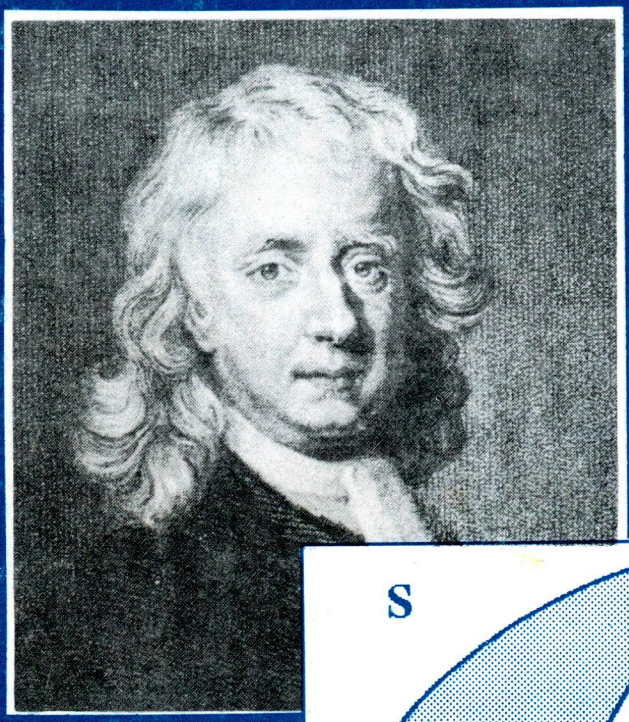
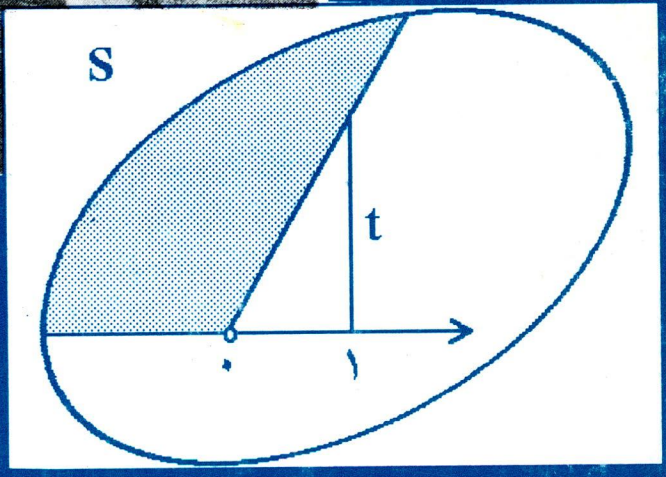
جُنگ ریاضی دانشجو





جلد دهم ، اردیبهشت ۱۳۷۶

جُنگ ریاضی

□ هدف از انتشار جُنگ ریاضی دانشجو غنی کردن منابع مقاله‌های توصیفی ـ آموزشی به زبان فارسی، معرفی فعالیتهای مستقل و جالب توجه دانشجویان رشتهٔ ریاضی و ایجاد انگیزه و فراهم ساختن محیطی مناسب برای فعالیتهای فوق برنامه دانشجویان و دیگر علاقه‌مندان ریاضی است.

□ مقاله‌های جُنگ ریاضی بیشتر توصیفی‌اند، و قالب «قضیه-لم-برهان» در وهلهٔ اوّل مورد نظر نیست. این مقاله‌ها زمینه‌های گوناگون ریاضی چون آنالیز، جبر، هندسه و توپولوژی، و تاریخ، فلسفه و آموزش ریاضیات را در بر می‌گیرند.

□ مخاطبین جُنگ ریاضی تمامی علاقه‌مندان به ریاضیات، بالاخص دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی، دانش آموزان مستعد و دبیران علاقه‌مند ریاضی می‌باشند.

□ در مورد مقاله‌های ارسالی توجه به این نکات لازم است:

۱. مقالهٔ ارسالی از نظر محتوی باید مطابق با چارچوب گفته شده باشد.

۲. مقالاتی که به صورت ترجمهٔ آزاد باشند پذیرفته نمی‌شود، مقاله می‌تواند تألیفی یا به‌صورت ترجمهٔ دقیق باشد.

۳. در مقالهٔ ترجمه‌ای، متن اصلی هم فرستاده شود. همچنین شرح شکلها در صفحه‌ای جداگانه ترجمه شود.

۴. مقاله روی کاغذ A4 ماشین شود یا به طور کاملا" خوانا نوشته شود. طول مقاله از ۴۰ صفحهٔ دست‌نویس تجاوز نکند و در هر صفحه بیش از ۱۵ سطر نوشته نشود.

۵. هیأت تحریریه در پذیرش، حک و اصلاح مقالهٔ ارسالی آزاد است، و هر گونه تغییری به اطلاع فرستنده خواهد رسید. در هر صورت مقالهٔ ارسالی پس فرستاده نخواهد شد.

هیأت تحریریه: علیرضا اشرفی
ناصر بروجردیان
حسن حقیقی
بهزاد منوچهریان
حمیدرضا میمنی

ویراستاران: یوسف امیر ارجمند، بهزاد منوچهریان، غلامرضا یاسی‌پور

عنوان: جنگ ریاضی دانشجو
مدیر مسؤول: بهزاد منوچهریان
ناشر: مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر
سال چاپ: اردیبهشت ۱۳۷۶
تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
حروف چین و صفحه آرا: آناهیتا سمیع
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر
قیمت: ۲۵۰ تومان

شابک: ۹۶۴ — ۴۶۳ — ۰۰۰ — ۹
964-463-000-9

به نام ایزد منّان

سخن مدیر مسوؤل

در جمهوری اسلامی ایران، از سال ۱۳۶۳ تاکنون مجلات ریاضی جدیدی پا به عرصه نهاده‌اند و خوشبختانه در طی ده سال گذشته تعدادشان روبه افزایش بوده است. این واقعیت به خودی خود گویای این است که میل به گسترش ریاضیات در این مملکت بیشتر شده است.

وقتی تعداد و تنوع نشریات ریاضی زیاد می‌شود قطعاً سطح توقّع از این نشریات هم بالاتر می‌رود و این نشریات باید همواره از افتادن به ورطهٔ ابتذال بر حذر باشند. ابتذال در یک نشریهٔ ریاضی چیست؟ چند مورد را برمی‌شماریم: افتادن به دام تکرار مطالب مشابه و ملال‌آور، در به در دنبال خوانندهٔ آسان طلب بودن، و موارد تأسف باری از این دست.

اکنون اکثریت قریب به اتفاق نشریات ریاضی با زبانی توصیفی سعی در ترویج ریاضیات دارند و کار تدوین مقالات توصیفی ریاضی بس دشوار و وقت گیر است. شاید از این روست که برخی از دست‌اندرکاران این نشریات، به آوردن مطالب تکراری و ملال آور دچار می‌شوند.

در این بین رسالت جُنگ ریاضی هم جز ترویج ریاضیات با زبانی توصیفی، نبوده است. در این راه، ترجمهٔ مقالات ناب توصیفی را نه تنها عار نمی‌دانیم که آن را عین ثواب می‌دانیم. بی‌توجّهی به ترجمه چنین مقالاتی را بی‌توجّهی به بخش مهمی از وظایف یک نشریهٔ ریاضی ترویجی می‌دانیم و معتقدیم که تا زمانی که در منابع خارجی مقالات توصیفی ناب ریاضی منتشر می‌شود، باید آنها را ترجمه کرد و در اختیار پارسی زبانان علاقه‌مند قرار داد. البته این بخشی از وظایف است، و وظیفهٔ دیگر ترغیب ریاضی دوستان و ریاضیدانان ایرانی به نوشتن چنین مقالاتی است، و باز معتقدیم که اگر این کار باب شود مقالاتی به مراتب هم سنخ‌تر با فرهنگمان نوشته خواهد شد و قطعاً فهم عمومی از ریاضیات عمیقتر خواهد شد.

علت تأخیر طولانی در انتشار این شماره جُنگ بروز مشکلات پیش‌بینی نشده در تأمین بودجه آن بود. پس از پی‌گیریهای ممتد به این نتیجه رسیدیم که با توجه به استقبال و یاری دانشکده ریاضی و معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، از این پس جُنگ ریاضی توسط این دانشگاه به زیور طبع آراسته گردد.

البته با توجه به کمک جهاد دانشگاهی واحد تهران در حروفچینی این جُنگ جا دارد که از این واحد تشکر نماییم. باشد که به اهداف متعالی فرهنگی-علمی خود وفادار و از ابتذال دور بمانیم.

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست مطالب

- سخن مدیر مسئول
- نگاهی به مسئلهٔ Nـجسم از طریق متغیرهای مختلط — دانالد ساری — ۱
- قانون دوّم کپلر و توپولوژی انتگرالهای آبلی — ولادیمیر آرنولد — ۲۲

دانش الگوها — لین آرتور استین — ۳۴

برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و رمزنگاری — ه.و. لنسترا — ۵۴

تصادفی بودن و اثبات ریاضی — گریگوری ج. چایتین — ۶۸

مثالهای نقض در نظریهٔ احتمال — جوردن استویانف — ۸۵

نکته‌ها

در باب یک قضیهٔ فروبنیویس — ی.م. آیزاکس و ج.ر. رابینسون — ۹۸

روشن کردن قلمروهای کراندار — جفری راخ — ۱۰۲

اثبات لانه کبوتری قضیهٔ کاپلانسکی — ایرا روزنهولتز — ۱۰۶

اثبات قضیه سرپینسکی با ... — آ.آ. آگیف — ۱۰۸

آیا حاصلضرب مشتقهای... — م.و. بوتسکو — ۱۱۱

دیدگاه

مصاحبه‌ای با پرویز شهریاری — ۱۱۵

گزارش

ریاضیات در شرایط دشوار کشورهای جهان سوم — نیل کوبلیتز — ۱۳۵

دانالد ساری

نگاهی به مسئله N_جسم از طریق متغیرهای مختلط مقدماتی*

ترجمهٔ ناصر بروجردیان

بررسی چگونگی حرکت Nجسم سماوی تحت نیروهای جاذبه موضوعی قدیمی است. اگر کسی بخواهد کارهای منجمین و چوپانان عهد قدیم ـ دو گروهی که به دقت مکانهای ستارگان و سیارات را مشخص می‌کردند ـ را مورد توجه قرار دهد، ریشه‌های زمینه این موضوع به اولین دستاوردهای نوع بشر می‌رسد. در واقع اگر عنوان مذکور در این معنی خاص به‌کار برده نمی‌شد، ممکن بود مطرح شود که بررسی مسئله N_جسم «قدیمیترین حرفه دنیاست». و اگر اولین حرفه نباشد، مطمئناً دومین حرفه است.

اجرام آسمانی چگونه حرکت می‌کنند؟ به کمک متغیرهای مختلط مقدماتی، مدارات انتخابی خاصی توصیف خواهند شد و همانگونه که آشکار خواهد شد، حتی حرکات «ساده» می‌توانند به نحو شگفت‌آوری پیچیده باشند. همچنین بخشی از تاریخ مسئله N_جسم بازگو خواهد شد که در آن این داستان دور از واقعیت که فقط مسئله ۲_جسم حل شده است به تفصیل آمده است. البته برای مقاصد عملی مسئله N_جسم برای هر Nای حل شده است، اما در ابتدای این قرن، ریاضیدان فنلاندی، ساندمن[1]، مسئله ۳_جسم را به معنای قابل قبول آن زمان «حل کرد». در تشریح علت ناشناخته ماندن نتایج ساندمن، نشان داده خواهد شد که چگونه تصادمها، چه از نوع حقیقی آن که دو یا چند جسم به هم برخورد می‌کنند، و چه از نوع موهومی آن که برخوردی موهومی به

---

* Donald C. Saari A Visit to the Newtonian N-body Problem via Elementary Complex Variables *Amer. Math. Monthly*,97, (Feb 1990)105-119.

1.K.Sundman

ازای مقداری مختلط برای زمان رخ می‌دهد، بر رفتار دستگاه تأثیر می‌گذارند.

برای شروع، سوالی را که احتمالاً برخی اوقات ذهن بیشتر ما را متوجه خود ساخته است در نظر می‌گیریم ؛ چرا منجمین اولیه در پیش‌بینی حرکات سیارات اینهمه دچار مشکل بودند. با مجهز بودن به آموزشهای قرن بیستم، می‌دانیم که یکی از تقریبهای معقول برای حرکت یک سیاره، حرکت دایره‌ای یکنواخت به دور خورشید است. پس چه چیز مشکلی در توصیف حرکتی تا این اندازه قابل پیش‌بینی، وجود دارد ؟ این سوال ارتباط نزدیکی با داستان گالیله دارد که خموشانه تکذیب اجباری خورشید-مرکزی بودن منظومه شمسی را رد کرد. احتمالاً نسلهای بی‌اعتنای دانش آموزان خموشانه به شگفت در می‌آیند که «چه اهمیتی دارد؟» چه فرقی می‌کند که خورشید مرکز باشد یا زمین ؟ اما این موضوع اهمیت دارد. این تعویض ساده متغیرها، تصویری به طور عمده متفاوت از منظومه شمسی ارائه می‌دهد و مشکلاتی که منجمین عهد قدیم با آن روبرو بوده‌اند روشن می‌سازد و اهمیت بنیادی انقلاب کوپرنیکی را آشکار می‌کند.

برای دانستن اینکه چرا تعصب زمین-مرکزی مشکل ایجاد می‌کند، صورت ساده شده‌ای از دستگاه خورشید-زمین-مریخ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مریخ تا خورشید تقریبا ۱/۵ (۱/۵۲۴) برابر فاصله زمین تا خورشید است و تقریبا دو سال (۶۸۷ روز زمینی) طول می‌کشد تا خورشید را یک بار دور بزند. برای حذف بخش اعشاری، به جای واحد نجومی سنتی نصف آنرا جایگزین کنید، در نتیجه در دستگاه جدید، زمین به فاصله ۲ از خورشید قرار دارد. در این مدل ساده شده، مکان زمین عبارت است از $Z_E(t) = ۲e^{۲\pi it}$ که در آن t با مقیاس «سال زمینی» اندازه‌گیری می‌شود، و مکان مریخ عبارت است از $Z_M(t) = ۳e^{\pi it}$. مکان مریخ آنگونه که از زمین مشاهده می‌شود عبارت است از

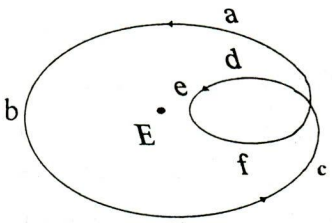
$$Z(t) = Z_M(t) - Z_E(t) = ۳e^{\pi it} - ۲e^{۲\pi it} \qquad (۱.۱)$$

یک شیوه مناسب توصیف این مدار با محاسبه زیر صورت می‌گیرد.

$$\begin{aligned} Z(t) - ۲ &= ۳e^{\pi it} - ۲e^{۲\pi it} - ۲ = e^{\pi it}(۳ - ۲e^{\pi it} - ۲e^{-\pi it}) \\ &= (۳ - ۴\cos \pi t)e^{\pi it} \end{aligned}$$

نمودار این معادله ـ نمایش قطبی یک حلزونی یک حلقه‌ای ـ مدار مریخ نسبت به زمین را نشان می‌دهد[۲]. (شکل ۱)

[۲] نوع مثلثاتی این بحث چیزی مشکلتر از فرمولهای زاویهٔ مضاعف را دربر ندارد و بنابراین می‌تواند



شکل ۱

از شکل ۱ روشن است که چرا تعصب زمین‌ـمرکزی ما قبل کوپرنیکی، پیش‌بینی حرکت سیارات و بسط یک «نظریه نیوتونی» را چنین مشکل می‌ساخت. در حالیکه مدار از a به b به c چندان پیچیده نیست، این مدار وقتی مریخ از c می‌گذرد کاملا پیچیده می‌شود. مریخ حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت را تا نقطه d حفظ می‌کند و در این نقطه به نظر می‌رسد که *می‌ایستد* و تا نقطه f حرکت خود را به حرکتی در جهت عقربه‌های ساعت تغییر می‌دهد. در f دوباره تغییر جهت می‌دهد و به حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت برمی‌گردد. تصور کنید، این حرکت چه پیچیدگیهایی را برای منجمینی که سعی می‌کردند مکان آنها را پیش‌بینی کنند، پدید می‌آورد. حال، نظریه‌پردازی را تصور کنید که سعی در تعیین قوانین حاکم بر حرکات دارد. زمانیکه مریخ از a به b به c به d می‌رود، نظریه‌پرداز به یک قانون جاذبه ترغیب می‌شود. اما، مدار از e به f به a را چگونه توضیح خواهد داد ؟ چگونه می‌توان یک قانون دافعه ناگهانی را توجیه کرد؟ در آنجا چه اتفاقی برای زمین رخ می‌دهد که مریخ را از خود می‌راند؟

در واقع، حرکت مریخ در شکل ۱ ساده‌تر از حرکت سیارات دیگر است، محاسبات مقدماتی مشابه با متغیرهای مختلط ثابت می‌کند که مدارات زحل و ژوپیتر و دیگر سیارات که دایره‌های بزرگتری را به دور خورشید طی می‌کنند، حلقه‌های متعددی، مشابه شکل ۲ اختیار می‌کنند. این موضوع را می‌توان همانند بالا اثبات کرد، اما در اینجا حلزونی مزبور نسبت به یک دایره چرخان است. (به جای یافتن مدار نسبت به یک انتقال ثابت، آن را نسبت به انتقال چرخانی پیدا کنید که به صورتی انتخاب شده باشد که عبارات نمایی مربوطه به عبارتی کسینوسی تبدیل شوند.) به عنوان روشی دیگر برای مبرهن ساختن این موضوع، مدار نسبی $z(t) = ae^{\alpha\pi it} - ۲e^{۲\pi it}$، $۲ < a$، را به صورت

انگیزه‌بخش مباحث متعددی در کلاسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال و کلاسهای مقدماتی‌تر باشد. برای مثال، تجربه من نشان داده است که توصیف مدار مریخ تشریح قانع کننده‌تری از ارتباط بین حلزونی‌ها و کاردیوئیدها بوده است تا بسیاری از مثالهای استاندارد مورد استفاده در این بخش.

متعارف $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ بیان کنید. چگونگی جهت حرکت از لحاظ در جهت یا خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بودن، توسط علامت θ' تعیین می‌شود. θ' قسمت موهومی $(\ln(z(t))' = \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} + i\theta'$ است. اما $\frac{z'}{z} = \frac{\pi i(a\alpha - ۴e^{(۲-\alpha)\pi it})}{a - ۲e^{(۲-\alpha)\pi it}}$، بنابراین پس از یک محاسبه ساده، نتیجه می‌شود که هرگاه $a\alpha < ۴$ علامت θ' عوض می‌شود. این نامساوی برقرار است، زیرا بنابه قانون کپلر $a^۳\alpha^۲ = k$ که در آن k عددی ثابت است؛ بنابر این $a\alpha = (\frac{k}{a})^{\frac{۱}{۲}}$ ، که تابعی نزولی از a است.



شکل ۲

تصاویر این مدارات حلقوی را، که نمایانگر حرکت سیارات دور نسبت به زمین هستند، می‌توان در کتب متعددی از تاریخ نجوم یافت. جالبتر از همه اینها، عکسهایی است که از سیارات در یک دوره چند ساله گرفته شده است و روی یک صفحه با هم ترکیب شده‌اند. وقتی این نوع رفتار دینامیکی را با حرکت یکنواخت حاصل از دستگاه خورشید-مرکزی مقایسه‌کنیم، روشن می‌شود که چرا تغییر متغیرهای کوپرنیکی چنین تأثیر عمیق و ساده‌کننده‌ای بر علوم و نجوم داشته است.

نمایش کوپرنیکی به طور برجسته‌ای توصیف حرکات سیارات را ساده‌تر می‌کند، اما آیا این نظریه درست است ؟ این مطلب جوهره شبهه کاردینال باربرینی[۳] به هنگام جدل با گالیله بود (حداقل در نمایش *زندگی گالیله* برشت). «*آیا شما مطمئنید ... آیا شما منجمین تنها در این کوشش نیستید که نجوم را برای خودتان کمی ساده‌تر کنید؟ ... شما دوست دارید که راجع به دایره و بیضی و سرعتهای یکنواخت و حرکات ساده متناسب ذهن خودتان فکر کنید. اما اگر خداوند مایل بوده که ستارگانش را این گونه حرکت دهد چه؟*» در اینجا باربرینی انگشتانش را در هوا در مسیری پیچیده، احتمالا مشابه شکل ۲ حرکت می‌دهد. گالیله با همان تیغ اُکام[۴] به پشتیبانی از نظریه کوپرنیک اظهار می‌کند «*اگر خداوند عالم را این‌گونه* [او مسیر باربرینی را از نو رسم می‌کند] *خلق کرده بود،*

3.Barberini

ذهن ما را نیز این گونه [او حرکت مشابهی را تکرار می‌کند] *می‌ساخت تا قادرباشیم این مسیرها را به عنوان ساده‌ترین مسیرها بشناسیم. من به عقل ایمان دارم.»*

متغیرهای مختلط مقدماتی با جذب اثر دستگاه مختصات در حال گردش که با حرکت زمین ایجاد می‌شود، این مدارهای نسبی تقریبا عجیب سیارات بیرونی را آشکار می‌سازند. دستگاههای در حال گردش طبیعی دیگری نیز در نجوم وجود دارد، بنابراین می‌توان به درستی انتظار داشت که برخوردی مشابه رفتار نجومی عجیب دیگری را به نمایش بگذارد. برای نشان دادن این موضوع سیاره عطارد را در نظر بگیرید. برای عطارد تقریبا ۹۰ (۸۷/۹۶۷) روز زمینی طول می‌کشد تا خورشید را یک بار دور بزند. برمبنای رصدها، تا سال ۱۹۶۰ اعتقاد برآن بود که عطارد مقدار زمان مشابهی را برای گردش به دور محور خود صرف می‌کند. اگر این درست بود، همانگونه که در اکثر متون قدیمیتر نجوم اظهار شده است، یک روی عطارد همیشه رو به خورشید می‌ماند ـ یک روز خورشیدی (یا شب خورشیدی) در عطارد تا ابد طول می‌کشید. اما با رصدهای‌راداری، امروز می‌دانیم که عطارد تقریبا هر ۶۰ روز زمینی یک بار به دور محور خود می‌چرخد ؛ این موضوع روز خورشیدی عطارد را تا حدود ۱۷۶ روز زمینی، یا دو سال عطاردی، کوتاه می‌کند. علاوه براین، همانگونه که بعد نشان داده خواهد شد، هنگامی که نمایش دقیقتری برای مدار عطارد به کار برده شود، ناظر در عطارد مدار ظاهری خورشید را کاملا عجیب خواهد یافت.

برای به دست آوردن تقریب دقیقتری از مدار عطارد، یا مدار هر سیاره دیگری به‌دور خورشید، آنرا به صورت یک بیضی با خروج از مرکز ϵ در نظر بگیرید ، مثلا برای زمین $\epsilon = ۰/۰۱۶۷$ و برای عطارد $\epsilon = ۰/۲۰۵۶$. مکان سیاره روی بیضی با معادله

$$r(\theta) = \frac{a}{۱ - \epsilon \cos\theta} \approx a(۱ + \epsilon \cos\theta) \qquad (۱.۲)$$

داده می‌شود که در آن a عدد ثابت و مثبتی است و $\theta(t)$ زاویه سیاره است که با یک خط مرجع معین می‌شود. معادله (۱.۲) دارای نمایش مختلط زیر است.

$$\begin{aligned} z(\theta) \approx a(۱ + \epsilon \cos\theta)e^{i\theta} &= a(۱ + \frac{\epsilon}{۲}e^{i\theta} + \frac{\epsilon}{۲}e^{-i\theta})e^{i\theta} \\ &= a\frac{\epsilon}{۲} + ae^{i\theta} + a\frac{\epsilon}{۲}e^{۲i\theta} \end{aligned}$$

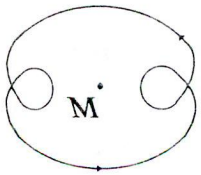
گردش عطارد با $e^{۱۲\pi it}$ داده می‌شود. در نتیجه مکان ظاهری خورشید روی عطارد عبارت است از

$$z(t) = -z(\theta(t))e^{-۱۲\pi it} \qquad (۱.۳)$$

بنابراین

$$Arg(z(t)) = Argz(\theta(t)) - ۱۲\pi t + \pi = \theta(t) - ۱۲\pi t + \pi \qquad (۱.۴)$$

حرکت ظاهری خورشید با عوض شدن علامت $(Argz(t))$ تغییر جهت می‌دهد. و این تغییر اتفاق می‌افتد، و دلیل آن مبتنی بر قانون دوم کپلراست که می‌گوید $r^۲\theta'$ ثابت است.بنابراین، اگر ϵ به اندازه کافی بزرگ باشد، همانگونه که برای عطارد چنین است، $\theta(t)$ نمی‌تواند نمایانگر یک حرکت یکنواخت باشد. به ویژه، هنگامی که r در حضیض (یعنی، $r(t) = |z(t)|$ در کمترین مقدار) است، θ' بیشتر مقدار خود را دارد. در واقع با استفاده از قانون دوم کپلر و معادله (۱.۲) داریم $\theta' = \frac{n}{(۱-\epsilon\cos\theta)^۲}$ که در آن n متوسط حرکت است ؛ مثلا برای عطارد $n = ۸\pi$. در نتیجه، در حضیض $\theta = \frac{۸\pi}{(۰/۷۹۴۴)} \geq ۱۲\pi$ داریم $|\theta| \leq ۲۶۸^\circ$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که برای $(Argz(t))' \geq ۰$ ؛ و در سایر حالات این مقدار منفی است. با استفاده از این نتایج، تعیین کلی حرکت ظاهری خورشید، ارائه شده در شکل ۳ ، آسان است. هرکدام از دو حلقه، متناظر با عبور «سالانه» عطارد از حضیض است. (استدلال مشابه نشان می‌دهد که اگر مدار عطارد به اندازه کافی مدور بود، $\epsilon < ۰/۱۸۳۵$، آنگاه حرکت ظاهری خورشید هیچ تغییر جهتی نمی‌داشت.)



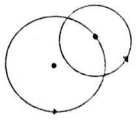
شکل ۳

تغییر علامت $(Azgz(t))'$ پدیده جالبی را به وجود می‌آورد. مکانهایی در عطارد وجود دارد که در آنها خورشید پس از طلوع در مشرق در یک صبح عطاردی به نقطه خاصی در آسمان می‌رسد که *توقف* می‌کند و روی مسیر خود باز می‌گردد تا در مشرق غروب کند. سپس خورشید یک‌بار دیگر در این «صبح» طلوع می‌کند،اما این دفعه به

طور طبیعی مسیر خود را در روز طولانی طی می‌کند. اما این همه مطلب نیست؛ پس از غروب در مغرب این خورشید بی‌ثبات یک‌بار دیگر تغییر رفتار می‌دهد تا دوباره برای مدت کوتاهی از مغرب طلوع کند و بالاخره برای شب طولانی عطارد غروب می‌کند.

۲. اپی‌سیکلها. یکی‌از نظریه‌های سیاره‌ای مهم توسط بطلیموس ابداع شد. با آزمایش مدارهای رسم شده در شکلهای ۱ و ۲ می‌توان نبوغ بطلیموس را تحسین کرد. مشکل او را به یاد آورید. لازمه یک نظریه علمی از حرکت رعایت تعصبات حاکم بر زمانه بود. برای بطلیموس این به معنای آن بود که لازم است، نظریه، خود را با زمین-مرکزی بودن منظومه شمسی وفق دهد و هم اکنون دیدیم که چه پیچیدگیهایی با این فرض عجین است. مشکل بعدی از ارسطو به جا مانده بود که دایره را کاملترین شکل در هندسه می‌دانست. بدیهی است اجرام آسمانی «انحراف‌پذیر» نبودند، بنابراین حرکت آنها باید با حرکت دایره‌ای شکل یکنواخت توصیف می‌شد. اما چگونه می‌توان از پیوند این فرضیات یک نظریه سیاره‌ای مستند ساخت ؟

بطلیموس در کتاب *المجسطی* خود که حدود ۱۳۰ سال بعد از میلاد مسیح نوشته شده است، ایده هوشمندانه اپی‌سیکلها را ابداع کرد. در اینجاست که مکان اشیاء در محدودیت ارسطوئی حرکت دایره‌ای شکل یکنواخت صدق می‌کنند. نکته ظریف این نظریه در این است که نقطه مشخص شده با حرکت اولین دایره، یعنی دایره بیرون برنده، نمایشگر مکان سیاره نیست. بلکه‌مکان مرکز دایره دومی را که با حرکت یکنواخت می‌چرخد معین می‌کند. مکان سیاره با حرکت نقطه‌ای روی دومین دایره - اپی‌سیکل - داده می‌شود. (به شکل ۴ نگاه کنید.) امروزه این روش به طرز ناامید کننده‌ای خام به نظر می‌رسد، اما به یاد داشته باشید که انواع گوناگونی از این نظریه برای بیش از هزار سال بر نجوم حاکم بوده است. زمانی طولانی و باورنکردنی برای یک نظریه علمی، حتی معادلات نیوتون قبل از آنکه توسط نسبیت اینشتین زیر سؤال برده شوند، به حاکمیتی چنین طولانی دست نیافتند.



شکل ۴

موفقیت طولانی دیدگاه بطلیموس را می‌توان با استفاده از متغیرهای مختلط دریافت. فرض کنید a_j شعاع دایره jام و دوره تناوب حرکت یکنواخت آن $\frac{b(j)}{۲}$ باشد، $j = ۱, ۲$

این به معنای آن است که حرکت سیاره‌ای که از طریق اپی‌سیکلها توصیف شده است با

$$z(t) = a_1 e^{b(1)\pi it} + a_2 e^{b(2)\pi it} \qquad (۲.۱)$$

داده شود. از این معادله ریشه موفقیت اپی‌سیکلها روشن می‌شود. یعنی با انتخابهای مناسب a_j و $b(j)$، $j = 1, 2$ معادل (۲.۱) مشابه معادله (۱.۱) است. به عبارت دیگر روش اپی سیکلی را می‌توان این گونه در نظر گرفت که تعویض متغیر لازم برای تبدیل حرکت خورشید-مرکزی سیارات به حرکت زمین-مرکزی را بازسازی می‌کند. با انتخاب مناسبی از ثابتها، عبارت اپی‌سیکلی فوق برای هر سیاره‌ای درست خواهد بود.

همچنان که زمان به پیش می‌رفت، دقت نظریه بطلیموس همیشه جوابگوی نیازهای روزافزون نجوم و ستاره‌شناسی نبود. علت این موضوع تا اندازه‌ای این بود که مدارهای واقعی به جای آنکه بر دایره‌های حول خورشید باشند بر بیضی‌هایی آشفته قرار داشتند. (برخی مدارات بطلیموسی قبلاً رفتارهای بیضوی را در خود جا داده بودند.) برای رسیدن به نتیجه دقیقتر، اصلاحاتی با ایده مشابه می‌توانست انجام بگیرد. روش کار ساده است؛ به جای در نظرگرفتن مکان سیاره روی دومین دایره، آنرا به عنوان مرکز سومین (یا چهارمین، یا پنجمین، ...) دایره که با حرکت یکنواخت مشغول دوران است، محسوب کنید. نمایش متغیر مختلطی این تقریبات عبارت است از

$$z(t) = \sum_j a_j e^{b(j)\pi it} \qquad (۲.۲)$$

که در آن $j = 1, \cdots, k$، و k تعداد دایره‌های مورد استفاده است. همانگونه که قبلاً در معادله (۱.۱) نشان داده شد، چنین روشی می‌تواند به دقت بالایی دست پیدا کند. همچنین تصور کنید که چگونه این مسئله پایان ناپذیر تعیین مقادیر بعدی a_k و $b(k)$ می‌توانست به عنوان منبع تعدادی نامتناهی از پایان نامه‌های دکتری $(Ph.D)$ مصرف شود.

اپی‌سیکلها مدتها پیش کنار گذاشته شدند. امروزه، پس از توسعه گسترده نظریه‌های دقیق ریاضی که روی معادلات نیوتون به کار برده شده‌اند، می‌دانیم حالتهایی وجود دارد که در آنها مدار سیارات یا شبه-متناوب است و یا تقریباً متناوب. حرکت شبه-متناوب چیست ؟ حرکتهایی که با معادله (۲.۲)، اپی‌سیکلها، نمایش داده می‌شوند، شبه- متناوب هستند و حد این مجموع در $k \to \infty$ حرکتهای تقریباً متناوب هستند.

۳. تصادمها و اسپینورها. امروزه برای حل مسئله Nـجسم معادلات نیوتون را به کار می‌برند. یکی از روشهای حل این معادلات می‌تواند یافتن جواب از طریق سری باشد. همانگونه که از متغیرهای مختلط می‌دانیم، شعاع همگرایی سری با فاصله تا نزدیکترین نقطه تکینگی مشخص می‌شود. این گونه تکینگیها به صورت تصادم ظاهر می‌شوند. (برای $N \leq ۴$ وضعیت بسیار پیچیده است، به [۱۳] مراجعه کنید.) بنابراین، به عنوان اولین گام در یافتن جوابهای به سری معادلات نیوتون، لازم است که ویژگیهای تصادمها را بدانیم. به عنوان مثال، می‌توان مطرح کرد که آیا امکان دارد که یک جواب را از لحاظ ریاضی از میان یک تصادم دنبال کرد؟ اگر چنین باشد این عمل شعاع همگرایی سری را بزرگ می‌کند.

برای درک رفتار تصادمها، با مسئله ۱ـجسم، یا نیروی مرکزی شروع می‌کنیم. اگر $\vec{r}(t)$ نمایشگر بردار مکان ذره‌ای باشد، آنگاه با واحدهای مناسب برای جرم و زمان و طول، معادلات حرکت عبارت است از

$$\vec{r}\,''(t) = -\frac{\vec{r}}{r^۳} \qquad (۳.۱)$$

که در آن $r = |\vec{r}|$. جوابهایی که توسط معادله (۲.۱) ارائه شده‌اند، عبارتند از، بیضی‌ها، سهمی‌ها، یا هذلولی‌ها. اما در حوالی یا خود تصادم چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا می‌توانیم حرکت را در $r = ۰$ تعریف کنیم؟ این سؤال توسط ساندمن [۱۶] در ۱۹۱۳ طرح و پاسخگویی شد. یک نظریه ساده و اصلاح شده توسط هندسه‌دان ایتالیایی، لوی-چیویتا[5] [۴]، در ۱۹۲۰ مطرح شد. برای درک ایده کار، با خانواده‌ای از مدارها شروع کنید که در حد، یک تصادم دارند، مثلاً خانواده‌ای که با معادله (۲.۱) نمایش داده می‌شوند، زمانیکه ϵ به ۱ میل می‌کند. چنین خانواده‌ای در شکل ۵ رسم شده است. نکته کلیدی آن است که وقتی ذره «بسیار نزدیک» می‌شود، به سرعت به دور جسم مرکزی چرخش می‌کند. بنابراین، اگر حرکت بتواند از لحاظ ریاضی از روی تصادم امتداد یابد، ذره تصادم کننده باید تغییری زاویه‌ای برابر ۲π به عمل آورد. در این صورت باید انتظار داشت که ذره پس از برخورد برگشت کند و از نیروی مرکزی دور شود. برای حذف این تکینگی تصادم از معادلات حرکت، نیازمند آنیم که با مرتب کردن مدارها این تغییر ناگهانی را حذف کنیم.

5.levi – Civita



شکل ۵

یکی از روشهای ملاحظه چگونگی این عمل آن است که حرکت را به صفحه محدود کنیم. با بیان دوباره بردار مکان $\vec{r} = (x, y)$ به صورت یک متغیر مختلط $z = x + iy$، معادلات حرکت عبارت خواهند بود از $z'' = \frac{-z}{r^3}$، که در آن $r = |z|$. تصادم در $r = 0$ رخ می‌دهد، که نیازمند تغییر متغیر است تا تغییر ناگهانی زاویه قطبی 2π را به صورتی درآورد که حرکت به صورت حرکت روی یک خط مستقیم درآید. برای انجام این عمل، تعویض متغیر تابع باید نصف تغییر زاویه‌ای را در این نقطه انجام دهد. با نمایش صفحه به صورت اعداد مختلط، تعویض متغیر مناسب، روشن است؛ از جذرگیری استفاده کنید. تعویض متغیر مناسب عبارت است از $w = u_1 + iu_2 = z^{1/2}$، یا

$$w^2 = z \qquad (3.2)$$

معادلات حرکت برای w، وقتی با تعویض متغیر مستقل $ds = \frac{dt}{r(t)}$، که توسط ساندمن ارائه شده است، همراه شود، نه تنها در $w = 0$، تصادم، خوش تعریف می‌شود، بلکه شکل ساده و ویژه

$$u'' + au = 0 \qquad (3.3)$$

که در آن a یک ثابت مثبت و $u = (u_1, u_2)$ نمایش برداری w است، را پیدا می‌کند. به‌عبارت دیگر، *این تبدیل ، معادلات غیرخطی نیوتون را به‌معادلات خطی یک نوسانگر همساز تبدیل می‌کند.*

برای ملاحظه چگونگی پدید آمدن معادله (۳.۳)، توجه کنید که تعویض متغیر مستقل مزبور، عملگر $\frac{d^2}{dt^2} = [rd^2/ds^2 - r'\frac{d}{ds}]/r^3$ را که در آن $(')$ به‌معنای مشتقگیری نسبت‌به s است، را تعریف می‌کند. یک عامل مهم در استخراج معادله (۳.۳) جمله r^3 واقع در مخرج عملگر است؛ این جمله، عامل r^3 در نیروی نیوتونی را حذف می‌کند. بنابراین، معادلات حرکت و انتگرال انرژی $(v^2 = 2(r^{-1} + h))$ به ترتیب عبارتند از

$$rz'' - r'z' + z = 0\ , \quad |z'|^2 = 2(r + hr^2) \qquad (3.4)$$

با یک جاگذاری ساده با انتگرال انرژی، معادلات حرکت به صورت $w'' - \frac{h}{۲}w = ۰$ درمی‌آیند. بنابراین، این جاگذاری و ضریب $a = \frac{-h}{۲}$ در معادله (۳.۳)، هردو، منعکس کننده این حقیقت‌اند که معادلات تبدیل یافته روی سطح ثابتی از انرژی هستند. از آنجا که تعویض متغیر تابع یک به یک نیست، دو مقدار u متناظر با مقدار واحدی از r است. حالت استثنایی در $u = ۰$ است که متناظر با $r = ۰$ است.

فایده دیگر معادله (۳.۳)، علاوه بر توانایی تجزیه و تحلیل رفتار مدارهای نزدیک یک تصادم دوتایی، در این است که آنها معادلاتی خطی با مقادیر ویژه موهومی محض‌اند. از این مطلب نتیجه می‌شود که تمام جوابها پایدارند، یک آشفتگی کوچک، تنها تأثیری کوچک بر جوابها می‌گذارد. به این ترتیب حل عددی این معادلات خواص جوابهای واقعی را در خود نگه می‌دارد. این مطلب برای معادله (۳.۱) درست نیست. در اینجا یک خطای عددی کوچک باعث می‌شود، حل عددی به سطح متفاوتی از انرژی برود که این به نوبه خود فرکانس حرکت را تغییر می‌دهد. در نتیجه همانگونه که برای دو آونگ با فرکانسهای متفاوت اما نزدیک، شرایط این گونه است، نهایتاً جواب صحیح و جواب محاسبه شده در نقاط انتهایی متقابل مدارها خواهند بود.

دستگاههای دینامیکی مهم و متعددی، مانند مسئله ماهواره‌های زمینی، هستند که صورتهای اغتشاش یافته‌ای از معادله (۳.۱) هستند (اغتشاش مربوط به معادلات مسئله ماهواره‌های زمینی، منعکس کننده «برآمدگی متوسط» زمین در استوا است.) بسیاری از این دستگاهها نمی‌توانند به طور تحلیلی حل شوند؛ در عوض به طور عددی از آنها انتگرال می‌گیرند. بنابراین، طبیعی است که پرسش شود، آیا می‌توان صورتهای اغتشاش یافته معادله (۳.۱) را نیز به صورتهایی تبدیل کرد که برخی از خواص پایداری نوسانگرهای همساز را در خود داشته باشد. اما، مسائلی «واقعی» مانند مسئله ماهواره‌های زمینی از فضای سه بعدی‌اند؛ و نمی‌توان آنها را به یک صفحه دو بعدی ثابت محدود کرد. بنابراین، برای عملی ساختن برنامه تبدیل مسئله ماهواره‌ها به صورت اغتشاش یافته‌ای از نوسانگر همساز سه بعدی، ابتدا باید قادر بود که صورت سه بعدی معادله (۳.۱) را به نوسانگر همساز سه بعدی تبدیل نمود. از شرح و تفسیرهایی که در متون این علم آمده است (مثلاً به [۱۵] صفحه ۲۳ مراجعه کنید.) چنین آشکار است که لوی-چیویتا به طور ناموفق در یافتن چنین تعمیمی سه بعدی از حل دو بعدی خویش تلاش کرده است.

همین طور که جهان به سوی عصر فضا پیش می‌رفت، مسئله یافتن صورت نوسانگر همساز برای مسئله دو جسم در سه بعد، اهمیت عملی را نیز بر اهمیت نظری می‌افزود. این مسئله توسط اشتیفل [۶] در سال ۱۹۶۴ در کنفرانس آبرولفاش[۷] که خود او آنرا

سازماندهی کرده بود مطرح شد. یکی از شرکت کنندگان در این کنفرانس کاستان هیمو[8]، منجمی فنلاندی، بود که برای تجزیه و تحلیل ویژگیهای نظریه نسبیت و دیگر مسائل فیزیکی‌اش از اسپینورها استفاده کرده بود. اسپینورها تعمیمی طبیعی از متغیرهای مختلط اند و کاستان هیمو با تقلید از روش لوی-چیویتا با اسپینورها این مسئله را به طور قطعی حل کرد. به طور دقیقتر، فرض کنید $w = u_1 + \mathbf{i}u_2 + \mathbf{j}u_3 + \mathbf{k}u_4$ و $z = x_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}x_3 + \mathbf{k}x_4$، و $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. با تعویض متغیرتابع $w^2 = z$، به‌همراه تعویض متغیر مستقل ساندمن، کاستان هیمو [۲] دستگاه را، به معادلات

$$\mathbf{u}'' + a\mathbf{u} = 0 \qquad (۳.۵)$$

تبدیل کرد. البته مسئله اصلی در $\mathbb{R}^3$ است، نه در $\mathbb{R}^4$.خوشبختانه، همانگونه که بعداً مشخص شد، این تعویض متغیرها هر جواب معادله (۳.۵) را به یک صفحه ثابت $x_4 = c$ می‌برد. بنابراین x_4 متغیری ظاهری است که می‌تواند صفر اختیار شود، و جوابهای معادله (۳.۵) به جوابهای معادله (۳.۱) در صفحه $x_4 = 0$ برده شوند. علاوه براین، از آنجا که یک نقطه z در صفحه $x_4 = 0$، طول بردار متناظر $\mathbf{u}$ را مشخص می‌کند، از اختلاف بُعد نتیجه می‌شود که هر نقطه صفحه $x_4 = 0$، به جای دو نقطه در تبدیل لوی-چیویتا، متناظر با یک دایره در فضای متغیر $\mathbf{u}$ است. تنها استثناء وقتی است که $\mathbf{r} = \mathbf{u} = 0$، که دایره به نقطه تبدیل می‌شود.

زمانی که تبدیل اسپینوری، مسئله دهها ساله فوق را حل کرد، کاستان هیمو و اشتیفل [۳] نیروها را جمع کردند تا با استفاده از این روش مسئله اغتشاشهای معادله (۳.۱) را تجزیه و تحلیل کنند. اینان در میان دیگر نتایج، نشان دادند که تبدیل مزبور فایده‌های عددی نیز در بردارد. در (تعمیمها در [۱۵] هستند) این تبدیل، که امروزه به طور وسیعی به کار گرفته می‌شود (بیشتر در اروپا تا امریکا)، به عنوان تبدیل KS معروف است.

اما ریشه مشکلات در تعمیم روش لوی-چیویتا چه بود؟ چرا نمی‌توانیم رابطه مشابهی را برای $\mathbb{R}^3$ پیدا کنیم. یک راه ملاحظه این موضوع بیان تعویض متغیر تابع لوی- چیویتا، $x = u_1^2 - u_2^2$، $y = 2u_1u_2$ به صورت دیفرانسیلی آن است.

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} \qquad (۳.۶)$$

6.E.Stiefel 7.Oberwolfach 8.P.Kustaanheimo

اولین ستون این ماتریس متعامد را می‌توان به عنوان معین کننده مکان یک نقطه در صفحه، مثلاً روی دایره واحد $u_1^2 + u_2^2 = 1$، دانست در حالیکه دومین ستون آن یک بردار مماس را تعیین می‌کند. بنابراین، تبدیل لوی-چویتا را می‌توان با یک میدان برداری یکه‌ای روی S^1 (دایره واحد $\mathbb{R}^2$) یکی دانست. احتمالاً تعویض متغیر تابع مناسب در $\mathbb{R}^3$ که منجر به نوسانگر همساز شود با یک ماتریس متعامد 3×3 داده می‌شود که اولین ستون آن معین کننده نقطه‌ای در S^2، کره واحد $\mathbb{R}^3$، است و دو ستون باقیمانده متناظر با بردارهای مماسی بر کره خواهند بود. اما به خاطر پدیده «گلوله بیلیارد پشمالو» ـ نمی‌توان یک توپ بیلیارد پشمالو را بدون داشتن یک «لیس گاوی»، جایی که حداقل یک مو راست می‌ایستد، شانه کرد ـ وجود چنین ماتریسی ناممکن می‌شود. به عبارت دیگر همانگونه که پوانکاره و براور نشان دادند، هیچ میدان برداری هموار همه جا ناصفر مماس بر S^2 وجود ندارد. در چارچوب کار ما، این به معنای آن است که هیچ ماتریس متعامد 3×3 مناسبی وجود ندارد، به شکل دیگر، این نتیجه توپولوژیک مانع وجود تعویض متغیر مطلوب می‌شود.

از سوی دیگر، اشتیفل، با بازگشت به پایان نامه دکتری خود و کارهای اولیه‌اش در توپولوژی جبری [۱۵، فصل ۱۱ را ببینید]، از این حقیقت آگاه بود که اگرچه شانه زدن یک S^2 پشمالو ناممکن است، یک S^3 (کره واحد $\mathbb{R}^4$) پشمالو را به طرق مختلف می‌توان شانه زد. این کره واحد، پذیرای یک پایه هموار است. اگر (u_1, u_2, u_3, u_4) مشخص کننده یک نقطه S^3 باشد، سه بردار یکه‌ای مماس و دو به دو عمود برهم باقیمانده عبارتند از $(-u_2, u_1, u_4, -u_3)$، $(-u_3, -u_4, u_1, u_2)$، $(u_4, -u_3, u_2, -u_1)$. وقتی این چهار بردار، همانند معادله (۳.۶)، به صورت ستونهای یک ماتریس 4×4 بیان شوند، تبدیل KS از متغیر تابع را تعریف خواهند کرد. توجه داشته باشید که آخرین سطر این ماتریس بر u عمود است؛ این موجب می‌شود که $x_4 = 0$. در واقع، نگاشت حاصل یکی از نگاشتهای هوپف از S^3 به S^2 است.

به دنبال تبدیل KS، نمایشهای دیگری برای رفع مشکلات تصادم در حرکت دو جسم پیدا شدند. روشی هندسی توسط موزر[9] [۷] ارائه شده است که در آن نشان داده شده است که حرکت دو جسم در فضای فیزیکی d بعدی می‌تواند به شار ژئودزیکی روی S^d مربوط شود. بنابراین، در حالت خاص $d = 3$، این مسئله در $\mathbf{R}^3$ به شیوه دیگری به حرکت روی S^3 مربوط می‌شود. در نمایش موزر، مکانهای روی کره از طریق تصویر

9.J.Moser 10.R.McGehee 11.R.Devaney

کنجنگاری متناظر با سرعت ذره است. در نتیجه، قطب شمال S^d نمایشگر تصادم، جایی که سرعت بینهایت می‌شود، است. میلنور [۶] شرح ظریفی از این نکته و ایده‌های وابسته به آن دارد. دومین کار مهم از مک‌گهی[۱۰] [۸] است. به خاطر بیاورید که ساندمن و لوی-چویتا معادلات تبدیل یافته‌ای را به دست آوردند که نقطه $r = ۰$ را به عنوان نقطه‌ای منظم دربر داشتند. این روشها به تصادمهای سه‌تایی تعمیم پیدا نمی‌کنند. اما مک‌گهی طریقی را برای «در کنار هم قراردادن» رفتار مدارها در تصادمهای سه‌گانه در $r = ۰$، یافت. او این عمل را با بیان معادلات حرکت در چارچوب دستگاه مختصات کروی، و با ارائه تعویض مناسبی از متغیر مستقل انجام داد. مرحله بعدی به کارگیری تکنیکی دستگاه مختصات کروی بود که در $r = ۰$ و قبول همه زوایا رخ می‌دهد. در نمایش او «زوایا» متناظر با وضعیت نسبی ذرات است، در حالیکه شعاع کره فاصله بین ذرات تصادم کننده را اندازه‌گیری می‌کند. با این روش، مسئله حرکت در امتداد یک خط سه جسم می‌تواند به صورت یک حرکت فرضی در یک «خمینه تصادم» وقتی شعاع دستگاه صفر است تبدیل شود؛ به عبارت دیگر، وقتی که فاصله بین ذرات به صفر نزدیک می‌شود، این همان حرکت حدی است. دوانی[۱۱] [۱] شرح ظریفی ازاین ایده‌ها دارد.

