگری که می‌اندیشم، می‌بینم که از بداهت بیشتر و جاذبهٔ کمتری برخوردار است. معمولی‌ترین و بارزترین آنها در سطح جبرجهانی است. هدف از آنچه که متعاقباً می‌آید، توصیف (یا دست‌کم بیان) برخی از برجسته‌ترین این مقولات است، ابتدا به‌گونه‌ای قیاسی و سپس مفهومی.

ساختار. ریاضیدانها غالباً (همیشه؟) به مجموعه‌هایی به‌همراه ساختارهایی روی آنها برمی‌خورند. ساختار مزبور ممکن است از یك یا دو عمل داخلی (مانند آنچه در گروهها و میدانها رخ می‌دهد)، یا یك یادوتابع خارجی (نظیر آنچه در فضاهای متریك و یا خمینه‌های تحلیلی وجود دارد) ناشی شده باشد. این ساختار ممکن است با بیش از یك مجموعه سروکار داشته باشد (مانند اسکالرها که روی فضاهای برداری عمل می‌کنند و بردارها که به فضاهای برداری متعلق‌اند)، و می‌تواند برحسب رده‌هایی از زیر-مجموعه‌های یك مجموعه تعریف شده باشد (نظیر آنچه در فضاهای توپولوژیك و نظریهٔ اندازه می‌بینیم).

یکی از ملاحظات مقتضی (که یاور هر معلم فعال و هر پژوهشگر ریاضی خلاق است ولی ظاهراً هیچگاه به‌رسمیت شناخته نشده است) این است که اجزای تشکیل‌دهندهٔ ساختار را نمی‌توان، و نباید، به‌طور جداگانه دنبال کرد، بلکه آنها را باید تابع شرایط سازگاری ساختاری تلقی نمود. مثلاً یك حلقه تنها مجموعه‌ای نیست که بتوان اعمال جمع و ضرب را در آن انجام داد ــ این مطلب بسیار مهم است که این دو عمل به وسیلهٔ

1. invariance 2. N. Jacobson 3. P. Dirac

قانون توزیع‌پذیری به‌یکدیگر مربوط‌اند؛ یا مثلا یك گروه توپولوژیك صرفاً مجموعه‌ای نیست که دارای ساختاری توپولوژیك و نیز ساختاری ضربی باشد ــ مطلب بسیار مهم این است که این دو ساختار از طریق پیوستگی به‌هم مربوط می‌شوند.[1]

رسته[2]ها. در نظر ریاضیدانهای حرفه‌ای دیر زمانی است که هومومورفیسم بین گروهها، توابع پیوسته بین فضاهای توپولوژیك، و تبدیلات خطی بین فضاهای برداری، جملگی ماهیت به‌وضوح واحدی دارند، نقش مشابهی بازی می‌کنند، و از بسیاری جنبه‌ها رفتاری شبیه به‌هم دارند. مفهوم یك "ساختار" می‌تواند عنصری از ریاضیات باشد، و شاید به زبانی بهتر، می‌تواند سرسلسلهٔ رده‌بندی مناسبی برای برخی عناصر باشد. به موضوعی که ساختارهایی با درجات گوناگونی از عمومیت را مورد بحث قرار می‌دهد، نامهای مختلفی داده‌اند. این موضوع را می‌توان جبر جهانی نامید، و این نامی است که برخی آن را تأیید و بعضی رد کرده‌اند؛ عده‌ای از آنها که تحقیر آن را پیشهٔ خود کرده‌اند، کمی به رنگ و لعابش افزوده و آن را نظریهٔ رسته‌ها نامیده‌اند. سپس، شکل مجرد نگاشتهای موردنظر، در هر ساختاری، (همو)مورفیسم نامیده شد، و با الهام از مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ای چون انژکسیون [نگاشت یك به یك]، سورژکسیون [نگاشت پوشا]، و بیژکسیون [نگاشت یك به یك و پوشا]، تعداد زیادی از اصطلاحات مأخوذ از فرهنگ یونانی مانند مونو ــ، اپی ــ، ایزو ــ، و نیز آندو ــ، و اتو ــ مورفیسم، به کار گرفته شد. هر یك از مفاهیمی که در اینجا نام برده شد، می‌تواند عنصری از ریاضیات به شمار آید.

ایزومورفیسم. تشخیص این مطلب که دو ساختار "از جهاتی یکی ــ ایزومورف ــ هستند"، بی‌گمان‌نامزد معقولی برای یك عنصر است (جواب مقدار ویژه برای مسئلهٔ تارگیلها را به‌خاطر بیاورید). در پس این موضوع، مفهومی کلی نهفته است؛ یك راه مهم برای توصیف آن، تجلی بخشیدن به عدد ۱، با مفهوم یکتایی است. (ساختارهای تك مولود[3]، مانند گروههای دوری، نیز ملهم از یك چنین ایده‌هایی است.)

این بینش نادر و همواره هیجان‌انگیز که چیزی "حقیقتاً" با چیز دیگری یکی است ــ مثل این مطلب که نظریهٔ احتمالات در واقع همان نظریهٔ اندازه است، یا اینکه سریهای فوریه در حقیقت بخشی از مبحث گروههای آبلی موضعاً فشرده است ــ جملگی به‌عنصر یگانگی تعلق دارد.

[اجازه می‌خواهم در این پاره ماجرایی از زندگی خودم نقل کنم. هنگامی که مشغول مطالعهٔ اثبات داوید برگ[4] براین قضیه بودم که هرعملگر نرمال بریك فضای هیلبرت

۱. یعنی گروه توپولوژیك، علاوه براینکه فضایی توپولوژیك و نیز یك گروه است، دارای این خاصیت اساسی است که تابع $(x, y) \to x^{-1}y$ در آن نسبت به توپولوژی حاصلضربی پیوسته است.م.

2. category 3. single-generated 4. David Berg

با بعد $\aleph_0$، مجموع یك عملگر قطری و یك عملگر فشرده است، به‌خاطرم رسید که پیش از این چیزی شبیه به این را دیده‌ام، و همین زنجیره از ایده‌ها، در جایی دیگر، و در اثباتی دیگر به کار گرفته شده‌اند. این بینش، هر چندکه بسیار کند به دست آمد، خیلی خوب ثمر داد. آنچه‌که سرانجام به‌خاطر آوردم این بود که "برهانی دیگر، در جایی دیگر" این قضیهٔ کلاسیك را ثابت می‌کرد که هر فضای متریك فشرده تصویر مجموعهٔ کانتور تحت تابعی پیوسته است. به محض دریافت این موضوع، قضیهٔ برگ را کاملا فهمیدم، و ضمناً متقاعد شدم که روش درست بررسی آن، استفاده از قضیهٔ در باب مجموعهٔ کانتور است نه پیروی از روش اثبات آن.]

خارج قسمتها. ایزومورفیسم مختملا عنصری ساختاری است که در اغلب مسائل قد علم می‌کند، و بیشترین وضوح را دارد؛ لکن مفهومی که من فکر می‌کنم از همه عمیقتر ولی دارای وضوح کمتری است، اپی‌مورفیسم است. آن‌بخش از زبان نظریهٔ مجموعه‌ای که در آن سورژکسیونها (که معمولا با اپی‌مورفیسمها مترادف‌اند) بیشتر از هر جای دیگر به‌کار می‌روند، از آن ساختارهای خارج‌قسمت (یعنی همان مفهومی که مسئلهٔ شرکت‌پذیری عمل تفاضل متقارن را حل‌کرد) است. سر وکلهٔ ساختارهای خارج‌قسمت در همه جای ریاضیات پیدا می‌شود و این ساختارها نقشی اساسی نیز ایفا می‌کنند: از جمله گروههای خارج‌قسمت در جبر، فضاهای خارج‌قسمت در توپولوژی (که مثلا ازخم کردن بازه‌های بسته، دایره می‌سازد)، حساب هنگی[1] در نظریهٔ اعداد، و فضاهای L^p در آنالیز و جبرکالکین[2] در نظریهٔ عملگرها.

اندازه[3]

ایزومورفیسم، به‌عنوان یك عنصر، در تقابل با اپی‌مورفیسم قرار دارد؛ تفاوت آنها دراین است که یکی تشخیص می‌دهد دو چیز یکی هستند، و دیگری با یکی پنداشتن آنها عملا آن دورا یکی می‌کند. ازدیدگاهی متفاوت، ایزومورفیسم را می‌توان تأکیدبر یکی‌بودن، ویا اول‌بودن دانست، وازچنین‌دیدگاهی نقطهٔ مقابل مناسب، دوتا بودن، چند تا بودن، و یا بینهایت بودن است. این واژه‌ها به چند عنصر قیاسی کمتر جهانی (و بنابراین مهمتر؟) اشاره می‌کنند.

عوامل اول. عوامل اول در بخشهای بسیاری از ریاضیات پیش می‌آیند. اغلب ما، اولین‌بار با این مفهوم در نظریهٔ اعداد مواجه شده‌ایم، بلافاصله پس از آن این مفهوم را در جبر (مثلا در چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر) دیده‌ایم، و به‌چیزهایی شبیه به‌آنها در تقریباً همه‌جا برخورده‌ایم، مؤلفه‌های همبند یك فضای توپولوژیك را می‌توان همچون

1. modular arithmetic 2. Calkin 3. Size

عناصر اول آن در نظر گرفت؛ جستجو برای یافتن "عوامل اول" در بین توابع داخلی بیورلینگ[1] نقش مهمی در نظریهٔ عملگرها بازی می‌کند؛ و بالاخره تعیین همهٔ عناصر اول در بین گروههای متناهی (یعنی، تعیین گروههای ساده) کار بسیار سنگین و حجیمی بود که سالیانی دراز بسیاری از جبردانها را به‌خود مشغول کرده بود.

دوگانی. آشناترین متضاد "یك" عبارت است از "دو"، در نتیجهٔ دو تا بودن یا دوگانی را محتملا می‌توان عنصری ریاضی به شمار آورد. واژهٔ "دوگانی" در هندسهٔ تصویری (نقاط و خطوط در صفحه)، نظریهٔ رسته‌ها، منطق (جبرهای بولی و فضاهای هاوسدورف[2] فشردهٔ کلا ناهمبند رانیز به‌یاد آورید)، توپولوژی (آلکساندر[3])، آنالیز همساز (پنتریاگین[4]، تاناکا[5])، و نظریهٔ فضاهای باناخ (انعکاس‌پذیری را به‌یاد آورید) به‌کار می‌رود، و در حالی که در هر یك از این مباحث معنای متفاوتی دارد، عنصر نهفته در آنها آشکارا یکسان است. تجلی دیگری از مفهوم دوگانی که با موارد بالا متفاوت ولی مرتبط است، در نظریهٔ برگردانها[6] در گروهها و جبرها، و نیز بررسی مرتبه، هم‌ارزی، و دیگر انواع روابط دوتایی پیش می‌آید.

[جنبهٔ دیگری که در آن مفهوم دوتا بودن وارد صحنهٔ ریاضیات می‌شود، دو شاخگی بسیاری از مثالها و قضایای مشهور است. بهترین قضیه‌ها معمولا آنهایی نیستند که صرفاً حکم مطلوبی را از مفروضاتی قوی نتیجه می‌گیرند، بلکه ظاهراً آنهایی هستند که می‌گویند هنگامی که فرضهای مسئله برقرار نباشند چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت. به‌عنوان مثال، این قضیه که $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{1+\varepsilon})$ برای $\varepsilon>0$ همگراست، هنگامی کامل می‌شود که بدانیم سری برای $\varepsilon=0$ واگراست؛ شگفتی تابع گاما در این است که در عین‌حال که تقریباً همه‌جا ثابت است، از ۰ تا ۱ صعود می‌کند.]

اعداد ۱ و ۲ به مناسبت نقشی که در مفاهیم اول بودن و دوگانی دارند، ظاهراً از همهٔ دیگر اعداد صحیح مثبت متمایزند. فرمهای دو خطی را می‌توان تعمیم داد و به فرمهای سه خطی رسید. و این تعمیم از بسیاری جهات کاملا موفقیت‌آمیز است؛ روابط سه‌تایی نیز همچون روابط دوتایی وجود دارند (هر چند که هنوز هیچ نظریهٔ عمومی مطلوبی برای آنها یافت نشده است)؛ و بالاخره در یك گروه می‌توان عناصر مرتبهٔ سه را همچون عناصر مرتبهٔ دو بررسی کرد؛ اینها همه درست است، اما هر یك از این تعمیمها بنا به دلایلی غیرطبیعی و تصنعی به نظر می‌رسد، همچون تعمیمی که هیچ چیز جز یك تعمیم صرف نیست.

اصل لانه کبوتری. عنصر بعدی ریاضیات که مایلم توجه خواننده را به‌آن جلب کنم، مفهوم متناهی بودن است. این مفهوم معمولا در قالب اصل مشهور لانه کبوتری وارد استدلالهای

1. Beurling 2. Hausdorff 3. Alexander
4. Pontrjagin 5. Tanaka 6. involutions

ریاضی می‌شود: هرگاه ده نامه را در نه صندوق پستی جای دهیم، دست کم یکی از صندوقها بیش از یك نامه در برخواهد داشت.

اصل لانه‌کبوتری جوهر و نمونهٔ کامل "ریاضیات متناهی" است؛ این اصل در قلب تعریف دددکیند[1] از مفهوم متناهی بودن، و به‌ویژه، در قلب گرایشی جدید به‌نام ترکیبیات جای دارد. ظریفترین تعمیم آن را می‌توان قضایای رمزی[2] دانست، که برخی از آنها پرتو شگفت‌انگیزی بر نظریهٔ گزاره‌های درست اثبات‌ناپذیر افکنده‌اند.

مفهوم متناهی بودن بر بسیاری بخشهای نامتناهی ریاضیات تأثیراتی داشته است ــ نظریه‌ای قابل دفاع هست که می‌گوید همهٔ ریاضیات، به‌تعبیری، متناهی است. مثلافشردگی، که مفهومی است که در فضاهای توپولوژیك (معمولا نامتناهی) به آن برمی‌خوریم، از دیدگاه بسیاری از ریاضیدانها چیزی جز تعمیم هوشمندانهٔ مفهوم متناهی بودن نیست. [این را هم بگویم که توپولوژی عمومی همواره در نظر من تعمیم نامتناهی دانش ترکیبیات است؛ شاید هم پا را تا جایی فراتر بگذارم که بگویم توپولوژی عمومی همان ترکیبیات نامتناهی است. به‌عنوان گواهی عجیب بر این مدعای خود، نورمن استینراد[3] را مثال می‌آورم: او از هر دوی این مباحث به‌یك اندازه بیزار بود و آنها را تحقیر می‌کرد، چرا که ظاهراً برای هر دو دلایل مشابهی داشت.]

به‌عنوان مثال دیگری بر دخالت مفهوم متناهی بودن در بینهایت، عقیدهٔ خودم را می‌گویم (این تنها عقیدهٔ من است یا نه؟). نظر من این است که هرگاه ما همهٔ مطالب را درباب نظریهٔ عملگرها در فضاهای با بعد متناهی می‌دانستیم، آنگاه می‌توانستیم به همهٔ پرسشهایی که دربارهٔ عملگرها، حتی آنهایی که (نظیر مسئلهٔ زیر فضای پایا) در حالت بعد نامتناهی مطرح‌اند، پاسخ دهیم. البته مقصود من اندیشهٔ مزخرفی چون تناظر یك به یك نیست: حل مسئلهٔ زیر فضای پایا در فضاهای با بعد متناهی، یقیناً مسئله را در حالت کلی حل نمی‌کند. آنچه که منظور من است، یا باید منظورم باشد، این است که هر مسئلهٔ مربوط به عملگرها را می‌توان از طریق یافتن، تنظیم کردن، و پاسخ دادن به سؤالاتی صحیح، مناسب، و واقعاً هسته‌ای درحالت بعد متناهی، که به آن مسئله مربوط‌اند، حل کرد. به‌عنوان نمونه، حل مسئلهٔ پایه برای فضاهای باناخ توسط انفلو[4] نشان داد که مشکل اصلی در واقع در درك ساختار مثالهای با بعد متناهی بوده است.

بینهایت. متناهی بودن عنصری ریاضی است، و بینهایت نیز چنین است. منظور من از "بینهایت" چیزی سطحی همچون "نقطه در بینهایت" در هندسهٔ تصویری یا روی کرهٔ ریمان نیست؛ چرا که در این موارد هیچ بینهایتی وجود ندارد. دقیقاً به‌همان سبکی که اصل لانه کبوتری نمونهٔ بارز ریاضیات متناهی است، برای ریاضیات نامتناهی استقرا نمونه‌ای کامل به‌شمار می‌آید. می‌گویم "استقرا" زیرا این تك‌واژه‌ای است که راه‌ورسم را به مامی‌نمایاند. با وجود این، آنچه که واقعاً مقصود من است همانا ساده‌ترین قضیه در باب اعداد اصلی

1. Dedekind 2. Ramsey
3. Norman Steenrod 4. Enflo

نامتناهی، و در عین حال یکی از عمیقترین قضایای ریاضیات است، یعنی این گزاره که $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. این قضیه است که حقیقتاً در قلب استقرای ریاضی جای دارد و اساس تعریف ددکیند از بینهایت است. سروکلهٔ این حکم در آنالیز (از جمله نظریهٔ ارگودیک[1]، والبته نظریهٔ عملگرها)، در جبر (مثلا در رده‌بندی گروههای آبلی نامتناهی)، در توپولوژی، و در منطق پیدا می‌شود ــ و دامنهٔ نفوذ آن هر چیزی را که بتوان به‌طرز مناسبی نامتناهی نامید، در بر می‌گیرد.

[در اینجا جملهٔ زیرکانه‌ای را که درکنار عبارت "همهٔ ریاضیات، به‌تعبیری، متناهی است" مطرح شده‌است، بیان می‌کنیم: به تعبیری دیگر، همهٔ ریاضیات نامتناهی است. البته این عبارت به‌دیدگاه کلاسیک نزدیکتر است. حتی حکم ریاضی بی‌مزه‌ای چون $۲۹+۵۴=۸۳$ یك قضیهٔ کلی است که تعداد شمارش‌ناپذیری حالت خاص دارد (آیا این حالات را می‌توان کاربردهای آن دانست؟). هیچ تناقضی میان دوگزارهٔ بالا وجود ندارد: هر یك از این گزاره‌ها برای به‌کرسی نشاندن حرف خود، چیزهایی را به‌سبکی شسته و رفته و تا حدودی خیال‌پردازانه از قلم می‌اندازد، و با افزودن مقداری کافی زوائد ملالتقلی گرایانه، هر دوی اینها مبدل به‌گزاره‌ای صحیح اما ملال‌آور می‌شود.]

توجه به این‌نکته ارزشمند است که هرچند در زبان محاوره‌ای "نامتناهی" واژه‌ای منفی (متضاد متناهی) است که از قرار معلوم پس از معرفی یك واژهٔ مثبت، به‌صورت متضاد آن تعریف می‌شود، در ریاضیات "نامتناهی" مفهومی مستقل است که برحسب عبارات مثبت تعریف می‌شود (وجود)، و برعکس، مفهوم متناهی مقید و منفی است (عدم).

ددکیند مجموعهٔ نامتناهی را مجموعه‌ای تعریف کرده است که بتواند در تناظری یك به یك با زیرمجموعه‌ای سره از خود قرار بگیرد، و مجموعه‌ای را متناهی نامیده است که نامتناهی نباشد. هرگاه همین ایده را به‌مبحث نظریهٔ رسته‌ها منتقل کنیم، می‌توانیم تعمیمهایی برای مفاهیم صرفاً نظریهٔ مجموعه‌ای بینهایت ومتناهی بودن ارائه دهیم، تعمیمهایی که بررسی آنها ممکن است بتواند پرتوی برعناصر موردنظر بیفکند. منظور خود را می‌توانم با این تعاریف در رستهٔ گروهها تشریح کنم: یك گروه نامتناهی‌گون[2] است هرگاه با زیرگروه سره‌ای از خود ایزومورف باشد، و در غیر این‌صورت متناهی گون[3] نام دارد. مثال: گروه نامتناهی همهٔ ریشه‌های واحد که نمای آنها توانی از ۲ باشد، متناهی‌گون است. تعریفهایی مشابه در رسته‌های دیگر (همچون فضاهای متریك)، مثالهای الهام‌بخش دیگری از عناصر متناهی‌گون (همچون فضاهای متریك فشرده) به دست خواهد داد.

ترکیب[4]

یکی از دشواریهایی که در راه تلاش برای یافتن عناصر ریاضیات پیش می‌آید، مسئلهٔ

1. ergodic
2. infinitary
3. finitary
4. composition

اصطلاحات است. مثلا "بینهایت" نامی محتملا مناسب، و "سری هندسی" نامناسب است. برای مطالبی که در زیر می‌خواهم مطرح کنم نامی درست و حسابی به ذهنم نمی‌رسد؛ و تا وقتی که اسم بهتری برایشان پیدا نکنم، آنها را تحت عنوان ترکیب دسته‌بندی خواهم کرد. این موضوعها، که گروه دیگری از پیشنهادهای من برای عناصر ریاضیات را تشکیل می‌دهند، و ماهیتی مفهومی دارند، از این قرارند.

تکوار. ریشهٔ این مطلب از این مشاهدهٔ بدیهی آغاز می‌شود که نگاشتها را می‌توان با یکدیگر ترکیب کرد. به‌عبارت دیگر، هرگاه دو نوع عمل دراختیار ما باشد (وهرگاه دامنه و برد آن دو به‌گونهٔ مناسبی باشد)، می‌توانیم بسی‌هیچ محدودیتی آن دو را یکی پس از دیگری بر یکدیگر اثر دهیم، و به‌ویژه، می‌توانیم یکی از آن‌دو را پشت‌سرهم بر خودش اعمال کنیم. در حقیقت، ریشهٔ قضیهٔ ارشمیدس همین مفهوم است (این قضیه می‌گوید که اگر K و ε اعداد مثبتی باشند، آنگاه یکی از مضارب صحیح مثبت ε از K بزرگتر خواهد بود، یا به‌زبان خودمانی، قطره قطره جمع گردد وانگهی دریا شود). این مفهوم در ریشه‌های ایدهٔ انتگرال‌گیری نیز جای دارد (به این تعبیر که مجموع تعداد زیادی "بینهایت کوچك" می‌تواند بزرگ باشد)، و حتی درریشه‌های انتگرال‌های بسیار تعمیم‌یافته‌ای مانند آنچه در نظریهٔ طیفی مطرح می‌شود، خود را ظاهر می‌کند.

روش تقریبهای پیاپی، بخش دیگری از آنالیز است که در آن مفهوم تکرار نقشی حساس ایفا می‌کند. این "روش" گاهی قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ نیز خوانده می‌شود. توجه کنیم که این‌عنصر، ارتباطی با عنصرپایایی نیز دارد: خواه نقاط ثابت را ازاین‌روش تکرار پیدا کنیم یا از راهی دیگر، جستجو و یافتن آنها کاری درخور توجه است.

برش متقاطع[1]. ترکیب، حتی اگر بینهایت بار هم انجام نگیرد، باز عنصر ریاضی مهمی است؛ یکی از دلایل این امر ارتباط آن با عنصری است که می‌توان تقاطع‌پذیری[2] نامش داد. مشهورترین مثال از آنچه که می‌خواهم بیان کنم، اصل موضوع انتخاب است. یکی ازفرمول‌بندیهای ممکن این‌اصل‌چنین است: به‌ازای هرمجموعهٔ مجزا ازمجموعه‌ها، مجموعه‌ای وجود دارد که از هر یك از آنها دقیقا یك عضو را شامل است، یا به عبارت دیگر، هر افراز [از یك مجموعه] دارای مجموعه‌ای قاطع[3] است. (مجزا بودن این مجموعه‌ها همواره جزءلاینفکی از این اصل نیست، لکن می‌توان آن را به‌عنوان یکی از شرایط قرار داد؛ بیان این اصل به همراه شرط مجزا بودن، با بیان مناسب آن بدون این شرط، معادل است.) با اندکی تأمل پی‌می‌بریم که اصل بالا را می‌توان به‌این صورت نیز بیان‌کرد: هرگاه f تابعی از مجموعهٔ Y به روی مجموعهٔ X باشد، تابعی چون g از X در Y وجود دارد به‌طوری‌که برای هر x در X، $f(g(x))=x$. (در واقع، اگر Y اجتماع گردایهٔ مجزای مجموعه‌های Y_x، x در X، باشد، به‌طوری که برای هر y در

1. cross-section
2. transversality
3. transversal set

$f(y)=x$، Y_x، آنگاه g تابع انتخابی است که به هر عضو x از X یك عضو y از Y_x را نسبت می‌دهد.) به عبارت دیگر، هر تابع (یا به بیان بهتر، هر تابع پوشا) یك وارون راست دارد، یا به زبانی متفاوت اما متداول، هر تابع دارای برشی متقاطع است.

عنصر "برش متقاطع" در بسیاری از ترکیبات ریاضی نقش دارد، که این نقش البته وابسته به شرایطی اضافی است که آن ساختار به‌طور طبیعی تحمیل می‌کند. (برش متقاطع صرفاً تابع نیست، بلکه بنابروضعیت ساختار موردنظر باید پیوسته، مشتق‌پذیر، و یا به‌طور جبری خوش رفتار باشد.) به عنوان مثال، برش متقاطع در هندسهٔ دیفرانسیل (همبندیها[1])، در نظریهٔ ترکیبیات (قضیهٔ تزویج[2])، در جبر (ضربهای تنمه مستقیم)، در آنالیز (مانند بررسی استون[3] و فون نویمان[4] از برش متقاطع نگاشتهایی که به‌هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر، ردهٔ هم‌ارزی آن را به‌هنگ مجموعه‌های با اندازهٔ صفر نسبت می‌دهند)، و در توپولوژی (کدام نگاشتهای پیوسته برش متقاطع پیوسته‌دارند؟ آیا همهٔ آنها برش متقاطع برل[5] دارند؟) قدعلم می‌کند.

تابع‌نمایی. اندیشهٔ ترکیب به‌طور طبیعی به تکرار وازآنجا به‌نما منجر می‌شود، و این مطلب عنصر دیگری راکه با این زنجیره از ایده‌ها مرتبط است به ما الهام می‌کند، و آن تابع‌نمایی است. همهٔ ما تقریباً از همان آغاز در حساب دیفرانسیل و انتگرال با e^x آشنا می‌شویم و از ویژگیهای آن در میدان مختلط (مانند تناوبش) به‌شگفت می‌آییم. یك چنین مفهومی که از محاسبهٔ نرخ بهره گرفته تا جبرهای باناخ و نظریهٔ لی[6] دارای نقشی بنیادی است، یقیناً شایستهٔ آن است که به‌عنوان یکی از عناصر ریاضیات در نظر گرفته شود.

قیاس

الگوهایی درریاضیات وجود دارندکه نسبت به‌آن چیزهایی‌که نظریهٔ رسته‌ها خاطرنشان می‌کند (مانند مورفیسمها) عمیقتر به‌نظر می‌رسند، اما مبهمترند، کمتر شناخته شده‌اند، و (تاکنون) نسبت به‌برخی عناصر کلاسیك (مانند سریهای هندسی) کمتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از بین اینها، جابه‌جاپذیری، تقارن، و پیوستگی شایستهٔ نام بردن‌اند.

جابه‌جاپذیری. آیا مفهوم جابه‌جاپذیری یك عنصراست؟ شاید. بی‌گمان این بینش که آنچه‌که فضاهای کلاسیك حد دوگانه ادعا می‌کنند از جهاتی شبیه به‌رابطهٔ بین دوانتقال بریك فضای اقلیدسی است، و اینکه هر دوی اینها رفتار مسیرها را در بعضی نمودارهای پیکانی[7] به‌یاد می‌آورند، چنین بینشی، ارزشمند است، و محتملا جنبهٔ مشترك همهٔ اینها، یعنی مفهوم جابه‌جاپذیری، عنصری از ریاضیات است.

1. connections 2. marriage 3. Stone
4. Von Neumann 5. Borel 6. Lie 7. arrow diagram

تقارن. واژهٔ "تقارن" معمولا تعریف نمی‌شود؛ ظاهراً ریاضیدانها بیشتر رغبت دارندکه این واژه را به‌طور غیررسمی به‌کار ببرند، چنانکه واژه‌هایی مانند "آنالیز" را این‌طور به‌کار می‌برند. "اثبات به کمك تقارن" یکی از عبارات رایجی است که این واژه در آن به‌کار می‌رود؛ اما آیا عنصری در پس این عبارت نهفته نیست؟

همگان براین توافق دارندکه نظریهٔ گروهها زمینه‌ای است که تقارن را می‌توان به‌آن نسبت داد، و در آنجا نیز ممکن است عنصری نهفته باشد. منظور من از گروه صرفاً مفهوم مصطلح وجاافتادهٔ آن نیست، بلکه گرایش جدیدتری نیزهست‌که می‌خواهد از هر چیز یك گروه بسازد. مقوله‌هایی همچون گروه‌گروتندیك[1] و نظریهٔ K منظورمن رادوشن می‌کنند.

پیوستگی. پیوستگی واژهٔ دیگری‌است که ظاهراً می‌خواهد حتی در جاهایی که مجاز نیست، و حتی در موقعیتهایی‌که هیچ توپولوژی‌ای وجود ندارد (یا دست کم توپولوژی آشکاری نیست)، دلالت بروجود چیزی کند. به‌نظر می‌رسدکه ریاضیدانها مستعد این طرز فکرندکه همه‌چیز پیوسته است. این گرایش در نظریهٔ کودایرا-اسپنسر[2] در باب دگردیسی خمینه‌ها، قضیهٔ درون‌یابی ریز-تورین[3]، ودر پژوهشهای کادیسن-کمتلر[4] در باب آشفتگی جبرهای فون نویمان، مشهود است. (غیردقیقترین و قدیمیترین جلوهٔ این‌پدیده، همان اصل پایداری شکل تابعی است‌که پیش از این بدان اشاره‌کردیم.)

همهٔ این پدیده‌ها، یعنی نامزدهای عنصری جابه‌جاپذیری، تقارن، وپیوستگی، نمونه‌هایی از آن چیزی هستند که می‌توان آن را تعمیم نامشروع و یا نتیجه‌گیری جهشی از طریق قیاس نامید. لکن جایگاه منطقی آنها هر چقدر مشکوك باشد، و هر چقدر غیردقیق باشند، می‌توانند حربه‌های مؤثری در زرادخانهٔ ریاضیدان برای شکار حقیقت باشند: پیش از آنکه تیرهای ترکش خود را رهاکنید، مطمئن شویدکه این پرسشها را از خود کرده‌اید که "آیافلان چیز ها جابه‌جا می‌شوند؟"، "آیا فلان‌چیز وارون‌پذیر است؟"، "آیا فلان چیز به‌حد درست خود همگراست؟".

سرانجام

آیا آنچه‌که تاکنون گفتم نوعی یلهوسی ریاضی‌مآبانه بوده است، یا واقعاً ممکن است‌که اصول رهگشایی در ریاضیات وجود داشته باشدکه باید سعی‌کرد آنها را بیشتر شناخت؟ من گمان می‌برم‌که چنین اصولی وجود دارد، ولی آنها را نمی‌شناسم؛ من وجود آنها را باور دارم. و به همین دلیل است‌که این چنین گمان می‌برم

من خود را همچون طلبهٔ تازه‌کاری‌که مرید امیدوکلس است احساس می‌کنم که "عناصر" را، نه با تحلیلهای دقیق و مشاهدات مهار شده، بلکه تقریباً به‌تصادف و تنها با

1. Grothendieck 2. Kodaira-Spencer
3. Riesz-Thorin 4. Kadison-Kastler

تکیه بر تجربهٔ شخصی و شهود، انتخاب می‌کند. عناصری که من پیشنهاد کردم، از قیاس مبهم (هر چیز پیوسته است) و قواعد معقول (اجزای یك ساختار باید سازگار باشند) و جبر جهانی (جستجو برای کمیتهای پایا، تشکیل ساختارهای خارج‌قسمت)، تا حیله‌های محاسباتی (جمع‌بندی سریهای هندسی) را دربرمی‌گیرند. نخستین گامهای لرزان و آمیخته به‌تردید خود من الهام‌یافته ازحفهٔ مربوط به سریهای هندسی، و به‌طور کلی، متقاعد شدن به‌این نکته بود که محاسبات غیرقانونی اویلر با سریهای واگرا بی‌ارزش نیستند: او را نبوغش هدایت می‌کرد، یعنی بصیرتی که هرچند مدون نشده بود، به‌گونهٔ فوق‌العاده دقیقی برعناصر اساسی حقیقت تمرکز داشت. اندیشه‌های بعدی من به نتایجی منجر شد که در مقایسه با زمین خشك اویلر، به‌هوایی صاف و پاك می‌مانست، اما من همچنان احساس می‌کنم که نامزدهای واقعی و ملموس (همچون تابع‌نمایی، اصل لانه‌کبوتری) بیشتر از نامزدهای مجرد و رؤیایی (مثل دوگانی و بینهایت) شایستهٔ عنصر بودن‌اند.

پاتریك بیلینگزلی

اعداد اول و حرکت براونی●

ترجمهٔ حسن حقیقی

هرعدد صحیح به‌دلیل اینکه به‌حاصل‌ضربی از اعداد اول تجزیه می‌شود، نوعی مسیر حرکت براونی را پدید می‌آورد. و به‌این ترتیب می‌توان از ریاضیات حرکت براونی برای استنتاج قضایایی دربارهٔ تجزیهٔ اعداد صحیح به‌عوامل اول بهره گرفت. علی‌رغم این تصورقوی نتیجه‌ای که به‌زبان حساب احتمالات بیان می‌شود کمتر می‌تواند‌درجای دیگر درست باشد، من این قضایا را به‌زبان حساب احتمالات بیان می کنم وحتی برای آنها اثباتی احتمالاتی ارائه می‌دهم. در واقع اثباتها کمتر شکل واقعی خواهند داشت، زیرا در بخش اعظم این مقاله تنهانتایج کلی را بامثالها وحالات خاص بیان خواهم کرد. برای توجیه این کار به‌گفته صائب ویلیام فلر استناد می کنم که همواره عادت داشت به‌ما دانشجویانش بگوید که بهترین بیان در ریاضیات، مانند هنر، آثار ادبی و تمام چیزهای دیگر، بیان ایدهٔ کلی‌ای است که جوهرهٔ واقعی شیء را تشکیل می‌دهد. در بخش اول‌مدل ریاضی حرکت یك ذره‌درحرکت براونی تعریف وبرخی‌خواص آن توصیف شده است. بخش‌دوم که زمینهٔ ارتباط حرکت‌براونی واعداداول را فراهم‌می‌آورد، به‌قدم‌زدن تصادفی اختصاص دارد. شخصی سکه‌ای را به طور پیاپی پرتاب می کند و متوالیاً در امتداد یك محور حرکت می کند، حرکتی به اندازهٔ یك واحد در جهت مثبت یا منفی. برحسب آنکه سکه به‌روی شیر بخواهد یا خط. در اینجا نشان داده می‌شود که چگونه قدم زدن تصادفی با فاصله، تقریباً شبیه حرکت براونی است، و بدین ترتیب چگونه مدل حرکت براونی به‌قضایای حدی متناظر به‌قدم زدن تصادفی منجر می‌شود. بخش سوم به‌حرکت‌تصادفی‌ای که یك عدد به‌طور تصادفی انتخاب شده، از طریق تجزیه‌اش به عوامل اول، آن‌را تولید

● Billingsley Patrick, "Prime numbers and Brownian motion," *Amer. Math. Monthly*, December 1973, 1099-1115.

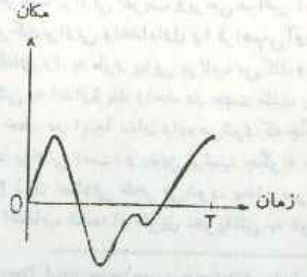
می‌کند، می‌پردازد: شخصی بخش‌پذیری عدد انتخاب شده را براعداد اول ۲، ۳، ۵ و ... به طور پیاپی آزمایش می‌کند و برحسب اینکه این عدد در تجزیه به‌عوامل اول عدد مزبور ظاهر می‌شود یا نه یك واحد در جهت مثبت یا منفی حرکت می‌کند. براساس این حقیقت مسلم حساب که اعداد اول متمایز، عددی را عاد می‌کنند اگر و تنها اگر حاصل‌ضربشان آن عدد را عاد کند، این قدم برداشتن تصادفی متناظر به تجزیه به عوامل اول، بسیاری از خواص قدم برداشتن متناظر به پرتاب معمولی سکه را داراست. به‌خصوص این قدم برداشتن می‌تواند به‌وسیلهٔ حرکت براونی تقریب زده شود و نشان داده می‌شود که این کار، چگونه به‌بیان فضایای حدی متناظر به‌تجزیه به‌عوامل اول منجر می‌شود.

