[redacted]

مجله دانشجویان دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

زیر نظر: دکتر هدایت یاسائی

زمستان ۵۱

" آنچـــه دراین شماره می خوانید "

مقـــاله	نویسنـــده یامترجـم	صفحـه
پیشـــگفتار	دکترمهـــدی بهزاد	
درمحضـراستاد	مصاحبه بـــادکترمرتضی انـواری	۱
میهمان دانشگاه	مصاحبه بـــادکتر کارپنتـــر	۵
زندگی گائـــوس	سعیـــد قهرمانـــی	۷
سه حادثه باشکوه درقرن نوزدهم	سعیـــد قهرمانـــی	۱۱
مسائل تاریخ ریاضی	ازدرسهای جواد همدانی زاده	۱۸
نظریه مجموعه هاومبانی ریاضیات	پرفسورالکساندرآبیـان	۲۲
مجموعه های همتوان	سعیـــد قهرمانـــی	۲۶
یکی دیگرازمعادلهای تپولوژیک اصل انتخاب	هوشنگ اسمـــاعیلی	۳۸
درباره اعداد توسعه یافته فیبوناچـــی	هوشنگ اسمـــاعیلی	۴۰
تعـــریف ماتریس	سعیـــد قهرمانـــی	۴۳
یک کاربرد ترمینـــان	فروزان خـــرد پژوه	۵۰
نظریاتی جدید درروشهای اندازه گیری خطا	فروزان خـــرد پژوه	۵۴
مسائل ریـــاضـــی	هیـــات تحـــریره	۶۳
"تبر" در دانشگاه آریامهر	فروزان خـــرد پژوه	۶۶
یک کورس آزمایشگاه کامپیوتر	فروزان خـــرد پژوه	۷۰
برای حساب دیفرانسیل وانتگرال وجبرخطی		
اخبـــار دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتـر		۷۶
اخبـــاروورزشی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر		۸۲

پیشگفتـــــــــار

دانشگاه بمنزله اجتماع کوچکی است که در آن نه تنها دانشجو باید به کسب دانش بپردازد وخود را برای کمك به چرخاندن چرخهای عظیم اجتماع آماده سازد ، بلکه باید درفعالیتهـای فوق برنامه شرکت نماید تابمعنی وارزش واقعی کاردسته جمعی ، قبول مسئولیت ، انجام وظیفـه وآزادی پی ببرد وآمادگی لازم را برای زندگی اجتماعی پیداکند . شرکت دانشجویان در انتشـار یك نشریه میتواند رلی اساسی درنیل به این هدف داشته باشد .

چندی پیش دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر به پیشنهاد عده ای ازدانشجویان این دانشـــکده مقدمات انتشار نشریه‌ای بنام " الگوریتم " رافراهم ساخت و بدنبال آن جلسه ای باشرکـــت عده ای از دانشجویان علاقه مند تشکیل وهیات تحریریه مجله انتخاب گردید . اینك که پس از تلاش پی گیر هیات تحریریه اولین شماره آن بزیور طبع آراسته میگردد ازخوانندگان گرامـــــی انتظار دارد نارسائیهای نشریه وهمچنین پیشنهادهای سازنده خود را اطلاع دهند تاشماره بعدی که درمهرماه منتشر میشود ، کاملتر به علاقمندان تقدیم گردد .

ازفرد فرد دانشجویانی که درانتشار این نشریه زحمت کشیده اند تشکر میشود .

دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر

در محضر استاد

مصاحبه توسط : میرابراهیم هاشمی اقدم

زحمات بی شائبه ی استاد دکترمرتضی انواری در راه پیشبرد هدفهای دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر مورد تایید وتحسین قاطبه‌ی دانشجویان واساتید این دانشکده میباشد . درواقع ایشان یکی ازمقدم اساتید این دانشگاه هستند که در راه شکل دادن وپیشرفت این دانشگاه فعالیتهای شایانی نموده اند . بعلاوه مقام علمی ایشان همیشه احترام خاص دانشگاهیان راجلب نموده است. ایشان درحال حاضر علاوه براستادی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر، درسمتهای عضویت کمیته اجرائی انجمن ریاضی ایران و سرپرستی مرکز تعلیمات عمومی دانشگاه صنعتی آریامهربفعالیت میپردازند . اینک به محضراستاد بار میابیم تا بیشترازتجارب گرانبهای ایشان بهره مند شویم .

س : استاد : ممکن است مختصری ازسرگذشت تحصیلی خود راد رایران وخارج برای خوانندگان مجله الگوریتم بیان نمائید .

ج : ازد بیرستان البرز فارغ التحصیل شدم . در رشته فیزیك دانشکده علوم دانشگاه تهران لیسانس گرفتم . ازدانشگاه ایلی نوی درایالات متحده فوق لیسانس ودکترای ریاضی دریافت داشتم . تخصص من درآنالیز وتئوری کنترل ومدلهای ریاضی هیدرولوژی است . پایان نامه دکترای من درمورد قضیه ای در باره مشتق توابع خاصی است که قلمروآنها یك سیگما جبرد ریك فضای مزوری است که این توابع نسبت به مزورد یگری روهمین فضا منفرد ند وهمچنین چند قضیه درباره وجود ویگانگی مشتق وانتگرال توابعی که روی فضای تجریدی مزورتعریف شده اند وبرد آنها د ریك فضای باناخ قرارد ارد .

س : لطفا" بفرمائید درچه دانشگاههائی تدریس ویاتحقیق نموده اید ؟

ج : درد انشگاههای ایلی نوی ، ایالتی میشیگان ، ایالتی اوهایو ، کالیفرنیا د ربرکلی ، کوئینزولا وال درایام تابستان درعضویت انستیتوی تحقیقاتی کنگره ریاضی دانان کانادا تحقیق بعمل آورده ام .

س : درچه زمینه هائی تحقیق نموده اید ومقالات شما درچه نشریاتی بچاپ رسیده است؟

ج : درزمینه های تئوری مزور وآنالیز تابعی وتئوری کنترل ومدلهای ریاضی برای ئید رولوژی ومدیریت آب تحقیق نموده ومقالاتی درهمین زمینه ها درمجلات آمریکائی وکانادائی منتشر نموده ام .

س : فعلا درچه زمینه ای تحقیق میکنید ؟

ج : فعلا" درزمینه ی مدلهای ریاضی برای آبهای سطحی وزیرزمینی ومدیریت آب تحقیق میکنم .

س : چرا به ریاضیات گرویدید وچه آینده‌ای برای ریاضیات پیش بینی میکنید ؟

ج : گرایش من به ریاضیات از وقتی شروع شد که به فیزیك تئوریك علاقه مند شدم وبزودی متوجه گشتم که بدون داشتن زمینه‌ی قوی در ریاضیات ، پیشرفت دراین مورد امکان پذیر نیست ضمن اینکه در ریاضیات مطالعه میکردم ، متوجه شدم که علاقه ام نسبت به این علم بیش از فیزیك است ودرهمین رشته باقی ماندم . باوضع کنونی دانشگاهها وموسسات آموزش عالی وکمبود شدید ریاضی دان ایرانی ورشد سریع جمعیت دانشجوئی درکشور، مسلم است که تابیست سال آینده نیاز کشور به ریاضی دان خیلی زیاد خواهد بود . بطورکلی آینده ریاضیات وریاضی دان در ایران خیلی قرین بموفقیت است .

س : بنظر شما چه نقایصی درسیستم فعلی آموزش ریاضیات در دوره های ابتدائی ، متوسطه وعالی درایران وجود دارد وبرای رفع این نقایص چه پیشنهاداتی دارید ؟

ج : برنامه های جدید دوره های ابتدائی ومتوسطه نسبتا" بهتر از گذشته است ولی مشکل دراین است که درکشور به اندازه کافی آموزگار و دبیر نداریم که بتوانند این مطالب راآن طور که لازم است ، تدریس کنند . مطالب درسی خیلی با عجله تنظیم شده و با عجله بیشتر

دارد پیاده میشود .

درمورد آموزش ریاضیات درسطح دانشگاه مساله عمده درکشور کمبود ریاضی دان باصلاحیت میباشد . درآن دسته از دانشگاهها وموسسات آموزش عالی که کادرقوی دارند برنامه جالبی در ریاضیات موجود است که بابرنامه های مشابه درکشور های غربی قابل مقایسه است .

س: نظربه سابقه ای که در دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی آریامهر دارید مستدعی است بفرمائید که برنامه های این دانشکده براساس چه هدفهائی طرح ریزی شده و دانشجویان رشته های مختلف این دانشکده پس از فراغت از تحصیل چه وظایفی میتوانند ایفا کنند وآیا تابحال ازاجرای این طرحها رضایت داشته اید ؟

ج : برنامه دانشکده براساس هدفهای اصلی پرورش ریاضی دان برای اشتغال درموسسات آموزش عالی وکار درموسسات خصوصی ودولتی درزمینه ی ریاضیات عملی وکامپیوتر میباشد . دانشجویانی که ازدانشکده ریاضی فارغ التحصیل شوند ، قادرند در رشته‌ی ریاضیات محض یاعملی و یاکامپیوتر بتحصیل خود ادامه دهند . تاکنون آن عده که فارغ التحصیل شده اند ، توانسته اند درموسسات آموزش عالی کشور بکار اشتغال ورزند یااینکه برای ادامه ی تحصیل بخارج عازم شوند و درهر دوحال کارشان باموفقیت توام بوده است .

س: بنظر شما انتشار نشریات ریاضی در ایران الزامی است ودرصورت مثبت بودن جواب ، این نشریات باید دارای چه خصایصی باشند ؟

ج : بنظر من داشتن مجله ای درسطح دوره لیسانس ونشریه دیگری درسطح پژوهشی در کشور لازم است مجله اول درایجاد علاقه ورغبت به پژوهش ریاضی در بین دانشجویان موثر خواهد بود . مجله دوم باید درسطح بین المللی وبزبان فارسی وانگلیسی وفرانسه مقالاتی

از ریاضیدانهای ایران وخارج بچاپ برساند .

س : چه پیامی برای جوانان وبخصوص نوباوگان جهان ریاضی دارید ؟

ج : پیام من بکسانیکه بریاضیات علاقه دارند ودراین رشته،ازخود استعدادی بروز داده اند اینست که نگران نباشند که اگر در رشته ریاضی تحصیل کنند ،امکان داشتن رفاه مادی وجود نخواهد داشت و به این علت بطرف رشته هائی نظیر مهندسی وطب گرایش پیدا کنند . عامل مهم درزندگی اینست که انسان از آنچه انجام میدهد ،لذت ببرد .

میهمان دانشگاه

مصاحبه توسط : میرابراهیم هاشمی اقدم

آقای دکتر کارپنتر ازتابستان گذشته بعنوان استاد مدعو دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر بفعالیت پرداختند . طی این‌مدت پشتکار وروش تدریس ایشان موجبات رضایت دانشجویان واولیای دانشکده رافراهم آورده است . پای صحبت گرمشان می نشینیم تاازعقاید شان‌مطلع گردیم .

س : استاد : لطفاً" برای خوانندگان ماازشرگذشت علمی خود صحبت کنید ؟

ج : درسال ۱۹٦٤ از دانشگاه یوتا لیسانس خود را دریافت نمودم ودرسال ۱۹٦۷ فوق لیسانسم ودرسال ۱۹٦۹ درجه ی دکترای خود را ازهمان دانشگاه گرفتم . طی سالهای ۱۹٦۹—۱۹۷۲ در دانشگاه هوستون باسمت استاد یاری مشغول خدمت بودم وازسال ۱۹۷۲ در دانشگاه آریامهر بعنوان استاد یار مدعو بفعالیت پرداختم .

س : چرا ریاضیات را برگزیدید وبنظرشما ریاضیات بکجامیرود ؟

ج : هیچ دلیل عقلی برای ترجیح ریاضیات بر رشته های دیگر ندارم . صادقانه بگویم آنرا لذت بخش ترین رشته یافتم . همیشه فیلسوفان وریاضیدانان وجود خواهند داشت اما ریاضیدانان بیشتر وبازهم بیشتر در سطوح خیلی منظم مثل علوم رفتاری (Ecology) کار خواهند کرد .

س : درباره فرهنگ وریاضیات ایران چگونه فکر میکنید ؟

ج : اطلاعات من درباره فرهنگ ایران کمترازآنست که بتوانم اظهار نظرکنم .

س : درکشور شما ریاضیات چگونه تدریس میشود ؟

ج : درامریکا تاکید زیادی برروی قدرت خلاقه ریاضی میشود . اکثر درسها با ارائه ی

لیست قضایا بدانشجویان تدریس میشود که آنان قضایا رااثبات میکنند ونتایج خود راجلسه بعد تحـــویل‌میدهنـــد .

س : نظر شخصی شما درباره روش تدریس‌ریاضیات چیست ؟

ج : من‌معتقدم که باید روی خلاقیت و روشهای منظم ریاضی تاکید بیشتری بعمل آید .

س : چه پیامهائی برای دانشجویان‌جوان ریاضی دارید ؟

ج : تازمانی که ریاضیات راآن خود نمیدانید ،درآن غوطه ورنشوید . اگر ریاضیات رادر خود نمی بینید ،آنرا ازکتابهای ریاضیدانان بزرگ وهمراه آنان مطالعه کنید . علاوه برمطالعه‌ی کارهای انجام شده ،ریاضیات خود را نیز شروع کنیـــد .



((زنـــدگی گائـــوس))

نوشته : سعید قهرمانـــی

مرجـع: کتاب ریاضی دانان نامی اثر اریک تمپل بل

ترجمـه : حسن صفـاری

روزسی‌ام آوریل ۱۷۷۷ مصادف باطلوع درخشان ترین ستاره آسمان ریاضیات " یوهـان فـردریك کارل گائوس " درخانه ای محقراز برونسویك آلمان است .

" شهزاده ریاضیدانان " راپدری سختگیر پرورش داد که غایت آرزویش باغبانی یاآجرپـز شدن فرزند بود اما مادر ،همواره سعی داشت که از مغز کوچك طفل خویش یك باغبان بی‌رقیب در دنیای دانش بسازد . درآن زمان هیچکس هنوز پی به نبوغ بیش از حد گائوس‌نبرده بـــود جز دائیش فردریك که مکتب ندیده استاد بافندگی پارچه های ابریشمی شده بود وهمین نیروی فردریك ومادرش بود که سرانجام برسرسختی پدرغالب آمد و اورا بسوی مدرسه رهنمون شد .

گائوس قبل از آنکه نوشتن را فراگیرد ، حساب میکرد . روزی از روزهاکه یوهان کوچولو سه ساله بود ،پدرش با صدای بلند حقوق کارگران خود رامحاسبه میکرد درپایان کاریوهان‌گفت :

" بابا حساب تو درست نیست‌عددی که‌بدست‌میآید این است .... "

وپدربعدازمحاسبه مجدد دریافت‌که حق با اوست . درهفت سالگی واردمدرسه شد . مدرسه ای که با روش قرون وسطایی اداره میشد ، مدرسه ای که بیشتر به جهنم شباهت داشت تا به محل‌کسب دانش . ودر همین جابود که غنچه های نبوغ کارل گائوس شکوفان شد . در دهسالگی هنگامی که معلم یك تصاعد حسابی باجمله اول ۸۱۲۹۷ وقدرنسبت ۱۹۸ نوشت و گفت مجموع صد جمله آنرا پیداکنید درحالیکه کلاس غرق در حیرت شده بود ،کوچولوی دهساله که هنوز اطلاعی از فرمولهای‌تصاعد نداشت درچند ثانیه عددی روی لوح سنگی خود نوشت کـــه

همانا مجموع عدد جمله تصاعد مذکور بود . معلم جوان که " بوتنر " نام داشت بهترین کتابی را که درحساب داشت به او هدیه کرد . چند روزبعد ، وقتی تسلط عجیب گوس را برعلم حساب دید ، گفت : " این کودک ازمن خیلی قویتر است ومن چیزی ندارم که به اوبیاموزم "

دراین هنگام گائوس بایوهان مارتین بورتلن معاون بوتنر آشنا شد . وچون اوهم شور ریاضی درسر داشت ، باهم به آغوش مادرعلوم (ریاضی) شتافتند . گائوس اولین ریاضی دانی است که وارد دنیای بی نهایت ها شد وبه آن دقت بخشید . او اولین کسی است که مسیر استدلال صحیح رادرآنالیز معین کرد واوتنها شخصی است که درسلسله براهین خود درمسائل ریاضی هیچ نکته ای را ناگفته نگذاشت ودرحقیقت روش او مرجع تمام ریاضی دانهای بعداز خودش شد .

گائوس بوسیله بورتلز به کارل ویلهلم فردنیاند، دوک برونسویک معرفی گردید وچون درک محو استعداد ونبوغ خارق العاده گائوس شد، تمام مخارج او را تاخاتمه تحصیل پرداخت . در این زمان او زبانهای لاتینی ویونانی را بطور عمیق آموخته وبعد سخت علاقمند به فقه اللغه شد و مدتی درانتخاب رشته خود برای ادامه تحصیل بین ریاضی وفقه اللغه مردد بود ولی سرانجام ریاضی باکشش فوق العاده خود کاریل را بسوی خود جذب کرد و اورا تا آخر عمر با خود دمساز نمود . حال که گوس مبارز ، شورشی عجیب در ریاضی بوجود آورده بود با اخگر فکر خلاق خود بسوی یک یک اعداد میتاخته وآنها رامورد مطالعه قرار میداد وبا استفاده از قیاس موفق به استنتاج قضیه اکلی میگشت و باین ترتیب بود که موفق شد حساب عالی راکه ملکه ریاضیات نامیده بود به اوج خود برساند وبه حل مسئله متعاکس تربیعی که مدتی بود دانشمندان رامبهوت کرده بود موفق گردد . گائوس تا بیست سالگی صدها مطلب وموضوع تراز اول درقسمت های مختلف ریاضی بدست آورده بود ولی آنها را عرضه نمیکرد زیرا اولین اثر ارزنده او بنام تحقیقات حسابی ، ازنظر آکادمی علوم فرانسه رد شده بود . گائوس درتمام زندگی به روشهای استدلال ترکیبی نیوتن وارشمیدس

عشق میورزید وتذکر این نکته لازم است . گائوس وارشمیدس رابعنوان بزرگترین قوابغ عالم میشناسند .

تحصیلات دانشگاهی گائوس دردانشگاه گوتینگن گذشت ودرتمام مدت هیچوقت گائوس به همت دوک فردنیاند فکر امرار معاش نبود وزندگی مادی او از هرنظر تامین میشد وبپاس خدمات دوک ، گوس اولین کتاب خودرا که در سپتامبر ۱۸۰۱ بچاپ رسید به " شهزاده عادل آرام حضرت کارل ویلهلم فردنیاند " اهدا کرد . رساله دکتری گائوس که آنرا دردانشگاه هلمشتدت نوشت شامل اثباتی دقیق وبی نظیر برای قضیه اساسی جبربود (هرتابعی که منطق وصحیح وبایک متغیر باشد میتواند به عوامل حقیقی درجه اول تجزیه گردد) ولی ناگفته نماند که قضیه اصلی جبرتا آن زمان ، دارای استدلالی منطقی نبوده است و گائوس سه راه دیگر نیز برای آن پیدا کرد که آخرین طریقه را درسن هفتاد سالگی بدست آورد . اشتباهی راکه گائوس دردوران حیاتش مرتکب شد آن بود که ناگاه بسوی مسائلی حمله ور شد که کسانی چون لاگرانژ ودیگر دانشمندان هم عصر اومیتوانستند ، بسادگی آنها راحل کنند ودرواقع گائوس بایستی به مسائل خیلی مهمتری میپرداخته ، مسائلی که ممکن بود فقط فکر والای او قادر بحل آنها باشد . وقتیکه از او پرسیدند چرا روی مسئله مشهور فرما $x^n+y^n=z^n$ فکر نمیکند ، گفت : هرآینه میتوانیم هزاران مسئله نظایر آنرا طرح کنم بی فایده ولا ینحل . پس بهتر است به کارهای برتری مشغول باشم .