۴. نظریه ساندمن. در آغاز این قرن، ساندمن کمکهای متعدد و شایان توجهی به درک ما از مسئله N-جسم کرده است. کمکهایی که در مقابل آزمون زمانه تاب آورده‌اند. یکی از نتایج اصلی او موجب از بین رفتن اشتیاق در یکی از شاخه‌های تحقیق شد. باید هم چنین باشد، زیرا این همان جایی است که ساندمن مسئله ۳-جسم را مطابق استانداردهای مورد قبول اواخر سالهای ۱۸۰۰ و اوایل سالهای ۱۹۰۰ «حل» کرده است. در واقع ، اواخر سالهای ۱۸۰۰ شاه سوئد و نروژ برای کسی که بتواند حل مسئله N-جسم را بیابد، جایزه‌ای تعیین کرد. این جایزه در سال ۱۸۸۹ به پوانکاره تعلق گرفت، اگرچه او مسئله اصلی را حل نکرده بود. (البته، مقالهٔ برندهٔ جایزهٔ پوانکاره حاوی گنجینه‌ای از ایده‌ها بود که همچنان تأثیرگذار باقی ماند.) بالاخره، مسئله در شکل اصلی آن توسط ساندمن [۱۶] در ۱۹۱۳ هنگامی که جوابی به صورت یک سری همگرا برای مسئله ۳-جسم پیدا کرد، حل شد. متأسفانه، همگرایی سری او آنچنان به آهستگی صورت می‌گرفت که اساساً برای هرگونه مقصود عملی بی‌فایده بود. به همین علت، این نتیجه زیبا، آنطور که شایسته است شناخته شده نیست. با این همه، کار ساندمن به صورت یک ترکیب مهم و زیبا از چند ایده عمیق که به طور پیوسته بر مکانیک سماوی تأثیر می‌گذارد باقی ماند. نتایج ساندمن را می‌توان از طریق متغیرهای مختلط توصیف کرد، بنابراین با استفاده از این متغیرها، طرحی از آنچه که ساندمن انجام داد و اینکه چرا سری او این قدر آهسته همگراست،

تشریح خواهد شد. بخشی از این کار برمبنای قضیه کشی است که نشان می‌دهد شعاع همگرایی یک سری توانی با مکان نزدیکترین نقطه تکینگی معین می‌شود.

یکی از موانع جدی و پیچیده برای دستیابی به همگرایی در جواب به صورت سری توانی در مسئله ۳ـجسم، تکینگهایی است که توسط تصادمهای دوگانه پدید می‌آیند. امروزه می‌دانیم که بروز این تصادمها ازهر نوعی که باشند نامحتمل‌اند [۱۱]. اما تصادمها وجود دارند، و وقتی موجود باشند، شعاع همگرایی هرگونه سری توانی جواب را محدود می‌کنند. یکی از راههای اجتناب از این پیچیدگیها می‌تواند این باشد که توجه خود را به شرایط مربوط به مدارهای بدون تصادم معطوف کنیم. عیب این روش آن است که نمی‌دانیم چگونه این شرایط را مشخص کنیم؛ در حالت کلی، نمی‌دانیم چه شرایط اولیه‌ای به مسیرهای بدون تصادم منجر می‌شوند.

همانگونه که قبلاً اشاره شد، ساندمن هوشمندانه با تبدیل معادلات به یک دستگاه جدید که‌در آن تصادم دوتایی دیگر تکینگی نبود (یعنی، نقطه‌ای منظم‌شده بود) از این مشکل اجتناب کرد. به خاطر نقش مرکزی این نتیجه، استدلال متغیر مختلطی دیگری نیز خواهیم آورد تا نشان داده شود که چرا باید انتظار چنین نتیجه‌ای را داشت و چرا تعویض متغیر مستقل ساندمن تعویض متغیری «طبیعی» است.

برای شروع، ذرات تصادم کننده واقع بر یک خط در مسئله نیروی مرکزی را در نظر بگیرید. حرکت در نیمه مثبت محور x ها واقع می‌شود، پس معادلات تعریف کننده حرکت عبارتند از $x'' = -x^{-2}$. از آنجا که طرف راست این معادله همیشه منفی است. تقعر $x(t)$، نمودار جواب، به سمت پایین است. این موجب می‌شود که دستگاه یا در زمانهای جلوتر و یا در زمانهای عقبتر تصادم داشته باشد، و اگر $x'(t) < 0$، آنگاه x' در آینده منفی خواهد ماند. برای مشخص کردن اینکه تصادم چگونه رخ می‌دهد، طرفین معادله حرکت را در x' ضرب کنید و انتگرال بگیرید تا انتگرال انرژی

$$(x')^2 = 2x^{-1} + 2h \qquad (۴.۱)$$

که در آن h یک ثابت انتگرالگیری است، به‌دست آید.

اگر تصادمی در زمان t_0 وجود داشته باشد، آنگاه در $t \to t_0$ داریم $x \to 0$. این موضوع انتگرال انرژی را به $x(x')^2 = 2 + 2hx \simeq 2$ تغییر می‌دهد. این رابطه نیز به نوبه خود به معنای آن است که $x^{1/2}x' \simeq -2^{1/2}$ که یعنی $x^{3/2}(t) \simeq A(t_0 - t)$. در نتیجه

در

$$x(t) \simeq A(t_\circ - t)^{۲/۳} \quad t \to t_\circ \qquad (۴.۲)$$

که در آن A ثابتی مثبت است.

برای مسئله Nـجسم در حالت کلی نیز نتیجه می‌شود که اگر تصادمی از هر نوعی در $t = t_\circ$ موجود باشد، ذرات تصادم کننده باید شبیه $(t_\circ - t)^{۲/۳}$ به یکدیگر نزدیک شوند؛ یعنی سرعت نزدیک شدن در تصادمهای واقع بر یک خط، به همه انواع ممکن تصادمها تعمیم می‌یابد [۱۲، ۱۰]. این اطلاع مهمی درباره تصادمهاست، اما ماهیت پیچیده این تکینگیها را روشن نمی‌سازد. آیا یک نقطه شاخه جبری است؟ آیا یک تکینگی لگاریتمی است؟ همانگونه که بعداً اشاره خواهیم کرد، تصادمهای دوتایی همواره متناظر با نقاط شاخه جبری هستند. این نکته حتی اگر تصادمهای دوتایی متعددی همزمان رخ دهند، درست است [۱۲].

یکی از راههای نشان دادن این موضوع در حالت حرکت روی یک خط، «از بین بردن» تکینگی با تعریف $X(t)$ به صورت $X(t)(t_\circ - t)^{۲/۳} = x(t)$ است. برای ساده کردن معادلات ، فرض کنید که زمان تصادم در $t_\circ = ۰$ است (این عمل صرفاً مبدأ را بر محور زمان معین می‌کند) و به زمان تصادم از طریق مقادیر مثبت نزدیک می‌شویم. (در این دستگاه زمان قابل بازگشت است؛ معادلات حرکت تحت تعویض متغیر مستقل $t-$، پایا هستند.) با جاگذاری $[t^{۲/۳}X(t)]''$ در معادلات تعریف کننده حرکت، معادلات نسبت به $X(t)$ به صورت

$$t^۲X'' + \frac{۴}{۳}tX' - \frac{۲}{۹}X = -X^{-۲} \qquad (۴.۳)$$

در می‌آیند.

برای تبدیل این معادله دیفرانسیل اولری به شکلی که جوابهای تحلیلی داشته باشد، از تعویض متغیر مستقل $s = t^{۱/۳}$ استفاده می‌کنیم، که حاصل آن

$$s^۲X'' + ۲sX' - ۲X = -۹X^{-۲} \qquad (۴.۴)$$

است، و در بالا مشتقگیری نسبت به s است. با استفاده از روش سریها در معادلات دیفرانسیل معمولی و یک استدلال استاندارد بیشینه‌ای [۱۲] برای توجیه همگرایی، نتیجه

12.Majoriant

می‌شود که این دستگاه یک جواب تحلیلی برحسب s دارد. علاوه براین، جواب مزبور در یک همسایگی حول زمان تصادم عبارت است از

$$x(t) = \sum_k a_k t^{۲k/۳} \qquad (۴.۵)$$

از معادله (۴.۵) نتیجه می‌شود که *تصادم دوتایی مربوط به این دستگاه یک نقطه شاخه جبری است*، که در آن $s = t^{۱/۳}$ نقش متغیر موضعی یکنواخت کننده را ایفا می‌کند. وقتی t از زمان صفر می‌گذرد، جواب از روی لایه‌های سطح ریمن عبور می‌کند تا از لایه‌ای دیگر سربرآورد، به صورتی که تصادم مورد بحث متناظر با برگشتی کامل یا تصادمی کاملاً الاستیک شود. بنابراین، باید انتظار داشت که تکینگی تصادم مزبور قابل رفع باشد و مانعی جدی در تحلیل دستگاهمان ایجاد نکند. (حکمی مشابه برای تصادمهای سه گانه یا پیچیده‌تر برقرار نیست. در این موارد، برخی از توانهای واقع در بسط معادله (۴.۳) یا (۴.۴) به طور پیوسته به مقدار اجرام ذرات تصادم کننده وابسته است. بنابراین، تکینگهایی لگاریتمی حاصل می‌شود. برای تصادمهای سه گانه به [۱۴] و برای بحثهای کلی‌تر به [۱۲] مراجعه کنید.)

ضمناً، معادله (۴.۵) مبنایی برای استدلالی «شهودی» برای توضیح اینکه چرا تعویض متغیر مستقل ساندمن، $ds = \frac{dt}{r(t)}$، کارساز است، فراهم می‌آورد. اگر بدانیم زمان تصادم $t_۰$ است، آنگاه می‌توانیم جایگزینی $ds = \frac{dt}{۳(t-t_۰)^{۲/۳}}$ را برای به دست آوردن جوابی تحلیلی انجام دهیم. اما ازپیش نمی‌دانیم چه وقت تصادمی رخ می‌دهد و یا اصلاً تصادمی رخ می‌دهد یا نه. ولی، شاید یک راه اجتناب از پیچیدگی مربوط به این که چه وقت تصادمی رخ می‌دهد این باشد که تعویض زمان را بر توان مناسبی از $r(t)$ متکی سازیم. زیرا، رخدادن یک تصادم منوط به نزدیک شدن r به صفر است، بنابراین ویژگیهای رشد r معین کننده آن است که چه وقت یک تصادم رخ می‌دهد. اگر بنا باشد که چنین روشی موفقیت‌آمیز باشد، لازم است بررسی بیشتری روی ویژگیهای رشد r، با انتخاب مناسبی از α چنان صورت بگیرد که r^α در تعویض متغیر مستقل به طور مؤثری جایگزین عبارت $(t-t_۰)^{۲/۳}$ شود. بسط مجانبی ارائه شده در معادله (۴.۲) نشان می‌دهد $\alpha = ۱$، بنابراین $ds = \frac{dt}{r}$، انتخابی طبیعی برای تعویض متغیر است. این همان تعویض متغیر مستقل ساندمن است.

پس از حذف تصادمهای دوتایی از معادلات حرکت، تنها تکینگی حقیقی باقیمانده برای مسئله تبدیل یافته ۳ـجسم تصادم سه تایی است. از تصادمهای سه‌تایی با استفاده از یک نتیجه اثبات شده توسط ساندمن، که از قبل وایرشتراس آنرا می‌دانست (به [۹]

صفحه ۶۶ مراجعه کنید)، می‌توان اجتناب کرد. این نتیجه از انتگرال اندازه حرکت زاویه‌ای $\sum m_i\vec{r}_i \times \vec{v} = \vec{c}$ که در آن $\vec{c}$ بردار ثابت انتگرالگیری است و m_i، $\vec{r}_i$، $\vec{v}_i$ به ترتیب جرم، بردار مکان، و بردار سرعت ذره iام است، استفاده می‌کند. قضیه وایرشتراس- ساندمن می‌گوید که اگر $\vec{c} \neq 0$ آنگاه دستگاه مورد بحث نمی‌تواند یک فرو ریختگی کامل داشته باشد. (برای یک اثبات زیبا به [۹] صفحه ۶۶ مراجعه کنید.) یعنی، اگر $N = 3$، آنگاه تصادم سه تایی نمی‌تواند خارج از واریته جبری $\vec{c} = 0$ رخ دهد.

به این ترتیب، با معطوف کردن توجه خود به $\vec{c} \neq 0$ جمیع تکینگیهای حقیقی را از معادلات تبدیل یافته مسئله سه جسم رفع کرده‌ایم. آخرین محدودیت برای شعاع همگرایی یک جواب به سری، امکان تکینگیهای با مقادیر مختلط است؛ آیا تصادمهایی موهومی از ذرات در مقادیر موهومی زمان وجود دارد؟ بله وجود دارد. برای دیدن آنها و درک چگونگی ارتباط آنها با رفتار حقیقی، جوابهای بیضوی مسئله نیروی مرکزی معادله (۳.۱) را در نظر بگیرید. نمایش جواب $r(t) = (\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t))^{1/2}$ شکل صریحی ندارد. درعوض، به‌طورضمنی، از طریق *معادلات کپلر*

$$r(u) = a(1 - \epsilon \cos u), t = u - \epsilon \sin u \qquad (۴.۶)$$

که در آن ϵ خروج از مرکز بیضی و a طول محور اطول بیضی و u متغیر است، تعریف شده است.

جوابهای بیضوی بدون هیچ امکانی برای تصادم خوشرفتارند. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که سری توانی آنها برای همه مقادیر زمان همگرا باشند. اما چنین نیست، و این به خاطر وجود تکینگیهای مختلط است. با قرار دادن $u = u_1 + iu_2$ و $t = t_1 + it_1$، با محاسبه‌ای که صرفاً مشتمل بر بسط سینوس و کسینوس مقادیر مختلط است، ثابت می‌شود که «تصادم موهومی»، جایی که $r = 0$، در

$$u_k = 2k\pi + i \cos h^{-1}(1/\epsilon), k = 1, 2, \cdots . t_k = u_k - \epsilon \sin k \quad (۴.۷)$$

موجود است. بنابراین، نه تنها تکینگیهای مختلط رخ می‌دهند، بلکه $\mathcal{R}e(t_h)$ دقیقاً زمانی را روی محور حقیقی نشان می‌دهد که $r(t)$ به کمترین مقدار خود می‌رسد. علاوه براین، هرقدر این نزدیکترین فاصله کمتر باشد (یعنی مقدار ϵ بیشتر باشد) این تکینگی مختلط به محور حقیقی نزدیکتر خواهد بود. پس به نظر می‌رسد که اگر بتوان دستگاه ۳ـجسم را از تصادم سه‌تایی «دور» نگه داشت، آنگاه شاید تکینگیهای مختلط از محور حقیقی دور می‌شوند.

این همان مطلبی بود که ساندمن ثابت کرد. اولین اقدام او، که اصلاح مهمی در قضیه وایرشتراس-ساندمن بود، اثبات این موضوع بود که اگر $\vec{c} \neq 0$ آنگاه برای هر مقدار t، $\max |r_i(t) - r_j(t)| > D(\vec{c}) > 0$. به عبارت دیگر، اگر $\vec{c} \neq 0$، آنگاه نه تنها هیچ تصادم سه گانه‌ای وجود ندارد، بلکه دستگاه به گونه‌ای اکید از تصادم سه گانه دور می‌ماند. (به همین ترتیب، نتیجه ساندمن به ازای همه مقادیر Nبه مسئله Nـجسم تعمیم پیدا می‌کند. به [۵] مراجعه کنید.) ساندمن، با استفاده از این حقیقت همراه با قضیه وجودی کشی برای معادلات دیفرانسیل، ثابت کرد که دستگاه مورد بحث هیچ تکینگی مختلطی در یک نوار حول محور حقیقی در صفحه مختلط (عرض نوار به $\vec{c}$ بستگی دارد) ندارد. با این نتیجه بقیه اثبات او بلافاصله به دست می‌آید. همه آن چیزی که باید انجام داد، تصویر کردن این نوار به گونه‌ای همدیس به قرص واحد است. به عنوان مثال، اگر نوار مزبور $|Im(s)| < \beta$ باشد، آنگاه تعویض متغیر مستقل $\sigma = \frac{e^{\pi s/2\beta}-1}{e^{\pi s/2\beta}+1}$ این عمل را انجام می‌دهد. در این دستگاه جدید، معادلات حرکت هیچ تکینگی در قرص واحد ندارند، پس سری توانی حاصل همگرا خواهد بود. σ، در امتداد محور حقیقی در قرص واحد، به گونه‌ای یک به یک با همه مقادیر حقیقی زمان متناظر است. بنابراین، با این روش، ساندمن ثابت کرد جواب به سری توانی برای مسئله ۳ـجسم که برای همه مقادیر زمان همگرا باشد، وجود دارد.

ساندمن مسئله ۳ـجسم را حل کرد، اما متاسفانه سری جواب او ارزش عملی کمی دارد زیرا بسیار به کندی به حد خود همگراست، و برای رسیدن به یک درجه تقریب قابل اعتنا به جمله‌های بسیاری نیاز است دیدن چگونگی این امر نسبتاً ساده است. به خاطر آورید که ساندمن از دو تعویض متغیر مستقل استفاده کرد. اولین آنها برای حذف تکینگیهای مربوط به تصادمهای دوگانه بود. همانگونه که از معادله (۴.۲) دیدیم، این عمل شامل تعویض متغیری به صورت $s(t_0 - t)^{1/3}$ در حوالی یک تصادم دوگانه بود. این تعویض متغیر موجب «کندشدن» دینامیک می‌شود و این اثر جانبی را به جا می‌گذارد که مقادیر s بزرگتر از مقادیر عددی متناظر t می‌شوند. (این مشابه حالتی در انتگرالگیری عددی است که وقتی اندازه جزء طولها برای رسیدن به دقت با تغییرات سریع در دینامیک، کوچکتر می‌شود به همراه آن تعداد مراحل افزایش می‌یابد. این تعداد متناظر با مقادیر s است.) بعد، این مقادیر بزرگتر s به طور نمایی به قرص واحد در صفحه مختلط σ تصویر می‌شوند. بنابراین، نتیجه می‌شود که مقادیر نسبتاً کوچک t ممکن است با مقادیری از σ در نزدیکی مرز قرص واحد یکی شده باشند. وقتی چنین شد، باید انتظار داشت که همگرایی کند شود. این امر واقعاً رخ می‌دهد. به عبارت دیگر، اگرچه ساندمن

مسئله ۳ـجسم را به گونه‌ای موفقیت‌آمیز حل کرد، اما ویژگیهای نظری تحلیل او نشان می‌دهد که در حالت کلی یک جواب به سری توانی عمومی برای مسئله Nـجسم کارآیی ندارد. موفقیت او در حل یک مسئله کهن، توجه به این شاخه از تحقیقات را از بین برد. با اینحال، بسیاری از نتایج ساندمن که برای رسیدن به جواب به سری او به کار برده شدند، همچنان نقش مهمی در بسط و توسعه مکانیک سماوی ایفا می‌کنند.

۵. **پاورقی.** تاکید ما در این توصیف مختصر از جنبه‌هایی از مسئله Nـجسم نیوتونی براساس نقشی بود که متغیرهای مختلط ایفا می‌کردند. مناسب است که در خاتمه در مورد جنبه‌هایی تاریخی از چگونگی تأثیر مکانیک سماوی در توسعه برخی نتایج کلاسیک در متغیرهای مختلط نیز سخنی داشته باشیم.

همان طور که در بخش ۳ گفتیم، جواب مسئله ساده نیروی مرکزی $r(t)$ که در حالت بیضوی با معادله (۴.۶) داده می‌شود، هیچ نمایش صریحی ندارد. این جواب فقط به طور ضمنی از طریق معادلات کپلر تعریف شده است. در نتیجه، تعدادی از ریاضیدانها در پی یافتن یک بیان مستقیم و مفید، حتی به صورت یک سری توانی برای r بودند. وینتنر [۱۷] [13] در کتابش *اصول تحلیلی مکانیک سماوی*، در یک پاورقی در صفحه ۲۱۷ متذکر می‌شود که «*اثبات مستقیم [این جنبه از معادلات کپلر] نقش تاریخی مهمی در نظریه توابع تحلیلی بازی کرده است ... یکی از محرکهای اصلی کشفیات‌کشی در نظریه توابع مختلط، اشتیاق او برای یافتن برخوردی مناسب با سری لاگرانژ [برای معادلات کپلر] بود. کشی دقیقاً زمانی به قضیه اساسی خود در ارتباط شعاع همگرایی با مکان نزدیکترین تکینگی، واصل ماکسیموم خود رسید که مشغول کار با [این] مسئله بود. همچنین مطالبی که معمولاً به عنوان اصل آرگومان و قضیه روچ* [14] *به آنها اشاره می‌شود، اولین بار در ارتباط با این مسئله مربوط به معادله کپلر مشاهده شده است.*

مراجع

1. R. Devaney. Blowing up singularities in classical mechanical systems, *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982),535-552.

2. P. Kustaanheimo, Spinor regularization of the Kepler motion, *Ann. Univ. Turku*, Ser. AI. **73** (1964), 204-219.

13.A.Wintner 14.Rouche

3. P. Kustaanheimo and E. Stiefel, Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization, *J. Reine Angew. Math.*, **218**, (1965), 204-219.

4. T.Levi-civita, Sur la regularisation du probleme des troi corps, *Acta Math*, **42** (1920) 99-144.

5. C.Marshal and D.G.Sarri, on the final evolution of the N-body problem, *J.Diff.Eqs.*, **20** (1976) 150-186.

6. J.Milnor, on the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math.* Monthly, **90** (1983) 353-364.

7. J. Moser, Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold, *Comm. Pure. Appl. Math*, **23**(1970) 609-636.

8. R.McGehee, Triple Collisions in the Collinear three body problem, *Invent. Math.*, **27** (1974) 191-227.

9. Harry Pollard. Celestial Mechanics, *Carus Math Monograph*, No.**18**, MAA, 1976.

10. H. Pollard and D.G. Sarri, Singularities of the N-body problem, I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **30**(1968) 263-269.

11. D.G. Sarri, Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 267-271; Paper II, *Trans, Amer. Math. soc.*, **181** (1973)351-368

12. Manifold structure for collisions and for hyperbolic-parabolic orbits in the N-body problem, *J.Diff. Eqs.*, **55** (1984) 300-329.

13. A global existence theorem for the four body problem of Newtonian mechanics. *J.Diff.Eqs.*, **26**(1977)80-111.

14. C.L. Siegel.Der Dreierstross, *Ann. Math.*, **42**(1941) 127-168.

15. E.L. Stiefel and G.Scheifel, *Linear and Regualr Celestial Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1971.

16. K.F. Sundman, Recherches sur le probleme des trois corps, *Acta Soc.Sci. Fennicael*, 34 no-**34** (1907)

17. A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, 1941.

ولادیمیر آرنولد

قانون دوم کپلر و توپولوژی انتگرالهای آبلی*

ترجمهٔ سعید ذاکری

ولادیمیر ایگورویچ آرنولد از محققان تراز اول ریاضی است که در شاخه‌های متعددی آثار ارزشمندی از خود به جای گذاشته است. مسئله سیزدهم هیلبرت، نظریه کام (کولموگورف، آرنولد، موزر) در مورد آشفتگیهای یک دستگاه هامیلتنی، هندسه جبری حقیقی، نظریه تکینگیها، نظریه فاجعه‌ها، هندسه درهم تافته و هندسه تماس، و نظریه انشعاب برخی از مهمترین موضوعاتی است که با نام او پیوند خورده‌اند. اما آرنولد علاوه برآنکه محقق برجسته‌ای است، در توصیف ریاضیات مورد علاقه‌اش نویسنده‌ای چیره‌دست و کم نظیر نیز هست، و در این میدان برای خود صاحب سبکی کاملاً ممتاز و منحصر به فرد است. او به هنگام نوشتن، مخاطب خود را کاملاً می شناسد، از صورتگرائیها و فرمول بندیهای فضل فروشان به وضوح گریزان است. آرنولد به جز چند مقاله توصیفی عالی که برای عموم ریاضی خوانان نوشته است، مولف چندین کتاب ارزنده نیز هست که برخی از آنها عبارت‌اند از: *معادلات دیفرانسیل عادی* (۱۹۷۳)؛ *روشهای هندسی در نظریه معادلات دیفرانسیل عادی* (۱۹۸۳)؛ *مسائل ارگودیک مکانیک کلاسیک* (به همراه آوز، ۱۹۶۸)؛ *روشهای ریاضی در مکانیک کلاسیک* (۱۹۷۸)؛ *نظریه فاجعه‌ها* (۱۹۸۴)؛ *تکینگیهای نگاشتهای دیفرانسیل پذیر*، جلدهای ۱ و ۲ (به همراه ورچنکو و حسین‌زاده، ۱۹۸۵)؛ *دستگاههای دینامیکی*، جلدهای ۱، ۳، ۴، ۵ (از سری دایرةالمعارف علوم ریاضی اشپرینگر، ۱۹۸۸). اخیراً (۱۹۹۰) ترجمه انگلیسی آخرین اثر او با نام هویگنس و بارو، نیوتن و هوک

---

*Arnold, V.I., "Kepler's second law and the topology of Abelian integrals", chapter 5 in *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhauser verlag Basel, 1990.

منتشر شده است. این کتاب پیدایش آنالیز ریاضی، نظریه گرانش و به طور کلی‌تر مکانیک آسمانی را در کارهای دانشمندان بزرگ قرن هفدهم بررسی می‌کند، و به طرز کاملاً بدیعی به بحث درباره سهم این چهار تن در تکوین این نظریه می‌پردازد. آرنولد به ویژه تحت تاثیر کتاب *پرینکیپیای* نیوتن است. او مدعی است که در این کتاب ایده‌های ریاضی کاملاً نوینی وجود دارد که نیوتن در بیان آنها چند قرن از زمان خود پیشتر بوده است. فصل آخر این کتاب بسیار خواندنی، که عنوان این مقاله برگرفته از آن است، گوشه‌ای از ادعای آرنولد را ثابت می‌کند. موضوع این فصل، که به تنها دو صفحه از *پرینکیپیا* اختصاص دارد، علاوه بر آنکه گویای نبوغ بی‌همانند نیوتن است، نمونه‌ای از سبک هیجان انگیز توصیف آرنولد را نیز به دست می‌دهد.

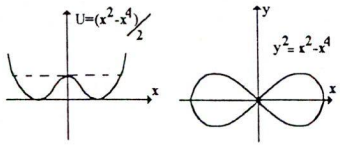
۱. قضیه نیوتن درباره متعالی بودن انتگرالها

در کتاب *پرینکیپیا* [1] دو صفحه کاملاً ریاضی وجود دارد که شامل یک اثبات توپولوژیک جدید و شگفت انگیز از قضیه جالبی در باب متعالی بودن انتگرالهای آبلی است. این قضیه نیوتن که در لابلای تحقیقات مربوط به مکانیک آسمانی پنهان بود، آنقدرها توجه ریاضیدانان را به خود جلب نکرده است. شاید دلیل این امر آن باشد که استدلالهای توپولوژیک نیوتن دویست سال از دانش زمان خود جلوتر بود. اثبات او اساساً مبتنی بر بررسی موجودی هم ارز با رویه‌های ریمانی از خمهای جبری است، بدین لحاظ هم معاصرانش آن را نامفهوم می‌یافتند و هم آن ریاضیدانان قرن بیستمی خو گرفته با نظریه مجموعه‌ها و نظریه توابع یک متغیر حقیقی، که از توابع چند مقداری گریزان‌اند. علاوه براین، توضیحات نیوتن بسیار مختصر بود و او بسیاری از حقایقی را که برایش واضح بود توضیح نداده بود، حال آنکه این حقایق تنها چندین نسل بعد وارد فرهنگ عمومی ریاضیات شد. افزون بر اینها، او پس از اثبات قضیه، سرانجام مثالهای نقضی را که برای آن می‌شناخت آورده بود. یک خم در صفحه جبری خوانده می‌شود هرگاه در معادله‌ای چون $P(x,y)=0$ صدق کند، که در آن P یک چند جمله‌ای ناصفر است. مثلاً دایره $x^2+y^2=1$ یک خم جبری است. مثالهای دیگر خمهای جبری عبارت‌اند از بیضی، هذلولی، و لمنیسکات (غیر برنولی) $y^2=x^2-x^4$ (شکل ۱). منحنی سینوسی یک خم جبری نیست (چرا؟)

تابعی را جبری می‌گوییم که نمودارش یک خم جبری باشد. مثلاً $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ یک تابع جبری دو مقداری است. اکنون یک هاگینه [2] جبری (یک خم جبری بسته

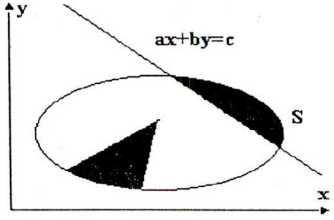
1.Principia 2.oval

محدب) را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱

تعریف. یک هاگینه، جبری-*انتگرال* پذیر [۳] خوانده می‌شود هرگاه مساحت یک قطعه از آن را بتوان به طور جبری بیان کرد.



شکل ۲

به بیان دیگر، مساحت S قطعه جدا شده به وسیله خط $ax + by = c$ (شکل ۲) باید تابعی جبری از خط باشد، یعنی باید در یک معادله جبری چون $P(S; a, b, c) = 0$ صدق کند، که در آن P یک چند جمله‌ای ناصفر است.

یادداشت. اگر یک هاگینه، جبری-انتگرال پذیر باشد، مساحت قطاعی که توسط زاویه‌ای جدا می‌شود که رأسش نقطه‌ای درون هاگینه است، تابعی جبری از دو خط تشکیل دهنده زاویه است. این بدان خاطر است که مساحت مثلث، که اختلاف بین مساحت قطاع و قطعه است، جبری است (برای جزئیات بیشتر، بند ۵ را ببینید).

نیوتن به یافتن همه هاگینه‌های جبری-انتگرال پذیر همت گماشت. نتیجه او را در اینجا می‌آوریم.

قضیه. هر هاگینه جبری - انتگرال پذیر نقاط تکین دارد. همه هاگینه‌های هموار جبری-انتگرال ناپذیرند.

---

3 · algebraically integrable

مثال: بیضی یک هاگینه جبری-انتگرال ناپذیر است. پس نتیجه می‌گیریم که معادله کپلر، که مکان یک سیاره را روی مدار بیضی شکل خودش به عنوان تابعی از زمان مشخص می‌کند (به موجب قانون دوم کپلر، مساحت جاروب شده توسط بردار شعاعی متناسب با زمان است)، متعالی است و نمی‌توان آن را برحسب توابع جبری حل کرد.

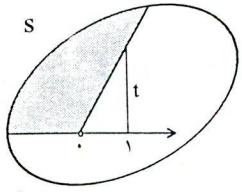
این مثال نیوتن را به قضیه کلی‌اش هدایت کرد. این قضیه‌ای شگفت‌آور است، زیرا در نظر اول ارتباط واضحی بین جبری-انتگرال پذیر بودن و نقاط تکین وجود ندارد.

یادداشت: به زبان امروزی، معادله کپلر به شکل $x - e\sin x = t$ است. این معادله نقش مهمی در تاریخ ریاضیات ایفا کرده است. از زمان نیوتن جواب x را به شکل یک سری برحسب توانهای خروج از مرکز e می‌جسته‌اند. سری مزبور، هرگاه $|e| \leq ۰/۶۶۲۷۴۳\ldots$، همگراست.

بررسی منشأ این ثابت اسرارآمیز، کوشی را به آفرینش آنالیز مختلط هدایت کرد. این مفاهیم بنیادی ریاضی و نیز نتایجی نظیر توابع بسل، سریهای فوریه، شاخص توپولوژیک یک میدان برداری، و «اصل آوند» در نظریه توابع یک متغیر مختلط، همگی برای اولین بار هنگام مطالعه معادله کپلر ظاهر شدند.

اثبات قضیه نیوتن. نقطه‌ای مانند o درون هاگینه انتخاب می‌کنیم و پرتوی ساطع شده از آن را دوران می‌دهیم. اگر هاگینه جبری-انتگرال پذیر باشد، مساحت جاروب شده توسط بردار شعاعی یک نقطه روی هاگینه (شکل ۳) باید تابعی از تانژانت t زاویه میل پرتو نسبت به محور x باشد.

فرض کنیم پرتو را واداشته باشیم تا هاگینه را متوالیاً دور بزنند. در هر بار دور زدن، مساحتی که جاروب می‌شود به اندازه مقدار مساحت محصور شده توسط هاگینه زیاد می‌شود. پس این مساحت جاروب شده، به عنوان تابعی چند مقداری از t، به ازای یک مکان پرتو بینهایت مقدار متفاوت را اختیار می‌کند. اما یک تابع جبری نمی‌تواند بینهایت مقداری باشد، زیرا تعداد ریشه‌های یک چند جمله‌ای ناصفر نمی‌تواند بیشتر از درجه‌اش باشد. بنابراین مساحت جاروب شده تابعی جبری نیست، پس هاگینه جبری-انتگرال پذیر نیست. نیوتن به این مطلب اشاره می‌کند که این استدلال ثابت می‌کند که طول قوس هاگینه تابعی جبری نیست.



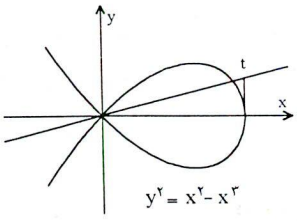
شکل ۳

۲ـ جبری بودن موضعی و فراگیر

بدین ترتیب، آیا هیچ هاگینه جبری-انتگرال پذیر وجود ندارد ؟ چرا، وجود دارد، زیرا نیوتن پیش از این مثالهایی از هاگینه‌هایی می‌شناخت که برای مساحت قطعه‌ها به طور جبری بیان می‌شدند، و او این مثالها را هنگام بحث دربارهٔ قضیه‌اش در پرینکیپیا یادآوری کرده بود. ساده‌ترین مثال هاگینه شکل ۴ است، $y^۲ = x^۲ - x^۳$. فرض کنیم t تانژانت زاویهٔ میل به خط قاطع $y = ۴x$ باشد. در این صورت $x = ۱ - t^۲$، پس نمایشی پارامتری از هاگینه به صورت

$$x = ۱ - t^۲$$
$$y = t - t^۳$$

به دست می‌آید: $\int y dx$

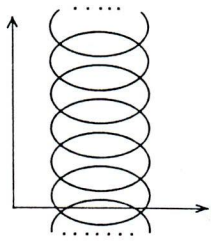


شکل ۴

از این نمایش واضح است که انتگرال مساحت $\int y dx$ یک چندجمله‌ای برحسب t است. پس مساحت هر قطعه‌ای را که توسط خطی از این هاگینه جدا شود، می‌توان به طور جبری محاسبه کرد.

هرچند هاگینه‌ای که این چنین ساخته شد هموار نیست، استدلال نیوتن را می‌توان در مورد آن به کار بست. این استدلال نشان می‌دهد که مساحت جاروب شده توسط بردار

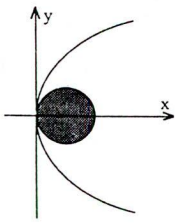
شعاعی را نمی‌توان به طور فراگیر با یک تابع جبری یکتا بیان کرد. در واقع، هربار که پرتو از نقطهٔ تکین (گره) روی هاگینه می‌گذرد، تابع جبری‌ای که مساحت را بیان می‌کند به یک تابع جبری جدید جهش می‌کند.



شکل ۵

مثال پیش نشان می‌دهد که یک تابع می‌تواند موضعاً جبری باشد، هرچند ممکن است به طور فراگیر چنین نباشد (شکل ۵). بر این مفهوم، هاگینهٔ مورد بحث را می‌توانیم موضعاً جبری-انتگرال پذیر بنامیم. عملاً مفهوم جبری-انتگرال پذیر بودن موضعی به همان سودمندی جبری - انتگرال پذیر بودن فراگیر است.بنابراین نیوتن به طور طبیعی این پرسش را مطرح کرد ؛ *آیا یک هاگینهٔ جبری هموار می‌تواند موضعاً جبری-انتگرال پذیر باشد* ؟ به بیان دیگر، آیا مساحت S جدا شده توسط خط $ax + by = c$ می‌تواند در همسایگی هر نقطه تابعی جبری از (a,b,c) باشد؟ برای ساختن یک هاگینهٔ موضعاً جبری- انتگرال پذیر (به روش شکل ۴) که در هر نقطه‌اش مماس داشته باشد، کافی است یک جفت چند جمله‌ای مناسب انتخاب کنیم. مثلا چند جمله‌ای‌های $x = (t^2 - 1)^2$ و $y = t^3 - t$ هاگینهٔ شکل ۶ را به دست می‌دهند که در هر نقطه‌اش حتی انحنای پیوسته دارد (چرا؟). بدین ترتیب یک هاگینه به دست آورده‌ایم که شبیه یک خم کاملاً هموار به نظر میرسد و موضعاً جبری-انتگرال پذیر است (جبری-انتگرال‌پذیر بودن فراگیر بنا به استدلال نیوتن ممکن نیست).

مسئله. یک هاگینهٔ (موضعاً) جبری-انتگرال پذیر با یک نقطهٔ تکین بسازید که در یک همسایگی نقطهٔ تکین، نمودار تابعی با ۱۹۸۹ مشتق پیوسته باشد (و در همسایگی نقاط دیگر، منطبق بر نمودار توابعی بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد).



شکل ۶

۳. قضیهٔ نیوتن دربارهٔ انتگرال ناپذیری موضعی

بدین ترتیب یک هاگینهٔ موضعا جبری-انتگرال پذیر می‌تواند تا هر مرتبهٔ متناهی مفروض هموار باشد (یعنی می‌تواند همه جا با توابعی که تا مرتبهٔ مفروض مشتق‌پذیرند، تعریف شود). اما در همهٔ مثالهای ما یک نقطهٔ تکین روی هاگینه وجود داشت که در آنجا مشتق از یک مرتبه‌ای ناپیوسته می‌بود.

نیوتن تنها خمهایی را واقعاً هموار در نظر می‌گرفت که در همسایگی هر نقطه‌شان منطبق بر نمودار تابعی باشند که بتوان آن را به یک سری توانی همگرا[۴] به شکل

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

بسط داد (که در آن مبداء در نقطهٔ مورد نظر گرفته شده است.) چنین خمهایی امروزه *تحلیلی* نام دارند.

یادداشت. تفاوت رفتار خمهایی با مرتبه‌های متفاوت مشتق‌پذیری به خوبی بر نیوتن معلوم بوده و در *پرینکیپیا* مورد بحث قرار گرفته است. بسط همهٔ توابع جبری و مقدماتی به سریهای توانی سریعاً همگرا یکی از دستاوردهای اصلی ریاضی نیوتن بود. به کمک قضیه‌ای که در بند ۱ بیان کردیم، نیوتن حکم بسیار قویتری به دست آورد.

قضیه. *هیچ هاگینهٔ تحلیلی‌ای، حتی موضعاً، جبری-انتگرال پذیر نیست.*

اثبات جبری-انتگرال ناپذیری موضعی هاگینه‌های تحلیلی. اگر یک هاگینه به طور موضعی، و نه فراگیر، جبری-انتگرال پذیر باشد، مساحت جاروب شده در یک طرف یک نقطه با یک تابع جبری، و در طرف دیگر آن نقطه با یک تابع جبری دیگر بیان می‌شود. اما برای یک هاگینهٔ تحلیلی، مساحت جاروب شده به طور تحلیلی به راستای پرتو بستگی دارد. بنابراین دو روی این تابعهای جبری را می‌توان در یک همسایگی این

[۴] همگرایی این سری برای اثبات انتگرال ناپذیری اساسی نیست و در واقع استدلال را می‌توان در حالاتی که این سریها مجانبی هم باشند به کار بست.

نقطهٔ روی هاگینهٔ تحلیلی به یک سری توانی همگرا بسط داد. پس هردو این توابع باید در یک همسایگی آن نقطه با یکدیگر برابر باشند. اما در این صورت این دو تابع باید همه جا با یکدیگر برابر باشند (این مطلب از اینجا ناشی می‌شود که یک چند جمله‌ای ناصفر نمی‌تواند بیشتر از مبداش ریشه داشته باشد).

بنابراین اگر یک هاگینهٔ تحلیلی موضعاً جبری-انتگرال پذیر وجود داشته باشد، باید به طور فراگیر جبری-انتگرال پذیر باشد. اما چون این امر غیرممکن است (بند ۱)، نتیجه می‌گیریم هاگینهٔ تحلیلی، حتی موضعاً، جبری-انتگرال پذیر نیست.

۴. تحلیلی بودن خمهای هموار

یک خم را بینهایت بار هموار می‌نامیم هرگاه به طور موضعی نمودار تابعی باشد که از هر مرتبه مشتق‌پذیر است.

قضیه. *هر خم جبری بینهایت بار هموار، تحلیلی است.*

این حقیقت بر نیوتن معلوم بود، زیرا او می‌توانست معادلهٔ هر «شاخهٔ» یک خم جبری را در همسایگی هر نقطه‌اش به شکل یک سری سریعاً همگرای

$$y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \cdots$$

بیان کند (که در آن مبداء منطبق بر نقطهٔ مورد نظر گرفته شده است).

[نیوتن قضیهٔ مربوط به همگرایی این سری را این طور بیان کرده است؛ «به ازای x کوچک، هرچه این عبارت را بیشتر بسط بدهیم، بیشتر به مقدار واقعی y نزدیک خواهد شد، به طوری که اختلاف آن را با مقدار دقیق y می‌توان نهایتاً از دو کمیت مفروضی کوچکتر کرد.»] هر جملهٔ این سری که توان x در آن کسر می‌باشد، تنها تعدادی متناهی مشتق دارد. اگر دست کم چنین جمله‌ای در سری با توان کسری وجود داشته باشد، آنگاه خمی که با این سری تعریف می‌شود نمی‌تواند در یک همسایگی نقطهٔ تحت بررسی بینهایت بار هموار باشد. بنابراین برای یک خم جبری بینهایت بار هموار، تنها جملات با توانهای صحیح x در بسط وجود دارد، و این به معنای آن است که خم ما تحلیلی است.

نتیجه. *هیچ هاگینهٔ جبری بینهایت بار همواری، حتی موضعاً، جبری- انتگرال پذیرنیست.*

بدین ترتیب یک خم بستهٔ محدب بینهایت بار هموار، به شرطی که جبری باشد، حتی به طور موضعی هم نمی‌تواند جبری-انتگرال پذیر باشد. آیا ممکن است بتوان در بین هاگینه‌های غیرجبری، خمهایی یافت که موضعاً جبری-انتگرال پذیر باشند ؟

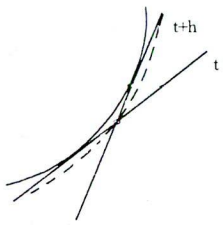
۵. جبری بودن هاگینه‌های موضعا جبری-انتگرال پذیر

یک هاگینهٔ هموار غیرجبری نمی‌تواند جبری-انتگرال پذیر باشد. این مطلب از آنچه در بالا نشان دادیم نتیجه می‌شود، زیرا قضیهٔ زیر درست است.

قضیه. *دو هاگینهٔ موضعاً جبری-انتگرال پذیر، خود جبری است.* نیوتن این مطلب را به عنوان حقیقتی واضح به کار برد. ظاهراً استدلال او باید چنین بوده باشد.

لم. *پوش هر خانوادهٔ جبری از خطوط، یک خم جبری است.*

به عبارت دیگر، اگر مجموعهٔ مماسهای بر یک خم در یک معادلهٔ جبری صدق کنند، خود خم باید جبری باشد.



شکل ۷

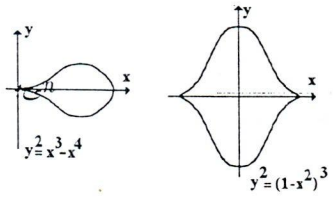
اثبات لم. دو مماس نزدیک به هم را در نظر می‌گیریم به طوری که تانژانت زاویهٔ میل آنها نسبت به محور x برابر t و $t+h$ باشد (شکل ۷). هرگاه h ثابت باشد و t تغییر کند، نقطهٔ تقاطع این دو خط یک خم جبری را می‌پیماید (منحنی نقطه‌چین در شکل ۷). درجهٔ این خم (یعنی درجهٔ چند جمله‌ای تعریف کنندهٔ آن) کرانی مستقل از h دارد. (این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که شرط سازگاری در معادلهٔ جبری به صورت صفر شدن یک چند جمله‌ای از ضرایب آن دو معادله بیان می‌شود) این حقیقت را نیوتن در صفحه‌ای از *پرینکیپیا* مورد بحث قرار داده است. در همین صفحه او توضیح داده است که دو خم جبری از درجه‌های n, m در حداکثر mn نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

هرگاه h به صفر میل کند، نقطهٔ تقاطع مماسهای مجاور به خم اصلی میل می‌کند. بنابراین خم اصلی از آنجا که حد خمهای جبری، با درجهٔ کراندار است، خود نیز جبری خواهد بود.

اثبات قضیه. مماس بر یک هاگینه، قطعه‌ای با مساحت صفر را از آن جدا می‌کند. بنابراین مماسهای $ax+by=c$ بر یک هاگینهٔ موضعاً جبری-انتگرال پذیر، در یک معادلهٔ جبری $P(0; a, b, c) = 0$ صدق می‌کنند (بند ۱ را ببینید). بنابر لم بالا هاگینه جبری خواهد بود و این قضیه را ثابت می‌کند.

۶. خمهای جبری-انتگرال ناپذیر با نقاط تکین

بنابراین هیچ هاگینهٔ بینهایت بار همواری [چه جبری باشد و چه غیرجبری]، حتی به طور موضعی نمی‌تواند جبری-انتگرال پذیر باشد. به علاوه، استدلالهای نیوتن جبری-انتگرال ناپذیری موضعی خمهای بستهٔ غیرمحدب بینهایت بار همواری که خود را قطع نمی‌کنند، و حتی بسیاری خمهای با نقاط تکین را، ثابت می‌کند.



شکل ۸

همهٔ خمهایی که نقاط تکینشان نقطهٔ بازگشت [۵] باشند، موضعاً جبری-انتگرال ناپذیرند، به ویژه خمهایی که با معادلات $y^۲ = x^۳ - x^۴$ یا $y^۲ = (۱ - x^۲)^۳$ داده شده‌اند (شکل ۸)، یا خمهایی با نقاط تکین از نوع $y = x^{p/q}$ که q فرد باشد، و الی آخر.

نیوتن اشاره می‌کند که برای تضمین جبری-انتگرال ناپذیری موضعی کافی است لازم شماریم که «شاخه‌های مزدوج یک خم که به بینهایت می‌گریزند» به نقاط یک خم بسته نزدیک نشوند. به وضوح او مثالهایی مانند شکلهای ۴ و ۶ را در نظر داشت که در آنها «شاخه‌های مزدوج» وجود دارد.

درواقع، واژه‌های «که به بینهایت می‌گریزند» در بیان او اشتباه‌اند، بلکه باید لازم شماریم که خم خودش را قطع نکند. یک شرط کافی برای اینکه خم بسته‌ای که در معادلهٔ $P(x, y) = ۰$ صدق می‌کند خودش را قطع نکند آن است که P روی هر دایره را به مرکز هر نقطهٔ خم، اگر شعاع دایره به قدر کافی کوچک باشد، باید دقیقا در دو نقطه صفر شود (یک شرط علمی‌تر برای اینکه خم خودش را قطع نکند چنین است؛ هاگینه باید در تناظر یک به یک با یکی از مؤلفه‌های همبندی حقیقی بهنجار شده‌اش باشد.)

به کمک روش نیوتن می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

---

5 · cusp

قضیه. *همهٔ خمهای جبری که به مفهوم بالا خودشان را قطع نکنند (حتی موضعاً جبری-انتگرال ناپذیرند.*

از سوی دیگر، یک خم بسته که خودش را قطع می‌کند، یقیناً می‌تواند موضعاً جبری-انتگرال‌پذیر باشد (بنابه دلایلی نیوتن این امکان را وقتی که می‌نوشت «که به بینهایت می‌گریزند» نادیده گرفته بود). یک مثال لمنیسکات (غیربرنولی) $y^2 = x^2 - x^4$ (شکل ۱) است ؛

تابع $\int y dx = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$ یک تابع جبری است.[۶]

اما حتی برای خمهایی که خودشان را قطع می‌کنند، خاصیت جبری-انتگرال پذیر بودن نادر است.

از استدلالهای نیوتن روشن است که مساحت کل محصور شده توسط یک خم بستهٔ موضعاً جبری-انتگرال پذیر است که دو حلقهٔ آن سهمهایی مخالف در مساحت کل دارند. اگر لمنیسکات را چنان دگردیس کنیم که قدرمطلق مساحتهای دو حلقه‌اش نابرابر شوند، آنگاه خاصیت موضعاً جبری-انتگرال پذیر بودن خود را از دست خواهد داد.

۷. اثبات نیوتن و ریاضیات جدید

قضیهٔ نیوتن را می‌توان به ابر رویه‌ها در یک فضای زوج بعدی منتقل کرد. اما در یک فضای فرد بعدی وضعیت پیچیده‌تر است. مثلا در حالت سه بعدی حجم یک قطعهٔ کروی به طور جبری به صفحهٔ قاطع بستگی دارد (قضیهٔ ارشمیدس). من غیر از بیضی گون هیچ جسم جبری-انتگرال پذیری در فضاهای فرد بعدی نمی‌شناسم. چنان که واسیلیف نشان داده است، اگر چنین اجسامی وجود داشته باشند، باید از نوعی بسیار خاص باشند. ارتباطات واضح بین این پرسش و نظریهٔ تکینگیها، هندسهٔ انتگرال، و توموگرافی ممکن است حل آن را امکان پذیر کند.