در این مقاله علاوه بر مقدمات آنالیز حقیقی، از مفاهیم آماری چون میانگین، واریانس، نابستگی و توزیع گاوسی نیز بهره می‌گیریم.

۱. حرکت براونی

ذره‌ای معلق در یك سیال را در نظر بگیرید که مولکولهای سیال در حرکت گرمایی آن را بمباران می‌کنند. این ذره حرکتی نامنظم وظاهراً تصادفی را نشان می‌دهد. این حرکت را نخستین بار رابرت براون دانشمند زیست شناس، در سال ۱۸۲۸ توصیف کرد. چون ما تنها بایك مؤلفهٔ این حرکت سروکارخواهیم داشت، فرض کنید این مؤلفه روی محوری قائم تصویر شده باشد و در هر لحظه t از زمان، ارتفاع ذره از بالای یك صفحه افقی ثابت را، یعنی $x(t)$، یادداشت می‌کنیم. در طول T واحد زمان، حرکت ذره که از زمان ۰ شروع شده، به‌وسیله موقعیتش، یعنی $x(t)$، به‌ازای $0 \leqslant t \leqslant T$، مشخص می‌شود. یعنی به وسیلهٔ یك تابع حقیقی x روی بازهٔ $[0,T]$ با $x(0)=0$. این ما را به سمت در نظر گرفتن مجموعهٔ $C_0[0,T]$ از چنین توابعی سوق می‌دهد.

بنا بر دلایل تکنیکی، با در نظر گرفتن بیشترین فاصله بین نمودارهای دو عنصر



شکل ۱

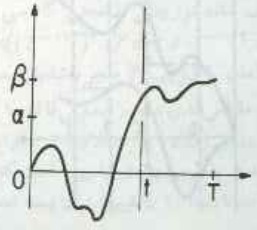
$C_0[0,T]$ به‌عنوان فاصله بین این دو عنصر، $C_0[0,T]$ را به یك فضای متریك تبدیل می‌کنیم. این توپولوژی، یعنی توپولوژی یکنواخت، در اینجا کمتر به‌کار می‌آید و بیشتر بدان دلیل آورده شده تا گواهی باشد براینکه بحث برپایه‌ای حدی دنبال می‌شود.

حرکت تصادفی ذره با نظیر کردن احتمالات $P_T(A)$ به زیر مجموعه‌های A از $C_0[0,T]$ توصیف می‌شود. $P_T(A)$ شانس اینکه مسیری که، به وسیلهٔ ذره طی می‌شود در A واقع شود، یا به‌وسیلهٔ تابع x از A توصیف شده، را بیان می‌کند. احتمالات فراوانیهای نسبی حدی را بیان می‌کنند. اگر دریرتاب دو تاس مجموع خالهای وجوهی را که به رو می‌نشینند در نظر بگیریم، پیشامدهای ممکن ۲، ۳، ...، و ۱۲ خواهد بود. هرگاه دو تاس همگن را به دفعات زیاد پرتاب کنیم، نسبت آمدن پیشامد ۷ در میان این پیشامدها برابر ۱/۶ خواهد بود. هرگاه ذره‌ای را در حرکت براونی برای فاصلهٔ T واحد زمانی مشاهده کنیم، پیشامدهای ممکن بخشهایی از $C_0[0,T]$ خواهند بود. اگر تعداد زیادی حرکت مستقل ذرات مشاهده گردد، نسبتی از مشاهدات که در A واقع می‌شوند، حدود $P_T(A)$ خواهد بود. هرچند برای توصیف احتمالات از مشاهدات زیادی صحبت شد اما، در نظریهٔ ریاضی آن ما از یك بار پرتاب تاس صحبت می‌کنیم. احتمال پیشامد ۷ در پرتاب فوق برابر ۱/۶ می‌شود. به‌همین ترتیب از یك ذره صحبت می‌کنیم. احتمال طی کردن مسیری که در A قرار می‌گیرد، $P_T(A)$ می‌شود.

مجموعهٔ $[x : \alpha \leqslant x(t) \leqslant \beta]$ متشکل از مسیرهایی است که از میان دریچه‌ای که در شکل ۲ نموده شده عبور می‌کنند و بیانگر پیشامد، بین α و β بودن ذره در زمان t می‌باشد. احتمال

$$P_T[x:\alpha \leqslant x(t) \leqslant \beta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_\alpha^\beta e^{-u^2/2t} du \qquad (1)$$

به‌آن نظیر می‌شود. به این ترتیب تابع توزیع موقعیت ذره در زمان t عبارت است از خمی گاوسی با میانگین صفر و واریانس t. میانگین صفر بیانگر این واقعیت است که



شکل ۲

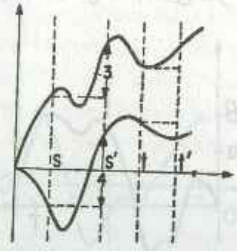
بالا رفتن ذره به همان اندازه محتمل است که پایین آمدن آن، هیچ‌گونه تمایلی به یکی از این دو سو وجود ندارد. واریانس t به‌طور خطی تغییر می‌کند؛ این امر نشانگر آن است که ذره با حرکتی به‌این سو و آن سو از نقطهٔ شروع حرکتش دور می‌شود. با داشتن چنین حرکتی، هیچ نیروئی برای برگرداندن ذره به نقطهٔ آغاز حرکتش وارد نمی‌شود. معادلهٔ (۱) قابل تمدید است: تغییرات روی $[s, t]$ توزیعی گاوسی با میانگین صفر و واریانس $t-s$ دارد.

خاصیت مهم دیگر حرکت براونی به‌این شرح است: فرض کنید $s<s'<t<t'$ باشد و مثلا پیشامد $A=[x: x(s')-x(s)\geqslant ۳]$ را در نظر بگیرید که ذره با تغییر مکانی به اندازهٔ دست‌کم ۳ واحد در خلال بازهٔ زمانی $[s, s']$ بالا یا پایین می‌رود، به‌همراه پیشامد $B=[x: x(t')-x(t)<۰]$ که ذره درفاصله $[t, t']$ تغییرمکانی به‌سمت پایین دارد. در شکل ۳ مسیر بالایی در A قرار دارد و نه در B و مسیر پایینی هم در A قرار دارد و هم در B. احتمال پیشامدهای A و B و پیشامد توأمشان؛ $A\bigcap B$ با

$$P_T(A\bigcap B)=P_T(A)P_T(B) \qquad (۲)$$

با یکدیگر مربوط شده‌اند. به‌این‌ترتیب A و B در تعریف نابستگی صدق می‌کنند، یعنی، تغییرمکان ذره به‌سمت پایین در فاصلهٔ $[s, s']$ به‌هیچ‌وجه تأثیری بر تغییرمکان ذره به‌سمت پایین در فاصله $[t, t']$ نمی‌گذارد. این نوعی پیشامد فاقد حافظه را به‌دست می‌دهد. هرچند رفتار آیندهٔ ذره بستگی به‌موقعیت فعلی آن دارد، اما به‌اینکه ذره چگونه به آنجا رسیده بستگی ندارد. معادلهٔ (۲) شکلی کلی‌تر دارد که نشان می‌دهد تغییرات روی هر تعداد فاصلهٔ مجزا از هم به‌طور آماری نابسته از یکدیگرند.

معادلات (۱) و (۲)، همراه شکل تمدید یافتهٔ آنها، تمام احتمالات $P_T(A)$ را معین می‌کند. (در اینجا یك نکتهٔ تکنیکی نادیده گرفته می‌شود: $P_T(A)$ را نمی‌توان برای هر زیر مجموعهٔ A از $C_۰[۰, T]$ تعریف کرد، اما می‌توان آن را برای هر زیر-



شکل ۳

مجموعه بورلی[1] A ـ یعنی به‌ازای هر A واقع در σ ـ میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز توپولوژی یکنواخت $C_۰[۰, T]$، تعریف کرد. این یکی از موفقیتهای نوربرت‌وینر بود که در سال ۱۹۲۳ ثابت کرد. تناظری بین احتمالهایی که در این قواعد صدق می‌کند و P_T (اندازهٔ متناظر روی مجموعه‌های بورل) وجود دارد. به همین مناسبت P_T اندازه وینر نامیده شده است. در اینجا ماوجود این اندازه را می‌پذیریم.

حرکت براونی به‌طریقی که اندازه وینر آن را توصیف کرده است، از قانون تبدیلی پیروی می‌کند که پیامدهای شگفت و عمیقی به‌همراه دارد. فرض کنیم ذره‌ای، به‌مدت T واحد زمان دارای حرکت براونی بوده و فرض کنیم در تابعی که مسیر این ذره را نمایش می‌دهد، زمان را به اندازهٔ T و مقیاس مکان را به اندازه $\sqrt{T}$ منقبض کرده‌ایم. براساس این قانون، مسیر جدید کاملا شبیه مسیر ذره‌ای خواهد بود که دارای حرکت براونی در طی یك واحد زمان است.

برای درك علت آن، فرض کنید x و y مسیرهای قدیم و جدید باشند، به‌طوری که x در $C_۰[۰, T]$ و y در $C_۰[۰, ۱]$ قرار داشته باشند، و

$$y(t)=\frac{۱}{\sqrt{T}}x(tT)\,, \qquad ۰\leqslant t\leqslant ۱ \qquad (۳)$$

البته (۳) نگاشت زیر را تعریف می‌کند

$$C_۰[۰, T]\to C_۰[۰, ۱] \qquad (۴)$$

بنابرقانون تبدیل: هرگاه x یك مسیر تصادفی در $C_۰[۰, T]$ باشد و براساس P_T توزیع شده باشد، آنگاه y مسیری در $C_۰[۰, ۱]$ است که براساس $P_۱$ توزیع شده است. (از لحاظ تکنیکی هرگاه ϕ_T نگاشت (۴) باشد آنگاه خواهیم‌داشت $P_۱=P_T\phi_T^{-۱}$.) حال، طبق (۱) کمیت $x(tT)$ یك متغیر تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس tT است. با ضرب کردن یك متغیر تصادفی گاوسی در ثابت a، میانگین آن در a و واریانس آن در $a^۲$ ضرب می‌شود، و متغیر جدید دارای توزیعی گاوسی خواهد بود. بنابراین، $y(t)$، که به‌وسیلهٔ (۳) تعریف شده توزیعش ازمنحنی گاوسی با میانگین صفر و واریانس t پیروی می‌کند (زیرا $T^{-۱/۲}.۰=۰$، و $T^{-۱/۲})^۲.tT=t$)، که این اولین شرط یك حرکت براونی است. منقبض کردن زمان با ضریب T منجر به‌تبدیل مسیری از $C_۰[۰, T]$ به‌مسیری روی $C_۰[۰, ۱]$ می‌گردد و مقیاس‌بندی مجدد محور قائم با واحد $۱/\sqrt{T}$ واریانسها را به طور صحیحی به نمایش درمی‌آورد. به علاوه، x دارای تغییرات نابسته (در روی بازه‌های جدا از هم) می‌باشد و به‌طورشهودی بدیهی است که تغییرات یکنوای مقیاسهای زمان ومکان نمی‌تواند تغییرات نابسته را به‌تغییرات وابسته تبدیل کند. بنابراین تبدیل (۳)

1. Borel

باید خاصیت دیگر حرکت براونی، یعنی تغییرات ناپسته را، حفظ‌کند. این استدلال که قانون تبدیل را پذیرفتنی می‌کند، می‌تواند به‌یك اثبات کامل بدل شود.

به‌کمك تبدیل تعریف شده در (۳) می‌توان ملاحظه کرد که، مقادیر مثبت ε و K هرچه باشند، یك مسیر حرکت براونی روی $[0, 1]$ با احتمالی افزون بر $1-\varepsilon$، در جایی دیگر کمانی با شیب بیشتر از K خواهد داشت. نتیجه مطلوب این است که: مسیری براونی چون y روی $[0, 1]$ می‌خواهیم که کمانی با شیب تند داشته باشد. ما آن را به‌طور مستقیم به‌دست نمی‌آوریم اما با به‌کار بستن تبدیل (۳) به‌روی یك مسیر براونی بر $[0, T]$، به‌ازای مقدار مناسب T، به‌دست می‌آوریم، T را چنان انتخاب کنید که x، با احتمالی بیشتر از $\varepsilon-1$، در جایی کمانی با شیب بیش از، مثلا ۱، داشته باشد. چنین مقداری برای T وجود دارد، زیرا در نهایت، حتی شگفت‌ترین پیشامد نیز رخ خواهد داد، (میمونها در کنار ماشین تحریرا)، و به‌دست آوردن کمانی با شیب بیش از ۱ در حقیقت واقعه‌ای خوشرفتار است. در عین‌حال، T را چنان اختیار کنید که از K بیشتر شود. اگر شیب کمان x بیش از یك باشد و اگر رابطه (۳) کمیتهای x و y را به‌هم مربوط کند، آنگاه y کمانی با شیب بیش از $\sqrt{T}$ خواهد داشت که در نهایت از K بیشتر می‌شود.

چون ε را می‌توان به‌اندازهٔ دلخواه کوچك و K را به‌اندازهٔ دلخواه بزرگ اختیار کرد، مسیری براونی روی $[0, 1]$ باید با احتمال ۱، کمانهایی با شیب زیاد داشته باشد؛ همچنین باید کمانهایی با شیب منفی زیاد و دلخواه وجود داشته باشد و درواقع کمانهای با شیب فرین (تعدادکمی از این نوع کمانها) در امتداد مسیر چگال هستند. این استدلالها، به‌صورتی دقیقتر و ظریفتر، نشان می‌دهند که هرگاه A مجموعه‌مسیرهایی در $C_0[0, 1]$ با تغییر بیکران باشد، آنگاه $P_1(A)=1$، مسیری با تغییر بیکران حرکت ذره‌ای را می‌نمایاند که در حرکتهای بی‌هدف به‌پس و پیش فاصله‌های نامتناهی را طی می‌کند، و در این نقطه است که فیزیکدانان علاقهٔ خود به موضوع را به دلیل وسوسه ذهنی‌شان نسبت به‌واقعیت، از دست می‌دهند. اما این رویداد از نظر ریاضی جالب است وهمچنین این حقیقت که، هرگاه A مجموعه توابعی در $C_0[0, 1]$ باشد که در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند، آنگاه $P_1(A)=1$. ساختن تابعی که در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد و در همه‌جا پیوسته باشد دشوار است، اما به طور تصادفی بیرون کشیدن عنصری از $C_0[0, 1]$، براساس P_1 چنین تابعی را با احتمال ۱ به‌دست می‌دهد.

در طی مطالبی که از این‌پس می‌آید، ما تنها با مجموعه‌هایی سر و کار خواهیم داشت که شباهت نزدیکتری با واقعیت دارند هرچند در فصلهای ۲ و ۳ تبدیل (۳) و Tهایی که بزرگتر از ۱ هستند به‌کار خواهند رفت؛ تا انتهای این فصل T را برابر ۱ اختیار خواهیم کرد و برای حالت $T=t=1$ به (۱) نیاز خواهیم داشت

$$P_1[x:\alpha\leqslant x(1)\leqslant\beta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-u^2/2}\,du,\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \qquad (5)$$

فرض کنید $\alpha\geqslant 0$ و پیشامد رسیدن ذره به‌ارتفاع α در یك زمان t، یعنی

$$[x:\max x(t)\geqslant\alpha]$$

یا $0\leqslant t\leqslant 1$ را در نظر بگیرید. ابتدا،

$$P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha]=P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha,\ x(1)\geqslant\alpha]$$
$$+P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha\text{ و }x(1)<\alpha]$$

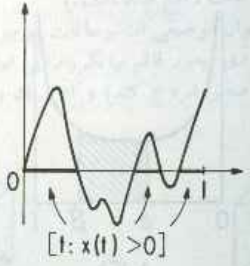
برابری دواحتمال سمت راست تساوی فوق را می‌توان در اینجا ثابت‌کرد، زیرا همین‌که ذره به‌ارتفاع α می‌رسد درصورتی‌که تمایل به‌حرکت به‌سمت‌خاصی نداشته باشد، احتمال حرکت آن به‌سمت بالا و بالای α در زمان $t=1$ به‌همان اندازه است‌که به‌سمت پایین حرکت‌کند و در پایینتر از α متوقف شود. بنابراین

$$P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha]=2P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha\text{و}x(1)\geqslant\alpha]$$

چون شرط $\max x(t)\geqslant\alpha$ زائد است، با وجود شرط $x(1)\geqslant\alpha$ سمت راست تساوی فوق دراینجا به‌صورت $2P_1[x:x(1)\geqslant\alpha]$ درمی‌آید و (۵) به‌ازای $\alpha\geqslant 0$ و $\beta=\infty$ ایجاب می‌کند

$$P_1[x:\max x(t)\geqslant\alpha]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\infty e^{-u^2/2}\,du \qquad (6)$$

بنابراین، توزیع بزرگترین دامنهٔ نوسان مثبت را خواهیم داشت.



شکل ۴

در این روش استنتاج (۶) از شهود خود کمك گرفته‌ایم، هرچندکه دقیقتر کردن آن مستلزم کوششهایی است. نتیجهٔ بعد بدون اثبات بیان‌خواهد شد، و مانند بسیاری از ادعاهای آمرانه در جهت خلاف شهود ما بیان می‌شود. مجموعه نقاط t، $۰ \leqslant t \leqslant ۱$، را که به‌ازای‌آنها ذره بالای ۰ است، یعنی $[t : x(t) > ۰]$، را درنظر بگیرید. این مجموعه اجتماعی (بی‌پایان، برخلاف شکل ۴) از فاصله‌هاست. اندازهٔ لبگ این مجموعه، که با خطوط‌عمودی نموده می‌شود، مجموع طولهای فاصله‌های تشکیل‌دهنده: $|[t : x(t) > ۰]|$ است. توزیع این کمیت، یعنی کل زمان صرف شده در بالای ۰، با رابطهٔ

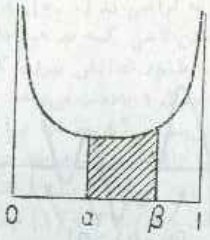
$$P_{۱}[x : \alpha \leqslant |[t : x(t) > ۰]| \leqslant \beta] = \frac{۱}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{\sqrt{u(۱-u)}} \qquad (۷)$$

با $۰ \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant ۱$، داده شده است. این قانون کمان سینوسی پاول لوی[1] است، وجه تسمیهٔ این نامگذاری به‌این‌ترتیب است که انتگرال‌گیری از این تابع، تابع وارون تابع سینوس را به‌دست می‌دهد.

شکل ۵ تابع چگالی احتمال، مساحت ناحیهٔ هاشور خورده، نمایانگر سمت راست معادلهٔ (۷) است. این منحنی U‌شکل است، به طوری که اگر طول $\beta - \alpha$ ثابت بماند احتمال $|[t : x(t) > ۰]| \leqslant \beta$ هرچقدر که فاصله به‌صفر یا ۱ نزدیك می‌شود، افزایش می‌یابد. و هرگاه فاصله حول نقطهٔ ۱/۲ متمرکز شود، کمترین مقدار را پیدا می‌کند. این نتیجه بدان دلیل نامتعارف است که زمان صرف شده در بالای ۰، بنابر تقارن، میانگینی برابر صفر دارد و معمولا مقادیر نزدیك به‌میانگین یك کمیت تصادفی بیشتر محتمل‌اند تا مقادیر دور از میانگین. درحالی‌که دراینجا وضعیت برعکس است.

۲. قدم زدن تصادفی

ذره‌ای را در نظر بگیرید که به‌طور تصادفی روی رئوس شبکه‌ای مکعبی حرکت می‌کند



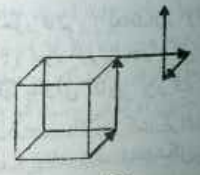
شکل ۵

1. Paul Levy

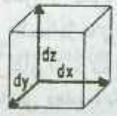
این ذره می‌تواند در هریك از ۶ جهت (شمال، جنوب، شرق، غرب، بالا و پایین) به‌سوی رأس کناری حرکت کند. جهت حرکت به‌کمك یك تاس همگون تعیین می‌شود، ذره به رأس بعدی حرکت می‌کند و تاس یك‌بار دیگر پرتاب می‌شود تا جهت حرکت بعدی را تعیین کند، و به‌همین‌ترتیب الی‌آخر. شکل ۶ پنج گام از چنین راه رفتن تصادفی را همراه با یکی از شبکه‌های مکعبی نشان‌می‌دهد. این شکل مناسب یك کتاب شایسته در زمینهٔ آنالیز برداری است، که اثبات قضیهٔ گاوس را، با راهنمایی خواننده به‌اینکه "یك عنصر بینهایت کوچك حجم به‌ابعاد dx، dy، و dz" را درنظر بگیرد، شروع می‌کند. این دستور با نموداری که به‌نحوی زیبا، با نامهای مخصوص نشانه‌گذاری شده، مانند شکل ۶، همراه‌گردیده تا چنین عنصر حجم بینهایت‌کوچکی را بزرگتر نشان دهد. بسیار خوب، شکل ۶ هم، نسبتاً بزرگ است و اگر مکعبهای شبکه واقعاً خیلی‌کوچك باشند و ذره به‌سرعت از رأسی به‌رأس دیگر برود، طبیعی است انتظار داشته باشیم که این‌حرکت به‌یك حرکت براونی نزدیك است.

ما در پی شرح یك‌بعدی این ایده خواهیم بود. محوری قائم را در نظر بگیرید که اعداد صحیح $۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ به‌روی آن نشانه‌گذاری شده‌اند. از ۰ آغاز وسکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، هرگاه شیر بیاید یك واحد به‌سمت بالا می‌رویم و هرگاه خط‌بیاید یك واحد به‌سمت پایین می‌رویم. در وضعیت جدید، $(+ ۱$ یا $- ۱)$ ما یك‌بار دیگرسکه را پرتاب می‌کنیم، برحسب اینکه شیر بیاید یا خط، یك واحد به‌بالا یا پایین می‌رویم و این کار را تا T مرحله ادامه می‌دهیم؛ T در اینجا به یك عدد صحیح تبدیل می‌گردد. هرگاه یك واحد زمان را برای برداشتن هرگام این قدم زدن تصادفی به‌حساب آوریم، و با آهنگی یکنواخت از یك نقطه به‌نقطهٔ بعدی حرکت کنیم، سفرما به‌وسیلهٔ تابعی بیان می‌شود که نمودار آن شبیه آنچه در شکل ۸ نموده شده مسیری چندضلعی است‌که ارتفاعش روی i برابر موقعیتش در i، یعنی موقعیتش پس از i گام، خواهد بود. از ۲^{T} تا چنین مسیرهایی، هر یك احتمالی برابر ۲^{-T}دارند. (جنبه‌های گوناگون قدم زدن تصادفی در مرجع [۳] مورد بحث واقع شده است.)

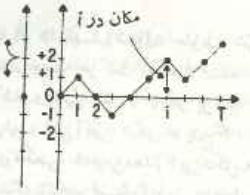
مسیر را می‌توان به عنوان توصیفی از نوسانات موجودی پول یك قمارباز مورد توجه قرارداد. مکان نقطه در روی محور قائم بیانگردارایی قمارباز است (نسبت‌به‌سرمایه اولیه‌اش، چنانکه او رسماً از صفر شروع کند) و او یك واحد به سمت بالا یا پایین



شکل ۶



شکل ۷



شکل ۸

می‌رود مثلا یك پوند ــ برحسب اینکه در بازی بعدی ببرد یا ببازد.

مسیر راه رفتن تصادفی دارای خواصی از مسیر یك حرکت براونی روی $[0,T]$ است. در اولین وهله، برای اعداد صحیح با شرط $i<i'<j<j'$ تغییر مکانها روی فاصله‌های $[i,i']$ و $[j,j']$ نابسته‌اند زیرا آنها به‌مجموعهٔ پرتابهای جدا ازهم بستگی دارند و فرض براین است که پرتابها از یکدیگر مستقل‌اند (سکه دارای حافظه نیست). به‌این ترتیب مسیر اساساً دارای تغییرات نابسته است (برای فاصله‌های با انتهای ناصحیح تغییرات به‌طور جزئی می‌تواند وابسته باشد). خاصیت دیگری که شبیه حرکت براونی است مسافت پیموده شده در یك گام میانگین برابر

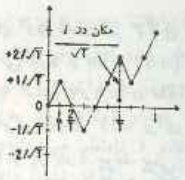
$$(+1)\frac{1}{2}+(-1)\frac{1}{2}=0 \qquad (8)$$

و واریانسی برابر

$$(+1)^2\frac{1}{2}+(-1)^2\frac{1}{2}=1 \qquad (9)$$

دارد، و بنابراین میانگین موقعیت نقطه در i صفر و بنابر نابستگی واریانس برابر i است (ر. ك معادله (۱)). (به ازای مقادیر ناصحیح t میانگین موقعیت نقطه در t صفر است اما واریانس تنها به‌طور تقریبی برابر t است.) هرچند مشخصهٔ چندضلعی بودن این مسیر با حرکت براونی مشترك نیست، انقباض دو محور قطعه خطهای مستقیم شکل ۸ را هنگامی که $T\to\infty$، ناپدید می‌کند.

فرض کنیم مقیاس زمان را به‌اندازهٔ T ومقیاس محور قائم را به‌اندازه $\sqrt{T}$ منقبض کنیم و برای رفتن از شکل ۸ به شکل ۹ از تبدیل (۳) بهره گیریم. در شکل ۸ طول پاره‌خطها $\sqrt{2}$ است، درحالی‌که درشکل ۹ این پاره‌خطها به‌ازای مقادیر بزرگ T خیلی کوتاهند، و طولشان از مرتبه $1/\sqrt{T}$ است. هرگاه شکل۸ مسیر یك حرکت براونی روی $[0,T]$ را نمایش دهد، آنگاه، همانطورکه در بخش ۱ نشان داده شده شکل ۹ مسیر حرکت براونی روی $[0,1]$ را نشان خواهد داد. تبدیل (۳) آن مشخصه‌هایی ازمسیر



شکل ۹

اصلی را بدون تغییر باقی می‌گذاردکه باحرکت براونی مشترك است (میانگین، واریانس نابستگی تغییرات) وکمك می‌کند تاآن مشخصه‌هایی (قطعه قطعه خطی بودن) را پنهان کند که درآنجا نیست. بنابراین می‌توانیم امیدوار باشیم کـه منحنی شکل ۹ بـرای مقادیر بزرگ T شبیه مسیریك حرکت براونی خواهد بود. درواقع، این درست است که برای زیر مجموعه‌های فضای $C_0[0,1]$

$$\text{Prob}\,[\text{path}^*\in A]\to P_1(A)\qquad (T\to\infty) \qquad (10)$$

که درآن، $P_1(A)$ اندازه وینر است. تعداد 2^T مسیر شبیه مسیری‌که درشکل ۹ به‌نمایش درآمده، وجود دارد و $\text{Prob}\,[\text{path}\in A]$ ، 2^{-T} برابر تعداد آنهایی است که در A واقع می‌شوند.

به‌منظور شرح و توصیف ایـن قضیه، فرض کنیدکـه A در (۱۰) برابر مجموعهٔ $[x:\alpha\leqslant x(1)\leqslant\beta]$ از مسیرهای واقع در $C_0[0,1]$ باشد،که در نقطه $t=1$ ارتفاعی بین β و α دارند. چون ارتفاع در نقطهٔ $t=1$ درشکل ۱، از مرتبهٔ $1/\sqrt{T}$ برابر موقعیت نقطه در T مربوط به‌قدم زدن تصادفی است، (۱۰) و (۵) ایجاب می‌کنند

$$\text{Prob}\left[\alpha\leqslant\frac{\text{موقعیت نقطه در } T}{\sqrt{T}}\leqslant\beta\right]\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-u^2/2}du \qquad (11)$$

این قضیهٔ کلاسیك حد مرکزی لاپلاس-دوموآور[1] برای آزمایشهای برنولـی است. این معادله موقعیت نقطه را پس از تعداد زیاد گامها در یك قدم زدن تصادفی و یا موجودی قماربازی را درپایان T بازی قمار، بیان می‌کند. هرگاه $\alpha=\beta=0.9$ ، $-\alpha$ آنگاه حد (۱) تقریباً برابر 0.6 است. به‌ازای $T=100$ قمارباز بااحتمالی تقریباً برابر 0.6 و بردی برابر $9\times\sqrt{100}=90$ پوند بیش از سرمایهٔ اولیه‌اش، بازی‌را خاتمه می‌دهد.

حالا فرض کنید که A مجموعهٔ (۶)، یعنی مجموعهٔ مسیرهایی در $C_0[0,1]$ باشد که در جایی ارتفاعی دست‌کم به‌اندازهٔ α (در اینجا $\alpha\geqslant 0$) دارند.هرگاه در لحظه‌ای

* منظور از Path همان مسیراست.ـم.

1. Laplace-DeMoivre

در طول بازی قمارباز، موجودی وی دست‌کم $\alpha\sqrt{T}$ پوند بیش از سرمایهٔ اولیه‌اش باشد، مسیر شکل ۹ در A قرار می‌گیرد و بنا بر (۱۰) احتمال چنین پیشامدی بـه سمت راست رابطه (۶) میل می‌کند. به ازای $\alpha=۱٫۷$ مقدار این حد برابر ۰٫۱ می‌باشد. با $T=۱۰۰$ این رابطهٔ احتمالی تقریبی برابر ۰٫۱ برای پیشامد رهاکردن بازی درزمانی که قمارباز به‌اندازه $۱۷=۱٫۷\times\sqrt{۱۰۰}$ پوند پیش است را به‌دست می‌دهد.

سرانجام فرض کنیم A مجموعهٔ (۷) یعنی $[x:\alpha\leqslant|[t:x(t)>۰]|\leqslant\beta]$ باشد، قمارباز در طی بازی خود به‌اندازهٔ کسری از زمان جلو است؛ هرگاه منحنی شکـل ۶ تاریخچهٔ دارایی وی را نشان دهد، این منحنی به‌مجموعهٔ A متعلق است، اگر و تنها اگر این کسر بین α و β قرار گیرد؛ شانس چنین رویدادی، بنابر (۱۰) و (۷) حدوداً برابر مساحت ناحیهٔ هاشور خوردهٔ شکل ۵ است. هـر گاه این مساحت را حساب کنیم شانس جلو بودن قمارباز در ۴۵٪ تا ۵۵٪ مانده به‌زمان ترك بازی تنها حدود ۰٫۶ است؛ در صورتی که شانس جلو بودن در پیش‌از ۹۰٪ زمان حدود ۰٫۲ است. بنابراین درساعت ۵ یکی ازعصرها، قمارباز در بیش‌از ۹۰٪ جلو می‌باشد. به‌قرینه‌درعصری دیگر درساعت ۵ قمارباز کمتر از ۱۰٪ زمان آن بازی جلـو است. در حالت اول [دوم] متقاعد کردن وی نسبت بـه‌اینکه این تجربه تنها ناشی از شانس او بوده و نه‌خوش یمنی ثروتش (بد یمنی ثروتش) بسیار مشکل [ناممکن] خواهد بود.

ما (۱۰) را در مورد سه مجموعهٔ جالب توجه بـه‌کار برده‌ایم. هرگاه A مجموعه توابع $C_۰[۰,۱]$ باتغییر بیکران باشد، آنگاه $P_۱(A)=۱$ در حالی‌که، همانطورکه در بخش ۱ هم توضیح داده شد، $\text{Prob}\,[\text{path}\in A]=۰$، زیرا منحنی شکل ۹ به‌طور آشکاری باتغییر کراندار است. بنابراین (۱۰) برای زیر مجموعه‌های معینی از $C_۰[۰,۱]$ برقرار نخواهد بود. دلیل ریاضی این‌امرآن است که (۱۰) برای هر (مجموعهٔ بورلی) A که مرز آن، ∂A، (مرز در توپولوژی یکنواخت) در $P_۱(\partial A)=۰-a$ صدق کند، برقرار است. شرطی که درهر سه کاربرد ما برقرار بود. اما هنگامی‌که A مجموعهٔ توابع ازتغییر بیکران باشد، برای اثبات این قضیه، ترکیبی ازآنالیز تابعی ونظریهٔ احتمال‌بهره می‌گیرند. جزئیات امررا می‌توان در [۱] یافت.

مقسوم علیه‌های اول. بـر اساس قضیهٔ اساسی حساب، هـر عدد صحیح، تجزیه‌ای به‌حاصل‌ضرب عوامل اول دارد، که این تجزیه‌به‌عوامل، باتقریب ترتیب یکتاست. (مثلا ر.ك [۵].) فرض کنیم $f(n)$ تعداد اعداد اول متمایز موجود در تجزیه به‌عوامل اول n باشد؛ چندگانگی را در این تجزیه به‌حساب نمی‌آوریم: $f(۳۴.۵^۲)$ برابر است با ۲ و نه ۶. درجدول زیر چند مقدار تابع f درج شده است:

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	…	۲۹	۳۰	۳۱	…	۲۰۹	۲۱۰	۲۱۱	…
$f(n)$	۱	۱	۱	۱	۲	۱	…	۱	۳	۱	…	۲	۴	۱	…

این تابع به‌کندی افزایش می‌یابد. کمترین nهایی که به‌ازای آنها f مقادیر ۳،۲، و ۴

اختیارمی‌کندعبارت‌اند از $۶=۳\times۲$، $۳۰=۵\times۳\times۲$ و $۲۱۰=۸\times۵\times۳\times۲$. اما این واقعیت که به‌تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد، ایجاب می‌کندکـه f مقادیر به دلخواه بزرگ اختیار کند؛ چون به ازای هر عدد اول p داریم $f(p)=۱$، همین واقعیت ایجاب می‌کند که f به تعداد نامتناهی بار به مقدار t برگـردد. از آنجا که تغییرات f به این شیوه، بی‌قاعده و نامنظم صورت می‌گیرد، پرسش دربارهٔ رفتار میانگین آن طبیعی خواهد بود. مثلاً می‌توان نشان داد که

$$\frac{۱}{N}\sum_{n=۱}^{N} f(n)\approx\log\log N \qquad (۱۲)$$

(ر.ك. تذکرهای بعد از(۱۷)در پایین). چون $\log\log ۱۰^{۲۰}\approx۵$، عددصحیح "نوعی" کمتر از $۱۰^{۲۰}$ تنها ۵ مقسوم‌علیه اول دارد. سؤالهایی ظریفتر در خصوص توزیع f می‌توان مطرح کرد. فرض می‌کنیم S مجموعـه‌ای از اعداد صحیح باشد، نسبت تعداد اعداد صحیحی از ۱، ۲، ۳، …، N را کـه در S قرار دارند را با $\mathbf{P}_N(S)$ نشان می‌دهیم. آنگاه

$$\mathbf{P}_N(S)=\frac{۱}{N}\times\#[n:۱\leqslant n\leqslant N\text{ و }n\in S] \qquad (۱۳)$$

اینك مسئله عبـارت است از به دست آوردن اطلاعاتی دربـاره کمیتهـایی مـانند $\mathbf{P}_N[n:a\leqslant f(n)\leqslant b]$.

حال می‌توان (۱۳) را به عنوان یك احتمال در نظر گرفت: عددی صحیح را به طور تصادفی از فاصله $۱\leqslant n\leqslant N$ اختیار می‌کنیم، و $\mathbf{P}_N(S)$ احتمال واقع بودن این عدد در S خواهد بود. اینکه $\mathbf{P}_N[n:a\leqslant f(n)\leqslant b]$ به عنوان یك احتمال در نظر گرفته شود، به خودی خود ایجاب نمی‌کندکه نظریهٔ احتمالات در مطالعهٔ موضوع کمك خواهدکرد (ممکن است این حکم به سختی اعتبار پیدا کند). در واقع این نظریه بدان دلیل کمك خواهدکردکه می‌تواند مفهوم استقلال و نابستگی را دربرداشته باشد. هرگاه $\delta(n)$ مقداری برابر یك یا صفر، بر اساس اینکه p عدد n را عادکند یا خیر، اختیارکند، آنگاه خواهیم داشت $f(n)=\Sigma_p\delta_p(n)$. هر گاه بتوان رفتار توأم $\delta_p(n)$ را به عنوان کمیتهایی تصادفی فهمید، آنگاه می‌توان توزیع $f(n)$ را نیز درك کرد.