دراکتبر ۱۸۰۵ چون دوک مستمری گائوس رامضاعف کردوی تن به ازدواج دردادوباه مشهری خود یوهانا اشتهوف پیمان مزاوجت بست ودراین هنگام فقط ۲۸ سال داشت . وقتیکه به سن ۳۲ سالگی رسید درحالیکه صاحب سه فرزند شده بود ، همسر خود را از دست داد وسال بعد با دوست صمیمی همسرش مینا والدک ازدواج کرد وثمره این پیوند دوپسرویک دختربود . یکسال قبل ازفوت همسر گائوس پدرش ودوسال قبل ازآن دوک فردنیاند سربازد لیرولایق ویگانه حامیش را

ازدست داده بود ، مرگ دوك تاثیر عمیقی بر گائوس گذاشت ویکباره خوی وخلق اورا تغییرداده و او را جدی تر وخشك تر نمود ودراین هنگام بود که برای اولین بار وی مجبور شد برای امرارمعاش سرکار برود ونخستین کار او ریاست رصدخانه گوتینگن بود ولی مالیات سنگین وی را درفقر مالی قرار داده بود (دراین موقع افراد مختلفی نظیر لاپلاس واولبرز به کمك مالی گائوس شتافتند ولی او هیچکدام ازاین مددها را نپذیرفت شاید به آن دلیل که نمیخواست جز به دوك فرد نیاند به کس دیگری مدیون باشد ویا شاید شخص دیگری شایستگی کمك به گائوس راندا شت) . ازطرفی مرگ دوك وهمسرش هم مزید بر علت شده واورا درنارضایتی شدیدی فرو برد بود چنانکه لابلای بعضی از قضایای ریاضی که اثبات کرده است به چشم میخورد که نوشته : " مرگ برای من ازچنین زندگی کردن شایسته تراست " درحالیکه اومانند دکارت درتمام زندگی خود وحشت عجیبی ازمرگ و مردن داشته است .

گائوس تنها شهزاده ریاضی محض نبود فکراوتادربود که هرجا، هرآنچه راکه میخواهدبیند یشد وبه آن دست یابد او علاوه برایجاد شاخه های مختلفی در ریاضی از قبیل تولید هندسه غیر اقلیدسی ، تئوری حرکت اجسام سماوی بدورخورشید ، منحنی هایی درآمار ، تئوری توابع تحلیلی باستغیرهای مختلط ، توانین متعاکس تادرجه چهارم ، تئوری نیوتونی جاذبه ، مقاطع مخروطی و غیره وغیره توانسته بود فرضیه های اساسی وبی نظیردرالکترومغناطیس ، فیزیك ریاضی واختراعاتی ازقبیل هلیوتروپ ، Heliotrope (دستگاهی است که بااستفاده ازخاصیت انعکاس ، علائم را بلافاصله به مسافات دور دست منتقل میکند) مانیتومتر ــ تلگراف الکتریکی وغیره داشته باشد .

گائوس درتمام مدت عمرخود ساده وبی آلایش زندگی میکرد وهمیشه مورد تحسین ریاضی دانان بزرگ زمان خود قرار میگرفت . معروف است که روزی سیاح مشهور با رون الکساندرهومبولد

(۱۸۵۹ ــ ۱۷۶۹) از لاپلاس که دانشمندی مغرور وخود نما بود پرسید :

" بزرگترین ریاضی دان آلمان کیست ؟ " واوجواب داد که " فاف " برترین است ، سیاح پرسید ، پس مقام گائوس دراین میان چیست ؟ وباگمان تعجب لاپلاس جوابی به حق درست وبی غرضانه داد " گائوس بزرگترین ریاضی دان درهمه عالم است " .

قبلا" ذکرکردیم که نیوتون وارشمیدس همیشه مورد توجه وستایش کاریل گائوس بوده اند و بدنیست متذکر شویم که گائوس همیشه از داستان سیبی که از درخت افتاد وسبب کشف قانون جاذبه شد ، سخت متاثر میشد ومیگفت نبوغ خلاّق نیوتون خیلی برتر از آن است که عامل شکفتن آن سقوط سیبی باشد وحقیقت امر اینست که روزی " احمقی از نیوتن پرسید که چطور پی به قانون جاذبه عمومی بردی ونیوتون چون مشاهده کرد که بامغز کودکانه ای روبروست برای تفهیم به او ورفع مزاحمت وی داستان سیب را بازگو کرد وخیلی زود جان سالم ازدست آن شخص بدر برد .

گائوس ایام فراغت خود را به مطالعه درادبیات وسیاست وفراگرفتن زبانهای خارجی میگذراند وبر تمام این رشته ها تسلط کامل داشت ازگیاه شناسی ومعدن شناسی نیز بیبهره نبود .

" شهزاده ریاضیدانان " دارای مناعت طبعی عجیب واخلاقی کم نظیر بود . اومدت درازی از انتشار اکتشافات واختراعات خود ممانعت میکرد دانشمندان دیگر بدون آگاهی از کارهای وی بعضی از اکتشافات او را عیناً بدست آورده بودند واین موضوع بعده اموجب ناراحتی گائوس شد زیرا هرجا که به قضایای قبلی مکشوفه توسط خودش اشاره میکرد کسی نظیر لژاندریا هامیلتون برمیخاست که این قضیه ازمن است وگائوس آنرا بدست نیاورده است وبعد ازپژوهش وبررسی معلوم میگشت که درموضوع مورد بحث گائوس سالها قبل خیلی بیش ترازآنها پیش رفته است ودلیل آنهم این بود که گائوس اکتشافات خود رابرای دوستانش باخط خودش مینوشت ومیفرستاد .

گائوس باکمال متانت وعلاقه فراوان به تمام نامه هایی که دریافت میکرد، جواب میداد ومشاوربسیار خوبی برای همه دانشمندان عصرخود بود . حتی درآن زمان که زنها فقط بخاطر زن بودنشان از گرفتن دکتری یامدارج عالیتر محروم بودند وکسی به آنها توجه نمیکرد، گائوس ریاضیدان بـــزرگ فرانسوی، خانم سوفی ژرمن رامورد تمجید وستایش قرار داده است لازماست توضیح دهم سوفی ژرمن که ازاخلاق شهزاد ریاضیدانان بی خبربود برای آنکه خود را درعمق بحر ریاضی مجرد وخصوصـــا حساب عالی معروق سازد، مرتب با اوبنام آقای لوبلان مکاتبه میکرد تااینکه سر انجام خود را معرفی کرد واین شناسایی باعث شعف فراوان کاریل گائوس شد .

ذکر آثار " یوهان فردریك کاریل گائوس " حتی بصورت فهرست دراین مقوله نمیگنجد.اود ر ۱۶ ژوئن ۱۸۵۴ هنگامیکه پس از بیست سال برای اولین بار از گوتینگتن خارج میشد تاساختمان راه آهن راتماشا کند ازکالسکه پرت شد وخوشبختانه کمترین آسیبی هم ندید وموفق به افتتاح اولین قطار راه آهن شد ولی سال بعد کم کم به بیماریهای قلب وریه وتشنج دست مبتلا شد اما درعیـــن بیماری تاآنجاکه میتوانست کارمیکرد چنانکه چند روز قبل ازمرگش آخرین نامه خود را درباره اکتشاف تلگراف الکتریکی به "سرد یوید بریوستر " نوشت وچون علاوه بربیماریهای فوق آثار آب آوردن در روی ظاهر شد سرانجام در ۲۳ فوریه ۱۸۵۵ درهفتاد وهشت سالگی بالبیك گفتن دعوت حق ، جهان ریاضی رایتیم ودنیار را درتاثیرعمیقی فروبرد . اما نامش بعنوان نابغه نوابغ ، شهزاده ریاضیدانان فردریك گائوس درقلمرو ریاضیات جاودانه خواهد زیست .

هرگز نمیرد آنکه دلش زنده شد بعشق

ثبت است برجریده عالم دوام مـــا

سه حادثه باشکوه درقرن نوزدهـــم

ترجمه : سعید قهـــرمانی

مرجع : An Introduction to the History of Mathematics

نوشته : Howard Eves

درقرن نوزدهم پیشرفت عجیب ریاضیات همچنان ادامه داشت وازتید سنت های قدیمی رهایی مییافت ، کار تدریس روز بروز بوسیله ریاضیدانها افزایش پیدامیکرد ، در دانشگاههـــا بیشتر از دربارهای سلطنتی تحقیقات ریاضی انجام میگرفت ، زبانهای بین المللی جایگزین لاتین میشد وسپس ریاضیدانها به کوششهایی که در ملل دیگر انجام شده بود پی بردند وبدین ترتیب بودکه دانشمندان زیادی درآسمان ریاضی طلوع نمودند .

سه حادثه باشکوه درقرن نوزدهم رخ دادیکی درحوزه هندسه دیگری درجبر وسومی در دامنه آنالیز . اولین آنها درهندسه بود این کشف در ۱۸۲۹ انجام گرفت و هندسه اقلیدسی را دگرگون ساخت . همانطوریکه میدانیم اساس هندسه اقلیدسی براصل ترازی استواراست و قضایای بیشماری مبنی براین اصل به اثبات رسیده اند

آنهـــــا در فضـــاهای معمولی صادق میباشد ازاین قضایابعضی راکه مورد استفاده خیلی زیادی دارند میتوان نام برد :

۱ــ از هرنقطه خارج خط یك خط فقط یك خط موازی با آن میتوان رسم کرد .

۲ــ مجموع زوایای هرمثلثی دوقائمه است .

۳ــ فاصله دوخط موازی درهمه جایك مقدار ثابت است .

٤ــ از سه‌نقطه که روی یك خط نباشند میتوان دایره‌ای رسم کرد .

کوششهای زیادی برای اثبات اصل توازی از اصول دیگر اقلیدس معمول شد ولی به نتیجه نرسید

درسال ١٧٣٣ تنها تحقیق علمی اصل توازی بوسیله کشیش ایتالیائی جیرولاماساکری

Girolama Saccheri که استاد ریاضی دانشگاه راویا Ravia

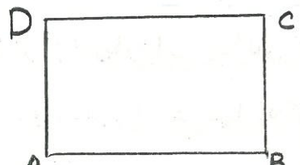
بود انجام گرفت وحاصل آن کتابی بزبان ایتالیائی است بنام :

Euclides abomninavo

(اقلیدس ازهرنقضی رهایی یافت)

وی دراین‌کتاب بسادگی توانست با استفاده ازاصل توازی ثابت کند که اگر دریك چهار ضلعی

$ABCD$ مانند شکل زیر A و B قائمه بوده و $AD=BC$



باشد سپس C و D باهم مساویند حال سه امکان

وجود دارد D و C زوایای حاده مساویند یاهردو

قائمه‌اند ویااینکه هردومنفرجه وبرابرمیباشند . ساکری درحوزه هندسه اقلیدسی اثبات نمود که

اگر D و C منفرجه باشند* بافرضیات مساله یك موضوع متناقض پیش میآید پس D و C هردو

قائمه اند . او درمنطق ریاضی وتناقضات مطالعه زیادی کرد وازروی مسائلی همانند مسئله فوق

وبحث وکار فراوان بالاخره مسائل زیادی را در باره هندسه‌مطلق وحل کرد که درآن اصل توازی

رادرهندسه اقلیدسی نادیده گرفته بود وهمه این مسائل او را کار اقلیدس مخالفت میکرد . بدین

ترتیب بدون هیچ تردیدی ساکری اولین مبتکر هندسه غیراقلیدسی است که درعصرخود شناخته

نشده وبزودی کارهایش فراموش شده است .

سی وسه سال بعدازتالیف ساکری ،جان لامبرت (١٧٧٧—١٧٢٨) کتابی نوشت بنام تئوری

---

* درحالت زاویه حاده ساکری متوسل به موهومات میشود . " مترجم "

توازی که بعدازمرگش بچاپ رسید وی چهار گوشه ای رادرنظرگرفت که سه‌زاویه آن قائمه بود وروی

زاویه چهارم برحسب اینکه حاده — قائمه یا منفرجه باشد) بحث کرد وملاحظه نمود برحسب اینکه

مجموع سه زاویه مثلثی کمتر از دوقائمه — مساوی باآن و یا بیشترازآن باشد زاویه چهارم حاده —

قائمه یامنفرجه است . درحالتی که زاویه چهارم بیش از ٩٠ باشد تشابهی بین هندسه کروی

واین حالت مشاهده نمود وحدس زد که اگر زاویه چهارم حاده باشد) بایستی نوع همانندی بین

این حالت وحالت کروی وجود داشته باشد، بشرط آنکه شعاع کره دراین حالت موهومی باشد ولی

این قسمت نتایج رضایت بخشی نداد وحالت قبل هم بسکوت برگزارشد . بعدازلامبرت ، لژاندر

هم فعالیت های قابل توجهی انجام داد تااینکه قهرمانان هندسه غیراقلیدسی ظهور کردند

گائوس از آلمان،بولید ازمجارستان ولباچفسکی از روسیه . آنها هندسه غیراقلیدسی راازآنجا

شروع کردند که ازیك نقطه خارج یك خط میتوان بیش ازیك خط ویا هیچ خط موازی باآن رسم

کرد وازاین‌دو حالت نتیجه گرفتند که مجموع زوایای داخلی هرمثلث کمترازدوقائمه یابیشتراز آن

میباشد هریك از سه ریاضیدان مستقلا" درحالت اول کارکردند وبه‌نتیجه رسیدند درحالت سوم هم

که قبلا" به پیشرفت هائی نائل آمده بود . افتخار پیشبرد هندسه غیراقلیدسی نصیب گائوس

(شاهزاده ریاضیدان) که اول ازهمه‌درآن جلو رفته‌بوده نمیگردد زیرا وی‌کارهای خود را تاقبل

از مرگ منتشر نکرد واین قسمت از ریاضی خود را مدیون بولیاولباچفسکی میداند .لازم است نام

ستاره درخشان دیگرآسمان‌هندسه ریمن رانیز ذکر کنیم ، وی واضع هندسه ای غیراقلیدسی است

که امروز بیشتر ازهرهندسه ای دیگر مورد لزوم است .

اهمیت تمام این هندسه‌هاآنست که با اتکاء به یك فرض هیچگاه تناقضی درمکتسبات ازآن

پیش نمیآید .نباید تصورکنیم‌که این هندسه ها معقول نیستند زیرا آنها درفضاهای مربوط به

خودشان صدق میکنند ومادرفضای اقلیدسی زیست مینمائیم وبدان عادت داریم .

دومین حادثه مهم قرن نوزدهم در زمینه ریاضیات متعلق به جبر است وفاصله زیادی ازنظر زمانی، باپدیده اول جهان ریاضی ندارد وآن نقض خاصیت جابجائی درجبرمعمولی وبوجودآمدن یك جبر غیرعادی درسال ۱۸۴۳ بود. دراوائل قرن نوزدهم جبر بعنوان حساب عمومیت داده شده، بکار میرفت بدین ترتیب که بجای اعداد، مادر جبرازحروف استفاده مینمود یعنی درهمین زمان بود که جورج پیکوك (۱۸۵۸—۱۷۹۱) — دوکان گریگوری (۱۸۴۴—۱۸۱۳) مورگان (۱۸۷۱—۱۸۰۶) وسایرین برای اولین بار اساس ساختمان جبر واین موضوع که پایه این بنای عظیم خواصی نظیر به خاصیت جابجائی — انجمن قوانین ضرب وجمع وغیره میباشند، را متذکر شدند وسپس دریافتند که میتوان یك جبرغیرعادی بناکرد که متناقض باقوانین حساب عمل نماید وبراصل همین احساس درسال ۱۸۴۳ ریاضیدان ایرلندی هامیلتون براساس مشاهدات فیزیکی واندیشه هایی برمسائل بخصوصی توانست جبرکواترنیون (Quaternion) راکه درآن $ab \neq ba$ بوداختراع نماید.

سال بعد هومن گراسمن (۱۸۷۷—۱۸۰۶) کتاب قابل ملاحظه ای درجبر بنام Audehnurgsbhre راچاپ نمودند که درآن قوانین جبری باحساب مطابقت نمایند. در ۱۸۵۷ ریاضیدان انگلیسی کایلی (۱۸۹۵—۱۸۲۱) جبر ماتریس ها را ابداع کرد که درآن قوانین جابجائی صدق نمینمایند وبعدازآن سیل جبرهای آبستره بطرق مختلف ومدرن از کوهسار ریاضیات سرازیر شوند مثلاً درتناقض خاصیت انجمنی دوجبرگوردون ولای بوجودآمدند وجمعاتعداد تمام جبرهای موجوداکنون به دویست میرسد که اغلب درقرن بیستم پدیدارشدند. جبر را اکنون فرهنگ ریاضیات مینامند.

سومین اتفاق باشکوه در حوزه آنالیزبوقوع پیوست، ریاضیدانان قرن هیجدهم از بحران عجیبی که درزیربنای آنالیز وجود داشت سخت هراسان شده بودند، دالامبر لزوم تئوری حد رابرای آن اعلام ولاگرانژ پایه آنالیزرا اظهار داشت. در ۱۸۲۱ گام مهمی توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی لوئیزکشی، براساس پیشنهاد لاگرانژبرداشته شد وی دراین سال توانست مطابق تئوری قابل قبولی

ازحد، پیوستگی همگرائی — دیفرانسیل گیری وانتگرال معین را تعریف کند ولی یك شالوده دقیقتر وتعریف بهتر برای فهم، در ۱۸۷۴ بوسیله یك مثال، توسط دانشمند ریاضی آلمان کارل ویراسترس معروف شد واین مثال وجود یك تابع پیوسته است که درهیچ نقطه مشتق پذیرنباشد یا یك منحنی پیوسته که درهیچ نقطه ای نتوان مماسی برآن رسم کرد وبهمین ترتیب جورج بومارد ریمان— تابعی پیداکرد که برای هرمقدار اصم پیوسته وبرای هرمقدار گویا گسسته بود. این قبیل مثالها برای درك ریاضی افراد لازم ونکته سنجی هائی درحریم آنالیز ایجاد نموده که توسط کشی مطرح نشده بود.

درپایان همه این انقلابات ریاضی باکمك کسانی چون ریچارد درکنید (۱۹۱۶—۱۸۳۱) جورج کانتور (۱۹۱۸—۱۸۴۵) جوزف پیانو (۱۹۳۲—۱۸۵۸) ریاضیات بامنطق مخلوط ومورد تایید منطق دانان بزرگ (نظیربرتراند راسل) قرار گرفت ونتیجه آن ایجاد تئوری مجموعه هاست. بد نیست متذکرشویم که هنوز بطور دقیق مجموعه تعریف نشده است زیرا تناقض ایجاد میگردد و بهمین دلیل است که مراکزی در دنیا اکنون مشغول مطالعه رابطه ریاضیات، منطق وتعاریف عمیق ودقیق هستند.

مسائل تاریخ ریاضی ۱

در دنباله مقاله قبل لازم میدانیم مسائلی ازتاریخ ریاضی رامطرح نمائیم در این شماره مسائلی ازکارهای ساکری رامطرح میکنیم وامیدواریم خوانندگان عزیز با حل این مسائل بیشتر با کار ریاضیدانان قدیم آشنا شوند . طرح مسائل را در شماره های بعد نیز برای علاقه‌مندان ادامه میدهیم .*

۱—۱ چهارضلعی هـــای ساکری

چهارضلعی ساکری چهارضلعی $ABCD$ است که در آن اضلاع AD و BC مساوی و زوایای A و B قائمه میباشد . ضلع AB قاعده وضلع مقابل آن DC سمیت [1] و زوایای D و C زوایای سمیت نام دارند . با استفاده ازقضایای تساوی (که اصل موضوع توازی را لازم ندارند) ثابت کنید :

۱— زوایای سمیت چهار ضلعی ساکری برابرند .

۲— خطی که نقاط وسط قاعده وسمیت را بهم وصل میکند برقاعده وسمیت عمود است .

۳— اگر عمود هائی از دو راس قاعده یك‌مثلث به خطی که از نقاط وسط دو ساق آن رسم شده فرود آورید چهار ضلعی ساکری بدست میآید .

٤— خطی که نقاط وسط اضلاع مساوی چهار ضلعی ساکری رابهم وصل میکند برخطی که نقاط وسط قاعده وسمیت رابهم وصل میکند عمود است .

۲—۱— فـــرض زاویه حـــاده

فرض زاویه حاده ایـــن است کـــه زوایای سمیت چهار ضلعی ساکری حاده اند یا اینکه زاویه چهارم چهارضلعی لامبرت حاده است . ذیلا" فرض میکنیم فرض زاویه حاده برقرار است .

۱— مثلث قائمه الزاویه ABC مفروض است و M نقطه‌وسط وتر AB است . زاویـــه

---

* این مسائل توسط آقای همدانی‌زاده مربی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر تهیه وتنظیم شده است بدین وسیله از ایشان سپاسگزاری میکنیم .