امروزه ایده‌هایی که اثبات نیوتن بر آنها مبتنی است، ادامهٔ تحلیلی و مونودرومی[۷]

---

[۶] این مثال را هویگنس در نامه‌ای به لایب نیتس در ۱۶۹۱ نوشته است. کتاب

Brougham, H., and Routh, E.J. *Analytical view of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855

را ببینید. لایب نیتس در پاسخ هویگنس مسئله متعالی بودن مساحت قطعه‌های جدا شده از یک خم جبری (تعریف شده با معادله‌ای با ضریب گویا) توسط خطوط راست با ضرایب جبری را فرمول بندی کرد (از جمله، مسئله متعالی بودن π و لگاریتم اعداد جبری). مسئله لایب نیتس کلی‌تر از مسئلهٔ هفتم هیلبرت است،اما به خلاف 'مسئلهٔ اخیر، به نظر می‌رسد که هنوز حل نشده باشد.

نام دارند. این ایده‌ها در مبانی نظریهٔ رویه‌های ریمانی و شاخه‌هایی از توپولوژی جدید، هندسهٔ جبری، و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جای دارند که بیش از هر چیز با نام پوانکاره پیوند خورده‌اند. اینها شاخه‌هایی هستند که در آنها آنالیز با هندسه ممزوج شده است تا با جبر.

اثبات فراموش شدهٔ نیوتن از قضیهٔ جبری-انتگرال ناپذیر بودن هاگینه‌ها، نخستین «اثبات امتناع» در تاریخ عصر جدید ریاضیات است؛ سرمشقی است برای اثباتهای آتی امتناع حل معادلات جبری با رادیکالها (آبل) و امتناع حل معادلات دیفرانسیل با توابع مقدماتی یا تربیعات (لیوویل)، و بی‌دلیل نبود که نیوتن آن را با اثبات گنگ بودن رادیکالهای اعداد صحیح در کتاب «اصول» اقلیدس مقایسه کرد.

جالب توجه است که وقتی امروز کتابهای نیوتن را با آراء اخلاف او مقایسه می‌کنیم، درمی‌یابیم که سبک اصلی نیوتن در ارائهٔ مطالب، نسبت به ترجمه‌ای که شارحان از ایده‌های هندسی او به زبان رسمی حسابان لایب نیتس ارائه دادند، جدیدتر، قابل فهم‌تر، و سرشارتر از اندیشه‌های نو است.

---

7 · monodromy

لین آرتور استین

دانش الگوها*

ترجمهٔ پدرام صفری

رشد سریع محاسبه و کاربردهای علوم ریاضی به باروری متقابل این علوم کمک کرده است، به طوری که این امر انبوهی بی‌نظیر از روشها،نظریات، و مدلهای جدید برجای گذاشته است. مثالهایی از علم آمار، ریاضی محوری، و ریاضیات کاربردی این تغییرات را ـ که رابطه بین ریاضیات و علم را هم غنی کرده‌اند و هم وسعت بخشیده‌اند ـ نمایان می‌سازند. دانش ریاضی دیگر مطالعهٔ صرف عدد و فضا نیست، بلکه به دانش الگوها بدل شده است، و نظریه در آن برمبنای روابط بین الگوها و کاربردهای منشعب شده از همخوانی الگو و مشاهده بنا گردیده است.

ریاضیات نوین به تازگی به سیصدمین سالگرد خود رسیده است. انتشار «پرینکیپیاماتماتیکا» ی نیوتن در سال ۱۶۸۷ ، ریاضیات را به عنوان الگوی روش شناسانه علوم نظری پایه‌ریزی کرد. نیوتون الگوهایی را از میان انبوه داده‌های نجومی عصر خود تشخیص داد، از میان این الگوها اصول کلی مشخصی را تجرید کرد (و از آنجا پرینکیپیا [حاصل شد]) ؛ سپس این اصول را برای استنتاج الگوهای شناخته شده یا ناشناخته درباره رفتار اجسام سماوی به‌کار برد. [ریاضیات] او دانشی از الگوها بود ـ ریشه در داده‌ها داشت، با استنتاج تحکیم می‌شد، با مشاهده تأیید می‌گردید.

تا پایان قرن نوزدهم، آفریده‌های نیوتون به‌طرز باشکوهی شکوفا شد، و شکوفه‌های خردورزانهٔ بی‌نظیری را تولید کرد. غولهای اروپایی مثل اویلر، لاگرانژ، و وایراشتراس، حساب [دیفرانسیل و انتگرال] را تشریح و پاکسازی کرده بودند و با این کار پایه‌های

---

* Steen,L.A. "The Science of Patterns" ,*Science*,Vol.240 (1988), 611-616.

آنالیز نوین را بنیان نهاده بودند. جیمز کلرک ماکسول «مشتق» های نیوتن را برای نوشتن الکترومغناطیس به‌کار برد، و جرج برنهارد ریمان دیفرانسیل‌ها را به هندسه اعمال کرد، که زمینه‌ساز مناسبی (گرچه ناخواسته) برای آلبرت آینشتاین بود، که به‌زودی کلید یک نظریه کلی جاذبه را در هندسه ریمانی کشف می‌کرد.

در همان حال، در یک قارهٔ پرت، مردم ایالات متحده دومین قرن [حیات] خود را بدون اینکه غولهای ریاضی یا علمی در میانشان باشند آغاز می‌کردند. اما در ۱۸۸۸، دو قرن پس از «پرینکیپیا»، چند فرد دوراندیش آنچه را که اکنون همان «انجمن ریاضی آمریکا» است بنیان نهادند، و از آنجا فرایندی را به جریان انداختند که بهترین محیط را برای تحقیق در ریاضی به وجود آورد.

به یادبود این سالگرد، ریاضیات آمریکا اکنون صدمین سال تولد خود را جشن می‌گیرد.

نیروهایی برای دگرگونی

بسیاری از افراد تحصیل کرده، به‌خصوص دانشمندان و مهندسان، تصویری از ریاضیات در سر پنهان دارند، چونان درختی از دانسته‌ها: فرمولها، قضایا، و نتایج مانند میوه‌های رسیده آویزانند تا توسط دانشمندان در حال گذر برای تغذیهٔ نظریه‌هایشان چیده شوند. در مقابل، ریاضیدانان رشته‌شان را به صورت یک جنگل استوایی می‌بینند که به سرعت گسترش می‌یابد و با نیروهای خارج از ریاضیات تقویت و تغذیه می‌شود و شکل می‌گیرد و در عین حال به تمدن بشری با گیاهان و جانوران متنوع و دائماً دگرگون شوندهٔ اقلیم خردورزی غنا می‌بخشد. این تفاوتها در ادراک در وهلهٔ اول مربوط به زمین شیبدار و ناهموار زبان مجردی است که جنگل استوایی ریاضی را از حوزهٔ فعالیت‌های عادی بشری متمایز می‌سازد.

هزاره‌هایی جنگل متراکم ریاضیات با ستیزه‌جویی‌های کاربردهای عملی [با یکدیگر] تغذیه شده است. در سال های اخیر کامپیوترها تأثیر کاربردها را چند برابر کرده‌اند. محاسبه و کاربردها توأماً مثل یک گردباد خاک مراتع ریاضیات را جارو کرده‌اند. نیروهایی که به خاطر برهم کنش این گردبادهای روزانه آزاد شده و قدرت حمله پیدا کرده‌اند برای همیشه ـ و به منظور بهبود ـ ریخت شناسی ریاضیات را تغییر داده‌اند. در سایهٔ آنها افق‌های جدیدی پدیدار شده که قسمت‌های متنوع جنگل ریاضیات را به هم مرتبط می‌سازند و

به این ترتیب باروری متقابل در بخش‌های متروک را ممکن می‌سازند که به کل پیکرهٔ ریاضیات بی‌اندازه قوت بخشیده است.

در طول قرن بیستم، ریاضیات در جبهه‌های مختلفی به سرعت رشد کرده است. محور کلاسیک همچنان ریشه در ریاضیات آنالیزی نیوتن دارد که تلفیقی از جبر و هندسه است که برای مطالعهٔ چگونگی تغییر اشیاء اعمال شده است. اما حتی هنگامی که این محور تحت تأثیر رشد انفجاری پس از جنگ دوم جهانی توسعه یافت با پیشرفتهای بزرگی در دیگر علوم ریاضی چون نظریه اعداد، منطق، آمار، تحقیق در عملیات، احتمالات، محاسبات، توپولوژی، و آنالیز ترکیبیاتی؛ همراهی شد.

در هریک از این زیر نظامها، **کاربرد همگام با نظریات** است. حتی مجردترین و خواص فهم‌ترین قسمتهای ریاضیات ـ مثلاً نظریهٔ اعداد و منطق ـ بطور عادی در کاربردها مورد استفاده قرار می‌گیرند (مثلاً در علوم کامپیوتر و رمزنگاری). پنجاه سال قبل **هاردی** می‌توانست به نظریه اعداد ـ به عنوان محض‌ترین و کم فایده‌ترین بخش ریاضیات ـ ببالد [۱]، لکن امروزه نظریه‌اعداد به عنوان پیش نیازی اساسی برای بسیاری از کاربردهای کدگذاری ـ شامل انتقال داده‌ها از ماهواره‌های دوردست، محافظت از بایگانی‌های تجاری، والگوریتم‌های کارا برای محاسبات ـ مطالعه می‌شود.

در سال ۱۹۶۰، زمانی که فیزیک نظری هنوز گوهر مرکزی تاج ریاضیات کاربردی بود، اوژن ویگنر دربارهٔ «تأثیرگذاری نامعقول» ریاضیات در علوم طبیعی چنین نوشت: «معجزهٔ شایستگی زبان ریاضیات برای فرمول بندی قوانین فیزیک هدیه‌ای شگفت‌انگیز است که نه آن را درک می‌کنیم و نه می‌ستاییم.» در واقع فیزیک نظری به اخذ (و گاهگاهی ابداع) مدل‌های مجردتر ریاضی به عنوان مبنای منطقی نظریات کنونی ادامه داده است. اکنون گروه‌های لی و نظریه‌های پیمانه‌ای، وبیان‌های غریب از تقارن، فرمیونها و باریونها را به عنوان ابزارهای بنیادی در پژوهش فیزیکدان‌ها برای نظریه وحدت نیروهای میکروسکوپی و ماکروسکوپی طبیعت به هم پیوسته است.

اما در طول همین دوره کاربردهای جالب توجه ریاضیات در سراسر چشم اندازهای علوم طبیعی، رفتاری، و اجتماعی پدیدار گشت. به‌علاوه کاربردهای بخشی از ریاضیات در بخشی دیگر آن ـ مثلاً هندسه در آنالیز، احتمالات در نظریه اعداد ـ نشانه نوینی از وحدت بنیانی در ریاضیات است. علیرغم همه جایی بودن ارتباطات بین مسائل علم و ریاضیات، کشف ارتباط های تازه به میزان تعجب‌آوری موارد پیش‌بینی نشده و دستاوردهای غیر مترقبه به همراه می‌آورد. بارورسازی متقابل علم و ریاضیات در مسائل، نظریه‌ها، مفاهیم، و مدل ها ـ چه برنامه‌ریزی شده باشد چه نه ـ هیچگاه بیش از زمان

حال، یعنی ربع آخر قرن بیستم، نبوده است. در سال ۱۹۸۸ با توجیهاتی می‌شد گفت که تأثیرگذاری ریاضیات حتی بیش از قبل «نامعقول» است.

به موازات قدرت فزاینده کاربردهای ریاضیات تأثیر غیرمعمول محاسبه هم وجود داشته است. بدون شک کامپیوترها به‌خاطر کاربردهای نظریات مجرد ریاضیدانانی نظیر بول، کانتور، تورینگ، و فون نویمن امکان ظهور یافتند، نظریه‌هایی که همین چند دههٔ قبل به‌طور گسترده‌ای توسط منتقدان «ریاضی جدید» به عنوان تجریدهای بی‌هدف و بی‌ربط به مقاصد عملی، خشک و کنسرو شده بود. کنایه‌آمیزتر آنست که اکنون کامپیوتر قدرتمندترین نیروی تغییردهنده طبیعت ریاضیات است. حتی ریاضیدانانی که هیچگاه از کامپیوتر استفاده نمی‌کنند، ممکن است گاه و بیگاه تمامی اوقات پژوهشی خود را به مسائلی که به‌خاطر وجود کامپیوترها تولید شده است اختصاص دهند. در تمام بخش های ریاضیات کامپیوترها مسائل جدیدی برای پژوهش باب کرده‌اند، ابزارهای جدیدی برای حل مسائل قدیمی فراهم آورده‌اند، و خط مشی‌های جدید پژوهشی ارائه داده‌اند.

باوجود این که مردم غالباً کامپیوترها را جایگزینی برای ریاضیات به شمار می‌آورند، اما هرکدام در واقع ابزار قدرتمندی برای دیگری است. در واقع درست همان طور که کامپیوترها موقعیتهای جدیدی برای ریاضیات پیش آورده‌اند، ریاضیات هم کامپیوترها را اینچنین ناباورانه تأثیرگذار کرده است. ریاضیات مدلهای مجردی برای پدیده‌های طبیعی به دست می‌دهد، علاوه بر آن که الگوریتم‌هایی به زبان های کامپیوتری برای عملی کردن این مدل ها فراهم می‌کند. کاربردها، کامپیوترها، و ریاضیات یک سیستم کاملاً جفت شده تشکیل می‌دهند که نتایجی عرضه می‌کند که قبلاً ممکن نبود، و ایده‌هایی ارائه می‌کند که قبلاً قابل تصور نبود.

علوم ریاضی

کاربردها و رشد سریع ریاضیات در واقع بدان معناست که محور نیوتنی ـ حساب، آنالیز و معادلات دیفرانسیل ـ اکنون تنها بخشی از چشم انداز ریاضی متنوع تری است. اما بیشتر دانشمندان فقط همین قلمرو اولیه را کاویده‌اند، چون این تنها چیزی بود که در برنامهٔ درسی دبیرستان و دانشگاهشان گنجانده شده بود. صرفنظر از آمار، که‌دانشی قدیمی است و به طور گسترده‌ای در تمام نظامها استفاده می‌شود و در طول قرن بیستم

بطور وسیعی ریاضی گونه شده است، بازماندهٔ محدود نیوتنی از آنالیز ، رابط اصلی بین دانشمندان فعال و مبانی ریاضی وسیع نظام‌هایشان است. تغییرات ناگهانی در علوم ریاضی ربع قرن اخیر برای کسانی که خارج از جامعهٔ کوچک ریاضیدانان محقق هستند به‌سختی قابل مشاهده است.

علوم ریاضی امروزی، مانند گالهای[1] دیروزی، تقسیم‌پذیر به سه قسمت با اندازه‌های تقریباً قابل مقایسه هستند : علوم آماری، ریاضیات محوری، و ریاضیات کاربردی. هریک از این سه حوزهٔ اساسی (در ایالات متحده) توسط چند هزار نفر محقق فعال اداره می‌شود و سالانه تقریباً ۵۰ میلیون دلار از طریق «پشتیبانی تحقیقات دولت مرکزی» هزینه می‌کند. گرچه مرز این قسمتها به‌طور قابل ملاحظه‌ای تلاقی دارد [نامشخص است] ، اما هر قسمت یک صفت مشخصه دارد که به‌خوبی با یکی از سه مرحلهٔ الگوی ریاضی پایه‌ریزی شده توسط نیوتن، یعنی: داده‌ها، استنتاج، و مشاهده، متناظر می‌شود.

علوم آماری به مسائلی که مرتبط با عدم قطعیت در جمع آوری، وارسی، و تفسیر داده‌ها هستند می‌پردازد. ابزارهایش احتمالات و استنتاج هستند؛ قلمروش شامل الگوسازی تصادفی، استنتاج آماری، نظریه تصمیم، و طراحی تجربی می‌باشد. علوم آماری بر سیاستها در کشاورزی، سیاست، اقتصاد، پزشکی، حقوق، علوم، و مهندسی تأثیر می‌گذارد. پیشرفت‌های ابزارشناختی و ارتباطی (برای جمع‌آوری و انتقال داده‌ها) مبارز طلبی‌های نوینی برای آمار ایجاد کرده است که به رشد سریع روش ها و کاربردهای تازه رهنمون شده است.

ریاضیات محوری به خواص عدد و فضا، که ایده‌هایی با منشاء باستانی هستند، می‌پردازد. ابزارهایش تجرید و استنتاج هستند؛ ساختمان‌هایش شامل توابع، معادلات، عملگرها، و فضاهای بینهایت بعدی هستند. در درون ریاضیات محوری، موضوعات سنتی نظیر نظریه اعداد، جبر، هندسه، آنالیز و توپولوژی یافت می‌شوند. ریاضیات محوری، پس از نیم قرن رشد تخصصی انفجاری، رنسانسی از وحدت تجدید شده مبتنی بر کشف غیرمنتظره ولی مبارک ارتباطات عمیق بین اجزای مختلفش را می‌گذراند.

ریاضیات کاربردی روشهای ریاضی را با مشاهدات و نظریات علم جفت و جور می‌کند. این قسمت ریاضی مجرایی اصلی است؛ از یک طرف برای اندیشه‌های علمی که برای نوآوری ریاضی انگیزه ایجاد کنند، و از طرف دیگر برای ابزارهای ریاضی تا مسائل علمی را حل کنند. روش‌های سنتی ریاضیات کاربردی شامل معادلات دیفرانسیل،

---

[1] گال: نام قوم بزرگی است که در ازمنه قدیم در کشور فرانسه و جهات نزدیک به آن از اروپا می‌زیستند. (لغت نامه دهخدا)

محاسبات عددی، نظریه کنترل، و سیستم‌های دینامیکی می‌شود؛ چنین روش های سنتی‌ای امروزه در قلمروهای بزرگ و نوینی از کاربردها به کار گرفته می‌شوند، از قبیل احتراق[۲]، آشفتگی[۳]، بهینه‌سازی[۴]، فیزیولوژی[۵]، و همه‌گیر شناسی[۶]. به علاوه، ابزارهای جدیدی از نظریهٔ بازی‌ها، علم تصمیم گیری، و ریاضیات گسسته به علوم انسانی اعمال می‌شوند؛ علومی که در آنها انتخاب‌ها، تصمیم گیری‌ها، و ائتلاف ها ـ و نه تغییرات پیوسته ـ ابزارهای مناسبی برای توصیف و پیش‌گویی هستند. تمام تلاش هایی که برای تقسیم ریاضیات به چند بخش صورت گرفته است، الزاماً مصنوعی و دائماً در حال تغییراند. علم آمار، ریاضیات محوری، و ریاضیات کاربردی، تنها یکی از چندین ساختار ممکن را نشان می‌دهند که ممکن است به فهم کل مطلب کمک کنند. این تقسیم بندی‌ها، تفاوت‌های ذاتی ماهیت نظام را نشان نمی‌دهند، چه رسد به تفاوت در سبک، مقصود، و تاریخ؛ شاید مناسبتر باشد که انواع ریاضیدانان را توصیف کنند تا انواع ریاضیات را. دیگران با عبارات نسبتاً متفاوتی به ترسیم ماهیت ریاضیات نوین پرداخته‌اند. [مثلاً ۵ـ۳ را ببینید.] آنچه در مورد این نوع تقسیم‌بندی اهمیت دارد این است که به متمرکز شدن توجهات بر مشخصه‌های معینی از علوم ریاضی کمک می‌کند، نه اینکه خودش نمایندهٔ اجزای ذاتی یا اساسی باشد. یکی از جنبه‌هایی که در ریاضی نهفته است و برای فهم نقش آن در علم اساسی است این است که علوم ریاضی امروزی بسیاری از آنچه که ربع قرن گذشته ـ زمانی که بسیاری از دانشمندان امروزی آخرین نسلی بودند که ریاضیات مطالعه می‌کردند ـ بوده است، تفاوت دارند. کامپیوترها، کاربردها، و بارآوری متقابل، ترکیب شده‌اند تا علوم ریاضی را به سمت مجموعه‌ای قدرتمند و تاحد غیرعادی گسترده از ابزارهایی برای دانش سوق دهند. ریاضیدانان، حتی بدون کسب اجازه، بی‌اغراق مبانی علم را بازسازی کرده‌اند. کار به پایان نرسیده است، اما شکل جدید آن به اندازهٔ کافی قابل مشاهده است به‌طوری که تمام آنهایی که از ریاضیات استفاده می‌کنند باید برای کشف جنبه‌های جدید آن وقت صرف کنند.

علوم آماری

هم کامپیوترها و هم آمار با داده‌ها سروکار دارند. آنچه کامپیوترها ضبط می‌کنند، انتقال

2.combustion 3.turbulence 4.optimization 5.physiology 6.epidemilogy

می‌دهند، و پردازش می‌کنند، آمار دان ها تفسیر می‌کنند، خلاصه می‌کنند، و نمایش می‌دهند. این تلاقی منبع مسأله با حل کنندهٔ مسأله علم آمار را به تمامی به سمت یک نظام مملو از داده سوق داده است (یا به قولی بازگردانده است). پدیده‌هایی که با توزیع‌های آماری متداول (نرمال، پواسون، و غیره) توصیف می‌شوند تنها جزء کوچکی از مقادیر زیادی از داده‌هایی هستند که توسط کامپیوترها در سراسر دنیا اخذ می‌شوند. در زیر سه مثال از آنچه که سیطرهٔ داده‌ها در علوم آماری انجام داده‌اند می‌آوریم :

آمار فضایی. استفادهٔ روزافزون از وسایل الکترونیکی تصویرخوان (مثلاً درتوموگرافی[۷] مختصات هوابردی، و مراقبتهای محیطی) نیازی مبرم به تجزیه و تحلیل پیچیدهٔ داده‌هایی با ساختارهایی ذاتاً فضایی ایجاد کرده است. بزرگ سازی تصویر، و واضح کردن تصویر اشکال محو، معمول‌ترین کاربرد است، کارهای مهم دیگر عبارت‌اند از نمایش تصویر داده‌ها، تا مشاهده‌گر را قادر می‌سازد که الگوهای پنهان را بیابد، و فشرده‌سازی آماری داده‌ها در زمان حقیقی تا اجازهٔ ذخیره‌سازی مؤثر و تجزیه و تحلیل پس از آن را بدون از دست دادن اطلاعات مهم بدهد.

تحقیق در آمار فضایی گسترهٔ وسیعی از تکنیک‌های ریاضی، آماری، و محاسباتی را به‌کار می‌برد. مسائل جداسازی سیگنال از نوفه تکنیک‌هایی را از مهندسی کسب می‌کند؛ مسائل تفرقی با زاویهٔ دید نادرست، روش هایی از جبر خطی عددی به‌کار می‌برند؛ هموارسازی داده‌ها به تکنیک‌های آماری عادی سازی نیاز دارد. و در پس زمینهٔ تمام اینها هندسهٔ ذاتی مسأله نهفته است که در بیشتر موارد دینامیکی و غیرخطی است.

مدل سازی غیرپارامتری. قسمتی از آمار سنتی که بیش از همه قسمتها کاملاً توسعه یافته است شامل مدلهایی است که مبتنی بر توزیع های مفروض مشخص شده با تعداد کمی متغیر با تغییر پیوسته است. اما بیشتر داده‌های حقیقی (مثلاً اطلاعات مأخوذ از همه پرسی‌ها، یا تصویربرداری ماهواره‌ای) آمیخته از متغیرهایی هستند که جزئی از آنها پارامتری و جزئی دیگر غیرپارامتری است، یا جزئی از آنها پیوسته و جزئی دیگر گسسته است. بدون فرضیات معقول ذهنی دربارهٔ توزیع داده‌های غیرپارامتری، روش های سنتی آماری اغلب غیرقابل اعتماد بودند ـ گرچه هنوز غالباً از آنها استفاده می‌شود. اما اکنون مجموعه‌های بزرگی از داده‌ها شامل متغیرهای پارامتری و غیرپارامتری مخلوط به آمار امکان استفاده از روش‌های به شدت محاسباتی را برای تخمین آمار (مثلاً ضرایب رگرسیون)، با کران های خطای قابل اعتماد برای متغیرهای غیرپارامتری، می‌دهد.(البته

---

[۷] یکی از تکنیکهای تصویربرداری با اشعهٔ ایکس از یک سطح مقطع از پیش تعیین شدهٔ یک جسم توپر، با محو کردن تصاویر سایر مقطعها.

کامپیوتر نه تنها چنین روش هایی را ممکن ساخته است، بلکه با قادر ساختن علم به غرق کردن ما در گردآیه‌های عظیم داده‌ها آن را الزامی کرده است.)

بسیاری از کاربردهای آمار (بخصوص آنالیز بررسی‌ها و داده‌های کلینیکی ازقوانین درمانی ابداع شده) شامل مقادیر کمی داده هستند که استنتاج الگوهای با معنی را می‌طلبد. برادلی افرون از دانشگاه استانفورد پیشرو روش مبتکرانه‌ی «استفاده از داده‌های محدود برای تولید داده‌های بیشتری با همان مشخصات آماری» شده است (و از آنجا روش‌های «بوت استرپ» بوجود آمده است).

بخصوص، روش‌های بوت استرپ از روش‌های محاسباتی برای باز نمونه‌گیری از داده‌های موجود مکرراً بهره می‌برد، تا میلیونها مجموعه دادهٔ ممکن مشابه تولید کنند، که به تقریب‌های دقیقی از آمارهای پیچیدهٔ گوناگون منجر می‌شود. با مقایسهٔ مقادیر این آمارها برای نمونهٔ داده شده با توزیعی که با باز نمونه‌گیری مکرر به‌دست آمده است، می‌توان مشخص کرد که آیا مقادیر مشاهده شده با معنی هستند [یا خیر] (۶). روش‌های جک نایف با تکنیک‌های بوت استرپ مرتبط هستند، اما راهی که از آن طریق تمایل را در فرایندهای آماری کاهش می‌دهند عبارت است از خارج کردن مکرر قسمتی از داده‌ها.

ریاضیات محوری

نیروهایی که در ریاضیات نفوذ دارند ـ عمدتاً کاربردها، کامپیوترها، و باروری متقابل ـ به‌صورت عمیقی در قسمت‌های محوری (محض) موضوع تأثیر می‌گذارند. برای نمایش طبیعت تغییرات، از دو حوزهٔ کاملاً متفاوت تأثیرگذاری استفاده می‌کنیم، یعنی محاسبات و هندسه، به عنوان سنگ‌های راه شمار بسیار دور از هم در طول پیوستار[۸] گسترده‌ای از ریاضیات.

ریاضیات محوری به اندازهٔ حوزه‌های کاربردی‌تر علوم ریاضی تحت تأثیر کامپیوترها تغییر کرده است. قابل ملاحظه‌ترین مورد عبارت است از انتقال علایق تحقیقاتی به مسائل ملهم از محاسبات. ولی کامپیوترها راه‌هایی را که حدسها از آن طریق ابداع و آزمایش می‌شوند، راه‌هایی که اثبات‌ها کشف می‌شوند، و در تعداد فزاینده‌ای از حالات، ماهیت خود اثبات را هم تغییر داده است.

واقعهٔ اولیه در ریاضیات کامپیوتریار یا کمک گیرنده از کامپیوتر که آغازگر این دوره بوده است اثبات حدس چهار رنگ در سال ۱۹۷۶ بود که یک قرن قدمت داشت، و بر پایهٔ تجزیه و تحلیلی کامپیوتری از هزاران الگوی تحویل شده با احداث پلی بین نظریهٔ ریاضی

---

[۸] احتمالاً منظور نگارنده تشبیه به $\mathbb{R}$ بوده است. م.

و تجزیه و تحلیل دستی حالات، بنا شده بود. این واقعه کل معرفت‌شناسی ریاضیات را تکان داد (۸ و ۷). ده سال بعد، در سال ۱۹۸۶، کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، وضعیت ریاضیت سراسر جهان را در یک کنفرانس ده روزه در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی عرضه کرد. از شانزده سخنرانی عمومی که وضعیت ریاضیات آن زمانه را بررسی می‌کرد، بیش از نیمی دربارهٔ موضوعاتی بود که به نحوی به محاسبات ارتباط داشت. بگذارید چند مثال بیاوریم :

حدس بیبرباخ. لویی دوبرانژ از دانشگاه پردو به اثبات حدس بیرباخ که ۷۰ سال قدمت داشت، و دربارهٔ اندازهٔ ضرایب بسط سری توانی توابع تحلیلی معینی با یک متغیر مختلط بود، پرداخت (۹). در یک مرحلهٔ بحرانی در اثبات، دوبرانژ کل بحث را به تحقیق یک نامساوی بین دو چند جمله‌ای تحویل کرده بود. این امر توسط یک کامپیوتر تا اندازه‌ی مناسب انجام شده بود تا شاهد موضعی متقاعد کننده‌ای برای صحت این خط از اثبات بیاورد. بند آخر اثبات اصلی توسط یک اثبات نظری از این نامساوی تکمیل شد، که در واقع نظریه توابع خاص مدتها قبل از آن که دوبرانژ به آن محتاج شود شناخته شده و اثبات شده بود.

تجزیه اعداد صحیح. هنریک و.لنسترا از دانشگاه آمستردام هندسه جبری را در یکی از قدیمی‌ترین مسائل ریاضی، یعنی چگونگی پیدا کردن عوامل اول یک عدد صحیح به‌کار برد (۱۰). پس از آن تجزیه اعداد صحیح از موقعیت راکد خود خارج شد و اولویت اساسی را در ریاضیات یافت، آن هم به دلیل سادهٔ [وجود] کاربردهایش در رمزنگاری کامپیوتری : یک کد مبتنی بر حاصلضرب دو عدد اول بزرگ با الگوریتمهای موجود فعلی نمی‌تواند شکسته شود زیرا هیچ روش کارآمد شناخته شده‌ای برای بازیافت دو عامل اول فقط با دانستن حاصلضرب آنها وجود ندارد.

لنسترا به مسألهٔ تجزیه با استفاده از خمهای بیضوی، یعنی مجموعهٔ صفرهای معادلات چند جمله‌ای درجه سوم با سه متغیر در یک صفحهٔ تصویری مناسب، حمله کرد. نقاط روی این خم ها یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که خواصش مستقیماً به سریع‌ترین الگوریتمی که تاکنون برای تجزیه اعداد بزرگ یافت شده است منتهی می‌شود. تجزیه و تحلیل‌های مشابهی برای تجزیه چند جمله‌ای‌ها به‌طرزی کارامد در حال انجام است (۱۱). خمهای بیضوی، ابزار اولیه این الگوریتمهای جدید، عناصر مرکزی به‌کار گرفته شده در اثبات گرد فالتینگز از حدس موردل در سال ۱۹۸۳ (۱۲) هستند، که مطمئناً یکی از گیج کننده‌ترین و مؤثرترین پیشرفت‌های ریاضیات این دهه است.

پیچیدگی محاسبات. آرنولد شنهاگه [۹] از دانشگاه توبینگن نظریه پیچیدگی **محاسبات**

ـ تجزیه و تحلیل سختی ذاتی حل مسائل ـ را در کار بنیادی حل معادلات با شروع از ساده‌ترین معادله، یعنی $ax = b$ در اعداد معمولی به‌کار برد (۱۳).

حل متداول، یعنی تقسیم، از قرون وسطی مورد توجه ریاضیدانان نبوده است، اما حالا در فهرست موضوعات پژوهشی قرار گرفته است. ثابت شده است که روش های شناخته شده برای انجام عمل تقسیم اعداد مختلط بهترین راه ممکن است ـ به این معنی که به این زودی هاهیچ روشی نمی‌تواند مقدار کمتری اعمال حسابی حقیقی داشته باشد. روش های استفاده شده در این تجزیه و تحلیل بنیادی از حساب حاکی از تجزیه و تحلیل مشابهی برای کل حوزه الگوریتم‌های کامپیوتری است، که ریاضیدانان را قادر می‌سازد حدود توانایی محاسباتی، و نیزقلمروهای مستعد و آماده برای پیشرفت های بیشتر رامشخص کنند.

تکرار نگاشتها. استفن اسمیل از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی مسألهٔ کلاسیک پیدا کردن صفرهای چند جمله‌ای ها را با استفاده از زمینهٔ بسیار مدرن نگاشت های تکرار شده و نظریهٔ پیچیدگی محاسبات بررسی کرد. «مثال الگویی» عبارت است از روش نیوتن برای یافتن یک صفر از تابعی مثل $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

در سبک پیش کامپیوتری، این روش هربار به یک نقطه اعمال می‌شد، و با یک حدس معقول آغاز می‌گردید به طوری که دنبالهٔ نقاط به سرعت به یک صفر تابع همگرا شود.

اسمیل روش نیوتن را، با نظر به نگاشتی از تمام صفحهٔ مختلط به روی خودش که با روش نیوتن برای یک چند جمله‌ای بخصوص تولید می‌شود، به طور سراسری بررسی کرد (۱۴). توزیع نقاطی که مآلاً به صفر نگاشته می‌شوند مثالی از یک مجموعهٔ «فراکتالی» است که بسیاری از خاصیت های آشوبناک ویژهٔ آشفتگی را نمایش می‌دهد. تجزیه و تحلیل اسمیل، تکرار سراسری را به روش سمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی اعمال کرد، که به اثباتی از این حقیقت تجربی، که به طور متوسط، روش سیمپلکس در واقع بسیار خوب رفتار می‌کند، رهنمون شد. همچنین روش‌های وی مستقیماً به مدل های جدیدی برای آشوب منتهی شدند که کاربردهای گسترده‌ای در فیزیک و شیمی دارند (۱۵, ۱۶).

9.A.Schönhage

هندسه

اگر کامپیوترها نمونهٔ عصر امروزی ریاضیات باشند، هندسه هم ریشه‌های اولیه و کلاسیک آن را مجسم می‌کند. از لحاظ تاریخی، هندسه، مطالعهٔ فضا، یکی از ستونهای عظیم و اساسی ریاضیات محوری بوده است. به دلایل مختلف، نقش آن در برنامهٔ درسی ریاضیات در طول ۲۰ سال اخیر تنزل کرده است، به طوریکه حتی کسانی‌که در ریاضیات دارای مدارج دانشگاهی هستند اغلب آشنایی ناچیزی با هندسه ورای یک مواجههٔ باستانی و عمدتاً غیرقابل انعطاف با اثبات های اقلیدسی در هندسهٔ دبیرستانی دارند. رنسانس هندسه در پژوهش های ریاضی تضاد عمیقی با این تنزل در برنامهٔ درسی دانشگاهی دارد. به مفهومی کاملاً واقعی، هندسه یک بار دیگر نقش مرکزی را در صحنهٔ ریاضیات به عهده دارد، به همان اندازه‌ای که در دورهٔ یونانی بود.

یکی از هنرپیشگان اصلی در مطالعهٔ هندسه امروزی «خمینه» است، عبارتی که توسط هندسه‌دانها برای توصیف سطوح و فضاهایی که موضعاً شبیه فضای اقلیدسی هستند، استفاده شده است. خمینه‌ها مکان طبیعی جوابهای معادلات دیفرانسیل را تشکیل می‌دهند، و در مقابل هندسهٔ آنها بر طبیعت تحلیلی این جواب ها ساختار تحمیل می‌کند. بدین ترتیب خمینه‌ها نه تنها در هندسه بلکه در تمام قسمت های آنالیز کلاسیک از اهمیت برخوردارند.

دو مدال از سه مدال فیلدز سال ۱۹۸۶به مایکل فریدمن از دانشگاه کالیفرنیا در سان دیگو و سیمون دانلدسون از دانشگاه آکسفورد،به خاطر کار در زمینه هندسه خمینه‌های چهاربعدی، رسید (۱۷). فریدمن نشان داد که حدس پوانکاره دربارهٔ کرات برای خمینه‌های چهار بعدی درست است، و به این وسیله حالت یکی مانده به آخر این حدس ۸۰ ساله را به اثبات رساند. (فقط بعد سه حل نشده باقی می‌ماند.) روش‌های فریدمن نشان داد که دسته‌بندی توپولوژیکی خمینه‌های چهار بعدی از دسته بندی جبری فرم های درجه دوم پیروی می‌کند.

دانلدسون معادلات میدان یانگ ـ میلز در فیزیک ریاضی را، که خودشان تعمیم‌هایی از معادلات ماکسول‌اند، به‌کار برد تا اینستانتونها را در فضای چهار بعدی مطالعه کند، و به این وسیله با اعمال روشهایی از فیزیک برای فهم ریاضیات محض، سنت متداول را وارونه کند. دانلدسون با بهره‌گیری از خواصی از معادلات دیفرانسیل که دوگانگی موج ـ ذرهٔ ماده را منعکس می‌کنند قادر شد رهیافت کاملاً نوی را برای مطالعه مسائل بنیادی هندسه توسعه دهد.

یک پیامد کار فریدمن و دانلدسون کشف این مطلب بود که در بعد چهار، خمینه‌های دیفرانسیل پذیری موجوداند که از نظر توپولوژیکی با فضای چهاربعدی اقلیدسی استانده معادل‌اند ولی از لحاظ دیفرانسیلی مشتق پذیر نیستند. چنین فضاهای «غریبی» تا بعد چهار یکتا هستند، که دامنهٔ طبیعی پیوستار فضا ـ زمان جهان فیزیکی ماهم می‌گردند. این که این خواص یکتا تصادفی باشند یا با معنی، چیزی است که تحقیقات بسیار بیشتری طلب خواهد کرد. در واقع، نظریهٔ هندسی‌ای که با این کار خلق شده به تازگی به کاربردهایی در نظریهٔ ریسمان ها منتهی شده است، و به این وسیله منافع جانبی ایده‌هایی را که در ابتدا از فیزیک وام گرفته شده بود به فیزیک باز پس می‌دهد.

طراحی کامپیوتری. هندسه و کامپیوترها در یکی از زنده‌ترین و جذابترین روزنه‌های علوم ریاضی تلاقی می‌کنند : طراحی کامپیوتری. گرچه بیشتر استفاده‌های مشهور طراحی کامپیوتری در محدودهٔ ریاضیات کاربردی هستند، اما تکنیک‌های دیداری در حال گذاردن تأثیری واقعی بر ریاضیات محوری سنتی هستند، همین طور بر آموزش ریاضیات در تمام سطوح.

تولید طرح‌های واقعی در یک کامپیوتر به مقدار قابل توجهی برهم کنش نظری میان نمایش‌های هندسی، کدگشایی جبری، و الگوریتم‌های کامپیوتری احتیاج دارد. در عوض، روش‌های طراحی کامپیوتری در بسیاری از مسائل ریاضی یاوری‌های تعیین کننده‌ای ارائه داده‌اند : سطوح مینیمال تازه‌ای به کمک طراحی کامپیوتری یافت شده‌اند، و نمایش های تصویری نگاشت های تکراری (در شکل های معروف «فراکتال») الگوهای قابل مشاهده‌ای می‌سازند که با ابزارهای تحلیلی به تنهایی هرگز مورد توجه و مشاهده قرار نمی‌گرفتند. الگوهای فراکتالی توصیف مناسبی از دستهٔ بزرگی از پدیده‌های فیزیکی به‌دست داده‌اند که از شکستگی شیشه تا بافت سطوح را در بر می‌گیرد (۲۰ـ۱۸).

محاسبهٔ هندسی شروع به اثبات سودمندی خود در قلمروهای محوری ریاضیات که از هندسه دوراند هم کرده است، زیرا کامپیوترها می‌توانند ریشه‌های معادلات و دیگر موضوعات ریاضی را محاسبه کنند و به صورت تصویری نمایش دهند. این امر برای اولین بار ریاضیدانان را قادر می‌سازد محتوای قضایای مجردی که ثابت می‌کنند «ببینند» و به این وسیله حدسهای جدیدی بزنند که بجای ذهن توسط چشم القا می‌شود. (در راستای به رسمیت شناختن این جبهه جدید، چندین هندسه‌دان پیشرو جهان به تازگی بودجه‌هایی برای راه‌اندازی یک پروژه ابر کامپیوتر هندسه برای انجام تحقیقات در ایالات متحده و در اروپا در این زمینه دریافت کرده‌اند.

ریاضیات کاربردی

ریاضیات کاربردی بیش از آن که توسط محتوا یا روش از ریاضیات محوری تمیز داده شود، توسط هدف تمیز داده می‌شود. در ریاضیات کاربردی، مقدار تا درجه‌ای اندازه‌گیری می‌شود که روش‌های جدید، فهم علمی یا کاربردهای تکنولوژیک را بهبود می‌بخشند.

ریشه‌های انقلاب علمی در معرض روش‌های تجربی توسط گالیله به عنوان جانشینی برای توضیحات پیش داوری گونهٔ فلسفهٔ طبیعی یونان باستان قرار دارد. نیوتن با نشان دادن این که داده‌های تجربی می‌توانند توسط نتایج ریاضی استنتاج شده از اصول اولیه توضیح داده شوند، علم نظری را معرفی کرد. در زمان ما، جان نویمن در الگویی محاسباتی، که در آن از نتایج علم نظری برای شبیه‌سازی واقعیت روی یک کامپیوتر مدرن استفاده می‌شود، پیشگام شد. در نتیجه روش‌های محاسباتی اکنون تمام جنبه‌های ریاضیات کاربردی را در برگرفته‌اند. (۲۲ و ۲۱)

در زندگی احتیاج مادر اختراع است، در ریاضیات هم همین طور است. از آنجا که نیازهای علم رشد ریاضیات را برمی‌انگیزند، وقتی علم توسعه می‌یابد و رشد می‌کند ریاضیات هم چنین می‌شود. نتیجه یک رشد انفجارگونه در طبیعت و برد ریاضیات کاربردی بوده است. چهار حوزهٔ بسیار متفاوت برای روشن ساختن گستردگی و همچنین نوآوری پژوهش‌های کنونی به‌کار خواهند آمد.

علوم زیستی. هیچ چیز بهتر از ردپاهای فراوان ریاضیات در پشت جوایز نوبل مایهٔ ریاضیات موجود در علوم زیستی را روشن نمی‌سازد. مثلاً جایزهٔ نوبل پزشکی سال ۱۹۷۹ به آلن کرمک [10] به خاطر به‌کارگیری تبدیل رادون، که تکنیک معروفی در آنالیز کلاسیک پیشرفته است، در توسعهٔ توموگرافی و اسکنرهای توموگرافی کامپیوتریار[11] اعطا شد. یکی از دریافت کنندگان جایزهٔ نوبل شیمی سال ۱۹۸۵، زیست فیزیکدانی به نام هربرت هاوپتمن[12] بود، که در ریاضیات دکترا گرفت و رئیس بنیاد پزشکی بوفالو است. هاپتمن به خاطر کار اصولی، در آنالیز فوریهٔ مرتبط با بلورشناسی با اشعهٔ ایکس مفتخر به دریافت جایزه شد.

در واقع تحقیقات اخیر در علوم ریاضی نوید مایه‌هایی برای پیشرفت های اساسی در علوم زیستی می‌دهند که به طور هیجان‌انگیزی افزایش یافته‌اند، با روش هایی که عمدتاً به

10.A.Cormack 11.CAT 12.H.Hauptman

مدل های ریاضی و کامپیوتری متکی هستند. زیست شناسان ساختاری، مهندسان ژنتیکی شده‌اند که هندسهٔ اَبَر مولکولهای پیچیده را در ابرکامپیوترها بررسی می‌کنند و سپس در مسیر جستجویشان برای عوامل زیستی فعال، برهم کنش با سایر مولکول ها را شبیه‌سازی می‌کنند. زیست‌شناس‌ها با استفاده از این روش‌های محاسباتی، می‌توانند هندسهٔ یک ویروس سرد را به شکلی چند وجهی و پیچیده با زیبایی غیرمعمولی و جنبه‌های هندسی جذاب، برروی یک صفحهٔ کامپیوتر به تصویر بکشند و سطحش را برای یافتن جاپاهایی مولکولی بجویند تا مأمنی برای حملات زیستی‌شان باشند.

دانشمندان علم ژنتیک در حال آغاز تلاشی به یاد ماندنی برای نگاشتن تمامی دسته کروموزومهای آدمی هستند، اقدام متهورانه‌ای که محتاج مهارت در آمار، ترکیبیات، هوش مصنوعی، و تنظیم داده‌ها است تا میلیاردها واحد اطلاعات فراهم شده از سراسر جهان را سازماندهی کند. اکولوژیستها، نخستین زیست شناسان ریاضیدان، همچنان به استفاده از نظریات گسترده دینامیک جمعیتی ادامه می‌دهند تا رفتار و برهم کنش گونه‌ها را پیشگویی کنند؛ با در نظر گرفتن پیچیدگی‌های واقع بینانه‌ای نظیر فنای جنس خاص، زیست شناسی ولادتی، و داده‌های شکار ـ شکارچی.

عصب‌شناسان هم اکنون از نظریهٔ گرافها برای مدل سازی شبکه‌های اعصاب در بدن و کلاف درهم عصبی در مغز استفاده می‌کنند. بالاخره فیزیولوژیستها الگوریتم‌های معاصر را که به معادلات قرن نوزدهمی دینامیک سیالات اعمال می‌شود برای مشخص کردن مواردی چون آثار آشفتگی در خون که توسط دریچه‌های ورم کرده قلب یا توده‌های کلسترول ایجاد می‌شوند به‌کار می‌برند.

نظریهٔ کنترل. یکی از گسترده‌ترین بهره‌وری‌ها از تکنیک‌های ریاضی در کنترل سیستم‌ها است؛ کاربردها، از کنترل کیفیت در یک خط تولید گرفته تا کنترل پرواز یک هواپیمای بالا ـ پرواز را دربر می‌گیرند. نظریهٔ کنترل یکی از چندین محصول ریاضی جنگ جهانی دوم است، و تا حال حاضر همان الگوی اولیهٔ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی که به طور ریاضی به صورت تابعی تک مقداری از یک متغیر نمایش داده می‌شود برآن احاطه داشته است. چنین مدل هایی، به اندازه‌ای که برای یک مهندس باتجربه امکان بهینه کردن رفتار سیستم را با تنظیم پارامترهای موجود در مدل به کمک آزمون و خطا فراهم سازند، ساده‌اند. اما به عرصه آمدن سیستم هایی که با کامپیوتر کنترل می‌شوند، جبههٔ جدید و خیلی پیچیده‌ای از سیستم هایی با چندین ورودی و چندین خروجی نمایانده است. شما مثال پیچیدگی فراوان چنین سیستم هایی، طراحی آی سی‌ها در مقیاس وسیع است. مسألهٔ پیدا کردن قوانین کنترل کارا برای چنین سیستمهایی بوسیلهٔ

فیلتر دیجیتال کالمن رهیابی شده است، و در همین اواخر به کمک توسعه‌ای از نظریهٔ درون یابی به توابع تحلیلی با مقادیر ماتریسی و حساب دیفرانسیل و انتگرال تمام عیاری از عملگرها صورت می‌گیرد.

یکی از بهره‌های نظریات نو، افزایش انعطاف در طراحی سیستم کنترل بوده است. به جای محدود ماندن در روش‌های سنتی ارائه شده توسط نوربرت وینر، که خطای میانگین مجذورات را مینیمم می‌کرد، طراحان با این سیستم های جدید می‌توانند خطای بدترین وضعیت را مینیمم کنند. چنین گزینه‌هایی، وقتی که بازداری از خطا (مثلاً در نیروگاه‌های هسته‌ای یا کنترل هواپیما) در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد، دارای اهمیت حیاتی هستند. چنین بهره‌هایی به صورت انتقال طرح مدار از الگوهای اسکالری به الگوهای ماتریسی پدیدار می‌شوند، که بر پایه نظریه‌های بسیار پیچیدهٔ ریاضی از درون یابی بنا شده‌اند.

دردسترس بودن کامپیوترها برای انجام محاسبات پیچیده، جبهه‌های خیلی بیشتری در نظریهٔ کنترل نمایانده است. مثلاً مبنای نظری بازسازی یک سیگنال بهینه از سیگنالهای اعوجاج یافتهٔ دریافت شده از ردیاب های چندگانه از تکنیک های نظریهٔ توابع مختلط تحلیلی چند متغیره بهره می‌برد. الگوریتم های جدید تصویری (کارمارکار [۱۳] گونه) در برنامه‌ریزی خطی، کنترل خودکار فرایندهایی را که قبلاً ناممکن بود (مثلاً هواپیماهای بالاپرواز) ممکن ساخته‌اند.

غالباً مسائل خاصی از کنترل غیرخطی را، مثل حرکت هواپیمایی که درگیر فرود و صعود روی باندهای کوتاه است، می‌شود به کمک جبرهای لی به قانون پسخور خطی‌ای تبدیل کرد که در این حالت می‌توان با استفاده از روش‌های سنتی‌ای، که هم از نظر محاسباتی پایدارند و هم برای محاسبه در زمان حقیقی به اندازهٔ کافی ساده‌اند، محاسبه‌شان کرد.

معادلات دیفرانسیل تصادفی. قوانین طبیعت با فصاحت هرچه تمامتر به زبان معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند. معادلات ماکسول برای میدان های الکترومغناطیسی، معادلات نیوتن در حرکت سیاره‌ای، و معادلات ناویه ـ استوکس در شار سیالات مثل اصولی از قانون اساسی طبیعت هستند. آنان نحوهٔ تغییر طبیعت را برحسب آن چیزهایی بیان می‌کنند که هم تحلیل ریاضی را، و هم کاوش علمی را ممکن می‌سازند.

اما در عمل داده‌های دردسترس یک دانشمند هرگز به‌طور دقیق مشخص نیستند و ممکن است واریانسهایی بامعنی و تصادفی داشته باشند. در بعضی حالات، متغیرهای

13.karmarkar – like

کلیدی کاملاً ناشناخته‌اند یا براثر پارازیت پنهان شده‌اند. وضعیتی متداول، که از نظر ریاضی با آنچه که به عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی شناخته می‌شوند توصیف می‌گردند، وقتی اتفاق می‌افتد که سیستم در معرض پارازیت سفید خارجی قرار می‌گیرد. به عنوان نمونه، فرآیندهای انتشار در نظریهٔ مخابرات، فرآیندهای شیمیایی، آنالیزهای بازار بورس، همه‌گیرشناسی، نظریهٔ صف، و ژنتیک جمعیتی.