تعداد مضارب p تا N برابر جزء صحیح N/p یعنی $[N/p]$ می‌باشد. بنابراین احتمال اینکه $\delta_p(n)=۱$، یا اینکه $p|n$ برابر است با

$$\mathbf{P}_N[n:p|n]=\frac{۱}{N}\left[\frac{N}{p}\right]\approx\frac{۱}{p} \qquad (۱۴)$$

برای مقادیر بزرگ N این تقریب خوبی است: زیرا $[N/p]$ و N/p با اندازه‌ای کمتر از ۱ اختلاف دارند. خطا در (۱۴) کمتر از $۱/N$ می‌باشد. فرمول (۱۴) این واقعیت

را بیان می‌کند که p، هر pامین عدد صحیح را عاد می‌کند و به هیچ روی نیازی به اینکه p اول باشد نیست.

بنابر قضیهٔ اساسی حساب هرگاه a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی هیچ مقسوم‌علیه مشترکی نداشته باشند) آنگاه هر یك از آنها n را عاد می‌کنند اگر و تنها اگر حاصل‌ضربشان n را عاد کند. این واقعیت، با کاربردی از آنکه به تورینگ نسبت داده شده به‌خوبی توضیح داده شده است. وی، چرخ‌دندهٔ زنجیرخور رکاب دوچرخه‌اش دندانه‌ای معیوب داشت و زنجیر روی آن نیز اتصالی معیوب. هنگامی‌که قسمتهای معیوب جفت می‌شدند زنجیر دوچرخه‌اش می‌افتاد مگر اینکه دراین هنگام به‌سرعت رکاب می‌زد. با این ترتیب، تعداد دندانه‌های چرخ، مثلا a تا، و نیز تعداد اتصالهای روی زنجیر، مثلا b تا، را شمارش کرد و بدون هیچ‌گونه تعجبی دریافت که a و b نسبت به‌هم اولند، در نتیجه در فاصلهٔ جفت‌شدنهای متوالی دندانه و اتصال معیوب، چرخ‌دندهٔ زنجیرخور b دور و زنجیر a دور می‌زد. می‌گویند تورینگ در حین رکاب زدن تعداد رکابها را می‌شمرد، در هر b دور چرخ زنجیرخور، او به طور ناگهانی سرعت لازم را برای عبور از نقطهٔ خطر به رکاب می‌داد.

به عنوان‌حالت خاص این رویداد، اعداد اول متمایز p و q، p را عاد می‌کنند اگر و تنها اگر pq آن را عاد کند. بنابر این حکم و بنا به (۱۴) با pq به‌جای p داریم

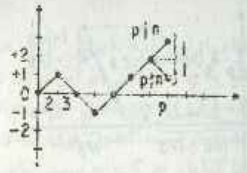
$$\mathbf{P}_N[n:p|n,\ q|n]=\mathbf{P}_N[n:pq|n]=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right]\approx\frac{1}{pq}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}$$

چون بنابه (۱۴) برای Nهای بزرگ عوامل $1/p$ و $1/q$ به ترتیب تقریبی از $\mathbf{P}_N[n:p|n]$ و $\mathbf{P}_N[n:q|n]$ به دست می‌دهند، خواهیم داشت

$$\mathbf{P}_N[n:p|n \text{ و } q|n]\approx\mathbf{P}_N[n:p|n]\mathbf{P}_N[n:q|n] \qquad (۱۵)$$

بنابراین، پیشامدهای $[n:p|n]$ و $[n:q|n]$ تقریباً به‌ازای Nهای بزرگ، با n به‌طور تصادفی انتخاب شده از $1\leqslant n\leqslant N$، در تعریف نابستگی صدق می‌کنند. (۱۵) را می‌توان برای سه عدد اول یا بیشتر تعمیم داد.

ما از این حقیقت برای ساختن نوعی مسیر راه رفتن تصادفی، حاوی اطلاعاتی دربارهٔ تجزیه به عوامل اول n و به‌خصوص دربارهٔ $f(n)$ می‌توانیم استفاده کنیم. عددی مانند n را به طور تصادفی از میان ۱، ۲، ...، N انتخاب می‌کنیم. روی محور قائم که اعداد صحیح روی آن نشانه‌گذاری شده‌اند، از نقطهٔ صفر شروع می‌کنیم و یك‌واحد بالا می‌رویم هرگاه $2|n$، و یکی پایین می‌رویم هرگاه $2\nmid n$. از موقعیت جدیدمان یکی بالا می‌رویم هرگاه $3|n$، و یکی پایین هرگاه $3\nmid n$. به این ترتیب با امتحان کردن اعداد اول متوالی، عمل را ادامه می‌دهیم. شکل ۱۰ راه رفتن تصادفی در تجزیه

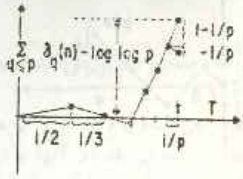


شکل ۱۰

به عوامل اول را به همان طریقی که شکل ۸ راه رفتن تصادفی در پرتاب سکه را بیان می‌کند، توصیف می‌کنند. هر عدد روی محور زمان، عدد اول متناظر با آن‌گام در قدم زدن تصادفی است. این موضوع را که این قدم زدن چقدر ادامه خواهد یافت بعداً بررسی خواهیم کرد.

چون n تصادفی است، پس این مسیر نیز تصادفی خواهد بود. اما چون تصادفی بودن در انتخاب عدد n است، قبل از اینکه راه رفتن شروع شود، راه رفتن تصادفی تجزیه به عوامل اول ممکن است کمتر از راه رفتن تصادفی پرتاب سکه، تصادفی به‌نظر برسد. اما این پنداری نادرست است. می‌توانیم قبل از راه رفتن سکه را T بار پرتاب کنیم، دنبالهٔ پیشامدهای شیر و خط را یادداشت کنیم و سپس راه رفتن متناظر به آن را انجام دهیم. چون تمام تاریخچه‌اش را قبل از شروع شدن، به صورت ضبط شده می‌بینیم، این قدم زدن خیلی مبهم خواهد بود. بنابراین دوستی را در نظر بگیرید که سکه را T بار پرتاب و نتیجه را پیش از شروع حرکت یادداشت می‌کند، و فرض کنید که او، به جای به طور یکجا نشان دادن، پیش‌آمدها را یکی یکی پس از اجرای هر حرکت نشان می‌دهد؛ با این کار ظن فوق برطرف می‌شود. برای راه رفتن تصادفی تجزیه به عوامل اول می‌توان دوستی را تصور کرد که به‌تصادف عدد n را، $1\leqslant n\leqslant N$، انتخاب می‌کند؛ آن را به عوامل اول تجزیه می‌کند و در هر گام از قدم زدن بر ما معلوم می‌دارد که آیا عدد متناظر n را عاد می‌کند یا خیر.

روی یك فاصله، تغییرات مسیر شکل ۱۰ به این امر بستگی دارد که چند عدد اول در مجموعهٔ نظیر، n را عاد می‌کند. تغییر روی فاصله‌های جدا ازهم به مجموعه‌های اعداد اول جدا از همی بستگی دارد که n را عاد می‌کنند، و بدین ترتیب بنابر (۱۵)ـ یا (۱۵) و تعمیم آن به سه عدد اول یا بیشتر ـ تغییرات، هرگاه N بزرگ باشد، تقریباً نابسته خواهد بود. اما برخلاف حرکت براونی، قدم زدن تصادفی برای اعداد اول جاذبه‌ای قوی به سوی پایین رفتن دارد. بنابر (۱۴) شانس پایین رفتن در گام متناظر به p، برابر است با $(1/p)-1$ که برای pهای بزرگ تقریباً برابر یك است. هرگاه $p\mid n$، بهبودی به اندازه $(1/p)-1$ به سمت بالاصورت می‌گیرد، واگر $p\nmid n$ تنها انتظار برابر است با



شکل ۱۱

$$(1-p^{-1})\,\mathbf{P}_N[n:p|n]+(-p^{-1})\mathbf{P}_N[n:p\nmid n],$$

که بنابر (۱۴) تقریباً برابر است با

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p}+\left(-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$$

این عبارت مشابه (۸) است؛ معادله‌ای که نشان می‌دهد قدم زدن تصادفی با پرتاب سکه گرایش به هیچ سمت خاصی ندارد.

چون میانگین فاصله‌های تغییر مکان یافته در گام متناظر به عدد p تقریباً برابر صفر است،واریانس تقریباً عبارت است از

$$(1-p^{-1})^2\mathbf{P}_N[n:p|n]+(-p)^2\mathbf{P}_N[n:p\nmid n],$$

که این، بنابر (۱۴) تقریباً برابر است با

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\frac{1}{p}+\left(-\frac{1}{p}\right)^2\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\approx\frac{1}{p}$$

به این ترتیب، برخلاف قدم زدن تصادفی متناظر به پرتاب سکه که بنابر (۹) به‌شدت، حتی بدون کاهش، تغییر می‌کند، فاصلهٔ تغییر مکان‌یافته برای pهـای بزرگ گرایش به افزایشهای خیلی کوچك دارد. بهبود در این زمان، صرف کردن زمانی به اندازه $1/p$ برای برداشتن گام متناظر به p خواهد بود. با این دو اختلاف، مسیر مانند مسیر شکل ۱۱ است.

به‌منظور مروری مختصر، فاصلهٔ زمانی متناظر به‌عدد p طولی برابر $1/p$ دارد. روی این فاصله، مسیر به اندازه $\delta_p(n)-1/p$ صعود می‌کند، یعنی، هر گاه $p|n$ به اندازهٔ $(1/p)-1$ صعود می‌کند (احتمال چنین پیشامدی تقریباً برابر $1/p$ است) و به اندازه $1/p-0$ صعود می‌کند هرگاه $p\nmid n$ (احتمال این پیشامد برابر $1-1/p$ است).

نقطهٔ t در شکل ۱۱ (منتهی‌الیه راست فاصله متناظر به عدد p) برابر است با

$\sum_{q<p}1/q$ (جمع روی اعداد اولی که نابیشتر از p هستندگرفته شده است). فاصلهٔ تغییر مکان یافته در قدم متناظر به q واریانسی برابر $1/q$ دارد، و به این ترتیب بنابر نابستگی تقریبی گامها (دوباره (۱۵)) واریانس موقعیت نقطه در این زمـان t تقریباً، $\sum_{q<p}1/q$ یا خود t است. بدین ترتیب، تعدیل فوق بـه‌روی قدم زدن تصادفی متناظر به تجزیه به عوامل اول نه تنها تمایل حرکت به سمت خاص را حذف نکرد، بلکه مقیاس زمان را چنان تغییر دادکه واریانسها به‌حدود واریانسهایی مطابق با آنچه برای قدم‌زدن تصادفی متناظر با پرتاب سکه و حرکت براونی بودند، تبدیل شدند.

نشان داده می‌شودکه به ازای uهای بزرگ

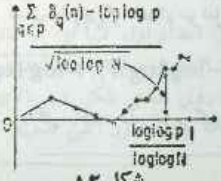
$$\sum_{q\leqslant u}\frac{1}{q}\approx\log\log u \qquad (۱۶)$$

(که دو عبارت با u به سمت ∞ میل می‌کنند و اختلافشان کراندار باقی می‌ماند [۵، ص ۳۵۱]). اینکه جمع در (۱۶)، به‌جای افزایش یافتن به شکلی نامنظم، به طورمجانبی با تابع استانداردی چون $\log\log u$ برابر است، درآنچه درزیر می‌آید دارای اهمیت است؛ اما اگر در هر بار وقوع ما جمع، سمت راست رابطهٔ (۱۶) را جانشین آن کنیم، فرمولها ساده‌تر می‌شوند (و همچنان معتبر باقی می‌ماند).

بنابراین t در شکل ۱۱ اساساً $\log\log p$ است، و ارتفاع $\sum_{q<p}(\delta_q(n)-1/q)$ از منحنی در t تقریباً برابر است با

$$\sum_{q\leqslant p}\delta_q(n)-\log\log p \qquad (۱۷)$$

حال n دارای $\sum_{q\leqslant p}\delta_q(n)$ مفهوم‌علیه اول است که از p بزرگتر نیستند و ما این کمیت را، با کم کردن مقدار $\log\log p$ که برای عدد "نوعی" n دارد، بهنجار می‌کنیم (اگر $1\leqslant n\leqslant N$، تصادفی باشد آنگاه $\sum_{q\leqslant p}\delta_q(n)$، بنابر (۱۴) و (۱۶) میانگینی برابر $\log\log p$ دارد و اینجاست که رابطهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود). قدم زدن تصادفی در تجزیه به‌عوامل اول تاریخچه‌ای از تفاضلهای رابطهٔ (۱۷) را بیان می‌دارد. ما این قدم زدن را تا وقتی که هر $p\leqslant N$ مورد آزمایش واقع شود ادامه می‌دهیم، و نقطهٔ متناظر روی محور زمان عبارت است از $T=\sum_{p\leqslant N}1/p\approx\log\log N$.



شکل ۱۲

حال، مسیر تصادفی، با مسیر پرتاب سکه مشابه می‌شود، که در آن تغییرات به ازای Nهای بزرگ تقریباً نابسته‌اند، هیچ گرایش اساسی به سمت خاصی وجود ندارد، و واریانسها تقریباً صحیح‌اند. مانند حالت پرتاب سکه، دوباره مقیاس‌گذاری، در حد ($N \to \infty$) منجر به‌حرکت‌براونی‌خواهد شد. برای فرستادن T به نقطهٔ ۱، مقیاس افقی را به اندازهٔ $T = \log\log N$ منقبض می‌کنیم، و دوباره مانند حالت پرتاب سکه و به همان دلایل مقیاس محور قائم را به اندازهٔ ریشه دوم این کمیت منقبض می‌کنیم، و تبدیل (۳) را به‌کار می‌بریم. نقطهٔ t در شکل ۱۱ به نقطهٔ $\log\log p / \log\log N$ می‌رود و مسیر همان است که در شکل ۱۲ نشان داده شد.

چون مسیر به n و N بستگی‌دارد، آن را با $\mathrm{path}_N(n)$ نمایش‌می‌دهیم؛ چون n به‌طور تصادفی انتخاب شده است، داریم: $1 \leqslant n \leqslant N$؛ این مسیر نیز تصادفی خواهد بود و شانس اینکه در زیرمجموعهٔ داده شدهٔ A از $C_0[0,1]$ قرار گیرد، برابر است با $\mathbf{P}_N[n : \mathrm{path}_N(n) \in A]$. قضیه‌ای که اعداد اول را به حرکت براونی ربط می‌دهد بدینگونه بیان می‌شود: هرگاه A زیرمجموعه‌ای (زیرمجموعهٔ بورل) از $C_0[0,1]$ باشد که $P_1(\partial A) = 0$، آنگاه

$$\mathbf{P}_N[n : \mathrm{path}_N(n) \in A] \to P_1(A) \quad (N \to \infty) \qquad (۱۸)$$

که در اینجا $P_1(A)$، اندازهٔ وینر است. در اثبات رابطه (۱۸) از ترکیبی از نظریهٔ احتمال، آنالیز تابعی و نظریه اعداد بهره می‌گیریم. این قضیه به طور ضمنی در [۸، ص۱۲۲]، به‌طور صریح در یك دستنویس [۹] و در شکلی کلی‌تر در [۹] آمده. (برای دستیابی به بحث کلیتر دربارهٔ روشهای حساب احتمالات در نظریهٔ اعداد، ر.ك. مراجع [۶]، [۸] و سخنرانی والد[1] نگارنده در سال ۱۹۷۳ که در سالنامهٔ احتمال چاپ شده).

از شکل ۱۲ که نموداری از تفاضلهای (۱۷) به‌هنجار شده به

$$\Big(\sum_{q \leqslant p} \delta_q(n) - \log\log p\Big) / \sqrt{\log\log N}, \qquad (۱۹)$$

است می‌توان خواص حسابی n را نتیجه گرفت و بنابراین رابطه (۱۸) قضایای حدی حسابی را به دست می‌دهد. سه مجموعهٔ A که نتیجهٔ (۱۰) را در مورد آنها به‌کاربستیم در نظر بگیرید. ارتفاع منحنی بالای نقطهٔ ۱ در شکل ۱۲ برابر (۱۹)، با N به جای p، می‌باشد؛ این مقدار برابر است با $f(n)$؛ تعداد عوامل اولی که n را عاد می‌کند، به

$$(f(n) - \log\log N) / \sqrt{\log\log N}$$

به‌هنجار شده هرچه این عدد بزرگتر باشد، عدد n مرکبتر است و هرچه کوچکتر باشد،

1. Wald

n بیشتر "به اعداد اول شبیه" است. با $A = [x : \alpha \leqslant x(1) \leqslant \beta]$، بنابر (۱۸) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{P}_N\left[n : \alpha \leqslant \frac{f(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leqslant \beta\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-u^2/2} du \qquad (۲۰)$$

این همان قضیهٔ حد مرکزی اردیش-کاك[1] برای f می‌باشد (برای دیدن اثباتی مستقیم و مقدماتی از (۲۰)، ر.ك. مرجع [۳۰]).

به ازای $\alpha = -\beta = -0.9$، حد (۲۰) برابر ۰٫۶ است و اگر $N = 10^{70}$، به طوری که $\log\log N \approx 5$، نامساوی دوگانه در (۲۰) تقریباً همان

$$-0.9 \leqslant \frac{f(n) - 5}{\sqrt{5}} \leqslant 0.9$$

است، که به جای این می‌توان تقریباً $3 \leqslant f(n) \leqslant 7$ را در نظر گرفت. به این ترتیب نزدیك به ۶۰٪ اعداد صحیح کمتر از 10^{70} تعداد مقسوم‌علیه‌های اولشان ۳ تا ۷ است.

بزرگتر بودن (۱۷) به این معناست که در این نقطه n مرکبتر به نظر می‌رسد، یعنی (۱۷) مرکب بودن ظاهری n را هنگامی که برای بخش‌پذیری به اعداد اول تا p موردآزمایش واقع می‌شود، اندازه می‌گیرد. مرکب بودن ظاهری از طریق

$$\max_{p \leqslant N} \Big(\sum_{q \leqslant p} \delta_q(n) - \log\log p\Big) \qquad (۲۱)$$

اندازه گرفته می‌شود. چون این مقدار، $\sqrt{\log\log N}$ برابر ارتفاع ماکزیمم منحنی شکل ۱۲ است، کاربردی از (۱۸) در مجموعهٔ (۶) توزیع تقریبی را به دست می‌دهد. هرگاه $\alpha = 1.7$ باشد، آنگاه سمت راست (۶) تقریباً ۰٫۱ می‌شود و به ازای حدود ۱۰٪ اعداد صحیح کمتر از 10^{70}، (۲۱) بیش از $3.8 \approx 1.7 \times \sqrt{5}$ خواهد شد.

گوییم n در p بیش از حد معمول است، هرگاه

$$\sum_{q \leqslant p} \delta_q(n) > \log\log p \qquad (۲۲)$$

هرگاه n، برحسب بخش‌پذیری اعداد اول تا p، از عدد متوسط، "مرکبتر"، یا "کمتر شبیه اعداد اول" گردد این نامساوی برقرار خواهد بود. و (۲۲) دقیقاً وقتی برقرار است که نقطهٔ متناظر به‌آن در روی منحنی شکل ۱۲ بالای محور αها باشد. طول ضلع چندضلعی متناظر به p هنگامی که روی محور افقی تصویر شود، برابر $p^{-1}/\log\log N$

1. Erdös-Kac

است و مقدار زمانی که منحنی بالای ۰ است، اساساً برابر خواهد بود با

$$\frac{1}{\log\log N}\sum\left[\frac{1}{p}: p\leqslant N \text{ و } \sum_{q\leqslant p}\delta_q(n)>\log\log p\right] \qquad (۲۳)$$

این جمع به روی تمام pهایی که در آن n بیش از حد معمول است بسته شده.

هرگاه به‌منظور آزمون n برای بخش‌پذیری به‌وسیلهٔ اعداد متوالی، زمانی به‌اندازهٔ $1/p$ در p صرف کنیم، $(p\leqslant N)$، (۲۳) کسری از زمان است که با عدد اولی چون p که در این نقطه بیش از حد معمول است، سر و کار داریم. با کاربرد (۱۸) روی مجموعهٔ (۷) نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر بزرگ N تابع توزیع (۲۳) تقریباً از منحنی چگالی، شکل ۵ پیروی می‌کند. به ازای حدود ۲۰٪ اعداد صحیح کمتر از N کمیت (۲۳) از ۰٫۹ بیشتر می‌شود، کمتر از ۲۰٪ از آنها کمتر از ۰٫۱ می‌شود و برای تقریبا ۶٪ آنها بین ۰٫۴۵ و ۰٫۵۵ قرار خواهد گرفت.

به این ترتیب، عوامل اول همان رفتار عجیبی را نشان می‌دهند که سکه‌ها نشان می‌دهند. به طریقی آنها حتی عجیب‌تر نیز هستند. کمیتی که شاید در نظر گرفتن آن طبیعی‌تر از (۲۳) باشد، مقدار

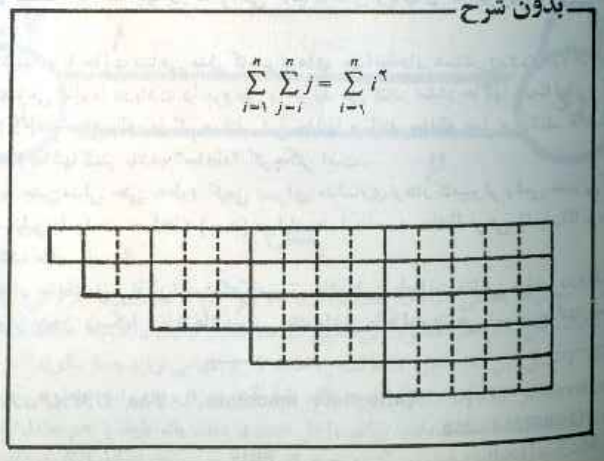
$$\frac{1}{\pi(N)}\times\#[p: p\leqslant N \text{ و } \sum_{q\leqslant p}\delta_q(n)>\log\log p] \qquad (۲۴)$$

خواهد بود. عدد p که n در این نقطه بیشتر از حد معمول است، از طریق تقسیم بر $\pi(N)$، یعنی تعداد اول اعداد کمتر از N، به‌هنجار شده است. به ازای Nهای بزرگ، عمدهٔ نقاط شکسته شده در چندضلعی شکل ۱۲ نزدیك ۱ هستند، که این نتیجه را دربر دارد که در حد توزیع (۲۴) تشکیل شده از جرم ۱/۲ در ۰ و جرمی برابر ۱/۲ در ۱: اگر $\varepsilon>0$ و N از یك N_εی بزرگتر شود، آنگاه (۲۴) با احتمالی بین $\varepsilon-(1/2)$ و $\varepsilon+(1/2)$ کمتر از ε و با احتمالی درهمین فاصله بیشتر از $\varepsilon-1$ خواهد بود. به‌این ترتیب به طور تجربی تمام اعداد صحیح یا در تمام اعداد اول بیشتر از حد معمول‌اند یا عملا در هیچ‌کدام از آنها قرار ندارند.

مراجع

1. Billingsley Patrick, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968
2. Billingsley Patrick, "on the Centrallimit theorem for the Prime divisor function," *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969) 132-139.
3. Feller William *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1. 3rd ed., Wiley, New York, 1968.

4. Freedman David, *Brownian Motion and Diffusion*, Holden-Day, San Francisco, 1971
5. Hardy G.H. and Wright E.M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Clarendon Press, Oxford, 1960
6. Kac M., "Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory," *Carus Math.Monoger.* 12MAA. New York,1959
7. Karlin Samuel, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York. 1966.
8. Kubilius J., *Probabilistic Methods in the Theory of Number*, 2nd ed. (1962) English translation 1964.Amer. Soc.Tranl. of Math. Monographs, Nolumell)
9. Philipp Walter, "Arithmatic functions and Brownion motion," *Proc. Symp. Pure Math*, **24**, AMS, 1973



و. ج. بارنیر

ماشینهای با حالت متناهی•

ترجمهٔ محبوبه سیف‌محدثی و سهیلا شریعتی، دانشجویان کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

۱. مقدمه

تاریخچه ماشینهای با حالت متناهی (FSMها) را (که اتوماتونهای با حالت متناهی نیز نامیده می‌شوند) می‌توان درمدلی ازشبکه‌های عصبی جست که مک‌کالوچ[1] و پیتز[2] در سال ۱۹۴۳ ارائه دادند [۱۰]. ماشینهای باحالت متناهی اساسی‌ترین و ساده‌ترین‌مدلهای اتوماتون هستند. این ماشینها در طراحی کامپایلرهای زبانهای کامپیوتری مانندپاسکال کاربرد دارند.

ماشینهای با حالت متناهی مدل کامپیوترهای حافظه‌دار هستند. ورودی را از یك مجموعهٔ متناهی نمادها دریافت و خروجی را تولید می‌کنند. تعداد حالتها درمثالهایی که ما از FSMها خواهیم‌آورد، کم هستند. این حالتها همانند حافظه عمل می‌کنند. قاعدتاً، هرچه تعداد حالتها کمتر باشد، "حافظه" کوچکتر است.

آیا چنین مدلی حتی به‌طور کیفی بـرای مدلسازی رفتارکامپیوتر رقمی مدرنی که می‌تواند میلیونها واحد حـافظه (بیت) ومیلیاردهـا واحـد حافظهٔ فرعی (انبارهٔ‌نانویه) داشته باشد، مناسب‌است؟

مقدار حافظه مانع ازآن‌نیست که‌کامپیوتر یك‌ماشین باحالت متناهی باشد. درواقع، هدکامپیوتر بدون دیسکها ونوارهای جانبی یك ماشین باحالت متناهی است: حالتها تمام

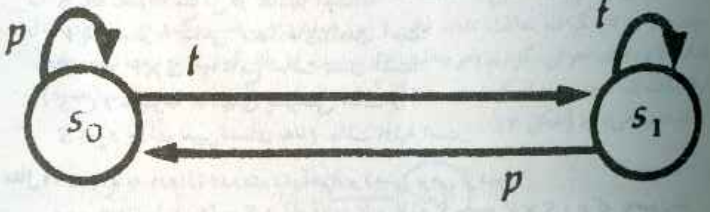
• Barnier W. J., "Finite-state machines," *The UMAP Journal*, 7(1986)213–232.

1. Mc Culloch 2. Pitts

وضعیتهای ممکن حافظهٔ‌آن به شمار می‌آیند؛ به عبارت دیگر، این‌که تعداد حالتهای هد FSM متناهی‌است، مانع ازآن نخواهـد بود که‌این تعـداد بسیار زیاد باشد؛ متناهی لزوماً به معنای‌کوچك نیست.

یك مثال بسیار خوب از FSM دروازهٔ ورودی راه‌آهن زیرزمینی شهر نیویورك است[۸]. درفسمیانی‌این‌دروازه‌چهاربازوموجوداست‌که وقتی دستگاه قفل نباشدیك‌ربع دایره می‌چرخد ویك نفررا داخل می‌کند. این‌دستگاه درابتدا قفل است؛ به‌ازای‌ارائه هر بلیط قفل آن باز می‌شود. وقتی قفل دستگاه باراست، یك‌نفر بـا فشاردادن آن می‌تواند وارد شود و آنگاه مجدداً قفل می‌شود. هرگاه بازباشد، با ارائه بلیط به‌آن همچنان باز باقی می‌ماند. اگرقفل‌باشد، بافشارآوردن به‌آن همچنان قفل باقی می‌ماند.

برای ساختن مدل این دروازه به‌عنوان ماشینی باحالت متناهی، نمادهایی مشابه با نمادهای مثال اخیر وضع می‌کنیم. فرض‌کنید s_0 حالت قفل شده، و s_1 حالت بازشده، t نمایانگر عمل بلیط دادن، و p نمایانگر عمل فشاردادن بازوها باشد. در شکل ۱ هر حالت با یك گرهٔ نشانه‌گذاری‌شده (s_0 یا s_1) نشان داده می‌شود، وکمـانهای جهت‌دار نمایانگر انتقال ازیك‌حالت به حالت دیگرند. توجه داشته‌باشیدکه هرانتقالی به‌حالت کنونی ورودی وابسته است.



شکل ۱

مجموعه متناهی نمادها عبارت است از $\{p, t\}$ و مجمـوعهٔ خروجی به صورت {بازشده، قفل‌شده} خواهدبود. این‌ماشین تنها دوحالت دارد، درنتیجه حافظهٔ‌آن بسیارکم است. دانستن این‌که ماشین درحالت s_0است تا s_1 تنهامی‌تواندبه‌ما بگویدآخرین نماد ورودی چه بوده‌است. ازاینرو این‌دستگاه فقط آخرین ورودی رابه خاطر می‌آورد. مثلاً، دادن دو بلیط بدون فشاردادن برای داخل شدن و دادن یك بلیط با هم معادل‌اند.

ماشینها درمقام شناسایی‌کننده خروجیی را پدید می‌آورندکه‌بیانگر این‌است‌که آیا

یك دنباله ورودی پذیرفتنی است یاخیر؟ درمثال دروازهٔ قطار زیرزمینی می‌توان تصمیم گرفت که رشته‌های پذیرفتنی دقیقاً همانها هستند که باشروع از s_0 ماشین را به‌حالت s_1 (حالت بازشده) می‌برند. بنابراین رشته‌های (از چپ به راست بخوانید) "$ptppt$" و "ptt" هردوپذیرفتنی‌اند ولی "ttp" پذیرفتنی نیست. هر دنبالهٔ پذیرفتنی برای یك‌ماشین مفروض از لحاظ نحوی درست‌است. دنباله‌هایی راکه پذیرفتنی نیستند از لحاظ نحوی نادرست می‌دانند.

بررسی خطاهای نحوی ازوظایفی است که یك کامپایلر زبان انجام می‌دهد. یکی‌از دلایل عمدهٔ اهمیت مفهوم ماشینهای باحالت متناهی در زمینهٔ علوم کامپیوتر فایدهٔ آن در طراحی بخش "بررسی نحوی[1]" یك کامپایلر است. البته وقتی یك کامپایلر برای زبانی طرح می‌شود، قواعد نحوی، ودرنتیجه دنباله‌های‌پذیرفتنی‌نمادهای ورودی‌را تعیین‌می‌شوند. این وظیفهٔ طرح‌است‌که ماشینی باحالت متناهی به وجودآورد‌که فقط‌دنباله‌هایی رابپذیرد که ازلحاظ نحوی درست باشند. مثالهایی‌که درپی می‌آیند جان‌کلام این‌کاربرد مهم‌در علوم‌کامپیوتر را بیان می‌کنند.

۲. تعریف و مثالها

تعریف. ماشین باحالت متناهی عبارت‌است از یك پنج‌تایی $M=(S, V, g, F, s_0)$ که در آن:

S یك مجموعهٔ متناهی از حالتها است؛

V یك مجموعهٔ متناهی ازنمادهای‌ورودی است؛

g: $S\times V \Longrightarrow S$، تابع حالت بعدی است؛

$F\subseteq S$ مجموعهٔ حالتهای پذیرفتنی است؛ و

$s_0 \in S$ حالت تعیین‌شده‌ای به‌نام حالت اولیه است.

مثال ۱. دوباره به دروازهٔ ورودی راه‌آهن‌زیرزمینی برمی‌گردیم.

مجموعه‌های $S=\{s_0,s_1\}$ و $V=\{t,p\}$ و تابع $g : S\times V \Longrightarrow S$ که به‌صورت زیرتعریف شده است

$$g(s_0, t)=s_1 \qquad g(s_0, p)=s_0$$
$$g(s_1, t)=s_1 \qquad g(s_1, p)=s_0$$

و $F=\{s_1\}$. M را توصیف می‌کنند.

معمولاً نوشتن تابع حالت بعدی به صورت یك جدول‌حالت راحت‌تر است:

1. syntax - checking

g	t	p
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

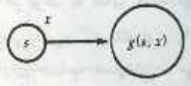
وقتی می‌نویسیم $g(s_1, p)=s_0$، منظورمان این است که وقتی ماشین درحالت s_1 است و ورودی p را می‌گیرد، به‌حالت s_0 منتقل می‌شود.

چگونه یك ماشین با حالت متناهی به یك رشتهٔ ورودی پاسخ می‌دهد؟ با برچسب‌زدن روی حالتها می‌توانیم فرض‌کنیم FSM همیشه از حالت s_0 شروع می‌کند. رشته‌ها ازچپ به‌راست وارد عمل‌می‌شوند(خواندن ووارد‌کردن). اگر FSM مایك رشتهٔ‌ورودی مانند $tptt$ بگیرد،ازحالت s_0 شروع می‌کند وبه‌طور متوالی درضمن‌خواندن t, p, t, t به‌حالات s_1, s_1, s_0, s_1, s_1 می‌رود (شکل۲).



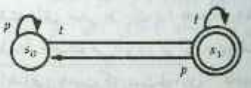
شکل ۲

راه‌دیگر تعریف ماشین با حالت متناهی این است که‌آن را به صورت یك گراف جهت‌دار به نام گراف حالت نشان دهیم؛ این همان راهی است که درابتدا در مثال دروازهٔ ورودی معرفی کردیم. هرحالت عبارت‌است از یك گره. تابع حالت بعدی با قراردادن کمان‌جهت‌داری، که برچسب x به‌آن‌زده می‌شود، ازحالت s به‌حالت $g(s, x)$ نشان داده می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳

همچنین مرسوم است‌که هر حالت شناساگر را به‌صورت گره‌هایی با مرز دوگانه نشان دهند. شکل ۴ دوباره مثال دروازهٔ ورودی را با استفاده ازاین‌قرارداد نشان‌می‌دهد.



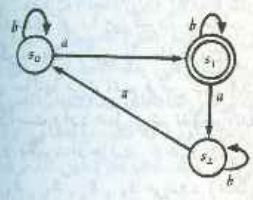
شکل ۴

مثال ۲

$M=(S,V,g,F,s_0)$ را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$S=\{s_0,s_1,s_2\}\ ;\quad V=\{a,b\}\ ;\quad F=\{s_1\}$$

و تابع حالت بعدی به صورت گراف حالت، یا جدول حالت بعد، که در شکل ۵ آمده است، تعریف می‌شود.



g	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_2	s_1
s_2	s_0	s_2

شکل ۵

تمرین عملی. به مثال ۲ مراجعه کنید. پس‌از آن‌که هر کدام از رشته‌های ورودی زیر وارد عمل شدند، ماشین باحالت متناهی در چه حالتی قرار خواهد داشت؟

(۱) $abaab$ (۲) $aababa$

جواب: (۱) s_0 (۲) s_1

تعریف. $M=(S,V,g,F,s_0)$ رشته‌ای از ورودیهای V را می‌پذیرد، هرگاه M با شروع از حالت s_0 پس از وارد عمل‌شدن رشتهٔ M دریک حالت شناخته‌شده قرار گیرد. مجموعه رشته‌هایی‌که یك FSM می‌پذیرد مجموعهٔ پذیرفته شده توسط FSM است.

رشته‌های مورد قبول FSM مربوط به مثال ۲ کدامها هستند؟ این ماشین با حالت متناهی رشته‌هایی از aها و bها را می‌پذیرد که یك a، یا چهار a، یا هفت a، یا ... داشته باشند. با استفاده از نمادگذاری حساب همنهشتی، می‌توان مجموعهٔ پذیرفته شده توسط FSM مربوط به مثال ۲ را به‌صورت رشته‌هایی از a و bکه تعداد aها kاست، و (هنگ ۳) $k\equiv 1$، توصیف کرد.

آشکارساختن خطاهایی که ممکن‌است‌هنگام نگهداری داده‌ها و یاانتقال آنهارخ‌دهند مهم است. داده‌های درون کامپیوتر درگروه‌هایی از خانه‌های حافظه (۰ها و ۱ها) نگهداری و یامنتقل می‌شوند. رشته‌های صفر و یك را عموماً رشته‌های‌بیت[1] می‌نامند. هر گروه ازخانه‌های حافظه یك کلمه[2] نامیده می‌شود. برای سهولت در آشکارسازی‌خطاها، اغلب هرکلمه دارای یك بیت اضافی است‌که بیت‌توازن[3] نامیده می‌شود. مثلاً اگر هر

1. bit strings 2. word 3. parity bit

کلمه از هشت بیت ساخته شده باشد (هفت بیت داده به اضافهٔ یك بیت توازن)، بیت توازن می‌تواند چنان انتخاب شود که تمامی کلمات تعداد زوجی از ۱ها داشته باشند. در این‌صورت می‌گویند هر کلمه توازن‌زوج[1] دارد. خطای پدیدآمدهٔ یك بیت تنها دریك کلمه را به راحتی می‌توان آشکار ساخت، زیرا توازن آن کلمه زوج نخواهد بود.

البته، درست به‌همان ترتیب می‌توانیم برای هر کلمه تعداد فردی از ۱ها قراردهیم (توازن فرد)[2].

برای آنکه‌بینهای توازن مؤثر باشند، لازم است‌که توازن هر کلمه‌ای را بیازماییم. این همان‌کاری است‌که FSM مربوط به مثال زیر انجام‌می‌دهد: این‌ماشین یك‌بررسی‌کنندهٔ توازن است.