(1) Summit

BAD رامساوی ABC درنقطه A رسم‌کنید از M ، خط MP راعمود بر CB رسم کنید روی AD باندازه $AQ=PE$ جدا کنید و MQ رارسم کنید . ثابت کنید که مثلثهـای AQM و BPM مساویند درنتیجه زاویه AQM قائمه است ونقاط P و M و Q بریك خط قرار دارند سپس $ACPQ$ چهارضلعی لامبرت است ودرآن زاویه حاده است . حالا نشان دهید که تحت فرض زاویه حاده مجموع زوایای هرمثلث قائمه‌الزاویه کمترازدوقائمـــه است .

۲— فرض کنید که زاویه A درمثلث ABC ازهریك ازدوزاویه دیگر آن $\hat{C}$ و $\hat{B}$ کمترنیست . ارتفاع رااز A رسم کنید ونشان دهید (ازمسئله ۱) که تحت فرض زاویه حاده ، مجمـــوع زاویای یك‌مثلث کمترازدوزاویه قائمه است . (اختلاف بین دوزاویه قائمه ومجموع زوایای یك مثلث " کمبـــود " [1]) مثلث نامیده میشود .

۳— دومثلث ABC و $A'B'C'$ که درآن زوایای مشابه برابرند مفروض است . اگر $AB=A'B'$ باشد سپس این دومثلث متشابه اند . فرض کنید که $A'B'<AB$ است . روی AB باندازه $AD=A'B'$ جدا کنید ، وروی AC باندازه $AE=A'C'$ سپس مثلثهای ADE و $A'B'C'$ مساویند ، نشان دهید که E نمیتواند روی C قراربگیرد ، وگرنه زاویه BCA اززاویه DEA بزرگتر خواهد بود همچنین نشان دهید که E روی امتداد AC نمیتواند قرارگیرد وگرنه خط DE را در نقطه F قطع خواهد کرد ومجموع زوایای مثلث FCE ازدوقائمه بیشتـــر خواهد بود . پس E بین A و C است و $BCED$ چهارضلعی است . نشـــان دهید که مجموع زوایای این چهارضلعی برابرچهارقائمه است . ولی این تحت فرض زاویه حاده غیرممکن است . درنتیجه $A'B'<AB$ نمیتواند درست باشد وتحت فرض زاویه حاده دومثلث متساویند وقتیکه سه زاویه آنها باهم برابرباشد . بعبارت دیگر درهندسه هیپربولیك اشکال مشابه

وباندازه های مختلف یافت نمیشود .

۴ــ پاره خطی که یك راس مثلث رابه‌نقطه ای روی ضلع‌مقابل وصل میکند ترانسورسال [1] نامیده میشود .ترانسورسال یك مثلث رابه دوزیرمثلث تقسیم‌میکند که هرکدام بنوبه بدوزیر مثلث دیگر تقسیم میشود واینکار رامیتوان ادامه داد . نشان دهید که اگر یك مثلث بوسیله ترانسورسالها به تعداد متناهی زیرمثلث تقسیم گردد ، " کمبود [2] " مثلث اول برابراست با مجموع کمبود های زیرمثلثها دراین تقسیم بندی .

۳ــ۱ــ مدل اقلیدسی برای‌هندسه هیپربولیك

دایره ثابت Σ درصفحه اقلیدسی مفروض استوصفحه هیپربولیك رابصورت داخل Σ تعبیرکنید . " نقطه " ای درصفحه هیپربولیك‌رانقطه اقلیدسی درداخل Σ ، و " خط " صفحه هیپربولیك راآن قسمت ازخط اقلیدسی که درداخل Σ است‌تعبیر کنید . دراین مدل صحت عبارات زیر را بررسی کنید .

۱ــ ازدو " نقطه " فقط و فقط یك " خط " میگذرد .

۲ــ دو " خط " متمایز حداکثر دریك " نقطه " یکدیگر راتلاقی میکنند .

۳ــ " خط " ℓ و " نقطه " P که‌روی ℓ نیست مفروض است . از P میتوان بینهایت " خط " رسم‌کرد که " خط " ℓ راتلاقی نمیکنند .

۴ــ فرض کنید خط اقلیدسی که ازدو " نقطه " P و φ میگذرد Σ رادر S و T تلاقی میکند وترتیب این‌نقاط T و φ و P و S است " فاصله " هیپربولیك از P به φ را

$$\text{Log}\ \frac{(\varphi S)(PT)}{(PS)(\varphi T)}$$

تعبیرمیکنیم . اگر P و φ و R سه "نقطه" روی " خط " باشد نشان دهید

1- Transversal

2- Defect

که " فاصله " PR = " فاصله " QR + " فاصله " PQ .

۵ــ فرض کنید که " نقطه " P ثابت و " نقطه " φ درطول " خط " ثابتی از P بطرف T حرکت میکنند نشان دهید $PQ \to \infty$ " فاصله " این مدل به وسیله فلیکس کلاین طرح شد . با تعابیر بالا و تعبیر مناسبی برای " زاویه " بین دو " خط " میتوان نشان داد که تمام اصول موضوع هیلبرت برای هندسه اقلیدسی صفحه بجز اصل توازی،قضایای صحیحی درهندسه این مدل میباشند . درقسمت ۳ دیدیم که اصل توازی اقلیدس برقرار نیست ودرعوض اصل توازی لباچسفکی صدق میکند . این‌مدل نشان میدهد که اصل توازی‌اقلیدس از اصول دیگر هندسه اقلیدس‌قابل استنباط نیست ،چون اگر از اصول دیگر نتیجه میشد میبایستی قضیه صحیحی در هندسه مدل کلاین باشد .

نظریه مجموعه هاومبانی ریاضیات*

الکساندر آبیان
پروفسور ریاضیات دانشگاه ایالتی ایوا

تجربه نشان داده است که تقریبا" کلیه ریاضیات امروزه رامیتوان براساس نظریه مجموعه ها بنا نمود وبسط وتوسعه داد . بدین جهت است که گفته میشود نظریه مجموعه ها مبناواساس ریاضیات راتشکیل میدهد . ازطرف دیگرخود نظریه مجموعه ها فقط درحدود نیم قرن است که بطوررسمی وارد صحنه ریاضیات شده وبرای خود جای مستقلی برقرارنموده است. البته این امرممکن است کمی سبب تعجب باشد بدین معنی که ممکن است بعید بنظربرسد که پس از ۳۰ ویا ۴۰ قرن فعالیت فوق العاده درخشان ریاضی مسائل مربوط به مبنای ریاضیات یکباره توجه.ریاضیدانهارابشدت نسبت بخود جلب نموده باشد . لیکن پس ازاندکی تامل میتوان دیدکه این امرزیاد هم تعجب آورنیست چون برای ریختن شالوده هرزبان علمی جزء ملزومات است که بمقدارقابل ملاحظه فعالیتهائی درآن زبان انجام شده باشد تاپس ازبررسی وامتحان دقیق این فعالیتها بتوان قسمتهای اصلی واساسی آن زبان راازقسمتهای غیراساسی آن تفکیک نمود . مثلا" برای انتخاب لغات(ومخصوصا" افعال) اساسی یك زبان علمی،منطقی است که مقدارزیادی ازنوشته های این زبان رامورد امتحان قراردادوید که چه لغاتی بطوروافردرآن نوشته هااستعمال شده است واین لغات راجزء لغات اساسی آن زبان انتخاب نمود . درنتیجه بکاربردن این روش فهرستی ازلغات اساسی آن زبان تهیه میشود واین لغات برای تشکیل دادن جملات آن زبان بکاربرده میشود وبدین طریق مکالمه درآن زبان آغازمیگردد که توام بااستدلال ،یك زبان علمی راتشکیل میدهد . البته لغات اساسی یك زبان علمی قابل تعریف نیست وبدون تعریف(ولی همراه بایك تعبیرمبهم)مورد قبول قرارمیگیرد وبرای تعریف سایرلغات آن زبان بکاربرده میشود .

اگراین روش انتخاب لغات اساسی رادرمورد ریاضیات بکاربریم یعنی اگرکتابهای متعدد

---

* متن سخنرانی نویسنده درروزشنبه ۵۱/۵/۲۱ دردانشگاه صنعتی آریامهر

ریاضی رابرای پیداکردن لغات اساسی ریاضی مورد بررسی قرارد هیم خواهیم دید که لغات "مجموعه" وبالنتیجه فعل "عضوبودن" پیش ازهرلغت دیگری مصرف شده است بنابراین طبیعی است که لغات "مجموعه" و"عضوبودن" درفهرست لغات اساسی زبان علمی ریاضی قرارگیرد . ازطرف دیگرتجربه نشان داده است که احتیاجی به الحاق لغات دیگربه این فهرست نیست. وحتی بابکاربردن علائم متغیرهای آزاد (که جزء علائم معمولی هرنظریه ریاضی میباشد) میتوان فهرست لغات اساسی ریاضیات رابه یك لغت که فعل "عضوبودن" است منحصرنمود. بنابراین بابکاربردن علامت " ϵ " عضویت تنهالغت اساسی ریاضیات همانا فعل $x \epsilon y$ یا $\epsilon(x,y)$ که" x عضو y است"خوانده میشود ریکه میباشد .

بالنتیجه ازلحاظ قیاسی ریاضیات علمی است که نتایج منطقی فعل $\epsilon(x,y)$ که همانطو خواهیم دید این فعل باید دراصلهائی (بنام اصلهای نظریه مجموعه ها) صدق نماید بدست میدهد.

ازگفته های فوق چنین دیده میشود که همانطورکه انتظارمیرود نظریه مجموعه ها برروی " منطق ریاضی" بنا میشود وبنابراین موضوع مهم دربسط نظریه مجموعه ها همان انتخاب اصلهاست که فعل $\epsilon(x,y)$ باید (همانطورخواهیم دید) بالاجبار درآنها صدق نماید . البته طبیعیترین اصل نظریه مجموعه هاآن خواهد بود که بازاء هرخاصیتی یك مجموعه وجود داشته باشد که اعضایش دارای آن خاصیت باشد . بدین معنی که بازاء هرفرمول $P(x)$ که درآن x متغیرآزاد است و $P(x)$ از $\epsilon(u,v)$ توسط علائم منطقی $\neg$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$ ، $\exists$ ، $\forall$ ،(،)ومتغیرهای x ، y ، z ، u ، v ... بطورقانونی تشکیل شده است یك مجموعه S وجود داشته باشد که :

$$(x \epsilon S) \leftrightarrow P(x)$$

بطوروشن ترطبیعیترین اصل نظریه مجموعه هااصل زیرخواهد بود :

$$(\exists S)(\forall x)\ (x \epsilon S \leftrightarrow P(x)) \qquad (1)$$

ولی همانطورکه راسل مشاهده کرده است این اصل قابل قبول نیست چون منتج به تناقض است. حقیقتا" باستنادآن اصل وبازاء :

$$P(x) = \neg (x \epsilon x)$$

تناقض زیرنتیجه میشود :

$$S \in S \leftrightarrow \neg (S \in S)$$

بنابراین انتخاب اصلهای نظریه مجموعه ها چندان ساده نمیباشد وبسی رنج برده شده است که برای نظریه مجموعه ها دستگاه اصلهائی طرح شود که هم برای بسط ریاضیات کافی وهم عاری ازتناقض باشد . تابحال مناسبترین دستگاه اصلهابرای نظریه مجموعه ها همانا دستگاه فرانکل وزرملومیباشد که به ZF نشان داده میشود . بطوررسمی ZF یك سیستم قیاسی رتبه اول است که فعل اساسی آن $\epsilon(x,y)$ میباشد وبراساس منطق رتبه اول بناود ستگاه اصلهایش بشرح زیر انتخاب میشود . البته چنانکه انتظارمیرود درانتخاب اصلهای نظریه مجموعه هارا هنمون ما همان تعبیرمبهم مفهوم" مجموعه" وتجربه ماد رریاضیات میباشد . مثلا" بهمین جهت فعل مهم"مساوی بودن" یعنی $=(x,y)$ بطورزیرد رنظریه مجموعه ها تعریف میشود .

$$x = y \quad \equiv \quad (\forall \beta)(\beta \in x \leftrightarrow \beta \in y) \qquad (2)$$

بآسانی میتوان دید که بنابه تعریف(2) مجموعه های مساوی بازهم ممکن است قابل تشخیص باشند مثلا" اگر $\neg(x \in y)$ وابا $y \notin x$ نشان دهیم و مدل زیرراد رنظربگیریم :

$a \in a$	$a \in b$	$a \in c$
$b \in a$	$b \in b$	$b \notin c$
$c \notin a$	$c \notin b$	$c \in c$

مشاهده میکنیم که $a=b$ ولیکن $a \in c$ و $b \notin c$. مدل بالا رامعمولا" بطریق زیرهم نشان میدهند :

$$a = \{a, b\} \qquad b = \{a, b\} \qquad c = \{a, c\}$$

بنابرملاحظات بالا اصل زیررا قبول میکنیم :

$$(\forall \beta)(\beta \in x \leftrightarrow \beta \in y) \rightarrow (x = y) \qquad (3)$$

واما مشکل بزرگ همان انتخاب اصلی است که وجود مجموعه هارابازاء خواص مختلف تضمین نماید وضمنا" عاری ازتناقض راسل باشد . دراین مورد ملاحظه میکنیم که اگربازاء خاصیت $P(x)$ وجود مجموعه S راموکول ومربوط به وجود مجموعه a بطریق زیرنمائیم :

$$(x \in S) \leftrightarrow (x \in a) \wedge P(x) \qquad (4)$$

تناقض راسل پیش نخواهد آمد مشروط برآنکه a مجموعه کلیه مجموعه ها یعنی مجموعه جهانی نباشد . ولی اگرهم بااصلی ازوجود مجموعه جهانی جلوگیری کنیم بازهم (4) رضایتبخش نخواهد بود چون مجموعه های تازه همه باتکاء آن اصل،زیرمجموعه های مجموعه های قبلی خواهند بود. برای پیداکردن راه حل ممکن است بجای (4) فرمول زیررابعنوان یك اصل قبول کنیم :

$$(y \in S) \leftrightarrow (x \in a) \wedge P(x,y) \qquad (5)$$

که درآن a یك مجموعه داده شده است و S مجموعه ای است که وجودآن توسط (5) تضمین میشود و $P(x,y)$ فرمولی است که درآن x و y متغیرهای آزاد میباشد و $P(x,y)$ از $\epsilon(x,y)$ توسط علائم منطقی وبطورقانونی تشکیل میشود . ولی (5) بازهم قابل قبول نیست چون اگردر (5) بجای $P(x,y)$ فرمول :

$$(x = y) \wedge (y \neq y)$$

راقرارد هیم مجموعه تهی $\emptyset$ رابدست خواهیم آورد که باتکاء اصل مجموعه توان (به(۸) مراجعه شود) وجود مجموعه $\{\emptyset\}$ راتضمین خواهد کرد واگرچنانچه در (5) بجای $P(x,y)$ فرمول :

$$(x \subseteq y) \wedge (x \in \{\emptyset\}) \qquad (6)$$

راکه درآن " $\subseteq$" علامت زیرمجموعه (که بطورمعمولی توسط ϵ تعریف میشود) است، قرارد هیم مجموعه جهانی رابدست خواهیم آورد که منتج به تناقض راسل خواهد شد . بنابراین (5) هم های قابل قبول نیست.ملاحظه میکنیم که در (5) فرمول $P(x,y)$ فرمولی است که درآن x و y متغیر آزاد میباشد و $P(x,y)$ محدودیت دیگری ندارد . ازطرف دیگراگردر (5) فرمول $P(x,y)$ را شامل محدودیت "تابعی بودن $P(x,y)$ نسبت به x " نمائیم خواهیم دید که حالت(٦) رخ

نخواهد داد (چون $y \leq x$ نسبت به x تابعی نیست) و ظاهرا" ازتناقض راسل هم جلوگیری بعمل خواهد آمد . تجربه نشان داده است که تحمیل این محدودیت بر $P(x,y)$ ظاهرا" راه حل فوق العاده مقتضی ورضایتبخشی میباشد وبنابراین یکی ازمهمترین اصلهای نظریه مجموعه ها که درحقیقت خود مرکب ازیکدسته شامل بینهایت اصل میباشد بطریق زیرانتخاب میشود . بازاء هر مجموعه a وهرفرمول $F(x,y)$ که نسبت به x تابعی باشد مجموعه S وجود دارد که درفرمول زیر صدق مینماید :

$$(\exists S)(\forall y)(y \in S \leftrightarrow ((x \in a) \wedge F(x,y))) \qquad (7)$$

فرمول (۷) حالتی است از *Axiom Scheme of Replacement* که توسط فرانکل وارد نظریه مجموعه ها شده است.

یکی ازنتایج (۷) اینست که وجود مجموعه تهی رامیتوان ثابت نمود .

قضیه :

مجموعه تهی وجود دارد .

برهان :

$$(\exists S)(\forall y)(y \in S \leftrightarrow (x \in a \wedge (x = y \wedge x \neq x)))$$

$$(\exists S)(\forall x)(x \in S \leftrightarrow (x \in a \wedge x \neq x))$$

$$(\exists S)(\forall x)(x \notin S)$$

بآسانی میتوان دید که اصل (۷) وجود مجموعه توان (یعنی مجموعه کلیه زیرمجموعه های) یك مجموعه راتضمین نمینماید . بنابراین اصل مجموعه توان رابشرح زیرقبول میکنیم :

اصل مجموعه توان :

$$(\exists S)(\forall x)(x \in S \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad (8)$$

همچنین میتوان دید که اصلهای (۳) و (۷) و (۸) وجود مجموعه اتحاد (یعنی مجموعه کلیه

اعضاء اعضاء) یك مجموعه راتضمین نمینماید بنابراین اصل مجموعه اتحاد رابشرح زیروارد میکنیم

اصل مجموعه اتحاد :

$$(\exists S)(\forall x)(x \in S \leftrightarrow (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)) \qquad (9)$$

بازهم میتوان نشان داد که اصلهای (۳) و (۷) و (۸) و (۹) وجود یك مجموعه بینهایت راتضمین نمیکند. بنابراین اصل مجموعه بینهایت رابشرح زیر قبول میکنیم :

$$(\exists w)((\phi \in w) \wedge (\forall x)(x \in w \rightarrow (x \cup \{x\}) \in w)) \qquad (10)$$

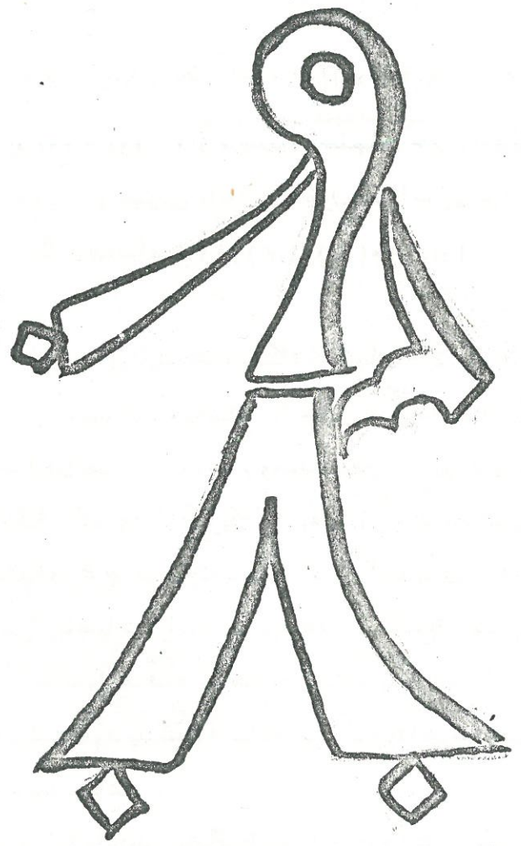
اصلهای (۳) و (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) دستگاه اصلهای ZF راتشکیل میدهند باتکاء اصلهای (۳) و (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) میتوان بآسانی اصول حساب پیانورابصورت قضایا بدست آورد و بنابراین "عدم تناقض دستگاه اصلهای (۳) و (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰)" قابل اثبات درخود نظریه مجموعه ها نمیباشد .

البته همانطوریکه (۷) نشان میدهد دستگاه اصلهای ZF یك دستگاه بینهایت است چون تعداد $F(x,y)$ در (۷) بینهایت میباشد . چون عدم وجود تناقض در دستگاه اصلهای ZF رانمیتوان درنظریه مجموعه ها اثبات کرد اجبارا" باید عدم وجود تناقض دراین دستگاه راازروی ایمان قبول نمود .