تمام این مثال ها وجوه مشترک خاصی دارند. مهمتر از همه این است که اینها، مثل یک سکهٔ سالم که احتمال خط آمدن آن به نتیجهٔ پرتابهای قبلی وابسته نیست، فرایندهایی بدون تأثیر از گذشته هستند. در اصطلاح ریاضی، اینها همان چیزهایی هستند که به عنوان فرایندهای مارکوف شناخته می‌شوند. به علاوه در معرض تأثیر اتفاقی متغیرهای کلیدی هستند و از آنجا ماهیت تصادفی مسأله پدید می‌آید.

معادلات دیفرانسیل تصادفی یکی از مباحث کلیدی نظریهٔ احتمال‌اند. پژوهش های اخیر ارتباط های مهمی را با سایر قسمت‌های ریاضی به دست داده است. به خصوص، آمارهای خاصی از سیستم های تصادفی (مثلاً زمانهای متوسط خروج در یک فرایند انتشار) جواب هایی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای معمولی (غیرتصادفی) هستند. این به نوبهٔ خود شهودهای جالبی به دست داده است که فرایندهای اتفاقی یک سیستم را با توپولوژی دیگری مرتبط می‌سازد.

رفتار منظومه شمسی تحت تأثیر اتفاقی ستاره‌های دنباله‌دار گذرا و خود ستاره‌ها، مثالی از یک سیستم دینامیکی است که از یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی تبعیت می‌کند. چون آشفتگی های اتفاقی ممکن است سیستم های دینامیکی را ناپایدار سازند (حتی اگر آشفتگی ها کوچک باشند)، بررسی پایداری از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. پژوهشگران به تازگی توانسته‌اند شرایطی را تعیین کنند که تحت آنها مسیرهای جواب شارهای تصادفی در الگوهایی پایدار گردآوری می‌شوند. بعضی پژوهشگران فکر می‌کنند که بازار بورس همان نوع ناپایداریها را دارد، که در آن رفتار در نزدیک یک «رباینده غریب[۱۴]» می‌تواند به نوسانات شدیدی که ذاتاً قابل پیش‌بینی نیستند منتهی شود (۲۴).

فیزیک. وحدت نظریهٔ میدان کوانتومی با نسبیت عام ـ فیزیک کوچک ها با فیزیک بزرگ ها ـ شاید بزرگترین مسألهٔ نظری فیزیک باشد. به خاطر اختلاف مقیاس عظیم بین آثار جاذبه‌ای و آثار کوانتومی، آزمایش های واقع گرایانه در راهگشایی برای اکتشاف ارزش کمی دارند.

14.Strange attractor

تلاش پیشروی کنونی برای وحدت فیزیک میکروکیهانی و ماکروکیهانی نظریهٔ ریسمانها است، ساختاری که در آن نقاط بی بعد فضا ـ زمان چهار بعدی با ریسمان های نازک در ده بعد جایگزین می‌شوند، که در آن ساختار ذاتی ابعاد اضافه، مثل همان چیزی که از فضای «خالی» استنباط می‌کنیم، در مقیاسی بسیار کوچکتر از ادراک ما رخ می‌دهد. پیگیری این فرضیه (که محتملاً هرگز نمی‌تواند با آزمایش محک زده شود) به طور طبیعی به تفاوتهایی در ابعاد بالاتر، که در آن تقارنهای خاص، یعنی ناورداهای بنیادی، فیزیک میکروسکوپی و فیزیک ماکروسکوپی نهفته شده‌اند، منتهی می‌شود.

نظریهٔ گره‌ها. پنجاه سال قبل ریاضیدانان، با انگیزه‌ای که جزئی از آن به خاطر نیاز به پیدا کردن مدل هایی ریاضی از مکانیک کوانتوم بود، **نظریهٔ عملگرها** را توسعه دادند. نظریهٔ عملگرها به عنوان شاخه‌ای از آنالیز تابعی نضج گرفت، که هم به خاطر جاذبه‌های ریاضی مخفیش و هم به خاطر کاربردهای مداومش در فیزیک کوانتوم امتداد یافت. در سال های اخیر، جستجو برای انواع جدیدی از عملگرها روش‌های جدیدی در طبقه‌بندی به‌دست داد که به نوبهٔ خود به کشف روابط مهمی بین جبرهای عملگرها و طبقه‌بندی گره‌ها منتهی شده است، مسأله‌ای که به نحو آزار دهنده‌ای مشکل بود و قبلاً تمام کوششها را برای حل ناکام گذاشته بود.

کلید طبقه‌بندی گره‌ها، طرحی است برای کدگذاری الگوهای گره به طور جبری، به طوری که عملیات جبری متناظر با اعمال فیزیکی روی گره شوند (۲۷ و ۲۶). برای اولین بار این امر مشخص کردن اینکه آیا یک گره می‌تواند به دیگری تبدیل شود، یا این که آیا کاملاً، بدون گره افتادن قابل تبدیل شدن به یک خط راست است، را ممکن می‌سازد. زیربنای هردوی اینها، یعنی انواع جدید عملگرها و طبقه‌بندی جدید گره‌ها، ساختار جبری جدید است که مشخصاتش با ظهورش در گروههای گره، شاخه‌های خاصی از مکانیک آماری، و مدل های دقیقاً حل پذیر آشکار شد. همان طور که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد، اعتبار ساختار جدید به تقدیر از همه جایی بودنش ظاهر شد. دلیل اینکه چرا تکنیک قدرت خاصی به دست می‌آورد این است که همان الگو در چندین جا پدیدار شد.

به تازگی زیست شناسانی که مضاعف سازی دی.ان.ا را مطالعه می‌کنند با ریاضیدانانی که در نظریهٔ گره‌ها کار می‌کنند.دستهٔ مشترکی تشکیل داده‌اند زیرا دی.ان.ا سلول به طور معمول به صورت گره‌ای تنگ پیچانده شده است. این که چطور دی.ان.ا می‌تواند مضاعف و سپس از هم جدا گردد در حالی که به سختی گره خورده است مشکل قابل تصور است. از انگیزه و کاربردها در مکانیک کوانتوم و از مسیر پژوهش های خاصه فهم در ریاضیات محض گذشتن و سپس به گشودن دی.ان.ا رسیدن، مثالی شگفت‌آور،

گرچه ناهمگون، از ارتباط های متقابل فراوان بین بخش های متنوع ریاضیات است.

الگوها

این مثالها از ریاضیات کنونی، استعاره‌هایی را از روش ریاضی‌ای، که ۳۰۰ سال قبل با تحلیل نیوتنی، یعنی: داده‌ها، استنتاج، و مشاهده نشأت گرفت، نمایان می‌سازد. اینها هم چنین آثار نیروهای عظیمی که در دگرگونی علوم ریاضی، یعنی: کامپیوترها، کاربردها، و باروری متقابل را آشکار می‌کنند. صدها مثال دیگر می‌توانستند همان نکات را نمایان کنند؛ آنهایی که در اینجا انتخاب شده‌اند نه عمیق ترین ها هستند و نه مهمترین ها. اما تنوع و چشم انداز ریاضیات امروزی را القا می‌کنند.

ریاضیات اغلب به عنوان دانش فضا و عدد تعریف می‌شود؛ به عنوان نظامی که ریشه در هندسه و حساب دارد. اگرچه تنوع ریاضیات نوین همواره از این تعریف پیشی گرفته است، اما تا هم آوایی اخیر کامپیوترها و ریاضیات تعریف مناسبتری کاملاً آشکار نشد.

ریاضیات دانش الگوهاست. ریاضیدان الگوهایی را در عدد، در فضا، در علم، در کامپیوترها، و در تخیل می‌جوید. نظریات ریاضی رابطهٔ بین الگوها را توضیح می‌دهند؛ تابع ها و نگاشت ها، عملگرها و مورفیسم‌ها یک نوع الگو را به دیگری می‌پیوندند تا ساختارهای ریاضی ماندگاری به‌دست دهند. کاربردهایی از ریاضی این الگوها را برای «توضیح دادن» به‌کار می‌برند و پدیده‌هایی طبیعی را که با الگوها جور می‌شوند پیش‌بینی می‌کنند. الگوها خود الگوهایی دیگر را القا می‌کنند، [که] غالباً الگوهایی از الگوها می‌دهند. بدین طریق ریاضیات منطق خود را دنبال می‌کند؛ با شروع از الگوهایی از علم و تکمیل رخساره با افزودن تمام الگوهایی که از [الگوهای] اولیه مشتق می‌شوند.

آن قدر که ریاضیات دانش الگوهاست، کامپیوتر ها آن قدر طبیعت نظام را تغییر نمی‌دهند که میزانش را. کامپیوترها به ریاضی چنانند که تلسکوپها و میکروسکوپها به علم تجربی ، آنها میلیون ها بار سرمایهٔ الگوهایی را که توسط دانشمندان ریاضی بررسی می‌شود افزایش داده‌اند. همچنان که این سرمایه رشد می‌کند، کاربردهای ریاضیات و ارتباط های متقابل میان زیر نظام های ریاضیات نیز چنین می‌شوند.

به خاطر کامپیوترها، بیش از مواقع دیگر می‌بینیم که اکتشاف ریاضی مانند یک اکتشاف علوم تجربی است. با جستجوی الگو در داده‌ها آغاز می‌شود ـ احتمالاً در اعداد، ولی اغلب در ساختارهای هندسی یا جبری. تعمیم به تجرید منتهی می‌شود، به الگوهایی در ذهن. نظریات به عنوان الگوهایی از الگوها پدیدار می‌شوند، و اهمیت

با مرتبه‌ای که الگوهای یک شاخه با الگوهای دیگر شاخه‌ها مرتبط می‌شوند اندازه‌گیری می‌شود. الگوهای ظریف با بیشترین قدرت توضیحی به عمیقترین نتایج تبدیل می‌شوند، که شالودهٔ تمامی زیر نظام ها را تشکیل می‌دهند.

استیون واینبرگ، با بازگویی سخنان اندرو گلیسون، ریاضیدانی از هاروارد می‌گوید، دلیل اینکه ریاضیات توانی غریب در تهیهٔ درست الگوهای صحیح برای تحقیقات علمی را دارد شاید این باشد که الگوهای مورد بررسی ریاضیدانان تمام الگوهای موجودند (۲۳).اگر الگوها چیزهایی هستند که همهٔ ریاضیات دربارهٔ آنهاست، پس «کارایی بدون توجیه» ریاضیات ممکن است دیگر آنچنان هم بدون توجیه نباشد.

مراجع

1.G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology* Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1940.

2.E.P. Wigner, *Commun. Pure Appl. Math* **13**, (1960) 1

3. *Renewing U.S. Mathematics: Critial Resource for the Future*, National Academy of Sciences, Washington, DC, 1984.

4. *Mathematical Sciences: A Unifying and Dynamic Resource* National Academy of Sciences, Washington, DC, 1986.

5. *Mathematical Sciences: Some Research Trends*, National Academy of Sciences, Washington, DC, 1988.

6. G. Kolata, *Science* **225**, 156 (1984).

7. T. Tymocszko, *J. Philos*, **76** (1979). 57

8. E. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge* , Oxford Univ. Press, New York, 1983.

9. L. de Branges, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* 1986, A. Gleason, Ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, 25-42.

10. W.H. Lenstra, Jr., *ibid*, 99-120

11. S. Landau, *Not. Amer. Math. Soc.* **34**, (1987) 3

12. D. Harris, *ibid*, **33**, (1986). 443

13. A. Schönhage, in *Procedings of the International Congress*

of Mathematicians, 1986, A. Gleason, Ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, 131-153.

14. S. Smale, *ibid.*, 172-195.

15. J.Gleik, *Chaos*, Viking, New York, 1987.

16. C.Grebogi, E. Ott, J.A.Yorke, *Science* **238**, (1987). 632

17. S.K. Donaldson, in *Procedings of the International Congress of Mathematicians,* 1986, A. Cleason, Ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. 43-54

18. M.L.La Brecque, *Mosaic Washington* **16** (no.1) (spring 1985).

19. *ibid.* **17** (no.4) (winter 1986-1987); *ibid.* **18** (no.1)(spring 1987).

20. I.Peterson, *Sci.News* **131**, (1987). 238

21. W.C. Rheinboldr, *Future Directions in Computational Mathematics, Algorithms, and Scientific Software* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1985).

22. T.A. Heppenheimer, *Mosaic (Washington)* **16** (no.3) (1986).

23. Not. *Amer. Math.Soc.* **33**, (1986). 716

24. M.M. Waldrop, *Science* **238**, (1987). 602

25. E. Witten, in *Procedings of the International Congress of Mathematicians,* 1986, A. Gleason, Ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, pp.267-303.

26. G.Kolata, *Science*, **231**, (1986). 1506

27. V.F.R. Jones, *Not.Amer. Math. Soc.* **33**, (1986). 219

ه.و. لنسترا

برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و رمزنگاری*

ترجمهٔ حسن حقیقی

چندی پیش در مطبوعات آمده بود که ادی شامیر[1] از انستیتوی علوم وایزمن یکی از کلیدهای همگانی دستگاه رمزی کوله پشتی هلمن - مرکل[2] را گشوده است. ساینتیفیك امریکن به صورتی غیردقیق گزارش داده بود که : شامیر این کار را با اثبات این که مسأله ریاضی موسوم به مسأله کوله‌پشتی را، که بینهایت مشکل به نظر می‌آمده، می‌توان به کمک یک الگوریتم ساده کامپیوتری به سرعت حل کرد، انجام داده است.

ساینتیفیك امریکن روش حل ادعایی مزبور را به شکل زیر خلاصه کرده است:

شامیر مسأله کوله‌پشتی را، پس از اینکه نشان داد آن را می‌توان به یک مسأله از لحاظ ریاضی معادل برنامه‌ریزی با اعداد صحیح تبدیل نمود، توانست حل نماید. او نشان داده که مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح که مسأله کوله‌پشتی معادل آن است، به کمک الگوریتمی که به وسیله اچ.و. لنسترا[3] از دانشگاه آمستردام ابداع شده، قابل حل است.به این ترتیب الگوریتم لنسترا نیز می‌تواند مسأله را حل کند.

هدف این مقاله آن است که دقیقا" آنچه ثابت شده و آنچه ثابت نشده را آشکار نماید و روشهایی هم که به کار رفته‌اند را نیز معین سازد. شامیر راهی برای حل مسأله کوله‌پشتی در حالت عمومی، که از لحاظ محاسباتی دشوار[4] به نظر می‌رسد پیدا نکرده، آنچه او

---

* Lenstra, H.W., "Integer programming and cryptography", *Math. Intelligencer,* Vol.6,No.3 (1984)14-19

1.Adi Shamir 2.Hellman-Merkle 3.H, W. Lenstra 4.intractible

انجام داده یافتن راهی جدید در استفاده از یک الگوریتم برنامه‌ریزی با اعداد صحیح برای حل نوع خاصی از مساله کوله‌پشتی است که در رمزنگاری مطرح است.

درباره رمزشناسی،برنامه ریزی خطی، اطلاعات پیش زمینه‌ای مفیدی در مجله متمتیکال اینتلیجنسر به‌ترتیب در مقالات سیمونز[۵] و لُواش[۶] می‌توان پیدا کرد.

برنامه‌ریزی با اعداد صحیح

برای مقاصد ما، بیان مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به صورت زیر، بسیار مناسبتر خواهد بود. فرض می‌کنیم n و m اعداد صحیح مثبتی باشند و فرض می‌کنیم nـبردار حقیقی a_i و اعداد حقیقی b_i به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, m$ داده شده باشند. مسأله این است که تعیین کنیم آیا n ـ بردار x با مؤلفه‌های صحیح x_j وجود دارد که در نامساوی‌های

$$a_i x \leq b_i \ , \quad i = ۱, ۲, \cdots, m \qquad (۱)$$

صدق کند یا خیر؟ در سراسر این مقاله می‌پذیریم که b_i ها و مؤلفه‌های a_i ها اعداد صحیح هستند. اگر آنها گویا باشند، این فرض هیچ محدودیتی اساسی ایجاد نمی‌کند و این که اجازه دهیم که به صورت کلی‌تر، اعداد حقیقی باشند، منجر به این سؤال خواهد شد که چگونه آنها را به طور دقیق مشخص کنیم، که من نمی‌خواهم به آن بپردازم.

توجه داشته باشید که مسأله مورد بحث را به صورت مسأله تصمیمی تنظیم کرده‌ایم که جواب «بله» یا «نه» دارد. برای مثال اگر جواب «بله» باشد، ممکن است عملاً بخواهیم بردار صحیح x ی را که در (۱) صدق می‌کند نمایش دهیم، یا ممکن است سؤال این باشد که x ی بیابید که cx را، که در آن c یک n— بردار با مؤلفه‌های صحیح است، ماکزیمم کند. این گونه بیان‌های مختلف از مسأله مورد بحث هم‌ارز هستند. به این معنا که یک روش کارا برای حل یکی از آنها، به آسانی منجر به روش حلی کارا در مورد بقیه می‌شود.

الگوریتم‌های کارا

برای حل مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح، علاقه‌مند به الگوریتمی هستیم که نه تنها جواب صحیح را بدهد، بلکه این کار را نیز در زمانی معقول انجام دهد. در اینجا

5.Simmons 6.Lovasz

«معقول» می‌تواند دقیقاً تعریف گردد. زمان صرف شده برای حل، باید به وسیله یک تابع چند جمله‌ای به طول ℓ از مسأله محدود شود. این فاصله زمانی را باید به‌عنوان زمانی که نوشتن $(n+1)m$ مؤلفه n ـبردار a_i و بردار b می‌گیرد، تلقی نمود.

فرض می‌کنیم A، قدرمطلق ماکزیمم این مؤلفه‌ها باشد آن گاه هر مؤلفه حداکثر $\log(A+2)$ رقم دوتایی خواهد داشت. به این ترتیب برای مقاصد بعدی‌مان می‌توانیم قرار دهیم $\ell = (n+1)m\log(A+2)$ اگر شرط صحیح بودن مؤلفه‌های بردار جواب x حذف شود آن گاه چنین الگوریتمی در واقع وجود دارد. برای بحثی راجع به این الگوریتم که توسط خاشیان[7] کشف شده، خواننده را به مقاله لُواش [۲] ارجاع می‌دهیم.

بعید به نظر می‌رسد که برای برنامه‌ریزی با اعداد صحیح، چنین چند جمله‌ای وجود داشته باشد. زیرا این که یک مسأله NP [8] دشوار است. این موضوع تقریباً به این مفهوم است که مسأله مورد بحث حداقل به همان اندازهٔ بسیاری از مسائل دیگری که به خاطر مشکلات محاسباتی‌شان مشهورند، مثل مسأله فروشنده دوره‌گرد و مسأله تجزیه یک عدد صحیح به عوامل اول، مشکل است.، برای بحثی کاملتر در این مورد می‌توانید به [۳] مراجعه کنید.

نتیجه جدیدی که ساینتیفیک امریکن به آن اشاره دارد از این قرار است. برای هر مقدار معین n، یعنی تعداد متغیرها، یک الگوریتم چند جمله‌ای برای حل مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح وجود دارد [۴]. این متناقض با آنچه در پاراگراف قبلی آمده نیست. فی‌المثل، برای n ثابت، زمان اجرائی برابر $2^n\ell$، به‌طور چند جمله‌ای محدود است، اما در حالت کلی چنین نیست. (در واقع الگوریتم من بسیار کندتر است).

حال ابتدا ایده‌های اصلی‌ای را که در ورای این الگوریتم جدید است بیان می‌کنیم و سپس راجع به اهمیت رمزشناسانه آن به بحث می‌پردازیم.

نقاط صحیح واقع در یک مثلث

به‌دست دادن الگوریتمی برای مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح ، با یک متغیر به گونه‌ای آسان انجام می‌گیرد. برای این کار کافی است دنباله‌ای از تصمیمات و مقایسه‌ها را انجام دهیم. این اعمال در زمانی چند جمله‌ای، درست مثل اعمال حسابی دیگری چون جمع، تفریق و ضرب، شدنی است.

این کار برای حالت دو متغیر نابدیهی است. فرض می‌کنیم K محدوده‌ای از صفحه

7.Khachian 8.Non-polynomial

باشد که به وسیله معادلات (۱) تعریف شده است.

$$K = \{x \in I\!R^۲ | a_i x \leq b_i, \forall i = ۱, ۲, \cdots, m\}$$

این مجموعه یک مجموعه محدب است که حداکثر به وسیله m پاره خط محدود شده است. حالت خاصی که در آن، K یک مثلث است، را در نظر می‌گیریم. آنگاه سؤال به این ترتیب مطرح می‌شود: چگونه فرد می‌تواند در زمانی چند مرحله‌ای تصمیم بگیرد که مثلث داده شده در صفحه حاوی یک نقطه با مختصات صحیح است یا خیر. در این مورد هیچ تفاوتی نمی‌کند که مثلث به وسیله معادلات تعریف کننده اضلاعش $a_i x = b_i (i = ۱, ۲, ۳)$ داده شده باشد یا به وسیله مختصات گویای رئوسش، زیرا به آسانی، در زمانی چند مرحله‌ای، مختصات رئوس را از اضلاع و اضلاع را از مختصات رئوس، می‌توان محاسبه نمود. خواننده‌ای که درباره مسأله فوق مختصر فکر کند، احتمالاً عکس‌العملش چنین خواهد بود: مثلثی را رسم کن و ببین. او استدلال خواهد کرد که یا مثلث «بزرگ» است که به طور بدیهی در این حالت باید واقعاً یک نقطه صحیح داشته باشد، یا مثلث «کوچک» است که در این صورت مثلث شامل یک مستطیل کوچک است که جمیع نقاط صحیح واقع در آن را می‌توان یکی‌یکی بررسی کرد.

اگر کسی بخواهد این استدلال را دقیق سازد، آنگاه متوجه خواهد شد که استدلال فوق در مورد تمام مثلثهای خوش منظری که در کتابهای درسی هندسه می‌توان یافت، معتبر خواهد بود، اما وقتی این مسأله برای مثلث‌هائی که خیلی طویل و خیلی باریک‌اند، طرح شده است. این مثلثها باریک‌تر از آنند که آشکارا نقطه‌ای صحیح را در برداشته باشند و آن چنان طویل که بیش از آن نقاط صحیح در نزدیکی آنها وجود دارد. این کار به کمک کسرهای مسلسل قابل انجام است. اما من در بحث خود از آن پرهیز می‌کنم، و روشی را بیان خواهم کرد که آسان تر به ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابد.

راه حل مورد بحث اساساً بر ردّ این حکم که مثلث‌هائی «خاص» وجود دارند، متکی است. اگر مثلث K کمی غیرمعمول باشد چرا تبدیل خطی نامنفرد τ ئی را، چنان که مثلث $\tau[K]$ خوش نماتر شود، به کار نبریم ؟ به طور مشخص‌تر τ را چنان انتخاب کنید که مثلث اخیر متوازی‌الاضلاع باشد.

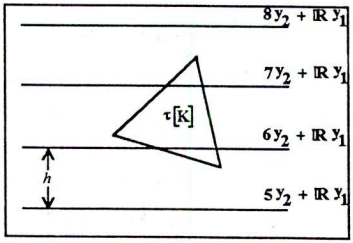
روشن است که K، عنصری از $\mathbf{Z}^۲$ را در بردارد، اگر و فقط اگرمثلث جدید $\tau[K]$ عنصری از شبکه $L = \tau[\mathbf{Z}^۲]$ را در برداشته باشد. اگر $e_۱$ و $e_۲$ بردارهای پایه $I\!R^۲$ باشند آنگاه $\tau(e_۱)$ و $\tau(e_۲)$ برای L پایه‌ای به این معنا که $L = \mathbf{Z}\tau(e_۱) + \mathbf{Z}\tau(e_۲)$، تشکیل می‌دهند.

حال مسأله از مثلث به شبکه انتقال یافته است و برای این که حالت اخیر را بررسی کنیم، از نظر علامت‌گذاری مناسب‌تر خواهد بود که $\mathbb{R}^2$ را به همان صورت رایج با صفحه مختلط $\mathbb{C}$ یکی بگیریم. این که L، همانند هر شبکه دیگر واقع در $\mathbb{C}$ دارای پایه y_1, y_2 با این خاصیت است که $z = y_2/y_1$ متعلق به قلمرو اساسی شناخته شده برای گروه مدولار

$$\mathcal{I}mz > 0 \qquad |\mathcal{R}ez| \leq 1/2 \qquad , |z| \geq 1$$

است نتیجه‌ای کلاسیک می‌باشد.

به علاوه الگوریتم نستباً سرراستی وجود دارد که پایه داده شده برای L را به پایه y_1, y_2 تبدیل می‌کند.



شکل ۱

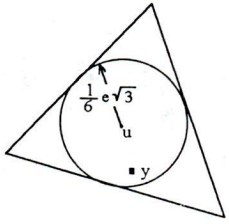
ضروری است که مطلب دیگری را در مورد L بدانیم. فرض کنیم h نشاندهنده فاصله y_2 از خط $\mathbb{R}y_1$ باشد (شکل ۱ را ببینید.) اثبات این که شعاع پوششی L حداکثر $h/\sqrt{2}$ است، و به عبارت دیگر، قرص های بسته به شعاع $h/\sqrt{2}$ و به مرکز نقاط واقع در L، تمام صفحه مختلط را می‌پوشانند، مسأله‌ای مقدماتی است.

$$\forall u \in \mathbb{C} \;\; \exists y \in L \;\; |u - y| \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

مابقی حل به استدلال ساده‌ای که با آن شروع کردیم شباهت بسیار دارد. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $\tau[K]$ را با e نمایش می‌دهیم. در حالت اول مثلث بزرگ است. یعنی

$$\frac{e\sqrt{3}}{6} \geq \frac{h}{\sqrt{2}}$$

در این حالت $e\sqrt{۳}/۶$ شعاع دایره محاطی مثلث است، به این ترتیب از به کار بردن (۲) با u ای برابر مرکز این دایره، ملاحظه می‌شود که در واقع در این حالت نقطهٔ شبکه‌ای y واقع در مثلث مورد بحث است (شکل ۲)



شکل ۲

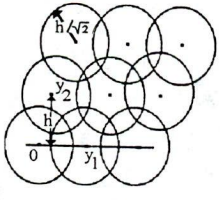
در حالت دوم مثلث کوچک است:

$$\frac{e\sqrt{۳}}{۶} < \frac{h}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین $e/h < \sqrt{۶}$ با ملاحظهٔ این که خطوط موازی

$$ky_۲ + \mathbb{R}y_۱ \quad k \in \mathbf{Z}$$

دارای فواصل متساوی h از یکدیگرند (شکل ۳). به آسانی ثابت می‌شود که در این حالت بیش از $[\sqrt{۶}] + ۱ = ۳$ خط از خطوط نمی‌توانند مثلث را قطع کنند. اکنون از آنجا که هریک از نقاط شبکه‌ای بر یکی از این خطوط قرار دارد، کافی است که این خطوط را یکی‌یکی بررسی کنیم و این کار را بدون هیچ مشکلی می‌توان انجام داد.



شکل ۳

اگر تمام جزئیات روش تصمیم‌گیری مورد بحث را تصریح کنیم، مشخص می‌شود که، در واقع، الگوریتم حاصل در عمل در طول زمانی برابر مقدار تابعی چند جمله‌ای از زمان اجرا می‌گردد.

ابعاد بالاتر

الگوریتم فوق به مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح با ابعاد بالاتر قابل تعمیم می‌باشد. در اینجا تنها طرح مختصری از آن را ارائه می‌دهیم. و در این مورد باز هم فرض می‌کنیم K مجموعه محدب بسته تعریف شده توسط (۱) باشد

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i x \leq b_i \quad \forall i = ۱, \cdots, m\}$$

با فرض این که K *کراندار* و دارای حجم مثبت است می‌توان نشان داد که از کلیت مسأله کاسته نمی‌شود.

کار را با ساختن یک تبدیل خطی ناتکین τ ، که $\tau[K]$ شکلی «گرد» شود ، به این معنا که

$$\frac{\text{شعاع خارجی } \tau[K]}{\text{شعاع داخلی } \tau[K]}$$

از بالا، به وسیله ثابتی که تنها به n بستگی دارد، کراندار است، آغاز می‌کنیم. در اینجا شعاع خارجی $\tau[K]$ شعاع کوچکترین کره شامل $\tau[K]$ و شعاع داخلی، شعاع بزرگترین کره مشمول در آن است. لُواش با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی با اعداد صحیح خاشیان، نشان داده است که چنین تبدیلی را می‌توان در زمانی با طول چند جمله‌ای، حتی اگر n تغییر کند، پیدا کرد.

اکنون باید مشخص کرد که $\tau[K]$ شبکه $L = \tau[\mathbb{Z}^n]$ را قطع می‌کند یا خیر. برای رسیدن به این هدف پایه $y_۱, y_۲, \cdots, y_n$ برای L چنان می‌سازیم که تقلیل یافته باشد به این معنا که

$$\frac{\text{حجم}\{\sum_{i=۱}^{n} r_i y_i, r_i \in \mathbb{R}, ۰ \leq r_i \leq ۱\}}{\Pi_{i=۱}^{n} |y_i|}$$

از پایین توسط ثابتی که فقط به n بستگی دارد، کراندار باشد. توجه داشته باشید که کسر مزبور همواره کوچکتر یا مساوی یک است و مساوی است اگر و فقط اگر y_i ها دوبه دو بر یکدیگر عمود باشند. بنابراین یک پایه تقلیل یافته «تقریباً قائم» است. برای یافتن

چنین پایه‌ای، الگوریتمی چند جمله‌ای، حتی زمانی که n تغییر می‌کند، وجود دارد. این نتیجه باز هم از آن لُواش است و الگوریتم تقلیل پایه‌اش چندین کاربرد دیگر به خصوص در تجزیه چند جمله‌ای‌ها دارد. [۵]

اکنون مانند مثلث، دو حالت وجود دارد. بگذارید فرض کنیم y_n بزرگترین $y_1, y_2, \cdots, y_n$ باشد و فاصله y_n از ابر صفحه $\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}y_i$ را با h نمایش دهیم. در حالت اول شعاع داخلی $\tau[K]$ آنقدر بزرگتر از h است که نقطه شبکه‌ای مورد نظر واقع در $\tau[K]$ با استفاده از روشی مشابه (۲)، وجود دارد. در حالت دیگر ثابت می‌شود که تعداد اعداد صحیح k یی که به ازاء آنها ابرصفحه

$$ky_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}y_i$$

مجموعه محدب $\tau[K]$ را قطع می‌کند به‌وسیله ثابتی که فقط به n بستگی دارد کراندار است. از آنجا که هر نقطه شبکه‌ای بر یکی از این ابرصفحه‌ها واقع است، کافی است که مقادیر مزبور را یکی‌یکی جستجو کنیم. برای یک مقدار ثابت k، یک مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و با تنها $n-1$ متغیر به دست می‌آید و مسأله مزبور با روش بازگشتی حل می‌شود.

در اینجا طرح الگوریتم مورد بحث پایان می‌پذیرد. اما می‌توان نشان داد که الگوریتم مزبور به ازاء n ثابت در مدت زمانی برابر مقدار یک چند جمله‌ای از زمان اجرا می‌شود.

در واقع دو الگوریتم کمکی فوق‌الذکر لُواش، بعداً ابداع شدند و جانشین الگوریتم‌های قبلی، که جزئاً انگیزه بخش آنها بوده، و تنها تابعی چند جمله‌ای از n ثابت بوده‌اند، گردیدند.

کاربردها

تا به حال درباره اجرای عملی الگوریتمی که هم اکنون شرح داده شد مطلبی نشنیده‌ام. این چنین می‌نماید که ارزش عملی آن نسبتاً محدود است. تصورم براین است که این نیاز نظری که n ثابت باشد، مستلزم این درخواست عملی است که n کوچک باشد، اما در مورد nهای کوچک الگوریتم‌های قدیمی کافیند.

از طرف دیگر کاربردی از این روش در رمزنگاری وجود دارد که در زیر شرح داده شده است. اما حتی در این مورد نیز ممکن است چنین استدلال کرد که کاربرد مزبور کاربردی از کل الگوریتم برنامه‌ریزی با اعداد صحیح نیست، بلکه کاربردی از الگوریتم تقلیل پایه، که به عنوان یک برنامه فرعی مورد استفاده قرار گرفته است، می‌باشد.

مسأله کوله‌پشتی

مسأله کوله‌پشتی به صورت زیر تنظیم شده است. با معلوم بودن اعداد صحیح $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ می‌خواهیم مشخص کنیم که زیر مجموعه I، از $\{1, 2, \cdots, n\}$ چنان که

$$\sum_{i \in I} a_i = b$$

وجود دارد یا خیر، به عبارت دیگر با دردست داشتن کوله‌پشتی‌ای با ظرفیت b، و n شئی با اندازه‌های $a_1, a_2, \cdots, a_n$ می‌خواهیم تصمیم بگیریم که کوله‌پشتی مزبور می‌تواند توسط زیر مجموعه‌ای از این اشیاء، ظرفیتش تکمیل گردد یا نه ؟ اگر a نشانگر یک $n-$ بردار با مختصات $a_1, \cdots, a_n$ باشد، روشن است که مسأله اخیر هم ارز این است که n تایی x با مختصات صح x_j یی چنان وجود دارد که

$$ax = b$$
$$0 < x_j \leq 1 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

یا خیر. این مسأله، مثالی از برنامه‌ریزی با اعداد صحیح با $m = 2n + 2$ می‌باشد. اما الگوریتم جدید برنامه‌ریزی با اعداد صحیح قابل استفاده در حل مسأله کوله‌پشتی نیست. در واقع به کارگرفتن شمارش کامل، یعنی آزمودن تک‌تک 2^n بردار $x \in \{0, 1\}^n$ سریعتر به جواب منجر خواهد شد.

در زیر با مسأله کوله‌پشتی با تنظیم مختصر متفاوتی مواجه می‌شویم: اگر مانند فوق، مجموعهٔ I یی وجود داشته باشد، می‌خواهیم آن را نیز پیدا کنیم. اما به آسانی ملاحظه می‌شود که هردو شکل بیان صورت مسأله، به همان معنا که در مورد مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیحی بود، با یکدیگر هم‌ارزند.

تاکنون هیچ الگوریتم چند جمله‌ای برای حل مسأله کوله‌پشتی شناخته نشده و چون مسأله کوله‌پشتی NPـدشوار است، انتظار وجود چنین الگوریتمی نیز نمی‌رود. [۳ را نگاه کنید.]

شامیر نیز راهی برای حل مسأله کوله‌پشتی پیدا نکرده است و آنچه حل کرده، نوع خاصی از مسأله کوله‌پشتی است که در رمزنگاری مطرح می‌شود و اکنون به شرح آن می‌پردازیم.

کوله‌پشتی رمزنگاری

مسائل مربوط به کوله‌پشتی ای که در رمزنگاری مطرح می‌شوند از نوع خاصی هستند. آنها

ساختاری مخفی دارند که دانستن آن شخص را قادر می‌سازد تا آن را به طریقی بدیهی حل کند. اما قبل از توضیح در مورد این که چگونه چنین کوله‌پشتی‌هائی ساخته می‌شوند، اجازه دهید مختصری راجع به موارد استفاده آنها در رمزنگاری شرح دهم. برای کسب پیش زمینه‌ای در این مورد مقاله سیمونز[۱] را ببینید.

شخصی که می‌تواند فرستنده نامیده شود، می‌خواهد پیام معینی را برای شخص دیگر، موسوم به گیرنده، ارسال کند. فرض براین است که پیام مزبور به صورت دنبالهٔ $x = (x_j)_{j=1}^{n} \in \{0,1\}^n$ از n بیت، به ازای n ی مناسب، مطرح شده است، می‌خواهند پیام مزبور را از طریق یک شبکه عمومی به گونه‌ای بفرستند که شخص دیگری که به آن گوش می‌دهد ـ *استراق سمع کننده* ـ قادر نباشد پیام x را بازسازی نماید.

فرستنده مورد بحث برای رسیدن به این هدف به طریق زیر عمل می‌کند. به نام گیرنده، در یک فایل همگانی، مثلاً دفترچه تلفن، نگاه و از آنجا n عدد $a_1, \cdots, a_n$ را پیدا می‌کند، بعد به جای پیام x، عدد b را که به وسیله

$$b = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

تعریف شده، برای گیرنده ارسال می‌کند. گیرنده پس از دریافت b از ساختار رمزی $a_1, a_2, \cdots, a_n$ برای حل مسأله کوله‌پشی استفاده می‌کند و پیام اصلی $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ را بازیابی می‌کند. استراق سمع کننده، تمامی $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ها را از فایل همگانی پیدا می‌کند و b را نیز با گوش دادن به کانال عمومی می‌داند، اما ساختار مخفی پیام را نمی‌داند. در نتیجه ظاهراً با حل مسأله کوله‌پشتی‌ای مواجه می‌شود که در مورد آن هیچ الگوریتم مناسبی دردست ندارد و احتمالاً قادر به بازسازی پیام نمی‌شود.

اما گیرنده چگونه اعداد $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ی را که در فایل همگانی قرار داده شده‌اند، می‌سازد؟ برای انجام این کار چندین روش به وسیله مرکل و هلمن، که ایدهٔ فوق منتسب به آنهاست، پیشنهاد شده و فقط ساده‌ترین این روشهاست که ناامن بودن آن توسط شامیر ثابت شده و به طریق زیر است.

یکی از مسائل بسیار سادهٔ کوله‌پشتی برای حل، نه تنها برای گیرنده، بلکه برای استراق سمع‌کننده نیز، مسأله‌ای است که در آن دنباله مورد بحث $a_1, a_2, \cdots, a_n$ فوق افزایشی باشد، به این معنا که هر a_i بزرگتر از مجموع جملات قبلی‌اش باشد به عبارت دیگر

$$a_i > \sum_{j-1}^{i-1} a_j \quad 1 \leq i \leq n$$

در مورد مسأله کوله‌پشتی این چنین، شخص باید به طور واضح اگر $b > a_n$، $x_n = ۱$ را و اگر $b < a_n$، $x_n = ۰$ را داشته باشد. به طریقی مشابه $x_{n-۱}$، $x_{n-۲}$، $\cdots$ و $x_۱$ نیز متوالیاً معین می‌شوند.

فرستنده هنگامی که در کار بناکردن کوله‌پشتی است، از چنین دنباله فوق افزایشی $a'_۱, a'_۲, \cdots, a'_n$ ی شروع و برای مخفی کردن ساختار بدیهی‌اش، دو عدد رمزی (ضرب کننده) u و (پیمانه) m صادق در

$$m > \sum_{j=۱}^{n} a'_j, \qquad gcd(u, m) = ۱$$

را انتخاب می‌کند.

بعد a_j ها را به وسیله

$$a_j = ua'_j (mod m) \quad ۰ < a_j \leq m$$

تعریف می‌کند و $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ اعدادی هستند که آنها را قابل دسترس عموم می‌سازد اما $a'_۱, a'_۲, \cdots, a'_n$، u و m را نزد خود نگاه می‌دارد.

گیرنده برای بازگشائی پیام دریافتی $b = \sum_{j=۱}^{n} a_j x_j$ به شیوه زیر عمل می‌کند. با استفاده از الگوریتم اقلیدسی عدد صحیحی چون w را که در شرط $wu \equiv ۱ (mod m)$ صدق کند، تعیین می‌کند. این وارون حسابی (ضرب کننده) است. سپس به محاسبه عدد b' که به وسیله

$$b' = wv (mod m) \quad ۰ \leq b' < m$$

تعریف شده می‌پردازد. با استفاده از این واقعیت که $a'_j \equiv wa_j (mod m)$ و نامساوی $m > \sum_{j=۱}^{n} a'_j$ به آسانی ثابت می‌شود که

$$b' = \sum_{j=۱}^{n} a'_j x_j$$

از آنجا که a'_j ها فوق افزایشی هستند، x_j ها از آنها قابل به دست آوردن‌اند. استراق سمع کننده w یا m را نمی‌شناسد. همینطور هیچ یک از a'_j را، و به این ترتیب فرض براین است که قادر به انجام تبدیل مورد نظر نیست.

نحوه پرداختن شامیر به مسئله

شامیر الگوریتمی برای حل مسائل کوله‌پشتی ابداع کرد که به داشتن ساختاری مخفی از نوع توصیف شده در فوق اما بدون شناخته شدن اعداد u و m، معروف است. الگوریتم وی غالب مسائل کوله‌پشتی از این نوع را حل می‌کند، اما حل تمامی آنها را تضمین نمی‌کند، لکن همانطور که خود وی می‌نویسد، این موضوع، مانعی جدی در زمینه رمزنگاری نیست، زیرا یک دستگاه رمزی، هنگامی که غالب کلیدهایش را بتوان به طور کارا تجزیه و تحلیل کرد بی‌فایده می‌شود [۷]

کارائی الگوریتم شامیر را می‌توان به صورت زیر فرموله نمود. فرض می‌کنیم عدد حقیقی معین $d > ۱$، به عنوان نسبت

$$\frac{\text{تعداد بیت های پیام رمزی}}{\text{تعداد بیت های پیام اصلی}}$$

که در حدود $logb/n \log ۲$ است، در نظر گرفته باشیم. به علاوه فرض کنیم عدد صحیح $m < ۲^{dn}$ نیز ثابت باشد. مجموعه کوله‌پشتی‌های رمزنگاری به پیمانه m را با S نمایش می‌دهیم. به این ترتیب عناصر S در تناظری یک به یک با دنباله‌های $(a'_۱, a'_۲, \cdots, a'_n, u)$ از اعداد صحیح مثبت که در شرایط

$$\begin{aligned} &a'_۱, a'_۲, \cdots, a'_n \qquad \text{دنباله فوق افزایشی است} \\ &\textstyle\sum_{j=۱}^{n} a_j < m \\ &gcd(u, m) = ۱ \quad u \leq m \end{aligned}$$

صدق می‌کنند، قرار می‌گیرند. با این علامت‌گذاری می‌توان ثابت کرد که صورت مناسبی از الگوریتم شامیر تقریباً تمام مسائل واقع در S را به این معنا حل می‌کند که کسری که نمی‌تواند حل کند، هنگامی که n به سمت بینهایت میل می‌کند به سرعت به صفر میل می‌کند. علاوه‌براین، به ازای d ی ثابت، زمان اجرای الگوریتم شامیر توسط تابعی چند جمله‌ای از n کراندار می‌شود.

شامیر مدعی اثبات این مطلب به ازاء $d < ۲$ است. حالت کلی به وسیله، جی.سی. لاگاریاس[۹] (از آزمایشگاههای بل) اثبات شده . هدف الگوریتم شامیر، با مفروض بودن $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$، محاسبه اعداد جدید w' و m' ی است که می‌توانند دقیقاً به

همان منظور که a و m به کار رفته‌اند، به کار روند. به عبارت دیگر، باید دنباله فوق افزایشی $a''_1, a''_2, \cdots, a''_n$ وجود داشته باشد که

$$a''j \equiv w'a_j (mod\ m) \qquad 1 \leq j \leq n$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j^n < m'$$

صدق کنند. نشان داده می‌شود که تمام زوجهای (w', m') ی که به ازاء آنها w'/m' به اندازه کافی به w/m نزدیک است، این خاصیت را دارا هستند. بنابراین، هدف الگوریتم شامیر، دریافت تقریب دیوفانتی به اندازه کافی مناسب w'/m' به w/m است.

ایده اصلی روش شامیر و ارتباطش با برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به قرار زیر است. داریم $a'_j \equiv a_j w (mod\ m)$. بنابراین برای اعداد صحیح معین $y_1, y_2, \cdots, y_n$

$$a'_j = wa_j - y_j m \quad 1 \leq j \leq n \qquad (۳)$$

در اینجا رمزگشا تنها a_j را می‌شناسد و مابقی جمیعاً مجهولند. اما او این را نیز می‌داند که a'_j ها دنباله‌ای فوق افزایشی تشکیل می‌دهند و از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که اعداد a'_j به ازاء j های کوچک نسبت به m کاملاً کوچکند. به این ترتیب با تقسیم (۳) بر $a_j m$ می‌بینیم که، مثلاً اعداد $y_1/a_1, y_2/a_2, y_3/a_3, y_4/a_4$ به w/m نزدیکند و بنابراین به یکدیگر نزدیک می‌باشند. این مطلب منجر به نامساوی دو طرفه‌ای برای سه عدد

$$a_j y_1 - a_1 y_j \quad j = 2, 3, 4$$

می‌شود. این نامساوی ها، همراه با $0 < y_j < a_j$، منحصر به مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح چهار بعدی‌ای می‌گردد که از آن y_1, y_2, y_3, y_4 قابل به‌دست‌آوردن می‌شوند. در این مرحله باید نشان داده شود که مسأله مزبور، محتمل داشتن جوابهای خارجی بسیاری که، به ازای آنها y_1/a_1 به w/m نزدیک نباشند، نیست، و این کار با فرض $d < 2$ شدنی است.

به مجرد اینکه y_1، y_2، y_3 و y_4 به‌دست آمدند، شخص تقریب نسبتاً مناسب y_1/a_1 به w/m را به دست می‌آورد. در این صورت استفاده از روشهای تقریب دیوفانتی شامیر معمولاً برای پیدا کردن اعداد مورد نظر w' و m' تواناست، و به این ترتیب طرح من برای تشریح روش شامیر پایان می‌پذیرد.

9.J.C.Lagarias

برای مقادیر بزرگتر d، باید مسائل برنامه‌ریزی با اعداد صحیح با تعداد متغیرهای بیشتری را حل کرد. به عقیده لاگاریاس $d \geq ۳$ متغیر برای $[d] + ۲$ کافی است.

تحقیقات جاری در این زمینه متوجه حل کردن مسأله کوله‌پشتی‌های رمزنگاری پیچیده‌تر دیگری است که توسط مرکل، هلمن و دیگران مطرح شده‌اند. تلاشهای شناخته شده در این دستگاهها از خواص ویژهٔ کوله‌پشتی‌های رمزنگاری که رمزگشا را قادر می‌کند ابزارهای تقریب دیوفانتی، به خصوص الگوریتم تقلیل پایه لُواش را برای حل آنها، به کار برد، استفاده می‌کنند. معهذا هیچ یک از این تلاشها به حالت کلی مسأله کوله‌پشتی نمی‌پردازند.

مراجع

1. Simmons, G.J.Cryptology: The mathematics of secure communication. *Math. Intelligencer* **1** (4), (1979) 233-246.

2. Lovasz, L.A, new linear programming algorithm-Better or worse than the simplex method? *Math. Intelligencer* **2**(3), (1980) 141-146.

3. Garey, M.R., Johnson D.S. *Computers and Interactability: A Guide to the Theory of NP-completeness*,Freeman (1979).

4. Lenstra, H.W.Jr, Integer programming with a fixed number of variables, *Math Oper. Res.* **8** (4) (1983)

5. Lenstra, A.K. Lenstra, H.W, Jr.,Lovasz, L.Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* **261** (1982) 515-534.

6. Merkle, R.C, Hellman, M.E. Hiding information and signatures in trap-door knapsacks. *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-24-5, (1978) 525-530.

7. Shamir, A. A polynomial time Algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman Cryptosystem, *Proc. 23rd IEEE Symp. Found. Computer Sci.*, (1982) 145-152.

گریگوری ج. چایتین

تصادفی بودن و اثبات ریاضی*

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

گرچه تصادف را می‌توان به دقت تعریف کرد و حتی اندازه گرفت، اما نمی‌توان تصادفی بودن عدد مفروضی را به اثبات رساند. این معما حدی بر امکان ریاضی مقرر می‌کند.

تقریباً هرکس برداشتی شهودی از این که عدد تصادفی چیست، دارد. به عنوان مثال، این دو دنباله از اعداد دودویی را در نظر گیرید :

۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱ ۰۱۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱۰

اولی به وضوح طبق قانونی ساده ساخته شده است، یعنی از ده بار تکرار ۰۱ به دست آمده است. اگر از کسی بخواهیم که حدس بزند چگونه این دنباله ادامه پیدا می‌کند با اطمینان قابل توجهی پیش‌بینی می‌کند که دو رقم بعد ۰ و ۱ خواهد بود. لکن در دنبالهٔ دوم قانون مشخصی برای تولید ارقام به کار گرفته نشده و راه روشنی برای پیش‌بینی ارقام بعدی وجود ندارد.

دنبالهٔ دوم با ۲۰ بار سکه انداختن و نوشتن ۱ وقتی شیر آمده و نوشتن ۰ وقتی خط آمده، تولید شده است. انداختن سکه روشی کلاسیک برای تولید اعداد تصادفی است و ممکن است شخص در ابتدا چنین بیندیشد که بی‌قاعدگی یک دنباله به تنهایی تصادفی بودن آن را تضمین می‌کند؛ اما چنین نیست. با ۲۰ بار سکه انداختن می‌توان هریک از 2^{20} (کمی بیش از یک میلیون) دنبالهٔ دودویی را تولید کرد که هریک دقیقاً احتمال های

---

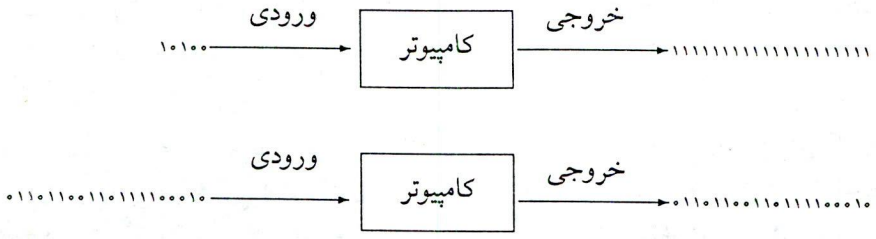
* Chaitin, G.J., "Randomness and Mathematical proof" *Sci. Amer.* Vol. 232 (No.5), 1975,47-52.