مثال ۳. بررسی‌کنندهٔ توازن.

M را به وسیلهٔ گراف حالت شکل ۶ تعریف کنید.



شکل ۶

می‌بینیم $S=\{s_0,s_1\}$، $V=\{0,1\}$ و $F=\{s_0\}$. حالت s_0 به منزلهٔ آن‌است‌که "تعداد زوجی از ۱ها خوانده شده‌است" و حالت s_1 به منزلهٔ آن است‌که "تعداد فردی از ۱ها خوانده شده‌است."

تمرین عملی. به مثال ۳ برگردید. جدول حالت بعد را برای این FSM رسم کنید.

حل.

g	۰	۱
s_0	s_0	s_1
s_1	s_1	s_0

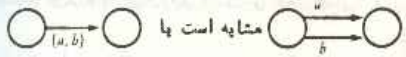
تمرین عملی. به مثال ۳ برگردید. با استفاده از نمادگذاری حساب همنهشتی مجموعه رشته‌های پذیرفتنی توسط این FSM را بنویسید.

حل. رشته‌های بیتی‌که تعداد ۱های آنها K است و (هنگ ۲) $k\equiv 0$.

1. even parity 2. odd parity

تمرین عملی. FSM مثال۳ را چنان تغییردهید تا رشته‌های بیت باتوازن فرد راپذیرد.

برای آنکه گرافهای جهت‌دار آسان‌تر خوانده شوند، کمانهای دوگانه با برچسبهای متفاوت حذف خواهند شد و به‌جای آن یک‌کمان منفرد با مجموعه برچسبهای همهٔ آن کمانها، قرار داده می‌شود (شکل۷).

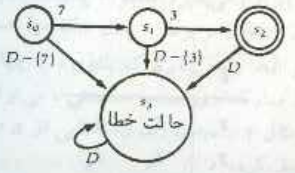


شکل ۷

مثال ۴

ما یک FSM طراحی خواهیم کرد تا مدل یک ماشین‌گویای خودکار باشد. ماشین ما الفبایی به‌صورت $D=\{0,1,2,\ldots,9\}$ خواهدداشت‌وفقط رشتهٔ۷۳(شمارهٔ تعیین‌هویت) را می‌پذیرد. حالتها عبارتند از: s_0 (آمادهٔ دریافت اولین ورودی)، s_1 (آمادهٔ دریافت دومین ورودی بعداز دریافت اولین ورودی صحیح)، s_2 (دو ورودی اول صحیح)، s_3 (رشتهٔ ناصحیح). بدیهی است که، $F=\{s_2\}$. شکل ۸ گراف حالت را نشان‌می‌دهد.

یک‌ماشین گویای خودکار که توسط مشتریان بانک برای به حساب گذاردن یا برداشت ازموجودی مورداستفاده قرار می‌گیرد، دارای شمارهٔ تعیین هویت برای‌هرمشتری است‌که درحافظهٔ‌آن ذخیره شده است. پس‌از آنکه کارت مشتری داخل ماشین شد، ازاو خواسته می‌شودکه شمارهٔ تعیین هویت را واردکند. سپس ماشین باتوجه به‌کارت داخل‌شده، شمارهٔ را می‌پذیرد یا رد می‌کند.



شکل ۸

تمرینها

۱. یک ماشین‌باحالت‌متناهی‌طراحی‌کنیدکه رشته‌های ۰ها و ۱هایی بپذیردکه تعداد ۱های آنها k باشد به‌طوری‌که: (هنگ ۳) $k \equiv 2$.

۲. یک ماشین با حالت متناهی طراحی‌کنید که رشته‌های ۰ها و ۱هایی بپذیردکه تعداد ۰های آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۳. یک ماشین با حالت متناهی طراحی‌کنیدکه رشته‌های ۰ها و۱هایی را بپذیردکه‌تعداد ۱های آن k باشد:

الف) (هنگ۴) $k \equiv 3$.

ب) k بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

۴. یک ماشین باحالت متناهی طراحی‌کنیدکه رشته‌های ۰ها و ۱هایی را بپذیردکه تعداد ۱های آن k باشد و داشته باشیم (هنگ ۵) $k \equiv 1$ یا (هنگ ۵)$k \equiv 3$.

۵. یک ماشین باحالت متناهی طراحی‌کنیدکه مدل یک ماشین گویای اتوماتیک قرارگیرد و فقط رشتهٔ ۹۱۶ را بپذیرد. قرار دهید: $V=\{0,1,\ldots,9\}$.

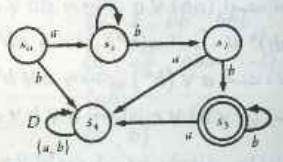
۳. مثالهای بیشتر و مقدمه‌ای بر عبارتهای مرتب

برای سهولت بحث دربارهٔ ماشینهای باحالت متناهی ومجموعه‌هایی‌که آنها می‌پذیرند، عبارتهای مرتب را تعریف می‌کنیم. یک مطلب مهم دربارهٔ عبارتهای مرتب و ماشینهای با حالت متناهی را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

هر مجموعه‌ای را که توسط یک ماشین با حالت متناهی پذیرفته می‌شود می‌توان به وسیلهٔ یک عبارت مرتب نمایش داد. برعکس، به‌ازای هر مجموعهٔ نظیر یک عبارت مرتب، یک ماشین با حالت متناهی‌وجود دارد که آن مجموعه را می‌پذیرد.

همچنین خواهید دیدکه عبارتهای مرتب روشی مختصر و مفید برای تعریف برخی اجزای زبانهای برنامه‌نویسی فراهم می‌آورند.

ماشینی باحالت متناهی درنظر بگیریدکه مجموعه‌ای از رشته‌های a و b رامی‌پذیرد (شکل ۹). این مجموعه پذیرفته شده را چگونه توصیف کنیم؟



شکل ۹

با بررسی گراف حالت، می‌بینیم رشته‌های پذیرفته شده دقیقا همانها هستند که با یک a شروع می‌شوند، و بدنبال آن هر تعداد (حتی صفر) a می‌آید، و در پی اینها

دو تا b می‌آید، و سپس هر تعداد (حتی صفر) b آنها را دنبال می‌کند. با استفاده از نمادگذاری که به تفصیل در زیر آمده است، این مجموعه را به صورت aa^*bbb^* می‌نویسیم. رشتهٔ aa^*bbb^* یك عبارت مرتب است. عبارت aa^*bbb^* را به‌این‌صورت می‌خوانیم: یك a، سپس هر تعداد a، بعد دو b، سپس هر تعداد b.

ما نمادگذاری استاندارد $\varnothing$ را برای مجموعهٔ تهی و λ را برای رشتهٔ تهی به‌کار می‌بریم.

تعریف. عبارتهای مرتب روی V باید در شرایط زیر صدق کنند:

۱. $\varnothing$ و λ هردو عبارتهای مرتب هستند.

۲. هر عضو V یك عبارت مرتب است.

۳. اگر A و B عبارتهای مرتبی باشند، آنگاه AB، $A \vee B$ و A^* نیز عبارتهای مرتب خواهند بود.

فعلا نیازی نداریم به‌نمادهای AB، $A \vee B$ و A^* معنایی نسبت دهیم. با پیگیری تعریف بعدی خواهید دید که هرکدام از اینها نمایانگر چه چیزی هستند. وقتی نمادها کنار یکدیگر قرار داده می‌شوند، مثلا در AB، می‌گوییم این نمادها به هم پیوسته‌اند.

قبل از آن‌که نشان دهیم چگونه عبارتهای مرتب می‌توانند برای نمایش مجموعه‌ها به‌کار روند، لازم است نکاتی را دربارهٔ سجاوندی تذکر کنیم.

معمولا، پرانتزها باید برای جلوگیری از ابهام به‌کار برده شوند، اما با توجه به قواعد سلسله مراتبی زیر در بسیاری حالات می‌توان آنها را حذف‌کرد. عبارتهای درون پرانتز در بالاترین درجهٔ تقدم قرار دارند، یعنی اول آنها اجرا می‌شوند. در غیاب پرانتزها ترتیب تقدم چنین است: اول*، دوم به هم پیوستگی، و سوم $\vee$ اجرا می‌شود. دامنهٔ عملکرد هر دو نماد $\vee$ و * تا حد ممکن کم است، و اعمالی که دارای یك اولویت هستند از چپ به راست اجرا می‌شوند.

بنابراین، $ab \vee a$ به معنای $(ab) \vee a$ است، نه $a(b \vee a)$،

ab^* به معنای $a(b^*)$ است، نه $(ab)^*$،

$a \vee b^*$ به‌معنای $a \vee (b^*)$ است، نه $(a \vee b)^*$،

و $a \vee b \vee c$ به‌معنای $(a \vee b) \vee c$ است.

تعریف. طبق قواعد زیر، عبارتهای مرتب مجموعه‌هایی را نمایش می‌دهند که مجموعه‌های مرتب نامیده می‌شوند:

۱. $\varnothing$ نمایشگر مجموعهٔ تهی و λ نمایشگر مجموعهٔ $\{\lambda\}$ است. (توجه‌کنیدکه $\varnothing \neq \lambda$؛ مجموعهٔ اول عضوی ندارد در حالی که مجموعهٔ دوم دقیقاً یك عضو دارد (رشتهٔ تهی).)

۲. به ازای هر $x \in V$، x مجموعهٔ $\{x\}$ را نمایش می‌دهد.

۳. AB نمایشگر مجموعهٔ AB است؛ $A \vee B$ نمایشگر اجتماع مجموعه‌های A و B $(A \cup B)$ است؛ A^* نمایشگر مجموعهٔ تمام رشته‌های نمادهای A است.

اگر A و B دو مجموعهٔ باشند، مجموعهٔ AB عبارت است از مجموعه همهٔ به‌هم پیوستگیهای ab، که a عضو A و b عضو B است. به بیان دیگر

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

مثلا، اگر $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{x, ۱, \lambda\}$، آنگاه

$$AB = \{۱x, ۱۱, ۱, ۲x, ۲۱, ۲\}$$

این تعریف به‌ما اجازه می‌دهد عبارت مرتب را به‌صورت نمایشگر مجموعه‌ای در نظر بگیریم که می‌توان آن‌را با آن مجموعه یکی گرفت. بنابراین هرگاه $d \in V$ و d را به عنوان یك عبارت مرتب بنویسیم، منظورمان مجموعهٔ $\{d\}$ است. این قرارداد ممکن است در ابتدا گیج کننده به نظر آید، اما در مطالبی که به‌دنبال می‌آیند، بسیار کارامد است و به تلاش برای فهمیدن نتایج و آثارآن می‌ارزد.

مثال زیر کمك خواهدکرد که این‌نمادگذاری روشن شود.

مثال ۵

عبارت مرتب	مجموعه
$\varnothing$	$\varnothing$
a	$\{a\}$
$\varnothing^*$	$\{\lambda\}$
λ	$\{\lambda\}$
λ^*	$\{\lambda\}$
b^*	$\{\lambda, b, bb, bbb, \cdots\}$
ab^*	$\{a, ab, abb, \cdots\}$
ab	$\{ab\}$
$a \vee b$	$\{a, b\}$
$(a \vee b)^*$	$\{\lambda, a, b, ab, ba, \ldots\} = \{a, b\}^*$
$a \vee b^*$	$\{a, \lambda, b, bb, \cdots\}$

تمرین عملی. ماشینهایی با حالت متناهی بیابید که رشته‌های زیر را باز شناسند:

۱: $\varnothing$ ۲: λ

حل: قرار دهید: $V=\{۰, ۱\}$

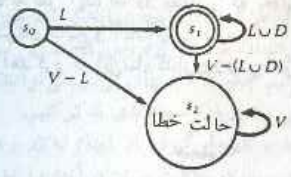


۱. ۲.

مثال ۶

می‌توان مجموعهٔ متغیرهای زبان پاسکال را به صورت $L(L \vee D)^*$ نوشت، که در آن $L=\{A, \ldots, Z, \ldots, a, \ldots, z\}$ و $D=\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$. توجه داشته باشید که این عمل مجموعهٔ متغیرها را به‌صورت رشته‌هایی از حروف و ارقام که با یک حرف درسمت چپ شروع می‌شوند و پس از آن حرف هر تعداد حرف و رقم می‌آید، تعریف می‌کند.

فرض کنید V الفبای موجود در یک کامپیوتر مفروض، باشد. شکل ۱۰ نمایانگر FSM است که متغیرهای زبان پاسکال را می‌پذیرد.



شکل ۱۰

نمودارهای گرامری که در اغلب کتب درسی پاسکال یافت می‌شوند نسبت بسیار نزدیکی با ماشینهای با حالت متناهی دارند. شکل ۱۱ نوعی نمودار گرامری را برای یک متغیر نشان می‌دهد. مسیرهای این نمودار گرامری با مسیرهای گراف‌حالت که به یک حالت پذیرفتنی منجر می‌شوند، متناظر است.

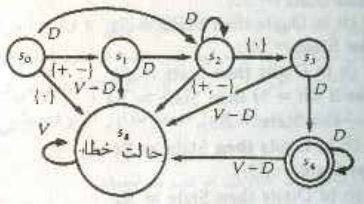


شکل ۱۱

مثال ۷

یک FSM که مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی اعشاری معتبر، بدون توان، در پاسکال را می‌پذیرد.

در زبان پاسکال، ممکن است در کنار اعداد اعشاری معتبر یک علامت $(+, -)$ واقع باشد، و ممیز باید دست کم یک رقم در پشت و یک رقم بعد از خود داشته باشند. قرار دهید $V=D \vee \{+, -, ۰\}$، که در آن $D=\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$. شکل ۱۲ گراف حالت را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲

حالتهایی مثل s_4 در مثال ۴، s_2 در مثال ۶، و s_5 درمثال ۷ را غالباً حالت خطا می‌نامند.

تمرین عملی. یک عبارت مرتب برای مجموعهٔ اعداد اعشاری معتبر در زبان پاسکال بنویسید.

جواب. $DD^*.DD^*(+\vee-\vee\lambda)$.

یکی از کارهایی که یک کامپایلر انجام می‌دهد بررسی این نکته است که آیا متغیرها، اعداد اعشاری و مانند آنها از لحاظ ساخت نحوی درست هستند یا خیر؛ این در عمل در قسمت تحلیل‌گر لغوی[1] کامپایلر انجام می‌شود. ما قبلا گفته بودیم که ماشینهای با حالت متناهی در طراحی تحلیل گر لغوی برای یک کامپایلر به‌کار می‌روند. کامپایلر برنامه‌ای است که معمولا به یک زبان برنامه‌نویسی سطح بالا نوشته می‌شود. پس برای اینکه از یک ماشین با حالت متناهی به عنوان بخشی از یک کامپایلر بهره گیریم، ترجمهٔ آن به این زبان سطح بالا ضروری است.

مثال ۸

شکل ۱۳ بخشی از یک برنامه به زبان پاسکال را ارائه می‌دهد که FSM مثال ۷ را به اجرا درمی‌آورند. برای این برنامه فرض می‌شود که V مجموعهٔ کاراکترهای موجود در کامپیوتر و "ch" یک متغیر تعریف شده ازنوع کاراکتر است. "Digits" یک مجموعه و "state" یک متغیر است که مقادیر S_0، S_1، S_2، S_3، S_4، و S_5 را به خودمی گیرد.

1. lexical analyzer

```
State := S0; Digits := ['0' . . . '9']; read (ch);
while not EOLN do
  begin
    case state of
      S0:  if ch in Digits then state := S2
           else if (ch = '+') or (ch = '-') then State := S1
                else State := S5;
      S1:  if ch in Digits then State := S2
           else State := S5;
      S2:  if ch in Digits then State := S2
           else if (ch = '.') then State := S3
                else State := S5;
      S3:  if ch in Digits then State := S4
           else State := S5;
      S4:  if ch in Digits then State := S4
           else State := S5;
      S5:                          (* Stay There *)
    end;                           (* of Case *)
    read (ch)
  end;                             (* of While *)
  if State = S4 then writeln ('Valid decimal number.')
    else writeln ('Not a valid decimal number.')
end.
```

شکل ۱۳

تمرینها

۶. فرض کنید $V = \{0, 1\}$. ماشینی با حالت متناهی طراحی کنید که رشته‌های زیر را بپذیرد:

الف) رشته‌هایی که با ۰۰ شروع می‌شوند.

ب) رشته هایی که به ۰۰ ختم می‌شوند.

پ) رشته‌هایی که به ۰۰۱ ختم می‌شوند.

۷. در زبان پاسکال اعداد اعشاری معتبر به‌شکل غایی می‌توانند یکی از علائم $(+, -)$ را درپشت خود داشته باشند وممیز (در صورت وجود) باید درپشت خود دست‌کم یك رقم داشته باشد و دست‌کم یك رقم هم بعد از آن قرار گیرد. سپس به دنبال آنها یك "e" یا "E" قرار گیرد و در پی آن نیز می‌توانند یك علامت اختیاری بیاید، و سپس دست‌کم یك رقم بعد از آن بیاید. چند مثال درزیر آمده است.

نامعتبر	معتبر
۰٫۳۷e۵	۳٫۰۷e—۱۷
۳۹e۵٫۰	—۵۲٫۱E۵
۷۴٫E۰۷	+۳٫۲e—۰۵
۷٫۲+E۳	۰٫۵۷e۲

الف) یك عبارت مرتب برای مجموعهٔ همهٔ اعداد اعشاری حقیقی معتبر به شکل نمایی، بنویسید.

ب) یك FSM طراحی کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد اعشاری حقیقی معتبر را در شکل نمایی بپذیرد.

۸. یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید که FSM تمرین ۷ را به اجرا در آورد.

۹. در زبان پاسکال استاندارد، یك توضیح‌دهنده عبارت است از هر رشته از کاراکترها که با کاراکتر "}" شروع می‌شود و به کاراکتر "{" ختم می‌شود ومیان {و} هیچگونه کاراکتر "{" نـدارد. فرض کنید L مجموعه‌ای از رشته‌هایی باشد که توضیح‌دهنده معتبرند.

الف) L را به شکل یك عبارت مرتب بنویسید.

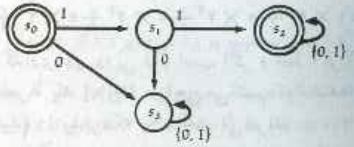
ب) یك FSM طراحی کنید که L را بپذیرد.

۱۰. بسیاری از کامپایلرهای زبان پاسکال کاراکتر "^" را به‌جای } وکاراکتر "*" را به‌جای { برای توضیح‌دهنده‌ها می‌پذیرند (ر. ك. تمرین ۹.) فـرض کنید L مجموعهٔ همهٔ رشته‌های توضیح‌دهنده‌های معتبری باشد که کامپایلر آنها را بـه عنوان جداکنندهٔ[1] توضیح‌دهنده‌ها می‌پذیرد. توجه داشته باشید که در پاسکال استاندارد، کاراکترهای "^" و } و نیز کاراکترهای "*" و { معادل گرفته می‌شوند؛ بنابراین "یك توضیح‌دهنده می‌تواند با '}' شروع و با '*' ختم می‌شود، یا با '^' شروع و به '{' ختم شود."

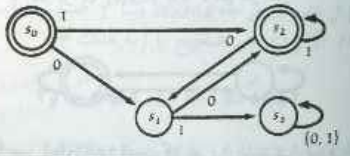
الف) L را به‌صورت یك عبارت مرتب بنویسید.

ب) یك FSM طراحی کنید که L را بپذیرد.

۱۱. یك عبارت مرتب، حتی‌الامکـان مختصر، بـرای هر مجموعهٔ پذیـرفته‌شده توسط FSMای که در زیر داده شده است، بنویسید. فرض کنید $V = \{0, 1\}$.



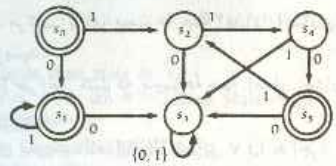
(الف)



(ب)

1. delimiter

(ج)



۱۲. یك عبارت مرتب، تا حد ممکن مختصر، برای هر یك از مجموعه‌های مورد پذیرش FSMهایی که درزیر تعریف شده‌اند، بنویسید:

الف) مثال۳

ب) مثال ۲

۴. مثالهایی با اعداد دو دویی

چگونه یك FSM را طراحی کنیم که عدد صحیح نامنفی n را بپذیرد اگر و فقط اگر n فرد باشد؟

برای این‌که FSM یك عدد صحیح را پردازش کند، آن عدد صحیح را با نمادگذاری دو دویی می‌نویسند. یادآوری می‌کنیم که $n=(b_0b_1\ldots b_j)_2$ یعنی

$$b_i\in\{0,1\} \quad و \quad n=b_0\times 2^j+b_1\times 2^{j-1}+\ldots+b_j$$

مثلاً، $(100011)_2=35$ زیرا

$$35=1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1$$

هرعدد n در نمادگذاری دو دویی فرد است اگر و فقط اگر آخرین رقم نمایش آن ۱ باشد. بنابراین ما صرفاً یك FSM طراحی می‌کنیم که رشته‌های ۱ها و ۰هایی (از چپ به راست بخوانید) را بپذیرد که به ۱ ختم می‌شوند.

تمرین عملی. یك گراف حالت برای FSM بالا رسم کنید.

جواب:



مسئلهٔ دشوارتر طراحی FSMای است که n را بپذیرد اگر و تنها اگر n مضربی از ۳ باشد.

همچنانکه FSM نمایش دو دویی یك عدد صحیح مفروض را پردازش می‌کند، در حالتهای مختلف قرار می‌گیرد. مثلاً، فرض کنید $(1101)_2=13=n$. وقتی ۱۱۰۱ از چپ به راست پردازش می‌شود، مشاهده می‌کنیم که:

$$13=(1101)_2\to 6=(110)_2\to 3=(11)_2\to 1=(1)_2\to 0$$

یك عدد صحیح وقتی که رقم بعدی وارد می‌شود چگونه تغییر می‌کند؟ در اینجا مثالهای بیشتری وجود دارد، که در آنها ۰ رقم ورودی بعدی است:

$$(1010)_2=10\to 5=(101)_2 \qquad (1000)_2=8\to 4=(100)_2$$

به نظر می‌رسد رقم ورودی ۰ عدد صحیح را از یك مرحله به مرحلهٔ بعد دو برابر می‌کند. وقتی عدد ورودی ۱ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ در اینجا دو مثال می‌آوریم که در آنها رقم ورودی ۱ است:

$$(1011)_2=11\to 5=(101)_2 \qquad (1001)_2=9\to 4=(100)_2$$

در واقع

$$(b_0b_1\ldots b_j)_2=2(b_0b_1\ldots b_{j-1})_2+b_j \qquad (1)$$

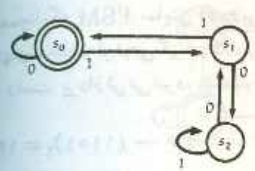
بنابراین عدد صحیح در هر مرحله مساوی دو برابر عدد صحیح پیشین به اضافهٔ رقم ورودی است.

مثال ۹. یك FSM که عدد صحیح n را می‌پذیرد اگر و تنها اگر n مضرب ۳ باشد.

فرض کنید k نمایانگر عدد صحیح وارد شده در هر مرحلهٔ ورودی باشد. حالتها عبارتند از s_0 ((به هنگ ۳) $k\equiv 0$)، s_1 ((به‌هنگ ۳) $k\equiv 1$) و s_2 ((به‌هنگ ۳) $k\equiv 2$). با استفاده از (۱) در بالا، جدول حالت بعد، به صورت شکل ۱۴ در می‌آید. مثلاً، در حالت s_2 عدد صحیح j در آن مرحلهٔ ورودی با ۲ همنهشت است. اگر رقم بعدی ۱ باشد، آنگاه با استفاده از (۱) عدد صحیح با (به هنگ ۳)

$$2j+1\equiv 2\times 2+1\equiv 5\equiv 2$$

همنهشت می‌شود. بنابراین $g(s_2,1)=s_2$. به همین ترتیب، $g(s_1,1)=0$ چون (به هنگ ۳) $0\equiv 3\equiv 1\times 1+1\times 2$.



g	۰	۱
s_0	s_0	s_1
s_1	s_2	s_0
s_2	s_1	s_2

شکل ۱۴

برای اثبات $g(s_2,1)=s_2$ در مثال بالا، از این واقعیت بهره برده‌ایم که اگر $j\equiv 2$ (به هنگ ۳)، آنگاه (به‌هنگ ۳) $1+2\times j\equiv 1+2\times 2\equiv 2$. این مطلب نتیجه‌ای از دو قضیه زیر است:

۱. اگر $x\equiv y$ (به هنگ d) و $z\equiv w$ (به هنگ d)، آنگاه $x+z\equiv y+w$ (به هنگ d).

۲. اگر $x\equiv y$ (به هنگ d)، آنگاه $w\cdot x\equiv w\cdot y$ (به هنگ d).

اثبات این دو قضیه در مجموعهٔ تمرینهای زیر آمده است.

عملا، دانشمندان علوم کامپیوتر مسائل این بخش را با استفاده از FSMها مطرح نمی‌کنند. اما این مسائل ساده‌تمرینهای خوبی برای یادگیری چگونگی ساختن FSMها به شمار می‌آیند.

تمرینها

۱۳. در هر یك از موارد زیر، یك ماشین با حالت متناهی طراحی کنید که نمایش دو دویی یك عدد صحیح n را بخواند و n را بپذیرد، اگر و تنها اگر:

الف) n فرد باشد

ب) $n\equiv 2$ (به هنگ ۴)

پ) n مضرب ۳ نباشد

۱۴. در هر یك از مقادیر زیر، یك ماشین با حالات متناهی طراحی کنید که نمایش دو دویی یك عدد صحیح n را بخواند و n را بپذیرد، اگر و تنها اگر

الف) $n\equiv 1$ (به هنگ ۵)

ب) n مضرب ۵ نباشد

۱۵. در هر یك از موارد زیر، یك ماشین با حالت متناهی طراحی کنید که نمایش دو دویی یك عدد صحیح n را بخواند و n را بپذیرد، اگر و تنها اگر:

الف) نمایش اعشاری n با یك صفر خاتمه یابد

ب) نمایش دو دویی n به یك صفر ختم شود

۱۶. هر یك از گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) اگر $x\equiv y$ (به هنگ d) و $z\equiv w$ (به هنگ d)، آنگاه:
$x+z\equiv y+w$ (به هنگ d)

ب) اگر $x\equiv y$ (به هنگ d)، آنگاه: $w\cdot x\equiv w\cdot y$ (به هنگ d)
(یادآوری می‌کنیم که $n\equiv m$ (به هنگ d)، اگر و تنها اگر $n-m$ مضربی از d باشد.)

۵. محدودیتهای ماشینهای با حالات متناهی

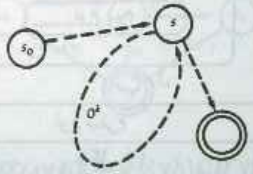
دیدیم که ماشینهای با حالت متناهی می‌توانند برای شناسایی هر مجموعهٔ مرتب تخصیص یابند. برعکس، هر مجموعه که توسط یك FSM پذیرفته می‌شود، می‌تواند با یك عبارت مرتب نمایش داده شود. بنابراین، مثلا، یك ماشین با حالت متناهی وجود دارد که اعداد صحیح نامنفی $\{w: w=$ "۰"۱" , n , m "۰"۱"$\}$ را شناسایی می‌کند. در اینجا ما از نمادگذاری مفید زیر استفاده کرده‌ایم:

b^n نمایانگر $bb\ldots b$ (n مرتبه است) و $b^0=\lambda$

طرح یك پرسش امری طبیعی است. آیا FSMای وجود دارد که مجموعهٔ $\{n$ عدد صحیح نامنفی: "۰"۱"$\}$ را بپذیرد؟ به‌بیان‌دیگر، آیا این‌مجموعه یك مجموعهٔ مرتب است؟پاسخ منفی است.

مثال ۱۰. مجموعهٔ $L=\{n$ عدد صحیح نامنفی: "۰"۱"$\}$ یك مجموعهٔ مرتب نیست.

اثبات با روش‌برهان خلف‌ارائه می‌شود. فرض‌کنید FSMای وجوددارد که L را می‌پذیرد. این FSM باید تعدادی متناهی، مثلا m حالت، داشته باشد. رشتهٔ "۰"۱"$^{m+1}$ در این‌مجموعه‌قراردارد، پس FSM مفروض باید آن‌را بپذیرد. درحالی که ۰های "۰"۱"$^{m+1}$ را



شکل ۱۵

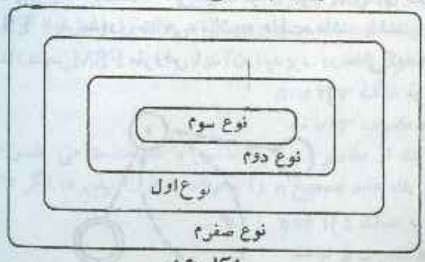
پردازش می‌شود، FSM ناگزیر است بیش از یکبار در برخی از حالتهای s قرار گیرد، زیرا FSM در خلال پردازش روی $m+1$ تا ۰ دارای m حالت است. بنابراین، ماشین با گرفتن تعدادی متناهی از ۰ها، با شروع از s به s برمی‌گردد. فرض کنید مثلا 0^k این کار را انجام دهد؛ به شکل ۱۵ مراجعه کنید. بنابراین به سادگی می‌توان دید که FSM، $0^{k+m+1}1^{m+1}$ را نیز می‌پذیرد. اما این تناقض است، چون $0^{k+m+1}1^{m+1}$ در L واقع نیست.

۶. چشم‌انداز: FSM ها در کجا به‌کار می‌آیند

ماشینهای با حالت متناهی ضعیف‌ترین اتوماتونها هستند. سه نوع دیگر از اتوماتونها وجود دارند که غالباً مورد بحث واقع می‌شوند. این ماشینها به ترتیب قدرت به عنوان شناسا گر عبارتند از اتوماتونهای پایین فشردنی[1]، اتوماتونهای خطی کراندار[2]، و ماشینهای تورینگ. هر نوع از این اتوماتونها در ارتباط با نوع خاصی از مجموعه (زبان) است که آن را می‌پذیرد. ماشینهای تورینگ بهترین مدل نظری یک کامپیوتر است (هر چند این مدل حافظه‌ای نامتناهی را مفروض می‌گیرد).

این چهار نوع زبان را نوع سوم (مرتب)، نوع دوم (مستقل از متن)، نوع اول (وابسته به متن)، و نوع صفرم (عبارت ساختاری) می‌نامند. همان‌طور که دیدیم، زبانهای نوع سوم به ماشینهای با حالت متناهی مربوطند. زبانهای نوع دوم با اتوماتونهای پایین فشردنی، زبانهای نوع اول با اتوماتونهای خطی کراندار، و زبانهای نوع صفرم با ماشینهای تورینگ متناظرند. بیشتر تجزیه کننده‌های کامپایلری برای پذیرش زبانهای مستقل از متن طراحی می‌شوند.

زبان $\{n \mid 0^n1^n\} = L$ که در بخش ۵ مورد بحث قرار گرفت، از زبانهای نوع دوم است اما، همانطور که ثابت کردیم، زبان نوع سوم نیست. انواع زبانها سلسله مراتب چامسکی را تشکیل می‌دهند (شکل ۱۶).



شکل ۱۶.

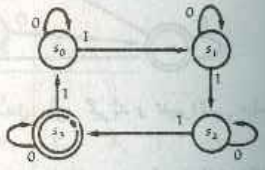
1 push-down automata 2. linear bounded automata

۷. حل تمرینها

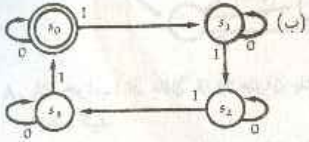
۱. ۲.



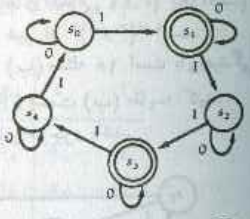
۳. (الف)

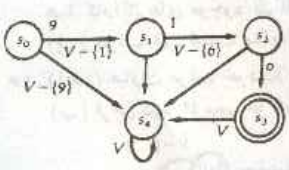


(ب)

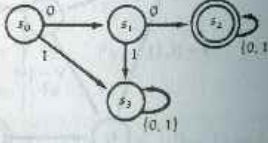


۴. ۵.

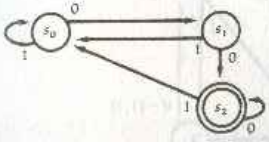




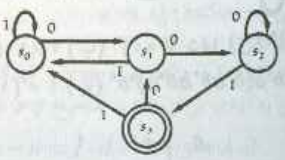
۶. (الف)



(ب)

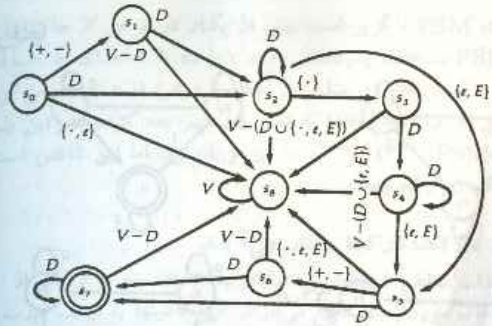


(ج)



۷. (الف) $(+\vee-\vee\lambda)DD^*.DD^*(e\vee E)(+\vee-\vee\lambda)DD^*\vee(+\vee-\vee\lambda)DD^*(e\vee E)(+\vee-\vee\lambda)DD^*$

(ب) قرار دهید $V = D \vee \{+,-,.,e,E\}$ که در آن $D=\{0,1,2,\dots,9\}$.



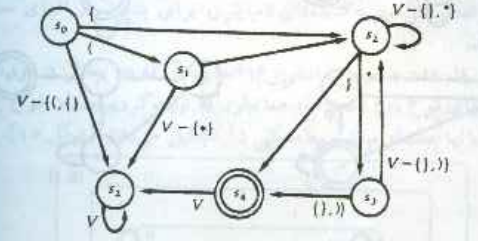
۸. یك جواب: از مثال ۸ به عنوان یك مدل بهره گیرید و تغییراتی مناسب در آن ایجاد کنید.

۹. (الف) $L=\{A\}$ (به صورت{کاراکترهای الحاقی ، A ، } بخوانید.) که A مجموعهٔ همهٔ کاراکترهای موجود در کامپیوتر غیر از "{" و "}" است.

(ب) جواب این قسمت مشابه قسمت (ب) مسئله ۱۰ است با پیچیدگی کمتر.

۱۰. (الف) عبارت مرتب خود را با FSM قسمت (ب) مقایسه کنید.

(ب) فرض کنید V مجموعه کاراکترهای موجود باشد.



۱۱. (الف) $\lambda \cup 1(0 \cup 1)^*$؛ (ب) $(00 \cup 11)^*$؛ (ج) $(10)^* \cup 0^*$

۱۲. (الف) $0^*(10^*1)^*0^*$؛ (ب) $b^*a(b^*ab^*ab^*a)^*b^*$.

۱۳. (الف)

g	۰	۱
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_1

$F=\{s_1\}$

(ب)

g	۰	۱
s_0	s_0	s_1
s_1	s_2	s_3
s_2	s_0	s_1
s_3	s_2	s_3

$F=\{s_2\}$

(ج)

g	۰	۱
s_0	s_0	s_1
s_1	s_2	s_0
s_2	s_1	s_2

$F=\{s_1, s_2\}$

۱۴. (الف)

g	۰	۱
s_0	s_0	s_3
s_1	s_2	s_3
s_2	s_4	s_0
s_3	s_1	s_2
s_4	s_3	s_4

$F=\{s_1\}$

(ب) جدول مطابق قسمت (الف) و $F=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

۱۵. (الف) راهنمایی: یعنی (به هنگ ۱۰) $n \equiv 0$

(ب) راهنمایی: یعنی n زوج است

۱۶. (الف) برهان: فرض کنید (به هنگ d) $x \equiv y$ و (هنگ d) $z \equiv w$.

پس به ازای برخی اعداد صحیح j و k داریم:

$$x-y=k \cdot d \quad \text{و} \quad z-w=j \cdot d$$

بنابراین $(x-y)+(z-w)=k \cdot d+j \cdot d$

در نتیجه $(x+z)-(y+w)=(k+j)d$

بنابراین (به هنگ d) $x+z \equiv y+w$

(ب) اثبات این قسمت مشابه اثبات بالاست.