همانطوریکه دربالا اشاره شد وهمانطوریکه تجربه نشان میدهد تقریبا" کلیه رشته های ریاضیات امروزرامیتوان باتکاء اصلهای ZF بسط وتوسعه داد . اصلهای (۳) و (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) اصطلاحا" "قانون اساسی" ریاضیات راتشکیل میدهد . ملاحظه میکنیم که ازطرفی عموما" هرنوع قانون یك نوع محدودیتی است وازطرف دیگرهمانطوریکه دیده شد اگرمحدودیتهائی برزبان نظریه مجموعه ها تحمیل نشود انگشت تهدید کننده تناقض فی الفورظاهرمیشود ودرریاضیات تناقض اکیدا" ومطلقا" ممنوع وغیرقابل تحمل میباشد .

بنابراین اگرگفته های بالارا ازمد نظربگذرانیم به ملاحظات زیرخواهیم رسید . برای جلوگیری ازبروزتناقض درریاضیات محدودیتهائی بصورت اصلهای نظریه مجموعه ها برزبان ریاضیات تحمیل

نمودیم ولی قادر به اثبات عدم وجود تناقض در دستگاه اصلهای حاصله نیستیم وعدم وجـــود تناقض در دستگاه اصلهای ZF را از روی ایمان قبول نمودیم وقابل ملاحظه است که این وضع مانند بسیاری از اوضاع زندگی کمی آنتی کلیماتیك بنظرمیرسد ولی خوشبختانه بیش از ۵۰ سال است که تناقضـــی در دستگاه ZF پیدا نشده است وبرعکس علائمی وجود دارد دال برآنکه در دستگاه ZF تناقض وجود ندارد وبنابراین میتوانیم بافکر نسبتـا" راحت به تحقیقات وتجسات خود در ریاضیات ادامه دهیم و طبق احتیاج ، اصلهای دیگری (ازقبیل اصل انتخاب و CH و GCH) به ZF اضافه نمائیم.



مجمـــوعه هـــای هم تـــوان

ترجمه : سعیـــد قهرمـــانی

نوشته : Hans Rademacher
otto Toeplitz

ترجمه بانگلیسی : Herbert Zuckerman

موضوعی راکه مورد بحث قرارمیدهیم درباره پایه های ریاضیات است که دراینجابیشتر بـــه زیبائی آنهاتوجه میکنیم تا به اهمیت فراوانی که در ریاضیات دارد . نظریه مجموعه هاکه توسط جرج کانتوربناشده است، ازمفاهیم بسیارساده آغاز میشود وسپس خود به شاخه‌های گوناگونـــی تقسیم‌میگردد که هدف ازآنهابیشتر روشن‌نمودن اهمیت براین مجرد است .

آیاتعداد اعداد طبیعی ازاعداد زوج مثبت بیشتر است ؟ آیا تعداد نقاط روی یك قطعه خط از تعداد نقاط روی یك سطح مربع شکل کمتراست ؟ اینها نظاهر سئوالاتی هستندکـــه کانتور درابتدای تئوری خود مطرح میکند وجواب دادن بآنها مشروط برآنست که درپاسخ دادن عجله‌نکنیم چه هنوز نمیدانیم که منظورما از بیشتر بودن اعداد طبیعی یانقاط روی سطح چیست. کانتور درابتدای کار برای بیشتر یاکمتر بودن، شمارش رابرای اعداد نامتناهی تعریف میکند وسعی مینماید که‌متدی مانند شمارش اعداد صحیح یاغیرصحیح وقتیکه تعداد آنها محدود است پیداکند . اساس کاراو بامثال زیرروشن میشود :

فرض‌کنید مادریك سالن رقص هستیم وازماسئوال میشود که آیادراین سالن تعداد مردها بیشتـر است یازنها ؟ خوب ، ساده‌ترین‌راه برای یافتن جواب چیست ؟ یك طریقه آنست که مردهـــا

وزنها راجدا کنیم وهردسته رابشماریم وسپس دوعدد حاصل را باهم مقایسه کنیم اما ساده‌تر آنست که رقص را شروع کنیم ، در رقص هرمرد با یك زن جفت میشود پس کافیست مشاهده نمائیم که آیا کسانیکه نمی‌رقصند مرد هستند یا زن. البته دراین عمل ساده فرض میکنیم که هر کس جفتی بیابد ازنعمت رقص بی‌بهره نماند .

روش جفت کردن، برای شروع کار مورد قبول کانتور بود . حال اگرما بخواهیم بدانیم که تعداد اعداد طبیعی بیشتراست یا اعداد زوج مثبت باید سعی کنیم که آنهارا جفت نمائیم درحقیقت ما میتوانیم بازاء هر عدد طبیعی یك عدد زوج بیابیم بطوریکه هیچکدام باقی نماند بشکل زیر

۱ ۲۰ ۳ ۴ ۵ ۶ ۰۰۰۰۰۰۰۰

۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰ ۱۲ ۰۰۰۰۰۰۰۰

این طریقه ساده کاملا" قابل توجه است و یك فرق اساسی بین حالت اخیر وحالتی که تعداد اعداد محدود هستند ، ایجاد میکند . درمثالی که راجع به سالن رقص گفتیم برای ما اهمیتی ندارد که کدام مرد یا زن میرقصند بلکه شمارهٔ آنها یی مهم است که زوجی برای رقص پیدا نکرده اند و این شماره تغییرنمیکند تازمانیکه شخص سالن راترك کند و یا نفرجدیدی به آن اضافه شود و کاملا" متفاوت است با حالتی که ما میخواهیم اعداد طبیعی را با اعداد زوج مقایسه نمائیم مایك روش برای جفت کردن اعداد طبیعی و زوج بیان نمودیم که هیچ عددی باقی نمیماند ولی حال میتوانیم طرق دیگری پیشنهاد کنیم که تعدادی عدد باقی میماند مثلا" اگر متد زیر راپیش بگیریم .

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰۰۰۰۰۰ ازاعداد طبیعی

۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۰۰۰۰۰۰ ازاعداد زوج مثبت

مشاهده میشود که تمام اعداد فرد باقی میماند وپس بایستی بتوان حکم کرد که تعداد اعداد زوج مثبت کمترازتعداد اعداد طبیعی است ولی اساس تئوری کانتوربراین حقیقت استواراست که ماعقیده اختیاری

زوج کردن راترك بگوئیم که اگرفقط یك راه برای جفت کردن تمام اعضای دومجموعه پیدا شود سپس آن دومجموعه دارای تعداد عناصرمساوی هستند دراین صورت دومجموعه راهم توان گویند .

قدم بعدی کانتور آن بود که ثابت کند مجموعه اعداد گویا با مجموعه اعداد طبیعی هم توان است برای اینکار کسرها رابترتیب اندازه مرتب نمیکنیم بلکه طبق اندازه مجموع صورت ومخرج هایشان عمل مینمائیم یعنی کسرهای تحویل ناپذیری راکه مجموع صورت ومخرجشان یك است وسپس کسرهای تحویل ناپذیری که مجموع صورت ومخرجشان ۲ وبعد ۳ والی آخر میباشد همه رادریك ردیف قرار میدهیم واضح است که ابتدا $\frac{1}{1}$ وسپس $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{1}$ وبعد $\frac{3}{1}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ و ..... این کسرها ساخته میشوند وکسرهایی نظیر $\frac{2}{2}$ که تحویل پذیرند حذف میگردند سپس درمقابل هرکدام ازاین اعداد یك عدد طبیعی را قرارمیدهیم بطوریکه ازیك شروع شده وادامه پیدا کند بشکل زیر :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰۰۰۰۰

۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{1}$ ۴ ۰۰۰۰

واضح است که درعمل جفت کردن بطریق فوق هیچ عدد گویائی تنها باقی نمیماند درحالیکه ازاعداد طبیعی نیز هیچکدام بدون جفت نیستند پس مجموعه اعداد گویا ومجموعه اعداد طبیعی هم توان هستند .

این نتیجه عجیب خود بیان کننده یك حقیقت عجیب تر است وآن موضوع قابل شمارش بودن اعداد گویا میباشد چراکه ما این اعداد را با اعداد طبیعی جفت کرده ایم واعداد طبیعی وسیله شمارش هستند (درحالت عمومی مجموعه ای راقابل شمارش گویند که بتوان ثابت کرد با مجموعه یا زیرمجموعه‌ای ازاعداد طبیعی هم توان است) کانتور مطالعات خود را ادامه میدهد ونتیجه میگیرد که مجموعه های بسیاروسیعتری ازمجموعه اعداد طبیعی یافت میشوند که باآن هم توان هستند ما

بذکرآنها نمیپردازیم زیراکه بمفاهیم عمیقتروعمیقتری درریاضی احتیاج داریم که ذکرآنها هدف این مقاله نیست .

تئوری کانتور بی ارزش است اگر ادعاکند که هیچ مجموعه ای ازتوان بالاتر وجود ندارد وهمه مجموعه ها همتوان هستند ولی وی نشان داد که چنین مجموعه هایی وجود دارند برای مثال مجموعه نقاط روی یك خط ازتوانی بالاترازتوان مجموعه اعداد طبیعی است . اثبات این مطلب از طریق برهان خلف امکان پذیراست فرض میکنیم روشی برای جفت کردن همه نقاط روی یك قطعه خط باتمام اعداد طبیعی وجود دارد وسپس به تناقض میرسیم . اگر بتوانیم اعداد طبیعی را با نقاط روی یك خط جفت کنیم دراین صورت ترتیبی برای نقاط موجود روی قطعه خط قائل شده ایم مثلا" نقطه اول رابایك نقطه دوم رابالا و . . . . . جفت کرده ایم ولی روشن است که این یك ترتیب طبیعی برای نقاط روی یك خط نخواهد بود واحتتر است اگر هرنقطه رابوسیله عددی نشان دهیم که آن عدد مبین فاصله آن نقطه ازآخرین نقطه خط مورد بحث طول خط راهرچه باشد، واحد فرض میکنیم. مثلا" نقطه وسط این قطعه خط رابا ۰/۵ نشان میدهیم و بقیه نقاط راهم باکسرهای اعشاری . حال برای اینکه فاصله نقاط را اندازه گیری کنیم محتاج به اعداد اعشاری نامحدود هستیم برای مثال نقطه ای که در انتهای ثلث اول خط قرار دارد بایستی با

۰/۳۳۳ . . .

نشان داده شود حال برای جفت کردن نقاط روی خط واعداد طبیعی کافیست که ما این کسرهای نامحدود اعشاری رابا اعداد طبیعی جفت نمائیم مثلا" ۱ را بایك کسر اعشاری ۲ را باکسراعشاری دیگری وبهمین ترتیب . اندکی راحتتراست اگر هرجفت را دریك ردیف قرار داده ویك ستون عمودی ازاعداد طبیعی درمقابل کسرهای اعشاری بسازیم مثلا" به لیست زیرکه فقط برای شرح بهتر وبیشترتهیه کرده ایم توجه شود

۱	۰/۳۵۴۲۵ . . .
۲	۰/۶۵۷۷۳ . . .
۳	۰/۵۵۵۴۹ . . .
۴	۰/۰۱۰۵۷ . . .
۵	۰/۲۰۲۰۶ . . .

بهر طریقی اگر جفت هایی مانند مثال فوق بسازیم ثابت میکنیم که عدد اعشاری وجود دارد که در جفت کردن هاباقیمانده استواین عدد رابطریق زیرمییابیم :

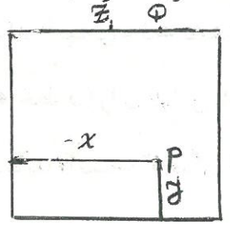
برای اولین رقم بعد ازممیز رقمی پیدا میکنیم که بااولین رقم بعد ازممیزاولین عدد اعشاری متفاوت باشد (درمثال فوق این عدد یك رقمی بجز ۳ هر عدد دیگری میتواند باشد) پس تااینجا میدانیم که این عدد بااولین عدد اگرچه تمام رقمهای بعدی آنها مساوی شوند برابرنیست برای دومین رقم بعد ازممیز عددی انتخاب میکنیم که بادومین رقم بعد ازممیز دومین کسراعشاری متفاوت باشد (درمثال فوق این عدد یك رقمی بجزء هرعدد دیگری میتواند باشد) وبرای سومین رقم بعد ازممیز عددی که باسومین رقم بعد ازممیز سومین کسراعشاری متفاوت باشد انتخاب نموده واین عمل را ادامه میدهیم دراین صورت کسری اعشاری یافته ایم که باتمام کسرهای اعشاری موجود متفاوت است چه باهریك ازآنها درحداقل یك نقطه متفاوت میباشد . درنتیجه عددی یافته ایم که باهیچکدام ازاعداد طبیعی جفت نشده استواین بافرضی که کردیم متناقض است پس مجموعه نقاط روی یك قطعه خط دارای توانی بالاتر ازمجموعه اعداد طبیعی است . تنها اشکالی که دراستدلال کانتور پیش میآید، آنست که ممکن است یك نقطه بادوعدد طبیعی جفت گردد کانتوراین موضوع راپیش بینی

نمود ومتذکرشد کهتنها حالت ممکن حالتی است که ماکسرهایی مانند ۰/۲۶۹۹۹۰۰۰۰ داشته باشیم این عدد همان ۰/۲۷۰۰۰۰۰۰ است یعنی این دو عدد هردو مبین یک نقطه هستند که با دو عدد متفاوت جفت میشوند برای رفع این اشکال کانتور درهنگام بحث خود متذکرشد که ما از اعدادی که متناوب هستند ورقم گردش آنها ۹ میباشد همیشه صرفنظرمیکنیم وآنها را با اعداد طبیعی جفت نمینمائیم .

نتیجه بسیارجالبی ازاین مطلب مشتق میشود وآن اینست که مجموعه اعداد گویا دارای توانی کمترازمجموعه اعداد بین صفرویک است پس بین صفرویک اعدادی وجود دارند که درمجموعه اعداد گویا نیستند واین همان مطلبی است که وجود اعداد اصم رامژده میدهد .

متعجب میشویم اگر به ادعای دیگری ازکانتورتوجه کنیم ، وی میگوید : مجموعه نقاطی که روی یک سطح مربع شکل یافت میشود دارای توانی بیشتر ازمجموعه نقاطی که روی یک ضلع همان مربع وجود دارد نیست پس ازاثبات این ادعای سخنی بیهوده نگفته اید اگرمدعی شوید که تعداد نقاط روی یک ضلع مکعب برابراست با تعداد نقاط موجود درتمام حجم مکعب .

جرج کانتور برای بیان استدلال قضیه ای که مطرح کرده است مانند قبل نقاط را روی ضلع مربع باکسرهای اعشاری نمایش میدهد که هرکسر مبین فاصله یک نقطه از آخرین نقطه روی خط است وهرنقطه روی سطح مربع را با یک زوج مرتب (x, y) نشان میدهد که x یکسر اعشاری است که فاصله افقی نقطه ازضلع چپ مربع و y فاصله عمودی نقطه ازضلع پائینی مربع میباشد . لازم است تذکر دهیم که طول ضلع مربع را هر چه باشد واحد فرض میکنیم . بشکل توجه شود :



حال ، روشی برای جفت کردن همه نقاط روی خط و تمام نقاط روی صفحه ارائه میدهیم .

هرنقطه مانند P روی صفحه مربع شکل با x و y مشخص میشود بطوریکه

$$x = 0.\ a_1 a_2 a_3 \cdots$$
$$y = 0.\ b_1 b_2 b_3 \cdots$$

حال ازاین دو کسراعشاری کسراعشاری $z = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots$ رامیسازیم ونقطه z راروی ضلع مربع طوری انتخاب میکنیم که مبین آن کسر اعشاری باشد پس P و z راباهم جفت میکنیم پس باین ترتیب مرکز تقارن مربع که با مشخصات

$$x = 0/5000\cdots$$
$$y = 0/5000\cdots$$

است با نقطه $z = 0/5555000\cdots$ جفت میشود . متذکر که ذکر کردیم هرنقطه مربع را بایک نقطه ضلع آن جفت میکند اگرکسی ادعاکند که ممکن است دراین حالت چند نقطه یا حتی بینهایت نقطه روی صفحه هم بایک نقطه روی ضلع مربع جفت شده باشند بیهوده گفته است چه اگر مثلا P' هم با z جفت شده باشد دارای مشخصات

$$x' = 0.\ a'_1 a'_2 a'_3 \cdots$$
$$y' = 0.\ b'_1 b'_2 b'_3 \cdots$$

باشد طبق آنچه که گفتیم $z = 0.\ a'_1 b'_1 a'_2 b'_2 \cdots$ خواهد شد وچون میدانیم

$$a'_1 = a_1 \ ,\ b'_1 = b_1$$
$$a'_2 = a_2 \ ,\ b'_2 = b_2$$
$$\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots$$

است پس $z = 0.\ a_1 b_1 a_2 b_2$

واین نشان‌میدهد که $x'=x$ و $y'=y$ پس P' بر P منطبق است ونتیجه آنکه هر نقطه از سطح بایك وفقط یك نقطه روی ضلع مربع جفت میشود وباین‌ترتیب هیچ نقطه ای‌روی سطح باقی نمیماند که بایك نقطه روی خط جفت نشده باشد . حال ثابت میکنیم که هیچ نقطه ای روی خط نیز باقی نمانده که بانقطه ای روی سطح جفت نشده باشد فرض کنید $R=0.c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$ باقی مانده باشد حال نقطهٔ A بامشخصات

$$x=0.c_1c_3c_5\ldots$$
$$y=0.c_2c_4c_6\ldots$$

درنظربگیرید واضح است طبق آنچه‌که گفته ایم A با R جفت شده است پس R نیزباقی نمانده است . برهان وقتی به‌آخرمیرسد که به یك حالت استثنائی نیزتوجه کنیم ؛

نقطه $z=0.۳۲۵۳۵\ldots$ بانقطه P ازصفحه بامشخصات

$$x=0.۳۵۰۰۰\ldots \qquad y=0.۲۲۲\ldots$$

جفت شده است . هم چنین نقطه $z'=0.۲۹۲۹۲۹\ldots$

نیز بانقطه P ازصفحه بامشخصات

$$x=0.۹۹۹\ldots \qquad y=0.۲۲۲\ldots$$

جفت گشته است مشاهده‌میشود $x=x'$ و $y=y'$ یعنی P و P' برهم منطبقند درحالیکه z و z' منطبق نیستند برای‌رفع این مشکل کانتور پیشنهاد کرد که دراین حالات z رابه پرانتزهای تقسیم‌کنیم‌بطوریکه همه اعداد ۹ پهلوی هم ویك عدد غیر ۹ در یك پرانتز باشند وسپس هر پرانتز را یك عدد پنداشته ومولفه‌های x' و y' رامانند قبل پیدا کنیم مثلاً وقتیکه

$$z'=0.۲۹۲۹۲۹\ldots$$

است داریم :

$$z'=(۱)(۲)(۹۲)(۹۲)(۹۲)\ldots$$

وزوج z' یعنی P' دراین‌حالت دارای مشخصات زیراست :

$$x'=0.۱۹۲۹۲۹۲۰۰۰$$

$$y'=0.۲۹۲۹۲۹۲۰۰۰$$

ویاوقتیکه $z'=۷۳۹۴۹۱۰۹۹۷۰۰۰$ است آنرا با بترتیب زیرجفت کنیم :

$$z'=0.(۷)(۳)(۹۴)(۹۹۰)(۹۹۹۷)\ldots$$

$$x''=0.۷۹۴۹۹۹۷۰۰۰$$

$$y''=0.۳۹۹۰۰۰۰$$

بدین ترتیب استدلال کامل شده ونتیجه میگیریم که تعداد نقاط روی یك خط یایك ضلع مربع با تعداد نقاط روی سطح آن مربع مساوی‌هستند ودومجموعه هم توان میباشند .

درآخر بد نیست خوانندگان رامتوجه به مسائلی سازیم‌که نه تنهاخود کانتوربلکه جانشینان وی هم هرچه کوشش کردند به حل آنها دست نیافتند یکی ازآنها مساله ای است که‌میگوید آیا مجموعه ای وجود داردکه دارای توانی بیشترازمجموعه اعداد طبیعی ولی توانی کمترازمجموعه نقاط روی یك خط باشد ؟ به این‌مسئله کانتینیوم گویند .



یک دیگر از معادلهای توپولوژیک اصل انتخاب

از : S. P. Franklin & B. V. S. Thomson

معروفترین وگاهی اوقات مفید ترین نتیجه دلم Zorn * این استکه هر گسترش کامل و بر روی یک انحصار غیرقابل تقلیل به یک زیر فضای بسته از قلمرو خود دارد (بخاطر بیاورید که یک تابع پیوسته راکامل میگوئیم اگر تصویریک زیرمجموعه بسته ای ازقلمروآن ، یک مجموعه بسته باشد . ویک تابع برروی راغیرقابل تقلیل میگوئیم اگر تصویر هر فوق مجموعه ازقلمروش یک فوق مجموعه از بردش باشد) .