وقوع برابر دارند. به این ترتیب نباید به دست آوردن دنباله‌ای با الگویی واضح از به دست آوردن دنباله‌ای تصادفی عجیبتر باشد؛ در واقع هریک از این دو دارای احتمالی برابر $1/2^{20}$ هستند. اگر ریشه داشتن در وقوع پیش آمدی احتمالی، تنها محک تصادفی بودن باشد، آنگاه هردو دنبالهٔ مزبور بایستی «تصادفی» تلقی شوند، و در واقع از آنجا که همین مکانیسم می‌تواند تمام دنباله‌های ممکن را تولید کند هر دنبالهٔ دیگری هم می‌تواند چنین در نظر گرفته شود. در این صورت فرق گذاشتن بین واقعه تصادفی و واقعهٔ با قاعده، بی‌فایده است.

واضح است که تعریفی معقول تر از تصادفی بودن مورد نیاز است؛ تعریفی که با مفهوم شهودی عدد «بی الگو» در تناقض نباشد. در مورد چنین تعریفی تنها از سال ۱۹۶۵ به بعد اندیشیده شده است. این تعریف به مبداء عدد توجه نمی‌کند اما به طور کامل به مشخصات دنبالهٔ ارقام آن وابسته است. تعریف جدید این امکان را فراهم می‌کند که خواص یک عدد تصادفی را دقیق‌تر از قبل توضیح دهیم، و سلسله مراتب درجات تصادفی بودن را مشخص می‌کند. شاید فواید یک تعریف بیش از آن که در قابلیت‌های آن باشد، در محدودیت‌هایش باشد. به خصوص، تعریف مذکور جز در موارد بسیار استثنایی نمی‌تواند به تعیین اینکه دنبالهٔ معلومی از ارقام، مانند دومین دنباله‌ای که در ابتدای مقاله آمده، واقعاً تصادفی است یا چنان به نظر می‌آید، کمکی کند. این محدودیت نقص تعریف نیست، بلکه نتیجه‌ای خلاف عادت و ظریف، اما اساسی، در مبانی ریاضیات است. این مطلب رابطهٔ نزدیکی با قضیهٔ مشهوری دارد که در ۱۹۳۱ توسط کورت گودل مطرح و ثابت شد و به نام «قضیهٔ ناتمامیت گودل» معروف است. این قضیه و نیز آنچه حدود ۳۰ سال قبل در مورد سرشت تصادفی بودن کشف شد، به مشخص کردن مرزهایی که روش های ریاضی مشخص را محدود می‌کنند، کمک می‌کند.

تعریف الگوریتمی. تعریف جدید تصادفی بودن ریشه در «نظریه اطلاعات» دارد؛ علمی که به طور عمده از جنگ جهانی دوم به بعد توسعه یافته است و در مورد مبادلهٔ پیام‌ها مطالعه می‌کند. فرض کنید شما دوستی دارید که به سیاحت سیاره‌ای در کهکشانی دیگر رفته است و فرستادن تلگراف برای او بسیار گران است و فراموش کرده جداول مثلثاتی خود را همراه ببرد و از شما بخواهد که آن را برایش بفرستید. در این صورت شما می‌توانید اعداد جدول مزبور را به سهولت به کدهای خاصی تبدیل و (نظیر اعداد دودویی) آنها را مستقیماً ارسال کنید. اما خلاصه‌ترین جداول مثلثاتی لااقل چند هزار رقم دارند. بنابراین هزینهٔ تلگراف بالا می‌رود. روش بسیار ارزان‌تر ارسال همان اطلاعات، فرستادن دستوری

برای محاسبهٔ اعداد جداول مزبور، نظیر معادلهٔ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$، است. چنین پیامی به نسبت مختصر خواهد بود، و با این همه اطلاعات نهفته در آن تمام اطلاعات بزرگترین جداول مثلثاتی را دربردارد.



شکل ۱

تعریف الگوریتمی تصادفی بودن به توانایی‌ها و محدودیت های کامپیوتر رقمی بستگی دارد. برای تولید یک خروجی خاص، نظیر دنباله‌ای از ارقام دودویی، باید به کامپیوتر مجموعه‌ای از دستورات صریح داده شود که بدون انجام قضاوت هوشمندانه قابل پیروی باشند. چنین مجموعه دستوارتی یک الگوریتم است. اگر خروجی مورد نظر تا حد زیادی مرتب شده باشد (الف)، یک الگوریتم به نسبت کوچک کافی است؛ مثلاً دنباله‌ای حاوی بیست تا رقم ۱ را می‌توان توسط یک کامپیوتر فرضی با برنامهٔ ۱۰۱۰۰ که در مبنای ۲ معادل عدد اعشاری ۲۰ است، تولید کرد. در مورد دنباله‌ای تصادفی از ارقام (ب) موجزترین برنامهٔ ممکن از خود دنباله تشکیل می‌شود. کوچکترین برنامه‌هایی که بتوانند دنبالهٔ خاصی را تولید کنند «برنامه‌های کمینهٔ آن دنباله» نامیده می‌شوند؛ اندازهٔ این برنامه‌ها که با بیت[1]ها، یا ارقام دودویی، سنجیده می‌شود. «پیچیدگی» دنبالهٔ مورد بحث است. دنباله‌ای از ارقام را « *تصادفی*» می‌خوانیم اگر پیچیدگی دنباله‌ای آن به اندازه‌اش، برحسب بیت، میل کند.

از سوی دیگر، فرض کنید، دوستتان به جای علاقه به مثلثات طرفدار فوتبال باشد. در این صورت علاقه دارد که نتیجهٔ تمام بازی‌های اصلی انجام شده از هزاران سال قبل

1.Bit

به این طرف، یعنی از زمانی که زمین را ترک کرده، بداند. در این حالت به نظر نمی‌رسد بتوان فرمولی یافت که با فشرده ساختن اطلاعات واقع در آن پیام کوتاهی را ارسال کرد. در چنین دنباله‌ای از اعداد هر رقم اساساً یک واحد اطلاعاتی مستقل است، و ممکن نیست به کمک همسایگانش یا قاعده‌ای اساسی پیش‌بینی شود. در این صورت چاره‌ای جز ارسال لیست کامل بازی‌ها نیست.

خمیرمایهٔ تعریف جدید تصادفی بودن در دو مثال فرضی‌ای که ذکر شد، نهفته است. ملاحظه می‌کنیم که اطلاعات موجود در دنباله‌ای تصادفی از ارقام نمی‌تواند فشرده‌تر یا کوتاهتر شود. در تنظیم تعریف عملی بهتر است که به جای دوستی که از ما دور است کامپیوتری رقمی در نظر بگیریم. دوست مزبور ممکن است در مورد اعداد استنتاجاتی به عمل آورد یا از اطلاعات جزئی یا از دستورات مبهم دنباله‌ای بسازد، اما کامپیوتر چنین ظرفیتی ندارد و این نقص با توجه به مقاصد ما یک مزیت محسوب می‌شود. دستورات داده شده به کامپیوتر باید کامل و صریح باشد، و این توانایی را به کامپیوتر بدهد که بتواند عملیات را گام به گام، بدون این که نیازی به درک این داشته باشد که در هر مرحله چه می‌کند، انجام دهد. الگوریتم چنین برنامهٔ مدونی از دستورات است. الگوریتم مزبور می‌تواند هر تعداد متناهی از اعمال مکانیکی بر اعداد را ایجاب کند، اما نمی‌تواند دربارهٔ معنای آنها قضاوتی بکند.

تعریف فوق به این نیز نیازمند است که با اطلاعاتی پیام را با روشی دقیق‌تر از محاسبهٔ هزینهٔ ارسال تلگراف آن اندازه بگیریم. واحد مبنایی اطلاعات، «بیت» است که به عنوان کوچکترین واحد اطلاعاتی که قابلیت مشخص کردن انتخابی بین دو شیء با احتمال مساوی را دارد، تعریف می‌شود. در عدد نویسی دودویی یک بیت معادل یک رقم ۰ یا ۱ است.

اکنون می‌توانیم دربارهٔ اختلافات دو دنباله از ارقامی که در ابتدای مقاله آوردیم دقیق‌تر توضیح دهیم. اولی ممکن است، با الگوریتم بسیار ساده‌ای نظیر «۱۰ را ده بار چاپ کن» برای کامپیوتری آماده شود. اگر دنبالهٔ مزبور براساس همان قاعده گسترش یافته باشد، الگوریتم مربوط به آن تنها اندکی طولانی‌تر می‌شود؛ و مثلاً چنین می‌شود «۱۰ را یک میلیون بار چاپ کن». تعداد بیت‌های چنین الگوریتمی کسر کوچکی از تعداد بیت‌های تخصیص یافته به دنباله‌ای است که مشخص می‌کند، و همین طور که دنباله بزرگتر می‌شود اندازهٔ برنامه بسیار کندتر بزرگ می‌شود.

برای دنبالهٔ دوم چنان راه میان‌بری وجود ندارد. کم هزینه‌ترین راه برای بیان این دنباله، نوشتن کامل آن است، و کوتاهترین الگوریتم برای معرفی آن به یک کامپیوتر این است :

«۰۱۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱۰ را چاپ کن».

اگر دنبالهٔ مزبور خیلی بزرگتر باشد (و در ظاهر همچنان بی‌الگو) الگوریتم تولیدش باید به همان نسبت بزرگ شود. عدم قابلیت فشرده شدن خاصیت مشترک تمام *اعداد تصادفی* است؛ درواقع می‌توانیم تصادفی بودن را براساس عدم قابلیت فشردگی تعریف کنیم : یک دنباله از اعداد *تصادفی* است اگر کوچکترین الگوریتمی که توانایی آماده کردن آن را برای یک کامپیوتر دارد همان تعداد بیت اطلاعات را به خود اختصاص می‌دهد که دنباله به خود اختصاص می‌دهد.

این تعریف در حدود سال ۱۹۶۵ به طور مستقل توسط آ.ن. کولموگوروف [۲] و گ.چایتین[۳]، زمانی که او دانشجوی دورهٔ کارشناسی در دانشگاه نیویورک بود، انجام شد. در آن زمان، آن دو از کارهایی که ر.جی.سولومونوف در سال ۱۹۶۰ در تلاشی برای اندازه‌گیری سادگی نظریه‌های عملی انجام داده بود، بی‌خبر بودند. از ۱۹۶۵ تا ده‌سال بعد آنها و دیگران به کشف بیشتر معنای تصادفی بودن ادامه دادند. تنظیم‌های اولیه دستورات پیشرفت کرده و کارایی رهیافت آنها تا حد زیادی جا افتاده بود.

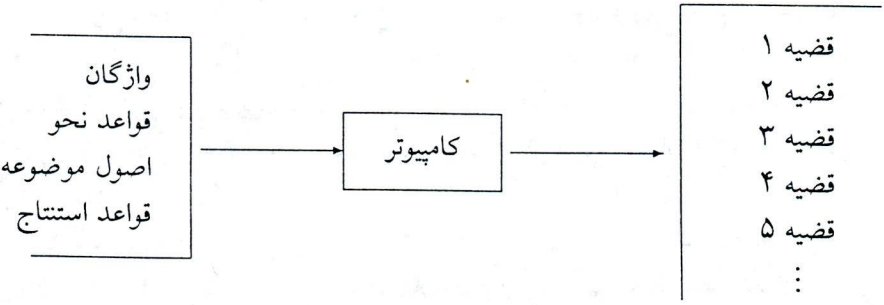
مدل روش استقرایی. تعریف الگوریتمی تصادفی بودن مبنای نوینی برای نظریهٔ احتمالات به دست داده است. این روش به هیچ روی نظریهٔ کلاسیک احتمالات را که براساس مجموعهٔ امکانها به این صورت که هر یک از آنها به یک احتمال مربوط می‌شود، کنار نمی‌نهد، بلکه، رهیافت الگوریتمی مورد بحث، روش مجموعه‌ای را، با معنی دقیق بخشیدن به موضوعاتی که قبلاً تنها به طور شهودی محسوس بود، اما نمی‌توانست مفهومی صوری بیابد، تکمیل می‌کند.

رهیافت نظریهٔ مجموعه‌ای احتمالات، که در قرن هفدهم پایه‌گذاری شد، از اهمیت عملی به‌سزایی برخوردار است. این علم اساس علم آمار است و در مورد طیف وسیعی از مسائل علوم و مهندسی به کار می‌رود. نظریهٔ الگوریتمی نیز کاربردهای مهمی دارد، ولی این کاربردها در درجهٔ اول نظرینند. وسیع‌ترین حوزهٔ استفادهٔ این روش در بسط قضیهٔ ناتمامیت گودل نهفته است. کاربرد دیگر آن (که درواقع بر تنظیم خود نظریه تقدم دارد) در مدل سولومونوف در استقرای علمی است (شکل ۲).

---

[۲] ریاضیدان بزرگ روسی ۱۹۸۷_۱۹۰۳

[۳] ریاضیدان بزرگ روسی که از واضعین نظریه اطلاعات است.



شکل ۲

دستگاه‌های صوری پیشنهادی هیلبرت، شامل الگوریتمی است که به طور مکانیکی درستی تمام اثبات‌هایی را که می‌توانند در دستگاهمان تنظیم شوند،می‌آزماید. دستگاه صوری مورد بحث از الفبایی شامل نشانه‌هایی که تمام عبارت‌ها را با آنها می‌توان نوشت، دستور زبانی که مشخص می‌کند چگونه نشانه‌ها را می‌توان با یکدیگر ترکیب کرد، مجموعه‌ای از اصول موضوع، و قاعده‌هایی برای استنتاج قضایا از اصول موضوع تشکیل یافته است.
قضیه‌ها با نوشتن تمام عبارات دستوری ممکن در دستگاه پیدا می‌شوند و با بررسی آنها معلوم می‌شود که کدامیک با توجه به قواعد استنتاج دارای اثبات درست هستند. از آنجا که این عملیات با یک الگوریتم قابل انجام است، می‌توان آنها را با یک کامپیوتر رقمی انجام داد. در ۱۹۳۱ گودل اعلام کرد که درواقع تمام دستگاه‌های صوری ناتمام هستند؛ یعنی در هر یک از آنها لااقل یک گزارهٔ درست هست که قابل اثبات نیست.

سولومونوف مشاهدات یک دانشمند را به صورت دنباله‌ای از ارقام دودویی مطرح کرد. دانشمند مزبور به دنبال توضیحی برای این مشاهدات طی نظریه‌ای است که می‌توان آن را به عنوان الگوریتمی توانمند جهت تولید این دنباله و گسترش آن، یعنی پیش‌بینی مشاهدات بعدی، محسوب کرد. به ازای هر دنبالهٔ معلومی از مشاهدات، **همواره** چند نظریهٔ هم سطح مطرح است که دانشمند باید از میان آنها یکی را انتخاب کند. مدل مزبور براین است که کوچکترین الگوریتم، یعنی آن که کمترین تعداد بیت را اشغال می‌کند، را انتخاب کند. به عبارت دیگر این همان قاعدهٔ «تیغ اُکام[۴]» است: از بین نظریه‌های ظاهراً هم سطح مفروض، ساده‌ترین آنها مطلوب است.

بدین ترتیب در مدل سولومونوف به نظریه‌ای که فرد را قادر به فهم دنباله‌ای از مشاهدات می‌کند، به عنوان یک برنامهٔ کوچک کامپیوتری‌ای نگاه می‌کنیم که به تولید مجدد مشاهدات مزبور می‌پردازد و در مورد مشاهدات احتمالی آتی پیش‌بینی می‌کند. در این صورت هرچه برنامه کوچکتر باشد، نظریهٔ مربوطه فراگیرتر و میزان درک مطالب در آن بیشتر است.

مشاهدات تصادفی را نمی‌توان توسط برنامه‌ای کوچک مجدداً تولید نمود و بنابراین نمی‌توان آنها را با یک نظریه توضیح داد. علاوه براین رفتار آتی یک سیستم تصادفی را نمی‌توان پیش‌بینی کرد. برای یک دانشمند فشرده‌ترین راه انتقال ملاحظات، نوشتن کامل آنهاست.

چنین به نظر می‌رسد که تعریف تصادفی بودن یا سادگی نظریه‌ها، براساس قابلیت های کامپیوتر رقمی مورد بحث، عاملی ساختگی را در تعریف دخالت می‌دهد. ماشین‌های مختلف براساس زبان‌های گوناگون (کامپیوتری) کار می‌کنند،و مجموعهٔ دستوراتی را که در یکی از زبان‌ها بیان شده می‌تواند در صورتی که به زبان دیگری ترجمه شود، بیت‌های کمتر یا بیشتری به خود اختصاص دهد. درواقع، انتخاب کامپیوتر از اهمیت ناچیزی برخوردار است، و در این مورد می‌توان به سهولت با تأکید براین که تصادفی بودن تمام اعداد با یک ماشین آزمایش شود، از کل مسئله احتراز کرد. محدودیت‌های زبان‌های گوناگون، حتی وقتی ماشین‌های متفاوتی به کار گرفته شود، به آسانی قابل جبران است. مثلاً فرض کنید شخصی برنامه‌ای دارد که به زبان انگلیسی نوشته شده است و می‌خواهد از کامپیوتری که تنها می‌تواند زبان فرانسه را بخواند، استفاده کند. در این صورت شخص مزبور باید به جای ترجمهٔ خود الگوریتم، یک دورهٔ کامل انگلیسی را به فرانسه ترجمه کند. همچنین فرد دیگری با برنامه‌ای به زبان فرانسوی و کامپیوتری که فقط می‌تواند زبان انگلیسی را بخواند باید به عکس قبل عمل کند. به این طریق تنها لازم است که تعداد ثابتی بیت به برنامه افزوده شود، و این مقدار هنگامی که دنبالهٔ مربوط به برنامه افزایش می‌یابد به میزان کمتری بزرگ می‌شود. وقتی با کامپیوتر کار می‌کنیم «مترجم» باعث می‌شود بتوانیم فرق بین زبان های گوناگون را نادیده بگیریم.

4.Occam's razor

حجم نظریه	نظریه	پیش‌بینی‌ها	مشاهدات
۲۳حرف	ده بار تکرار ۰۱	۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰	۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰
۴۴حرف	پنج بار تکرار ۰۱ که در پی آن ده صفر می‌آید	۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۰	

شکل ۳

استدلال استقرایی آن گونه که در علم به کار رفته از لحاظ ریاضی توسط ری.جی. سولومونوف تحلیل شده است. او مشاهدات یک دانشمند را با دنباله‌ای از ارقام دودویی نشان می‌داد. مشاهدات نیازمند توضیح و مشاهدات جدید باید توسط نظریه‌هایی پیش‌بینی شوند که به عنوان الگوریتمهای راهنمای کامپیوتر برای تهیهٔ مشاهدات مزبور به حساب می‌آیند. در این مرحله دو نظریهٔ هم سطح داده‌های موجود را توضیح می‌دهند. تیغ اُکام می‌گوید که نظریهٔ ساده‌تر یا کوچکتر بهتر است. کار دانشمند جستجوی برنامه‌های کوچکتر است. اگر داده‌ها تصادفی باشند، برنامه‌های کمینه فشرده‌تر از مشاهدات عینی نیستند و هیچ نظریه‌ای نمی‌تواند تنظیم شود.

از آنجا که در انتخاب ماشین معینی تاحد زیادی آزادیم، می‌توانیم برای محاسباتمان یک کامپیوتر ایده‌آل را انتخاب کنیم. فرض می‌کنیم که زمان و ظرفیت ذخیرهٔ نامحدودی برای اتمام محاسباتمان داریم. ورودی و خروجی ماشین هردو به صورت ارقام دودویی هستند. ماشین مورد بحث به محض این که برنامه به آن داده می‌شود شروع به کار می‌کند، و تا زمانی که نتیجه نهایی را با ارقام دودویی چاپ کند به کار ادامه می‌دهد و سپس متوقف می‌شود. به این ترتیب کامپیوتر به ازای هر برنامهٔ داده شده، جز وقتی که اشتباهی در برنامه وجود داشته باشد، تنها یک خروجی خواهد داشت.

برنامه‌های کمینه و پیچیدگی. هر دنبالهٔ مشخصی از اعداد می‌تواند توسط تعداد بی‌شماری الگوریتم تولید شود. مثلاً عدد سه رقمی ۱۲۳ را در نظر بگیرید. این دنباله می‌تواند به وسیلهٔ الگوریتمی چون «۱ را از ۱۲۴ کم کن و نتیجه را چاپ کن» یا «۲ را از ۱۲۵ کم کن و نتیجه را چاپ کن» یا تعداد بی‌شماری از برنامه‌های دیگر که به همین طریق درست شده باشند، تهیه شود. اما مطلوب‌ترین برنامه‌ها، کوچکترین برنامه‌هایی هستند که دنبالهٔ عددی مفروضی را به دست می‌دهند. کوچکترین برنامه‌ها را *برنامه‌های کمینه* می‌نامیم؛ به ازای هر دنبالهٔ مفروض، ممکن است تنها یک یا چند برنامهٔ کمینه موجود باشد.

هر برنامهٔ کمینه لزوماً تصادفی است، خواه دنباله‌ای که تولید می‌کند تصادفی باشد یا نباشد. این نتیجه، نتیجهٔ مستقیم روشی است که تصادفی بودن را برطبق آن تعریف کردیم. P را، که برنامه کمینهٔ مربوط به دنباله‌ای از ارقام S است، در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم P تصادفی نیست، آنگاه بنابر تعریف باید برنامه‌ای دیگر، چون P'، موجود باشد که اساساً از آن کوچکتر است و آن را تولید می‌کند. در این صورت S را می‌توانیم توسط این الگوریتم تولید کنیم. "P' را توسط P' محاسبه کن و سپس S را توسط P به دست آور." این برنامه تنها چند بیت از P' طویلتر است پس باید اساساً کوچکتر از P باشد. بنابراین P برنامه‌ای کمینه نیست.

برنامهٔ کمینه بستگی نزدیکی به مفهوم اساسی دیگر نظریهٔ الگوریتمی تصادفی بودن، یعنی مقولهٔ پیچیدگی، دارد. پیچیدگی یک دنباله از ارقام، عبارت است از تعداد بیتهایی که برای به دست آوردن دنبالهٔ اصلی به عنوان خروجی، باید مطالب در کامپیوتر قرار داده شوند. بنابراین پیچیدگی با اندازهٔ برنامه‌های کمینهٔ دنباله‌ها، برحسب بیت، برابر است. اکنون می‌توانیم با دراختیار داشتن این مفهوم، تعریف خود را در مورد تصادفی بودن با عبارات قدرتمندتری مجدداً بیان می‌کنیم : یک دنبالهٔ تصادفی از ارقام، دنباله‌ای است که پیچیدگی‌اش تقریباً با اندازهٔ خودش، برحسب بیت، برابر است.

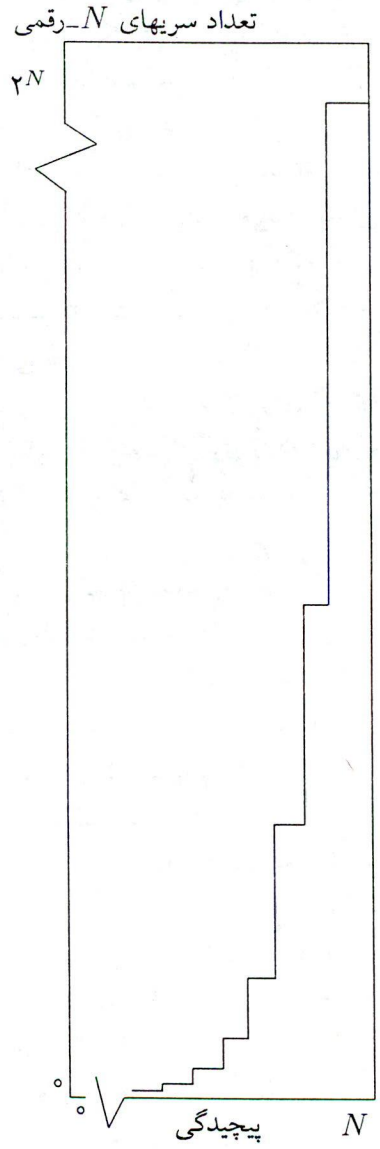
مفهوم پیچیدگی نه تنها برای تعریف تصادفی بودن کافی است، بلکه برای اندازه‌گیری آن نیز کفایت می‌کند. اگر چند دنباله از اعداد که هریک دارای n رقم باشند، داشته باشیم، از لحاظ نظری مشخص کردن آنها که از پیچیدگی $n-۱$، $n-۱۰$، $n-۱۰۰$ و ... هستند امکان پذیر است و در نتیجه مرتب کردن دنباله‌ها به ترتیبی که میزان تصادفی بودنشان نزول می‌کند، ممکن است. مقدار دقیق پیچیدگی به طوری که در پایین‌تر از آن نتوان دنبالهٔ دیگری را تصادفی محسوب کرد، تاحدی دلخواه باقی می‌ماند. این مقدار باید آن قدر پایین انتخاب شود که اعدادی که به وضوح خواص تصادفی دارند، کنار گذاشته نشوند و آن قدر بالا در نظر گرفته شود که اعداد دارای الگوی آشکار را قبول نکند، اما اختیار مقدار عددی مشخص به معنی داشتن قضاوتی در مورد این مطلب است که چه میزان از تصادفی بودن باعث وقوع تصادف واقعی می‌شود. همین عدم قطعیت است که در عبارت موصوف قبلی چنین بازتاب پیدا می‌کند که*پیچیدگی یک دنبالهٔ تصادفی تقریباً برابر با اندازهٔ آن دنباله است.*

خواص اعداد تصادفی. روشهای نظریهٔ الگوریتمی احتمالات، می‌تواند بسیاری از خواص اعداد تصادفی و غیرتصادفی را توضیح دهد. مثلاً می‌توان نشان داد که بسامد توزیع ارقام

موجود در یک دنباله، نقش مهمی در تصادفی بودن آن دنباله دارد. با یک بررسی ساده ملاحظه می‌کنیم که دنباله‌ای که همه‌اش از صفر یا یک تشکیل شده باشد از تصادفی بودن به دور است و رهیافت الگوریتمی نیز همین مطلب را تأیید می‌کند. اگر چنین دنباله‌ای طولش n رقم باشد، پیچیدگی‌اش تقریباً برابر است با $\log_2^n$ (مقدار دقیق آن به زبان ماشینی که از آن استفاده می‌کند بستگی دارد). این دنباله را می‌توان با الگوریتمی ساده، نظیر «۰ را n بار چاپ کن،» که در آن اساساً تمام اطلاعات مورد نیاز در عدد دودویی متناظر n نهفته است، تهیه کرد. اندازهٔ این عدد در حدود log_2^n است. از آنجا که $\log_2^n$ حتی برای یک دنبالهٔ طولانی بسیار کوچکتر از خود n است، این دنباله‌ها از پیچیدگی کمی برخوردارند؛ درک شهودی الگوی این اعداد، از لحاظ ریاضی قابل تأیید است.

دنبالهٔ دودویی دیگری را که می‌توان به همین روش به طور سودمندی تجزیه و تحلیل کرد، دنباله ای است که صفرها و یک‌ها به نسبت $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ در آن ظاهر شده‌اند. اگر طول این دنباله n باشد، می‌توان ثابت کرد که پیچیدگی‌اش بزرگتر از $\frac{4}{5}n$ نیست، یعنی برنامه‌ای که این دنباله را تولید می‌کند می‌تواند در $\frac{4}{5}n$ بیت نوشته شود. بیشینهٔ مزبور بدون در نظرگرفتن دنبالهٔ ارقام اعمال می‌شود. بنابراین هیچ دنباله‌ای با چنین بسامد پخشی را نمی‌توان چندان هم تصادفی انگاشت. درواقع می‌توان ثابت کرد که برای آن که یک دنبالهٔ طولانی دودویی تصادفی باشد لازم است در آن نسبت بسامد صفرها به بسامد یک‌ها بسیار به $\frac{1}{4}$ نزدیک باشد البته در یک دنبالهٔ اعشاری تصادفی بسامد هر رقم ۰/۱ است).

اعدادی که دارای بسامد پخشی غیرتصادفی هستند استثنایی‌اند. مثلاً از تمام اعداد دودویی n رقمی ممکن تنها یکی تماماً از ۰، و نیز یکی تماماً از ۱ تشکیل شده است. بقیهٔ دنباله‌ها نظم کمتری دارند، و اکثریت آنها را باید با هر معیار معقولی، تصادفی دانست. برای انتخاب یک حد دلخواه می‌توانیم آن قسمت از اعداد دودویی n رقمی‌ای را که دارای پیچیدگی کمتر از $n - ۱۰$ هستند، حساب کنیم. $۲^۱$ برنامه با طولی یک رقمی وجود دارند که می‌توانند یک دنبالهٔ n رقمی را تولید کنند؛ $۲^۲$ برنامه با طولی دو رقمی وجود دارند که می‌توانند چنان دنباله‌ای تولید کنند؛ و همین طور تا بزرگترین برنامه‌های مجاز در پیچیدگی مورد نظر، که تعدادشان $۲^{n-۱۱}$ برنامه است. مجموع جملات دنبالهٔ $۲^{n-۱۱} + \cdots + ۲^۲ + ۲^۱$ برابر است با $۲ - ۲^{n-۱۰}$. یعنی کمتر از $۲^{n-۱۰}$ برنامه با اندازه‌ای کمتر از $n - ۱۰$ وجود دارد، و از آنجا که هریک از این برنامه‌ها نمی‌تواند بیش از یک دنباله از ارقام را مشخص کند، کمتر از $۲^{n-۱۰}$ مقدار از ۲^n عدد مورد بحث پیچیدگی‌ای کمتر از $n - ۱۰$ دارند. از آنجا که $۲^{n-۱۰}/۲^n = ۱/۱۰۲۴$، نتیجه می‌شود که در بین تمام اعداد دودویی n رقمی تنها در حدود یک هزارمشان پیچیدگی‌ای



شکل ۴

دنباله‌های تصادفی ارقام دودویی، اکثریت چنین دنباله‌هایی را تشکیل می‌دهند. از ۲^n دنبالهٔ n رقمی، اکثرشان دارای پیچیدگی‌ای نزدیک به n هستند. همین طور که پیچیدگی کم می‌شود، تعداد دنباله‌ها تقریباً به طور نمایی کاهش می‌یابد. دنباله‌های مرتب نادرند؛ مثلاً تنها یک دنباله وجود دارد که از n تا ۱ تشکیل شده است.

کمتر از $n - ۱۰$ دارند. به عبارت دیگر، تنها در حدود یک دنباله از هر هزار دنباله می‌تواند در برنامه‌ای کامپیوتری که بیش از ده رقم از خودش کوچک‌تر است گنجانده شود. یکی از نتایج لازم در این محاسبه این است که بیش از ۹۹۹ عدد از هر ۱۰۰۰ عدد دودویی n رقمی، پیچیدگی‌ای برابر یا بزرگتر از $n - ۱۰$ دارند. اگر بتوان این حد از پیچیدگی را به عنوان یک آزمایش مناسب در مورد تصادفی بودن به حساب آورد، آنگاه تقریباً تمام اعداد دودویی n رقمی در واقع تصادفی هستند. با این مفهوم، اگر سکه‌ای سالم را n بار پرتاب

کنیم، احتمال اینکه نتیجه‌ای تصادفی به دست آید ۰/۹۹۹ است. بنابراین به نظر می‌رسد نمایش نمونه‌ای از یک دنبالهٔ طولانیِ دارای ارقام تصادفی، ساده باشد؛ هرچند عملاً انجام چنین کاری غیرممکن است.

دستگاههای صوری. می‌توان تصادفی نبودن دنبالهٔ معینی از ارقام را به سهولت نشان داد. برای این کار کافی است برنامه‌ای بیابیم که دنباله را تولید کند و به میزان قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از خود دنباله باشد. لازم نیست برنامه مربوط به دنبالهٔ مورد نظر، برنامه‌ای کمینه باشد؛ و تنها لازم است کوچک باشد. از سوی دیگر برای اثبات تصادفی بودن دنبالهٔ مشخصی از ارقام، باید ثابت کرد که هیچ برنامهٔ کوچکتری برای محاسبهٔ آن وجود ندارد.

«*قضیهٔ ناتمامیت گودل*» در قلمرو اثبات ریاضی است که چون واقعهٔ برجسته و آشکاری جلوه‌گر می‌شود. بیانی که از این قضیه ارائه کردم پیش‌بینی می‌کند که اثبات مطلوب تصادفی بودن یافت نخواهد شد. نتایج این حقیقت ،از لحاظ آنچه که در مورد قضیهٔ گودل آشکار می‌کنند به همان اندازه جالب‌اند که دربارهٔ سرشت اعداد تصادفی آشکار می‌سازند.

قضیهٔ گودل نشان دهندهٔ پاسخ به مباحثه‌ای است که ریاضیات سال های آغازین قرن بیستم به آن اختصاص یافته بود. سؤال مورد بحث چنین بود : «چه چیز وجود اثبات درست را در ریاضیات تضمین می‌کند ؟ و چگونه چنان اثباتی قابل تشخیص است ؟» هیلبرت سعی کرد با ارائه زبانی مصنوعی، که در آن اثبات‌های درست به طور مکانیکی، بدون نیاز به بینش یا قضاوت انسان، یافت می‌شد، به این سؤال پاسخ دهد. گودل نشان داد که چنان زبان کاملی وجود ندارد.

هیلبرت الفبای باپایانی از علائم، و دستور زبان نامبهمی که مشخص می‌کرد چگونه یک عبارت با معنی می‌تواند ساخته شود، فهرست باپایانی از اصول موضوع، یا فرض‌های اولیه، و فهرست باپایانی از قواعد قیاس برای استنتاج قضایا از اصول موضوع، یا از قضایای دیگر، مقرر کرد. چنین زبانی، با قواعدش، یک دستگاه صوری نامیده می‌شود.

یک دستگاه صوری چنان دقیق تعریف می‌شود که در آن می‌توان درستی یک اثبات را به وسیلهٔ روندی بازگشتی، تنها با عملیات ساده منطقی و حسابی، ارزیابی کرد. به عبارت دیگر، در دستگاه صوری، الگوریتمی برای آزمایش درستی اثبات‌ها وجود دارد. امروزه، الگوریتم مزبور می‌تواند (هرچند در زمان هیلبرت چنین نبود) توسط یک کامپیوتر رقمی به اجرا درآید و حتی ماشین مزبور می‌تواند برای قضاوت دربارهٔ مزایای اثبات مذکور مورد سؤال قرار گیرد.

به علت شرایط هیلبرت هر دستگاه صوری الگوریتم آزمایش درستی اثباتی داشته باشد، به طور نظری امکان فهرست کردن یکایک قضایایی که می‌توان آنها را در دستگاه معینی به اثبات رساند، دارد. در ابتدا می‌توان تمام دنباله‌های با طول یک کاراکتر را به

ترتیب الفبایی مرتب کرد و سپس الگوریتم آزمایش درستی اثبات مزبور را در مورد هریک از آنها به کار برد؛ به این ترتیب تمام قضایایی که دارای اثباتی به طول یک کاراکتراند (در صورت وجود) مشخص می‌شوند. بعد می‌توان تمام دنباله‌های دو کاراکتری را آزمود و الی آخر. به این طریق می‌توان تمامی اثبات‌های بالقوه را آزمود، و سرانجام تمام قضایا را با توجه به اندازهٔ اثبات‌هاشان کشف کرد (البته این روش صرفاً جنبه نظری دارد، و روند کار در عمل طولانی‌تر از این حرف‌هاست).

پارادوکس راسل مجموعهٔ تمام مجموعه‌هایی را در نظر بگیرید که عضو خود نیستند. آیا این مجموعه عضوی از خودش هست ؟

پارادوکس اپیمنیدس این عبارت را در نظر بگیرید : «این گزاره غلط است.» آیا این گزاره درست است ؟

پارادوکس بری[5] به این جمله توجه کنید : «کوچکترین عدد صحیح مثبتی را بیابید که برای تعیین آن به تعداد کاراکتری بیش از آنچه در این جمله هست، نیاز باشد.» آیا این جمله یک عدد صحیح مثبت را مشخص می‌کند ؟

این سه پارادوکس آنچه را که قابل اثبات است، محدود می‌کنند. اولین پارادوکس، که توسط برتراند راسل مطرح شد، نشان داد که استدلال غیرصوری در ریاضیات، ممکن است تناقض به بار آورد، و به ایجاد دستگاه‌های صوری منتهی شد. دومی، که منسوب به اپیمنیدس است، برای نشان دادن این که حتی درون یک دستگاه صوری گزاره‌های درستی هستند که اثبات نشدنی‌اند، توسط گودل به کار گرفته شد. سومی به این برهان منتهی می‌شود که وجود یک عدد معین را نمی‌توان به طور تصادفی اثبات کرد.

5.Berry

گزاره‌های اثبات‌ناپذیر. گودل در اثباتی که در سال ۱۹۳۱ ارائه داد نشان داد طرح هیلبرت در مورد ریاضیاتی تماماً سازمان یافته، نمی‌تواند تحقق یابد. و این کار را با ارائه حکمی دربارهٔ اعداد صحیح مثبت در زبان دستگاهی صوری که درست بود ولی در آن دستگاه غیرقابل اثبات بود، انجام داد.

دستگاه مزبور، بدون توجه به این که تا چه حد وسعت دارد و با چه دقتی ساخته شده است، نمی‌تواند دربرگیرندهٔ تمام قضایای درست خود باشد و بنابراین ناتمام است. فن گودل، در واقع در مورد هر دستگاه صوری قابل استفاده است، و از این رو این نتیجهٔ اعجاب‌آور و، به خلاف نظر بسیاری از افراد، ناراحت‌کننده را بیان می‌کند که جوابی قاطع به سؤال «اثبات درست چیست؟» نمی‌توان داد.

اثبات قضیهٔ ناتمامیت گودل بر پارادوکس اپیمنیدس کرتی[۶]، که می‌گفت : «تمام اهالی کرت دروغگویند.» استوار است. پارادوکس مزبور را می‌توان به بیانی کلی‌تر به ترتیب زیر بازگو کرد: «این گزاره غلط است». حکمی که درست است اگر و تنها اگر غلط باشد؛ یعنی نه می‌تواند درست باشد و نه می‌تواند غلط باشد.

گودل مفهوم «درستی» را با «اثبات‌پذیری» عوض کرد. در نتیجه جملهٔ «این گزاره اثبات نشدنی است» را ساخت؛ حکمی که در یک دستگاه صوری معین، اثبات شدنی است اگر و تنها اگر غلط باشد. بدین ترتیب یا غلط بودن اثبات شدنی است، که پذیرفتنی نیست، یا گزاره‌ای درست اثبات نشدنی است. یعنی دستگاه صوری ناتمام است. سپس گودل فنی به کار برد که به صورتی یکتا تمام عبارات و اثبات‌ها را در دستگاه صوری مورد بحث شماره‌گذاری می‌کرد و از آنجا جملهٔ «این گزاره اثبات نشدنی است» را به حکمی دربارهٔ خواص اعداد صحیح مثبت، برمی‌گرداند. به علت این که این تبدیل ممکن است، قضیهٔ ناتمامیت، با همان اعتبار در تمام دستگاههای صوری‌ای که در آنها بتوان با اعداد صحیح مثبت سروکار داشت، قابل استفاده است.

رابطهٔ نزدیک بین قضیهٔ گودل و نظریهٔ اعداد تصادفی را می‌توان با پارادوکسی نظیر پارادوکس اپیمنیدس به طور ساده‌تر نشان داد. این صورتی دیگر از پارادوکس بری است، که اولین بار در سال ۱۹۰۸ توسط برتراندراسل منتشر شد. پارادوکس مزبور چنین می‌گوید: «کوچکترین عدد صحیح مثبتی را بیابید که در تعیین آن، به کاراکترهایی بیش از آنچه در این جمله است، نیاز باشد. » این جمله (در فارسی) ۱۰۶ کاراکتر دارد. می‌توانیم چنین فرض کنیم که این جمله عدد صحیحی را مشخص می‌کند که برای تعیین

6.Epimenides the Cretan

شدن به بیش از ۱۰۶ کاراکتر احتیاج دارد.

مانند گذشته، برای به کارگیری این پارادوکس در قضیهٔ ناتمامیت، نیازمند آن هستیم که آن را از محدودهٔ مفهوم درستی به حوزهٔ اثبات‌پذیری ببریم. عبارتِ «که نیاز دارد» باید تبدیل شود به «که می‌توان ثابت کرد که نیاز دارد» یعنی از آن چنین برآید که تمامی گزاره‌ها در دستگاههای صوری خاصی بیان خواهند شد. به علاوه می‌توان مفهوم مبهم «تعداد کاراکترهای مورد نیاز جهت تعیین یک عدد صحیح» را با مفهوم دقیقاً تعریف شده پیچیدگی، که به جای کاراکتر با بیت سنجیده می‌شود، عوض کرد.

برنامهٔ کامپیوتری زیر نتیجه تبدیلات فوق است :

«دنباله‌ای از ارقام دودویی را بیابید که بتوان ثابت کرد که پیچیدگی‌اش بیش از تعداد بیت‌های این برنامه است.» این برنامه تمام اثبات‌هایی که ممکن است در دستگاه صوری‌مان موجود باشند به ترتیب اندازه می‌آزماید تا به اولین اثباتی برسد که ثابت می‌کند دنباله‌ای دودویی و معین با پیچیدگی‌ای بیش از تعداد بیت‌های تخصیص یافته برای این برنامه، وجود دارد. سپس دنباله‌ای را که یافته است چاپ می‌کند و کار تمام می‌شود.

البته پارادوکس موجود در گزاره‌ای که برنامه از آن به دست آمده، از بین نرفته است؛ چون همان طور که فرض شده، این برنامه، عددی را محاسبه می‌کند که هیچ برنامه‌ای به اندازهٔ آن، توان محاسبه آن را ندارد. در واقع برنامه اولین عددی را می‌یابد که ثابت می‌شود از یافتن آنها ناتوان است.

بیهودگی این نتیجه صرفاً نشان می‌دهد که برنامه هرگز نمی‌تواند عددی را که برای یافتنش در نظر گرفته شده، بیابد. در یک دستگاه صوری نمی‌توان وجود دنباله‌ای معین با پیچیدگی بیش از اندازهٔ برنامه را ثابت کرد.

می‌توان این پارادوکس را به طریقهٔ دیگری هم تعمیم داد. این تعداد بیت‌های تخصیص یافته برای برنامه نیست که محدودیت ایجاد می‌کند بلکه تعداد بیت‌های موجود در کل دستگاه صوری است که باعث محدودیت می‌شود. اصول موضوع و قواعد استنتاجی در برنامه نهفته است که طبیعت دستگاه را تعیین کرده و الگوریتم آزمون اثبات‌ها را به دست می‌دهد. اطلاعات مشمول در این اصول و قواعد می‌تواند پیچیدگی دستگاه را مشخص کند و اندازه بگیرد. بنابراین اندازه کل برنامه از پیچیدگی دستگاه صوری به اندازهٔ عدد ثابت c (برحسب بیت) تجاوز می‌کند (اندازهٔ واقعی c به زبان ماشینی که به کار گرفته شود، بستگی دارد). بنابراین قضیه‌ای را که توسط پارادوکس مورد بحث ثابت شده، می‌توان چنین بیان کرد : در یک دستگاه صوری از پیچیدگی n، اثبات اینکه دنبالهٔ معینی از ارقام دودویی، دارای پیچیدگی‌ای بیش از $n + c$ است، که در آن c عددی ثابت و

مستقل از دستگاه به کار گرفته شده است، غیرممکن می‌باشد.

الف_این جمله اثبات ناپذیر است.

ب_پیچیدگی ۰۱۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱۰ بیش از ۱۵ بیت است.

ج_دنبالهٔ ارقام ۰۱۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱۰ تصادفی است.

د_۱۰۱۰۰ برنامه‌ای کمینه برای دنبالهٔ ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ است.

عبارات اثبات نشدنی. غلط بودن این گزاره‌ها را در صورتی که غلط باشند می‌توان نشان داد، اما درست بودنشان را هیچ گاه نمی‌توان نشان داد. چه این اثبات که «این گزاره اثبات نشدنی است» (الف) وجود یک خود تناقض را در دستگاه صوری آشکار می‌کند. تخصیص یک مقدار عددی به پیچیدگی عددی معین (ب) نیازمند این اثبات است که الگوریتمی کوچکتر برای تولید آن عدد وجود ندارد. چنان اثباتی زمانی می‌تواند به انجام برسد که خود دستگاه صوری پیچیده‌تر از آن عدد باشد. از آنجا که برای شناخت یک عدد تصادفی یا یک برنامه کمینه، باید پیچیدگی را تعیین کرد گزاره‌های (ج) و (د) در معرض محدودیت‌های مشابه هستند.

محدودیت‌های دستگاه صوری. از آنجا که پیچیدگی به عنوان مقیاس تصادفی بودن تعریف شده است، قضیهٔ اخیر چنین ایجاب می‌کند که در یک دستگاه صوری تصادفی بودن هیچ عددی را نمی‌توان اثبات کرد مگر آنکه پیچیدگی‌اش کمتر از پیچیدگی خود دستگاه باشد. چون تمام برنامه‌های کمینه تصادفی هستند و قضیهٔ مزبور ایجاب می‌کند که برای اثبات وجود برنامهٔ کمینهٔ مربوط به دنبالهٔ خاصی از ارقام، به دستگاهی با پیچیدگی بیشتر نیاز است.

از آنجا که پیچیدگی یک دستگاه صوری عبارت از اندازهٔ مقدار اطلاعات درون دستگاه (یعنی مقدار اطلاعاتی که می‌توان از آن دستگاه به دست آورد) می‌باشد، این مقوله اثرات مهمی بر اثبات تصادفی بودن می‌گذارد. دستگاه صوری مورد بحث بر اصل موضوع «گزاره‌های پایه که به همان مفهوم برنامه‌های کمینه، تحویل ناپذیرند» استوار است، پس اطلاعات نهفته در اصل موضوع به خودی خود تصادفی هستند، و از این

مطلب می‌توان برای آزمون تصادفی بودن داده‌های دیگر استفاده کرد. البته مثلاً اگر بتوان اصل موضوعی را به صورتی فشرده‌تر بیان نمود آن گاه صورت اخیر یک اصل موضوع جدید به حساب می‌آید و اصل موضوع قبلی به عنوان قضیه‌ای که از اصل موضوع جدید استخراج می‌شود، به حساب خواهد آمد. بنابراین تصادفی بودن برخی از اعداد را می‌توان ثابت کرد، اما تنها در صورتی که کوچکتر از دستگاه صوری مربوطه باشند، به علاوه، هر دستگاه صوری دارای اندازه با پایان است، در حالی که هر دنباله از ارقام را می‌توان به میزان دلخواه طولانی اختیار کرد. در نتیجه همواره اعدادی وجود دارند که تصادفی بودن آنها قابل اثبات نیست.

تلاش برای تعریف و اندازه‌گیری تصادفی بودن تاحد زیادی اهمیت و دلالت‌های ضمنی قضیهٔ ناتمامیت گودل را روشن کرده است. این قضیه دیگر نه به عنوان پارادوکسی منزوی، بلکه به عنوان نتیجهٔ طبیعی محدودیت‌های تحمیل شده توسط نظریهٔ اطلاعات، محسوب می‌شود. در ۱۹۴۶ هرمن ویل چنین گفت که «برای من، تردید حاصل از کشفیاتی چون قضیهٔ گودل گذرگاه ثابتی از علاقهٔ وافر و عزم راسخ بوده است که توسط آن کار پژوهشی خود را پیش برده‌ام.» اما از نقطه نظر نظریهٔ اطلاعات، قضیهٔ گودل علتی برای بدبینی محسوب نمی‌شود، بلکه به عکس توصیه می‌کند که ریاضیدانان نیز به خاطر پیشرفت باید چون پژوهشگران دیگر علوم، در جستجوی اصل موضوع جدید باشند.

جوردن استویانف

مثالهای نقض در نظریهٔ احتمال*

ترجمه و توضیح: سیدمحمود طاهری، عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه اصفهان

مجموعه‌ای که پیش روی شماست، شامل تعدادی مثال‌های نقض در نظریهٔ احتمال است. مسلماً در هر شاخه از ریاضیات، فقط قضایا و مثال‌های توضیحی نیستند که توانایی و گستردگی و عمق و زیبایی آن علم را منعکس می‌کنند، بلکه مثال‌های نقض نیز در این مورد نقش ویژه‌ای دارند: این نوع مثال‌ها، غالباً، در سه جهت مطرح می‌شوند.

الف) مسائلی که مربوط است به لزوم بعضی از شرایط کافی

ب) مسائلی که مربوط است به کفایت بعضی از شرایط لازم

ج) مسائلی که مربوط است به اعتبار گزاره‌ای که عکس آن گزاره معتبر است.

این مجموعه علاوه بر آن که می‌تواند منبع کوچکی برای دروس احتمال مقدماتی و احتمال پیشرفته باشد، فرصتی به علاقمندان می‌دهد تا با نتایج استاندارد در نظریهٔ احتمال آشناتر شده و فهم عمیق‌تری از موضوعات این شاخه از ریاضیات پیدا کنند.

منبع این مثال ها کتاب «مثال‌های نقض در احتمال» است. البته این کتاب شامل حدود ۴۰۰ مثال نقض در زمینه‌های مختلف نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی است. در این مقاله ترجمهٔ تعدادی از این مثالها همراه با توضیحات لازم ارائه شده است. سعی شده است که مثالهای انتخابی، جنبه‌های کلی‌تر و اساسی‌تر را شامل شوند و به‌علاوه در سطحی باشند که برای دانشجویان آشنا به مباحث مقدماتی احتمال، قابل استفاده باشد. در هر مورد، قبل از ارائه مثال، توضیحی دربارهٔ مفاهیم به کار رفته در مثال، می‌دهیم.

---

* Stoyanov, J.M., *Counterexamples in Probability*, J. Wiley & Sons, Newyork, 1989.

ابتدا سه مثال نقض ، یکی در زمینهٔ اصول موضوعهٔ احتمال و دو دیگر دربارهٔ استقلال پیشامدهای تصادفی مطرح می‌کنیم.