۸. منابع مطالعاتی

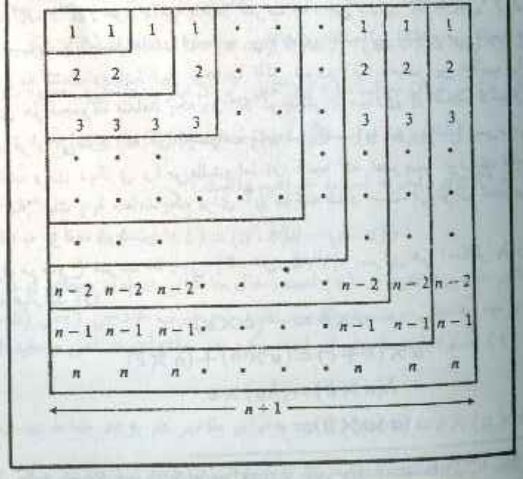
می‌توانید در مورد طراحی کامپایلر، با مراجعه به کتابهای ۱، ۳، و ۱۵ مطالب بیشتری بیاموزید. اگر مایلید راجع به زبانهای صوری و نظریهٔ اتوماتونها بیشتر بدانید منبع ۷ نقطه شروع خوبی است. مطالب پیشرفته‌تر را می‌توانید در کتابهای ۴، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳، و ۱۴ بیابید. منبع ۶، مثالی از یك اسباب بازی ارائه می‌دهد که می‌تواند به عنوان یك FSM با حالتهای بسیار در نظر گرفته شود.

1. Aho, Alfred V., Ravi Sethi, and Jeffrey D. Ullman. 1986. *Compilers: Principles, Techniques, and Tools*. Reading, MA: Addison-Wesley.
2. BecKhouse, R.C. 1979. *Syntax of Programming Languages: Theory and Practice*. London: Prentice-Hall International.
3. Barrett, W.A., and JD. Crouch. 1979. *Compiuter Constrution: Theory and Practice*. Chicago: Science Research Associates.
4. Bekman, F.S. 1981. *Mathematical Foundations of Programming*. Reading, MA: Addison-Wesley.
5. Denning., P.J., J.B. Dennis, and J.E. Qualitz. 1978. *Machines, Languages, and Computation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
6. Gautner, T. 1987. The game of Quatrainment. *Mathematics Magazine*. To appear.
7. Gersting, Judith L. 1982. *Mathematical Structures for Computer Science*. San Francisco, CA: W.H. Freeman.
8. Hayes, Brian. 1983. Computer recreations: On the finite-state machine, a minimal model of mousetraps, ribosomes, and the human soul. *Scientific American*, **249**(6): (December 1983), 19-28, 178.
9. Hopcroft, J.E., and J.D. Ullman. 1979. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Reading, MA: Addison-Wesley.
10. Lewis, P.M., II, D.J. Rosenkrantz, and R.E. Stearns. 1976. *Compiler Design Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
11. McCullock, W.S., and W. Pitts. 1943. A logical calculus of the

ideas of immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical* 5.115–133.
12. McNaughton, R. 1982. *Elementary Computability, Formal Languages, and Automata*. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall.
13. Minsky, M. 1967. *Computation: Finite and Infinire Machines*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall
14. Pollacky, S.V., ed. 1982. *Studies in Computer Science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

بدون شرح

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \cdot k! = (n!)^{n+1}$$



برترام والش

کمیابی ضربهای خارجی روی فضاهای اقلیدسی●

ترجمهٔ شاپور عظیمی، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

هنگامی که دانشجویان برای نخستین‌بار با ضرب داخلی روی R^n (n دلخواه)، و ضرب خارجی‌روی R^3 آشنا می‌شوند، ظاهراً بی‌میل نیستند جویای تعریفی از یك ضرب خارجی روی R^n، $n\neq 3$، شوند. هدف این نوشتار نمایاندن این نکته است که با اثبات گزاره‌هایی مقدماتی ونیز اثبات قضیهٔ زیر، دانشجویان خود می‌توانند پاسخ پرسش بالا را پیدا کنند. یعنی می‌توانند نشان‌دهند که اگر شرایط معقولی برای "ضربهای خارجی" قائل‌شویم (مثلا فرض کنیم که آنها در اصول موضوع ضربهای خارجی در کتاب [درسی] اخیر حساب دیفرانسیل و انتگرال آپوستل [۲] صدق می‌کنند)، آنگاه ضرب خارجی تنها می‌تواند بر روی R^1، R^3، و R^7 وجود داشته باشد. ضرب خارجی روی R^1 بدیهی و روی R^7 تا اندازه‌ای آسیب‌پذیر است. ما در اینجا به برهانهای مقدماتی اشاره می‌کنیم؛ برای اینکه دانشجو خود به کشف دوبارهٔ این برهانها نائل شود، لازم است این مطلب را بداند که تعداد اعضای هر مجموعهٔ متعامد یکه در R^n کوچکتر یا مساوی n است، وتساوی وقتی و تنها وقتی برقرار می‌شود که آن مجموعهٔ متعامد یکه، پایه نیز باشد؛ بررسی موضوع تصویر متعامد، وقت دیگری را می‌طلبد، اما از آنجا که تصویر برروی فضایی انجام می‌گیرد که قبلاً یك پایهٔ متعامد یکه برای آن ساخته شده است، می‌توان تصویر را به‌طور صریح، مؤلفه به مؤلفه، نوشت.

اصول موضوع ضرب خارجی [۳، ص. ۲۷۵]، برای هر اسکالر λ و هر بردار a، b، و c، عبارتند از:

$$a\times b=-(b\times a) \qquad [۲۸.۵]$$

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad [۲۹.۵]$$

$$\lambda(a\times b)=(\lambda a)\times b \qquad [۳۰.۵]$$

$$a\cdot(a\times b)=0 \qquad [۳۱.۵]$$

● Valsh B., "The scarcity of cross products on Euclidean spaces," *Amer. Math. Monthly*, **74**(1967)188-194.

$$|a\times b|=[|a|^2|b|^2-(a.b)^2]^{1/2} \qquad [۳۲.۵]$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که اصل (۳۲.۵)، در حضور چهار اصل دیگر، با این گزاره که ضرب خارجی دو بردار متعامد یکه برداری است یکه، هم‌ارز است؛ بنابراین، این اصل علیرغم ظاهر پیچیده‌اش اصلی طبیعی است.

ابزار اصلی کار، عبارت‌اند از اتحادهای

$$(a\times b)\cdot c=-[b\cdot(a\times c)] \qquad (۱)$$

$$a\times(b\times c)-c\times(a\times b)=2(a\cdot c)b-(b\cdot c)a-(a\cdot b)c \qquad (۲)$$

اولی این واقعیت را بیان می کند که تبدیل خطی $b\to(a\times b)$ متقارن کج است؛ می‌توان آن را به راحتی از (۳۱.۵) بدست آورد. برای این‌کار کافی است درهمه جای (۳۱.۵) به‌جای a، مقدار $a+c$ را بنشانیم. دومی نیز با دوبار بهره‌گیری از لم "قطبی‌کردن" به‌دست می‌آید: اگر (۳۲.۵) را به‌صورت

$$(a\times b)\cdot(a\times b)=(a\cdot a)(b\cdot b)-(a\cdot b)^2$$

بنویسیم و $b+d$ را به‌جای b بنشانیم و از دو خطی‌بودن و تقارن در جهت به‌دست آوردن بسطی برای هر دو طرف تساوی بالا بهره بگیریم، نتیجه خواهیم گرفت

$$(a\times b)\cdot(a\times d)=(a\cdot a)(b\cdot d)-(a\cdot b)(a\cdot d)$$

که این یکی را می‌توان به‌کمك (۱) و خطی بودن ضرب داخلی، به‌صورت زیر نوشت

$$-[a\times(a\times b)]\cdot d=[(a\cdot a)b-(a\cdot b)a]\cdot d$$

و از آنجا که $d\in R^n$ دلخواه است، خواهیم داشت

$$a\times(a\times b)=(a\cdot b)a-(a\cdot a)b \qquad (۳)$$

که یك حالت خاص و مفید از (۲) است. حال جانشانی $a+c$ به‌جای a در (۳)، بسط طرفین با توجه به‌خطی بودن، و کاربرد تقارن‌کج ضرب خارجی (یعنی (۲۸.۵))، مارا مستقیماً به (۲) خواهد رساند. از قضا، یکی از حالتهای خاص و مفید (۲) عبارت است از

$$a\times(b\times c)=c\times(a\times b) \qquad (۴)$$

که به‌سهولت ازاین مطلب نتیجه می‌شود که وقتی a، b، و c دو به دو برهم عمود باشند، سمت راست (۲) صفرخواهد بود. اتحادهای (۱)، (۲)، (۳)، و (۴) روی هر R^n،

برای هر ضرب خارجی که در اصول موضوع مربوطه صدق کند، برقرارند.

با مفروض بودن چنین ضرب خارجی روی R^n، دو تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

(I) زیر فضای برداری A از R^n تحت $\times$ بسته است اگر هرگاه $a_1 \in A$ و $a_2 \in A$، آنگاه $a_1 \times a_2 \in A$.

(II) زیر فضای B از R^n تحت $\times A$، که در آن $A \subseteq R^n$ پایاست اگر هر گاه $a \in A$ و $b \in B$، آنگاه $a \times b \in B$.

بنابراین A تحت $\times$ بسته است اگر و تنها اگر تحت $\times A$ پایا باشد. اکنون گزارهٔ زیر را داریم:

گزارهٔ ۱. فرض کنیم $A \subseteq R^n$، و B یک زیر فضای R^n باشد. اگر B تحت $\times A$ پایا باشد، آنگاه متمم متعامد آن، یعنی $B^\perp = \{c | c \in R^n, b \cdot c = 0 \; b \in B\}$ هم، نیز چنین است.

برهان. اگر $c \in B^\perp$، آنگاه به‌ازای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم

$$a \times b \in B \text{ چون } b \cdot (a \times c) = -[(a \times b) \cdot c] = 0$$

بنابراین به‌ازای هر $b \in B$، $b \perp (a \times c)$، و بنابراین $a \times c \in B^\perp$ ■

گزارهٔ ۲. فرض کنیم A زیرفضایی از R^n باشد که نسبت به ضرب بسته است و پایه‌ای متعامد یکه چون $\{f_1, \ldots, f_k\}$ دارد. همچنین فرض کنیم $b \in A^\perp$. آنگاه بردارهای $\{b, f_1 \times b, \ldots, f_k \times b\}$ همگی در $A^\perp$ بوده، دو به دو برهم عمودند و طولی برابر طول b دارند. به‌ویژه اگر b یک بردار یکه باشد، بردارهای بالا یک مجموعهٔ متعامد یکهٔ $k+1$ عضوی از عناصر $A^\perp$ را تشکیل خواهند داد.

برهان. اینکه $\{b, f_1 \times b, \ldots, f_k \times b\} \subseteq A^\perp$ از گزاره (۱) نتیجه می‌شود. روابط تعامد و طول آنها هم از $b \cdot (f_i \times b) = 0$. و تساویهای زیر به‌دست می‌آید

$$(f_i \times b) \cdot (f_j \times b) = (b \times f_i) \cdot (b \times f_j)$$

$$= -[b \times (b \times f_i) \cdot f_j] \qquad \text{(بنابر (۱))}$$

$$= -[(b \cdot f_i)b - (b \cdot b)f_i] \cdot f_j = (f_i \cdot f_j)(b \cdot b)$$

■

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که تنها ضرب خارجی روی R^1 متحد با صفر است، و نیز هیچ ضرب‌خارجی‌ای روی R^2 وجود ندارد: از یک‌سو چنین ضربی نمی‌تواند متحدا صفر باشد، و از سوی دیگر بعد فضا به‌قدر کافی زیاد نیست که بتوان برای آن ضرب

خارجی غیرصفری تعریف کرد. فرض کنیم که یک ضرب‌خارجی روی R^n داشته باشیم، پس لزوماً $n \geqslant 3$. اگر e_1 و e_2 یک‌زوج متعامد یکه از عناصر R^n باشند، $e_1 \times e_2$ بردار یکه‌ای (بنابر (۳۲.۵)) عمود بر e_1 و e_2 است؛ قرار می‌دهیم $e_3 = e_1 \times e_2$. فرض می‌کنیم H زیر فضای خطی R^n پدید آمده توسط $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد. صرف‌نظر از اینکه n چقدر باشد داریم:

گزارهٔ ۳. H تحت $\times$ بسته است.

برهان. دو خطی بودن $\times$ تضمین می‌کند که کافی است این مطلب را بر روی بردارهای پایه تحقیق کنیم. بنابر اتحاد (۳)

$$e_2 \times e_3 = e_2 \times (e_1 \times e_2) = -[e_2 \times (e_2 \times e_1)]$$
$$= -[(e_2 \cdot e_1)e_2 - (e_2 \cdot e_2)e_1] = e_1$$

و به طریق مشابه، $e_3 \times e_1 = e_2$. ■

بنابراین پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ همان جدول ضربی را دارد که پایهٔ $\{i, j, k\}$ نسبت به ضرب خارجی معمولی بر R^3.

هر بردار $a \in R^n$ را می‌توان به صورت

$$a = \sum_{i=1}^{3} (a \cdot e_i) e_i + [a - \sum_{i=1}^{3} (a \cdot e_i) e_i]$$

تجزیه کرد، که در آن اولین مؤلفهٔ متعلق به H و دومین مؤلفه متعلق به $H^\perp$ است. بنابراین یا $H = R^n$، که در این حالت $n = 3$، و یا می‌توان بردار یکه‌ای چون $m \in H^\perp$ یافت. فرض می‌کنیم حالت دوم رخ دهد، در این صورت بنابر گزارهٔ ۲، مجموعهٔ $\{m, e_1 \times m, e_2 \times m, e_3 \times m\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در $H^\perp$ است، و $\{m, e_1, e_2, e_3, e_1 \times m, e_2 \times m, e_3 \times m\}$ نیز مجموعهٔ متعامد یکه‌ای در R^n است، بنابراین $n \geqslant 7$. فرض می‌کنیم C زیرفضایی از R^n پدید آمده توسط مجموعهٔ اخیر باشد.

گزارهٔ ۴. C تحت X بسته است.

برهان. تنها لازم است پنج نوع ضربی را که ممکن است اتفاق بیافتد بررسی کنیم:

(I) $e_i \times e_j$، بنابر گزارهٔ ۳، متعلق است به $H \subseteq C$.

(II) $e_i \times m$، بنابر تعریف متعلق است به C.

$$e_i \times (e_j \times m) = 2(e_i \cdot m)e_j - (e_j \cdot m)e_i - (e_i \cdot e_j)m + m \times (e_i \times e_j) \qquad \text{(III)}$$
$$= -(e_i \times e_j)m - (e_i \cdot e_j) \times m \in C$$

$$m\times(e_i\times m)=-m\times(m\times e_i)=(m\cdot m)e_i-(m\cdot e_i)m=e_i\in C \quad \text{(IV)}$$

$$(e_i\times m)\times(e_j\times m)=(m\times e_i)\times(m\times e_j) \quad \text{(V)}$$

$$=e_j\times[(m\times e_i)\times m] \quad \text{(بنابر (۴))}$$

$$=e_i\times[m\times(e_i\times m)]$$

$$=e_i\times e_i \quad \text{(بنابر (IV) در بالا)}$$

■

هر بردار $a\in R^n$ را می‌توان به‌صورت

$$a=[\sum_{i=1}^{3}(a\cdot e_i)e_i+(a\cdot m)m+\sum_{i=1}^{3}(a\cdot(e_i\times m))(e_i\times m)]$$

$$+[a-\sum_{i=1}^{3}(a\cdot e_i)e_i-(a\cdot m)m-\sum_{i=1}^{3}(a\cdot(e_i\times m))(e_i\times m)]$$

تجزیه کرد، که در آن اولین مؤلفه متعلق به C و دومین مؤلفه متعلق به $C^\perp$ است. بنابراین یا $C=R^n$، که در این حالت $n=7$؛ و یا می‌توان یك بردار یکه چون $n\in C^\perp$ یافت.

قضیه. اگر روی R^nای بتوان ضربی خارجی یافت که در اصول موضوع آپوستل صدق کند، آنگاه n برابر ۱، ۳، ویا ۷ خواهد بود. برعکس، روی این سه فضا می‌توان ضرب خارجی یافت.

برهان. آنچه که تا کنون دیده‌ایم این است که ضرب خارجی به‌ازای $n\leqslant 3$ دقیقاً وقتی وجود دارد که n برابر ۱ یا ۳ باشد، ضرب خارجی روی R^1 با صفر متحد است، دو ضرب خارجی روی R^3 همان ضربهای خارجی کلاسیك هستند، و اینکه اگر ضرب خارجی روی R^n برای حالت $n>3$ وجود داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت: $n\geqslant 7$. اگر $n>7$، آنگاه می‌توان برداری یکه مانند $n\in C^\perp$ یافت؛ که در آن C همان است که در بالا ساخته‌ایم. نشان خواهیم داد که چگونه وجود چنین برداری به‌تناقض خواهد انجامید. در واقع، هرگاه فرض کنیم که چنین nای وجود داشته باشد، آنگاه $m\times n$ نیز بردار یکه‌ای در $C^\perp$ خواهد بود؛ قرار می‌دهیم $p=m\times n$. درست مانند آنچه در گزارهٔ ۳ دیدیم، داریم $n\times p=m$ و $p\times m=n$. اکنون بعضی از این ضربها را محاسبه می‌کنیم: به‌ازای $i\neq j$ خواهیم داشت

$$(e_i\times m)\times(e_j\times n)$$

$$=(e_i\times m)\times(e_j\times(p\times m)) \quad \text{(بنابر (۴))}$$

$$=(e_i\times m)\times(m\times(e_j\times p)) \quad \text{(بنابر (۴))}$$

$$=(e_j\times p)\times((e_i\times m)\times m)$$

$$=(e_j\times p)\times(m\times(m\times e_i))$$

$$=(e_j\times p)\times[(m\cdot e_i)m-(m\cdot m)e_i]$$

$$=-(e_j\times p)\times e_i=e_i\times(e_j\times p)=p\times(e_i\times e_j)$$

به طریق مشابه

$$(e_j\times n)\times(e_i\times m)=$$

$$(e_j\times n)\times(e_i\times(n\times p))=$$

$$-(e_j\times n)\times(e_i\times(p\times n))= \quad \text{(بنابر (۴))}$$

$$-(e_j\times n)\times(n\times(e_i\times p))= \quad \text{(بنابر (۴))}$$

$$-(e_i\times p)\times((e_j\times n)\times n)=\dots \quad \text{(بنابر (۳))}$$

$$=-(e_i\times p)\times(-e_j)$$

$$=p\times(e_i\times e_j)$$

(محاسباتی که در بالا با نمایش سه‌نقطه‌حذف شده‌اند، محاسباتی سرراست و بی‌دردسرند.) اما از کنار هم گذاردن اینها نتیجه می‌شود که

$$(e_i\times m)\times(e_j\times n)=(e_j\times n)\times(e_i\times m)$$

این موضوع با تقارن‌کج $\times$ متناقض است، مگر اینکه این ضرب خاص صفر باشد؛ لیکن، $p\times(e_i\times e_j)$ عبارت است از حاصلضرب دو بردار متعامد یکه، و بنابراین طول آن واحد است. این تناقض نشان می‌دهد که حالت $n>7$ نمی‌تواند رخ دهد.

آنچه باقی می‌ماند، نشان دادن یك ضرب خارجی روی R^7 است که در اصول موضوع مربوطه صدق کند. چنین ضربی می‌تواند به‌طریق مشابهی از روی ضرب خارجی روی R^3 به این ترتیب ساخته شود: R^7 در تناظر یك به یك با مجموعهٔ همهٔ سه‌تاییهای (a,λ,b) است که a و b در R^3اند و $\lambda\in R$. این تناظر را می‌توان به‌عنوان مثال به این صورت در نظر گرفت

$$a_1i_1+\dots+a_7i_7\to(a_1i+a_2j+a_4k,\ a_8,\ a_5i+a_6j+a_7k)$$

به سهولت می‌توان ملاحظه کرد که این تناظر جمع و ضرب اسکالر در R^7 را به جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به مؤلفهٔ سه‌تاییها تبدیل می‌کند. با تعریف ضرب داخلی سه‌تاییها به شکل

$$(a_1,\lambda_1,b_1)\cdot(a_2,\lambda_2,b_2)=(a_1\cdot a_2)+\lambda_1\lambda_2+(b_1\cdot b_2)$$

به راحتی می‌بینیم که ضرب داخلی دو سه‌تایی برابر با ضرب داخلی آن دو عضو R^7

است که با این دو سه‌تایی متناظرند. در حقیقت ما ضرب خارجی را روی این سه‌تاییها تعریف کرده‌ایم: اگر آنچه را که گزاره‌های ۳ و ۴ در باب چگونگی جدول ضرب C به ما می‌گویند به یاد آوریم، و اگر (a, λ, b) را بسان برداری پنداریم که مؤلفهٔ واقع در H آن a، مؤلفهٔ در امتداد m آن λ، و مؤلفهٔ واقع در فضای تولید شده توسط $\{e_1 \times m, e_2 \times m, e_3 \times m\}$ آن $b \times m$ است، آنگاه به‌تعریف زیر رهنمون می‌شویم

$$(a_1, \lambda_1, b_1) \times (a_2, \lambda_2, b_2) = ([\lambda_1 b_2 - \lambda_2 b_1 + (a_1 \times a_2) - (b_1 \times b_2)],$$
$$[-(a_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2)],$$
$$[\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2 - (a_1 \times b_2) - (b_1 \times a_2)])$$

(توجه کنیم که ضربهای خارجی داخل کروشه‌ها ضربهایی در R^3 هستند و بنابراین خوش تعریف‌اند.) با دانستن اینکه ضرب خارجی روی R^3 در اصول موضوع مربوطه صدق می‌کند، به سهولت می‌توان تحقیق کرد که این ضرب خارجی روی R^7 (با یکی انگاشتن R^7 با سه‌تاییها) نیز اصول را برمی‌آورد. ■

یادداشت: رفتار آسیب‌پذیر ضرب خارجی روی R^7 با فقدان هرگونه یکتایی شروع می‌شود: در R^3 تنها دو انتخاب برای ضرب خارجی هر زوج بردار متعامد یکه وجود دارد، در حالی که در R^7 می‌توان طریقهٔ تشکیل ضرب خارجی را چنان اصلاح کرد که به‌ازای یك زوج بردار متعامد یکه، هر یك از بردارهای یکه واقع در فضای پنج بعدی عمود بر این زوج به‌عنوان ضرب خارجی این دو در نظر گرفته شود. همچنین ضربهای خارجی روی R^7 در اتحاد لی[1]

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$$

صدق نمی‌کنند؛ در واقع

$$m \times (e_1 \times e_2) + e_2 \times (m \times e_1) + e_1 \times (e_2 \times m) = -3(e_3 \times m)$$

هیچیك از اتحادهای استانداردِ دیگر نیز در R^7 برقرار نخواهند بود.

پایان مقال: بحث فوق پیرامون مسئلهٔ هندسی تعریف یك ضرب خارجی روی یك فضای ضرب داخلی حقیقی معلوم شده، و شیوهٔ بررسی این مسئله از طریق فرایندهای استدلالی شبیه موارد مشابه در هندسهٔ برداری سه بعدی بوده است. قضیه‌ای که ماحصل این رهیافت است، در واقع معادل قضیهٔ کلاسیك هورویتس[2] است که بنابر آن در یك فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی، یك عمل "ضرب" دو خطی ("ضرب" دو عنصر x و y را با xy نشان می‌دهیم) با خاصیت $|xy| = |x||y|$ می‌توان تعریف کرد، اگر

1. Lie
2. Hurwitz

و تنها اگر بعد فضا ۱، ۲، ۴، یا ۸ باشد که در این صورت عمل فوق "اساساً" همان ضرب اعداد حقیقی، اعداد مختلط، چهارتاییهای هامیلتون، یا اعداد کیلی[1] است؛ و هرگاه با عضوی بی‌اثر هم سر و کار داشته باشیم، ضرب مذکور نه تنها در اساس، که عملاً نیز با یکی از چهار نوع ضرب بالا برابر خواهد بود. در واقع، با فرض قضیهٔ هورویتس و داشتن R^nای به همراه یك ضرب خارجی مانند پیش، R^{n+1} را در حد ایزومتری به صورت $Re \oplus R^n$ می‌نویسیم، به طوری که $e \in R^{n+1}$ و ضرب در R^{n+1} را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\lambda e + a)(\mu e + b) = (\lambda\mu - a \cdot b)e + (\mu a + \lambda b + a \times b)$$

در این صورت با بهره‌گیری از اصول موضوع ضرب خارجی، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این ضرب دو خطی خاصیت $|\lambda e + a||\mu e + b| = |(\lambda e + a)(\mu e + b)|$ را داراست ولذا $n+1$ برابر ۲، ۴، و یا ۸ است، پس n برابر ۱، ۳، و یا ۷ خواهد بود. از سوی دیگر، قضیهٔ هورویتس به‌سادگی از نتایج ما حاصل می‌شود: با داشتن یك فضای ضرب داخلی حقیقی مثل A و ضربی دارای خاصیت $|xy| = |x||y|$ و همچنین یك عضو بی‌اثر چپ و راست مانند e، تساوی $(x \cdot x)(y \cdot y) = (xy \cdot xy)$ پس از اعمال یك جفت اتحاد قطبی نتیجه می‌دهد

$$2(z \cdot x)(y \cdot w) = (zy \cdot xw) + (zw \cdot xy) \qquad (۵)$$

که ما از آن تنها به موارد

$$(e \cdot x)(y \cdot y) = (y \cdot xy), \qquad (x \cdot x)(e \cdot w) = (x \cdot xw) \qquad (۶ \text{ و } ۶')$$

و

$$2(z \cdot e)(y \cdot e) = (zy \cdot e) + (z \cdot y) \qquad (۷)$$

نیاز داریم. حال فرض می‌کنیم V زیر فضای Re از A باشد و عمل $\times$ روی V را با $a \times b = ab - (a \cdot b)e$ تعریف می‌کنیم.

از آنجا که بنابر (۷)، $2(a \cdot e)(b \cdot e) = 0$، $(a \times b) \cdot e = (ab \cdot e) + (a \cdot b) = (a \cdot b)$، عمل $\times$، V را به شکل دو خطی روی خودش می‌نگارد، یعنی در (۲۹.۵) و (۳۰.۵) با λ اعمال شده به b صدق می‌کند. از (۶) و (۶') نتیجه می‌شود که

1. Caylay

$$(a\times b)\cdot b=0=a\cdot(a\times b)$$

لذا (۳۱.۵) برقرار است؛ به‌علاوه، نشان دادن اینکه از این‌دو نسخهٔ (۳۱.۵)، (۲۸.۵) نتیجه می‌شود، چندان مشکل نیست. نهایتاً (۳۲.۵) به سرعت از (۷) نتیجه می‌شود. بنابراین مطابق قضیهٔ ما (که می‌توان آن را به‌سهولت بررسی کرد که به‌فروضاتی در باب متناهی بعد بودن تکیه نمی‌کند)، بعد V برابر ۱، ۳، ۷ یا احتمالاً ۰ و بعد A عبارت است از ۲، ۴، ۸ یا ۱ و به راحتی دیده می‌شود که A با اعداد کیلی، چهارتاییها، اعداد مختلط، یا اعداد حقیقی یکریخت خواهد بود. بررسی جبری زیبایی از قضیهٔ هورویتس را می‌توان در [۳] یافت.

قضیهٔ کلاسیك هورویتس الهام‌بخش تعمیمهایی در جهات گوناگون است. ما در گذشته خاطرنشان کرده‌ایم که (در حضور یك عضو بی‌اثر) متناهی بودن بعد، فرضی بی‌اهمیت است؛ رایت [۴] نشان داده است که یك جبر تقسیم نرم‌دار حقیقی غیرشرکت‌پذیر با $|xy|=|x||y|$ عملاً باید نرمی تناشی از ضرب داخلی، و لذا یکی از چهار جبر استانداردهٔ ما داشته باشد. حتی اینجا نیز به نظر می‌رسد یك "قضیهٔ شرکت‌پذیری گلفاند[1] ـ مازور[2]" فقط با $|xy|\leqslant|x||y|$، برقرار نباشد. در حالت قضیهٔ کلاسیك هورویتس، کرهٔ واحد R^n (۸ یا ۴، ۲، ۱ $=n$) به یك عمل ضرب پیوسته، با عضو بی‌اثر، مجهز می‌شود. فهرست بلندبالایی از نتایج عمیق توپولوژیك، که [۱] نشأت گرفته از آنهاست، نشان داده است که این مقادیر n، تنها مقادیری هستند که برای آنها چنین ضرب پیوسته‌ای روی کرهٔ واحد می‌تواند وجود داشته باشد.

مراجع

1. Adams, J. F. "On the non-existence of elements of Hopf invariant one," *Ann. Math.* **72**(1960)20-104.
2. Apostol, T. M. *Calculus*, vol. I, Blaisdell, New York-London, 1961.
3. Curtis, C. W. *The four and eight square problem and division Algebras*, MAA Studies in Math, **2**, Studies in Modern Algebra.
4. Wright, F. B. "Absolute valued algebras," *Porc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39**(1953)330-332.

1. Gelfand 2. Mazur

ملوین لاکس

پارادکس برتراند●

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

مسئله

وتر پاره خط مستقیمی است که نقاط انتهایش دونقطه از دایره باشند. در دایره‌ای به‌شعاع ۱، احتمال این‌که طول وتری بیش از $\sqrt{3}$ باشد، چیست؟ چنین مسئلهٔ ساده‌ای می‌تواند بسیار شگفت‌انگیز باشد، نه به این علت که نمی‌توان راه‌حلی برای آن یافت. بلکه به‌این علت‌که می‌توان چندین راه‌حل به‌ظاهر منطقی برای آن ارائه داد که هر یك به‌پاسخی متفاوت می‌انجامد.

راه حل اول

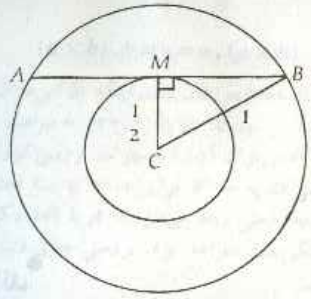
وتری چون AB را در نظر بگیرید که در نقطهٔ M بردایره‌ای به‌شعاع ۱/۲ و به همان مرکز دایرهٔ نخست مماس باشد. ر.ك شکل ۱. از آنجا که AB براین دایره مماس است، برشعاع MC عمود خواهد بود، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$MB=\sqrt{BC^2-MC^2}=\sqrt{1^2-(1/2)^2}=\sqrt{3}/2$$

بدهمین ترتیب $AM=\sqrt{3}/2$. پس M نقطهٔ میانی AB است و طول AB برابر $\sqrt{3}$است.

هر وتری که نقطهٔ میانیش درون دایرهٔ داخلی باشد از AB بزرگتر است، در حالی که هر وتری که نقطهٔ میانیش بیرون آن باشد، از AB بزرگتراست. پس این نتیجه‌گیری به‌نظر منطقی می‌آید که احتمال این‌که طول وتری از $\sqrt{3}$ بیشتر باشد برابر است با این

● Lax, Mellvin., "Bertrand's paradox," *The UMAP Jornal*, **7**(1986) 7-13.



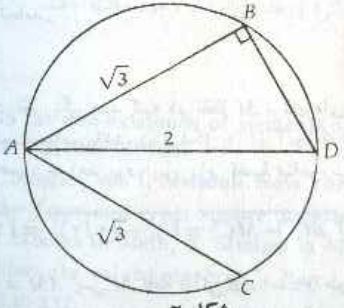
شکل ۱

احتمال که نقطهٔ میانی آن درون دایرهٔ داخلی واقع شود و این یکی نیز به نوبهٔ خود برابر است با

$$\frac{\text{مساحت دایرهٔ داخلی}}{\text{مساحت دایرهٔ بیرونی}} = \frac{\pi(۱/۲)^۲}{\pi(۱)^۲} = \frac{۱}{۴}$$

راه حل دوم

همهٔ وترهایی را که از نقطهٔ A واقع بردایره می‌گذرند در نظر بگیرید. ر. ک. شکل۲



شکل ۲

از آنجاکه طول قطر AD برابر ۲ است، دو نقطهٔ B و C برروی دایره وجود دارند به قسمی که $AB = AC = \sqrt{۳}$. از آنجاکه $\angle ABD$ درون یك نیمدایره محاط شده است، قائمه خواهد بود وکسینوس $\angle BAD$ برابر $\sqrt{۳}/۲$ است و در نتیجه: $\angle BAD = ۳۰^\circ$، به همین ترتیب $\angle CAD = ۳۰^\circ$، پس $\angle BAC = ۶۰^\circ$ و طول BDC برابر ۱/۳ محیط دایره است.

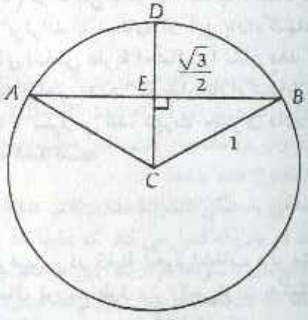
هر وتری که یك سرش A و سر دیگرش برخم BDC واقع باشد، از $\sqrt{۳}$ باشد، بزرگتر است و هر وتر دیگری که از A بگذرد از $\sqrt{۳}$ کوچکتر است. پس این نتیجه‌گیری به نظر منطقی می‌آید که احتمال این که طول وتری بیش از $\sqrt{۳}$ باشد، همان احتمال واقع شدن یك نقطهٔ انتهایی در بخش سوم دایره که از نقطهٔ انتهایی دیگر، دورتر است، می‌باشد و این یکی به‌نوبهٔ خود برابر است با

$$\frac{\text{طول خم } BDC}{\text{محیط دایره}} = \frac{۱}{۳}$$

راه حل سوم

همهٔ وترهایی را در نظر بگیرید که برشعاعی از دایره، چون CD، عمود باشند (شکل ۳). اگر وتر AB بر CD عمود بوده و طولش $\sqrt{۳}$ باشد، در این صورت نقطهٔ E، نقطهٔ تقاطع AB و CD، در فاصلهٔ ۱/۲ از C قرار می‌گیرد. زیرا، $AC = BC$ و $\angle AEC = \angle BEC = ۹۰^\circ$. پس مثلثهای AEC و BEC قابل انطباق‌اند وبنابراین $AE = BE = \sqrt{۳}/۲$. حال اگر قضیهٔ فیثاغورس را در مورد مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$CE = \sqrt{BC^۲ - BE^۲} = \sqrt{۱ - (\sqrt{۳}/۲)^۲} = \frac{۱}{۲}$$



شکل ۳

هر وتر عمود بر CD اگر به C نزدیکتر باشد تا به D، از $\sqrt{۳}$ بزرگتر، و در غیر این صورت از آن کوچکتر است. پس منطقی است که نتیجه بگیریم احتمال آن که، طول وتری بیش از $\sqrt{۳}$ باشد برابر است با احتمال اینکه فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع وتر و شعاع عمود برآن از مرکز دایره بیشتر از ۱/۲ باشد، که این یکی به‌نوبهٔ خود برابر است با

$$\frac{CE}{CD}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

راه حل چهارم

به هر یك از افراد یك گروه ۲۲ نفری، قطعه کاغذی داده شد که برروی آن دایره‌ای به شعاع ۱ اینچ ترسیم شده بود. و از آنها خواستند که هر یك وتری رسم کنند؛ آنگاه وترهای ترسیم شده را اندازه‌گرفتند و به‌طور آماری احتمال این‌که طول وتری بیش از $\sqrt{3}$ باشد، به‌این صورت تخمین زده شد که:

$$\frac{\text{تعداد وترهای ترسیم شده باطول بیشتر از } \sqrt{3}}{\text{تعداد کل وترهای ترسیم شده}}=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}$$

تاریخچه

پیش از انجام هرکوششی برای حل پارادکس چهار پاسخ متفاوت این مسئله، بد نیست که تذکر دهیم که مسئلهٔ فوق و راه‌حلهایی هم ارز سه راه‌حل نخست، همراه با چندین پارادکس ظاهراً منطقی دیگر در سال ۱۸۸۹ توسط ژوزف برتراند، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۲۲–۱۹۰۰) در کتابش باعنوان "حساب احتمالات"[1] آمده است[۵ و ۷]. به گفتهٔ میسنروف [۵]، "برتراند با استفاده از این پارادکسها، کوشید تا عدم دقت و ابهام در برخی از تمادهای اساسی نظریهٔ احتمال را نشان دهد تا از این طریق انگیزه‌ای برای دقت و وضوح آنها فراهم آورد." در میان پارادکسهایی که برتراند معرفی کرد، پارادکسی که در این مقاله بررسی شد، شهرت بیشتری دارد و برای تجلیل از وی پارادکس برتراند نامیده شده است.