بسادگی معلوم میشودکه ادعای بالا اگر بفضاهای T_1 محدود شود بطورحقیقی معادل با اصل انتخاب است . فرض کنید که $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ یک فامیل از جفتهای مجزای غیرتهی از مجموعه های غیرتهی باشند . وبرای هر α فرض کنید X_α همان مجموعه S_α گر باشد با شرط اینکه توپولوژی Cofinite باشد (متمم مجموعه های منفرد ، تشکیل یک زیرپایه میدهند) وفرض کنید X اجتماع آزاد آنها باشد (فرضمیکنیم که تابع f از X به Y باشد) . اگرمجموعه اندیس Y ، توپولوژی منفصل باشد تابع $f:X\to Y$ که هر X_α رابسته ارثابت α میبرد ، یک گسترش کامل وبرروی است چون هر X_α یک مجموعه بسته ومحدود است .

هر فضای A منتج از X که f روی آن غیر قابل تقلیل است باید تقاطع هر X_α درمجموعه منفرد باشد (اگر بعضی از $X_\alpha\cap A$ دارای دونقطه می بود آنوقت A میتوانست بوسیله یک همسایگی باز A تقلیل یابد) بنابراین منتج بیک تابع انتخاب روی $\{X_\alpha\}$ میشود .

Gleason ازموجود بودن انحصار غیرقابل تقلیل استفاده میکند برای اثبات اینکه هاوزدورف

ا ـ " حاصلضرب خانواده غیرتهی ازمجموعه های غیرتهی " غیرتهی است

۲ ـ " اگر هرزنجیریک مجموعه مرتب پاره ای " کرانه بالائی داشته باشد ، سپس مجموعه دارای یک عنصر ماکزیمال میباشد .

بسته ومحدود وغیرهمبسته ، تصاویر میباشند . ملاحظه پاراگراف اخیر امید تجزیه موجود وموثر را ازبین میبرد . اگر بخواهیم وجود انحصار غیرقابل تقلیل را اثبات کنیم ، چون X_α تک نقطه ای ها و یافضاهای هاوزدورف هستند ، به اصل انتخاب متوسل میشویم . وهمچنین ممکن است سئوال پیش بیاید که آیا انحصار غیرقابل تقلیل برای گسترشهای کامل و برروی که منتج به اصل انتخاب میشوند برای فضاهای غیراز هاوزدورف وجود دارد یانه ؟ ماهمین سئوال را از دیگران داریم باذکر اینکه قضیه Tychonoff برای فضایای هاوزدورف معادل ایده های ابتدایی جبر بول است که کاملا" ادعای ضعیفتری است .



درباره اعداد توسعه‌یافته فیبوناچی

نوشته : M. D. Miller

ترجمه : هوشنگ اسماعیلی

درمطالعه اعداد توسعه یافته Fibonacci از رتبه $k>1$ که بوسیله شرط زیر تعریف شده است :

$$f^k(n)=\begin{cases}0 & n<k\\ 1 & n=k\\ \sum_{i=1}^{k} f^k(n-i) & n>k\end{cases}$$

لازم است که معادله چند جمله ای $X^k - X^{k-1} - \dots - X - 1 = 0$ را درنظربگیریم . که ما این معادله رامعادله‌مشخصه دنباله Fibonacci از رتبه k مینامیم . آقای E. P. Miles Jr. نشان داده است که ریشه های این‌معادله ازیکدیگر مجزا هستند و بعلاوه یکی از ریشه ها حقیقی است وبین ۱و۲ قرار دارد وبقیه $k-1$ ریشه ها درداخل دایره‌ی بشعاع ۱وبمرکز مبداء درصفحه اعداد مختلط قرار دارد . اواین اثبات راباتغییرشکل دادن این معادله انجام داد وسپس ازقضیه Rouch استفاده کرد مااین‌ادعا رااینجا فقط بـــــا نظریه های ابتدائی معادلات اثبات میکنیم .

قضیه : فرض کنید $f(z)=z^k - z^{k-1} - \dots - z - 1$ برای $k>1$. سپس

a) $f(z)$ دارای یک‌صفر z_0 است (یعنی $f(z_0)=0$) بطوریکه $1<z_0<2$

b) بقیه $k-1$ صفرهای $f(z)$ درداخل دایره ی واحد درصفحه اعداد مختلط قرار دارند

c) صفرهای‌تابع f ساده هستند

اثبات : فرض کنید ؛

$$g(z)=(z-1)f(z)=z^{k+1}-2z^k+1$$

بوسیله قانون دکارت* درمورد علائم ، تابع f فقط و فقط دارای یک صفرمثبت وحقیقی میباشد مثلا" $z=z_0$ ازآنجائیکه $f(1)<0$ و $f(2)=1$ ، ما می بینیم که باید $1<z_0<2$ باشد

(I) برای x های حقیقی $x>z_0$ داریم $f(x)>0$ وبرای $0<x<z_0$ داریم $f(x)<0$

(II) وهمچنین برای x های حقیقی داریم :

$$g(z)\begin{cases}>0 & x>z_0\\ <0 & z_0>x>1\end{cases}$$

ما می بینیم که $f(z)$ هیچ صفر مختلط ندارد (مثلا" z_1) بطوریکه $|z_1|>z_0$ زیرااگر $f(z_1)=0$ داریم

$$z_1^k = z_1^{k-1}+\dots+z_1+1 \Rightarrow$$
$$|z_1^k| = |z_1^{k-1}+\dots+z_1+1| \le |z_1^{k-1}|+\dots+|z_1|+1$$

اما این میگوید که $f(|z_1|)\le 0$ که بافرض (I) متناقض است .

وهمچنین می بینیم که هیچ صفر مختلطی ندارد (مانند z_2) بطوریکه $|z_2|<|z_0|$. برای اینکه اگر چنین z_2 وجود داشته باشد، داریم :

$$g(z_2)=f(z_2)=0 \quad , \quad 2z_2^k = z_2^{k+1}+1$$
$$|2z_2^k| = |z_2^{k+1}+1| \le |z_2^{k+1}|+1 \Rightarrow g(|z_2|)\ge 0$$

که این بافرض II بالا متناقض است .

حالا میگوئیم که f هیچ صفر مختلطی مانند z_3 ندارد بطوریکه $|z_3|=|z_0|$ ویا $|z_3|=1$

برای اینکه درغیرصورت ما داریم :

---

* " تعداد ریشه های مثبت $f(x)=0$ با ضرائب حقیقی، یا برابر تعداد تغییرعلائم ضرایب است یا عددزوجی کمتر ازآن وتعداد ریشه های منفی آن برابر تعداد تغییرعلائم ضرایب $f(-x)$ است یا تعداد زوجی کمتر ازآن " (مترجم)

درنامعادله فوق فقط وقتیکه Z_{μ}^{K+1} حقیقی است ، تساوی صورت میگیرد . پس نتیجه میگیریم که Z_{μ}^{K} و Z_{μ} نیز باید حقیقی باشند چون $q(Z_{\mu})=0$ میباشد بابکار بردن قانون دکارت برای $q(Z)$ مامی بینیم که $f(Z)$ فقط یك صفر حقیقی ومثبت دارد وبسته به زوج ویا فرد بودن K یك صفرحقیقی ومنفی نیز دارد ویاندارد . فرض کنید K زوج است مادارییم $f(0)=-1$ و $f(-1)=1$ پس هیچکدام از صفرهای f غیراز Z_0 دارای قدرمطلق Z_0 ویا ۱ نیستند وادعای ما صحیح است برای اثبات اینکه $f(Z)$ دارای صفرهای ساده است . فرض کنید که این ادعا صحیح نیست . پس $q(Z)$ هم دارای صفرهای تکراری است (صفرهای غیرمجزا) پس $q(Z)$ و $q'(Z)$ دارای صفرهای مشترکی هستند .

اماصفرهای $q'(Z)$ عبارتنداز $Z=0$ و $Z=\frac{2K}{2K+1}$ درصورتیکه تنهاریشه حقیقی وگویای $q(Z)$ عدد $Z=1$ میباشد .

((تعـــــریف ماتـــــریس))

ترجمه وتنظیم از: سعیـــــد قهرمانـــی

عمل دوتائی : تابع f ازمجموعه $S\times S$ رابه مجموعه S یك عمل دوتائی O روی مجموعه S مینامند . مثلا" اگر $P(A)$ مجموعه تمام زیرمجموعه های A باشد $\cap$ و $\cup$ و $(-)$ سه عمل دوتائی روی $P(A)$ میباشند .

سیستم ریاضی : مجموعه $K=\{S,O,A\}$ رایك سیستم ریاضی گویند که درآن S مجموعه است غیر تهی و O مجموعه ایست از روابط واعمال دوتائی روی S و A عبارتست از مجموعه ای از اصول که باید درمورد S و O صادق باشند برای مثال مجموعه اعداد حقیقی بادوعمل $+$و$\times$ یك سیستم ریاضی است که اصول پیانوبین این مجموعه ودو عمل تعریف شده وجود دارد .

نیم گروه : مجموعه ای غیرتهی است که بایك عمل $*$ دارای خاصیت انجمنی باشد کلکسیونی از مجموعه ها باعمل $\cap$ یك نیم گروه است زیرا :

$$(S\cap K)\cap F=S\cap(K\cap F)$$

گروه : $\{S,*\}$ گروه نامیده میشود اگر اولا" یك نیم گروه باشد ثانیا : در S یك عنصر e بتوان یافت بقسمی که بازاء هر $x\in S$ داشته باشیم :

$$x*e=e*x=x$$

ثالثا" برای هر $x\in S$ یك عنصر $a\in S$ بتوان یافت طوریکه :

$$a*x=x*a=e$$

e راعضوخنثی و x راعضومعکوس a مینامند . اگر $\{*,S\}$ خاصیت جابجائی داشته باشد به آن یك گروه جابجائی یا آبلی گویند .

مثال : مجموعه اعداد طبیعی باعمل + یك گروه نیست درصورتیکه مجموعه اعداد صحیح باعمل + یك گروه میباشد . این گروه آبلی است .

تعریف : هرگاه S یك مجموعه غیرتهی باشد و o دارای دوعمل $\square$ و $\circ$ ، میگوئیم $\{S, \circ, \square\}$ یك حلقه است اگر :

۱ــ $\{S, \circ\}$ یك‌گروه جابجائی باشد

۲ــ $\{S, \square\}$ یك نیم گروه باشد .

۳ــ خاصیت پخش پذیری موجود باشد یعنی :

$$a \square (b \circ c) = (a \square b) \circ (a \square c)$$

$$(b \circ c) \square a = (b \square a) \circ (c \square a)$$

مثال : مجموعه $S = \{x + y\sqrt{2} : x \in I, y \in I\}$ بادوعمل + و × یك حلقه است .

هیات : حلقه $\{S, \circ, \square\}$ راهیات گویند اگر $\{S, \square\}$ دارای عضو خنثی بوده وهرعضوآن جزعضوخنثی $\{S, \circ\}$ دارای معکوس باشد وهمچنین $\{S, \circ\}$ خاصیت جابجائی داشته باشد . برای مثال مجموعه زیر یك هیات است :

$$Q = \{ a/b \; ; \; a, b \in I \; , \; b \neq o \}$$

اعمال مجموعه + و ضرب میباشند .

فضای برداری چیست ؟ مجموعه ای‌مانند S رادرنظرمیگیریم با دوعمل + و .

(+ و . دراینجا دوعمل دلخواه هستندوبایستی با + و . معمولی اشتباه نشوند) این‌مجموعه تشکیل فضای برداری نسبت به‌هیات K میدهد اگر $\{S, +\}$ یك گروه جابجائی بود وباعمل ضرب خواص زیر صادق باشند

۱ــ به ازای $\forall y \in S$ و $\forall \lambda \in K$ داشته باشیم $\lambda y \in S$

۲ــ بازاء $\forall m, n \in K$ ، $\forall x \in S$ ،

$$(m + n) \circ x = m \circ x + n \circ x$$

۳ــ بازاء $\forall x, y \in S$ ، $\forall k \in K$

$$k \circ (x + y) = k \circ x + k \circ y$$

۴ــ بازاء $\forall x \in S$ ، $\forall l, k \in K$

$$l \circ (k \circ x) = (l \circ k) \circ x$$

۵ــ بازاء $\forall x \in S$ عنصر ۱ (یك) متعلق به K وجود داشته باشد بقسمی‌که $1 \circ x = X$

چند مثال : دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ بادوعمل زیرتعریف میشوند :

$$\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$$

$$\{\lambda a_n\} = \lambda \circ \{a_n\}$$

بادوعمل فوق مجموعه تمام دنباله هایك فضای برداری نسبت به هیات اعداد حقیقی تشکیل‌میدهند

مجموعه تمام توابع حقیقی راکه در فاصله $[o, 1]$ معین هستند درنظرمیگیریم این توابع بادوعمل زیریك فضای‌برداری نسبت به هیات اعداد حقیقی هستند :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \; , \; (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

مجموعه تمام بردارهایی‌که درفضا هستند ومبدأ آنهانقطه o میباشد یك فضای برداری نسبت به هیات محوریااعداد حقیقی میباشد .

مجموعه تمام چند جمله ایهائی که درجه آنها n بود وضرایب آنها مختلط با دوعمل $+$ و $\cdot$ معمولی یك فضای برداری نسبت به هیاتی است که چند جمله ای روی‌آن تعریف شده است .

گسترش خطی : تابع $T : U \to V$ راکه در آن U و V دوفضای برداری نسبت به

هیات k هستند یك گسترش خطی نامند اگر : بازاء هر x و $y \in V$ وهر عنصر α متعلق به هیات K داشته باشیم :

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(\alpha x) = \alpha T(x) \end{cases}$$

پایه : مجموعه تمام بردارهای مستقل خطی v_i ، $1 \leq i \leq n$ را پایه فضای برداری گویند اگر متعلق به فضای بردار V باشند .

قضیه : فرض کنید V و U در فضای برداری روی هیئت k باشند ودر U ، n بردار مستقل خطی $u_1, u_2, \ldots, u_n$ بتوان یافت حال فرض کنید y_1 و y_2 ، ... ، y_n بردارهای اختیاری فضای V باشند در اینصورت یك وفقط یك گسترش خطی میتوان یافت که از U به V بقسم زیر تعریف شده باشد :

$$T = U \longrightarrow V$$

$$T(u_1) = y_1 \quad T(u_2) = y_2, \ldots, \quad T(u_n) = y_n$$

همچنین هربردار X ازفضای V رامیتوان بشکل زیرنوشت :

$$X = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

که درآن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر متعلق به هیات k میباشند . و $v_1, v_2, \ldots, v_n$ بردارهای پایه هستند .

بعد فضا : η رابعد فضای V گویند اگر حداکثر n بردارمستقل خطی به آن تعلق داشته باشد .

مثال : بعد چند جمله ایهای درجه n ، $n+1$ خواهد بود یعنی بیش از $n+1$ چند جمله‌ای مستقل خطی نمیتوان یافت .

قضیه : فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ ، $(V, U$ دوفضای برداری درهیات k هستند) یك گسترش خطی باشد وبعد U ، n وبعد V ، m باشد هرگاه V_1 و V_2 و ... ، V_m یك پایه برای V و $u_1, u_2, \ldots, u_n$ یك پایه برای U باشند سپس فقط بیك طریق میتوان $T(u_i)$ رابصورت ترکیب خطی بردارهای V_1 تا V_m نوشت :

$$T(u_i) = t_i^{(1)} V_1 + t_i^{(2)} V_2 + \cdots + t_i^{(m)} V_m$$

$$, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

پس تمام $t_i^{(j)}$ $\begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, m \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$ ها منحصربفرد خواهند بود . این ضرایب در ریاضیات حائز اهمیت خاص میباشند ومجموعه آنها یك ماتریس m در n $(m \times n)$ نامیده میشود و باسمبل زیرنمایان میگردد .

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & \cdots & t_n^{(1)} \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & \cdots & t_n^{(2)} \\ \vdots & & & \\ t_1^{(m)} & t_2^{(m)} & \cdots & t_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

به ماتریس فوق یك ماتریس درهیات K نسبت به T وپایه های $\{u_i\}$ و $\{V_j\}$ گویند .

اگر به دیکی از فضاها یك باشد ماتریس به بردار سطری یاستونی تبدیل میشود . حال که تعریف ریاضی ماتریس ها بیان شد میتوانیم بسیاری ازخواص آنها راکه دیده ایم ثابت کرده وعلت تعریف اعمال روی ماتریس ها را شرح دهیم برای مثال ضرب یك عدد درماتریس وحاصلضرب دو ماتریس را توضیح میدهیم :

ضرب یك عدد در ماتریس : گفتیم T یك گسترش خطی است از U به V پس طبق تعریف $T(\alpha U_i)=\alpha T(U)$ بنابراین برای ضرب یك عدد در یك ماتریس کافیست آن عدد را در تمام عناصر ماتریس ضرب نمائیم .

حاصلضرب دو ماتریس : فرض کنید U و V و W سه فضای برداری باشند با ابعاد n و m و r روی هیأت k تعریف شده باشند وفرض کنید :

$$T: U \longrightarrow V$$
$$S: V \longrightarrow W$$

گسترش های خطی باشند اگر پایه های $\{U_i\}$ و $\{V_j\}$ و $\{W_k\}$ را در نظر گرفته فرض کنیم t ماتریس T نسبت به $\{U_i\}$ و $\{V_j\}$ وماتریس S نسبت به $\{V_j\}$ و $\{W_k\}$ و q ماتریس SoT (ترکیب دو تابع S و T) نسبت به $\{U_i\}$ و $\{W_k\}$ باشند سپس طبق تعریف :

$$T(U_i)=t_i^{(j)}V_j=t_i^{(1)}V_1+\cdots+t_i^{(m)}V_m$$
$$S(V_j)=S_j^{(k)}W_k=S_j^{(1)}W_1+\cdots+S_j^{(r)}W_r$$
$$SoT(U_i)=q_i^{(k)}W_k=q_i^{(1)}W_1+\cdots+q_i^{(r)}W_r$$

یا با استفاده از روابط فوق :

$$SoT(U_i)=S(t_i^{(j)}V_j)=t_i^{(j)}S(V_j)$$
$$SoT(U_i)=t_i^{(j)}S_j^{(k)}W_k$$

و یا

$$q_i^{(k)}=S_j^{(k)}t_i^{(j)}=S_1^{(k)}t_1^{(1)}+S_2^{(k)}t_2^{(2)}+\cdots+S_m^{(k)}t_i^{(m)}$$

رابطه فوق عناصر هرسطر ماتریس q نسبت به $SoT: U\to W$ و SoT پایه های $\{U_i\}$ و $\{W_k\}$

را میدهد . پس حاصلضرب دو ماتریس S و T طبق رابطه فوق بشرطی قابل تعریف است که اگر T $n\times m$ باشد S $m\times r$ بوده (m مشترك) ونتیجه این عمل ماتریس $r\times n$ باشد که عناصر هرسطر آن از رابطه فوق بدست میآیند بعنوان مثال در مورد ماتریسهای حقیقی :

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14\\3&2\\5&8\end{pmatrix}$$

ماتریسها در آمار و احتمالات و معادلات دیفرانسیل وهم چنین در شاخه های مختلف فیزیك مهندسی اقتصاد کاربرد فراوان دارند . علاقمندان میتوانند به کتابهای تئوری ماتریس ـ جبرخطی وروشهای ریاضی در فیزیك مراجعه کنند .

یك کـــــاربرد دتـــــرمینان

نوشته : هلن اسکالا

ترجمه : فروزان‌خرد پژوه

یك‌نمونه ساده وزیبای کاربرد تئوری دترمینان برای شاگردان مبتدی ادعای سیلوستراست که ذیلاً بیان میشود .

قضیـــــه معروف علم جبـــــر : فرض کنید K یك فیلد و $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$ و $g(x)=b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0$ دوچند جمله ای در $K[x]$ باشد $a_m\neq 0\neq b_n$ دراینصورت $f(x)$ و $g(x)$ فاکتور غیرثابتی در $K[x]$ خواهند داشت اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس $(m+n)\times(m+n)$ زیر برابرصفر باشـــد .

$$A=\begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_m & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & 0\\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & & & a_0\\ 0 & b_n & \cdots & & & & b_0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & & & & & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

ما اثبات ساده ای ازاین قضیه که فقط احتیاج بدانستن این حقیقت دارد که دترمینـــــان حاصلضرب دوماتریس برابر حاصلضرب دترمینانها استبدون استفاده ازمعادلات خطی عرضـــه میکنیم .