یک اندازه، که به طور متناهی جمع پذیر است اما به طور شمارا جمع پذیرنیست و بنابراین یک اندازه احتمال نیست:

فرض کنید Ω یک مجموعهٔ مرجع و F یک میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های آن باشد. یعنی مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω که شامل Ω بوده و تحت عمل متمم گیری و اجتماع شمارا، بسته باشد. گوییم P، یک *اندازهٔ احتمال* بر فضای اندازه‌پذیر (Ω, F) است، اگر P بر تمام اعضای F (که آنها را پیشامد گوییم) تعریف شده باشد و در سه شرط زیر صدق کند (موسوم به اصول موضوعهٔ کولموگروف)

۱. $P(\Omega) = ۱$ و برای هر $A \in F$؛ $P(A) \geq ۰$

۲. P به طور متناهی جمع‌پذیر باشد یعنی برای هر تعداد متناهی از پیشامدهای دو به دو جدا از هم $A_n, \cdots, A_۱$ از F داشته باشیم.

$$P(\cup_{i=۱}^{n} Ai) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)$$

۳. برای هر دنبالهٔ تودرتو از پیشامدهای $A_n, \cdots, A_۱$ که $A_{n+۱} \subset A_n$ و $\cap_{n=۱}^{\infty} A_n = \phi$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = ۰$$

البته شرایط ۲ و ۳ را می‌توان با یک شرط معادل زیر جایگزین کرد.

۴. P به طور شمارا جمع‌پذیر باشد. یعنی برای هر دنباله از پیشامدهای دو به دو جدا از هم $A_n \cdots, A_۲, A_۱$ از F داشته باشیم

$$P(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n)$$

در این صورت سه‌تایی مرتب (Ω, F, P) را که در آن Ω یک مجموعهٔ مرجع و F یک میدان سیگمایی بر Ω و P یک اندازه احتمال بر F است، یک *فضای احتمال* نامیم.

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است یک اندازه، به طور متناهی جمع‌پذیر باشد اما به طور شمارا جمع پذیر نباشد و بنابراین یک اندازهٔ احتمالی نباشد.

مثال ۱. فرض کنید Ω مجموعهٔ تمام اعداد گویای r از بازهٔ واحد $[۰,۱]$ و $F_۱$ ردهٔ زیرمجموعه‌های Ω به صورت مجموعه‌های اعداد گویا از بازه‌های $[a,b]$ و (a,b) و $(a,b]$و $[a,b)$ باشد که در آنها a و b هردو اعداد گویا هستند. همچنین $F_۲$ ردهٔ تمام اجتماع‌های متناهی مجموعه‌های جدا از هم از $F_۱$ باشد. دقت کنید که $F_۲$ یک میدان است. یعنی شامل Ω بوده و نسبت به عمل متمم‌گیری و اجتماع متناهی، بسته است. اکنون اندازهٔ P را بر $F_۲$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P(A)=\begin{cases} b-a & A\in F_۱ \\ \sum_{i=۱}^{n} P(A_i) \quad (A=\bigcup_{i=۱}^{n} A_i, A_i\in F_۱) & A\in F_۲ \end{cases}$$

بدیهی است $P(\Omega)=۱-۰=۱$ و نیز برای هر A از $F_۲$، $P(A)\geq ۰$. بنابراین شرط اول بیان شده در توضیحات بالا برقرار است. بعلاوه P یک اندازهٔ به طور متناهی جمع‌پذیر است زیرا هرگاه دو مجموعهٔ جدا از هم دلخواه از $F_۲$ در نظر می‌گیریم، مثلاً

$$B=\cup_{i=۱}^{n} A_i \quad B'=\cup_{j=۱}^{m} A_j'$$

که در آن A_i ها و A_j ها اعضای دو به دو جدا از هم $F_۱$ هستند. در این صورت

$$B\cup B'=\cup_{k=۱}^{n+m} C_k$$

که در آن هر C_k یک A_i و یا یک A_j' است و بنابراین C_k ها نیز دوبدو جدا از هم‌اند و داریم

$$\begin{aligned} P(B\cup B') &= P(\cup_k C_k)=\sum_k P(C_k)=\sum_{i,j}[P(A_i)+P(A_j')] \\ &= \sum_i P(Ai)+\sum_j P(A_j')=P(B)+P(B') \end{aligned}$$

و بنابراین P یک اندازه جمع‌پذیر است.

از طرف دیگر برای هر مجموعهٔ تک عضوی شامل یک عدد گویای r از $[۰,۱]$ داریم: $r\in F_۲$ و $P(\{r\})=۰$. و چون Ω یک مجموعهٔ شمارا است و $\Omega=\cup_{i=۱}^{\infty} r_i$ داریم

$$P(\Omega)=۱\neq ۰=\sum_{i=۱}^{\infty} P(\{ri\})$$

و این نشان می‌دهد که P یک اندازهٔ به طور شمارا جمع‌پذیر نیست و بنابراین یک اندازهٔ احتمال نیست.□

مجموعه‌ای از $n+1$ پیشامد وابسته که هر n تا از آنها مستقل‌اند:

فرض کنید (P و F و Ω) یک فضای احتمال باشد. پیشامدهای A و B از F را (تحت P) *مستقل از هم* گوییم اگر

$$P(A \cup B) = P(A)P(B)$$

مثلاً برای هر فضای احتمال، دو پیشامد بدیهی Ω و ϕ مستقل ازهم‌اند.

همچنین پیشامدهای $A_1, \cdots, A_n$ را *مستقل* گوییم اگر برای هر $k (k \leq n)$ تا از آنها

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdots P(A_k)$$

در حالت خاص که رابطهٔ فوق برای $k = 2$ برقرار باشد، n پیشامد را دو به دو *مستقل* گوییم. بدیهی است که اگر n پیشامد مستقل باشند، آنگاه هر زیر مجموعه‌ای از آنها مستقل‌اند. اما عکس این مطلب صحیح نیست. در مثال زیر مجموعه‌ای از $n+1$ پیشامد داریم که هر n تا از آنها مستقل‌اند ولی $n+1$ پیشامد مستقل نیستند.

مثال ۲. سکه‌ای ناأریب را n بار مستقلاً می‌اندازیم. پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم.

A_k : پیشامد رو شدن شیر در k امین پرتاب $k = 1, \cdots, n$

A_{n+1} : پیشامد این که تعداد شیرهای رو شده در n پرتاب، عددی زوج باشد.

در این صورت $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{2}$

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{2^n}[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots] = \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1/2$$

به علاوه داریم

$$P(A_{n+1}|A_1 \cdots A_n) = \begin{cases} 1 & n\text{زوج} \\ 0 & n\text{فرد} \end{cases}$$

و

$$P(A_1 \cdots A_{n+1}) = P(A_1 \cdots A_n) \cdot p(A_{n+1}|A_1 \cdots A_n) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{زوج} \\ 0 & n \text{فرد} \end{cases}$$

بنابراین رابطهٔ زیر در هیچ حالتی برقرار نیست.

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(A_1) \cdots P(A_n) P(A_{n+1})$$

زیرا طرف راست آن برابر است با $\frac{1}{2^{n+1}}$ و طرف چپ آن یا برابر با $\frac{1}{2^n}$ است و یا برابر صفر. پس $A_1, \cdots, A_{n+1}$ مستقل نیستند.

اکنون نشان می‌دهیم که هر n پیشامد از $n+1$ پیشامد فوق (و در نتیجه $n > k$ پیشامد از آنها) مستقل‌اند. دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) n پیشامد مورد بررسی، $A_1, \cdots, A_n$ هستند. در این صورت استقلال آنها بدیهی است، زیرا برای هر k تا از آنها، مانند $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k} (2 \le k \le n)$ داریم

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}) = \frac{1}{2^k}$$

ب) n پیشامد انتخابی، شامل پیشامد A_{n+1} به‌علاوهٔ $n-1$ پیشامد از پیشامدهای A_1 و $\cdots$ و A_n می‌باشد. برای نشان دادن استقلال این n پیشامد کافی است ثابت کنیم

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) P(A_{n+1})$$

که در آن $1 \le m < n-1$ و $i_1, \cdots, i_m$ از ۲ تا m تغییر می‌کنند. می‌دانیم که

$$P(A_{i_1}) = \cdots = \cdots P(A_{i_m}) = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

بنابراین طرف راست رابطهٔ بالا برابر با $\frac{1}{2^{m+1}}$ و از طرفی طرف چپ آن نیز برابر است با

$$\begin{aligned} & P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) \cdot P(A_{n+1}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) \\ &= \frac{1}{2^m} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{m+1}} \end{aligned}$$

یعنی در این حالت نیز، هر n پیشامد انتخابی، مستقل‌اند. پس در هر صورت، هر n پیشامد از A_1 و $\cdots$ و A_{n+1} مستقل‌اند، در حالی که $n+1$ پیشامد کلاً مستقل نیستند.□

فضاهای احتمال بدون پیشامدهای مستقل:

غالباً تصور می‌شود که هر فضای احتمال شامل پیشامدهایی (غیربدیهی) مستقل از هم است، در حالی که چنین نیست، در مثال زیر یک فضای احتمال داریم که هیچ دو پیشامدی (غیربدیهی) در آن مستقل نیستند.

مثال ۳. فرض کنید Ω یک مجموعهٔ متناهی به صورت زیر باشد.

$$\Omega = \{w_1, \cdots, w_n\}$$

و اندازهٔ احتمال P بر Ω اینگونه تعریف شود

$$P(\{w_1\}) = 1-(n-1)\epsilon, P(\{w_2\}) = \cdots = P(\{w_n\}) = \epsilon$$

که در آن ϵ یک عدد گنگ از بازهٔ $(0, \frac{1}{n-1})$ است.

ثابت می‌کنیم که در فضای احتمال فوق هیچ زوج پیشامد A و B مستقل از هم وجود ندارد. البته غیر از پیشامدهای بدیهی Ω و $\emptyset$ که برای هر فضای احتمال تعریف می‌شوند و مستقل از هم‌اند.

به برهان خلف، فرض کنید این چنین پیشامدهای A و B وجود داشته باشند، در این صورت، سه حالت ممکن زیر را داریم

الف ـ $w_1 \in A$ و $w_1 \notin B$

ب ـ $w_1 \notin A$ و $w_1 \in B$ و یا بالعکس

ج ـ $w_1 \in A$ و $w_1 \in B$

می‌توان تحقیق کرد که شرط استقلال در هیچ حالت نمی‌تواند برقرار باشد. برای نمونه حالت دوم را توضیح می‌دهیم.

فرض کنید A شامل k پیشامد از w_1 ، $\cdots$ ، w_n باشد و B شامل w_1 و نیز ℓ تا از پیشامدهای w_2، $\cdots$ ، w_n باشد.

بنابراین $A \cap B$ فقط می‌تواند شامل تعدادی پیشامد ، مثلاً m تا از w_2، $\cdots$، w_n باشد. پس

$$P(A \cap B) = m\epsilon$$

از طرفی داریم

$$P(A) = k\epsilon$$

و

$$P(B) = [1 - (n-1)\epsilon] + \ell\epsilon$$

پس

$$P(A) \cdot P(B) = k\epsilon[1 - (n-1)\epsilon + \ell\epsilon]$$

حال اگر بخواهید A و B مستقل باشند باید داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

یعنی

$$m\epsilon = k\epsilon[1 - (n-1)\epsilon + \ell\epsilon]$$

و از آن

$$\epsilon = \frac{k-m}{k(n-1-\ell)}$$

یعنی ϵ یک عدد گویاست و این با گنگ بودن ϵ در تناقض است بنابراین فرض استقلال A و B نمی‌تواند برقرار باشد.

روش مشابهی را می‌توان برای حالات الف و ج به کار برد. بنابراین در فضای احتمال فوق غیر از Ω و $\emptyset$ پیشامدهای مستقل وجود ندارند.

در این مثال، Ω متناهی است. در [۱] مثالی با ویژگی این مثال مطرح شده است که در آن Ω نامتناهی شماراست. □

در ادامه چند مثال نقض در زمینهٔ استقلال و وابستگی متغیرهای تصادفی ارائه می‌دهیم.

فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم $F(x_1, x_2)$ و توابع حاشیه‌ای $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ باشند. X_1 و X_2 را مستقل گوییم اگر

$$F(x_1\, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I\!R$$

که برای متغیرهای تصادفی پیوسته معادل است با شرط

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I\!R$$

که در آن f نشان دهندهٔ تابع چگالی است. توجه می‌کنید که برای استقلال دو متغیر تصادفی، حدود آنها نیز نباید به هم وابسته باشند. برای متغیرهای تصادفی گسسته شرط استقلال معادل است با شرط زیر

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = P[X_1 = x_1] \cdot P[X_2 = x_2] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

چنانچه X_1 و X_2 مستقل نباشند، گوییم *وابسته به هم‌اند*. ثابت می‌شود که اگر X_1 و X_2 مستقل از هم باشند، آنگاه، به شرط وجود امید ریاضی‌ها داریم

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند که $0 < V(X) < \infty$ و $0 < V(Y) < \infty$. آنگاه ضریب همبستگی X و Y، $\rho(x, y)$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(X, Y) = \frac{E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

چنانچه $\rho(X, Y) = 0$ گوییم X و Y *ناهمبسته* هستند. بدیهی است که شرط $\rho(X, Y) = 0$ معادل است با اینکه

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0$$

یعنی $E[XY] = E[X]E[Y]$

متغیرهای تصادفی که ناهمبسته‌اند ولی مستقل نیستند:

با توضیحات بالا روشن می‌شود که اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه ناهمبسته نیز هستند. زیرا بنابه استقلال $E[XY] = E[X]E[Y]$ و در نتیجه $\rho(X, Y) = 0$. حال سؤال این است، اگر X و Y ناهمبسته باشند، آیا لزوماً مستقل‌اند ؟ جواب، منفی است. به عبارت دیگر ویژگی ناهمبستگی ضعیف‌تر از ویژگی استقلال است. دو مثال نقض زیر، یکی در حالت گسسته و یکی پیوسته، این نکته را روشن‌تر می‌کند.

مثال ۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با چگالی احتمال مشترک $P_{ij} = P[X = i, Y = j]$ تعریف شده به صورت زیر باشند.

$$P_{۱,۰} = P_{-۱,۰} = P_{۰,۱} = P_{۰,-۱} = \frac{۱}{۴}$$

و به وضوح $E[X] = ۰$ و $E[Y] = ۰$ و $E[XY] = ۰$. بنابراین $\rho(X,Y) = ۰$ یعنی X و Y ناهمبسته‌اند. از طرف دیگر می‌توان به سادگی ملاحظه کرد که رابطهٔ $P[X = i, Y = j] = P[X = i] \cdot P[Y = j]$ برای هیچ زوج (i,j) برقرار نیست و بنابراین X و Y وابسته‌اند؛ که البته اگر برای حتی یک زوج (i,j) هم برقرار نبود X و Y وابسته بودند.□

مثال ۵. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند. (توزیع یکنواخت بر دایرهٔ واحد)

$$f(x_۱, x_۲) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi} & x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

محاسباتی ساده معلوم می‌شود که $E[X_۱] = ۰$ و $E[X_۲] = ۰$ و $E[X_۱X_۲] = ۰$. بنابراین $\rho(X_۱, X_۲) = ۰$، یعنی $X_۱$ و $X_۲$ ناهمبسته‌اند. از طرف دیگر چگالی‌های حاشیه‌ای $f_۱(x_۱)$ و $f_۲(x_۲)$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$f_۱(x_۱) = \begin{cases} \frac{۲\sqrt{۱-x_۱^۲}}{\pi} & -۱ \leq x_۱ \leq ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_۲(x_۲) = \begin{cases} ۲\sqrt{۱ - x_۲^۲} & -۱ \leq x_۲ \leq ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

و ملاحظه می‌کنید که $f(x_۱, x_۲) \neq f_۱(x_۱) \cdot f_۲(x_۲)$. یعنی $X_۱$ و $X_۲$ مستقل از هم نیستند. از این گذشته حدود $X_۱$ و $X_۲$ نیز با رابطهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱$ به هم وابسته‌اند که حتی همین برای وابستگی $X_۱$ و $X_۲$ کافی است. □

در اینجا شایان یادآوری است، در حالتی که X و Y توزیع *نرمال دو متغیره* داشته باشند، ناهمبسته بودن X و Y معادل است با استقلال آنها. برای این حالت، اهمیت شرط نرمال بودن توزیع توأم (X,Y) با چند مثال در [۱] تشریح شده است.

اکنون دو مثال نقض دربارهٔ استقلال متغیرهای تصادفی برحسب توابع مشخصه و توابع مولد احتمال می‌آوریم. ابتدا چند تعریف را یادآوری می‌کنیم.

اگر X یک متغیر تصادفی بر فضای احتمال (Ω, F, P) باشد، آنگاه تابع $\phi(t) = E[e^{itx}]$، $t \in \mathbb{R}$ و $i = \sqrt{-1}$؛ *تابع مشخصهٔ* X نامیده می‌شود. تابع مشخصه برای هر تابع توزیع یک متغیر تصادفی وجود دارد. بعلاوه تناظری یک به یک بین توابع توزیع و توابع مشخصه برقرار است. همچنین تابع $M_X(t) = E[e^{tx}]$ *تابع مولد گشتاورهای* X نامیده می‌شود. و بالاخره تابع $P_X(t) = E[t^x] t \in \mathbb{R}$ *تابع مولد احتمال* X نامیده می‌شود، که البته برای متغیرهای تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی تعریف می‌شود.

استقلال متغیرهای تصادفی برحسب توابع مشخصه:

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی به ترتیب با توابع مشخصهٔ ϕ_1 و ϕ_2 باشند. و ϕ تابع مشخصهٔ مجموع $X_1 + X_2$ باشد. حال چنانچه X_1 و X_2 مستقل باشند، آنگاه

$$\phi(t) = \phi_1(t)\phi_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

حال سؤال این است اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی باشند که توابع مشخصه آنها و تابع مشخصه مجموع آنها در رابطهٔ فوق صدق می‌کند آیا لزوماً X_1 و X_2 مستقل‌اند ؟ جواب، منفی است. به مثال نقض زیر توجه کنید.

مثال ۶. فرض کنید $X_1 = X_2 = X$ که در آن X توزیع کشی دارد، یعنی

$$f(x) = \frac{1}{\Phi(1 + x^2)} \quad x \in \mathbb{R}$$

تابع مشخصهٔ X_1 با استفاده از فرمول دموآور به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \phi_1(t) = \; & E[e^{itx_1}] \\ & = E[\cos tx_1] + iE[\sin tx_1] \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx_1}{1+x_1^2} dx_1 + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx_1}{1+x_1^2} dx_1 \end{aligned}$$

حال با توجه به انتگرال معین زیر

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos mx}{a^{۲}+x^{۲}}dx = \frac{\pi}{۲a}e^{-ma}$$

مقدار عبارت سمت راست در $\phi_{۱}(t)$ برابر $e^{-|t|}$ می‌شود و عبارت سمت چپ نیز به دلیل فرد بودن تابع جلوی انتگرال برابر صفر است. پس

$$\phi_{۱}(t) = e^{-|t|}$$

به طور مشابه $\phi_{۲}(t)$ و $\phi(t)$، توابع مشخصهٔ $X_{۲}$ و $X_{۱}+X_{۲}$ ، عبارت خواهند بود از $\phi_{۲}(t) = e^{-|t|}$ و $\phi(t) = e^{-۲|t|}$. بنابراین در این مثال $\phi(t) = \phi_{۱}(t)\cdot\phi_{۲}(t)$، اما به وضوح $X_{۱}$ و $X_{۲}$ مستقل نیستند.

در این جا خاطرنشان می‌کنیم که اگر $X_{۱}, \cdots, X_{n}$ متغیرهای تصادفی به ترتیب با توابع مشخصهٔ $\phi_{۱}, \cdots, \phi_{n}$ باشند، ثابت می‌شود که این متغیرها مستقل از هم‌اند اگر و فقط اگر برای هر $t_{۱}, \cdots, t_{n}$،

$$E[\exp(i(t_{۱}x_{۱}+\cdots+t_{n}x_{n}))] = \phi_{۱}(t_{۱})\cdots\phi_{n}(t_{n})$$

می‌توانید مثال (۶) را با توجه به شرط کلی و عمومی فوق مجدداً بررسی کنید.

استقلال متغیرهای تصادفی برحسب توابع مولد احتمال:

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی باشند. بعلاوه P_X و P_Y و P_{X+Y} به ترتیب توابع مولد احتمال X و Y و $X+Y$ باشند. چنانچه X و Y مستقل باشند ثابت می‌شود که

$$P_{X+Y}(t) = P_X(t)\cdot P_Y(t)$$

اکنون سؤال این است؛ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی باشند که توابع مولد احتمال آنها و تابع مولد احتمال $X+Y$ در رابطهٔ فوق صدق کند آیا X و Y لزوماً مستقل‌اند؟ جواب منفی است. به مثال نقض زیر توجه کنید.

مثال ۷. فرض کنید ξ و η متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند به قسمی که ξ هریک از مقادیر ۰, ۱, ۲ را با احتمال ۱/۳ و η هریک از مقادیر ۰ و ۱ را به ترتیب با مقادیر

۱/۳ و ۲/۳ اختیار کنند. حال تعریف می‌کنیم $X = \xi$ و (به پیمانهٔ ۳) $X = \xi + \eta$. در این صورت X هریک از مقادیر ۰ و ۱ و ۲ را با احتمال ۱/۳ و همچنین $X + Y$ هریک از مقادیر ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ را به ترتیب با احتمالهای ۱/۹ ، ۲/۹ ، ۳/۹ ، ۲/۹ و ۱/۹ اختیار می‌کنند. با محاسباتی ساده به دست می‌آوریم

$$P_X(t) = E[t^x] = P_Y(t) = E[t^y] = \frac{1}{3}[1 + t + t^2]$$

و

$$P_{X+Y}(t) = E[t^{x+y}] = \frac{1}{9}[1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 + t^4]$$

بنابراین رابطهٔ $P_{X+Y}(t) = P_X(t)P_Y(t)$ برای دو متغیر تصادفی X و Y برقرار است. اما X و Y مستقل از هم نیستند بلکه آشکارا به هم وابسته‌اند.

آخرین مثال نقض مربوط است به رابطهٔ بین وجود گشتاورهای یک توزیع و تابع مولد گشتاورهای آن.

تابع مولد گشتاورها ممکن است وجود نداشته باشد، حتی اگر گشتاورهای تابع از هر مرتبه‌ای موجود باشند:

ثابت می‌شود چنانچه $M_X(t)$ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X در یک بازه شامل $t = 0$ موجود باشد، آنگاه X دارای گشتاورهای تمام مراتب است، که آنها را می‌توان از رابطهٔ $E[x^k] = M^{(k)}(0)$ به دست آورد. و بدین ترتیب است که یک تابع مولد گشتاورها، گشتاورهای یک متغیر تصادفی را تولید می‌کند. اما عکس مطلب بالا همواره صحیح نیست. یعنی این طور نیست که اگر تمام گشتاورهای یک توزیع موجود باشند، آنگاه تابع مولد گشتاورهای آن توزیع لزوماً در بازه‌ای شامل $t = 0$ موجود باشد. به مثال نقض زیر توجه کنید.

مثال ۸. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$P[X = 2^n] = \frac{1}{en!} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

چون

$$E[x^k] = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n)^k \frac{1}{en!} = \frac{e^{(2^k)}}{e} = e^{(2^k - 1)} \quad k = 1, 2, \cdots$$

پس تمام گشتاورهای X موجود است. از طرف دیگر داریم

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \sum e^{tX} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t\cdot 2^n} \frac{1}{en!} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^t)^{2^n} \frac{1}{en!}$$

اما سری $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \frac{1}{en!}$، بنابه آزمون نسبت، برای $|z| \leq 1$ همگرا و برای $|z| > 1$ واگراست. و اگر در این سری قرار دهیم $z = e^t$ نتیجه می‌شود که $M_X(t) = h(e^t)$ برای $t \leq 0$ همگرا و موجود است و برای $t > 0$ موجود نیست. بنابراین در این مثال، $M_X(t)$ در هیچ بازه‌ای شامل $t = 0$ موجود نیست اما تمام گشتاورهای X وجود دارند.

مرجع

1. Stoyanov, J.M. *Counterexamples in Probability*, John Wiley & Sons, New York 1989.

ی.م. آیزاکس و ج.ر.رابینسون

در باب یک قضیهٔ فروبنیوس جوابهای $x^n = 1$ در گروه‌های متناهی*

ترجمهٔ فرحبخش کمالی خمسه

گروه متناهی G و عدد صحیح مثبت n مفروض‌اند، تعداد جوابهای $x^n = 1$ در G را با $f_n(G)$ نشان می‌دهیم. قضیهٔ مشهوری از فروبنیوس حکم می‌کند که اگر n، $|G|$ را بشمارد $f_n(G)$ را نیز خواهد شمرد.برهان‌های متعددی برای قضیهٔ فروبنیوس در متون ریاضی موجود است (برای مثال رجوع کنید به [۱] یا نتیجهٔ ۴۱.۱۱ از [۲]یا قضیهٔ ۹.۱.۱ از [۳])؛ که برخی از آنها با استفاده از نظریهٔ نمایش انجام می‌شوند و برخی دیگر مقدماتی هستند. با این حال، نویسندگان مقاله معتقدند، برهانی که در زیر ارائه می‌شود ساده‌ترین برهانی است که تاکنون داده شده است.

از این به بعد، نماد "p" را، برای نمایش یک عدد صحیح اول و G را برای یک گروه متناهی، به کار می‌بریم. اگر $n > 0$، عددی صحیح باشد، بزرگترین توانی از p، که n را می‌شمارد، با n_p نمایش می‌دهیم؛ برای مثال $۲۴_۳ = ۳$.

می‌دانیم اگر $g \in G$ عنصر دلخواهی باشد، یک تجزیهٔ منحصر به فرد $g = xy$، که x و y تعویض پذیر هستند وجود دارد که مرتبهٔ x توانی از p است و مرتبهٔ y بر p بخش‌پذیر نیست. این مطلب یک تناظر دوسویی بین عناصر G و زوج‌های مرتب (x, y)، که مرتبهٔ y نسبت به p، اول و مرتبهٔ $x \in C_G(y)$ توانی از pاست ، برقرار می‌کند. از این تناظر برای برهان لم بعدی، که کلید کار ماست، استفاده می‌کنیم.

لم ۱. *گروه G، عدد صحیح n، و عدد اول p مفروض‌اند. قرار می‌دهیم $q = n_p$ و*

---

* I.M. Isaacs and G.R. Robinson, "on a theorem of Frobenius: Solution of $x^n = 1$ in Finite Groups", *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 352-354.

T را مجموعه‌ای از نماینده‌های رده‌های تزویجی عناصر $y \in G$، در نظر می‌گیریم که $y^{\frac{n}{q}} = ۱$. در این صورت

$$f_n(G) = \sum_{t \in T} |G : C_G(t)| f_q(C_G(t))$$

برهان. بنابه نکته‌ای که قبل از بیان لم متذکر شدیم هر عنصر $g \in G$ با یک زوج مرتب (x, y) که $x \in C_G(y)$، متناظر است. به‌علاوه، مرتبه‌های این عناصر در رابطهٔ $o(g) = o(x)o(y)$ صدق می‌کنند و لذا $g^n = ۱$ اگر و فقط اگر $x^q = ۱$ و $y^{\frac{n}{q}} = ۱$. در نتیجه $f_n(G)$ مجموع مقادیر $f_q(C_G(y))$ است، که y روی همهٔ جواب‌های $y^{\frac{n}{q}} = ۱$ در G تغییر می‌کند. از آنجا که، وقتی y روی تعداد $|G : C_G(t)|$ عنصر از ردهٔ تزویجی با نمایندهٔ $t \in T$، تغییر می‌کند مقدار $f_q(C_G(y))$ ثابت می‌ماند، فرمول بیان شده نتیجه می‌شود.

قضیهٔ فروبنیوس را ابتدا در حالتی که n توانی از یک عدد اول است، ثابت می‌کنیم. برای سادگی بحث، می‌گوییم G خاصیت p ـ *فروبنیوس* دارد اگر و فقط اگر هر توان q از p که $|G|$ را می‌شمارد، $f_q(g)$ را نیز بشمارد.

لم ۲. *اگر q توانی از p و شمارندهٔ $|G|$ و $H \subseteq G$ یک زیر گروه با خاصیت p ـ فروبنیوس باشد، آنگاه q، $|G : H| f_q(H)$ را می‌شمارد.*

برهان. اگر $|H| \mid q$، حکم واضح است، و بنابراین قرارمی‌دهیم $q_۰ = |H|_P$ و فرض می‌کنیم $q_۰ < q$. در این صورت $f_q(H) = f_{q_۰}(H)$ بر $q_۰$ و $|G : H|$ بر $\frac{|G|_p}{q_۰}$ بخش‌پذیر هستند. در نتیجه $|G|_p$، $|G : H| f_q(H)$ را می‌شمارد و لذا q نیز چنین می‌کند.

ثابت خواهیم کرد که خاصیت p ـ فروبنیوس همواره برقرار است. برای این مطلب به نکتهٔ بعدی نیاز داریم.

لم ۳. *تعداد عناصر مرتبهٔ m، در هر گروه G مضربی از $\varphi(m)$ است، که φ تابع اویلر می‌باشد.*

برهان. با قرار دادن $x \equiv y$ اگر و فقط اگر $< x > = < y >$، یک رابطهٔ هم ارزی روی G تعریف می‌کنیم.تمام عناصر هر ردهٔ هم ارزی مرتبه‌های مساوی دارند و اگر آن مرتبه مساوی mباشد، عدد اصلی رده، مساوی $\varphi(m)$ می‌شود و نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

قضیه ۴. *هر گروه متناهی G، دارای خاصیت p ـ فروبنیوس است.*

متذکر می‌شویم که قضیهٔ ۴ می‌تواند بیان نسبتاً قوی‌تر و کلی‌تر قضیهٔ کوشی قلمداد

شود: اگر p، $|G|$ را بشمارد آنگاه G یک عنصر ازمرتبهٔ p دارد. از آنجا که بحث ما (حداقل برای گروه‌های آبلی) به قضیهٔ کوشی برمی‌گردد، برهان مستقلی برای آن ارائه نمی‌دهیم.

برهان قضیه ۴. استقراء روی $|G|$ را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم q توانی از p باشد و $q||G|$. ابتدا با در نظر گرفتن حالت $q = |G|_p$ نشان می‌دهیم که $q|f_q(g)$. لم ۱ را با قراردادن $n = |G|$ به کار می‌بریم و جملات را برحسب اینکه tدر $Z(G)$ باشد یانباشد، مرتب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$|G| = f_n(G) = |T \cap Z(G)|f_q(G) + \sum_{t \in T - Z(G)} |G : C_G(t)|f_q(C_G(t)) \cdot$$

هر جمله در مجموع سمت راست به صورت $|G : H|f_q(H)$ است که $H < G$. بنا به فرض استقراء H در خاصیت p ـ فروبنیوس صدق می‌کند و لذا بنا به لم ۲، q، $|G : H|f_q(H)$ را می‌شمارد. از آنجا که q، $|G|$ را نیز می‌شمارد نتیجه می‌گیریم که q، $|T \cap Z(G)|f_q(G)$ را می‌شمارد و کافیست نشان دهیم که p، $|T \cap Z(G)|$ را نمی‌شمارد.

داریم:

$$T \cap Z(G) = \{y \in Z(G) | y^{\frac{n}{q}} = 1\}$$

این مجموعه یک زیر گروه $Z(G)$ است که شامل هیچ عنصر از مرتبهٔ p نیست. از قضیهٔ کوشی نتیجه می‌شود که $|T \cap Z(G)|$ بر p بخش‌پذیر نیست.

حال فرض می‌کنیم $q < |G|_p$. همان گونه که $f_{|G|_p}(G)$ بر $|G|_p$ بخش‌پذیر می‌باشد، بر q نیز بخش‌پذیر است و کافیست نشان داده شود که $f_{|G|_p}(G) - f_q(G)$ بر q نیز بخش‌پذیر است. این مقدار، تعداد عناصری از G است که مرتبهٔ آنها توانی از p است و از q بزرگتر است. از طرفی ، بنابه لم ۳، تعداد عناصر گروه G که مرتبهٔ p^e دارند مضربی از $\varphi(p^e) = (p-1)p^{e-1}$ است. اگر $p^e > q$، این عدد بر q بخش‌پذیر است و نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

قضیه ۵. (فروبنیوس) *اگر n، $|G|$ را بشمارد آنگاه $f_n(G)$ را خواهد شمرد.*

برهان. کافیست مطلب را برای هر عدد اول p، که $q = n_p$، $f_n(G)$ را می‌شمارد، نشان دهیم. بنابه لم ۱، $f_n(G)$ می‌تواند به صورت مجموعی از جملات به صورت $|G : H|f_q(H)$ بیان شود، که $H \subseteq G$، بنابه قضیه ۴ در خاصیت p ـ فروبنیوس صدق می‌کند. بنابه لم ۲ هر جمله بر q بخش‌پذیر است و نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ فروبنیوس اغلب کلی‌تر از قضیه ۵ بیان می‌شود. برای هر عنصر دلخواه $a \in G$، تعداد جوابهای معادلهٔ $x^n = a$ را در G، با $f_n(G,a)$ نشان می‌دهیم. نتیجهٔ بعدی دقیقاً ۹.۱.۱ از [۳] است.

قضیه ۶. *برای هر عنصر $a \in G$ و عدد صحیح مثبت n، $f_n(G,a)$ بر ب.م.م. $(n, |C_G(a)|)$ بخش‌پذیر است.*

در حقیقت، قضیه ۶ را می‌توان با روش دیگری شبیه به آنچه در این مقاله آمده است، ثابت کرد. از آنجا که قضیهٔ ۵ یقیناً جالبترین و مهمترین حالت است، فقط اثبات آن را برای ارائه انتخاب کرده‌ایم و امیدواریم ساده‌ترین برهان ممکن را برای آن ارائه داده باشیم.

با این وجود، مناسب به نظر می‌رسد به طور خلاصه ایده‌هایی که در برهان قضیهٔ ۶ به کار رفته‌اند، مطرح شوند. فوراً می‌توان قضیه را به حالت $a \in Z(G)$، تحویل نمود. سپس با استفاده از معادلهٔ

$$f_n(G,a) = \sum_{t \in T} |G : C_G(t)| f_q(G,t)$$

که $q = n_p$ و T مجموعه‌ای از نماینده‌های رده‌های تزویجی عناصر $y \in G$ که $y^{\frac{n}{q}} = a$ است، مطلب را به حالتی که n توانی از p باشد تبدیل می‌کنیم. قدم بعدی ملاحظهٔ این نکته است که اگر n توانی از p و a عنصر مرکزی باشد آنگاه $f_n(G,a) = f_n(G,x)$، که $a = xy = yx$ و مرتبهٔ x توانی از pاست، در حالی که مرتبهٔ y بر p بخش پذیرنیست.

در این مرحله، آنچه باقی می‌ماند حالتی است که n توانی از p و a یک p ـ عنصر مرکزی است. اگر $a = 1$، قضیهٔ ۴ را به کار می‌بریم. در غیر این صورت توجه می‌کنیم که هر جواب معادلهٔ $x^n = a$ روی یک زیرگروه دوری منحصر به فرد از مرتبهٔ $n \cdot o(a)$ قرار دارد. همچنین، هر چنین زیرگروهی شامل دقیقاً n جواب است و نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

مراجع

1. R. Brauer. On a theorem of Frobenius, *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969) 12-15.

2. C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York. 1962.

3. M. Hall, *Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

جفری راخ

روشن کردن قلمروهای کراندار*

ترجمهٔ حسن حقیقی

این نوشتهٔ کوتاه نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از خواص بیضی و استدلالی مقدماتی برمبنای فشردگی، می‌توان تعداد چشمه‌های لازم برای روشن کردن درون یک قلمرو کراندار را مورد مطالعه قرار داد.

فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ مجموعه‌ای همبند، باز و کراندار باشد به طوری که مماس بر $\partial\Omega$ به طور پیوسته تغییر کند و Ω در یک طرف مرزش قرار بگیرد. یک پرتو در Ω مسیری تکه‌ای خطی است که نقاط شکستگی‌اش بر روی $\partial\Omega$ قرار گرفته باشند و قانون معمول انعکاس نور در مورد آن صدق کند، به عبارت دیگر قطعه خطها با خط مماس زوایای مساوی بسازند. گوییم Ω *از نقطهٔ* P *روشن می‌شود* هرگاه برای هر $Q \in \Omega$ پرتوی وجود داشته باشد که شامل P و Q باشد. و گوییم Ω *از* P مستقیماً *روشن می‌شود* هرگاه برای هر $Q \in \Omega$ قطعه خط $\overline{PQ}$ درون Ω قرار بگیرد. در حالت اول Q بر پرتوی که ازنقطهٔ P شروع به حرکت کرده قرار گرفته و در حالت دوم بر پرتوی که هنوز به $\partial\Omega$ نرسیده قرار دارد. مجموعهٔ Ω محدب است اگر و تنها اگر از هر نقطهٔ $P \in \Omega$ مستقیماً روشن شود. Ω را ستاره‌گون نامیم، هرگاه از یک نقطهٔ P مستقیماً روشن شود، و گوییم Ω *از* $\{P_1, \cdots, P_k\}$ مستقیماً *روشن می‌شود* هرگاه برای هر $Q \in \Omega$ یک $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ وجود داشته باشد به طوری که پاره‌خط $\overline{P_iQ}$ در Ω قرار بگیرد. تعریف *روشن شدن* Ω *از نقاط* $P_1, \cdots, P_k$ باید واضح باشد.سؤال اساسی‌ای که ما

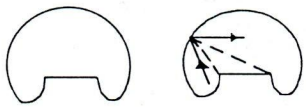
---

* Rauch, J. "Illumination of Bounded Domains," *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978) 359-361.

درباره آن بحث می‌کنیم این است که چه تعداد نقطه برای روشن کردن یک مجموعه «معقول» مورد نیاز است؟

اولین مثال (منسوب به ر.پن رز[1]) نشان می‌دهد که در حالت کلی باید چشمه‌ها را به طور مناسبی قرار داد. مثالی از یک مجموعهٔ Ω و یک نقطهٔ P از آن ارائه می‌دهیم به طوری که Ω ازاین نقطه روشن نشود اتفاقاً برای نور موجی (درست برخلاف نور هندسی) این امر غیرممکن است. [۱] را ببینید. نیمهٔ بالائی بیضی را در نظر بگیرید که به وسیله خمی متشکل از قطعه خط مستقیم واصل کانونهای بیضی و دو دالبُر، همچون شکل ۱، کامل شده باشد.

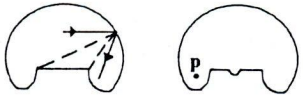
ادعا: هر پرتوی که از دالبُر سمت چپ ساطع شود، هیچ گاه پاره‌خط واصل کانونها را قطع نمی‌کند.



شکل ۱ شکل ۲

برای مشاهدهٔ این، اولین انعکاس پرتوی را که دال‌بر را ترک می‌کند در نظر بگیرید. پرتوی که از کانون سمت چپ می‌آید و در همان نقطه روی $\partial\Omega$ منعکس می‌شود برای مقایسه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

پرتو توپری که از دالبُر شروع به حرکت می‌کند، خارج پرتو خط چینی که دو کانون را به هم متصل می‌سازد، قرار می‌گیرد.برای انعکاس بعدی به شکل ۳ مراجعه کنید.



شکل ۴ شکل ۳

با تکرار این فرایند، دیده می‌شود که پرتو به طور موزونی به سمت راست حرکت می‌کند، ولی همیشه از قطعه خط واصل کانونها به وسیلهٔ پرتو خط چین جدا می‌شود. فرایند تا زمانی که پرتو به دالبُر به سمت راست، که در اطرافش رفت و آمد می‌کند برود، ادامه می‌یابد. اگر از آن خارج شود، همان استدلال، اما در جهت مخالف، تکرار می‌شود. به این ترتیب اثبات ادعا کامل می‌گردد.

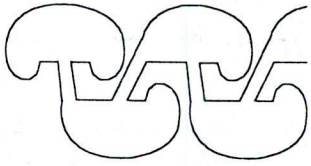
1.R. Penrose

مثال Ω و P در شکل ۴ نشان داده شده است. در آنجا فرورفتگی کوچک زیر خط واصل کانونها، از نقطهٔ P روشن نمی‌شود.

ناحیهٔ شکل ۴ را می‌توان از سه نقطه مستقیماً روشن کرد،زیرا اجتماع سه مجموعهٔ ستاره‌گون است. ممکن است پرسیده شود که آیا هر قلمروی می‌تواند از تعدادی متناهی نقطه روشن شود؟ ما ادعای قویتر زیر را ثابت می‌کنیم. هر قلمرو کراندار Ω که در یک طرف مرز C^1 خودش قرار بگیرد، اجتماع تعداد متناهی مجموعهٔ ستاره‌گون است.

اثبات. برای هر $P \in \Omega$، یک قرص باز $D_P \subset \Omega$ به مرکز P انتخاب کنید. برای $P \in \partial\Omega$، قرص بازی به مرکز P انتخاب کنید به طوری که $D_P \cap \bar{\Omega}$ ستاره‌گون باشد. این انتخاب امکان‌پذیر است، زیرا $\partial\Omega$، C^1 است و Ω در یک طرف مرزش قرار می‌گیرد، بنابر این اگر شعاع قرص به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب شود، آنگاه می‌توان $D_P \cap \bar{\Omega}$ را به دقت با اشتراک D_P و یک نیم صفحهٔ بسته تقریب زد.

برای هر $P \in \bar{\Omega}$، مجموعهٔ $D_P \cap \bar{\Omega}$ یک زیر مجموعهٔ باز $\bar{\Omega}$ است، بنابراین $\{D_P \cap \bar{\Omega} | P \in \bar{\Omega}\}$ یک پوشش باز $\bar{\Omega}$ با زیر مجموعه‌های ستاره‌گون خواهد بود. بنابر فشردگی $\bar{\Omega}$، زیرپوششی متناهی وجود دارد و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.



شکل ۵

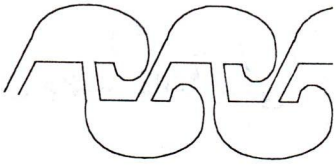
ممکن است سؤال شود برای اطمینان یافتن از اینکه Ω می‌تواند از تعدادی متناهی نقطه روشن شود، فرض هموار بودن $\partial\Omega$ تا چه اندازه لازم است. مثالی ارائه خواهیم داد که در آن $\partial\Omega$ به استثنای یک نقطهٔ P هموار است و

(i) Ω را از هیچ تعداد متناهی نقطه نمی‌توان روشن کرد.

(ii) هر پرتوی که در Ω آغاز به حرکت نماید به P نمی‌رسد.

علت مورد نیاز بودن (ii) این است که اگر پرتوی به P برسد، به هیچ وجه معلوم نیست که چگونه منعکس می‌شود. ابتدا مجموعهٔ بیکران شکل ۵ را در نظر بگیرید که در آن ... به این معناست که شکل به طور بی‌پایانی تکرار می‌شود. هر پرتوی که از اولین دالبُر قارچ مانند پن رز آغاز به حرکت کند، هرگز این دالبُر را ترک نخواهد کرد. بنابراین روشن کردن این دال‌بر نیازمند این است که حداقل یک چشمه درون اولین قارچ باشد. به

طور مشابه پرتوی که در n امین قارچ شروع به حرکت کند، تمام عمرش را در $(n-1)$ امین، n امین و $(n+1)$ امین قارچ می‌گذارند. بنابراین برای روشن کردن nـامین قارچ، حداقل بایستی چشمه‌ای در یکی از سه قارچ وجود داشته باشد. به این ترتیب روشن کردن همه قارچها، تعداد بی‌پایانی چشمه نیاز دارد. برای ساختن مثالی کراندار، با این خاصیت، بلوکهای ساختمانی شکل ۶ را در نظر بگیرید.



شکل ۶

به سمت راست قطعهٔ فوق، قطعه‌ای مشابه آن، منتها با اندازه‌ای نصف آن، متصل کنید. دوباره به سمت راست قطعهٔ به دست آمده، قطعه‌ای مشابه قطعهٔ فوق منتها با اندازه‌ای نصف اندازه قبلی متصل کنید، و همینطور الی آخر. پس از اینکه قلمرو از سمت چپ به شیوه‌ای ساده مسدود گردید، قلمرو کراندار Ωای به دست می‌آید که به یک نقطهٔ تکین در سمت راست انباشته می‌شود. همچون قبل، روشن کردن Ω چشمه‌ای را در هر بلوک نیاز دارد. بنابراین تعدادی نامتناهی چشمه لازم است. به علاوه، پرتوی که در بلوک n شروع به حرکت می‌کند، هرگز به ورای قارچی که بلافاصله در مجاورت این بلوک قرار دارد نمی‌رود و به این ترتیب هیچ پرتوی هرگز به نقطه تکین نمی‌رسد. بدینسان ساختن مثال کامل می‌شود.

مرجع

1. J. Rauch and M. Taylor, Penetration into shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems,*Indiana Univ. Math* J., **22** (1972) 277-285

ایرا روزنهولتز

اثبات لانه کبوتری قضیه کاپلانسکی*

ترجمهٔ اشرف تقئی دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

هدف از این نوشته کوتاه، شرح مختصری از یک اثبات ساده، از نتایجی است که کاپلانسکی تحت عنوان «یک مسئله کوچک پرمخاطره»، به آن اشاره می‌کند.

قضیه (کاپلانسکی). *فرض کنید که یک عنصر در یک حلقهٔ یکه‌دار دارای دو یا بیشتر عنصر واورن راست باشد. در این صورت این حلقه تعداد شمارایی وارون راست خواهد داشت.*

اثبات شامل دو لم زیر است. این اثبات مشابه حل معادلات خطی است و در آن به نحو زیبایی از اصل لانه کبوتری استفاده شده است.

لم ۱ (حل همگن). اگر b، N وارون راست $(N \geq ۲)$ داشته باشد، آنگاه معادله $bx = ۰$ حداقل دارای $(N + ۱)$ جواب است.

اثبات. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$، a_N وارون های راست متمایز b هستند. در این صورت، $a_۱ - a_۱$، $a_۲ - a_۱, \cdots, a_N - a_۱$، N جواب متمایز معادله $bx = ۰$ هستند. نشان می‌دهیم که مجموعه $۱ - a_۱b, ۱ - a_۲b, \cdots, ۱ - a_ng$ حداقل شامل یک جواب اضافی دیگر برای $bx = ۰$ است.

واضح است که تمام عناصر این مجموعه، جوابهای معادله می‌باشند. اگر هیچ جواب تازه‌ای در این مجموعه نباشد برای هر j یک k موجود است که $۱ - a_jb = a_k - a_۱$. از طرفی $۱ - a_jb$ نمی‌تواند برابر $a_۱ - a_۱ = ۰$ باشد زیرا در اینصورت a_j باید یک

---

* Ira Rosenholtz, "A pigeonhole Proof of Kaplansky's Theorem" *Amer. Math. Monthly,* **99** (1992) 132-133.

وارون چپ برای b باشد و در نتیجه به سادگی دیده می‌شود که b فقط یک وارون راست دارد، و این تناقض است.

بنابراین از آنجا که N تا $(۱ - a_j b)$ (کبوتر) و فقط تعداد $(N - ۱)$ تا از $(a_k - a_۱)$ ها (لانه کبوترها) داریم، طبق اصل لانه کبوتری باید برای برخی از $m \neq n$ ها رابطهٔ $۱ - a_m b = ۱ - a_n b$ برقرار باشد. در نتیجه $a_m b = a_n b$ و با ضرب $a_۱$ از سمت راست در دو طرف رابطه بدست می‌آوریم : $a_m = a_n$ و این تناقض است.

لم ۲ (حل ناهمگن). اگر b، N وارون راست $(N \geq ۲)$ داشته باشد پس b، $(N+۱)$ وارون راست دارد.

اثبات. طبق لم ۱ معادله $bx = ۰$ دارای $N+۱$ جواب متمایز $x_۱, x_۲, \cdots, x_{N+۱}$ است. اما اگر $a_۱$ یک وارون راست b باشد ، آنگاه

$$\{a_۱ + x_۱, a_۱ + x_۲, \cdots, a_۱ + x_{N+۱}\}$$

یک مجموعه از $(N + ۱)$ وارون راست متمایز b خواهد بود.

مراجع

1. C.W. Bitzer, Inverses in rings with unity, *Am. Math. Monthly*, **70** (1963) 315.

2. N. Jacobson, some remarks on one-sided inverses, *PAMS*, **1** (1950) 353

3. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol.1, Van Nostrand, 1951, P.55, exercise 8.

4. N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Freeman, 1974, P. 89, exercise7.

آ.آ. آگیف

اثبات قضیه سرپینسکی با استفاده از قضایای اویلر و دیریکله *

ترجمهٔ حمیدرضا میمنی دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه تهران

قضیه مشهور دیریکله بیان می‌کند که هرگاه a و b دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند آنگاه دنباله

$$an+b \qquad n=۱,۲,\cdots$$

تعداد نامتناهی عدد اول را به دست می‌دهد. حدس قدیمی زیر بیان می‌کند که دنباله درجه دوم

$$n^۲+t \qquad n=۱,۲,\cdots$$

به ازای هر عدد صحیح t، تعداد نامتناهی عدد اول را در بردارد.

اولین نتیجه در این راستا از سرپینسکی [۶] است که نشان داده برای هر M یک عدد صحیح t' وجود دارد به طوری که دنباله

$$n^۲+t' \qquad n=۱,۲,\cdots$$

شامل حداقل M عدد اول است. اخیراً نیز چند اثبات جدید و توسیع‌هایی از قضیه سرپینسکی منتشر شده است (مراجع ۱ ، ۲ و ۳)

---

* A.A.Ageev, "Seirpinski's Theorem is Deducible from Euler & Dirichlet", *Amer. Math. Monthly*, **101**, No. **7**,(1994) 659-660.

در این نوشته یک نتیجه نسبتاً قوی‌تر، از قضایای شناخته شده زیر در تئوری اعداد بدست می‌دهیم.