شرح ریاضی

همهٔ راه حلهای بالا بر فرضهایی در زمینهٔ نحوهٔ انتخاب وتر مبتنی هستند. در راه‌حل ۴، فرض براین است که احتمال توزیع طول وتر را می‌توان به‌کمك احتمال توزیع وترهای ترسیم شده توسط مردم تخمین زد، و با آزمایشی تجربی برای گروهی ۲۲ نفره آن را برآورد می‌کند. یکی از دلایل این‌که صحت این فرض مورد تردید است، آن است که احتمال این توزیع، ممکن است به‌اندازهٔ دایره بستگی داشته باشد. این امکان وجود دارد که مردم در دایره‌هایی به شعاعهای یك متر و یك سانتیمتر وترهایی کاملاً متفاوت ترسیم کنند.

1. *Calcul des Peobabilietes*

جواب ۱ فرض می‌کند که احتمال توزیع نقطهٔ میانی وترها یکنواخت است، به بیان دیگر، احتمال این‌که نقطهٔ میانی وتر در ناحیه‌ای واقع شود برابر است با احتمال آن‌که نقطهٔ میانی در هر ناحیهٔ دیگری قرار بگیرد، مشروط به‌این که مساحت دو ناحیه یکسان باشند.

جواب ۲ فرض می‌کند که احتمال توزیع دو سر وترها روی دایره یکنواخت است. به‌عبارت دیگر، احتمال آن‌که نقطهٔ انتهایی وتر در کمانی از دایره قرارگیرد، همان احتمال قرارگرفتن نقطهٔ انتهایی در کمان دیگری با همان طول باشد، نکتهٔ مهمی که باید یادآوری کرد، آن است که تحت این شرط، می‌توان نشان داد [۴] که فرض جواب ۱ در باب توزیع یکنواخت نقطهٔ میانی نمی‌تواند درست باشد.

جواب ۳ فرض می‌کند که در امتداد هریك از شعاعهای دایره، احتمال توزیع وترهای عمود برآن شعاع یکنواخت است. به‌عبارت دیگر، احتمال آن‌که وتر عمود، بخشی از شعاع را قطع کند برابر است با این احتمال که هربخش دیگری از شعاع، که همان طول را داشته باشد، قطع کند. در اینجا نیز، می‌توان نشان داد [۴] که این فرض با فرضهای راه‌حلهای ۱ و ۲ ناسازگار است.

با روشهای پیچیده‌تر، فرضهای منطقی دیگری را نیز می‌توان پیش گرفت که به جوابهایی غیر از آنها که شرح دادیم، می‌انجامد [۶]. حال می‌دانیم که چرا به‌جوابهای متفاوتی رسیده‌ایم. اما هنوز هم معما حل نشده است. کدامیك از چند فرض ممکن درست است؟

رهیافت مدل‌سازی

از بحث بالا نتیجه می‌شود که هیچ "فرض درستی" وجود ندارد مگر آن‌که اطلاعات بیشتری در مورد مسئله داده شود. برای آن‌که ایدهٔ "احتمال" برای این مسئله معنی داشته باشد، باید روش انتخاب وتر را مشخص کنیم. این مطلب ایجاب می‌کند که مسئله از مدلسازی یك آزمایش استنتاج شده باشد.

موشکی به‌سوی هدفی به شکل استوانهٔ مدور قائم نشانه‌گیری و پرتاب می‌شود. پرتو لیزر در نوك موشك دو باریکه‌گسیل می‌کند که دقیقاً در دو راستای مخالف انتشار می‌یابند و با قاعده‌های دایره‌ای استوانه موازیند. این موشك چندان می‌چرخد تا مسافت پیموده شده توسط هر یك از باریکه‌های نور ناگوشهٔ هدف یکسان باشند. برای تعیین احتمال آنکه طول باریکه‌های لیزر در داخل هدف از $\sqrt{3}$ برابر شعاع هدف تجاوز کند، می‌توان نوك موشك را به صورت یك نقطه، گوشهٔ هدف را به‌صورت یك دایره و پرتو لیزر داخل هدف را به‌صورت وتر مدلسازی کرد.

فرض کنید که نقاط ممکن اصابت نوك موشك به‌طور یکنواخت داخل دایره گسترده شده باشد. در این صورت، راه حل صحیح مسئلهٔ بیان شده در این مدل، همان راه‌حل ۱ است.

همین لیزر به گونه‌ای به لبهٔ هدف اصابت می‌کندکه باز هم باریکهٔ آن با وجوه مدور استوانه موازی باشد، آنگاه لیزر را می‌چرخـانند. در نتیجهٔ چرخش یکی از دو باریکهٔ لیزر به لبهٔ هدف اصابت می‌کند. برای تعیین احتمال آن کـه طول این باریکهٔ لیزر تا لبهٔ هدف از $\sqrt{3}$ برابر شعاع هدف تجاوزکند، می‌توان لبهٔ هدف و باریکهٔ لیزر را مطابق توصیف فوق مدلسازی کرد. فرض‌کنیم که نقاط محتمل بـرای اصابت باریکهٔ لیزر به‌گوشهٔ هدف در طول دایره به‌طور یکنواخت گسترده شده باشند. حال دقیقاً این راه‌حل ۲ است‌که مسئلهٔ مطرح شده در این مدل را حل می‌کند.

لیزری در امتداد یك میله کـه قطر هدف ماست، و در راستای عمود برآن، در صفحهٔ هدف، نوسان می‌کند. در یك لحظه، لیزر در دو راستا به تابش در می‌آید. برای تعیین احتمال آن‌که مقطع باریکهٔ لیزر با وجه هدف از $\sqrt{3}$ برابر شعاع آن تجاوزکند، می‌توان لبهٔ هدف را توسط دایره، تصویر باریکهٔ لیزر برهدف را توسط یك وتر عمود برقطر دایره مدلسازی‌کرد. فرض‌کنیم که در طول آن میله نقاط محتمل‌که لیزر ازآن عبور می‌کند، در طول میله به‌طور یکنواخت توزیع شده بـاشد. برای این مدل راه حـل ۳ صحیح است.

می‌خواهیم روی دایره‌ای به‌شعاع ۱ اینچ‌که برقطعه‌ای‌کاغذکشیده شده است، وتری ترسیم‌کنیم. برای تعیین احتمال آن‌که طول این وتر از $\sqrt{3}$ اینچ تجاوز نکند، این مسئله را به‌کمك یك مسابقهٔ انسانی توسط نمونه‌ای ۲۲ نفره از افرادکه هر یك وتری بر روی دایرهٔ مربوطه ترسیم می‌کنند، مدلسازی می‌کنیم. فرض می‌کنیم‌که این عده چنان انتخاب شده باشند که به‌خوبی گویای میل باطنی آدمـی در زمینهٔ ترسیم وتـر باشد و تقاضای ترسیم وتر برانتخاب آنها اثری نداشته‌باشد. درموردایـن‌مدل‌راه‌حل ۴ صحیح است. این مدل با ۳ مدل نخست تفاوتی اساسی دارد. در ۳ مدل نخست فـرضی در مورد نحـوهٔ انتخاب وتر به‌عمل آمده است، که این فرض سبب یافتن روش ریاضی مستقیمی بـرای محاسبهٔ احتمال می‌شود. در مدل آخر به‌طور ضمنی قاعده‌ای فرض می‌شودکه افراد وترها را انتخاب کنند،که این قاعده نامعلوم است یا اصلا وجود ندارد و بنابراین باید رهیافتی آماری به‌کار برد.

توجه‌کنیدکه چهارجواب فوق هر یك برای مدل مربوطه صحیح‌اند، اما مدلها تنها تقریبی را برای کمیتی فراهم می‌آورند که در آزمایشی آغازی جستجو شد. آزمایشهای دیگری نیزوجود دارند [۱ و ۵]که به کمك همین مدلهای ریاضی انجام می‌شود. پس، آزمایشی هست‌که مدل ریاضی آن استخراج شده، و به‌جواب ریاضی ما مفهوم می‌بخشد. این ارتباط حیاتی بین ریاضیات وکاربردهایش مهمترین درس پارادکس برتراند است.

مراجع

1. Chung Kai Lai. *Elementary Probability Theory With Stochastic Processes*. New York: Springer-Verlag. (1979) 96-97.
2. Dahkle Richard and Fakler Robert. "Applications of high school mathematics in geometric probability," *The UMAP Journal*, 6 (1985)57-94.
3. Gardner, Martin. *Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simon and Schuster. (1961) 223-226.
4. Kendall M. G. and Moran P.A.P., *Geometrical Probability*. New York: Hafner (1963)9-10.
5. Maistrov L.E. *Probability Theory: A Historical Sketch*. New York: Academic Press. (1974) 234-239.
6. Parzen Emanuel. *Modern Probability Theory and its Application*. New York: Wiley and Sons, Inc. (1960) 302-304.
7. Struik D J. "Joseph Louis Francois Bertrand." *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. II Edited by Charles C. Gillispie. New York: Scribner and Sons. (1970) 87-89.

س. ك. بربریان

گروههای ناآبلی از مرتبهٔ pq●

ترجمهٔ اقبال زارعی، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

در این نوشتار به‌ساختمان گروههای ناآبلی از مرتبهٔ pq می‌پردازیم. گام نخست قضیه‌ای است که سرشت چنین گروههایی را مشخص می‌کند:[1]

قضیه. اگر G گروهی ناآبلی از مرتبهٔ pq باشد، که در آن p و q اولند و $p<q$، آنگاه:

$$q\equiv 1 \pmod p \quad (1)$$

(۲) عناصری چون، P و Q، به ترتیب از مرتبه‌های p و q، G را تولید می‌کنند، به‌طوری که

(۳) $P^{-1}QP=Q^{\beta}$، که در آن

(۴) $\beta\neq 1$ یک ریشه همنهشتی $x^p\equiv 1 \pmod q$ است

بدیهی است به محض آنکه در یک گروه مفروض دو عنصر P و Q یافت شوند که در شرایط (۲)، (۳)، و (۴) صدق کنند، این دو عنصر زیرگروهی تولید می‌کنند که همان شرایط G را برآورده می‌کنند.

بنابراین، فرض می‌کنیم که خاصیت (۱) برقرار باشد، می‌کوشیم عناصر مناسبی چون P و Q را در یک گروه مفروض قرار دهیم. به‌این منظور، از گروه جایگشتی متقارن از درجهٔ q بهره می‌گیریم.

ابتدا توجه می‌کنیم که βهایی وجود دارند که درهمنهشتی (۴) صدق می‌کنند؛ زیرا

● Berberian S. K., "Non-Abelian groups of order pq," *Amer. Math. Monthly*, **60**(1953)37-40.

1. Burnside. W., *Theory of Groups of Finite Order*, p. 48.

بنابر فرض (۱)، عدد اول p یکی از مقسوم علیه‌های $q-1$، یعنی مرتبه گروه ضربی میدان اعداد صحیح به‌هنگ q است. از آنجاکه β دارای مرتبه p است، مجموعهٔ همه جوابهای متمایز همنهشتی (۴) به‌هنگ q عبارت است از

$$1, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^{p-1}$$

به‌ازای Q، q-دور

$$Q=(1, 2, \cdots, q)$$

را اختیار می‌کنیم. به‌هنگ q می‌توان نوشت

$$Q^{\beta}=(1, 1+\beta, 1+2\beta, \cdots, 1+(q-1)\beta).$$

P لزوماً به صورت حاصلضرب p- دورهای مجزا خواهد بود. در شرط (۱) فرض می‌کنیم $q=1+mp$؛ در این صورت P را به‌صورت حاصلضرب m دور مجزا انتخاب خواهیم کرد. با چنین ساختاری، P باید دقیقاً یک نماد از دور Q را ثابت نگه دارد؛ هرگاه توافق کنیم که این نماد ۱ باشد (این انتخاب اختیاری است)، آنگاه بنابر (۳)، و خواص مزدوج بودن جایگشتها، P باید روی باقیماندهٔ عناصر Q به ترتیب زیر عمل کند:

$$\begin{array}{ccccccccc} Q=(1, & 2, & 3, & \cdots, & i, & \cdots, & q) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Q^{\beta}=(1, & 1+\beta, & 1+2\beta, & \cdots, & 1+(i-1)\beta, & \cdots, & 1+(q-1)\beta) \end{array} \quad (5)$$

بنابراین، P باید i را به $1+(i-1)\beta$ بفرستد که آن‌هم به‌نوبه خود باید به $1+(i-1)\beta^2$ فرستاده شود. در این صورت، یک دور نوعی از دورهای p به صورت

$$\pi=(1+(i-1), 1+(i-1)\beta, 1+(i-1)\beta^2, \cdots, 1+(i-1)\beta^{p-1}) \quad (6)$$

خواهد بود.

دور π بعد از p دایه خاتمه می‌یابد، زیرا $\beta^p\equiv 1 \pmod q$، وبنابراین

$$1+(i-1)\beta^{p-1} \to 1+(i-1)\beta^p \equiv i \pmod q$$

کاربرد این اصل خیلی سر راست است.

مثال ۱. $p=3$، $q=7$.

یك جواب اولیهٔ همنهشتی $x^{۳}\equiv ۱ \pmod{۷}$، عبارت است از $\beta=۲$. قرار می‌دهیم

$$Q=(۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۷)$$

پس

$$Q^{\beta}=(۱\ ۳\ ۵\ ۷\ ۲\ ۴\ ۶)$$

مجدداً فرض می‌کنیم P نماد ۱ را ثابت نگه می‌دارد، وصرفاً P را ملزم می‌داریم که در شرایط مورد نظرمان صدق کند:

$$P=(۲\ ۳\ ۵)(۴\ ۷\ ۶)$$

پس

$$P^{-۱}QP=Q^{۲}$$

و P و Q گروه مطلوب G را تولید می‌کنند.

حال نشان می‌دهیم که ساختن P به‌نحوی که در (۳) صدق کند، همواره میسراست.

مثال ۱ روشی برای اثبات این مطلب را به ما الهام می‌کند. برای اولین دور P، می‌نویسیم

$$\pi_{۱}=(۱+۱\ ,\ ۱+\beta\ ,\ ۱+\beta^{۲},\ \dots,\ ۱+\beta^{p-۱})$$

از آنجا که $۱, \beta, \beta^{۲}, \dots, \beta^{p-۱}$ به هنگ q همنهشت نیستند، دایره‌های $\pi_{۱}$ نیز چنین‌اند. به علاوه، $\pi_{۱}$ در حقیقت یك دور خوش تعریف است، زیرا نماد $۱+\beta^{p-۱}$ از Q باید به $۱+\beta^{p}\equiv ۱+۱ \pmod{q}$ فرستاده شود.

در اینجا، اگر $q=۳$، آنگاه $p=۲$، و فرایند ساختن پایان می‌یابد. در غیر این صورت، یك نماد $i\neq ۱$ از Q وجود دارد که در $\pi_{۱}$ ظاهر نمی‌شود؛ در چنین حالتی به عنوان دور بعدی P، قرار می‌دهیم

$$\pi_{۲}=(۱+(i-۱)\ ,\ ۱+(i-۱)\beta\ ,\ ۱+(i-۱)\beta^{۲},\ \dots,\ ۱+(i-۱)\beta^{p-۱})$$

خوش تعریف بودن دور $\pi_{۲}$ را پیش از این در توضیح ذیل (۶) دیدیم. دایره‌های $\pi_{۲}$ به‌هنگ q از یکدیگر متمایزند زیرا تساوی چون

$$۱+(i-۱)\beta^{r}\equiv ۱+(i-۱)\beta^{s} \pmod{q}$$

ایجاب می‌کند،

$$\beta^{r-s}\equiv ۱ \pmod{q}$$

و چون $s<p$ و $۰\leqslant r$ ، و β دارای مرتبهٔ p می‌باشد، نتیجه می‌دهد که $r=s$. همچنین $\pi_{۲}$ مجزا از $\pi_{۱}$ می‌باشد، فرضاً تساویی هست که

$$۱+(i-۱)\beta^{r}\equiv ۱+\beta^{s} \pmod{q}$$

این ایجاب می‌کند

$$۱\equiv ۱+\beta^{s-r} \pmod{q}$$

که با انتخاب i متناقض است.

اگر در این ساختن مرحله سومی هم درکار باشد، قرار می‌دهیم

$$\pi_{۳}=(۱+(j-۱)\ ,\ ۱+(j-۱)\beta,\ \dots,\ ۱+(j-۱)\beta^{p-۱})$$

که در آن $j\neq ۱$ نه در $\pi_{۱}$ است و نه در $\pi_{۲}$، و استدلال پیشین نشان می‌دهد که $\pi_{۳}$ از π مجزاست. برای نشان دادن اینکه $\pi_{۳}$ از $\pi_{۲}$ مجزا است، فرض می‌کنیم که تساوی به صورت زیر برقرار باشد

$$۱+(j-۱)\beta^{r}\equiv ۱+(i-۱)\beta^{s} \pmod{q}$$

در این صورت

$$j\equiv ۱+(i-۱)\beta^{s-r} \pmod{q}$$

حال آنکه j در $\pi_{۲}$ نیست.

نهایتاً خواهیم داشت $\pi_{m}\dots\pi_{۳}\pi_{۲}\pi_{۱}=P$. و فرایند ساختن دقیقاً در m مرحله خاتمه‌می‌پذیرد، زیرا $q-۱$ نماد از Q وجوددارد که بایدبرداشته‌شود، و $q-۱=mp$.

(در اینجا عمل استقرا را صریحاً انجام نداده‌ایم، لکن بحثی که در مورد $\pi_{۲}$ ارائه شد برای فرمول‌بندی حالت کلی تقریباً کفایت می‌کند) کاری که ما انجام داده‌ایم، اندکی بیش از ساختن دستگاه مانده‌های اول به‌هنگ q است.[1]

مثال ۲. حالت $p=۲$ مخصوصاً روشن‌است، زیرا دراین حالت ناگزیریم β را برابر $q-۱$ انتخاب کنیم. بنابراین، اگر $Q=(۱, ۲, \dots, q)$، Q^{β} وارون Q خواهد بود:

$$Q^{\beta}=(۱, q, q-۱, \dots, ۲)$$

و اگر فرض کنیم ۱ نمادی باشدکه P آن را ثابت نگه می‌دارد، آنگاه

1. Uspensky, J.V., and Heaslet, M.A., *Elementary Number Theory*, p. 225.

$$P=(۲,q)(۳,q-۱)(۴,q-۲)\cdots$$

مثلاً، اگر $q=۷$، آنگاه

$$Q=(۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۷)$$
$$Q^{\beta}=Q^{۶}=(۱\ ۷\ ۶\ ۵\ ۴\ ۳\ ۲)$$
$$P=(۲۷)(۳۶)(۴۵)$$

این طرز نمایش گروههای نا آبلی از مرتبه $۲q$ به‌طور طبیعی گروه دو وجهی را به ذهن متبادر می‌کند. فرض کنید رئوس یك q ضلعی منتظم را به‌شکل دوری شماره‌گذاری کرده باشیم. در گروه دو وجهی برای این چندضلعی، می‌توان Q را به‌عنوان دوران به اندازهٔ $۳۶۰°/q$، و P را به‌عنوان انعکاس نسبت به‌محور تقارنی از چندضلعی دانست که از رأس ۱ می‌گذرد. از آنجا که q فرد است، هر تقارن انعکاسی دقیقاً یك رأس را ثابت نگه می‌دارد؛ بنابراین انتخاب ما از ۱، به‌عنوان نمادی که P آن را ثابت نگه می‌دارد، می‌تواند در حقیقت به‌مثابهٔ انتخاب این رأس ثابت تعبیر شود.

ا. ل. اسپیتزناگل

نکته‌ای در خصوص گروه متناوب•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

افراز جایگشتها به دو ردهٔ جایگشتهای زوج و فرد، تقریباً در هر کتاب درسی مقدماتی جبر مجرد انجام می‌شود. اما، همانگونه که هرشتاین در کتاب مباحثی در جبر خاطرنشان می‌کند، اثباتی که در بسیاری از این کتابها آمده است چندان جالب توجه نیست، زیرا در آن یك چندجمله‌ای ظاهر می‌شود که نسبت به‌موضوع بی‌ارتباط به‌نظر می‌رسد. از سوی دیگر، برهانهای دیگر از محاسبات نسبتاً پیچیدهٔ جایگشتی بهره می‌گیرند.

در اینجا برهانی را می‌آوریم که بیش از دیگر برهانها حال و هوای نظریهٔ گروهها را دارد. شاید خواننده این روش را از لحاظ زیبایی دلپذیرتر بیابد.

بنابر تعریف، جایگشت $\tau\in S_n$ را زوج گوییم هرگاه نمایشی به صورت حاصلضرب تعداد زوجی ترانهش داشته باشد. فرض کنید A_n مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای زوج $\tau\in S_n$ باشد. در این‌صورت A_n زیر گروهی از S_n با اندیس حداکثر ۲ است. پس کافی است نشان دهیم برخی از عناصر S_n در A_n نیستند.

گزاره. $(۱,۲)\notin A_n$، بنابراین $[S_n:A_n]=۲$.

برهان: فرض کنید که $(۱,۲)$ نمایشی به‌صورت حاصلضرب تعداد زوجی ترانهش داشته باشد، در این‌صورت جایگشت همانی را می‌توان به‌صورت حاصلضرب تعداد فردی ترانهش نوشت. فرض کنید: $\varepsilon=(a,b)\cdots$ نمایشی از ε به‌صورت حاصلضرب کمترین تعداد فرد ممکن، k، ترانهش باشد و به‌علاوه در بین همهٔ نمایشهای ε به‌صورت حاصلضرب k ترانهش که با (a,b) شروع می‌شوند، تعداد دفعات تکرار a در آن مینیمم باشد.

• Spitznagel E.L., Jr., "Note on the alternating group," *Amer. Math. Monthly*, **75**(1968)68-69.

از آنجا که $\varepsilon(a)=a$، پس در حاصلضرب فوق ترانهش دیگری نیز وجود دارد که a را حرکت می‌دهد. فرض کنیم (a,c) نزدیکترین ترانهش ممکن به‌سمت چپ باشد. از آنجا که $(c,d)(a,c)=(a,d)(c,d)$ و $(d,e)(a,c)=(a,c)(d,e)$ نمایشی از ε به‌صورت حاصلضرب k ترانهش و باهمان تعداد مینیمم a، به‌شکل $\varepsilon=(a,b)(a,f)\dots$ خواهیم داشت.

حال اگر $f\neq b$، آنگاه $\varepsilon=(a,f)(b,f)\dots$ حاصلضربی به‌طول k است که تعداد دفعات تکرار a در آن کمتر است. در حالی که اگر $f=b$، آنگاه ε حاصلضرب $k-2$ ترانهش است که با مینیمم بودن k، منافات دارد.

نتیجه: اگر τ زوج باشد، هرنمایش آن به صورت حاصلضربی از ترانهشها، شامل تعداد زوجی ترانهش خواهد بود.

برهان. در غیراین‌صورت، خواهیم داشت: $\tau\in A_n$ و $(۱,۲)\tau\in A_n$، بنابراین $(۱,۲)\in A_n$.

سعید ذاکری

بازهم $f(x+y)=f(x)+f(y)$!

در باب معادلهٔ تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ روی $R_۱$ که به آن معادلهٔ تابعی کشی می‌گویند، نوشته‌های بیشماری در دست است؛ خواص بسیاری برای جوابهای آن شناخته شده، و تقریباً همهٔ اسرار نهفته در آن برما معلوم شده‌است. از آنجا که این نتایج حاوی نکات تازه‌ای نیستند، درزیر فقط به‌مرور برخی از آنها می‌پردازیم. خوانندهٔ علاقه‌مند یا این نتایج را می‌داند، یا می‌تواند با خواندن آنها در راه اثباتشان بکوشد، و یا به منابع بسیاری که در این زمینه در دسترس است مراجعه کند[۱] (البته انتخاب چهارمی هم هست و آن اینکه از همین حالا از خواندن این مقاله چشم بپوشد!):

۱. معادله‌کشی هم دارای جوابهای پیوسته است و هم‌جوابهایی ناپیوسته دارد.

۲. هر تابعی که در این معادله صدق کند و در یك نقطه پیوسته باشد، روی $R_۱$ پیوسته خواهد بود. به‌عبارت دیگر، جوابهای ناپیوستهٔ این معادله در هیچ نقطه پیوسته نیستند.

۳. هر جواب پیوستهٔ این معادله، به‌ازای cای حقیقی، به‌صورت $f(x)=cx$ است.

۴. هر جواب این معادله (خواه پیوسته و خواه ناپیوسته) به ازای cای حقیقی، روی Q در $f(r)=cr$ صدق می‌کند.

۵. وجود جوابهای ناپیوستهٔ این معادله را می‌توان با درنظر گرفتن فضای برداری بینهایت بعدی $R_۱$ روی میدان Q (به‌یاری اصل موضوع انتخاب) نشان داد.

۶. نمودار هر جواب ناپیوستهٔ این معادله در $R_۲$ چگال است. به‌عبارت دیگر، هر گاه f جوابی ناپیوسته از این معادله باشد، به ازای هر $(x_۱,x_۲)\in R_۲$ و هر $\varepsilon>۰$، می‌توان $x\in R_۱$ را چنان یافت که $\|(x,f(x))-(x_۱,x_۲)\|<\varepsilon$.

---

۱. برای دستیابی به برخی خواص جوابهای معادلهٔ تابعی کشی، ر. ك.

Boas, R. P.; Aprimer of real functions, *The Carus Mathematical Monographs*, No. 13. The Mathematical Association of America 1981.

البته به فهرست بالا می‌توان یك دوجین خاصیت دیگر افزود. اما در یك کلام، ویژگیهای بالا رده‌بندی ساده‌ای برای جوابهای این معادله به دست می‌دهند: جوابهای پیوستهٔ این معادله، به زبان شهودی، قویاً پیوسته، و جوابهای ناپیوستهٔ این معادله قویاً ناپیوسته‌اند.

اما به‌هدف اصلی خود در این نوشته بپردازیم. مقصود ما بررسی حکم زیر است[۱]:

قضیه. فرض کنیم $f: R_1 \to R_1$ روی هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر (ریمان) باشد. هرگاه، به‌ازای هر x و y داشته باشیم $f(x+y)=f(x)+f(y)$، آنگاه به‌ازای یك عدد حقیقی c داریم $f(x)=cx$.

این قضیه، با درنظر گرفتن رفتار عمومی جوابهای معادلهٔ تابعی کشی، حقیقتاً ساده و پیش‌پا افتاده است، و می‌توان چندین اثبات برای آن ارائه داد. ما در زیر ابتدا طرح دو اثبات ممکن برای این حکم را مرور می‌کنیم که هر چند ساده‌اند، اما به‌تعبیری مقدماتی نیستند. پس از آن دو برهان دیگر می‌آوریم که به‌گمان ما مقدماتی‌اند.

نخستین طرح اثبات، ساده‌ترین و توانا‌ترین آنهاست. توجه کنیم که هرگاه $f(x)$ به‌صورت cx نباشد، بنابه (۲) و (۳) در هیچ نقطه‌ای پیوسته نخواهد بود و بنابراین روی هیچ بازهٔ بسته‌ای نمی‌تواند انتگرالپذیر باشد، زیرا برای انتگرالپذیر بودن روی یك بازه، باید تقریباً همه جا روی آن بازه پیوسته باشد. این اثبات هر چند که بسیار کوتاه، زیبا، و نافذ است، نمی‌توان آن‌را برای یك مبتدی آنالیز تشریح کرد، زیرا دراین رهگذر ازمفهوم اندازه و نیز محك لبگ برای انتگرالپذیری ریمان استفاده می‌شود.

اندیشهٔ دومین اثبات برپایهٔ (۶) استوار است. هرگاه $f(x)$ به‌صورت cx نباشد، بنابر (۳) و (۶) نمودار آن در R_2 چگال است. بازهٔ دلخواه $[a, b]$ و افراز $P=\{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$ از آن را در نظر می‌گیریم. هرگاه $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ و $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$، $1\leqslant i\leqslant n$، و تعریف کنیم: $U(f, P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ و $L(f, P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$، واضح است که $U(f,P)=\infty$ و $L(f,P)=-\infty$. بنابراین اختلاف بین U و L را نمی‌توان با انتخاب هیچ افرازی، به‌دلخواه کوچك کرد. این نکته نمایانگر آن است که f روی $[a, b]$ انتگرالپذیر نیست. البته این اثبات به مراتب از اثبات پیشین مقدماتی‌تر است، زیرا تنها از احکام (۳) و (۶) و تعریف انتگرال ریمان بهره می‌گیرد که هیچیك مستلزم چیزی بیش از معلوماتی مقدماتی نیستند. اما این اثبات هنوز شایستهٔ اطلاق برهان مقدماتی به‌مفهوم واقعی نیست، چراکه در آن از ایدهٔ چگال بودن نمودار f برای اثبات $U(f,P)=\infty$ و $L(f,P)=-\infty$ قویاً استفاده شده است. و نمی‌توان از یك تازه‌کار

۱. این حکم در مسابقهٔ ریاضی دانشجویان کشور، در فروردین ماه ۱۳۶۸ در بین سئوالات آنالیز مطرح شده است.

که قبلا با (۶) برخوردی نداشته است، انتظار داشت چنین برهانی عرضه کند.

اکنون دوبرهان موردنظر را می‌آوریم، ویژگی این دو برهان آن است که ازاحکام (۲) و (۳) استفاده می‌کند و بیشتر رنگ و بوی جبری دارد تا خصلت تحلیلی، نظیر آنچه در دو اثبات بالا دیدیم. به‌علاوه این دواثبات مقدماتی را می‌توان برای هر دانشجوی حساب دیفرانسیل و انتگرال مطرح کرد و انتظار داشت که آن را کاملا دریابد.

به‌عنوان اولین برهان مقدماتی (و در واقع سومین برهان) فرض کنیم f در معادلهٔ تابعی کشی صدق کند و روی هر بازهٔ بسته انتگرالپذیر باشد. در این صورت f دست‌کم روی یك بازهٔ بسته چون $[a, b]$ کراندار است.[۱] به ازای هر x حقیقی قرار می‌دهیم

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

توجه داریم که چون f روی $[a, b]$ کراندار است، g روی $[a, b]$ پیوسته است. اکنون به‌ازای x و y حقیقی، $g(x+y)$ را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x+y)&=\int_0^{x+y} f(t)dt=\int_{-x}^{y} f(t+x)dt\\ &=\int_{-x}^{y} f(t)dt+(x+y)f(x)\\ &=-g(x)+g(y)+(x+y)f(x) \end{aligned}$$

بنابر تقارن خواهیم داشت $g(x+y)=g(x)-g(y)+(x+y)f(x)$. از جمع این دو عبارت خواهیم داشت $g(x+y)=\frac{1}{2}(x+y)f(x+y)$. چون x و y دلخواه بود، به‌ازای هر x حقیقی داریم $g(x)=\frac{1}{2}xf(x)$. پس، هرگاه یك x_0 غیر صفر در (a, b) اختیار کنیم، چون g در x_0 پیوسته است، f نیز در x_0 پیوسته خواهد بود. پس f روی R_1 پیوسته است، یعنی $f(x)=cx$.

اما برهان بعدی از این هم ساده‌تر است. با همان $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ آغاز می‌کنیم. داریم

$$g(x+y)=\int_0^{x+y} f(t)dt=g(x)+\int_x^{x+y} f(t)dt$$

۱. از همین مطلب می‌توان خطی بودن f را مستقیماً نتیجه گرفت، صفحهٔ ۱۲۶ کتاب بادوس را ببینید.

$$= g(x) + \int_0^y f(t+x)dt = g(x) + g(y) + yf(x)$$

بار دیگر، با برقرار خواهیم داشت $g(x+y) = g(x) + g(y) + xf(y)$. بنابراین $xf(y) = yf(x)$ به‌ازای هر x و y حقیقی. پس $f(x)/x = c$، $x \neq 0$. از اینجا، با توجه به $f(0) = 0$، به‌ازای هر $x \in R_1$ به‌دست می‌آید، $f(x) = cx$.

در ابتدای این نوشتهٔ کوتاه گفتیم که تقریباً همهٔ اسرار نهفته در معادلهٔ تابعی کشی برما معلوم شده است. برای اینکه ببینیم این ادعا آنقدرها هم حقیقت ندارد، درپایان توجه خواننده را به مسئلهٔ مبارزطلب زیر جلب می‌کنیم. کمترین درسی که می‌توان از پرداختن به این مسئله گرفت، آن است که بررسی این معادله همواره به‌سادگی مسئلهٔ بالا نیست.

حکم. هرگاه $f : R_1 \to R_1$ به ازای هر x ناصفر در $f(x)f(1/x) > 0$ و به ازای هر x و y در $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند، به‌ازای cای حقیقی خواهیم داشت $f(x) = cx$.

ج. پ. جونز و س. توپوروسکی

اعداد گنگ●

ترجمهٔ سهیلا شریعتی

در سالهایی نه چندان دور برهانی ماهرانه در دپارتمانهای ریاضی گوناگون برسرزبانها بود.

قضیه ۱. هرگاه عددگنگی به‌توان یك عددگنگ برسد ممکن است حاصل عددی گویا باشد.

برهان. اتحاد زیر را در نظر بگیرید.

$$[\sqrt{2}^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = 2$$

اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد، برهان تمام است. در غیراین صورت، $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ است و بنابراین $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ مثالی از حالت موردنظر ما خواهد بود.

ابتدا داو جاردن[1] این برهان را به عنوان یك راه‌حل ابتکاری در [۳] منتشر کرده بود. مدتی بعد در [۴] نیز انتشار یافت. توجه کنید، که این برهان در عین مقدماتی بودن، غیرسازنده نیز هست. غیرسازندگی در آن به صورت اصل منطقی طرد شق ثالث وارد می‌شود که شهودگرایان آن را رد می‌کنند.

در حقیقت $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ است، کازمین [۹] در سال ۱۹۳۵ اثبات کرد ریشهٔ دوم عدد هیلبرت $2^{\sqrt{2}}$ متعالی[2] است. اما این نتیجه گیری را، که نتیجه گیری مقدماتی هم نیست، در

● Jones J. P., Toporowski S., "Irrational numbers," *Amer. Math. Monthly*, **50** (1973)423-424.

1 Dov Jarden

۲. transcendental، عدد حقیقی x را متعالی می‌نامیم، هرگاه ریشهٔ معادله چندجمله‌ای با ضرایب گویا نباشد. ـ م.

بالا به‌کار نبردیم و صرفاً از گنگ بودن $\sqrt{2}$ استفاده شد.
به قضیه مشابه بعدی توجه کنید.

قضیه ۳. عدد گنگ به‌توان عدد گنگ ممکن است گنگ باشد.

البته می‌توان از مجموعه اصول نظری برای اثبات این که a^b تقریبا به‌ازای تمام مقادیر حقیقی b گنگ است استفاده کرد. از نتیجهٔ کازمین [۱] نیز برای اثبات قضیه ۲ می‌توان سود جست. اما آیا قضیه ۲ اثباتی مقدماتی دارد؟

برهان. اتحاد $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2} = 2$ را در نظر بگیرید.

اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، برهان تمام است. در غیراین صورت، $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا است. بنابراین، $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})}$ گنگ است، و در نتیجه، $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}+1)}$ مثالی از حالت مورد بحث است.

همچنین با استفاده از یك اتحاد ساده می‌توان نشان داد عدد گویا به‌توان عدد گنگ ممکن است گنگ باشد. اما، شاید بهتر باشد این اتحاد را در اینجا نیاوریم و خواننده، خود، با یافتن آن لذت بیشتری ببرد.

دیوید ج. بونتمپو

دترمینان ماتریسهای پاد متقارن●

ترجمهٔ بیژن هنری، دانشجوی کارشناسی برق دانشگاه تهران

ماتریس پاد متقارن ماتریسی است که قرینهٔ ترانهادهٔ خودش باشد. پیش از آنکه به‌جزئیات این مقالهٔ کوتاه بپردازیم، به دترمینانهای زیر از دو ماتریس پادمتقارن توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 6 & -2 \\ -12 & -6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1089 = 33^2$$

بنابر یك حکم مشهور اگر در یك ماتریس $n \times n$ و پادمتقارن، n فرد باشد، دترمینان آن صفر است. اثبات این حکم درکتاب نگرشی بر جبر جدید نوشتهٔ بیرکاف و مك‌لین و همچنین درکتاب جدیدتر آنها باعنوان جبر، از خواننده خواسته شده است. اثبات حکم بالا پیامد سه گزاره زیر است:

در هر ماتریس پاد متقارن A، $A^T = -A$

در هر ماتریس مربعی A، $\det A = \det(A^T)$

● Buontempo, David J. "The determinant of a skew-symmetric matrix," *The Mathematical Gazette*, 1981. 67-69.