فرض کنیـــد :

$$B=\begin{bmatrix} x^{n+m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x^{n+m-2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ x^{n+m-3} & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین : $|B|=x^{n+m-1}$ و

$$|AB|=|A|\,x^{n+m-1}=\begin{vmatrix} x^{n-1}f(x) & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & 0\\ x^{n-2}f(x) & a_m & a_{m-1} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f(x) & & & & a_0\\ x^{m-1}g(x) & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ g(x) & & & & b_0 \end{vmatrix}$$

$$=f(x)\,h(x)+g(x)\,k(x)$$

که نتیجه فوق بوسیله بسط $|AB|$ برحسب ستون اول بدست‌آمده و $h(x)$ و $k(x)$ بترتیـــب چند جمله ایهای حداکثر ازدرجه $n-1$ و $m-1$ در $K[x]$ میباشند حال اگر $f(x)$ و $g(x)$ دارای فاکتور غیرثابت $r(x)$ باشند داریم :

$$|A|x^{n+m-1}=f(x)\,h(x)+g(x)\,k(x)=r(x)\,q(x)$$

اگر $q(x)=0$ بنابراین واضح است که $|A|=0$ واگر $q(x)\neq 0$ باشد چون $r(x)$ مضرب توانی از x است . وفاکتور مشترك $f(x)$ و $g(x)$ نیزمیباشد درنتیجه مقادیر a_0 و b_0 هردو باید صفربشوند وچون ستون آخر دترمینان A شامل فقط a_0 و b_0 است درنتیجه $|A|=0$

خواهد شد . بالعکس . فرض کنید $|A| \neq 0$ است بنابراین داریم :

$f(x)h(x) = -g(x)k(x)$ ، باتبدیل کردن دوطرف این تساوی بحاصلضرب عوامل اول روی K ، باید فاکتورهای یکسان بدست آوریم چون $g(x)$ و $k(x)$ باید برتمام فاکتورهای $f(x)$ قابل قسمت باشند اماچون $k(x)$ حداکثرازدرجه $m-1$ است بنابراین $k(x)$ برتمام فاکتورهای $f(x)$ قابل قسمت نیست بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ دارای فاکتور مشترک میباشند .

" فاصله‌همگرائی بعضی‌ازسریهای توانی "

دراین یاداشت ، ما شعاع کامل همگرائی رابرای‌بعضی از بسطهای ماك لورن بوسیله روشهای سودمند ومناسب برای شاگردان سال اول درس حساب دیفرانسیل استنتاج میکنیم .

ما بوسیله طرح این اثبات که اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $a_0 = 1$ و $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \lambda^i| < 1$ باشد برای $\lambda > 0$ ، دراین صورت بسط ماك لورن $1/f(x)$ دارای شعاع همگرائی حداقل λ است شروع میکنیم . چنانچه $0 \leq |x| \leq \lambda$ باشد دراین صورت $f(x) > 0$ و

$$\log[f(x)] = \log\{1 - [1 - f(x)]\} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[1-f(x)]^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right)^n$$

این سری دوبله برای $|x| \leq \lambda$ همگرا میباشد بنابراین جمله های آن قابل تغییر به سری توانی $\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$ که برای $|x| \leq \lambda$ به $\log f(x)$ همگراست‌میباشند .

درنتیجه :

$$\frac{1}{f(x)} = e^{-\log f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\right)^n$$

که‌میتوان آنرا بصورت سری توانی از x نیز نوشت که برای $|x| \leq \lambda$ همگراست این سری توانی بسط ماك لورن $\frac{1}{f(x)}$ است ودراین‌صورت شعاع همگرائی آن حداقل λ میباشد . فاصله همگرائی

این‌تابع که بررسی شد ازاین پس‌به ρ نمایش داده میشود .

قضیه ۱ : فاصله همگرائی برای $\sec x$ برابر $\rho = \frac{1}{2}\pi$ است .

اثبات : چون $\sec \frac{1}{2}\pi = \infty$ پس‌واضح است که $\rho < \frac{1}{2}\pi$ میباشد درزیر ما احتیاج داریم بدانستن اینکه ضرایب بسط ماك لورن $\sec x$ مثبتند . برای فهم این موضوع بوسیله استقراء نشان‌میدهیم که‌مشتق n ام $\sec x$ برابر با $\sec x$ ضرب درچند جمله ای $P_n(\operatorname{tg} x)$ باضرائب مثبت میباشد ، درحقیقت $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$ واگر فرض کنیم $\frac{d^n}{dx^n}\sec x = \sec x \cdot P_n(\operatorname{tg} x)$ دراین صورت :

$$\frac{d^{n+1}\sec x}{dx^{n+1}} = \sec x\left[P_n'(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}^2 x + 1) + P_n(\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} x\right] = \sec x \cdot P_{n+1}(\operatorname{tg} x)$$

که P_{n+1} یک چند جمله ای باضرائب مثبت است

حال

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\sec^2(\frac{1}{2}x)}{1 - 2\sec^2(\frac{1}{2}x)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2(\tfrac{1}{2}x)\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\sec^2(\tfrac{1}{2}x)\right]^m$$

که تساوی آخری اگر $\frac{1}{2}\sec^2(\frac{1}{2}x) < 1$ باشد معتبراست که نتیجه میشود $\frac{1}{2}x < \frac{1}{4}\pi$ مجموع آخری میتواند بصورت جمع دوبله برحسب بسط $\sec(\frac{1}{2}x)$ نوشته شود وچون این‌بسط جمله‌منفی ندارد پس تمام عبارت سمت راست سری توانی از $\frac{1}{2}x$ میباشد . برای اعتبار بسط سکانت باید $\frac{1}{2}x < \lambda$ یا $x < 2\lambda$ که $\lambda < \frac{1}{2}\pi$ است بنابراین $\rho = \frac{1}{2}\pi$

قضیه ۲ : فاصله همگرائی $\operatorname{tg} x$ و $\operatorname{sech} x$ برابر $\rho = \frac{1}{2}\pi$ است واین واضح است زیرا $\operatorname{tg} x = \sin x \sec x$ و $\operatorname{sech} x = \sec ix$

قضیه ۳ : فاصله همگرائی $x/\sin x$ برابر $\rho = \pi$ است .

اثبات : چون $\sinh x = 2\sinh(\frac{1}{2}x)\cosh(\frac{1}{2}x)$ است

نتیجه میشود که

$$\frac{x}{\sinh x} = \operatorname{sech}(\tfrac{1}{2}x)\frac{\frac{1}{2}x}{\sinh(\frac{1}{2}x)}$$

نظریاتی جدید در روشهای اندازه‌گیری خطا

نوشته: P. Prescott
ترجمه: فروزان خردپژوه

مقاله جدیدی درباره روشهائی در اندازه گیری خطا توسط دکتراسکات بیان شده است که درکار کردن با داده هائی که باید رُند شوند تاثیر بسزائی دارد.

(Mathematics teaching 52, Autumn 1970)

دوفرمول یکی برای خطا درمورد حاصلضرب AB ودیگری برای خارج قسمت A/B (وقتی که A و B هردو باید رُند شوند) بیان میشود وازدونامساوی یکی برای قدرمطلق خطادرجمع وتفریق داده‌ها ودیگری برای خطای نسبی درحاصلضرب تقسیم داده هااستفاده میشود. فرمولهای حاصله در حقیقت تقریبی برای خطای ماکزیمم در AB ویا A/B است وممکن است به سادگی از روش زیـــــر بدست آیـــــد:

فرض کنید که A و B مقادیری باشند که باید رُند شوند درصورتیکه مقادیر اصلی ونامعلوم آنها A_0 و B_0 باشد وتفاوتشان با A و B بترتیب برابر باشد با $x10^{-a}$ و $y10^{-b}$ یعنی

$$A = A_0 + x10^{-a}$$
$$B = B_0 + y10^{-b}$$

که x و y خطاهای مربوط به رُند کردن بوده وبین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ میتوانند تغییربکنند. پس حاصلضرب را به صورت زیرمیتوان نوشت:

$$AB = (A_0 + x10^{-a})(B_0 + y10^{-b})$$
$$= A_0B_0 + B_0x10^{-a} + A_0y10^{-b} + xy10^{-a-b}$$

و خطای دقیق ولی نامعلوم برابراست با:

$$E = B_0x10^{-a} + A_0y10^{-b} + xy10^{-a-b}$$

با نادیده گرفتن $xy10^{-a-b}$ ونیز جایگزین A_0 و B_0 بترتیب با A و B مقدارخطا برابرخواهد شد با:

$$E = Bx10^{-a} + Ay10^{-b}$$

وماکزیمم مقدارخطاوقتی بوجود میاید که $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ باشد ومقدارش برابراست با:

$$E_{max} = \frac{1}{2}(B10^{-a} + A10^{-b})$$

حال کسر A/B رادرنظربگیرید خواهیم داشت:

$$A/B = \frac{A_0 + x10^{-a}}{B_0 + y10^{-b}} =$$
$$= \frac{A_0}{B_0}\left(1 + \frac{x10^{-a}}{A_0}\right)\left(1 + \frac{y10^{-b}}{B_0}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{A_0}{B_0}\left(1 + \frac{x10^{-a}}{A_0} - \frac{y10^{-b}}{B_0} + \cdots\right)$$

اینبار هم با نادیده گرفتن جملاتی که دارای توان دوم به بالا هستند ونیز جایگزینی A_0 و B_0 به ترتیب با A و B خطای A/B برابرخواهد شد با:

$$E = \frac{Bx10^{-a} - Ay10^{-b}}{B^2}$$

وماکزیمم مقدار خطا وقتی است که $x=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ باشد ومقدارش برابراست با:

$$E_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{B10^{-a} + A10^{-b}}{B^2}\right)$$

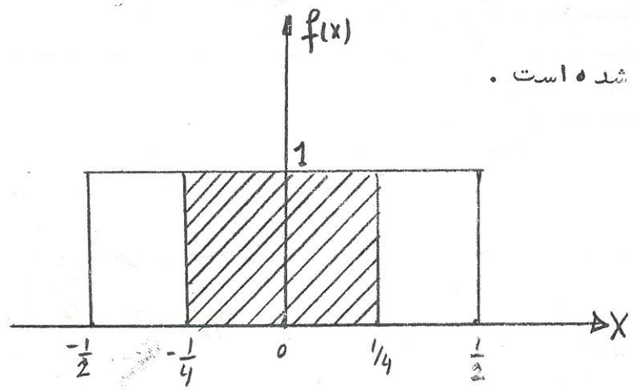
هردونمایشی که برای خطا بدست آوردیم ترکیب خطی از x و y میباشند وبدیهی است که خطا در AB وقتی ماکزیمم میشود که x و y هردونزدیک مقادیرماکزیمم خود باشند. حال اگـــــر

x و y کوچك باشند ویا اینکه تقریبا مساوی ومختلف العلامه باشند ویا به عبارت دیگر احتمال اینکه در یك فاصله کوچك خطا در نزدیکی ماکزیمم مقدارش باشد ، خیلی کمتر است از احتمال اینکه در همان فاصله خطا نزدیك صفر باشد . گرچه دانستن اینکه ماکزیمم مقدار خطا چیست مفید میباشد ولی اگر ایده ای از توزیع خطا داشته باشیم خیلی مهمتر است .

بعنوان مثال فرض کنیم که خطای رُند کردن x دارای توزیعی یکنواخت در فاصله $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ باشد در این صورت تابع چگالی آن یعنی $f(x)$ چنین خواهد شد .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{Elsewhere} \end{cases}$$

که در شکل (1) نمایش داده شده است .



سطح هاشورزده واحتمال اینکه خطای رند کردن x در فاصله $-\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{4}$ باشد نشان میدهد وبرابر $\frac{1}{2}$ است .

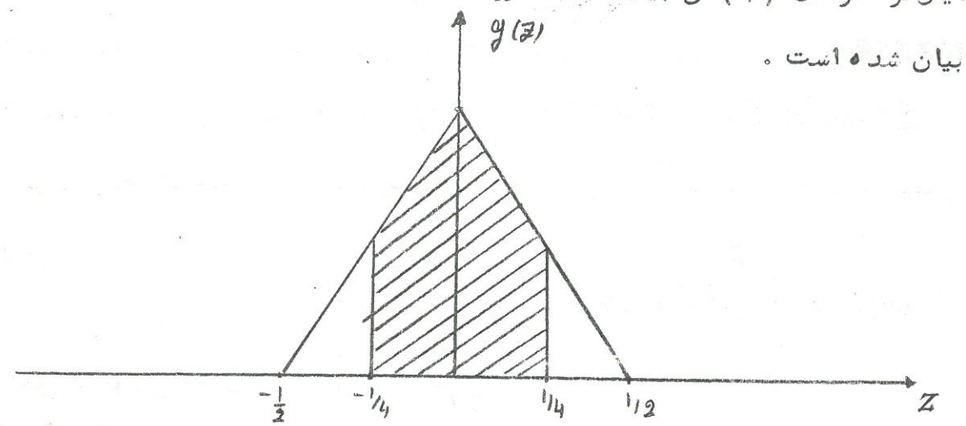
حال فرض کنیم که x_1 و x_2 دو مشاهده از خطای رند کردن با توزیع فوق باشد ، خطای میانگین دو مشاهده عبارت است از:

$$z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

وتابع چگالی z به این صورت است :

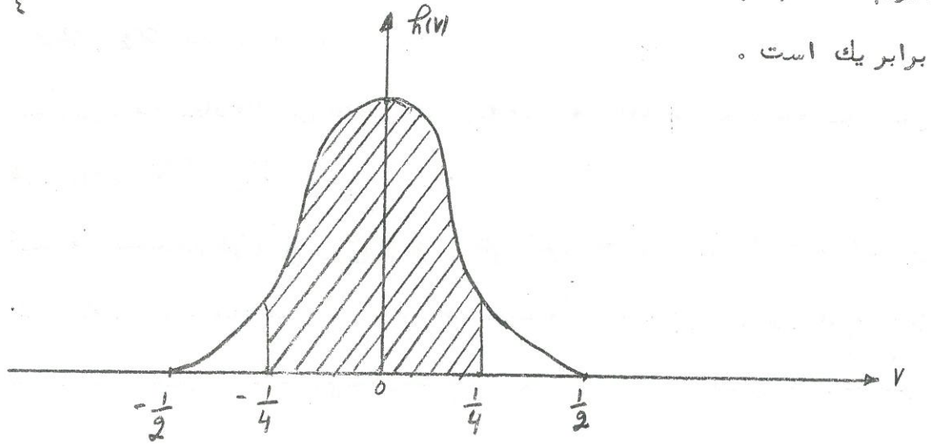
$$g(z) = \begin{cases} 2(1+2z) & -\frac{1}{2} \leq z \leq 0 \\ 2(1-2z) & 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

که نمایش آنرا در شکل (٢) می بینید . یك تئوری که برای اثبات این قسمت لازم است در کتابهای آمار بیان شده است .



در این شکل نیز سطح هاشور زده احتمال این را که خطای رُند کردن در فاصله $-\frac{1}{4} < z \leq \frac{1}{4}$ باشد ، نشان میدهد وبرابر $\frac{3}{4}$ میباشد .

حال اگر میانگین چهار مشاهده از خطای رُند کردن را که دارای تابع چگالی $h(v)$ باشد ، در نظر بگیریم شکل (٣) بدست میآید و در این حالت احتمال اینکه قدر مطلق خطا کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد تقریبا" برابر یك است .



در کلیه این حالات ماکزیمم خطا برابر $\frac{1}{2}$ است ولی هر چه تعداد مشاهده زیاد ترشود توابع توزیع باریکتر میشوند . حتی باچهار مشاهده هم میشود توزیع احتمال فوق را باجدول توزیع نرمال تقریب زد .

واضح استکه دانستن ماکزیمم خطابه‌تنهائی کافی نیست بلکه به اندازه تغییرات در خطا نیز احتیاج داریم . معمولی ترین اندازه از گسترش یك توزیع ، واریانس (Variance) آن توزیع بوده وجذرآن راانحراف معیارگوئیم (Standarddeviation)

برای توزیع یکنواخت خطای رند کردن درفاصله $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ واریانس به صورت زیرتعریف میشود

$$Var(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} x^2 f(x)dx = \frac{1}{12}$$

پس انحراف معیار خطای رند کردن $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ میشود .

دوقانون مهم برای واریانس وجود دارد که عبارتند از :

i) $Var(cx) = c^2 Var(x)$ ، $c =$ مقداری ثابت

ii) $Var(x_1+x_2) = Var(x_1) + Var(x_2)$

وقتی که x_1 و x_2 مستقل باشند.

شاید بهترین راه استفاده ازاین قوانین وتیزاینکه فقط به خطای ماکزیمم توجه کنیم ، شرح مثال ساده زیر باشد .

فرض کنید که هفت جسم A و B و C و D و E و F و G دراختیار است که باید وزن شوند ازیك ترازو که دارای دوکفه میباشد استفاده میکنیم‌ونیزمیدانیم که هرترازو وزن هر جسم رابا نزدیکترین عدد صحیح برحسب گرم نشان‌میدهد . برای انجام این عمل روشهای‌مختلفی وجود

دارد وسئوال اینست که بهترین روش کدام است ؟

روش ۱ ساده‌ترین راه اینست که هرجسم راجداگانه‌وزن کنیم ، دراین صورت ماکزیمم خطا برابر $\frac{1}{2}$ است وانحراف معیار این توزیع همانگونه‌که حساب کردیم برابر $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ویا 0,2886 گرم میباشد .

روش ۲ اجسام را درگروه های‌چهارتایی توزین‌کرده وخواهیم داشت :

$$W_1 = A_0 + B_0 + C_0 + E_0 + x_1$$
$$W_2 = B_0 + C_0 + D_0 + F_0 + x_2$$
$$W_3 = C_0 + D_0 + F_0 + G_0 + x_3$$
$$W_4 = A_0 + D_0 + E_0 + F_0 + x_4$$
$$W_5 = B_0 + E_0 + F_0 + G_0 + x_5$$
$$W_6 = A_0 + C_0 + F_0 + G_0 + x_6$$
$$W_7 = A_0 + B_0 + D_0 + G_0 + x_7$$

درحالیکه A_0 و B_0 و ... G_0 اوزان حقیقی اجسام A و B و ... G میباشد و x_1 و x_2 و ... x_7 خطاهای توزین درهر مرحله است .

این معادلات رامیشود طوری مرتب کرد که A_0 بدست آید :

$$A_0 = \frac{1}{4}(W_1 + W_4 + W_6 + W_7 - W_2 - W_3 - W_5) + Z$$
$$Z = \frac{1}{4}(x_1 + x_4 + x_6 + x_7 - x_2 - x_3 - x_5)$$

برای B_0 ، C_0 ، .... G_0 نیزبه طور مشابه عمل خواهد شد . Z ترکیب خطای خطاهای اولیه بوده وماکزیمم مقدارش $\frac{1}{4} \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ میباشد که تقریبا" دو برابرخطای

ماکزیمم د و روش قبلی است وشاید باعث شود که روش ۱ را ترجیح د هیم . بهرحال اگر واریانس Z رامحاسبه‌کنیم خواهیم د اشت .

$$Var(Z) = \frac{1}{16}\left[Var(x_1) + Var(x_4) + Var(x_6) + Var(x_7) - Var(x_2) - Var(x_3) - Var(x_5)\right] = \frac{1}{16} \times 7 \times \frac{1}{12} = 0.0364$$

$(0.0364)^{\frac{1}{2}} = 0.19092$ تابع توزیع Z تقریبا" نرمال بود وانحراف معیارآن میباشد . جدول ۱ احتمال اینکه قدرمطلق خطا بیشتر از $\frac{3}{8}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ گرم باشد برای هرد وروش نشا ن مید هد .

قدرمطلق خطا بیشتراز	روش ۱	روش ۲
$\frac{3}{8}$ گرم	0.25	0.05
$\frac{1}{4}$ گرم	0.50	0.19
$\frac{1}{8}$ گرم	0.75	0.51

د راین جد ول مشاهد ه‌میکنیم که احتمال اینکه قدرمطلق خطا بیشتراز $\frac{3}{8}$ باشد درروش ۱ پنج برابر روش ۲ است .

روشهای‌گوناگون د یگری برای توزین وجود دارد که این احتمال ها را بازهم کوچکتر میکند . بد ین‌منظورد وروش د یگر ذ کر میکنیم .