قضیه ۱: (اویلر) (مرجع ۵، قضیه ۲۵۱). هر عدد اول به شکل $۴n+۱$ را به صورت جمع دو مربع می‌توان نوشت. این نمایش بدون در نظرگرفتن ترتیب جمعوندها منحصربه‌فرد است.

قضیه ۲: (دیریکله) (مرجع ۲، صفحه ۳۴). سری $\sum_{p\equiv b(\mathrm{mod}\, a)} \frac{۱}{p}$، برای a و b صحیح و نسبت به هم اول واگراست.

P را مجموعه اعداد اول به شکل $۴n+۱$ می‌گیریم. با توجه به قضیه ۱، مجموعه اعداد اول در $\{(۲k+۱)^۲+۴\ell^۲ \mid k,\ell \in \mathbf{Z}_+\}$ برابر با P است. برای هر $k \in \mathbf{Z}_+$، P_k را به عنوان مجموعه اعداد اول در مجموعه $\{۴\ell^۲+۴k(k+۱)+۱ | \ell \in \mathbf{Z}_+\}$ در نظر می‌گیریم. حال قضیه ۱ را به صورت زیر می‌توان بیان کرد :

$$\bigcup_{k\in \mathbf{Z}_+} P_k = P \qquad (۱)$$

$$P_{k'} \cap P_k = \emptyset \text{ ، } k' \neq k \text{ برای هر} \qquad (۲)$$

قضیه ۳. برای $k_۰, M \geq ۰$ و هر $\delta \in [۰,۱[$، عدد صحیح مثبت $k^* > k_۰$ وجود دارد به طوری که

$$|P_{k^*}| > M(۲k^*+۱)^{\delta}$$

(برای به دست آوردن قضیه سرپینسکی، قرار دهید $k_۰ = \delta = ۰$)

اثبات: با توجه به (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\sum_{p\in P} \frac{۱}{p} = \sum_{k\in \mathbf{Z}_+} \sum_{p\in P_k} \frac{۱}{p} \qquad (۳)$$

ابتدا توجه داشته باشید که

$$\sum_{p\in P_k} \frac{۱}{p} < \sum_{\ell\in \mathbf{Z}_+} \frac{۱}{۴\ell^۲+۱} < \infty \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+ \qquad (۴)$$

حال فرض کنید که خلاف حکم برقرار است، پس $k_۰, M > ۰$ و $\delta \in [۰,۱[$ وجود دارد به طوری که

$$|P_k| < M(۲k+۱)^{\delta} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+ \cap [k_۰, +\infty]$$

این نتیجه می‌دهد که برای هر $k \in \mathbf{Z}_+ \cap [k_۰, +\infty[$.

$$\sum_{p \in P_k} \frac{۱}{p} \leq \frac{|p_k|}{۲k(k+۱)+۱} \leq \frac{M}{(۲k+۱)^{۲-\delta}} \leq \frac{M}{(k+۱)^{۲-\delta}} \qquad (۵)$$

با توجه به (۴) و (۵)، سری سمت راست (۳) همگرا خواهد شد و بنابراین سری سمت چپ نیز همگرا می‌شود، اما این در تناقض با قضیه (۲) است.

تعمیم زیر در حقیقت، نتیجه ساده‌ای از قضیه (۳) می‌باشد.

نتیجه ۱. برای هر $k_۰, M, r, s \geq ۰$ و هر $\delta \in [۰, ۱[$ عدد صحیح مثبت $k^* \geq k_۰$ وجود دارد به طوری که $|P_{k^*}| > M(rk^* + S)^{\delta}$.

مراجع

1. U. Abel and H. Siebert, Sequences with large numbers of prime values, *Amer. Math. Monthly* **100** (1993), 167-169.

2. H. Davenport, *Multiplicative Number theory,* 2nd ed., Springer- Verlag, 1980.

3. R.Forman, Sequences with many primes, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 548-557.

4. B. Garrison, Polynomials with large numbers of prime values, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 316-317.

5. G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the theory of Numbers,* Oxford University Press, 1938.

6. W. Sierpinski, Les binomes $n^۲ + n$ et les nombres premiers, *Bull. Soc. Royale Sciences Liege* **33** (1964), 259-260.

م.و.بوتسکو

آیا حاصلضرب مشتقهای دو تابع خود مشتق یک تابع است؟*

ترجمهٔ دکتر اسماعیل خرّم
عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

نه همیشه. البته مجموعه تمام مشتقات توابع مشتق‌پذیر روی فاصله بسته $[a,b]$ فضای برداری است که توابع پیوسته را در بر دارد، اما این مجموعه تحت عمل ضرب بسته نیست. در واقع، توان دوم مشتق یک تابع ، همانطور که در مثال زیر می‌آید ، همیشه مشتق یک تابع دیگر نیست. هدف عمده این مقاله ارائه اثباتی بنیادی برای قضیه فلیزنر[1] است که در آن شرایط کافی برای اینکه حاصلضرب مشتق دو تابع خود مشتق یک تابع باشد ، پیش‌بینی می‌کند.

در حقیقت ، به جای ارائه مثالی از مشتق یک تابع که توان دوم آن مشتق یک تابع نیست به طور غیر مستقیم عمل می‌کنیم.

فرض کنید مربع مشتق هر تابعی مشتق یک تابع باشد. برای رد چنین فرضی توابع f و g را روی $[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

---

* Botsko, M.W. "When is the Product of Two Derivatives a Derivative ? , *Math. Magazine*, Vol. **65** , No.3 (1992)

1.R.J.Fleissner

$$g(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f و g هر دو مشتق توابعی روی $[0,1]$ هستند. برای اینکه نشان دهیم f مشتق یک تابع است ، توابع F و h را به طریق زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

به ازای هر x در $[0,1]$ به سادگی دیده می‌شود $F'(x)=h(x)+f(x)$. از آنجاکه h پیوسته است ، مشتق یک تابع است و بنابراین تابع f نیز مشتق یک تابع است. به طریق مشابه g نیز مشتق یک تابع روی $[0,1]$ است. اکنون با استفاده از فرض ، f^2+g^2 مشتق یک تابع روی $[0,1]$ خواهد بود. اما این غیرممکن است زیرا f^2+g^2 وقتی $x>0$ دارای مقدار ۱ و وقتی $x=0$ دارای مقدار صفر است. از این رو در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند. بنابراین حاصلضرب مشتق دو تابع ممکن است مشتق تابع دیگری نباشد.

سوالی که اکنون مطرح می‌شود این است که تحت چه شرایطی حاصلضرب مشتق دو تابع ، مشتق یک تابع دیگر خواهد بود. مطالعه این مسئله به سال ۱۹۱۱ برمی‌گردد ، هنگامی که یانگ[2] [۶] پاسخ عملی زیر را ارائه کرد.

قضیه ۱. اگر مشتق f تابعی کراندار روی $[a,b]$ (و از این رو خود مشتق یک تابع باشد) و g مشتق یک تابع روی $[a,b]$ باشد ، آنگاه حاصلضرب fg نیز مشتق یک تابع روی $[a,b]$ است .

اخیراً فوران[3] [۳] نتیجه یانگ را با ارائه قضیه زیر بسط داد . برای تعریف پیوستگی مطلق به مرجع [۴] صفحه ۱۰۴ ، مراجعه کنید .

قضیه ۲. اگر f روی $[a,b]$ به طور مطلق پیوسته ، و g در $[a,b]$ مشتق یک تابع باشد ، آنگاه fg مشتق یک تابع روی $[a,b]$ است .

سرانجام در سال ۱۹۷۵ ، فیلزنر[۲] نتیجه زیر را ارائه داد. یادآوری می‌کنیم که تابع f روی $[a,b]$ دارای تغییرات کراندار است هرگاه عدد مثبت M وجود داشته باشد به

2.W.H.Yung 3.Foran

طوری که به ازای هر افراز $P = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ از فاصله $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq M$$

قضیه ۳. اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و با تغییرات کراندار و g مشتق یک تابع باشد ، آنگاه fg نیز مشتق یک تابع روی $[a, b]$ خواهد بود.

از آنجا که توابع با تغییرات کراندار به طور مطلق پیوسته‌اند و توابع به طور مطلق پیوسته تغییرات کراندار دارند و پیوسته‌اند ، قضیه ۳ ، قضیه ۲ را نتیجه می‌دهد که آن هم به نوبه خود قضیه ۱ را نتیجه می‌دهد. همچنین جالب است توجه کنیم که توابع ارائه شده در مثال هیچکدام تغییرات کراندار نداشتند.

اثبات فلیزنر مفهوم انتگرال دن جوی[4] [مرجع ۵ صفحه ۲۴۱ تا ۲۴۶] را نیاز دارد که عموماً برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی به سادگی قابل فهم نیست. برای خلاصی از آن ، اثبات ساده‌ای را ارائه می‌دهیم که بر مفهوم انتگرال ریمن-استیلجس اتکا دارد ، واز این رو برای افرادی که زمینه حساب انتگرال پیشرفته را دارند قابل فهم خواهد بود.

اثبات قضیه ۳. بر اساس قضیه ۱۵-۸[مرجع ۱ ، صفحه ۱۶۹] هر تابع پیوسته با تغییرات کراندار می‌تواند به صورت تفاضل دو تابع پیوسته صعودی نوشته شود. بنابراین بدون از دست دادن کلّیت مطلب می‌توانیم فرض کنیم که f پیوسته و صعودی است. فرض کنید G تابع اولیه g باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$T(x) = G(x)f(x) - \int_a^x G df$$

تابع اولیه fg است. مطمئناً انتگرال ریمن-استیلجس طرف راست وجود دارد زیرا G پیوسته و f صعودی است. با به کاربردن قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ریمن-استیلجس داریم

$$\begin{aligned} T(x+h) - T(x) = \; & G(x+h)f(x+h) - G(x)f(x) \\ & - \textstyle\int_x^{x+h} G df \\ & G(x+h)f(x+h) - G(x)f(x) \\ & -G(y)[f(x+h) - f(x)] \end{aligned}$$

4.Denjoy

که در آن $x \leq y \leq x+h$. با اندکی محاسبات جبری روی عبارت بالا مقدار زیر به دست می‌آید.

$$f(x+h)[G(x+h)-G(x)]-[f(x+h)-f(x)][G(y)-G(x)]$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} h[T(x+h)-T(x)] &= f(x+h)[G(x+h)-G(x)]/h \\ &-[f(x+h)-f(x)]\times[G(y)-G(x)]/(y-x)\times(y-x)/h \end{aligned}$$

با حد گیری وقتی $h \to 0$ داریم

$$T'(x)=f(x)G'(x)-\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]G(y)-G(x)]/(y-x)\times(y-x$$

از آنجا که $G'(x)=g(x)$ ، و f در x پیوسته است و $|(y-x)/h| \leq 1$ ، و

$$\lim_{h\to 0}[G(y)-G(x)]/(y-x)=G'(x)$$

نتیجه مورد نظر به دست می‌آید:

$$T'(x)=f(x)g(x)$$

مراجع

1. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis,* Addison-Wesley, Reading, MA,1960.

2. R.J. Fleissner,On the product of derivatives, *Fund. Math.* **88**(1975) 173-178.

3. J. Foran,On the product of derivatives, *Fund. Math.* **80** (1973),293-294.

4. H.L. Royden,*Real Analysis,* 2nd edition, Macmillan Publishing Co., New York, 1968.

5. S.Saks, *Theory of the Integral,* 2nd edition, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwow, 1937.

6. W.H. Young,A note on the property of being a differential coefficient,*Proc. London Math.Soc.* **9** (1911), 360-368.

دیدگاه

مصاحبه‌ای با پرویز شهریاری

پرویز شهریاری در سال ۱۳۰۵ در کرمان به دنیا آمد و پس از پایان تحصیلات متوسطه در کرمان موفق به اخذ لیسانس ریاضی از دانشکده علوم دانشگاه تهران شد. همان طور که در مصاحبه هم بدان اشاره شده او از دوره دانشجویی تدریس ریاضی را آغاز کرده و علاوه بر تدریس در دبیرستان‌های تهران چندین سال هم در دانشسرای عالی؛ دانشکده فنی دانشگاه تهران، و مدرسه عالی علوم اراک به تدریس دروس ریاضی اشتغال داشته است .

او از سالها قبل به عنوان مؤلفی توانا در تدوین کتب ریاضی درسی و غیردرسی مطرح بوده و علاوه بر انتشار نشریاتی چون «سخن علمی» به مدت ۸ سال، و «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» به مدت ۱۶ سال، چندین دوره کتاب درسی دبیرستانی و بیش از ۱۰۰ جلد کتاب مفید غیردرسی در زمینه ریاضیات ترجمه و تألیف نموده است.

این گفتگو در دو جلسه طی ماههای آذر و دی سال ۱۳۷۱ در دفتر جهاد دانشگاهی دانشکده علوم دانشگاه تهران بایکی از کوشاترین خادمین و مروجین ریاضیات کشورمان، آقای پرویز شهریاری، صورت گرفته است. در این جلسات بهزاد منوچهریان و سعید ذاکری از طرف مجله جنگ *ریاضی دانشجو* حضور داشته‌اند.

جنگ ریاضی. بسم‌الله الرحمن الرحیم. طی دعوتی از آقای پرویز شهریاری، این فرصت دست داد تا بتوانیم از تجربیات، فعالیتها و زندگی علمی ایشان اطلاعات بیشتری به‌دست آوریم. قطعاً در این مصاحبه مطالب آموزنده‌ای برای همهٔ علاقمندان ریاضیات، خصوصاً دانشجویان، وجود خواهد داشت. ما کلیشه‌ای را که اغلب سؤال می‌کنند «از زندگی خودتان شروع کنید» به هم می‌زنیم.

جنگ ریاضی. اولین سؤال را این طور طرح می‌کنیم که انگیزهٔ شما از این که عمدهٔ تلاش

و همت خود را مصروف ریاضیات دبیرستانی کرده‌اید، چه بوده است؟

شهریاری. تقاضا دارم قبل از پاسخ به سؤال شما، مقداری به‌دوره‌های آموزشی بپردازیم. حقیقت مطلب این است که وقتی من در خردادماه ۱۳۲۳، در کرمان، دانشسرای مقدماتی را تمام کردم در اردیبهشت یا فروردین همان سال برای اولین بار بخشنامه‌ای از تهران رسیده بود که حکایت از آن داشت که شاگردهای اول و دوم دانشسرای مقدماتی می‌توانند به خرج دولت ادامهٔ تحصیل بدهند. البته این، بازتاب کم و بیش زشتی هم در کرمان پیدا کرد به این ترتیب که بعضی از همکلاسی‌های عزیزمان که خانواده‌های بانفوذی در کرمان داشتند به این فکر افتادند که آنها شاگرد اول و دوم بشوند. من به طور طبیعی شاگرد اول آن کلاس بودم. البته این دلیل برجستگی من نبود. بلکه این بود که آن زمان افراد زیادی به دانشسرای مقدماتی روی نمی‌آوردند اما رقبایی از خرداد ۱۳۲۳ پیدا کردم که به انواع کارها دست زدند.

البته این را عرض کنم که در آن زمان شاگرد اول و دوم شدن یا نشدن تفاوتش خیلی بود. یعنی کسی که از مدرسه‌های مقدماتی کرمان فارغ التحصیل می‌شد، بایستی سال اول را حتماً در بندرعباس می‌گذراند. در آن زمان بندرعباس مرکز بسیار آلوده‌ای بود و کسی که یکسال آنجا می‌رفت با دو بیماری برمی‌گشت. یکی مالاریا که بدون تردید به آن مبتلا می‌شد، و بیماری دوم که بدتر از آن بود نوعی بیماری پوستی بود که در کرمان به آن پیوک می‌گفتند. در این بیماری زیر پوست پا کرم‌هایی ظاهر می‌شد و بعضی افراد این را تا آخر عمر با خود داشتند و بسیار بیماری موذی و ناراحت کننده‌ای بود. خب، شاگرد اول و دوم شدن و به تهران آمدن و با خرج دولت تحصیل کردن یک طرف کار بود و رفتن به بندرعباس و با بیماری برگشتن طرف دیگر کار، و این باعث رقابت شده بود. بهرحال، من به تهران آمدم. ولی ما در دانشسرای مقدماتی خیلی ریاضی نخوانده بودیم. برای مثال من اصلاً مثلثات نخوانده بودم.

در دانشگاه تهران یا دقیقتر بگویم دانشسرای عالی آن زمان، کلاس هایی به اسم کلاس های مقدماتی دایر کرده بودند که در آن کلاس ها دروس چهارم، پنجم و ششم دبیرستان را در یک سال بخوانیم و بعد وارد دانشگاه شویم. حقیقت این است که من به رشتهٔ ادبی علاقمند بودم و یک ماه هم به کلاس ادبی رفتم. مجموعاً در حدود ۳۲۰ نفر از همهٔ شهرستانها آمده بودند که قریب ۳۰۰ نفر آنها در رشتهٔ ادبی بودند. این کلاس ها در دانشکدهٔ ادبیات تشکیل می‌شد من ظرف یک ماه دیدم که تقریباً هیچ استفاده‌ای از این کلاس ۳۰۰ نفری نمی‌توانم بکنم. با همهٔ علاقه‌ای که به ادبیات، و به خصوص به

تاریخ و فلسفه، داشتم و هنوز هم دارم، فکر کردم بهتر است این را خودم دنبالش بروم و کلاسی بیابم که بتوانم از آن استفاده کنم. عکس العمل این وضع آن بود که بگردم و کوچکترین کلاس را پیدا کنم. کلاس ریاضی آن موقع شش شاگرد داشت که با من شدند هفت نفر. یکی از دوستانمان بعد از دو سه ماه رها کرد و رفت و شش نفر ماندیم.

بعد از ششم ریاضی هم تصور من این بود که بهتر است دانشکده فنی بروم ولی به من اجازه ندادند و گفتند که چون دانشسرای مقدماتی را تمام کرده‌ای و اینجا هم تحت الحمایهٔ دولت هستید باید رشتهٔ معلمی را انتخاب کنید. معلمی جدا از دانشکدهٔ علوم یا ادبیات نبود. ما بایستی در دانشکدهٔ علوم درس می‌خواندیم و بعد برای خواندن درس های مربوط به رشتهٔ تدریس به دانشکدهٔ ادبیات می‌رفتیم. در دانشکدهٔ ادبیات، استادانی چون دکتر هوشیار و دکتر سپهری بودند که در آن زمینه تدریس می‌کردند و در نتیجه به ما دو لیسانس هم دادند، لیسانس دانشکدهٔ علوم و لیسانس دانشسرای عالی. من وارد رشتهٔ ریاضی شدم. به علت وضع زندگی‌ای که در تهران داشتم و خیلی مناسب نبود و اینکه دولت هم به تمام وعده‌هایش در مورد تأمین مخارج ما وفا نکرد، ناچار بودم کار کنم و زندگی خودم، مادر، و برادرانم را هم کم و بیش اداره کنم. برای پیدا کردن کار دچار مشکل شدم و به این نتیجه رسیدم که باید با تدریس مشکل مالی خودم را حل کنم. از این رو در آموزشگاه‌های شبانه تهران درس می‌دادم. در خیابان جمهوری فعلی، آموزشگاهی به نام آموزشگاه ایرانشهر بود که کلاس‌های آن به صورت شبانه‌روزی دایر می‌شد. یعنی صبح و بعدازظهر و شب کلاس داشت، کلاس های کوچک و بزرگ و انواع کلاس ها، و من هم، هر درسی پیشنهاد می‌دادند می‌پذیرفتم. البته بیشتر ریاضی درس می‌دادم. یکی از دروسی که من در آنجا تدریس آن را پذیرفتم، درس مثلثات چهارم نظام قدیم بود.

من در آن زمان هنوز وارد دانشکدهٔ علوم نشده بودم و هنوز داشتیم کلاس های مقدماتی را طی می‌کردیم. مثلثات چهارم نظام قدیم، درس کم و بیش مفصلی بود. البته در چهارم درس ها اختصاصی نبود اما این درس، مستقل و نسبتاً مفصل بود. من اصلاً مثلثات نمی‌دانستم؛ چون قبلاً نخوانده بودم. از این رو برای این که مثلثات را یاد بگیرم به فکر افتادم کتاب‌هایی تهیه کنم. شاید باور نکنید، وقتی که شنیدم کتابی را آقای ارشمید به اتفاق مرحوم دکتر مصاحب نوشته‌اند و آن را در تهران نیافتم و شنیدم که یک کتابفروشی در خیابان زندشیراز آن را دارد، با همهٔ مشکلات مالی‌ای که داشتم سفری به شیراز کردم و بالاخره آن کتاب را در کتابفروشی معرفت شیراز به همراه چند کتاب دیگر تهیه کردم. در آن زمان نه کتاب‌های فارسی و نه اصلاً نشریه‌ای ریاضی وجود داشت. کتاب‌های خارجی هم به اینجا نمی‌آمد، اگرچه ما با زبانهای خارجی هم آشنایی نداشتیم. من به هرحال آن

کلاس مثلثات را گذراندم و گمان نمی‌کنم کسی خاطرهٔ بدی از آن کلاس داشته باشد.

در هر صورت در آن زمان کتاب‌های خوبی نداشتیم و منابع موجود نیز توضیحات کافی نداشت و یک معلم ناچار بود در بعضی زمینه‌ها خودش مطلب را کشف کند و این برای کسی‌که از شهرستان، آن هم با پایهٔ ریاضی ضعیف، آمده بود، کار بسیار دشواری بود. یادم می‌آید گاه این طور می‌شد که صبح باید سر کلاس درس می‌دادم، و شب نشسته بودم که مقداری از تمرینات را حل کنم و مقداری نیز درس فردا را آماده کنم. به جایی می‌رسیدم که نمی‌فهمیدم. به این کتاب و آن کتاب (دو یا سه کتابی که وجود داشت) مراجعه می‌کردم، مسئله حل نمی‌شد. شب به نیمه می‌رسید. خسته و عصبانی کتاب ها را کنار می‌انداختم و می‌رفتم استراحت کنم. باز یادم می‌آمد که این را باید سر کلاس درس بدهم. دوباره سراغ کتاب ها برمی‌گشتم. گاهی اوقات بعد از اینکه مشکلات خود را حل می‌کردم دیگر صبح شده بود و بایستی دست و رویم را می‌شستم و با عجله صبحانه می‌خوردم تا به کلاس برسم.

از همان موقع من احساس کردم که برای کسانی که دوست دارند (به هر دلیلی) ریاضیات را یاد بگیرند باید کاری انجام داد. البته عامل دیگری نیز موجب حرکت من شد. من در سال ۱۳۳۲ بالاخره لیسانس ریاضی را گرفتم. در خرداد ۱۳۳۲ برای تدریس به شیراز منتقل شدم. یک بار موفق شدم در حیاط دانشسرای عالی آن روز در تهران، با یکی از مؤلفین دورهٔ کتاب های درسی ملاقات کنم. وضع مالی من بد بود و قدرت خرید یک سری از آن کتاب ها را نداشتم. در آن زمان رسم بود کسی را که تازه به استخدام دولت درآمده بود در اسفند همان سال استخدام و یا فروردین سال بعد حقوقش را می‌دادند. از ایشان خواهش کردم که یک دوره از آن کتاب ها را به من لطف کند و من بعداً پولش را به او بپردازم، و گفتم تابستان دیگر که به تهران آمدم پول کتاب ها را به او خواهم داد. با تحقیر بسیار با من برخورد کرد و گفت «اگر قرار باشد به هر کسی که به من مراجعه می‌کند یک دوره کتاب بدهم باید تمام درآمدم را به این و آن ببخشم.» خیلی به من برخورد. الان آن شخص یکی از دوستان صمیمی من است، گاهی به او این خاطره را یادآوری می‌کنم و با همدیگر می‌خندیم. ولی این رفتار برمن چنان اثر گذاشت که با خودم عهد کردم، آنقدر کتاب ریاضی تهیه کنم و در بازار تهران بریزم و هر کس به من مراجعه کرد به او بدهم که دیگر این عقده برای کسی به وجود نیاید. البته احتمالاً عوامل دیگری نیز بوده است. من دو خاطرهٔ جدی را که به طور طبیعی در من اثر گذاشته بود، عرض کردم.

جنگ ریاضی. در آن زمان، برای این که شما چه رشته‌ای را ادامه دهید هیچ منع قانونی وجود نداشت؟ چون فرمودید که برای ریاضی آمده بودید بعد سر کلاس ادبیات رفتید!

شهریاری. خیر، درواقع ما نه ادبیات می‌دانستیم، و نه ریاضی، و نه چیز دیگر. کلاس مقدماتی را به جای دورهٔ دوم متوسطه گذاشته بودند.

جنگ ریاضی. شما به ترجمه، تدوین و تألیف کتب اشاره فرمودید. شما کتب زیادی عرضه کرده‌اید که همهٔ علاقمندان ریاضیات با آنها آشنا هستند. در مورد اینها به صورت تاریخچه‌ای، توضیحاتی بدهید. در صورت امکان آنها را دسته بندی کرده و توضیح دهید شروع این کارها به چه نحوی بوده است.

شهریاری. با کمال میل. اولین کاری که من کردم با مرحوم رمضانی صاحب انتشارات کُلالهٔ خاور بود، و خوب است از ایشان که مردی بسیار شریف و عاشق کتاب بود، یادی بکنیم. هیچ گاه فراموش نمی‌کنم‌که ایشان هر پنجشنبه درخانه های جنوب شهر می‌گشت وکتابهای قدیمی وخطی وغیره را خریداری می کرد.برای یافتن کتاب حتی به شهرستان ها هم سفر می‌کرد.او در اواخر عمر شریفش مجموعه ای بسیار نفیس ازکتب قدیمی و خطی‌را با سرمایهٔ خودخریداری نموده و به صورت جلد شده به کتابخانهٔمرحوم آیت ا...مرعشی نجفی،در قم،هدیه نمود.ایشان از سال های قبل از مشروطیت[1] تا زمانی که زنده بود،تمام شب نامه هارا از تمام فرقه های مختلف وبه طورکامل جمع کرده بود.مجموعه ای بسیار جالب که برای هر مورخی می‌تواند یک منبع بسیار غنی باشدوتصور نمی‌کنم که چنین چیزی دردنیا نظیرداشته باشد.

من دیدم که ایشان دو،سه گونی از نامه های خصوصی وسیاسی آن زمان را جمع‌آوری کرده بود.طریقه آشنایی من با ایشان به این صورت بود که برای خرید کتب قدیمی به کتابفروشی ایشان مراجعه می‌کردم.چون از مغازه هایی بود که کتاب های قدیمی داشت به عنوان مثال من توانستم دوره کامل مجله *ریاضیات عالی و مقدماتی* را که در سال ۱۳۱۱مرحوم مصاحب منتشر می‌کرد و یک مجله ریاضی دیگر که مرحوم هورفر و دو نفر دیگر منتشر می‌کردند، از کتاب فروشی ایشان تهیه کنم. در آن زمان،نمی‌دانم مصوب مجلس بود یا دستور دولت،پیشنهاد شد که کتاب های درسی لازم نیست انحصاری ومتعلق به دولت باشد و هرمؤلفی می تواند کتاب های درسی تهیه کند.

---

[1] ۱۲۸۵ هـ.ش.

نزدیک به هفت یا هشت نوع کتاب درسی ریاضی در تهران منتشر شده بود و هرکدام چند مؤلف داشتند.برخی از اینها بسیار خوب بود.بعضی متوسط و بعضی هم بد بود؛ ولی یک وجه مشترک داشتند و آن این که نسبت به قیمتهای آن روز گران بودند. آن کتاب ها،پنج،شش وبعضی هفت تومان قیمت گذاری شده بودند.مرحوم رمضانی به من پیشنهاد کردکه برای دورهٔ اول متوسطه،یعنی سالهای اول و دوم و سوم دبیرستان ،مطالبی بنویسم.او گفت که تو حق التألیف نخواه، من هم از سود صرف نظر می‌کنم.من هم قبول کردم. دو کتاب حساب برای اول و سوم، دو کتاب جبر برای دوم وسوم وسه کتاب هندسه برای اول و دوم و سوم لازم بود ،که روی هم هفت کتاب می‌شد. من به تدریج این کتاب‌ها را تهیه می‌کردم و او چاپ می‌کرد. کتاب‌ها از نظر تعداد صفحات کم وبیش هم ارز با کتاب های دیگر بود ولی همه آنها را ده ریال قیمت گذاشت. آن کتاب ها خیلی مورد استقبال قرار گرفت. البته کتاب‌هادر طی سه یا چهار سال،به تدریج منتشر شدند.همچنین برای نوشتن و خطاطی یکی دوتا از آنها از مرحوم شاه میری استفاده کرده بود.درآن زمان حروف‌چینی فرمولی کار بسیار مشکلی بود ودر تهران به طور وسیع مورد استفاده قرار نمی‌گرفت.

جنگ ریاضی. شروع این کار از چه سالی بود؟

شهریاری. اگر اشتباه نکنم از سال ۱۳۲۷. این هفت جلد کتاب درآمد و مورد استقبال دانش آموزان قرار گرفت. ولی متأسفانه معلمین استقبال زیادی نمی‌کردند. در فاصله‌ای که آن کتاب‌ها را تهیه می‌کردم یک ترجمه از زبان فرانسوی انجام دادم. داستان این بود که یکی از کتاب‌فروشی‌ها مجموعهٔ «*چه میدانم؟*» را از فرانسوی به فارسی ترجمه و چاپ می‌کرد.آقای جعفری که بعدها صاحب انتشارات امیر کبیر شد، شاگرد آن مؤسسه بود و بعد از آن کتاب‌فروشی جدا شد و برای خودش مکانی را در خیابان ناصر خسرو به عنوان مرکز نشر دایر کرد. ایشان در همان آموزشگاه ایرانشهر، که عرض کردم، درس می‌داد. شبی به من مراجعه کرد و گفت «من می‌خواهم این مجموعهٔ «چه می‌دانم؟» را ادامه بدهم. یکی از کتاب ها را اگر می‌توانی ترجمه کن.» من رفتم وکتاب «تاریخ حساب» را پیدا کردم و برای ایشان ترجمه نمودم،که در سال ۱۳۲۹چاپ شد.

بعدها در سال ۱۳۳۶ که در آموزشگاه شبانه‌ای درس می‌دادم،با چند نفر از معلمان ریاضی آشنا شدم و آنها به من پیشنهاد کردند که با هم یک دوره کتاب ریاضی از اول متوسطه تا پایان دبیرستان تهیه کنیم. پنج نفر بودیم و با هم شروع کردیم. قرار شد که

همان هفت کتابی که قبلاً به عنوان کتاب‌های دوره اول (سه ساله اول) دبیرستان تهیه و چاپ کرده بودم به عنوان کتاب‌های دوره اول دبیرستان باشد که در این چاپ اخیرش اسم هر پنج نفر گذاشته شده بود.بعد کتاب‌های دوره دوم دبیرستان را هم شروع کردیم. این در واقع کار دوم من بود که انجام می‌دادم.اما بعد از آن من به این نتیجه رسیدم که کار کتاب درسی و کتاب‌های مسئله به تنهایی نمی‌تواند مشکل‌گشای ریاضیات کشور باشد.اگر دانش آموزی در مدرسه مشکلی پیدا کند و علاقمند به حل آن باشد به هرحال در جایی راه حلش را پیدا می‌کند.خود مسئله را هم به هرحال معلمین سرکلاس می‌دهند و هم خودش می‌تواند چیزهایی پیدا کند. آن چیزی که مهم است پیدا کردن یک درک ریاضی است و این چیزی بود که احساس می‌کردم اصلاً کسی در این مملکت دنبالش نیست.

اولین کتابی که در این زمینه پیدا کردم وبا شوق والبته با اندکی سختی توانستم از عهده‌اش برآیم کتاب «*ریاضیات،محتوی، روش واهمیت آن*» بود که یک کتاب سه جلدی است. این کتاب به نظر من می‌توانست در آن زمان، و هنوز هم، کتاب بسیار جالبی باشد، زیرا این کتاب را یک هیأت سی نفری در انستیتوی ریاضی دانشگاه مسکو تهیه کرده اند. هدف آنها این بوده که کتاب به گونه‌ای تنظیم شود که شامل فلسفه ریاضی،اندکی تاریخ ریاضی و خود ریاضی باشد، به طوری که بتواند هم مورد استفاده کسانی واقع شود که فقط ریاضیات مقدماتی را می‌دانند و هم راهگشای کسی باشد که به کارهای تحقیقاتی در ریاضیات می‌پردازد. در واقع یک کار سهل و ممتنع بود؛ و به اعتقاد من از عهده‌اش برآمده بودند. دوبخش کتاب را بعد از تقسیم بندی به عهده یک یا دو نفر از متخصصین گذاشته بودند. مثلاً قسمت نظریهٔ احتمال را کولموگوروف که ریاضیدان بسیار بزرگی است تهیه کرده بود. این کتاب در ابتدا به طور محدود چاپ شد و آن را برای ریاضیدانان کشور خودشان و کشورهای دیگر فرستادند؛ از آنها نظر خواستند و کتاب را اصلاح کردند و مجدداً چاپ شد.

من فکر کردم این می‌تواند کتاب جالبی باشد.اولین بار دو فصل اول کتاب را که فصل اولش دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی بود،با عنوان خودکتاب، «*ماهیت ریاضیات*» و فصل دوم آن را که در رابطه با آنالیز ریاضی بود ترجمه کردم و به صورت یک کتاب کوچک که در حدود دویست صفحه بود منتشر شد. اصل کتاب بیست فصل بود. در سالهای بعد، جلد اولش کامل، و بعد جلد دومش کامل چاپ شد. جلد سوم آن نیز آماده چاپ است ولی متأسفانه هنوز ناشری برای چاپش پیدا نکرده‌ام، چون کسانی که جلد اول و دومش را چاپ کرده بودند از این بابت سود زیادی نبردند. من تصور می‌کنم هنوز هم این مجموعهٔ

سه جلدی می‌تواند برای هر علاقمند ریاضیات کتاب جالبی باشد. به هرحال این اولین کاری بود که مطابق میلم بود.

من این کتاب را از متن روسی ترجمه کرده بودم.البته این را باید عرض کنم که برای یاد گرفتن زبان روسی متأسفانه امکان رفتن به هیچ کلاسی را نداشتم وروسی را پیش خودم یاد گرفتم. من در سال ۱۳۳۶ وبخشی از ۱۳۳۷ در قزل قلعه، زندان بودم. من نه ماه تمام روزی ۱۵تا۱۸ ساعت متوالی مطالعه می‌کردم و به این ترتیب روسی را آموختم. از آن به بعد به استثنای چند مورد، مثل کتاب *«اعداد اول»* که اثر امیل بورل است، و یکی دو کتاب کوچک دیگر، بقیه کتاب‌ها را مستقیماً از زبان روسی ترجمه کردم. از ریاضیدان معروف لهستان،سرپینسکی، دو کتاب ترجمه کردم ولی از ترجمه روسی آن کتاب‌ها استفاده کردم. از ریاضیدان معروف مجارستان، روزا پتر، کتاب *«بازی با بی‌نهایت»* را ترجمه کردم که باز هم از ترجمه روسی آن کتاب استفاده کردم. کار ترجمه و تألیف کتاب در این سالها برای من مسائل خوشایند و همچنین ناخوشایند، داشته است.

تمام زندگی من از راه کتاب‌خوانی می‌گذشت و اکنون هم همین طور است. این اواخر ناچار بوده‌ام تسلیم نظرهایی بشوم که کتاب بتواند بیشتر فروش داشته باشد و هم ناشر را راضی کند و هم خودم را. اگرچه این نوع کتاب‌ها می‌تواند مفید باشد، اما چیزی نیست که من می‌خواهم. منظور من کتاب‌هایی است که مربوط به مسئله است. کتاب هایی مربوط به مسائل المپیاد در کشورهای مختلف یا مسئله های کنکور در کشورهای مختلف وغیره. اینها را بیشتر برای اینکه زندگی‌ام بگذرد انجام داده‌ام. البته به خودی خود از هیچکدامشان بدم نمی‌آید. ولی آن چیزی نیستند که من دلم می‌خواهد. من بیشتر دنبال کتاب‌هایی بودم و هستم که بتواند درک ریاضی را گسترش دهد. ولی متأسفانه این نوع کتاب‌ها را باید همیشه دست بگیرم واینجا وآنجا بروم تا تصادفاً به ناشری،احتمالاً ناآگاه،که نمی‌داند چه کتابی فروش دارد و چه کتابی ندارد، برخورد کنم. این خلاصه‌ای بود از آنچه که در مورد ترجمه یا تألیف کتاب خواسته بودید.

جنگ ریاضی. با توجه به اینکه مدتهاست ما نقشی در پیشرفت اغلب قسمتهای ریاضیات نداشته‌ایم و از طرفی هرروز مفاهیم جدیدی وارد ریاضیات می‌شود، لذا واژه سازی نقش مهمی در ترجمه ایفا می‌کند و از این نظر که شما در گذشته و حال از علاقمندان ادبیات بوده‌اید،می‌خواستم نظر شما را در ارتباط با دشواری ترجمه و مسائلی که ذکر آن آمد، بدانم.

شهریاری. بله.این یکی از مشکلات اساسی ترجمه است. به اعتقاد من زبان پارسی آن

قابلیت را که بتوان هر کتاب علمی را به این زبان ترجمه کرد، دارد. اگر جایی درماندگی احساس می‌شود، بیشتر مربوط به مترجم است نه زبان پارسی. من هرگز تحصیلاتی در ارتباط با ادبیات پارسی و زبان شناسی نداشته‌ام. فقط در اثر نیازی که در زمینهٔ ترجمه یا تألیف داشته‌ام مجبور بوده‌ام که به کتب و افراد با صلاحیت زیادی مراجعه کنم. در اثر این مراجعات مکرر به کتاب‌ها و افراد باصلاحیت به چند نتیجه رسیده‌ام. یکی این که ما واژه‌هایی را که قرن‌ها در زبان فارسی زندگی کرده‌اند، غیر فارسی ندانیم. یعنی فرض بفرمایید اگر ما می‌گوییم **تابع متناوب** ، کلمهٔ **تابع** فارسی نیست. ولی این واژه‌ها قرن‌ها در زبان فارسی زندگی کرده‌اند و دیگر فارسی شده‌اند. واژه های بسیاری است که اگر شما آنها را به عرب‌زبانها بگویید، به آن نحو که ما تلفظ می‌کنیم، اصلاً نمی‌فهمند؛ هرچند خود کلمات عربی باشند. این تلاش که همهٔ اینها را به واژه‌هایی که با فارسی سره ارتباط داشته‌باشند تبدیل کنیم، به نظر من غیرممکن است. در زبان فارسی، امروزه کمتر کسی می‌گوید «منصف الزاویه». همه می‌گویند «نیمساز»؛ برای اینکه واژه قشنگی است. اما کمتر کسی می‌گوید «پرهون»، بلکه همه می‌گویند «دایره»؛ چون واژه «پرهون» درست ومناسب انتخاب نشده بود. اگرچه در زبان فارسی پهلوی «پرهون» یعنی «گرد».

بعد از بیش از هزار سال که زبان عربی نفوذ کامل در زبان فارسی داشته است، من معتقدم بعضی از جنبه های زبان عربی را هنوز مردم ایران نپذیرفته‌اند. یکی از آن جنبه‌ها جمع عربی است. اگر دقت بفرمایید در مکالمات روزانه، اغلب مردم، جمع عربی را که به کار می‌برند باز آخرش یک «ها» یا «ان» می‌گذارند. چه لزومی دارد بگوییم «دوایر»، می‌گوییم «دایره‌ها»؛ یا به جای «اعداد» می‌گوییم «عددها». دوم اینکه ما پیشوندها و پسوندها را با توجه به زبان خود به اسامی بیفزاییم. «یون» یک واژهٔ بین‌المللی است که اگر آن را بخواهیم معنی کنیم، بی‌معنی است. ولی بهتر است مثلاً «یونیزاسیون» را به کار نبریم. چون در این صورت کسی که با زبان انگلیسی آشنا است، می‌گوید «یونیزیشن»، من هم که از روسی ترجمه می‌کنم باید بگویم «یونیزاتسیا». خوب حالا تکلیف خواننده چیست؟ می‌بینیم که در همهٔ زبانهای خارجی یون را به کار می‌برند ولی هنگام افزودن پسوند، از زبان خود استفاده می کنند.

اگر شاعری به نظرش رسیده که مثلاً از «رقص» یا «طلب» فعل بسازد و در شعرش به‌کاربرد، «طلبیدن»و«رقصیدن» گفته، که ادبای ما آن را فعل ناسالم،یا نادرست گفته‌اند. مردم هم می‌گویند من از تو طلبیدم. حالا اگر قرار است به خاطر ضرورت شعر چنین فعل هایی بسازیم، واژه سازی برای علم که ضرورتش بیشتر است.حال ما می‌توانیم یونیزاسیون را بگوییم «یونِش»؛ یعنی پسوند فارسی برایش به کاربریم. برای این منظور باید

اندکی زبان فارسی را بلد باشیم. نکته دیگر این که ما با بعضی از واژه‌ها سروکار داریم که اسم است، مانند تلفن، رادیو، تلویزیون وغیره. هرچه هم تلاش بکنیم این ها را نمی‌توان عوض کرد. شاید اگر آن زمان که تلویزیون وارد کشور شد نامی برایش می‌گذاشتیم جا می‌افتاد، ولی حالا دیگر نمی‌شود.

البته اگر «تکنیک» را به فارسی بخواهیم ترجمه کنیم، بسته به موقعیت معنی‌های گوناگونی دارد. در جایی می‌گوییم «تکنیک کار من این است» یعنی «روش کار من این است.» جایی ممکن است بگوییم «فلان کشور تکنیکی است» که منظور این است که آن کشور صنعتی است. منظورم این است که تلاش نکنیم به‌جای «تکنیک» یک واژه پیدا کنیم که هرجا کلمهٔ «تکنیک» آمد آن را به کاربریم. باید سعی کنیم مفهوم را برسانیم. تلاش برای پاک کردن زبان فارسی از عربی و زبان فرنگی کاری عبث و بیهوده است، ولی ما باید هنگام نوشتن دستور زبان فارسی را به‌کار بریم. حال اگر خیلی می‌خواهیم اصول را رعایت کنیم، می‌توان در پاورقی معادل لاتین آن را نیز آورد.

جنگ ریاضی. فکر می‌کنم که بهتر است حالا به آموزش ریاضیات بپردازیم که بحث مورد علاقهٔ شماست. شما باتوجه به تجربهٔ طولانی تدریس که دارید، فکر می‌کنید سیر آموزش ریاضیات در ایران از ابتدا تا به حال چگونه بوده است؟ این سؤال با توجه به وضع معلمین، دانش آموزان و کتاب‌های درسی مطرح می‌شود. این ها چگونه تغییراتی داشته‌اند؟ کدامشان خوب و کدامشان بد بوده‌است؟

شهریاری. اساساً این بحث چنان بحث گسترده‌ای است که بیشتر کار یک سمینار است تا اینکه یک نفر بتواند همه چیز را روشن سازد. به عنوان طرح بعضی از مطالب آنچه را که به نظرم بیاید بیان می‌کنم. شاید بهتر باشد از آخر شروع کنم، یعنی از زمان حال. حقیقت این است که آموزش ریاضی در شرایط فعلی در دبیرستان وضع اسف‌باری را می‌گذراند. البته اگر دوستان دانشگاهی مرا مورد ملامت قرار ندهند باید بگویم هنوز هم کار درسی (به معنی عام خود) در دبیرستان از دانشگاه جدی‌تر درنظر گرفته می‌شود. اگر از استثناها بگذریم، هم دانش آموز وهم معلم بیشتر به کار منظم درسی گرایش دارند، تا در دانشگاه. حالا خود دبیرستان دارد از هم پاشیده می‌شود. شاید یکی از دلایل گره این مسئله، کنکور باشد.

خانواده‌ها و خود دانش‌آموزان، حتی از سالهایی که به دورهٔ راهنمایی وارد می‌شوند، نگران این هستند که چگونه در کنکور موفق شوند. یک مسابقهٔ بسیار دشوار که در آن

بیش از یک میلیون داوطلب وجود دارد، و از بین آنها شصت هزار نفر موفق می‌شوند. این مسابقه، مسابقهٔ کوچکی نیست و هرکس دوست دارد در آن موفق باشد. در نتیجه کار معلم علاقمند به ریاضی، سرکلاس، بسیار دشوار بشود. اگر شما بخواهید سرکلاس در ارتباط با تاریخچه و ماهیت یک درس ده دقیقه صحبت کنید، اعتراض همهٔ دانش آموزان بلند می‌شود که این به درد کنکور نمی‌خورد. دانش آموز سرکلاس از شما تست می‌خواهد؛ دانش‌آموز از شما راه تست زدن را می‌خواهد یاد بگیرد.دانش آموز از شما استدلال نمی‌خواهد، بلکه کلک های حل مسئله یا پیداکردن جواب را می‌خواهد. و این نه تنها برای کنکور، بلکه برای امتحانات نهایی نیز هست.

من این اواخر تقریباً هرگز سال چهارم را برای تدریس قبول نمی‌کنم. چون در این کلاس دانش آموزان آن قدر نگران امتحان نهایی و کنکور هستند که اصلاً یک کلمه جز دربارهٔ تست و نظیر آن نمی‌توان با ایشان صحبت کرد. من حداکثر تدریس سال سوم را قبول می‌کنم، که هنوز اندکی آرام‌تر هستند، ولی آنها نیز آدم را تحت فشار قرار می‌دهند. من در بین دوستان همکارم در دبیرستان زیاد سراغ دارم که به این خاطر ناچار شده اند خود را باشرایط دانش آموزان وفق دهند. هر دانش آموزی که وارد خانه می‌شود همراهش چند پلی‌کپی است. این پلی‌کپی‌ها شامل تست هستند. کسانی که امکان مالی دارند،هر کدام چند معلم خصوصی دارند. این معلمان خصوصی،نه ریاضی بلکه شیوه های تست زدن را به بچه‌ها یاد می‌دهند.

روزی با دانش آموزی که در امتحان کنکور موفق شده بود و به رشتهٔ ریاضی آمده بود صحبت می‌کردم؛ فهمیدم که اصلاً ریاضی نمی‌داند، اما در کنکور موفق شده بود که تست های ریاضی را جواب دهد! از او پرسیدم «چطور چنین چیزی ممکن است؟» توضیح داد که «من دو معلم خصوصی ریاضی داشتم که از سال دوم دبیرستان با من هفته‌ای یک روز کار می‌کردند و روش تست زدن را همراه درسی که می‌خواندیم به من یاد می‌دادند.» اگر از این فرد می‌پرسیدید که «اصلاً مشتق چیست؟» نمی‌دانست و اگر از او می‌پرسیدید «وقتی صحبت از ماکزیمم و می‌نیمم می‌کنیم ، منظورمان چیست؟» نمی‌دانست.اگر شما از فردی که دیپلم ریاضی گرفته است،بپرسید مثلاً «$5a^2$ اسمش چیست؟» به هر حال جمله ای می‌گوید که احتمالاً نامفهوم است. از دانش‌آموز بپرسید x بزرگتر است یا $|x|$، و ببینید چه جوابی به شما می‌دهد.تجربه به من ثابت کرده است که خیلی از دانش آموزان ریاضی نمی‌دانند، اما راه حل کوتاه شدهٔ مسئله و یا راه تست زدن را می‌دانند، واین برای ریاضی فاجعه است. اگر مجله های ریاضی‌ای که در تهران منتشر می‌شوند پر از تست های ریاضی باشند، داوطلب زیاد دارند، اما اگر مجله‌ای به

ماهیت ریاضی، به تاریخ ریاضی، به بحث‌های علمی در این زمینه و تلاش در راه ایجاد درک ریاضی پرداخته باشد کسی به دنبال آن نمی‌رود.

بچه‌ها گناهی ندارند، آنها در التهاب امتحان هستند و باید برای این مشکل فکری کرد.البته راه‌حلی به نظر خودم رسیده بود. اخیراً زمانی که می‌خواستند برنامه های دبیرستانی را تغییر دهند، که حالا به صورت آزمایشی در بعضی دبیرستانها به صورت واحدی درآمده است، من پیشنهاد دیگری دادم و معتقدم که آن پیشنهاد اگرچه وقت بیشتر و احتمالاً سرمایه گذاری بیشتر می‌خواهد، ولی منطقی‌تر است و دشواری کنکور را نیز حل می‌کند. پیشنهاد من این بود که بیاییم ببینیم یک نفر دیپلم (دیپلمهٔ اقتصاد، علوم تجربی و غیره) اگر نخواهد ادامهٔ تحصیل بدهد و دنبال کار دیگری برود، در جهان امروز، چه چیزهایی نیاز دارد بداند، و برآن اساس دروس ریاضی، فیزیک و ادبیات و غیره را برنامه ریزی کنیم.

دانش آموزانی که می‌خواهند دیپلم بگیرند، می‌روند به این رشته و راهنمایی تحصیلی هم نمی‌خواهند. یک دورهٔ پنج ساله،به عنوان دورهٔ دبیرستان، بعد از دورهٔ ابتدایی، می‌توان گذاشت که کلاس‌های آن در صبح متمرکز شوند و همهٔ این برنامه را در ۴ ساعت صبح می‌خوانند و ۱۱/۵همه آزاد می‌شوند. اما برای بعدازظهرها، کسانی که می‌خواهند ادامهٔ تحصیل بدهند در انجمن های علمی شرکت می‌کنند. اگر کسی در سال اول دبیرستان، انجمن ریاضی را انتخاب می‌کند حضور او در این انجمن آزمایشی است و می‌تواند بعد از مدتی انجمن را عوض کند. اما دیگر از سال دوم موضوع جدی می‌شود که ورود به دانشگاه مستلزم این است که مثلاً اگر می‌خواهد به رشتهٔ ریاضی یا رشته‌ای که به طورجدی به ریاضی مربوط می‌شود، برود، باید نه تنها دیپلمه باشد بلکه انجمن چهارسالهٔ ریاضی را نیز با موفقیت طی کرده باشد. زیرا ممکن است کسی دیپلم را تمام کرده‌باشد ولی هنوز سال دوم انجمن ریاضی باشد. او باید صبر کند تا انجمن ریاضی را تمام کند، و بعد وارد دانشگاه شود.