درهر ماتریس $n\times n$ ی A، $\det(-A)=(-1)^n\det A$

از این سه گزاره نتیجه می‌شود که به‌ازای هر ماتریس $n\times n$ و پاد متقارن،

$$\det A=\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^n\det A$$

اگر n فرد باشد، آنگاه $\det A=-\det A$، و در نتیجه $\det A=0$.

اما اگر n زوج باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ واضح است که اگر $A=(a_{ij})$ ماتریسی 2×2 و پاد متقارن باشد، آنگاه $\det A=a_{12}^2$. طی یکی از تمرینهایی که در دو کتاب بالا آمده است، اثبات این حکم از خواننده خواسته شده است که اگر $A=(a_{ij})$ ماتریسی 4×4 و پاد متقارن باشد، آنگاه

$$\det A=(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})^2$$

دو نتیجهٔ بالا این حدس را القا می‌کنند که اگر A ماتریسی $2n\times 2n$ و پاد متقارن با درایه‌های صحیح باشد، آنگاه $\det A$ مربع کامل است. این حکم را به کمک استقرا ثابت می‌کنیم.

فرض کنید A_{2k} ماتریسی $2n\times 2n$ و پاد متقارن باشد که درایه‌های آن اعدادی صحیح‌اند. دیدیم که اگر $n=1$، آنگاه $\det(A_{2k})$ مربع کامل است. فرض کنید که به ازای عددی صحیح مانند k، که $k\geq 1$، $\det(A_{2k})$ به‌ازای تمام ماتریسهای A_{2k} مربع کامل باشد. ماتریس پاد متقارن دلخواهی چون $A_{2k+2}=(a_{ij})$ با درایه‌های صحیح در نظر می‌گیریم. در این‌صورت یا $\det(A_{2k+2})=0$ (که مربع کامل است)، یا درسطر اول ماتریس درایه‌ای مانند a_{1j} وجود دارد که $a_{1j}\neq 0$ (چون در هر ماتریس پادمتقارن $a_{11}=0$. پس $j>1$). از درایهٔ a_{1j} می‌توان برای تحویل ستونی استفاده کرد تا سطر اول به

$$R=(0\ 0\ \dots\ a_{1j}\ 0\ \dots\ 0)$$

تبدیل شود. چون $a_{11}=0$، در فرایند تحویل ستونی ستون اول تغییر نمی‌کند و بنابراین شامل درایهٔ غیرصفر a_{j1} است $(a_{j1}=-a_{1j}\neq 0)$، که می‌توان آن را در تحویل سطری به کار بست و ستون اول را به $-R^T$ تبدیل کرد. همچنین، چون ستون اول پس از تحویل ستونی بدون تغییر باقی مانده بود، عملیات تحویل سطری دقیقاً مشابه عملیات تحویل ستونی خواهند بود. معنی این نکته آن است که اگر E حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی برای انجام فرایند تحویل ستونی باشد، E^T حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی برای انجام فرایند تحویل سطری است. بنابراین ماتریس تحویل یافتهٔ B_{2k+2} از رابطهٔ $B_{2k+2}=E^T A_{2k+2}E$ به‌دست می‌آید. اکنون توجه کنیم که

$$B_{2k+2}^T=(E^T A_{2k+2}E)^T=E^T A_{2k+2}^T E=-E^T A_{2k+2}E=-B_{2k+2}$$

و بنابراین ماتریس تحویل یافتهٔ B_{2k+2} پاد متقارن و به‌شکل

$$B_{2k+2}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ -a_{1j} & & & B_{2k+1} & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

است، که در آن B_{2k+1} ماتریسی است $(2k+1)\times(2k+1)$ و پاد متقارن، $\det(A_{2k+2})=\det(B_{2k+2})$؛ و هر درایهٔ B_{2k+1} خارج‌قسمت یك عدد صحیح بر a_{1j} است. اگر دترمینان B_{2k+2} را برحسب سطر اول آن و همسازهٔ a_{1j} را برحسب ستون اول آن بسط دهیم، به‌دست می‌آید

$$\det(A_{2k+2})=\det(B_{2k+2})=a_{1j}^2\det(B_{2k})$$

که در آن B_{2k} ماتریس $2k\times 2k$ و پاد متقارنی است که از حذف سطر و ستون $(j-1)$ام B_{2k+1} به‌دست آمده‌است. حال، با توجه به‌ملاحظات بالا، $a_{1j}B_{2k}$ ماتریسی پاد متقارن با درایه‌های صحیح خواهد بود. پس فرض استقرا ایجاب می‌کند که $\det(a_{1j}B_{2k})$ مربع کامل باشد، که مثلا آن را m^2 می‌نامیم. بنابراین

$$\det(A_{2k+2})=a_{1j}^2\det(B_{2k})=a_{1j}^2\frac{m^2}{a_{1j}^{2k}}=\left(\frac{m^2}{a_{1j}^{k-1}}\right)^2$$

پس $\det(A_{2k+2})$ عددی صحیح است که مربع یك عدد گویاست و در نتیجه آن عدد گویا خود عددی صحیح و $\det(A_{2k+2})$ مربع کامل است. اینك، نتیجهٔ مطلوب به‌کمك استقرا به‌دست می‌آید.

جیمز و. فریل

اثباتی مقدماتی برای یك مسئلهٔ معروف شمارش•

ترجمهٔ محبوبه سیف محدثی

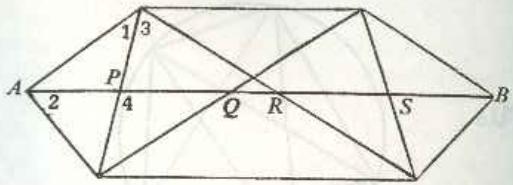
بیشتر ما تلاش‌می‌کنیم در خلال تدریسمان، دانشجو را به‌شناخت الگوها وادارکنیم. همهٔ ما باید علاوه برالگوهای مقدماتی استانداردِ، مثالهای خوبی ارائه دهیم که نشان دهد "الگو" همواره همان چیزی نیست که به‌نظر می‌رسد و بنابراین باید شاگرد را در شناخت الگوها دچار شك کرد.

یکی از جالبترین مسائل از این نوع را در زیر مطرح می‌کنیم. n نقطه روی یك دایره انتخاب کنید؛ وترهای پیونددهندهٔ این نقاط را رسم کنید [۳، مثال صفحهٔ ۶]. چند ناحیه‌تشکیل می‌شود؟ اگرکسی با نشان‌دادن اینکه به‌ازای ۲، ۳، ۴،و۵ نقطه‌به‌ترتیب ۲، ۴، ۸، و ۱۶ ناحیه خواهیم داشت دانشجویان را راهنمایی کند، آنگاه اگر از آنان بپرسد که با داشتن ۶ نقطه چند ناحیه تشکیل خواهد شد، با رضایت‌خاطر پاسخ می‌دهند: ۳۲. در صورتیکه، پاسخ صحیح جداکثر ۳۱ ناحیه است! این مطلب ممکن است برای آنها غیرمنتظره باشد. دانشجویان برتر مایلند در باب وجود یك فرمول کلی و چگونگی آن آگاهی یابند. خوشبختانه، جواب را می‌توان به زبانی ساده و با استفاده از مثلث پاسکال بیان‌کرد. ما در اینجا اثباتی را بیان می‌کنیم که به‌تکنیکهای پیشرفته نیازی ندارد.

پیش از پرداختن به‌حل مسئلهٔ فوق، به‌یك مسئلهٔ مربوط به‌آن می‌پردازیم. فرض کنید یك n ضلعی محدب داریم؛ حداکثر تعداد ناحیه‌هایی‌که توسط قطرهای این n ضلعی چیست؟ این مسئله را هانس بورگر درکتاب کوچك و جالب خود [۱] مطرح کرد. وی سه‌راه حل ارائه داد که دقیقترین آنها برای تکمیل بحث (به‌عنوان دلیلی برای اینکه حداکثر تعداد نقاط تقاطع سه‌قطر، یك نقطه است.) در این نوشتار گنجانیده شده است.

• Friel James O., "An elementary proof for a famous counting problem," *Two-YearCollege Mathematics Readings*, 1981, 218-220.

این عمل نوعی کاهش‌است. (شکل ۱. توجه داشته باشیدکه همهٔ قطرها رسم نشده‌اند.)

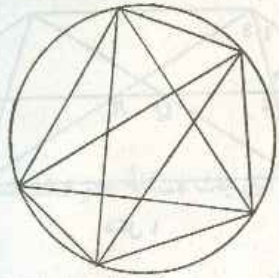


شکل ۱

ما تعداد نواحیی را که با حذف قطر AB از بین می‌روند بررسی می‌کنیم. فرض کنید این قطر برداشته شود. وقتی AP برداشته می‌شود، ناحیهٔ ۱ و ۲ یکی می‌شوند، وقتی PQ برداشته می‌شود، ناحیهٔ ۳ و ۴ یکی می‌شوند و کادرپای هر قسمت دیگری از قطر به همین منوال است. بنابراین تعداد ناحیه‌هایی که با حذف این قطر از بین می‌روند مساوی است با تعداد پاره خطهایی‌که توسط نقاط تقاطع تشکیل می‌شوند،که یکی بیشتر از تعداد تقاطع با قطرهای دیگر است. توجه کنیدکه حذف یکی از قطرها سبب می‌شود نقاط تقاطع آن با قطرهای دیگر نیز از بین بروند لذا همانطور که قطرها را یکی یکی حذف می‌کنیم، تعداد نقاط تقاطع تغییر خواهد کرد. خوشبختانه در جریان عمل حذف، هر نقطهٔ تقاطع فقط یکبار ظاهر می‌شود. بدین لحاظ، تعداد ناحیه‌هایی که درفرایند حذف متوالی قطرها از بین می‌روند مساوی است با تعداد نقاط تقاطع روی اولین قطر $+1$، بعلاوهٔ تعداد نقاط تقاطع باقی مانده روی دومین قطر $+1$، بعلاوهٔ تعداد نقاط تلاقی باقی مانده روی سومین قطر $+1$، بعلاوهٔ...، بعلاوهٔ تعداد نقاط باقی‌مانده روی آخرین قطر $+1$. قطعاً تعداد جملات در این مجموع برابر است با تعداد قطرها. از آنجا که هر نقطهٔ تقاطع دقیقاً یکبار شمارش می‌شود، مقدار این مجموع مساوی است با تعداد نقاط تقاطع بعلاوهٔ تعداد قطرها. تعداد قطرها برابر است با $n-\binom{n}{2}$. زیرا $\binom{n}{2}$ راههای ممکن برای اتصال دو نقطه است، n تعداد نقاط چندضلعی است. تعداد نقاط تقاطع $\binom{n}{4}$ است. زیرا هر دو قطرباچهارنقطه مشخص می‌شوند که به‌نوبت یکی از نقاط تقاطع را مشخص می‌کنند. بنابراین تعداد نواحی از بین رفته $n-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ است. اکنون پس از حذف همهٔ قطرها هنوز یك ناحیه در سمت چپ، یعنی درون n ضلعی وجود دارد. در نتیجه تعدادکل نواحی عبارت است از

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{2}-n+1$$

ترجمه کنید که به ازای $m>n$ داریم $\binom{n}{m}=0$؛ بنابراین، یک مثلث دقیقاً $1=1+0+\binom{2}{2}-3+1$ طرح دورنه‌ای دارد.



شکل ۲

حال به مسئلهٔ اصلی باز می‌گردیم. تعداد $n>0$ نقطهٔ انتخابی متمایز روی یک دایره داریم و می‌خواهیم تعداد نواحی تشکیل شده از اتصال این نقاط را بشماریم (شکل ۲) واضح است که تعداد این نواحی برابر است با تعداد ناحیه‌های درون چندضلعی محاطی بعلاوهٔ n، و بنابراین مساوی است با $1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}$. این عبارت‌را می‌توان چنین نوشت:

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+\binom{n}{0}$$

با استفاده از این نکته که $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$، عبارت بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}$$

که این عبارت مجموع پنج عضو اول در $(n-1)$امین سطر مثلث پاسکال است (این مثلث با صفرمین جمله شروع می‌شود). اکنون دلیل آنکه به‌ازای $n=6$، به جای ۳۲، عدد ۳۱ حاصل می‌شود واضح است و الگوی کلی نیز مشخص شده است.

مراجع

1. Honsberger R., *Mathematical Gems*, The Mathematical Association of America, Washington D. C., 1973
2. Moise E., Downs F. Jr., *Geometry*, Addison Wesley, Reading Mass., 1964.

دیدگاه

آیا صدای ما به‌سیمای ما می‌رسد؟

اینکه جلوی تلویزیون بنشینی و به‌صفحهٔ آن خیره شوی، همواره خالی از فایده نیست. گهگاه می‌توان از آن بهره‌ها گرفت و می‌توان به شیوهٔ مرحوم لقمان از آن ادب و حکمت آموخت. مثلا روبروی تلویزیون نشسته‌ای که یک دفعه آگهی عجیبی پخش می‌شود: "گزارش بیستمین کنفرانس ریاضی کشور، امشب آخرین برنامه". چشمهایت را می‌مالی و دوباره نگاه می‌کنی. نه، اشتباه نیست. مثل اینکه واقعاً در تلویزیون خبرهایی است. با خود می‌گویی خدا را شکر که بالاخره کسی هم در تلویزیون پیدا شد که به فکر ریاضیات بیفتد. خدا را شکر که بالاخره کسی تشخیص داد که بله پدرجان، ریاضیاتی هم هست. خدا را شکر که بعد از سی‌چهل بار نشان دادن "قرن جراحان" و "سیرک‌فیزیک" و "چرا قورباغه‌های جزیرهٔ هکاید وشبها غذا نمی‌خورند"، کسی فهمید چیزهای دیگری هم در دنیای علم وجود دارد.

ساعتی با خودت این افکار را مضمضه می‌کنی که ناگهان آن برنامهٔ فراموش نشدنی آغاز می‌شود. ابتدای کار بسیار چشم‌نواز و نفس‌گیر است: هجده‌بار چرخاندن تصویر مرحوم گالیله در بین یک هشت α، β، π. خوب، مگر ریاضیات غیر از اینهم هست؟ هنوز در خلسهٔ ناشی از دیدن تصویر چرخان گالیله‌ای، که جناب مجری وارد صحنه می‌شود، و حیدا که چه متن بلیغ و جامعی درباب ریاضیات می‌خواند. پس از شنیدن متن بسیار استادانهٔ ایشان تازه می‌فهمی که ریاضیات خوب است، زیرا از بقال سرکوچه گرفته تا دانشمند علوم فضایی، همه و همه به آن احتیاج دارند، و ظهور کامپیوترهای عجیب‌وغریب و دستگاههای پیچیده در گرو پیشرفت ریاضیات است و بس. و لابد وقتی برای چهارمین کنفرانس هم تشکیل می‌دهند، حتماً آن چیز مهم و بدرد بخور است. پس هرجماعت مردم است که بدانند و آگاه باشند که ریاضیات چیز خوبی است.

متن تمام وجناب مجری مرخص می‌شود، و تصاویری از مراسم افتتاحیه به‌طور دست و پا شکسته می‌بینی و هنوز نفهمیده‌ای که چه‌کسی آمد و چه‌کسی رفت که به ناگاه دوباره تصویر چرخان گالیله و متعلقات مربوطه‌را به‌خوردت می‌دهند ناخواست جمع باشد که داری برنامه‌ای در بارهٔ ریاضیات می‌بینی. و پس از آن است که با تنی چند ازریاضیدانان خارجی "تراز اول" که به‌کنفرانس دعوت شده‌اند آشنا می‌شوی.

شخصیتهای مشهوری (؟) همچون گریمت، هارادا، بویارسکی، کارانا کیس، برادا. و عجبا که برای تکمیل جو روشنفکرنمایانهٔ برنامه چه تجلیلی از این افراد می‌شود. و تو می‌شنوی که یکایک اینها با چه کلمات مطنطنی برای بهبود ریاضیات ایران دارو تجویز می‌کنند. و پیش خود می‌گویی که لابد این حرفها، که دست اندرکاران ریاضیات خودمان بیست‌سال است دارند می‌گویند، اگر از زبان اجنبی باشد بسی بهتر و شیکتر است. وجناب گریمت را می‌بینی که در یک نمای شاعرانه‌ریاضی‌مآبانهٔ بسیار تصنعی، چراغ مطالعهٔ اتاق خود را روشن می‌کند تا دعوت نامهٔ کنفرانس را بخواند. و به‌سبک و سیاق هنرپیشگان رفتار می‌کند تا مردم بنگرند و حرکات یک ریاضیدان را یاد بگیرند که برای آتیه‌شان بسی مفید است.

و پس از محظوظ شدن از زیارت این چند دانشمند بزرگ، که تو گویی همچون هدیه‌ای آسمانی برای بهبود وضع ریاضیات ایران به این دیار نازل شده‌اند، با تعدادی انگشت شمار از جمع ریاضیدانان ایرانی آشنا می‌شوی. و نمی‌دانی که اصلا چرا این سه‌چهارنفر را هم علم کرده‌اند، که اگر اسمی از آنها نمی‌آمد چه‌بسا برنامه جذابتر می‌بود. وپرفسور رضا وللهی واکبرزاده را می‌بینی که تصویرشان هنوز نیامده می‌رود تا جای خود را به‌چرخیدن مکرر و مکرر گالیله در فضا در بین α، β، π، بدهد؛ گویا این تکه تصویر کامپیوتری غایتی هم اعظب چین بدی برای پرکردن وقت برنامه و کورکردن چشم بیننده نیست. و تو که خود در این کنفرانس بوده‌ای از اینکه می‌بینی از اسدی، شهیدی، هدایت، اعتمادی، دوج، صاحب جهرمی، وسادات عقیلی که در کنفرانس شرکت کرده‌اند هیچ‌خبری نیست، انگشت تحیر به‌دهان می‌گیری و می‌گویی، کاش "اسدی" نامی فرنگی داشت تا با او هم مصاحبه می‌کردند.

و تصاویری را از برگزاری مسابقهٔ دانش‌آموزان برای شرکت در المپیاد ریاضی‌می‌بینی،و با خود می‌گویی که لابد الان از مسابقهٔ دانشجویی هم صحبتی به‌میان می‌آید، که ناگهان دوبارهٔ گالیله می‌آید و....

و چشمت به جمال یک میزگرد بین ریاضی‌کاران مملکت خودمان باز می‌شود، و در حدود ده نفر را می‌بینی که یک‌به‌یک معرفی می‌شوند، و خود را آماده می‌کنی که حرفهای همه‌شان را بشنوی. ولی زهی خیال باطل! که می‌بینی پس از آن همه مقدمه چینی و تعارف و معرفی، تنها تکه‌هایی از صحبتهای دوسه‌نفرشان را پخش می‌کنند و بس. و با خود می‌گویی که اگر قرار بود فقط این قدر از صحبتها پخش شود، آن همه ساز و دهل قبلش برای چه بود؟ و آن بقیه چکاره بودند؟

و خلاصه، مستند "گزارش کنفرانس" به‌گونهٔ کمدی-تراژدی تا پاسی از شب ادامه دارد که یکباره به‌خودت می‌آیی و می‌بینی برنامه تمام شده است. و تومانده‌ای و حرفهایی که نمی‌دانی به‌که بگویی. قلم را برمی‌داری و کلماتی برای مسئولین محترم این برنامه در سیما می‌نویسی که:

مسئولین محترم این برنامه:

شاید صحبت درباب "گزارش بیستمین کنفرانس ریاضی کشور" که در تلویزیون پخش شد، در نظر برخی همگنان بی‌مورد جلوه کند. اما نگارندهٔ این سطور بی‌آنکه قصداغراق

داشته باشد، کسی از آشنایان به ریاضیات را ندیده است که این برنامه را دیده و زبان به شکوه نگشوده باشد. دلیل این امر را می‌توان در این نکتهٔ بسیار ظریف ــ و درعین حال‌تأسف‌آور ــ جست که این برنامه در تاریخ صدا و سیما "نخستین" برنامه‌ای بود که به طور مستقل، با مدتی نسبتاً طولانی، به ریاضیات می‌پرداخت، و همین گواهی است بر این که ساختار آن باید بسیار حساب شده می‌بود. شما خود بهتر می‌دانید که تاکنون در میان رشته‌های گوناگون دانش و فن، ریاضیات مهجورترین رشته‌ها در تلویزیون بوده است. در جایی که هرشب یکی دو فیلم دربارهٔ پرندگان و چرندگان و گیاهان، یاعلوم پزشکی و آزمایشهای فیزیک و شیمی، در تلویزیون نشان می‌داده شود، با کمال تأسف می‌بینیم که هیچ اشاره و توجهی به ریاضیات نمی‌شود (البته دوستداران رشته‌های علمی دیگر خواهند گفت که این فیلمها مربوط به بیست‌سی‌سال پیش است، اما چیزی که ما می‌گوییم این است که ریاضیات در تلویزیون حتی از فیلمهای آموزشی بیست‌سی‌سال پیش نیز محروم بوده است). واضح است که در یک چنین وضعیتی، نمایش یک برنامهٔ مستقل درباب ریاضیات، بیشتر از حدمعمول اذهان را به خود جلب می‌کند. اگر شما فروشندهٔ کالایی جدید باشید، آن محصول را کنار خیابان نمی‌گذارید تا مردم برحسب تصادف آن را ببینند و بخرند. نیز برای جلب مشتری سعی می‌کنید بهترین شیوه‌های تبلیغاتی را در پیش بگیرید، بسته‌بندی چشم نواز و نام‌گوش‌نواز برای کالا می‌گزینید، و خلاصه حداکثر تلاش خود را در این راه به کار می‌بندید که به‌مردم بقبولانید کالای شما به نفع آنهاست. ریاضیات در تلویزیون و به طور کلیتر در جامعهٔ ما به مثابهٔ کالایی جدید است با یک تفاوت: ریاضیدان در پی‌قالب‌کردن‌کالای خود به مردم نیست. هیچکس این خیال خام را در سرنمی‌پروراند که همهٔ مردم باید ریاضیات را بفهمند. بلکه هدف از تبلیغ برای این‌کالا این است که جامعه تنها تشخیص دهد تفکر قابل احترامی به نام ریاضیات وجود دارد، وکسانی‌که درگیر این فعالیت‌اند، آب درهاون و میخ برسنگ نمی‌کوبند، بلکه پیشبرد این جریان تفکر بر گردن آنهاست، و به واسطهٔ آن، البته ابزاری برای بهبود زندگی بشر نیز حاصل می‌آید. به بیان دیگر، ایده‌آل آن است که جامعه تنها قبول کندکه چیزی به نام ریاضیات ــ متفاوت با آنچه همه در دوران‌تحصیل ابتدایی دیده‌اند ــ وجود دارد، و این چیز برای بشر مهم و ضروری است. و عجب اینکه‌قبولاندن این معنا به‌مردم چه‌کار دشواری است! و در همین جاست که نقش تلویزیون و سایر رسانه‌های همگانی بارز می‌شود، و می‌شود دیدکه تلویزیون چگونه می‌تواند در عرض یک ساعت نظر میلیونها نفر را در مورد ریاضیات تغییر دهد. و به همین دلیل است که می‌گوییم و باز هم می‌گوییم که ای‌کاش این برنامهٔ بی‌اساس، که می‌توان پروندهٔ آن را در دستهٔ شبه‌گزارشهای تبهگون درجهٔ سوم جای داد، گاه و بیگاه تلنگری آنچنان ناشیانه به جایگاه ریاضیات نمی‌زد وگزارش خود را در مورد کنفرانس می‌داد و می‌رفت دنبال کارش، تا امر مهم نمایاندن جایگاه ریاضیات بماند برای برنامه‌ای حساب شده، متین، دقیق، و صاحبنظرانه.

صحبت درباب وظیفهٔ تلویزیون در قبال شناساندن ریاضیات به مردم ــ به مفهومی که در بالا آمد ــ را به وقتی دیگر موکول می‌کنیم، زیرا کسانی که صلاحیت بیشتری از نگارنده دارند باید در این باره قلم بزنند. بنابر این از تلنگرهای برنامه به جایگاه علم ریاضیات چشم می‌پوشیم و وجه گزارشی آن را مرور می‌کنیم تا اگر گوش شنوایی پیدا شد، توشه‌ای باشد برای برنامه‌های آتی.

نخستین ویژگی این برنامه، که در نگاه اول به چشم هر فرد آشنا به ریاضیات می‌آید، پرداخت بسیار سطحی، شتابزده، و خام نگرانه در طول آن است، و این سطحی نگری گاه چندان بارز می‌شود که بینندهٔ آگاه نمی‌داند بخندد یا تأسف بخورد. این ضعف هم در شکل ساخت و هم در محتوی آن است. دست اندرکاران تلویزیون با نگاه مجدد منصفانه‌ای به این برنامه، خود تصدیق خواهند کرد که تدوین آن در ابتدایی‌ترین و بدترین شکل ممکن بوده است. جای این سوال هست که چرا این برنامه دست کم از نظر تکنیک ساخت این قدر نازل است؟ شما را به خدا صحنهٔ میز گرد انتهای برنامه را در نظر آورید. درکجای دنیا رسم است و تاکنون درکدام یك از برنامه‌های همین تلویزیون خودمان دیده شده که در یك میز گرد آقای فلان و آقای بهمان و هفت نفر دیگر به عنوان شرکت‌کنندگان معرفی شوند، بعد فقط نظرات آقای فلان و بهمان را بشنویم، و ناگهان مجری بیننده را به خدا بسپارد؟ آیا این در درجهٔ اول توهین به بیننده و در مرحلهٔ دوم توهین به آنانی نیست که معرفی شدند و صحبتهایشان پخش نشد؟ آیا نمی‌شد حالا که وقت برنامه اجازه نمی‌دهد همهٔ صحبتها پخش شود، همان نکه‌صحبتهای پخش شده را به‌طور مقطع در لابلای قسمتهای برنامه گنجانید و اصلاً آن را به صورت میز گرد عرضه نکرد؟ ببینید، از هر کس به اندازهٔ توانایی‌اش انتظار و توقع دارند. همین مجلهٔ جنگ ریاضی که پیش روی شما باز است، بدون تعارف اشکالاتی دارد و انتقادات زیادی بر آن وارد است. اما وقتی نسبت به توانایی و تمکن جمعی دانشجو ارزیابی شود، در مجموع کاری است نسبتاً قابل قبول. ما هم با توجه به امکانات تلویزیون، از آنها انتظار نداریم برنامه‌ای علمی همپایهٔ سریال "ارتباطات"، با آن پایه و مایهٔ شگفت‌انگیز و خیره کننده، تهیه کند. انتظار ما ــ که فکر نمی‌کنم بی‌جا و زیاده از حد باشد ــ این است که وقتی قرار شد برنامه‌ای تهیه شود، اولا با حداکثر امکانات موجود مبادرت به تولید آن شود، ثانیاً عده‌ای آشنا به موضوع بر کار تهیهٔ آن نظارت داشته باشند، و ثالثاً این نکتهٔ مهم در نظر گرفته شود که باید به بیننده و مهم و شعوراو احترام گذاشت و دانست که کوچکترین لغزش برنامه از دیدگان تیزبین طیف وسیع بینندگان پوشیده نخواهد ماند، ونیز باید این فکر را که "ما این طور برنامه می‌سازیم، کسی چه می‌فهمد" از سر بیرون کرد. چگونه است که تلویزیون در مورد خیلی موضوعات دیگر برنامه می‌سازد که اتفاقاً خوش ساخت‌اند (گزارش هفتگی را ببینید)، آن وقت موقعی که پس از چندین و چندسال برای اولین بار نوبت به ریاضیات می‌رسد، باید برنامه‌ای تهیه شود که انسان شرم می‌کند از اشتباهات پیش پا افتادهٔ آن حتی یاد

کند. این در باب شکل ساخت.

اما از نظرگاه محتوی سخن بسیار است. نخست باید پرسید که این برنامه اصلا چه هدفی را دنبال می‌کرد؟ اگر هدف صرفاً یك نوع "دپرتاژ" از یك رویداد علمی بود، بایدگفت برنامه حتی به پنجاه در صد موفقیت در این زمینه نیز دست نیافت، چه از بسیاری از وقایع کنفرانس سخنی به میان نیاورده، و از آنهایی هم که سخن رانده جز تصویری کم رنگ از واقعیت چیزی ارائه نکرده بود. اما به گمان ما درکنار این، هدف دیگری نیز برای این برنامه منظورشده بود، یعنی طرح برخی مشکلات ریاضیات ایران، با استفاده از موقعیت کنفرانس، که در آن عده‌ای از دست‌اندکاران ریاضیات کشور گرد هم آمده بودند. و دقیقاً در همین‌جا، یعنی هنگام طرح مشکلات و چاره جویی برای آنهاست که وحشتناکترین بخش برنامه چهرهٔ خود را می‌نمایاند. ماجرا از این قرار است که حضور چند ریاضیدان خارجی در کنفرانس ظاهراً خیلی توجه تهیه‌کنندهٔ برنامه را به‌خود معطوف کرده بود، و این موضوع دقیقاً از صحنه‌های برنامه آشکار است. در اینجا باید تهیه‌کنندهٔ محترم این برنامه را مورد خطاب قرار داد و گفت دوست عزیز. راه چاره را کسی می‌داند که "آشنا به درد" (یا به اصطلاح ناروای امروزی "درد آشنا") باشد. فکر نکنید نظراتی که مثلا آقای هارادا دربارهٔ راههای پیشرفت ریاضیات ایران می‌دهد، خیلی بهتر از نظرات یك دانشجوی خوب دورهٔ کارشناسی در کشور خودمان است. این امری است پذیرفتنی که تجربهٔ یك ریاضیدان خارجی در امر پژوهش برای کشور ما مغتنم است، اما این که می گوییم از جهاتی نظرات یك دانشجوی خوب کشورمان در این باب می‌تواند با نظرات یك چنین ریاضیدانی قابل مقایسه باشد به این دلیل است که برای هریك از این دو دسته، حاصل خوب تجربهٔ ریاضی در آشنایی به‌مشکلات بومی ریاضیات ایران مقداری است ثابت. با وجود این، در این برنامه چندان روی این‌افراد تأکید شده بود که فرد ناوارد گمان می‌کرد اینها واقعاً چهره‌های درخشان ریاضیات امروز درجهان‌اند. لکن حقیقت تلخ این‌است که غالب این افراد، اگر نخواهیم مرتبه و شأن علمی آنان را دقیقاً تعیین کنیم، دست کم جزء ریاضیدانان ترازاول نبودند. حالا تهیه کنندگان محترم این برنامه چگونه از چنین افرادی، که یقین دارم پس از دریافت دعوت نامهٔ کنفرانس فهمیدند که در ایران ریاضیاتی هم هست، انتظار داشتند که نوشداروی مطلوب ریاضیات ایران را به دست دهند، ما نمی‌دانیم. والله‌اعلم. بله، یك زمان هست که درکنفرانس ریاضی شخصیتهای جهانی همچون دیودونه، توم، وسوبولف (که همگی در چند کنفرانس پیش شرکت داشتند) حضور پیدا می‌کنند، آن وقت مصاحبه با آنها مناسبتی دارد و می‌شود آن را به طریقی توجیه کرد (هر چند باز شك دارم نظرات آنان نیز خیلی به درد "ریاضیات ایران" بخورد). اما درکنفرانس بیستم که این گونه نبود چه؟ اشتباه نشود. سخن برسر این نیست که نمی‌باید با این ریاضیدانان خارجی مصاحبه می‌شد، بلکه می گوییم محور برنامه در امر چاره جویی معضلات نمی‌باید این

افراد می‌بودند. وضعیت وحشتناکی که پیش از این گفتیم در همین جاست که دست کم بیست سی ریاضیدان از مملکت خودمان که همگی آشنا به مشکلات‌اند و همه یك مثنوی حرف برای گفتن دارند از صحنهٔ برنامهٔ مذکور کنار می‌مانند، آن وقت تهیه کنندهٔ محترم به هر قیمتی شده در شلوغی کنفرانس آن پنج ریاضیدان ردهٔ چندم فرنگی را پیدا می‌کند و با همهٔ آنها به مصاحبه می‌نشیند و حتی یکی را هم از قلم نمی‌اندازد. این نشان از آن دارد که ریاضیدانان مملکت خودمان، که بدون هیچ شکی آراء بهتری نسبت به این چند ریاضیدان خارجی داشتند، اصولاً برای تهیه کنندهٔ محترم اهمیتی نداشتند و برای همین است که می‌گوییم اگر فلان ریاضیدان ایرانی نامی فرنگی داشت حتماً با او هم مصاحبه می‌کردند. مسئلهٔ دیگری که ما را می‌آزارد این است که در بین همین ده ریاضیدان ایرانی مقیم خارج که به کنفرانس آمده بودند، و نیز در بین همین ریاضیدانان خوب و بی‌ادعای مملکت خودمان چهره‌هایی یافت می‌شدند که از لحاظ وضعیت علمی به مراتب نسبت به این چند ریاضیدان خارجی برتری داشتند، و دریغ که حتی نامی از آنها نیز به میان نیامد. و انسان در می‌ماند که با این همه حرف درباب استقلال علمی و خودکفایی و عزت نفس‌وکذا، این دیگر چگونه خط مشیی است؟ آیا نمی‌شد با چندنفر از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج به صحبت نشست و ضمن نظرخواهی در مورد راههای پیشبرد ریاضیات در ایران، این سؤال تکراری ولی بسیار مهم را از آنها پرسید که چرا به مملکت باز نمی‌گردند؟ و چرا حالا که شرایط ما این قدر برای آنان غیرقابل تحمل است، دست کم دین خود را به مملکتشان ــ اگر اصلاً دینی برای خود قائل‌اند ــ از راه ارتباط دورادور علمی به‌نحوی مستمر ادا نمی‌کنند؟ و آیا نمی‌شد با ریاضیدانان مملکت خودمان به صحبت نشست و حرفشان را شنید و راه شناساندن ریاضیات به جامعه را از آنان پرسید؟

و دیگر، از مهجور و غریب ماندن مسابقه ریاضی دانشجویی در این برنامه نگوییم، که اصلا نا گفتنش اولی.

خلاصه آنکه، تلویزیون در یك برنامهٔ نسبتاً طولانی، بهترین فرصت را برای مطرح کردن مسائل گریبانگیر ریاضیات در جامعه ــ تنها به‌صورت نوعی "فتح باب" ــ به سادگی، و به‌بدترین شکل ممکن از دست داد. وکاش تنها این فرصت از دست می‌رفت و دیگر عوارض منفی نداشت. وکاش نگارنده پوزخند جماعت بی‌خبر از ریاضیات را پس از دیدن این برنامه نمی‌دید که می‌گفتند اگر ریاضیات این است و ریاضیدانان اینان‌اند، چه بهتر که.... و ما این همه را از عدم آشنایی کافی تهیه کنندگان برنامه با وضعیت ریاضیات کشور می‌دانیم و لاغیر، و به هیچ روی آنان را به داشتن قصد و تعمدی در این کار متهم نمی‌کنیم. و اگر خدا بخواهد در مجالی دیگر درباب اینکه تلویزیون برای اشاعهٔ فرهنگ ریاضی چه می‌تواند بکند، سخن خواهیم گفت. امید آن‌که در آینده تلویزیون با تهیهٔ برنامه‌های درخور و شایسته، در ایفای نقش "دانشگاه"

بودن خود موفق باشد، و نیز مسئولین محترم برنامهٔ مذکور سخنان ما را با همدلی بشنوند. آیا این انتظار بی‌جاست که ما می‌خواهیم تلویزیون‌مان شایستهٔ نام سیمای جمهوری اسلامی ایران باشد؟

سعید ذاکری

نگاهی به کارنامهٔ پنج سالهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی

امیر اکبری مجدآبادنو

مقدمه

در بهارسال ۱۳۶۳ روزنامه‌ها خبر انتشارقریب‌الوقوع یك مجلهٔ‌ریاضی ازسوی سازمان‌پژوهش وبرنامه‌ریزی آموزشی‌وزارت آموزش‌وپرورش را منتشر کردند. انتشار این خبر با استقبال علاقه‌مندان ریاضی روبه‌روشد؛ زیرا برای اولین بار یك نهاد دولتی قصد داشت مجله‌ای دورزمینهٔ ریاضیات منتشر کند. سرانجام، در اواخرخرداد ماه ۱۳۶۳ نخستین شمارهٔ این مجله تحت عنوان "رشد آموزش‌ریاضی" انتشاریافت و تاکنون نیز همچنان (هرسال چهار شماره) منتشر شده است. نظربه‌اهمیت این‌مجله و ضرورت بازبینی‌نقادانهٔ شماره‌های‌انتشار یافتهٔ این مجله، در پایان‌پنجمین سال تأسیس آن، نگاهی‌به‌کارنامهٔ پنج سالهٔ رشد می‌افکنیم.