روش ۳ ازهرد وکفه استفاد ه‌کرد ه و مثل روش ۲ چهار جسم را د ریك کفه وسه جسم باقیمانده را د رکفه د یگر ترازو قرارمید هیم وچنین بد ست میآوریم .

$$W_1' = A_0 + B_0 + C_0 + E_0 - D - F_0 - G_0 + X_1'$$
$$W_2' = B_0 + C_0 + D_0 + F_0 - A_0 - E_0 - G_0 + X_2'$$
$$W_3' = C_0 + D_0 + E_0 + G_0 - A_0 - B_0 - F_0 + X_3'$$
$$W_4' = A_0 + D_1 + E_0 + F_0 - B_0 - C_0 - G_0 + X_4'$$
$$W_5' = B_0 + E_0 + F_1 + G_0 - A_0 - C_0 - D_0 + X_5'$$
$$W_6' = A_0 + C_0 + F_0 + G_0 - B_0 - D_0 - E_0 + X_6'$$
$$W_7' = A_0 + B_0 + D_1 + G_0 - C_0 - E_0 - F_0 + X_7'$$

واین‌معادلات راگر مرتب کنیم برای A_0 خواهیم د اشت

$$A_0 = \frac{1}{4}(W_1' + W_4' + W_6' + W_7') + Z'$$
$$Z' = 1/4\,(X_1' + X_4' + X_6' + X_7')$$

برای این روش انحراف معیار خطا برای Z' برابر :

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} = 0.1443$$

بود ه که نصف انحراف معیار د ر روش ۱ است

روش ٤ نوعی توزین ممکن د یگر که تکمیل کنند ه روش ۳ میباشد ، اینست که وزن هفت جسم رانیز یکبار باهم اند ازه گیری میکنیم یعنی علاوه برهفت معادله روش ۳ معادله هشتمی :

$$W_8' = A_0 + B_0 + C_0 + D_0 + E_0 + F_0 + G_0 + X_8'$$

نیزخواهیم د اشت واگر A_0 رابد ست‌آوریم خواهد شد .

$$A_0 = \frac{1}{8}(W_1' + W_4' + W_6' + W_7' + W_5' - W_2' - W_3' - W_5') + Z''$$

$$Z'' = \frac{1}{8}(X_1' + X_4' + X_6' + X_7' + X_5' - X_2' - X_3' - X_5')$$

که در این حالت انحراف معیار Z'' برابر : $\frac{1}{4\sqrt{6}} = 0.1021$

میباشد .

جدول ۲ احتمال اینکه قدرمطلق خطا بیش از $\frac{3}{8}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ باشد برای روشهای اخیر نشان میدهد .

قدرمطلق خطا بیشتر از	روش ۳	روش ٤
3/8	0.01	0.002
1/4	0.68	0.015
1/8	0.40	0.22

ماکزیمم خطا برای هر دو روش ۳ و ٤ مثل روش ۱ برابر $\frac{1}{4}$ است ولی احتمالهای بدست آمده خیلی باهم فرق دارند . واضح است که در این مثال ساده احتمال خطا به نحو عجیبی با تغییر روش مناسب کم میشود دیگر اینکه ماکزیمم خطا کاملا" ممکن است فرد راهنگام گرفتن تصمیم دچار اشتباه سازد .

مسائل

مسائل زیر برای علاقه‌مندان بحل مسائل ریاضی ارائه میشود . راه حل دوستانی را که حل مسائل را برای ما به آدرس دانشگاه آریامهر ـ دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر ، مربوط بمسائل الگوریتم ارسال نمایند به اسم خودشان چاپ میکنیم .

دو مساله ۱ و ۲ اوراه حل آنها توسط خانم الیزابت ابراهیم زاده ارائه شده اند که بدین وسیله از ایشان تشکر میکنیم .

۱ـ فرض کنید پنج نقطه در صفحه چنان موجودند که هیچ سه تائی از آنان بریك خط وهیچ چهارتائی از آنان بریك دایره نیست . ثابت کنید دایره ای برسه تا از نقاط چنان میتوان مرور داد که یکی از نقاط باقیمانده در داخل دایره ودیگری برخارج آن واقع شود .

۲ـ فرض کنید a عدد صحیح مثبتی است ، و $\pi = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$ ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت n عدد صحیح ومثبت a_n موجود است بطوریکه :

$$\pi^{2n} + \pi^{-2n} = 4a_n + 2$$

$$\pi^n = \sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_n}$$

۳ـ فرض کنید ۹ نقطه داخل مربع واحدی موجود باشد . ثابت کنید مثلثی وجود دارد که سطح آن کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{8}$ بوده ورئوس آن ۳ نقطه از ۹ نقطه مفروض میباشد .

٤ـ $2n + 3$ نقطه در صفحه مفروضند که هیچ سه تائی بریك خط و هیچ چهارتائی بریك دایره نیست آیا دایره ای میتوان رسم نمود که برسه نقطه ازاین نقاط بگذرد و n نقطه ازنقاط باقی در داخل دایره و n تای دیگر برخارج آن واقع باشند ؟ ثابت کنید .

۵ـ فرض کنید ماشینی وجود دارد که ۵۲ کارت بازی را با روش ثابتی برمیزند . ماکزیمم تعداد برهائی که میتواند قبل از برگشت دسته کارتها بحالت اولیه رخ دهد چیست ؟

٦— ثابت کنید اگر $-1 < \alpha < 0$ باشد پس :

$$\binom{2\alpha}{2n} \geq (2n+1)\binom{\alpha}{n}^2 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

درحالیکه اگر $\alpha < -1$ باشد نامساوی برگردانده میشود .

٧— فرض کنید G یک نیمگروه است با این خاصیت که اگر $\alpha \in G$ باشد عنصر منحصربفرد $\alpha^* \in G$ موجود است بطوریکه $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$. ثابت کنید G یک گروه است.

٨— فرض کنید $u(x)$ و $v(x)$ تعریف شده اند بطوریکه :

$$n \geq 2 \qquad \{u(x)\}^n + \{v(x)\}^n = 1 \quad , \quad u(0) = 0, \; v(0) = 0$$

$$\frac{du(x)}{dx} = v(x)$$

$u(x+y)$ را برحسب $u(x)$ ، $u(y)$ ، $v(x)$ ، $v(y)$ حساب کنید .

٩— همهٔ چند جمله ایهای $P(x,y)$ را با خواص صحیح بطوریکه :

$$P(x,y) = P(x+1, y+1)$$

باشد ، پیدا کنید .

١٠— کوچکترین گروه با رتبه محدود را پیدا کنید که دارای هیچ زیرگروه بااندیس اول نباشد .

١١— تابع f روی R' تعریف شده است نقاط پیوستگی آن را پیدا کنید .

$$\begin{cases} x & x \in \text{مجموعه اعداد اصم} \\ p \sin \frac{1}{q} \; , \; x = \frac{p}{q} & \text{گسرتحویل ناپذیر} \end{cases}$$

١٢— f_n دنباله‌ای از توابع غیرمنفی است که روی R' تعریف شده اند . بطوریکه :

$$f_n \to f \text{ a.e.} \quad , \quad \int f_n \to \int f < \infty$$

ثابت کنید برای هرمجموعه اندازه پذیر E داریم :

$$\int_E f_n \to \int_E f$$



" تبـــــرز در دانشگاه آریامهر

تهیـــه وتنظیم : فروزان خـــــــرد پـــــژوه

مابعنوان دانشجویان این دانشگاه خوشوقت میشویم موقعیکه می بینیم دانشگاه جوان ما پیوسته درصدد بالا بردن کیفیت آموزشی وتعلیم وتربیت میباشد وتجربه وآزمایش در روشهای مختلف تعلیموتربیت راتشویق میکند . سیستمهای تدریس سنتی درایران وسایرکشورها تاکنون نتوانسته است علاقه دانشجو رانسبت به یادگیری وپژوهش افزایش دهد ویکی ازنتایج سیستم فعلی تبدیل دانشجو به " دانشنامه جو " بوده است .

شکی نیست که بهترین روش انتقال معلومات تدریس اختصاصی وبرقراری رابطه مستقیم بین استاد ودانشجو میباشد ولی این روش به علت شیوع تعلیمات اجتماعی ازبین رفته وجای خود رابـــه سخنرانی استاد واستفاده ازکتاب داده است . درسیستم سنتی کلیه دانشجویان ازنظرهـــوش واستعداد نزد استاد یکسان فرض شده ودرحقیقت نام دانشجو به یك شماره کامپیوتر تبدیل شده است وباپذیرش روزافزون دانشجو به دانشگاهها وموسسات آموزش عالی این حالت روز به روزبغرنج تر میشود . ازدیگر مشکلات دانشگاهی مساله اشتغال استاد ودانشجو است ، درحالیکه استاد مشغول تحقیق وتالیف وسخنرانی میباشد دانشجو گریبانگیرش یا هفت درس مختلف وفعالیتهای غیردرسی و مشکلات مالی وغیره میباشد ، لذا جای تعجب نیست که وقتی این دو بهم میرسند جزصحبت درمورد امتحانات ونمرات نمیتوانند ارتباط دیگری برقرار نمایند .

آیا دانشجو برای فهم سخنرانی آمادگی لازم را دارد ؟ وآیا استاد برای ایراد سخنرانـــی آماده شده است یانه ؟ جواب این سئوالات اغلب منفی است یعنی به علت مشغله زیاد دانشجـو آمادگی قبلی را نداشته وازنظر روحی نیزممکن است درساعت مورد نظر وضع مساعدی نداشته باشد و استاد هم اغلب بعلت سئوالات پیش بینی نشده جلسه سخنرانی رابه جلسه اتلاف وقت تبدیـــل

میکند واین موضوع حتی درمورد بهترین استادان نیز اتفاق میافتد .

بنظر میرسد که درسیستم سنتی موثرترین منبع فراگیری کتابهای درسی است . کتابهـــای درسی نیزعاری ازنقایص نیستند . ازجمله اینکه اکثرکتب توسط یك یا دونفر تالیف شده است ومطالب آن معمولا تحت تاثیر علاقه وطرزفکر خاص مولفین مربوطه تهیه میگردد . دراکثر موارد ازیك کتاب برای تدریس دانشجویان در رشته های مختلف استفاده میشود وتحمیل کردن یك کتاب درسی برای دانشجویان رشته های مختلف مانند آنست که برای بانك ومدرسه ومنزل وکارخانه ازیـــك ساختمان استفاده شود .

یکی ازبرنامه های آموزشی که دراین دانشگاه توسط دکتر وحیدی از دانشکده ریاضـی و علوم کامپیوتر این دانشگاه پیاده شده است تدریس درس ریاضیات عمومی دو (رعد) بوسیـــله لابراتوار سمعی وبصری میباشد . درنیمسال جاری این درس ۱۰۵ نفر دانشجو پذیرفتـــه است . این درس بصورت ۸۰ جلسه سخنرانی ضبط شده روی نوار ضبط صوت همراه خود آمـوز میباشد که هر جلسه درحدود بیست دقیقه طول میکشد ، تهیه شده است ودانشجوموظف است که درهرهفته درحدود هشت جلسه رافراگیرد ، البته اوآزاد است که درهرساعت روزکه درخـــود آمادگی فراگیری می بیند به جلسات سخنرانی گوش دهد . مطالب درس نیزطوری تهیه شـــده است که درچنین سخنرانی ازدانشجو سئوالاتی میشود که اوابتدا خود به سئوالات جواب داده و سپس آنرا باجواب صحیح که گفته میشود مقایسه میکند ، برای رفع اشکال دانشجویان همیشه یکنفـر بعنوان کارشناس (که معمولا ازبین دانشجویان سالهای بالا انتخاب میشوند) آماده است واین خود کمك بزرگی برای دانشجویان است زیرا اغلب دانشجویان بنا به عللی ازمراجعه مکرر بـــه استاد خودداری میکنند دانشجوآزاد است که یك جلسه را هرچند بار که بخواهد گوش دهد . این درس درنیمسال گذشته نیز با ۳۲ داوطلب تدریس شد وراندمان فراگیری بقدری زیاد بود که مقدار درس ازنظرکمیت براحتی ۵۰ درصد افزایش یافت بااین حال درس حدود چهار هفته زودتر از

سایرگروهها بپایان رسید واین امر با رضایت دانشجویان مواجه شد زیرابه آنان فرصت داد که به سایر دروس خود بپردازند ونکته قابل توجه اینکه دانشجویان ازافزایش مقدار درس ناراضی نبودند وخود نشانه این بود که کلاس مزبور توانسته‌بود علاقه واعتماد دانشجویان راجلب کند .

ذیلا نظر یکی ازدانشجویان درمورد درس رعد گنجانده شده است ونمونه ای از ارزیابی این درس توسط خود دانشجویان میباشد .

" روش این درس بسیارخوب بود ،اصولا اگراجباری درکار نباشد کارهابهترانجام میشود . دراین درس رابطه استاد ودانشجو ازحد کلاس فراتر رفت واستاد توانست بامحول کردن قسمتی ازوظایف خود به وسایل آموزشی تماس بیشتری بادانشجو برقرارنماید دربحث ورسیدگی به مشکلات کلی تر دانشجو بپردازد وقت دانشجو بامیزان علاقه ودقت اوتنظیم میشد وبهمین دلیل امکان پیشروی در درس بیشتر بود . "

آنچه که نیمسال گذشته نشان داد حاکی ازموفقیت آمیز بودن درس فوق بود تانتیجه این نیمسال چه باشد ؟

روش این نوع تدریس براساس روشی است که بنام تدریس برنامه ریزی شده (تبر) نامیده شده است . دراین روش وظایف استاد وآسیستانهای درس بکلی تغییرکرده است . وظیفه استاد درس مدیریت ونظارت براجرای برنامه درسی ورفع مشکلات آن وطرح امتحاناتی درمراحل مختلف درس برای سنجش پیشرفت دانشجویان است . آسیستانها که درحقیقت همان کارشناسان هستند درتماس مستقیم بادانشجو بوده وقسمتی ازمشکلات وی راحل میکند ودرصورت لزوم ازاستاد درس راهنمائی های لازم رامیگیرد .

درسیستم تبر ازوسایل آموزشی ازقبیل تلویزیون ،دستگاه ضبط تصویر ،دستگاه ضبط صوت وفیلم ،صفحه ،ماشینهای محاسبه الکترونیکی ماشینهای تعلیماتی ومطالعه چاپی استفاده خواهد

شد ،این وسایل قدرت تولیدی استاد را افزایش خواهند داد . البته واضح است که درتدریس کلیه دروس ازتمام وسایل فوق استفاده نمیشود بلکه بسته به نوع درس وسیله لازم انتخاب میگردد مثلا برای تدریس جبر استفاده از ضبط صوت مطالعه چاپی کافیست در صورتیکه بهترین وسیله برای تدریس شیمی استفاده ازتلویزیون وفیلم میباشد .

درسیستم تبر ابتدا ازدانشجو آزمایشی بعمل میآید تاآمادگی وی ارزیابی گردد سپس یک قسمت مناسب از درس دراختیار وی گذاشته میشود . درصورتیکه دانشجو اشکالاتی درفراگیری داشته باشد آنرا بکمک کارشناسان رفع کرده وبدرس ادامه میدهد . درصورتیکه کارشناس نتواند به‌تنهائی مشکل وی راحل کند ازمدیر سیستم کمک میگیرد . وبدین ترتیب دانشجوقسمتهای مختلف درس را پس ازدیگری باموفقیت بپایان میرسانند .

دراین سیستم آموزش گروهی به اختصاصی تبدیل شده واندمان فراگیری دانشجو ونیز قدرت تولیدی استاد افزایش میابد . باایجاد اعتماد بنفس وعلاقه به فراگیری دردانشجو ورزیدگی وی درحل مسائل فکری وتشویق حس ابتکار وی ازنتایج بسیار روشن این سیستم میباشد

یك كورس آزمایشگاه كامپیوتر برای حساب دیفرانسیل وانتگرال وجبرخطی

ترجمه : فروزان خـــــــرد پژوه

نوشته H.W. HETHCOTE & A.J. SCHAEFFER

برای اولین بار در سالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ یك دوره شش ماهه تكنیكهای كامپیوتری حساب دیفرانسیل وجبرخطی در دانشگاه Iowa پیشنهاد شد . كه بسبب شاگردان مساعد وواكنش دانشكده این دوره در سمیسترهای بعد نیز عرضه گردید ومقصود عمده ازاین دوره كاربـــــــرد كامپیوترهای رقمی بعنوان كمك برای فهمیدن مفاهیم ومراحل حساب دیفرانسیل وجبرخطی بـود ونیزشركت دراین دوره برای تمام دانشجویان همزمان باثبت نام دریكی ازدوره های مقدماتـی حساب دیفرانسیل وجبرخطی اختیاری بود .

این مقاله شامل جزئیاتی ازعملیات این آزمایشگاه كامپیوتری درسالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ و دلایل پذیرش آن می باشد ومادراینجابحثی درباره برتری های كاربرد كامپیوتر درآمـــــوزش حساب دیفرانسیل نخواهیم كرد چون این موضوع بطورمفصل درجای دیگری مورد بحث قرار گرفته است .

۱ــ تشكیل این دوره : درخلال سالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ یك قسمت بخصوص برای آموزش حساب دیفرانسیل به دانشجویان سال اول دانشگاه بسیك كامپیوتر پیشنهاد وموفقیت این تجـــربه موجب ادامه این طرح گردید هرچند كه مطلوبیت این طریق آموزش برای تمام دانشجویان روشن نبود واكثر كاركنان تمایل وآمادگی لازم برای تدریس تكنیكهای برنامه نویسی وامتحان شامـــل كامپیوتر راندا شتند . نتیجتا" تصمیم گرفته شد كه یك سمیستر آزمایشگاه یك ساعتی اختیاری حساب دیفرانسیل مقدماتی وجبرخطی بطورتجربی گذاشته شود واین لابراتور یك ساعت درهفته برای

دانشجویان تمام قسمتهای مقدماتی آزاد بود . حتی آنهائیكه دراین واحد ثبت نام نكرده بودند ودرطول سالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ درهرسمیستر تعداد ثبت نام مادراین كورس بطورتقریب به ۲۰ نفر میرسید واین كورس بوسیله دونفراز اعضاء دانشكده تدریس میگردید .

۲ــ كاربـــــرد كامپیوتر : چون تجربه قبلی برنامه نویسی الزامی نداشت گروهی ازدانشجویان درطی چهارهفته اول به‌كمك یك‌معلم به یادگیری برنامه نویسی پرداختند درحالی كـــــه دانشجویان دیگر كه تجربه قبلی برنامه نویسی داشتندبطورجداگانه باراهنمای دیگری مشغـول بودند واین گروه دانشجویان برنامه های كلی‌تری‌بزبانهائی‌كه آشنائی داشتند، مینوشتند . بیشتر، زبانهای FORTRAN و PL/1 بكاربرده میشد ولی یكی ازدانشجویان یـك ماشین دستی قابل برنامه ریزی نیزبكار برد . یكی ازمسائل موردعلاقه این گروه پیداكـــــردن صفرهای یك تابع بكمك روشهای تقسیم فواصل (Interval - Valuing method) ومساله دیگر مورد بحث محاسبه دنباله فیبوناچی ونسبت جمله‌هابود .

زبانی‌كه درطی سالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ یاددادده شد ، یك زبان مقدماتی بود . چـــون میبایست‌بطور سریع یاد داده شودتا وقت بیشتری برای مسائل حساب دیفرانسیل وجـــود داشته باشد ومتن آن برنامه نویسی مقدماتی بود كه توسط T.E.KURTZ و J.G.Kemeny نوشته شده‌بود .