۱. اهداف رشد

در نخستین شمارهٔ رشد اهداف مجله را به این قرار جمع‌بندی کرده‌اند: "هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین‌معلمین ریاضی و دفتر مذکور، به منظور تبادل تجارب و آراء در زمینهٔ آموزش ریاضی است، و در مرحلهٔ بعد طرح و بررسی مسائل بنیادی‌ریاضیات مقدماتی و مطالب جنبی و مفید درسی. به‌منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است،مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائه مقالاتی ناظر براهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی، استقبال می‌کند."[۱] از شمارهٔ ۵ به بعد عبارات فوق از پشت جلد حذف می‌شود و به جای آن این جملات می‌آید: "مجلهٔ رشد آموزش ریاضی هرسه ماه یك‌بار به‌منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود."[۲] به‌نظر می‌رسد که در پایان سال اول در اهداف مجله تجدید نظری صورت گرفته باشد ولی مسئولین مجله همواره تأکید کرده‌اند که اهداف کلی همان‌است که درپیشگفتار شمارهٔ ۱ آمده است، و البته‌روی سخن مجله اساساً با دبیران ریاضی است. در پیشگفتار شمارهٔ ۸ می‌خوانیم: "اما به نظرما باید بخشهایی از مجله برای دانشجویان ریاضی، که اکثریت آنها به حیل دبیران ریاضی خواهند پیوست، قابل استفاده باشد. قسمتهایی از مجله، به‌خصوص تعدادی ازمسائل هرشماره نگرشی به دانش‌آموزان ریاضی داشته و دارد، که مسلمین دبیران گرامی هستند."[۳]

۲. رشد ومقاله

حال‌که با اهداف مجله از زبان مسئولان آن به اجمال آشنا شدیم، به‌بررسی بخشهای مختلف آن می‌پردازیم. نخست بخش مقالات را بررسی‌می‌کنیم،که اصلی‌ترین‌قسمت‌مجله را تشکیل‌می‌دهد. برای این منظور مقالات را رده‌بندی موضوعی کرده‌ایم که درجدول۱ آمده است. باید بگوییم که مطالب تحت عنوان پیشگفتار و نوشته‌هایی که نویسندهٔ آنها مشخص نبوده، و یا به نقل از کتابی بوده است،در این رده‌بندی منظور نشده‌اند. همانطورکه ازجدول پیداست، درخلال ۵ سال انتشار مجله، جمعاً ۱۶۹ مقاله در شماره‌های این مجله درج شده است، که در این میان هندسه با ۳۶ عنوان و جبر مقدماتی و نظریهٔ مجموعه‌ها با ۶ عنوان‌به ترتیب بیشترین و کمترین تعدادعناوین را به خود اختصاص داده‌اند. همچنین‌شماره‌های سال سوم با ۳۸عنوان بیشترین و شماره‌های‌سال دوم با ۲۵عنوان‌کمترین تعداد مقالات را دارند. از ۱۶۹ مقالهٔ چاپ شده ۳۳ مقاله ترجمه است. به‌عبارت دیگر ۱۹٪ مقالات از منابع خارجی ترجمه شده‌اند. از این تعداد، ۲۰ عنوان ترجمه از نشریات، ۶ عنوان ترجمه از کتاب و۷عنوان بدون ذکر منبع اصلی است. جدول (۲)فهرست نشریاتی را نشان می‌دهد که درتهیهٔ مقالات رشد از آنها استفاده شده است.

واضح است‌که از ارقام‌درج شده‌درجدول بالا چیززیادی دستگیرمان نمی‌شود، زیرا این بررسی کمی است. برای کندوکاوعمیقتر باید به بررسی کیفی‌مقالات پردازیم. البته این کارچندان ساده نیست و مجالی فراوان مـی‌طلبد. به همین دلیل به‌جای‌بررسی کیفی‌یکایك‌موضوعات‌مقالات، به‌طور‌مختصر توضیحاتی‌درمورد دوبخش آموزش ریاضی و ریاضیات مقدماتی (آنالیز ترکیبی، هندسه، نظریهٔ اعداد، جبر مقدماتی، و نامساویها) می‌آوریم، به این امیدکه ازاین بررسی اجمالی بتوان به‌تحلیلی ـ هرچند ناقص ـ از کل بخش مقالات دست یافت.

(الف) رشد و آموزش ریاضی. همانطورکه

۱. رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۲.

۲. رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۸، صفحهٔ ۳.

جدول ۱

موضوع	سال اول	سال دوم	سال سوم	سال‌چهارم	سال پنجم	مجموع
آنالیز ترکیبی، آمارواحتمال	۳	۱	۲	۰	۲	۸
آنالیز ریاضی	۳	۵	۴	۵	۵	۲۲
آموزش ریاضی	۵	۲	۲	۲	۳	۱۴
تاریخ ریاضی	۴	۳	۴	۰	۳	۱۴
تفریحات ریاضی	۰	۰	۳	۳	۱	۷
جبرمجرد و جبرخطی	۱	۰	۲	۲	۲	۷
جبرمقدماتی	۲	۱	۱	۲	۰	۶
فلسفه‌وماهیت‌ریاضی	۱	۱	۴	۱	۱	۸
متفرقه	۱	۱	۲	۴	۲	۱۰
نامساویها، اتحادها و استقرا	۴	۱	۰	۱	۲	۸
نظریهٔ‌اعداد	۴	۳	۵	۴	۷	۲۳
نظریهٔ مجموعه‌ها	۳	۰	۱	۱	۱	۶
هندسه	۶	۷	۸	۱۰	۵	۳۶
مجموع	۳۷	۲۵	۳۸	۳۵	۳۴	۱۶۹

جدول ۲

عنوان نشریه	تعداد دفعات مورد استناده
ریاضیات درمدرسه	۲
نشریهٔ انجمن معلمان ریاضی فرانسه	۱
Bulletin of London Mathematical Society	۱
Discover	۲
Educational studies in Mathematics	۲
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	۱
Mathematics in School	۱
Mathematics Magazine	۳
Mathematics spectrum	۲
The Mathematical Gazzet	۱
The mathematics Teacher	۴

در بالا گفتیم، هدف از انتشار رشد در وهلهٔ اول ارتباط بین معلمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب و آراء در زمینهٔ آموزش ریاضی بوده‌است. بانگاهی به‌جدول(۱) می‌بینیم که بعدازپایان سال اول، مجله ازاین هدف‌فاصله گرفته است و تعداد مقالاتی‌که در زمینهٔ آموزش ریاضی در آن به چاپ رسیده بسیار اندك‌است. در طول پنج سال فعالیت تنها ۱۳ مقاله‌که به نوعی با مسائل آموزش ریاضی در ارتباط‌بوده، مطرح شده است. دربارهٔ مسائل مورد بحث در صحنهٔ بین‌المللی،مانند نوگرایی در زمینهٔ آموزش ریاضی،هیچ مطلبی به‌چشم نمی‌خورد. به‌کامپیوتر و نقش آن در آموزش‌که این روزها از مسائل بسیار مهم در حوزهٔ آموزش ریاضی است، نیز تنها دریك مقاله اشاره‌ای گذرا شده‌است. ۶مقاله به روشهای تدریس،مباحث خاص ریاضی مربوط می‌شود. در این میان مقالهٔ "لزوم ارائه برهان در ریاضیات دبیرستانی" (شمارهٔ ۷) از بهترین مقالات ارائـه شده در این بخش است. دربارهٔ مسائل بومی ریاضیات‌ایران مثل افت ریاضی‌نیز تنها یك مقاله در این مجله‌ها درج شده است.

ب) رشد و ریاضیات مقدماتی. از میان‌پنج بخش مربوط به ریاضیات مقدماتی، هندسه با۳۶ عنوان و به دنبال آن نظریهٔ اعداد با ۲۳ عنوان دو رتبهٔ اول راحائزند. نزدیك به نیمی‌ازمقالات بخش هندسه توسط آقای حسین غیور نوشته‌شده است که با ۱۴ عنوان مقاله پرکارترین نویسندهٔ رشد به حساب می‌آید. بسیاری از مقالات ایـن بخش به ارائه برهانهایی در مورد مسائل خاص هندسه می‌پردازند. مثلا در هشت مورد به ارائه اثبات و یا تعمیم قضایای معروفی چون موزلی، فیثاغورث و پروانه پـرداخته شده است. مقالهٔ "اثبات امتناع تثلیث زاویـه، تضعیف مکعب، و تربیع دایره" (شماره‌هـای ۵ ـ ۶) از بهتریـن مقالات این بخش به‌شمار می‌آید.

بخش نظریهٔ اعداد نیز با داشتن ۲۳عنوان اگرچه از نظر تعداد رقـم بالایی دارد، شامل مطالب تکراری فراوان است. مثلا، پنج عنوان شامل قواعد گونا گون‌بخش‌پذیری براعداداست که به اعتقاد ما می‌تواند حساکی از نوعـی "بی‌سیاستی" در انتخاب مقـالات بـاشد. "برهانهایی از اصمیت $\sqrt{2}$" (شمارهٔ ۴)، "تعیین بـزرگترین قـوهٔ عدد اول p در ضریب $(\frac{n}{p})$" (شمارهٔ ۱۱) از بهترین مقالات ارائه شده‌هستند.

اما از دیگـر بخشها بگـوئیم. متأسفانه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی کشورمان به‌بخشهای مهمی از ریاضیات مقدماتی چون آنالیز ترکیبی، احتمال و نامساویها به‌قدرکافی عنایت نشده‌است. یکی از وظایف رشد باید معرفی ومطرح کـردن این شاخه‌ها باشد؛ اما، همانطور که درجدول(۱) پیداست، تعداد مقالات ارائه شده در این بخشها بسیار اندك است و مضمون آنها عموماً تکرار خلاصهٔ‌مطالبی است‌که در کتابهای‌درسی آمده‌اند. اما در این میان مقالات "میانگین‌هـای حسابی و هندسی وکـاربـردهایـی ازآن" (شمارهٔ ۱) و "استفرا قیقرایی" (شمارهٔ ۲) از بهترین مقالات ارائه شده هستند. در بخش جبر مقدماتی‌نیز مقالهٔ چشمگیری به چشم نمی‌خورد.

آنچه دربك‌بررسی کلی می‌توان‌نتیجه گرفت عبارت‌است از عدم برنامه‌ریزی مشخص‌درمورد مقالات،که به تـرزیق ناهمگون مقالات و چاپ مطالب تکراری فراوان انجامیده است. همچنین سال اول را باید در ارائه مقالات گونا گون‌سال موفقی به‌شمار آورد. ولی به‌تدریج شاهد ارائه مقالات تکراری هستیم، تا آنجا که شماره‌های ۳ و ۴ از بهتـرین شماره‌هـا و شمارهٔ ۲۰ از ضعیف‌ترین شماره‌های مجله (ازدیـدگاه مقالات ارائه شده)، به‌شمار می‌روند.

۳- رشد و مسئله

بخش مسائـل یکـی از مهمترین بخشهای مجله محسوب می‌شود کـه از اولین شماره فعال بوده است.قبل از ارزیابی این بخش پیرامون‌اهمیت مسائل در ریاضیات و آموزش ریاضی به‌توضیح مختصری می‌پردازیم. در اینجا، ذکر قسمتی از مقالهٔ بسیارخواندنی "کدام مسائل‌انگیزه بخش‌ترند" نوشتهٔ دکتر امید علی‌کرمزاده که در یکی از شماره‌های رشد درج شده خالی‌از لطف نیست.

"مسائل ریاضی بی‌شك قبل‌ازخـود ریاضی وجود داشته‌اند و کوشش بشر برای حل‌این مسائل بوده که چه به صورت موفقیت‌آمیز و یاناموفق اکثرآبشر را به نتایجی‌مهمتر یا مسائل کلی‌تر از مسائل اولیه هـدایت کرده است، و این کوشش تا به امروزادامه داشته و باعث بوجود آمدن ریاضیات به شکلی که هـی‌بینیم شده است. به عبارت دیگر اگرماندهاآموس و دیگران (مرحوم هنرددی بیشتر اوقات در سر کـلاس درسی می‌گفت مسائل، درکهایی هستند که به پیـدن ریاضیات خونمی‌رسانند) بپذیریم که‌مسائل قلب‌ریاضیات هستند. این‌قلب ازهزاران‌سال قبل مشغول زدن‌بوده واز این به‌بعدهم‌خواهد زد و هرگز نخواهد ایستاد و بـه پرفـور بازنارد هم‌نیازی ندارد.[1]"

در نوشتار بالا طـی چند جمله به نقش مسائـل ریاضی در جریان اصلی ریـاضیات اشاره شده است. ولی باید توجه داشت کـه نقش مسائـل ریاضی‌در ریاضیات‌وبیرستان کاملا متفاوت است. **این نقش با هدف آموزش ریاضی در دبیرستان رابطهٔ تنگاتنگی دارد. جورج پولیا ریاضیدان و معلم پرآوازهٔ ریاضی،هدف از تدریس‌ریاضیات در دبیرستان را آمـوزش اندیشیدن و عقل‌سلیم می‌داند وبه همین دلیل‌مسائل نقش اساسی‌ومهمی در آموزش ریاضیات دبیرستانی پیدا مـی‌کنند. مسائلی‌که برای این هدف طرح می‌شوند بـاید دارای شرایط خاصی باشند؛ بـدیهی است کـه مسائل سرراست، قالبی و مکانیکی نه تنها دراین راستا نمی‌توانندکارایـی لازم را داشته بـاشند بلکه تأکید زیاد براین نوع مسائل می‌تواند به هدف آمـوزش ریـاضی در دبیرستان آسیبهای جدی واردآورد.** نقل‌قول دوشنگر زیر ازسگو[2] در تأیید این مدعا و تأکید براهمیت طرح‌مسائل مناسب در ریاضیات دبیرستان است.

"نباید فراموش کرد که حل یك مسئلهٔ با

۱- رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ۳، صفحهٔ ۱۸.

2. Szego

ارزش به ثمرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل دوره‌ها یافته‌ها و آگاهی‌هاست تلاش فکری است. پس چرا مغزهای جوان باید به‌انجام دادن این تلاش عظیم تمایل نشان دهند؟ پاسخ این سؤال شاید تمایل غریزی برای انجام دادن کارهای با ارزش باشد؛ یعنی طرز تفکری که تلاش فکری و موفقیت معنوی را در درجهٔ بالاتری از توفیق مادی قرار می‌دهد. چنین ارج و مرتبتی تنها می‌تواند حاصل پیشرفت دراز مدت فرهنگی محیط زیست و مصنوعیت جامعه باشد که کمکهای مادی دولت و یا حتی آموزش فشرده‌تر ریاضی، به‌تنهایی می‌تواند آنرا شتاب بخشد. مؤثرترین ابزار شاید این باشد که ژرفای تأثر فکری و احساس رضایت حاصل از یک تلاش فکری بزرگ و موفق، به مغزهای جوان تلقین گردد.»[۱]

حال با توجه به مطالب فوق ببینیم که فعالیت رشد در این زمینه چگونه بوده‌است. رشد در طول پنج سال جمعاً ۲۹۹ مسئله را در بخش مسائل مطرح کرده‌است. بخشی از این مسائل را، به‌خصوص در ۱۰ شمارهٔ اول، مسائل امتحانات نهایی و کنکور های تشریحی تشکیل می‌دهند، و تعدادی دیگری از دروس سالهای نخست دانشگاه به‌خصوص ریاضیات عمومی و نظریهٔ اعداد انتخاب شده‌اند. بیشتر این مسائل، مسائلی غیرمکانیکی و غیر قالبی‌اند. در یک ارزیابی کلی این بخش را باید یکی از موفق‌ترین بخشهای مجله محسوب کرد، به‌خصوص به‌دلیل اینکه توانسته است جایگاهی در بین دانش‌آموزان دبیرستان پیدا کند. اما به‌گمان ما در کنار این نقطهٔ قوت، مشکلی عمده نیز گریبانگیر این بخش است و آن نداشتن خط‌مشی مشخصی در گزینش مسائل است. این بخش مسئول ثابتی ندارد و سؤالات هر شماره را یکی از اعضای هیئت تحریریه طرح می‌کند، و به همین دلیل سؤالهای هر شماره به سلیقه‌های فردی وابسته می‌شود.

۴. رشد و تستهای کنکور

بخشی از صفحات شماره‌های ۱۷-۱۹۰۱۶ رشد به سؤالات تستی کنکور در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی اختصاص داده شده است. در شماره‌های ۷ و ۱۶ تنها کلید تستها درج شده اما در شمارهٔ ۱۹ ـ ۲۰ توضیحاتی نیز در مورد کیفیت تستها آمده است. البته این تستها به‌طور وسیع در اختیار دانش آموزان قرار دارد و در مورد ضرورت درج آنها توضیحی را در مجله نمی‌یابیم. متأسفانه تستهای کنکور به‌شکل کنونی، و در کنار آنها کلاسهای کنکور، بسیاری خلاقهٔ دانش‌آموزان ضربه‌های جبران ناپذیری وارد آورده است. در این مورد، خوبست که همهٔ دست اندرکاران آموزش ریاضی، و بخصوص مسئولین رشد، این اندرزپولیا را همواره به یاد بسپارند که:

> «به‌گمان من، در زندگی و کار معلم، وسوسه‌های فراوانی وجود دارد، ممکن است وسوسه شویم چیزهایی را طرح کنیم که ساده‌تر باشند و راحت‌تر بتوان آن را فهمید. ولی آیا باید تنها چیزهایی را بیاموزیم که فهم آنها ساده است؟ آیا آنچه را که به‌سادگی می‌توان یاد داد، همیشه مفید است؟
>
> یک مربی یا استعداد و آزموده، می‌تواند راه نگه داشتن توپ روی پیانو را به‌خوک دریایی بیاموزد. ولی آیا، آن وقت، خوک دریایی می‌تواند ماهی‌ها را هم به راحتی صید کند؟»[۱]

۵. رشد و مسابقات ریاضی

از نخستین شماره‌های مجله، گزارش و مسائل مسابقات ریاضی دانش آموزی، استانی و دانشجویی در مجله درج شده‌است. با شرکت تیم دانش‌

۱. گورشاک، یوژف. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (۱)، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸، صفحهٔ ۷.

۱. پولیا، جورج. خلاقیت ریاضی، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۶، صفحهٔ ۴۸۷.

آموزان کشورمان در المپیاد بین‌المللی ریاضی و انجام یافتن هرچه بیشتر مسابقات استانی و کشوری، مسائل و گزارش انجام این مسابقات و همچنین المپیاد بین‌المللی به‌طور مرتب در مجله درج می‌شود. خوشبختانه رشد، به‌ویژه از شمارهٔ ۱۵ به‌بعد، در این زمینه فعال بوده و در معرفی این مسابقات به‌دانش‌آموزان سهم مؤثری داشته و در میان آنان تحرکی پدید آورده است.

۶. رشد و سایر بخشها

رشد دارای بخشهای دیگری نیز بوده که از آن میان می‌توان بخش نامه‌ها و گزارش را برشمرد. همچنین در طول ۵ سال، بخشهایی وجود داشته‌اند که پس از چند شماره به‌فراموشی سپرده شده‌اند، مثلاً بخشهای معرفی کتاب و اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات که از شمارهٔ ۱۰ به‌بعد اثری از آنها به‌چشم نمی‌خورد. همچنین بخشی تحت عنوان معرفی نشریات در شماره‌های اخیر شکل گرفته که اقدامی بس پسندیده است.

۷. چند نظر و پیشنهاد

همانطور که پیشتر هم گفتیم، بازبینی نقادانهٔ کارنامهٔ رشد برای اعتلای بیشتر آن ضروری است. خوشبختانه سردبیر رشد در پیشگفتار شمارهٔ ۲۱ این تولید را داده است که: «در آیندهٔ نزدیک با یک نوش مؤثر نسبت به‌ارزشیابی این مجله و انطباق آن با اهداف اولیه و بررسی علل تأخیر انتشار مجله و سایر مسائل و موضوعات مربوطه خواهیم پرداخت و کوشش خواهیم کرد ضمن بررسی کارنامهٔ خود نسبت به رفع موانع اقدام نمائیم.»[۱] امیدواریم که این کار هرچه زودتر انجام شود. در زیر به‌پاره‌ای از مسائل که در این بررسی می‌تواند در نظر گرفته شود، اشاره خواهیم کرد.

الف) مشکل اساسی رشد کثرت مخاطبین است. مخاطبین رشد دبیران، دانش آموزان، دانشجویان مراکز تربیت معلم و دانشجویان دانشگاهها هستند. درست است که در کشورما، برخلاف کشورهای پیشرفته که برای هر کدام از گروههای فوق نشریات ویژه‌ای منتشر می‌شود، اینگونه نشریات نشر نمی‌یابند، اما این هم معقول نیست که یک مجله به تنهایی بخواهد همهٔ مخاطبین را راضی نگهدارد. حاصل این کار چیزی جز مغشوش شدن مطالب مجله نیست. چنانچه از ظاهر امر بر می‌آید، دبیران ریاضی مخاطبین اصلی‌اند و در طول سالهای اول این موضوع نسبتاً رعایت شده است؛ ولی در طول سالهای بعد این گروه در مقابل دیگر مخاطبین کم کم به‌دست فراموشی سپرده می‌شوند. مثلاً، در طول سال اول درباره پنجمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی، که بزرگترین رویداد جهانی در این مورد است، مطالبی به چاپ می‌رسد. اما در سالهای بعد با وجود حضور نمایندگانی از کشورمان در ششمین کنگره هیچ مطلبی در این خصوص به چاپ نرسیده است.

به نظر نگارنده، مخاطبین اصلی رشد باید دبیران و دانش آموزان دبیرستان باشند و تمامی مقالات و بخشهای مجله باید در راستای این هدف اصلی که اعتلای دانش دبیران و دانش آموزان است، قرار داشته باشند.

ب) اشکال دیگر وجود نداشتن بخشهای خاص و برنامه‌ریزی مشخص در بخشهای موجود مجله است. آنچه که بانگاهی گذرا به جدول (۱) می‌توان دریافت، توزیع نامنگون مقالات است. مثلاً در بخشی اساسی چون آنالیز ترکیبی مقالات بسیار اندکی چاپ شده‌است، این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که در مجله بخشهای خاص وجود ندارد. با تشکیل دبیرخانه‌هایی در موضوعات گوناگون که وظیفهٔ تهیهٔ مقاله را داشته باشند و با در نظر گرفتن اهمیت هریک از بخشهای فوق می‌توان پسخوراند مقاله پرداخت و به‌این ترتیب از این خطر که انبوهی از مطالب تکراری مجله را پر کنند، رهایی یافت.

بخشهایی هم که در مجله وجود دارند، فاقد برنامهٔ مشخص‌اند، به عنوان مثال، بخش مسائل

۱. رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۲۱، صفحهٔ ۵۳.

که شاید مهمترین بخش یک مجلهٔ ریاضی در سطح دبیرستان باشد، فاقد مسئول ثابت است و در هر شماره یکی از اعضای هیئت تحریریه مسئولیت این قسمت را برعهده می‌گیرد و به این ترتیب مسائل بسیار سلیقه‌ای می‌شود، حال آنکه با تعیین کادری ثابت و تعیین ضوابط و شرایط مشخصی برای مسائل مطروحه، آن طور که در مجلات معتبر ریاضی مرسوم است، می‌توان انسجام بیشتری به این بخش بخشید.

ب) متأسفانه در رشد به ترجمهٔ مقالات توجه بسیار کمی مبذول می‌شود. علیرغم وجود مجلات معتبری در زمینهٔ آموزش ریاضی و ریاضیات دبیرستان در سطح جهانی، در تهیهٔ مقالات رشد کمترین استفادهٔ ممکن از این مجلات می‌شود. جدول (۲) گویای این امر است. اگر این روند ادامه پیدا کند شاهد مطالب تکراری بیشتر و افت کیفی هرچه بیشتر مطالب مجله خواهیم بود. امید است که مسئولین رشد به مجلات معتبر جهانی توجه بیشتری مبذول دارند و بررسی مطالب این مجلات را در دستور کار خود قرار دهند.

پ) هرچند انتشار یک نشریهٔ ریاضی کاری بسیار دشوار است و بروز غلطهای چاپی امری تقریباً طبیعی است، رعایت مسائلی چون ویرایش مقالات و مرجع نویسی بکنواخت می‌تواند به بهبود کار کمک کند. متأسفانه در رشد تاکنون به این امر توجهی نشده است؛ بسیاری از مقالات بدون ذکر مرجع آمده‌اند، بخشی از مقالات ترجمهٔ آزادند و حتی ذکری از نام نویسندهٔ اصلی‌شان هم در آن دیده نمی‌شود. بدیهی است که با وضع دستورالعملهایی در این موارد می‌توان کیفیت مقالات ارائه شده را بهتر کرد.

ت) متأسفانه اساتید دانشگاهها، همکاری لازم را با رشد به عمل نیاورده‌اند. درست است که رشد یکی از انتشارات وزارت آموزش و پرورش است، و به همین دلیل اساتید دانشگاه تربیت معلم گردانندگان اصلی آن هستند، اما این نهال تنها با همکاری تمامی جامعهٔ ریاضی کشور می‌تواند بارور شود، مطمئناً نقشی که رشد در جامعهٔ ریاضی کشور می‌تواند ایفا کند، با هیچ نشریهٔ دیگری قابل قیاس نیست، مخاطبین رشد، دبیران و دانش آموزان‌اند و همین دانش‌آموزان هستند که در آیندهٔ جامعهٔ ریاضی کشور نقش درجه اول را ایفا می‌کنند.

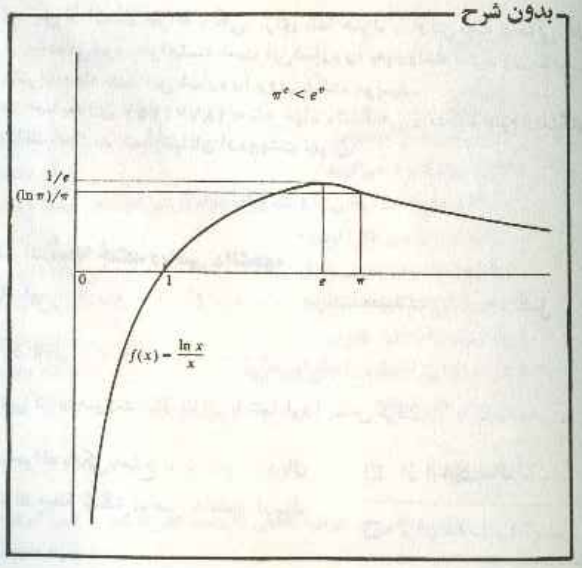
استفاده از تجربیات سایر کشورها در زمینهٔ مجلات ریاضی دانش آموزی می‌تواند بسیار آموزنده باشد، به‌عنوان مثال در اواخر قرن گذشته نشریه‌ای در سطح دبیرستان در مجارستان منتشر می‌شد که نقش مهمی در تکامل ریاضیات در مجارستان ایفا کرد، و بسیاری از ریاضیدانان نامی مجارستان از طریق مسائل مطروحه در این مجله با ریاضیات آشنا شدند گفته‌های سگو در این زمینه خواندنی است.

"من با وضوح روزهایی را (در سالهای بین ۱۹۰۸ ـ ۱۹۱۲) به‌یاد می‌آورم که در این بخش مجله فعالیت می‌کردم، مشتاقانه منتظر رسیدن نسخهٔ ماهانهٔ مجله بودم و اولین قسمتی از آن را که تقریباً نیمی از نگاه می‌کردم، بخش مسئله‌های آن بود، که بی‌درنگ درگیر حل آنها می‌شدم. خیلی زود با نام افراد دیگری آشنا شدم که در این زمینه فعال بودند. اغلب با رشک فراوان به مشاهدهٔ موفقیت آنها در حل مسئله‌هایی که خود در آنها کاملاً موفق نبودم، یا اینکه راه‌حلهایی را ارائه داده بودند که از آنچه من فرستاده بودم ساده‌تر، زیباتر یا مطمئن‌تر بود می‌پرداختم... علاقهٔ عمیق این افراد جوان با مجله، در بسیاری از تصمیم‌گیریهای زندگی آنها مؤثر واقع می‌شد. درگیری فشرده‌ای که با مسئله‌های جالب و اساساً مقدماتی داشتند، و تلاشی که برای پیدا کردن پاسخ روشن و کامل آنها انجام می‌دادند، تجربهٔ جدیدی به آنها می‌داد: شیرینی ماجراهای فکری خلاق. بنابراین سرانجام و بی‌اختیار گرفتار معشوقهٔ حسودی چون ریاضیات می‌شدند."[۱]

۱. کورشاک یوژف، مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (۱)، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷، صفحه‌های ۶ و ۷.

آیا رشد آموزش ریاضی می‌تواند روزی چنین نقشی را در میان دانش‌آموزان ایرانی ایفا کند؟ بگذارید نیک آگاه باشیم که یک مجلهٔ ریاضی به تنهایی و بدون کمکهای بی‌دریغ مسئولین و جامعهٔ ریاضی نمی‌تواند به چنین جایگاهی برسد. اما این ضرب‌المثل قدیمی را هم نباید فراموش کرد که "آرزو بر جوانان عیب نیست".

در خاتمه به هیئت تحریریه و همهٔ دست‌اندرکاران رشد آموزش ریاضی، به خاطر پنج سال فعالیت صمیمانه و صادقانه خسته نباشیدی گوییم.



ویژه‌نامه ...

مقالات

نقش روش اصل موضوعی	ر. ل. ویلدر	۱
وقتی ریاضیات نه می‌گوید	فیلیپ دیویس	۱۷
صداقت درمباحث ریاضی: آیا یك ویك به‌راستی می‌شود دو؟	فیلیپ دیویس	۳۳
ریاضیات و ریاضی فکر کردن	م. ل. کارت رایت	۴۷
ریاضیات به‌عنوان هنری خلاق	پال هالموس	۵۷
ریاضیدان به‌مثابه یك کاشف	شرمن. ک. استین	۷۴
ریاضیات و صداقت فکری	مورّس ریچاردسون	۸۹
آیا می‌توان ریاضیات را قابل فهم کرد؟	رالف فیلیپ باوس	۹۶
آموزش حل مسئله	پال‌هالموس	۱۰۳

گزارشها

کنفرانسهای ریاضی در ایران، نگاهی به بیست سال گذشته	امیراکبری مجدآباد نو، بهزاد منوچهریان	۱۱۰
نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران	بهزاد منوچهریان	۱۱۵
تاریخچهٔ اجمالی کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی	سید محمدکاظم نائینی	۱۱۷
گزارش ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی درمجارستان	رحیم زارع نهندی	۱۱۹

(بسمه‌تعالی)

خوانندگان عزیز، لطفاً برای اشتراك مجلهٔ جُنگ (ریاضی دانشجو، به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱. مجلهٔ جُنگ (ریاضی دانشجو هر سال ۳ شماره به‌چاپ می‌رسد، چنانچه مایلید از ابتدای هرسال مجله برای شما ارسال شود، درفرم زیر قید بفرمایید. درغیر این‌صورت، از زمانی که فرم اشتراك را ارسال می‌نمایید ۳ شمارهٔ متوالی برای شما ارسال خواهد شد.

۲. چنانچه به غیر از دو صورت فوق مایل به دریافت شماره‌های دیگری از مجله می‌باشید درفرم درمحل مخصوص قید بفرمایید.

۳. خواهشمند است از فرستادن چك بانکی، وجه نقد، یا تمبر پستی خودداری کنید.

۴. لطفاً هر گونه تغییر نشانی خود را در اسرع وقت به اطلاع بخش اشتراك مجله برسانید.

۵. پس از ارسال حوالهٔ بانکی، برای شما همراه با اولین مجلهٔ ارسالی یك شمارهٔ اشتراك فرستاده می‌شود. خواهشمند است این‌شماره را به‌یادداشته باشید ودرمکاتبات بعدی دربارهٔ اشتراك مجله حتماً این شماره را روی پاکت بنویسید.

۶. حسابجاری ۱۸۷۳۱۴۵۲ به نام جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران نزد بانك تجارت شعبهٔ خیابان اردیبهشت تهران.

«فرم اشتراك مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو»

نام‌خانوادگی . . . . . نام . . . . میزان تحصیلات . . . . شغل . . . .

نشانی دقیق پستی . . . . . .

شماره تلفنی که درصورت نیاز بتوان با شما فوراً تماس گرفت . . . . . .

به‌پیوست حواله بانکی به‌مبلغ . . . . . ریال بابت اشتراك مجلهٔ جُنگ ریاضی دانشجو ارسال می‌گردد.

☐ از ابتدای سال ۱۳

☐ برای سه شمارهٔ آینده

☐ تك شماره

☐ غیره (دقیقاً شمارهٔ موردنظر را قید کنید)

پس از صدمین جلسه

مقاله‌ها

ترلیهای جزئی وحدود مورـاسمیت	ادوارد جیمز مکشین	۱
خمهای بیضوی	تونی هوردوزیتس	۱۵
اتحادهای افرازی ـ از اویلر تا به‌حال	هـ. ل. آلدر	۳۶
تاریخچهٔ کوتاهی از تقلیل گاوس‌ـبوردان	استیون آلتون و رنه‌مك‌لاگلین	۵۲
خط مماس، نه به‌منزلهٔ یك حد	ایرل بیونز	۶۸
آنالیز نااستاندارد	مارتین دیویس و دورن هرش	۸۲
آزمایشهای لایهٔ صابون برای نمایش رویه‌های مینیمال	ریچارد کورانت	۱۰۰
یك جبرتقسیم برای دنباله‌ها و حساب عملگرهای تغییرآن	لوئیس براند	۱۰۹
چند ضلعیهای تقریبی برای خمهای فضاپرکن لبگ وشونبرگ	هانس ساگان	۱۲۱
ازهیچ تابینهایت: مسائل مبارزطلب در رده‌بندی اعداد اصلی	ریچارد فرانسیس	۱۳۱
روشی بهتر برای فشرده‌سازی تصاویر	مایکل بارنسلی و آلن اسلون	۱۳۹
حساب دیفرانسیل روی حلقه‌های مرتب	علیرضا رنجبرمطلق	۱۵۵

نکته‌ها

دو کاربرد کوچك ازقضیهٔ مقدار میانگین	کامبیز محمودیان	۱۶۴
مضاعف کردن: حقیقی، مختلط، چهارگان، و بالاتر... خوب، شاید	روبرت مور	۱۶۷
مطلبی شگفت‌آور از هندسه	راس هانسبرگر	۱۷۱
برهانی برای تساوی رتبهٔ سطری و ستونی یك ماتریس	هانس لایبك	۱۷۴
مقسوم‌علیه‌های صفردرحلقهٔ چندجمله‌ایها	و. د. اسکات	۱۷۵

دیدگاه

نامه‌ای سرگشاده		۱۷۷

گزارشها

گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی کشور	امیراکبری مجدآبادنو	۱۷۹
جایزهٔ عبدالسلام برای پژوهشگران جوان علوم پایه‌درجهان‌سوم.		۱۸۴
فهرست موضوعی جلدهای ۱، ۲، و ۳		۱۸۵

سخن هیئت تحریریه

مقاله‌ها

آنالیز ترکیبی	جیان کارلو روتا	۱
پیشنیازهای ریاضی نظریهٔ مقدماتی فاجعه‌ها	جان د. آثر	۱۴
کشف کوانترنیونها (چهارگانها) توسط هامیلتون	وندر واردن	۲۷
قضیهٔ باناخ ـ تارسکی	رابرت م. فرنچ	۴۱
نیکلای بورباکی	پال هالموس	۵۲
آیا ریاضیات عناصری دارد؟	پال هالموس	۶۶
اعداد اول و حرکت براونی	پاتریک بیلینگزلی	۸۰
ماشینهای با حالت متناهی	و. ج. بارنیر	۱۰۲
گمبایی ضربهای خارجی روی فضاهای اقلیدسی	برتوام وائس	۱۲۶
پارادکس برتراند	ملوین لاکس	۱۳۵
گروههای ناآبلی از مرتبهٔ pq	س. ک. پریان	۱۴۲

نکته‌ها

نکته‌ای درخصوص گروه متناوب	ا. ل. اسپیتزناگل	۱۴۷
بازهم $f(x+y)=f(x)+f(y)$!	سید ذاکری	۱۴۹
اعداد گنگ	ج. پ. جونز و س. توپوروسکی	۱۵۳
دترمینان ماتریسهای پادمتقارن	دیوید ج. بوتنیو	۱۵۵
اثباتی مقدماتی برای یک مسئلهٔ معروف شمارش	جیمز د. نریل	۱۵۸

دیدگاه

آیا صدای ما بهسیمای ما می‌رسد؟		۱۶۱

گزارش

نگاهی بهکارنامهٔ پنج‌سالهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی	امیر اکبری مجدآبادنو	۱۶۸