روشی انتخاب شده‌بود كه بدانشجویان این امكان رابدهدكه بمحض گرفتن جواب بتوانـــد خطاها را فورا تصحیح كرده‌وبطورسریع برنامه نویسی‌رافرا گیرند واین‌كار بوسیله تقسیم‌وقت انجام شد . برای‌هردانشجو هزینه كامپیوتر در سیمستر درطی سالهای ۷۱ــ ۱۹۷۰ به ۶۰۰ دلار میرسید كه در مقایسه باهزینه ی روش‌عادی یعنی ۲۱ دلار درهرسیمستر قابل اهمیت بوده نوشته مفصل معلمین راجع به كاربرد نمائی وطرح مخصوص‌دانشگاه Iowa وشرح مقدماتی توزیـــع

گردید بعد ازاینکه نتیجه نهائی ثابت گردید دانشجویان برنامه تهیه شده ای راکه آنها را بـــا کامپیوتر آشنا میکرد ، گذراندند ودویاسه برنامه دیگر بادخالت دانشجویان در خلال کلاس وبطور انفرادی واختصاصی درخارج ازکلاس توسعه داده شد . بعضی ازبرنامه ها برای محاسبـــــه دنباله فیبوناچی وتهیه جدول ریشه هاوتوانهاوکاربرد فرمول درجه دوبود . مسائل بعـــــدی که بیشتر وقت کلاس وقف آنهامیشد . بحث درمورد لگاریتم برای مسائل جدید وتفسیروتعبیرمسائل عرضه شده درسال اخیر بود . بعد ازاینکه تمام دانشجویان دانستند که چگونه برنامه نویســـی کنند کلاس برد وگروه تقسیم شد یکگروه که درسیمستر اول یادوم حساب دیفرانسیل میگرفتنـد و گروه دیگر که جبرخطی داشتند

۳- Single variable calculus

تاکید اصلی روی محاسبات عددی وحل مسائلی بود که موجب تقویت فهم مفاهیم ومراحل حســـاب دیفرانسیل بود که مطرح میشد . مسائل بطورد قیق هم آهنگ با برنامه درسی ومتن درس بود وبعضی از مسائل بعنوان مسائل کامپیوتری داده میشد واوراق خروجی کامپیوترمحاسبات همراه باتوضیح وگزارش کامل بـــود که دراین صورت قابل قبول بودند .

مسائل مختلفی از لیست زیر درهرسیمستر تعیین میشدند .

۱ــ جدولهای توابع داده شده (چند جمله ای وناپیوسته ها ، منطق ، مثلثاتی ، وتوابع نمائی) حساب کرده ورسم کنید .

۲ــ جدولهای توابع داده شده ، مشتقات وانتگرال راحساب کرده ورسم کنید (برای روشـــن ساختن نقاط ماکزیمم ، توابع صعودی ، سطوح وغیره) بعضی توابع مسیرهای حرکتند .

۳ــ پیداکنید حدها را بطورتجربی بوسیله محاسبه ارزش توابع درنقاط مختلف که به نقاط مطلوب نزدیکنند . تمام حدها وجود ندارند .

۴ــ محاسبه کنید e راتاچهار رقم بامعنی بوسیله بکاربردن تعریف حدش . وبطور تجربـــی مربوط به e داده شده راپیداکنید .

۵ــ مقدار π را تا ۵ رقم اعشار بوسیله کاربرد پیرامون یك دنباله چند ضلعی های منظم محاط دریك دایـــره حساب کنید .

۶ــ بطریق محاسبات تجربی حدهای نسبت تغییرات مشتقات را پیداکنید قسمت قانون زنجیری را تحقیق کنید .

۷ــ برنامه ای بنویسید برای پیداکردن نقاط ماکزیمم ومی نیمم هرچند جمله ای درجـــــه چهار درفاصله داده شده .

۸ــ صفرهای تابع داده شده را بوسیله روشن نیوتن بدست آورید .

۹ــ مقدار تقریبی انتگرالها را بوسیله جمع ریمن با نقطه وسطی بعنوان نقطه نمونه درهرزیـر فاصله وبوسیله روش ذوزنقه ای پیداکنید .

۱۰ــ جدولهای مقادیر راحساب کنید تابع داده شده وتقریبات مختلف را بوسیله ســـری ناقص تیلور روی همان مجموعه محورها ، رسم نمائید .

۱۱ــ درستی قانون هوپیتال رابوسیله محاسبه حدهابطورتجربی معلوم کنید .

۱۲ــ مجموع سریهای نامتناهی رابطور تجربی محاسبه کنید . مقادیر تقریبی یك تابع رابـــا کاربرد سری تیلور محاسبه کنید .

فلوچارت وآلگوریتم هاواثباتهای سودمند بررسی شدند هرچند که آنها بآن اندازه که اگر لابراتوارکامپیوتر جزء کورس حساب دیفرانسیل میبود توسعه داده نشوند پروفسور W. Stenberg مفاهیم الگوریتمی ساخته است که قسمت مهمی از موضوع CRICIS AM Calculus است

قسمت ۱ و ۲

۴ــ جبـــــرخطی ــ هدف ازمسائل کمك به شاگردان برای فهمیدن جبرخطی بوسیله انجام دادن محاسبات پیچیده بود .

دقت عددی مورد بررسی قرار گرفت بوسیله نشان دادن اینکه انحراف از رویه استاندارد میتوانست نتایج فجیع وغلطی ببارآورد دانشجویان درانتخاب مسائل زیر مجازبودند .

۱ــ برنامه ای برای ایجاد یك بردار وماتریس حسابی بنویسید .

۲ــ معین کنید که آیایك بردار پایه یكمجموعه برداری هست یانه واگر هست ضرایب رادر رابطه وابستگی پیدا کنید . حذف ستون پیشنهاد می شود .

۳ــ برنامه ای بنویسید که یك ماتریس را بوسیله حذف سطر معکوس کند .

۴ــ دترمینان ها رابوسیله حذف محاسبه کنید .

۵ــ یك دستگاه معادلات خطی را بروش تکرار Iteration حل کنید .

۶ــ مقادیر خاصی وبردارهای خاصی رابوسیله روش توانی بیابید .

۵ - Connents (نظریه هـــا)

بزودی تمام دانشجویان احساس کردند که لا براتوارکامپیوتر بآنها دریادگیری وفهمیدن مفاهیم ومراحل حساب دیفرانسیل یاجبرخطی کمك کرد .

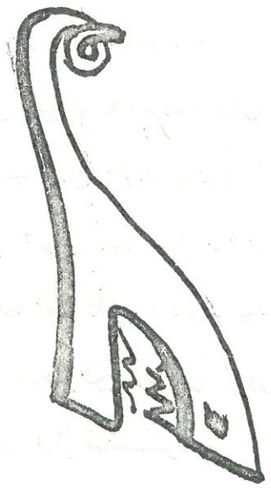
دانشجویان این دوره نظر دادند که بخصوص برنامه های کامپیوتر درفهم مراحل حد سودمند بودند . بعضی از شاگردان کارهای مستقلی کردند برای مثال یك شاگرد بطورتجربی دریافت که حد نسبت جمله هادریك دنباله فیبوناچی مستقل از دوعد اولیه میباشد .

شاگردانی که همزمان با این کورس ریاضیات عمومی راگرفته بودند بنظرمیرسید که برای انجام مسائل باندازه کافی دربرنامه نویسی سرعت داشتند هرچند که آن دانشجویان بدون تجربه هـــای مختلف برنامه نویسی ، اشکالاتی درمورد برنامه پیچیده برای بعضی مسائل جبرخطی داشتند .

عده کمی فهمیدند که یادگیری برنامه نویسی خیلی مشکل وقت زیادی میخواهد بعضی ازشاگردان مجذوب پیچیدگیهای برنامه نویسی بودند ودرنتیجه ازاین هدف که کامپیوتر برای کمك بر یادگیری آنهاست دور شده بودنـــد .

آگاهی از توانائی هاوحدود کامپیوتر که بوسیله برنامه نویسی بدست آمد بعنوان یك ریشه سودمند ذکـــر گـــردید .

چون کارمند وسهولت مقررات برای یك لابراتور کاری اختیاری درحداقل ممکن است تقریبا تمـــام انستیتوهائی که حساب دیفرانسیل درس میدهند میتوانند هم چنین بموازات آن نیز یك لابراتـــوار کامپیوتر عرضه کنند حتی اگر این کورس حساب دیفرانسیل کامپیوتری برای تمام دانشجویان کمکـــی نباشد رضایت واشتیاق تمام شاگردانی که این کورس را درسالهای ۷۱ــ۱۹۷۰ انتخاب موجب خوشحالی مولف که تدریس میکرده گردیـــد .



اخبـــــار دانشکده

* آئین نامه زیر برای مسابقات ریاضی بین تیمهای ریاضی دانشگاهها وموسسات آموزش عالی توسط انجمن ریاضی ارائه وازطرف وزارت علوم وآموزش عالی به دانشگاهها ابلاغ گردید :

آئین‌نامه مسابقـــــه ریاضی ایران

انجمن ریاضی ایران

۱ــ انجمن ریاضی ایران درهرسال همزمان باتشکیل کنفرانس سالانه ریاضی کشور ودرمحـــل برگزاری کنفرانس ، مسابقه ای درزمینه ریاضیات بین تیم ریاضی دانشگاهها وموسســـات آموزش عالی کشور برگـــزار میکنـــــد .

۲ــ هر دانشگاه ویاموسسه آموزش عالی میتواند فقط یك تیم مرکب ازحداقل سه‌وحداکثر پنج دانشجوی دوره لیسانس خود را به انجمن ریاضی معرفی نماید .

۳ــ مسابقه‌کتبی است وسئوالات بدوزبان فارسی وانگلیسی زیر نظر انجمن ریاضی ایران‌توسط استادان ومتخصصان تهیه میشود .

٤ــ ازطرف انجمن ریاضی ایران به دانشجویان اول تاپنجم یك ابلاغ ازطرف وزارت عـــلوم وآموزش عالی وبه ترتیب ازپنج تایك پهلوی طلا اعطا میشود .

٥ــ ازطرف انجمن ریاضی ایران بهریك از دانشگاهها وموسسات آموزش عالی کشورکه تیـــم اعزامی آنها حائز رتبه اول تاسوم شود یك ابلاغ ازطرف وزارت علوم وآموزش عالی اعطا میگردد ونام این سه تیم در لوح ریاضی کشور ثبت میشود ولوح مذکور برای‌مدت یکسال دراختیار تیم رتبه اول قرار میگیـــرد .

* تیم دانشکده ریاضی‌وعلوم کامپیوتر درجلسه ای که باحضور آقایان : دکتر بهـــزاد ، دکتر یاسائی ، دکتر همدانی وجمعی ازدانشجویان علاقه‌مند تشکیل گردید ، بشرح زیـــر انتخاب شد :

۱ــ خانم الیزابت ابراهیم زاده	عضواصلی
۲ــ آقای مظاهر امینی ولاشانی	" "
۳ــ " هدایت زکائی آشتیانی	" "
٤ــ " ناصر ترکمـــــانی	" "
٥ــ " ابراهیم هاشمی اقدم	" "
٦ــ " هوشنگ اسماعیلی	عضو علی‌البدل
۷ــ " بهروزارباب دهکردی	" "
۸ــ " کامران فیضـــــی	" "

این تیم بسر پرستی آقای دکتر همدانی فعالیت میکند . الگوریتم برای این تیم امیـــد پیروزی میدارد .

* طبق تصمیم شورای دانشگاه باالحاق گروه کامپیوتر به دانشکده ریاضی ، نام ایـــن دانشکده به " ریاضیات وعلوم کامپیوتر " تغییر یافت . امیدواریم دعای خیرما رفیق توفیـــق پروردگان این دانشکده در رفع نیاز ریاضی وبرنامه ریزی‌کشور باشد .

* درجلسه ای که بمنظورانتشار یك نشریه دانشجوئی، باحضور دانشجویان علاقه مند تشکیل گردید تصمیمات زیر اتخاذ شد :

هر شماره ازمجله الگوریتم حاوی مقالاتی درزمینه های ذیل میباشد :

۱ــ سرمقاله :

حاوی مطالب مربوط به جریانات روز درمورد ریاضیات کشور ونقد وانتقاد از امور مربوط به ریاضی .

۲ــ درمحضر استاد :

شامل زندگی نامه وتحقیقات وتالیفات یکی از استادان ایرانی وریاضی این دانشگاه ونظریات ایشان درمورد ریاضیات وتعلیم آن .

۳ــ درمورد ریاضیات محض :

توپولوژی ــ جبرخطی ــ آنالیز ریاضی وتابعی ــ منطق ریاضی ــ مزور ــ گراف وسایر تئوریهای مربوط بریاضیات محض .

٤ــ سریال تاریخ ریاضی .

٥ــ درمورد ریاضیات عملی وکاربرد تئوریهای ریاضی :

آنالیز عددی ــ آماروا حتمال ــ جبرخطی ــ تحقیق درعملیات ــ آنالیز سیستمها معادلات دیفرانسیل وغیره .

٦ــ مباحثی ازمنطق برنامه ریزی وبرنامه نویسی ــ علم کامپیوتر ورشته های مربوطه

۷ــ سرگذشت یکی ازبزرگان ریاضی جهان وتجزیه وتحلیل افکار او .

۸ــ معرفی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر: فعالیتها و ــ دروس وکاربرد آنها

۹ــ بحث آزاد :

دراین قسمت ازمجله به خوانندگان فرصت داده میشود که درموارد مربوط به مجله ،

دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی آریامهر ــ آموزش وکتابهای درسی مربوط به ریاضیات ، استادان ومعلمین ریاضی اظهار نظرنمایند . نظرخوانندگان بشرط منطقی بودن چاپ میشود .

۱۰ــ نکته هائی از کلاس درس :

هراستاد ، معلم ودانشجوئی که سرکلاس درس یامطالعه‌ی مباحث درسی متوجه مطلبی جدید یانکته ای احساس شود میتواندآن را برای مجله ارسال نماید . این نکات بشرطی که حائز اهمیت درك شوند ، بطبع میرسند .

۱۱ــ متفرقه :

دراین قسمت مقالاتی که توسط هیات تحریریه حائز اهمیت تشخیص داده شود چاپ میشود .

۱۲ــ مسائل ومعماها :

دراین بخش ازمجله معماهای شیرین ریاضی وگاهی معماهائی که درتاریخ ریاضی باعث بوجودآمدن مبحثی شده اند عرضه میشود وحل آنها ازخواننده درخواست میگردد . مسائل معمولا بدوقسمت تجزیه میشوند . مسائل مقدماتی برای دانشجویان رشته های مهندسی وعلمی ومسائل عالی برای دانشجویان ریاضی . حل مسائل ومعماهای هرشماره درشماره بعدی درج میگردد .

۱۳ــ میهمان دانشگاه :

شامل مصاحبه ای است بایکی از میهمانان برجسته دانشگاه . مصاحبه شامل زندگی نامه ونظریات میهمان درباره ریاضیات وآموزش ریاضی درایران وتعلیم وتربیت درکشور متبوع اومیباشد .

۱۴ــ اخبـــــار دانشکده :

حاوی اخبار علمی ــ راجع به تحقیقات استادان ، وتوفیق دانشجویان در مسائل علمی

اخبـــــار ورزشی ــ اخبار هنری وغیره میباشد .

هرمقاله ای که در یکی از زمینه های فوق باشد ، ازنظر هیات تحریریه میگذرد وپس از تصویب

اکثریت آنان ، سرپرست مجله که یکی ازاعضای کادرآموزشی دانشکده میباشد درمورد قبول یا رد

مقاله تصمیم میگیرد . مترجم یانویسنده هرمقاله باید نام ونشانی کامل خود را به انضمام مقاله ارسال

نمایـــــند .

هیات تحریریه هرسال ازمیان دانشجویان دانشگاه صنعتی آریامهر که علاقه مند بـــه

همکاری دراین مجله هستند ، انتخاب میشوند وتعداد آنها نه نفر است که حداقل پنج نفر

باید ازمیان دانشجویان دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر این دانشگاه باشند وحداقل سه نفر

از آنان کسانی هستند که طی سال تحصیلی مربوط فارغ التحصیل نمیشوند . این سه نفر

سرپرست مجله را درتشکیل انتخابات سال آتی کمک مینمایند وهیات تحریریه منتخب را راهنمائی

میکنند .

عواید حاصل از فروش مجله یاکمک افراد خیر علاقه‌مند بتوسعه این قبیل نشریات علمـــی

پس از کسر مخارج آن ، بعنوان پاداش به نسبت فعالیت هرسال بین سه نفرازاعضای فعـــال

هیات تحریریه و دونفر از کسانی که مقالات آنها از لحاظ کیفی وکمی بهتر شناخته شود ، تقسیم

میگردد .

تشخیص وانتخاب اعضای فعال هیات تحریریه ونویسندگان مقالات بعهده هیات تحریریه

ومنوط به تصویب سرپرست مجله میباشد .

دانشجویان ذیل درسال تحصیلی ۵۲ــ۱۳۵۱ بعنوان اعضای هیات تحریریه ، انتشار شماره های

اول ودوم مجله الگوریتم رادراسفند ماه ۱۳۵۱ ومهرماه ۱۳۵۲ تقبل مینمایند :

۱ــ فاطمی زاده — دانشجوی سال اول دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر

۲ــ همایون معین — " " دوم "

۳ــ آذرافـــزا — " " " "

۴ــ سعید قهرمانی — " " " "

۵ــ عمـــــادی — " " " "

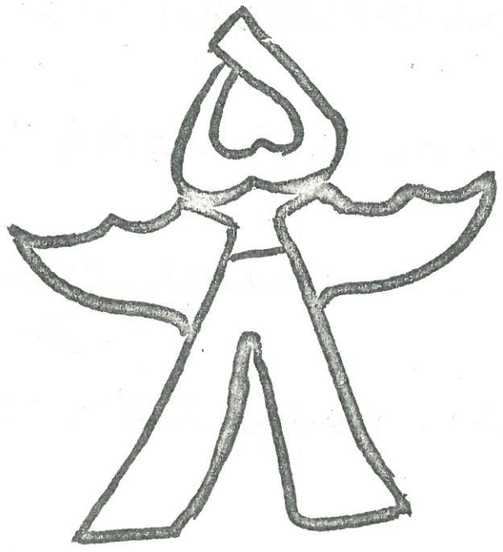
۶ــ غلامرضا بیـات — " " " "

۷ــ پیروز وکیـــلی — " " " "

۸ــ فروزان خرد پژوه — " " سوم "

۹ــ ابراهیم هاشمی اقدم — " " چهارم "

شماره های فوق زیر نظرجناب آقای دکتر یاسائی سرپرست مجله الگوریتم بطبع میرسد .



گزارش فعالیتهای ورزشی دانشکده "ریاضی" دانشگاه

صنعتی آریامهر در سال تحصیلی ۵۱ـ۱۳۵۰

مسابقات نهائی شنای دانشکده های دانشگاه در حضور مقام نیابت تولیت عظمی معاونین دانشگاه وعده ای ازاستادان ودانشجویان انجام گرفت ودوستان ورزشکار ما بشرح زیر برای دانشکده خود کسب افتخار نمودند .

در ۲۰۰ مترقورباغه آقای مزرعی از دانشکده "ریاضی" بارکورد ۴/۱/۹ دقیقه مقام سوم را بدست آورد .

در ۱۰۰ مترکرال پشت آقای مهران وزیری ازدانشکده "ریاضی" بارکورد ۱/۳۸ دقیقه مقام اول را بدست آورد .

در ۱۰۰ متر قورباغه آقای نیکتاش ازدانشکده "ریاضی" بارکورد ۱/۴۵/۸ مقام سوم را بدست آورد .

در ۱۰۰ مترآزاد آقای مزرعی ازدانشکده "ریاضی" بارکورد ۱/۲۶/۵ مقام دوم رابدست آورد . وازنظر تیمی در ۴×۱۰۰مترشنا دانشکده "ریاضی" بارکورد ۷/۴۱/۳ دقیقه مقام سوم را حائز شد .

درمسابقات والیبال بین دانشکده های مختلف دانشگاه دانشکده "ریاضی" مقام دوم را بدست آورد .

مسابقات ژیمناستیک دانشکده های دانشگاه طبق تقویم ورزشی دانشگاه انجام گرفت واین نتایج بدست آمد :

۱ـ درقسمت بارفیکس آقای پرویزدوستی ازدانشکده "ریاضی" با ۷ امتیاز مقام اول را بدست آورد .

در قسمت پارالل آقای پرویز دوستی ازدانشکده "ریاضی" با ۸ امتیازمقام دوم رابد
آورد .

درقسمت پرش خرک آقای پرویز دوستی ازدانشکده "ریاضی" با ۷/۸ امتیاز مقام دوم
بدست آورد .

۲ـ رویهمرفته از نظر امتیاز فردی آقای پرویزدوستی ازدانشکده "ریاضی" با ۲۲/۸ ام
مقام دوم رادردانشگاه بدست آورد .

ازنظرتیمی دانشکده "ریاضی" با ۲۵ امتیاز در دانشگاه مقام دوم راحائز شد .

درمسابقات فوتبال بین دانشکده های مختلف دانشگاه دانشکده "ریاضی" مقام سوم رابدست آو

درضمن باکمال خوشوقتی، یادآورمیشویم طبق برآوردی که ازطرف سازمان تربیت بدنـ
دانشگاه بعمل آمد درسال تحصیلی ۵۱ـ۱۳۵۰ دانشکده "ریاضی" ازلحاظ ورزشی دربین کلیـ
دانشکده های این دانشگاه مقام دوم را حائز گردید .