البته اگر برنامهٔ دیگری هم در کنار این برنامه برای دانش آموزان درنظر بگیریم خوب است. در کلاس‌های عمومی صبح حتماً کسانی هستند که مثلاً ریاضی آنها ضعیف است. به هریک از دانش‌آموزانی که در انجمن ریاضی شرکت کرده‌اند بگوییم «درآخر سال نمرهٔ کل تو بر اساس دو نمره حساب می‌شود؛ یکی نمرهٔ امتحانی خودت و دیگری معدل نمرات ریاضی دو نفر از دانش‌آموزان کلاس‌های عمومی.» به این ترتیب دانش‌آموزان هم کار دسته‌جمعی و به فکر دیگران بودن را می‌آموزند و هم مطالب درسی خود را. تجربه نشان داده است که آدم در تدریس بهتر می‌آموزد تا در دانش‌آموزی. خوب دانش‌آموزی که

انجمن ریاضی را با این برنامه‌ها تمام کرده و دیپلمه هم شده‌است، می‌توانند به ریاضی یا رشته‌ای که به طور جدی به ریاضی مربوط است، برود. اگر تعداد چنین افرادی اندکی بیشتر از تعداد مورد نیاز دانشگاه‌ها بود، بین آن گروه محدود که می‌خواهند به رشتهٔ ریاضی بروند می‌توان امتحانی برگزار کرد و بهترین‌شان را انتخاب کرد.

من دوست دانش‌آموزی را سراغ دارم که دوسال پیش در المپیاد ریاضی هم شرکت کرده بود. او در امتحان آخر که می‌خواستند از بین عده‌ای خیلی محدود (شش نفر) را انتخاب کنند ناچار بود از قم به تهران بیاید وآن روز بیمار شد و نتوانست بیاید و در نتیجه انتخاب نشد (به نظر من او حتماً موفق می‌شد). او کنکور هم امتحان داد و قبول شد؛ ولی در رشته‌ای غیر از ریاضی.دلش می‌خواست بیاید به رشتهٔ ریاضی و اتفاقاً به دانشکدهٔ علوم اما نشد و در رشتهٔ دیگر قبول شد. یکی، دو ماه هم سر کلاس رفت.به گفتهٔ خانواده‌اش کتاب‌های ریاضی‌اش را برداشته و رفته به یکی از روستاهای اطراف قم و گفته که «من نه دانشگاه می‌خواهم و نه کلاس می‌خواهم، می‌نشینم اینجا و ریاضی می‌خوانم!»من اعتقاد دارم که باید یک بازنگری جدی در مورد وضع کنکورها و امتحان‌ها بشود.

در مورد شیوهٔ امتحان کردن می‌خواستم خاطره‌ای عرض کنم. روزی داشتم در چاپخانه فرم های مربوط به کتاب*«ریاضیات،محتوی،روش و اهمیت آن»* را تصحیح می‌کردم که معلم مشهوری که از دوستان من بود به چاپخانه آمد. او هم کتابی در آن چاپخانه داشت که برای تصحیح فرمهای آن کتاب به آنجا آمده بود. او یکی از فرم های کتاب مرا برداشت و مسئله‌ای که در مورد دستوری برای محاسبهٔ عبارت زیر بود، $۱^k + ۲^k + \cdots + n^k$، انتخاب کرد و یک ساعتی باآن وررفت و نتوانست آن را حل کند.به من گفت: «عجب مسئلهٔ مشکلی ! این چگونه حل می‌شود؟» در قسمت دیگری از آن کتاب به حل مسئله اشاراتی شده بود.من هم مطابق همان اشارات او را راهنمایی کردم. چند روز بعد دیدم پسر همسایهٔ ما که دانش آموز همان معلم مذکور بود، نزد من آمد و گفت : «امروز امتحان جبر داشتیم. معلم مسئله‌ای داده بود که هیچکس حل نکرد.»بعد همان مسئله در مورد $۱^k + ۲^k + \cdots + n^k$را مطرح کرد.

معلم نباید این گونه خودنمایی کند. من با اینکه در امتحانات سؤالاتی داده شود که بچه را به اندیشه وادار کند و ببیند که همیشه فرمول مسئله را حل نمی‌کند و کمی فکر کند موافقم. همین چند روز پیش من در درس جبر سال سوم نظری از دانش آموزان امتحانی گرفتم. دو مسئلهٔ خیلی ساده هم داده بودم که احتیاج به کمی تفکر داشت وهر کدام هم ۲ نمره داشت.یکی این بود که «ثابت کنید که برای هیچ n طبیعی برابری

$۱۳۷۱ = n^۷ + n^۵$ برقرار نیست.» خب، راه حل بسیار ساده است. اگر از $n^۵$ فاکتور بگیریم می‌شود $n^۵(n^۲ + ۱)$. اگر nفرد باشد $n^۲ + ۱$ زوج است و اگر n زوج باشد، $n^۲ + ۱$ فرد است و در هر حال حاصلضرب آن‌هازوج است و نمی‌تواند ۱۳۷۱ باشد. تقریباً هیچ کس آن را حل نکرده بود. وقتی پای تخته آن را حل کردم همه می‌گفتند «عجب!» دلیلش این بود که فکر نکرده‌بودند. دانش آموز سر جلسهٔ امتحان نمی‌تواند کشف انجام دهد، باید ازآنچه آموخته امتحان گرفت. به نظر من یکی از راه های بالا بردن درک ریاضی دانش‌آموز همین امتحانات داخلی است.

اگر «استعداد» را قابلیت یادگیری بدانیم، نمی‌توان کسی را بی‌استعداد نامید. آنچه مهم است این است که «استعداد» را کشف کنیم. افراد را نباید به دو گروه بی‌استعداد و بااستعداد تقسیم کرد، زیرا هیچ‌کس بی‌استعداد نیست. درفراگیری درس‌های عمومی همه باید با هم باشند. در نظام آموزشی شوروی سابق، دوره دبیرستان برای همه اجباری بود. نخبگان ریاضی هم همراه با سایر دانش‌آموزان در کلاس‌های عمومی شرکت می‌کردند، ولی کلاس‌های ویژه‌ای در زمینهٔ ریاضی برای آنها تشکیل می‌شد که بهترین مربی‌ها را برای تدریس در این کلاس‌ها بکار می‌گرفتند.

شوروی سابق در زمینهٔ آموزش ریاضی مربیان بزرگی داشته است.در این میان «یاگلوم» را می‌توان نام برد. او هنوز در قید حیات است و کتاب‌های متعددی در زمینهٔ آموزش ریاضی منتشر کرده است.آثار او هیچ دست‌کمی از آثار پولیا ندارد و در بعضی زمینه‌ها حتی قویتر است. او سال‌ها مسئول المپیادهای داخلی و بین‌المللی ریاضی شوروی سابق بوده است. به نظر من برای پیداکردن شیوه‌های نوین در زمینهٔ آموزش ریاضی، لازم است منابع معتبر جهانی را شناسایی کنیم، آنها را ترجمه نماییم، و بدون جدا کردن از یکدیگر مورد بررسی قرار دهیم. البته باید عده‌ای بنشینند و با هم بحث و تبادل نظر کنند و بر اساس این تجربه های بین‌المللی بهترین راه‌های آموزش ریاضی در ایران را پیدا کنند. این راه‌ها ممکن است هیچ شباهتی به شیوه های فوق الذکر نداشته باشد ولی در عین حال از همهٔ آنها سود جسته‌باشد.

جنگ ریاضی. متأسفانه تاکنون به صورت نمونه برداری بوده‌است.

شهریاری. نمونه برداری در مجموع عیبی ندارد به شرط آن‌که یک بعدی نباشد.تصور این که مثلاً بهترین شیوهٔ آموزشی، شیوهٔ آمریکایی یا شیوهٔ فرانسوی ویا... است،و در تنظیم کتاب‌های درسی و مسائل دیگر،باید آن شیوه‌ها را پیاده کرد،نادرست است. آنچه مسلم

است، زمینهٔ اجتماعی ایران با فرانسه و آمریکا و... یکسان نیست. ممکن است شباهت هایی وجود داشته باشد، ولی نباید ویژگی‌های منحصربه‌فرد اجتماعی را نادیده گرفت. ضمناً باید به خاطر داشت که بسیاری از کشورها هم در کار آموزشی موفق نبوده‌اند. بسیاری از این‌که نتوانسته‌اند استعدادها را برجسته کنند، شکایت دارند.

تقریباً سه، چهار ماه پیش، در مجلسی بودم که دو نفر معلم ریاضی فرانسوی هم آنجا بودند. من با آنها در مورد آموزش ریاضی صحبت می‌کردم. آنها بسیار گله‌مند بودند، و این گله‌مندی بیشتر از دولتشان بود. مثالی می‌زدند که وقتی «کولموگوروف» فوت نمود، صفحهٔ اول روزنامهٔ «پرااودا» عکس او را چاپ کرد و شمارهٔ مخصوصی را به او اختصاص داد. در حالی که اگر ریاضیدانی در فرانسه فوت کند، این خبر به صورت یک متن سه، چهارخطی در گوشه‌ای از صفحهٔ اخبار داخلی درج می‌شود. منظور این است که نمونه برداری اساساً گناه نیست، ولی وقتی خود آنها نسبت به شیوهٔ کار مملکت خودشان گله مند هستند، نمونه‌برداری باید با دقت دوچندان همراه باشد. به هرحال، مملکت ما، زمینه‌های اجتماعی، آموزشی و سنتی متمایز از جوامع دیگر دارد. لازم است از شیوهٔ کار دیگران مطلع باشیم، ولی یک شیوهٔ آموزشی منطبق با جامعهٔ خودمان تنظیم کنیم.

جنگ ریاضی. مطلبی که دانستن آن خیلی مهم است، نظر شما دربارهٔ نشریات ریاضی منتشر شده در این چند سال اخیر است. همچنین دربارهٔ خاطرات آموزنده و مهم خود در راه نشر مجله *آشتی با ریاضیات* یا *آشنایی با ریاضیات* صحبت بفرمایید.

شهریاری. حقیقت این است که همهٔ خاطراتی که دارم، تلخ است. نخستین نشریهٔ *آشنایی با ریاضیات* با نام *آشتی با ریاضیات*، بهار سال ۱۳۵۶ در آمد. در آن زمان هیچ نشریهٔ ریاضی منتشر نمی شد. البته قبل از آن نشریه‌ای به نام *یکان* منتشر می‌شد، و در همان سال آخرین شماره‌اش منتشر شده و دیگر کارش متوقف شد. بیشتر حجم *یکان* به مسئله اختصاص داشت و دانش آموزان دبیرستانی از آن استفاده می‌کردند. بیشتر نشریه‌های علمی در آن زمان، دچار گرفتاری می‌شدند.

من خاطره‌ای از سال‌های ۱۳۴۰ دارم. در آن سال‌ها، همراه با دکتر پرویز ناتل خانلری، نشریه‌ای به نام *سخن علمی و فنی* را اداره می‌کردم، ایشان صاحب امتیاز بود و من سردبیر نشریه بودم. قرار ما با دکتر ناتل خانلری این بود که مجله را خودم در بیاورم، و ایشان کاری به کار بنده نداشته باشند. دکتر خانلری نیز با گذشت این مسئله را قبول کرده بود و فقط به امور *سخن ادبی* می‌پرداخت. البته مسائل مالی مجله، متوجه سخن

ادبی بود و به قول ایشان، اگر چیزی از *سخن ادبی* می‌ماند، خرج *سخن علمی* می‌شد. زیرا *سخن علمی* معمولاً فروش چندانی نداشت و ضرر می‌کرد. تیراژ ما ۳۰۰۰ نسخه بود که از هر شماره هزار تا (بیش و کم) باقی می‌ماند. به یاد دارم تمام کارهای مجله را خودم انجام می‌دادم. از تهیهٔ مطلب و سراغ مقاله رفتن، تا کار حروف‌چینی و رسیدگی به کار صحافی، همه و همه به عهدهٔ من بود. وقتی مجله آماده می‌شد به مسئولین پخش که در *سخن ادبی* بودند، سپرده می‌شد.

در آن زمان شاید نزدیک به ۳۰ نشریهٔ علمی، چاپ می‌شد اما شاید غیر از *یکان* و *سخن علمی* بقیه، مجله‌های پزشکی و داروسازی بود عموماً مجله‌های پزشکی و داروسازی، محمل تبلیغ برای شرکت های خارجی فروش و پخش دارو بودند. اکثر نمایندگی‌های شرکتهای دارویی خارجی، یک مجله درست می‌کردند، که این مجله پر بود از آگهی‌های رنگی آن شرکت دارو فروشی. سود فروش این مجله‌ها به تمامی به نماینده شرکت می‌رسید. البته در این مجله‌ها چند مقاله هم پیدا می‌شد که جنبهٔ علمی داشته باشد. در این مورد هم خاطره‌ای دارم. آقای مصحفی، مدیر مجلهٔ *یکان* با من تماس گرفتند و گفتند که مرکزی برای کمک به مجله‌های علمی ایجاد شده است. من و آقای مصحفی، در یکی از جلسه‌هایی که در آن مرکز تشکیل می‌شد، شرکت کردیم. در جلسه متوجه شدیم که محور اصلی بحث، تبلیغات است. مجلهٔ *سخن* و *یکان* اصلا آگهی نداشتند، و کلاً کارشان بر معیارهای آگهی نبود. در آن مرکز، همه پزشک بودند یا داروشناس، به من و آقای مصحفی هم «دکتر» می‌گفتند. من مرتباً توضیح می‌دادم که دکتر نیستم، در پاسخ می‌گفتند بلی، آقای «دکتر». نهایتا به این نتیجه رسیدیم که در این جلسه‌ها شرکت نکنیم.

مجلهٔ *سخن علمی* هم‌بعد از هشت سال متوالی که منتشر می‌شد،به خاطر دخالتی که مأمورین امنیتی می‌خواستند داشته باشند، تعطیل شد. من سالها دنبال این بودم که جایی، با پشتوانهٔ یک دستگاه دولتی، بتوانم یک نشریهٔ ریاضی یا یک نشریهٔ علمی منتشر کنم. یادم می‌آید در سال های ۵۵ـ۵۴، من با رئیس یک آکادمی علوم که مرد بسیار فاضلی بود صحبت کردم و پیشنهادم را به او ارائه نمودم.ایشان در جواب گفتند: «ما از این کارها نمی‌توانیم بکنیم.»البته نیم قولی هم به من دادند که به جایی نرسید.به نظر می‌رسید با آن امکانات، بیشتر می‌خواهند«نمایش» بدهند تا این‌که در واقع کاری انجام دهند. بالاخره در «دانشگاه آزاد» (آن زمان)،موافقت انتشار یک مجله را گرفتم.

من آن وقت، در وزارت علوم بودم که بعد به دانشگاه آزاد منتقل شدم. من دو نشریهٔ علمی در آن مرکز درآوردم. این نشریات یکی *آشنایی با دانش* بود که مجموعاًهشت

شماره درآمد و به صورت فصل‌نامه بود.دیگری *آشتی با ریاضیات* بود که اول فصل‌نامه بود ولی در سال دوم، هر دوماه یکی منتشر می‌شد. این مجله را در سال‌های ۵۷_۵۶ درآوردم. در دو سال اول تقریباًاشکالی نداشتیم.تنها اشکال، تحمل غرزدن مسئولین دانشگاه بود.می‌گفتند:«خرج چاپ این نشریات زیاد شده‌است.»با این که هیچ پرسنلی نداشتیم؛فقط من بودم و یک منشی ماشین‌نویس، همهٔ کارها را خودم انجام می‌دادم. تهیهٔ تمام مقاله‌ها به عهدهٔ خودم بود.این وضعیت تا سال ۱۳۵۸ ادامه داشت. در آن زمان دانشگاه دچار دگرگونی‌هایی شد.البته برای من هم گرفتاریهایی پیدا شد. در سال ۵۸، گویا سه شماره و در سال ۵۹ هم سه شماره، با زحمت، درآوردیم.در سال ۵۹ بود که رسماً به ما ابلاغ کردند که این مجله دیگر نباید منتشر شود. زیرا یک مرکز به نام «نشر دانشگاهی» ایجاد شده و این مرکز عهده‌دار تمام این کارها است. من با رئیس مرکز نشر دانشگاهی صحبت کردم. ایشان در پاسخ گفتند:نه، ما اینجا همهٔ کارها را می‌کنیم و به کس دیگری احتیاج نیست.من به ناچار از دانشگاه آزاد هم بیرون آمدم. دیدم حیف است که این نشریه بماند. در واقع از سال چهارم، خودم منتشرش کردم. دو ماه یک‌بار منتشر می‌شد و تیراژ آن حدود ۵۰۰۰ نسخه بود.تمام نسخه‌هایش فروش می‌رفت. جالب است بدانید که در سال های اول انقلاب،آن سالی که شور سیاسی در بین مردم خیلی قوی بود، کتاب های علمی هم فروش بالایی داشت. اما به تدریج این تیراژ پایین آمد. ناچار شدیم ۴۰۰۰ نسخه چاپ کنیم و سپس ۳۰۰۰ نسخه، تا سرانجام رسیدیم به ۲۰۰۰ نسخه.

گرفتاری عمدهٔ من در مورد *آشتی با ریاضیات* (که بعدها ناچارشدم اسمش را *آشنایی با ریاضیات*)، مسئلهٔ پخش بود. معمولاً از شهرستان نامه داشتم که «ما این مجله را می‌خواهیم، اما پیدا نمی‌کنیم.» هیچ مرکز پخشی که به طور منظم مجله را به مراکز مختلف کشور برساند، وجود نداشت. غالباً این مراکز پخش به دنبال کتاب‌هایی می‌گردند، که حداقل بتوانند ۲۵ یا ۳۰ درصد،از فروش آن را مطالبه کنند.قطعاً مجله‌ای که ۱۵تومان قیمت داشت، با ۱۵ریال سود(یعنی ۱۰درصد)، برای مرکز پخش ارزش نداشت. بارها شاهد آن بودم که مراکز پخش، پول مرا بسیار کمتر از میزان تیراژ نشریه‌ام، به من برمی‌گرداندند و وقتی که مراجعه می‌کردم در جواب می‌گفتند : «صرف نمی‌کند، این چیزهای ریز به درد ما نمی‌خورد.» در این اواخر به مراکز دولتی هم متوسل شدم. در ابتدا با روی خوش پذیرفتند. ولی آنها هم کار را کنار گذاشتند.

حقیقت این است که این اواخر به این نتیجه رسیده‌ام که مجلهٔ *آشنایی با ریاضیات* را دیگر تعطیل کنم. البته چون این مجله، ۱۵ سال است که همین طور یکسره، چاپ

می‌شود و تمام وقت و ذهن مرا به خود مشغول داشته، برای من مثل فرزندی شده است که به آن دلبستگی بسیار دارم. با این حال در سال ۱۳۷۱، آخرین شماره را درآوردم. البته کماکان در فکر هستم که «آیا می‌شود راهی برای انتشار مجدد آن پیدا کرد؟» مثلاً شش ماه یک‌بار، یا حتی سالی یک بار. هدفی که من از انتشار این مجله داشتم و دارم، به نوعی پر کردن کمبودهایی در زمینهٔ ریاضی است. به همین خاطر در زیر بار هرگونه فشاری، سعی بر ایستادگی داشتم. فشار بسیار زیاد بود. پیشنهاد می‌شد که برای بالاتر رفتن فروش و استفاده بیشتر، در آخر مجله، «**تست**» چاپ کنیم. یا مسئله‌های سال اول نظری را برای دانش‌آموزان، چاپ کنیم. همهٔ این پیشنهادها، به واقع، می‌توانست به وسعت فروش مجله کمک کند. اما من زیربار نرفتم، زیرا آن چه که باید به دانش‌آموزان یاد داد، در زمینهٔ فلسفهٔ ریاضی، کاربردها و تاریخ‌ریاضی و روش‌های آموزش ریاضی است. مجلهٔ ریاضی را نباید به حل‌المسائل یا کتاب تست تبدیل کرد.

من می‌توانم این ادعا را داشته باشم که مجله‌های *آشتی با ریاضیات* و *آشنایی با ریاضیات* که روی هم نزدیک به ۷۰ جلد منتشر شد، یکی از غنی‌ترین منابع، در زمینهٔ تاریخ ریاضیات و فلسفهٔ ریاضی در کشور است. در این نشریات سعی براین داشتم، که هم به ریاضیات ایرانی پرداخته شود و هم به ریاضیات غیرایرانی. هم دانشمندان ایرانی معرفی شوند و هم دانشمندان غیرایرانی. همواره در طول انتشار این دو مجله، سعی کردم، آنچه را که در زمینهٔ آموزش ریاضی و فلسفه و تاریخ آن، کمبود داشتیم به شکل مطالب تازه و قابل‌فهم به چاپ برسانم. اما متأسفانه به بن‌بست رسیدم. علت اصلی‌اش را هم، نبودن یک مرکز پخش سالم و دلسوز، می‌دانم. اما اگر از نشریه‌های خودم بگذرم، خوشبختانه، نقطهٔ امید تازه‌ای پیدا شده است. بعد از انقلاب، به خصوص در سال‌های اخیر، تعداد نشریه‌های ریاضی، زیاد شده است. نشر دانشگاهی نشر *ریاضی* را منتشر می‌کند؛ اگرچه با وقفه‌های طولانی، ولی به هر حال نشریهٔ خوب و سنگینی است. جنگ *ریاضی* شما هم هست. گویا دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف هم مجله‌ای را به طور سالیانه، منتشر می‌کنند.

آموزش و پرورش هم نشریه‌های ریاضی آموزشی منتشر می‌کند. یکی *رشد ریاضی* است، که بیشتر برای معلمین است. دیگری مجلهٔ *برهان* که برای دانش‌آموزان است. البته در مورد این دو نشریه، یک نقطه نظر منفی دارم (ضمن آن که وجود آنها را بسیار مفید می‌دانم.) هر دوی این نشریه‌ها، در پی جمع کردن مشتری هستند، و کمتر به دنبال این هستند که ببینند چه چیزی لازم است؛ به نحوی که دارند به صورت حل‌المسائل در می‌آیند، و این عیب است.

بعد از انقلاب، وجود نشریه‌های متعدد در زمینهٔ ریاضی، این آرامش را به من می‌دهد که حالا یک مجلهٔ *آشنایی با ریاضیات* تعطیل شده است، نشریه‌هایی هستند که بتوانند به‌نحوی جای آن را پر کنند و ادامهٔ کار را به عهدهٔ بگیرند.

جنگ ریاضی. البته این مجله‌هایی که شما اسم بردید، به نظر ما، هیچ کدام ماهیت و هویت مجلهٔ *آشنایی با ریاضیات* را ندارند. یک سری از مجلهٔ‌ها هم که صرفاً برای دانشجویان منتشر می‌شود. در هر صورت، در گام‌های اولیه هستیم.

شهریاری. امیدوارم دست‌اندرکاران راه کار را بهتر یاد بگیرند و شرایطی فراهم شود که من هم بتوانم ادامه بدهم. مسئله‌ای که ابتدا از طرح آن پرهیز داشتم مسئلهٔ مالی است. من این اواخر در هر شماره از *آشنایی با ریاضیات* بین ۵۰ تا ۷۰ هزارتومان کمبود داشتم. متأسفانه بنیهٔ مالی هم نداشتم، تا بتوانم جبران کنم. تنها درآمد من، حق‌التألیف کتابهایم است. آن هم که به بحران کتاب، برخورد کرده است. می‌دانید که معمولاً ناشران حاضر نیستند کتاب‌های ریاضی تازه را چاپ کنند. با همهٔ این‌ها، حاضر بودم با اندک ذخیرهٔ موجود، به شرط آن که مجله‌ها به دست اهلش برسد، انتشار آنها را ادامه بدهم. اما می‌دانم که نمی‌رسد و در انبار می‌ماند. به این شکل آدم احساس می‌کند که به هدفش نمی‌رسد.

جنگ ریاضی. شما در این شماره از *آشنایی با ریاضیات* که پیش‌بینی می‌کنید آخرین شماره باشد[1]، نمی‌خواهید کار ویژه‌ای در آن انجام دهید؟

شهریاری: نه، آماده‌اش کرده‌ام. یک نسخهٔ معمولی است. فکر کردم یک سر مقاله‌ای یا زیر صفحه‌ای دربارهٔ عدم انتشار شماره‌های آیندهٔ آن، چاپ کنم. اما نمی‌خواهم امید خود را از دست بدهم. این را اعلام نکردم، به این امید که شاید راهی برای ادامهٔ نشر آن بیابم. فکر کردم شاید بشود شماره‌های مخصوصی درآورد مثلاً، ویژه‌نامه‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات، که همهٔ مقاله‌ها در زمینهٔ تاریخ ریاضی باشد، یا دربارهٔ آموزش ریاضیات و غیره. این ها زمینه‌هایی است که روی آنها فکر می‌کنم. دوستان هم اگر کمک فکری کنند، خوشحال می‌شوم.

جنگ ریاضی. خوشحال می‌شویم اگر با شما بتوانیم همکاری داشته باشیم.

---

[1] توجه کنید که مصاحبه در سال ۱۳۷۱ انجام شده است

شهریاری. البته همین قدر خلاصه کنم و بیش از این وقت هیأت تحریریهٔ جنگ ریاضی را نگیرم، من درد دل می‌کنم؛ چون با مشکل مالی و پخش و مخارج دیگر، درگیر هستم.

جنگ ریاضی. اگر می‌بینید تاحدی از ما پیشتیبانی می‌شود، یک مقداربه علت سماجت مدیر مسئول و بعضی کوشش‌ها و علاقهٔ دوستان است، در واقع این طور نبوده که جهاد دانشگاهی یا دانشگاه کسی را برای این کار مأمور کنند و ما خود با عشق و علاقه در پی انتشار هر شماره از جنگ *ریاضی دانشجو* می‌رویم.

دربارهٔ کتاب *ستارهٔ اعداد* که در ارتباط با شما منتشر شده، نظرتان چیست؟ من علاقمند بودم که این کتاب زندگی ریاضی شما را بنمایاند، اما اینطور نشده است.

شهریاری. من این کتاب را هنوز کامل نخوانده‌ام. یعنی سی، چهل صفحه‌اش را نگاه کردم، که خیلی نپسندیدم و به خاطر همین حوصله نکردم بقیه‌اش را بخوانم. این کتاب کار یک شاعر و یک نویسنده است. وقتی ایشان برای تهیهٔ چنین کتابی تصمیم گرفتند، نزد من آمدند. من به ایشان گفتم، فقط می‌توانم هر مدرکی که بخواهید، در اختیارتان بگذارم. ایشان گفتند : «می‌خواهم از نوشته‌های خیلی قدیمی شما، چیزهایی داشته باشم.» من هم نوشته‌هایی را دراختیار ایشان قرار دادم. تأکید من بیشتر براین بوده که مطالب، غیر ریاضی باشد، تا ایشان بتوانند آنها را بخوانند. این نوشته‌ها به ۳۵ تا ۴۰ سال قبل مربوط می‌شد. از نوشته‌های من به عنوان مدرک، در کتاب «ستارهٔ اعداد» که در ستون‌های کوچکتری به چاپ رسیده، استفاده شده است.

بعد ایشان، پیش من آمدند و گفتند «با همهٔ اینها برای پر کردن بعضی خلاءها (که من نمی‌دانم چیست و چگونه است !) به پرسش‌های من پاسخ دهید». تعداد سؤال ها به صدوپنجاه می‌رسید، که از بین آنها به ده، دوازده سوال پاسخ دادم. اکثر آن پرسش‌ها، اصلاً به من مربوط نبود. حتی علت پاسخ گویی به همان تعداد کم هم، در بعضی موارد، فقط به خاطر عدم درستی طرح سوال بوده است. مثلاً ایشان اظهارنظری راجع به «عشق» کرده بودند و در ادامه نظر مرا پرسیده بودند. من آن اظهارنظر را نپسندیدم و به آن صورت که درست می‌دانستم، توضیح دادم.

جنگ ریاضی. کتاب *ستارهٔ اعداد* را که دیدیم، به یاد غریب بودن و مظلوم بودن ریاضیات افتادیم. در این کتاب، تقریباً به تنها چیزی که نپرداخته، زندگی شما در ارتباط با ریاضیات، بوده است. به هرحال از شما متشکریم که صمیمانه در این گفتگو شرکت کردید و نظرات خود را بیان کردید.

جنگ ریاضی دانشجو ، ۱۳۷۵، ۱۰، ۱۳۵_۱۴۸

نیل کوبلیتز

ریاضیات در شرایط دشوار کشورهای جهان سوم*

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی

آنچه در زیر می‌آید عمدتاً براساس تجارب من در امریکای مرکزی، ویتنام و هند استوار است. من هرگز علم در جهان سوم را به طور سازمان یافته مطالعه نکرده‌ام، از این رو قصد آن راندارم که در اینجا آمار، تجزیه و تحلیلهای اجتماعی و یا هر چیزی که ارائه دهندهٔ یک تصویر کلی از آن باشد، ارائه دهم. بلکه هرآنچه خواهم گفت تجارب عینی و واقعی خود بوده، و بعضی از چیزهایی که خواهم گفت بحث‌انگیز خواهند بود.

ابتدا در مورد آموزش ریاضی، خصوصاً در امریکای مرکزی، بحث خواهم کرد. سپس در مورد تحقیقات ریاضی در جهان سوم صحبت خواهم کرد، که بیشتر مشاهدات من برمبنای ده سال هماهنگی برنامه‌های ریاضی برای یک مؤسسه غیردولتی به نام «کمیته امریکایی همکاری علمی با ویتنام» استوار می‌باشد.

آموزش ریاضیات

روشن‌ترین چیزی که می‌توان گفت این است که در جهان سوم، بیشتر مدارس و دانشگاهها دچار کمبود مواد و منابع مورد نیاز می‌باشند که بسیار بدتر از وضعیتی است که می‌توان در ایالات متحده از آن شکایت کرد. مربیان غالباً حقوق های بسیار کمی دریافت می‌کنند، و باید در کلاسهای قدیمی درس دهند؛ بدون دردست داشتن کتب درسی و یا منابع درسی پایه کافی، با تخته سیاه‌های کوچک بدون دستگاه اورهد و با نور کم و قطع برق های

---

*Koblitz, Neal, "*Mathematics under hard Conditions, in the third world countries*", Notices, Vol.**38**, No. 9, 1991.

متوالی. بیشتر کشورهای جهان سوم در مناطق حاره قرار گرفته‌اند، از این رو در بیشتر ایام سال تحصیلی هوا در طول روز بسیار گرم می‌شود، و اگر مربی و شاگردان خوش شانس باشند، به شرط بودن برق، تنها پنکه سقفی خواهند داشت که هوا را به جریان می‌اندازد.

علی‌رغم همه اینها، آموزش در کشورهای جهان سوم به نحو قابل توجهی خوب می‌باشد. آموزش متوسطه و آموزش عالی کشورهای آسیایی، افریقایی و امریکای لاتین علاوه بر کاستی ها، مزیت هایی نیز دارا می‌باشند. افراد تحصیل کرده، دارای مدارج بالای علمی، در کشورهای جهان سوم دارای منزلت بیشتری نسبت به امریکا هستند. مردم باور عمیقی به اهمیت آموزش برای رسیدن به زندگی بهتر شخصی و همچنین راهی برای توسعه کشورشان دارند. دانشجویان و دانش‌آموزان نسبت به همتایان امریکایی خود منضبط تر و کوشاتر می‌باشند. آنها به آن اندازه پریشان، فاسد و دل خسته نیستند. در ویتنام، که یکی از فقیرترین کشورهاست، یک شبکه شهری ، منطقه‌ای و کشوری مسابقات ریاضی منجر به انتخاب بعضی از بهترین تیم ها برای المپیاد بین‌المللی شده است. برای مثال، در استرالیا در سال ۱۹۸۸ ، ویتنام در رده پنجم قرار گرفت، که بالاتر از ردهٔ ششم تیم امریکا بود.

در زمینه آموزش دانشگاهی، یک نمونه از کیفیت خوب انستیتو تکنولوژی هند با پنج دانشکده در شهرهای مهم هند می‌باشد. فارغ‌التحصیلان این انستیتو قابل مقایسه با فارغ‌التحصیلان بهترین دانشگاههای امریکایی هستند.

علاقه‌مندم که یک داستان کوچک شخصی را در اینجا مطرح کنم. هنگامی که شش ساله بودم، خانواده‌ام یک سال را در بارودای هند سپری کردند. من در مدرسه کاتولیک که تنها مدرسه انگلیسی زبان شهر بود، مشغول به تحصیل شدم. استانداردهای آموزش ریاضی در آنجا بالاتر از مدارس آمریکایی بود. سال بعد، هنگامی که به امریکا برگشتم، آنقدر از هم شاگردیهای خودم جلوتر بودم که معلم من به اشتباه معتقد بود که من استعداد خاصی برای ریاضیات دارم. مانند سایر مفاهیم اشتباه که معلمین به ذهن خود راه می‌دهند، این باور اشتباه سبب شد که من به فردی پیشتاز تبدیل شوم. به دلیل تمام تشویق های پس از بازگشتم از هند، من در راه ریاضیدان شدن قرار گرفتم . از اینرو من دینی شخصی به هند و مدارس آن دارم.

ولی در بعضی کشورها، روش برخورد با آموزش ریاضی صرفاً یک فاجعه است. نیکاراگوئه مثالی از این دست است. از دانشجویان خواسته می‌شود که جزئی‌ترین تستهای ریاضیات عالی را حتی بدون درک معنی آن و یا ارزش آن به خاطر بسپارند. یک همکار

در دانشگاه ملی استقلال[1] ماناگوئا می‌گفت:

شما خواهید فهمید که چرا تعداد زیادی ازاین دانشجویان (نیکاراگوئه‌ای) از ریاضیات ترسیده‌اند. برای مثال، دریافتم که همه دانشجویان من الگوریتم اقلیدس را می‌دانند، و لیکن تنها به صورتی مکانیکی؛ بدون هیچ گونه فهمی از آن. مشخص گردید که از آنها خواسته شده بودبرای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک در هنگام جمع کردن دو کسر، الگوریتم اقلیدسی را به خاطر بسپارند.

در اینجا چند صد ریاضیدان وجود دارد. علاقه‌مندم سؤال کنم :«چه تعدادی از شما در طول زندگی خود برای جمع کردن دو کسر تاکنون ابتدا از الگوریتم اقلیدسی برای مخرج کسرها استفاده کرده‌اند؟» این یک نمونه منحصر به فرد نیست. همان همکار از کلاسی می‌گفت که هنگام عبور از کنار آن شنیده بود که دانشجویان یکصدا پس از استاد تکرار می‌کردند «یک رابطه هم ارزی رابطه‌ای است انعکاسی، متقارن و متعدی». این لغات به چه معنا هستند؟ چرا رابطه هم ارزی مهم است؟آنهاتحت چه شرایطی از زندگی خود در نیکاراگوئه امکان استفاده از تعریف رابطه هم ارزی را دارند ؟ تمام اینها به صورت یک راز برای دانشجویان باقی می‌ماند.

مقصر واقعی در این مورد جامعه ریاضیات شمال امریکا و اروپا بوده‌اند که در دهه ۱۹۶۰ به سمت ریاضیات مجرد و صورتگرا (ریاضیات جدید) گرایش پیدا کردند که این امر آموزش ریاضی در بیشتر کشورهای جهان را تحت سلطه خود درآورده و تمام نکات منفی آن که هم اکنون برای ما در آمریکا به خوبی شناخته شده است ـ مواد خسته‌کننده، بدون انگیزش، نامرتبط به زندگی واقعی ـ همه با ابعاد مضحکی در کشورهای فقیر جهان سوم، نظیر نیکاراگوئه، نمود پیدا می‌کند.

از دانشجویان سال های بالای دانشگاه ملی استقلال نیکاراگوئه خواسته می‌شود تا در دو سال آخر تحصیل خود ۳۰ ساعت در هفته در کلاس های ریاضی شرکت کنند. سرفصل دروس، که بدون کوچکترین تغییری از دانشگاههای اروپایی اقتباس شده‌اند، از کتب درسی‌ای استفاده می‌کنند که در هر دانشگاه امریکایی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس بسیار پیشرفته ارزیابی می‌گردند. از دانشجویان خواسته می‌شود که لیست بلندی از تعاریف، قضایا و اثبات آنها را که نمی‌توان انتظار داشت معنی مفهومی آنها را فهمیده‌اند، حفظ کنند. علاوه براین، بیشتر این مطالب حتی توسط اساتید نیکاراگوئه‌ای که تجربه ریاضی آنها غالباًدرحد یک مدرک لیسانس ضعیف می‌باشد، نیز درک نمی‌شود.

---

1 · National Autonomous University

نتیجه آن چیزیست که علاقه‌مندم آن را «ریاضیات به صورت نوعی ستم» بنامم.

دانشجویان ریاضی نیکاراگوئه‌ای وادار می‌شوند تا برای به‌دست آوردن مدرک، مغز خود را از مفاهیمی که معنی آن را نمی‌دانند پر کنند؛ چیزی که آموزش نیست. اگر آنها این درد را تحمل کنند و مراحل آن را طی کنند، آنگاه مدرک خود را خواهند گرفت، و از ستمدیده به ستمگر تبدیل خواهند شد.

کمبود مربی ریاضی با صلاحیت نیکاراگوئه‌ای یکی دیگر از جلوه‌های بسیار غم‌انگیز تاریخ نیکاراگوئه است. همان طور که می‌دانید، در سال ۱۹۷۹ حرکت ساندنیستها منجربه سرنگون کردن سلسله سوموزا و روی کارآمدن دولتی مبتنی بر اندیشه‌هایی چون، خدمات درمانی مجانی، سواد همگانی و دسترسی افراد بیشتری به تحصیلات عالی گردید. دموکراتیزه کردن آموزش عالی، هدف اصیلی بود، ولی مشکلی بود که در حرکت اصلاح طلبانه ساندنیستها به آن توجه نشده بود. نیکاراگوئه تعداد اندکی استاد شایسته داشت، و درصد قابل توجهی از بهترین تعلیم یافتگان ـ به خصوص آنهایی که از طبقه مرفه بودند ـ پس از انقلاب به میامی فرار کرده بودند. حتی تعداد زیادی از افراد تحصیل کردهٔ طبقه متوسطه پس از آن که نبرد کنترای ریگان خرابی‌های اقتصادی عوارض خود را بر سطح زندگی گذارد، کشور را ترک کردند. از این رو، دانشگاه های نیکاراگوئه در دهه ۱۹۸۰ علی رغم تعداد کم و اندک نیکاراگوئیهایی که شایسته تدریس بودند، توسعه یافت.

نمی‌خواهم شما را با احساسی کاملاً منفی نسبت به نیکاراگوئه تنها بگذارم. علی‌رغم وضعیت مادی مایوس کننده زندگی و روش های نامناسب آموزش ریاضی، دانشجویان ریاضی نیکاراگوئه را افرادی باهوش، سخت کوش و تشنهٔ فراگیری یافتم. آنها سؤالات خوبی از من کردند و به خوبی به هر چه که می‌گفتم گوش می‌دادند. مدتی که به درس توجه می‌کردند زمان کوتاهی نبود و از من انتظار نداشتند که آنها را سرگرم کنم و هرگز از لهجه بد اسپانیایی من و یا در مورد سایر بازدیدکنندگان و یا مربیان خارجی شکایت نمی‌کردند. به هرحال احساس من این است که در بسیاری جنبه‌ها، دانشجویان نیکاراگوئه‌ای از همتایان آمریکایی خود پخته‌تر هستند.

فقط در نیکاراگوئه نیست که «ریاضیات جدید» وارداتی شرایط آموزشی مشکل فعلی را بدتر کرده است. اخیراً هنگامی که در السالوادور بودم، در مورد آموزش ریاضی با رنه زلایا[2] رئیس یکی از دانشگاه های این کشور مباحثاتی داشتم. زلایا که مدیر گروه ریاضیات بود، هنگامی به ریاست دانشگاه انتخاب شد که رئیس قبلی فیزیولوژیست

---

2 · Rene Zeloya

معروف پدر روحانی ایگناسیو مارتین بارو ـ به قتل رسید. (به خاطر آورید که در نیمه شب ۱۶ نوامبر ۱۹۸۹توسط یک جوخه از تیپ اول ارتش السالوادور، به دانشگاه حمله کرده و مارتین بارو، و پنج استاد دیگر، پیشخدمت و دختر او را به قتل رساندند.) استادان این دانشگاه همانند زلایا در قسمت آموزش ریاضیات، در معرض مخاطرات فراوانی هستند، چرا که دانشگاه به صورت یک مرکز فعالیت برای صلح و مخالفت با کمک نظامی آمریکا درآمده است.

زلایا برای من توضیح داد که هنگامی که در سال ۱۹۶۸ از دانشگاه السالوادور فارغ التحصیل گردید، «ریاضیات جدید» تازه وارد کشور شده بود و برنامه‌های آموزشی به سمت تاکید برروی نظریه مجموعه‌ها و نظریه میدان مجرد، حتی در کلاسهای پائین، سوق یافتند. او گفت که معلمین اصلاً آماده نبودند، و سیستم آموزش مدارس السالوادور هنوز در کوشش برای بازیافتن خود پس از «رفرم» سال ۱۹۶۸ هستند. دو ماه قبل هنگامی که در سان سالوادور بودم، در روزنامه‌ای که هر روز در زیر در اطاق من گذاشته می‌شد، سلسله مقالاتی در مورد در هم‌ریختگی در آموزش ابتدایی السالوادور که ناشی از بحث در مورد ادامه و یا عدم ادامه تمرکز بر روی نظریه مجموعه‌ها بود، به چاپ می‌رسید.

وضعیت بغرنج آموزشی‌ای که امروز گریبانگیر، نیکاراگوئه و السالوادور است نتیجه صدمات وارده توسط شور «ریاضیات جدید» در دهه ۱۹۶۰ می‌باشد که از آمریکا و فرانسه به کشورهای در حال توسعه سرایت کرد. البته، امروزه شکایت در مورد شکست نهضت ریاضیات جدید، مانند لگدزدن به اسب مرده است. در هر حال درسی در این میان نهفته است : ما نباید کشورهای جهان سوم را با انواع هوسهای خام آموزشی که در آمریکای شمالی و اروپا بوجود می‌آید استثمار کنیم.

پیش از این به شما وعده دادم که در مورد مسئله‌ای بحث‌انگیز صحبت کنم. پس بجای لگدزدن به یک اسب مرده ترجیح می‌دهم به اسبی لگد بزنم که بسیار هم زنده است : آن چیزی که انقلاب کامپیوتری در آموزش ریاضی خوانده می‌شود. در آمریکا، فکر می‌کنم این قضاوت منصفانه باشد که کامپیوتر بعنوان نوشدارویی برای مشکلات آموزش ریاضی، به طرز بی‌شرمانه‌ای به مدارس فروخته شد. به‌هرحال در حال حاضر دشوار است که بگوییم آیا به کارگیری کامپیوتر در مدارس ابتدایی تا سطوح دانشگاهی اثر مثبت و یا منفی بر آموزش ریاضیات داشته است. نخستین نتایج قابل اندازه‌گیری این کار، تا آنجا که من آگاه هستم، سرازیر کردن منابع فراوان پول به سمت شرکت های سخت‌افزاری و نرم‌افزاری بوده است. به قول یک دانشمند علم کامپیوتر که در رفرم آموزشی مدارس ابتدایی فعال است : «شاید بهتر باشد در خیلی از مدارس (اگر نگوییم در تمام مدارس)

این ماشینها را به زباله‌دان بریزیم».

علی‌رغم کمبود پول برای آموزش در کشورهای در حال توسعه، تاحدودی جنون کامپیوتر به جهان سوم نیز کشیده شده است. در فوریه ۱۹۸۶، یک کنفرانس بزرگ با عنوان «انفورماتیک و آموزش ریاضی در کشورهای جهان سوم» در تونس برگزار گردید. شرکت کنندگان عمدتاً از شمال آفریقا آمده بودند و بسیاری دیگر از دانشگاهها، انستیتوها و مراکز آموزشی دیگر کشورهای جهان سوم شرکت کرده بودند. من یک نسخه گزارش آن کنفرانس را دریافت کردم. تمام ریاضیدانان و معلمین ریاضی، بدون استثناء، در مدح کامپیوتر صحبت کرده بودند و خواستار ورود هرچه سریعتر کامپیوتر به سیستم مدارس خود بودند. حتی یک یادداشت منتقدانه و یا حتی یک سوال مطرح نشده بود، چه رسد به بررسی عمیق مسئله. مثلاً ممکن بود سؤال شود: آیا کامپیوترها واقعاً همان چیزی است که مدارس در آفریقا به آن احتیاج دارند ؟ در عمل آیا کامپیوترها باید در سطح عموم استفاده شوند و یا فقط برای تعدادی مدرسه نمونه و خاص برای متمولین؟ آیا منابع را به نحو بهتری می‌توان در سایر راهها به کار برد؟ مثلاً برای افزایش حقوق معلمین، بهبود وضعیت تخته سیاه کلاسها و یا بهبود وضع روشنایی و یا گسترش کتابخانه‌ها؟ در هر صورت، این مسأله که در کنفرانس تونس، ورود کامپیوتر برای آموزش ابتدایی در آفریقا به صورت یک اولویت مطرح شده است، به نظر من امری خیالی می‌رسد.

باید به این نکته اشاره کنم که بیشترین کمکها و حمایتها برای کنفرانس تونس از طرف شرکتهای کامپیوتری بزرگ فرانسوی فراهم شده بود. گرچه، این کنفرانس برای افرادی که به طور جدی علاقه‌مند به مسائل آموزشی هستند کم ارزش بود، لیکن می‌توانیم تصور کنیم که چگونه شرکتهای تامین کنندهٔ مالی کنفرانس، آن را به عنوان موفقیتی بزرگ ارزیابی کرده‌اند؛ که چگونه این کنفرانس به خصوص در مستعمره‌های سابق فرانسه در شمال آفریقا، بازار بزرگی را برای آنان گشوده است.

تحقیقات

از آنجا که فرصت کم است، وارد مبحث محیط تحقیقاتی در کشورهای جهان سوم، به خصوص در کشورهایی چون ویتنام و هند نخواهم شد که در آنجا ریاضیدانان محقق فراوانی وجود دارند (در مقابل، در امریکای مرکزی اینگونه نیست).

بار دیگر بدیهی‌ترین، چیزی که می‌توان گفت این است که وضعیت مادی همکاران ما به خصوص در ویتنام، به نحو غیرقابل تصوری بد می‌باشد. برای آنکه به شما تصور اجمالی داده باشم، جدولی از حقوق متوسط ماهانه اساتید ریاضی در امریکا و سه کشور در حال توسعه گرد آورده‌ام. این ارقام براساس مشاهدات من در چند سال گذشته

می‌باشد، گرچه ارقام دقیقی نیست (به خصوص که نرخ برابری پول هریک از این کشورها و دلار آمریکا می‌تواند تغییرات فراوانی کرده باشد)

حقوق ماهانه یک استاد ریاضی

۴۰۰۰ دلار ≈ آمریکا
۴۰۰ دلار ≈ هند
۴۰ دلار ≈ نیکاراگوئه
۴ دلار ≈ ویتنام

من واقعاً این چارچوب را دوست دارم، و مشاهده آن را هراز چندگاهی مفید می‌دانم. من هرگاه از این که قانون‌گزاران ایالت واشنگتن حقوق دانشگاه واشنگتن را کمتر از حقوق سایر دانشگاههای ایالتی تعیین می‌کنند، سرخورده می‌شوم، کافی است که به این نکته فکر کنم که چگونه همکاران ویتنامی من با حقوق ماهانه ۴ دلار تحقیقات درجه اول بین‌المللی انجام می‌دهند و هنوز روحیه خود را حفظ کرده‌اند.

واضح است که ریاضیدانان ویتنامی نمی‌توانند از حقوق خود برای خرید کتاب استفاده کنند. قیمت یک کتاب می‌تواند دستمزد یک سال آنان باشد! پس چگونه کتابخانه خود را تجهیز می‌کنند؟ خوب راههای متعددی وجود دارد: ۱) اهدای کتاب از طرف دوستان در سایر کشورها، (عمدتاً امریکا و فرانسه) ۲) خرید کتاب هنگامی که در دورهٔ بعد از دکتری و یا فرصت مطالعاتی در اروپا و یا امریکای شمالی به‌سر می‌برند ۳) تعویض مجلات با آبونمان عمده‌ترین مجله ریاضی ویتنام [3]. لیکن حتی با وجود بهترین کوششهای ریاضیدانان ویتنامی، مجموعه‌های کتب ریاضی در ویتنام ناقص می‌باشند.

تنها دور بودن جغرافیایی و یا کمبود کتب و مجلات نیست که ارتباط ریاضیدانان ویتنامی را با پیشرفتهای امروزی دشوار کرده است. آنها در اغلب زمینه‌ها در شبکه غیررسمی محققین که توسط نامه، تلفن و نتایج کنفرانسها ایجاد شده است، قرار ندارند. موارد بسیار زیادی بوده است که ریاضیدانان مستعد جوانی از دانشگاههای اروپایی به ویتنام برگشته‌اند و به دلیل شرایط نامساعد از نظر مواد و موضوعات مطالعاتی و انزوا دلسرد شده و تحقیقات را رها کرده‌اند. البته نکته جالب توجه این است که در غالب موارد

---

3 · Acta Mathematica Vietnamica

علی‌رغم موانع، ویتنامی‌ها به کارهای سطح بالا ادامه داده‌اند. لیست مقالات اعضای انستیتو ریاضی هانوی به بیش از ۶۰ صفحه می‌رسد. بیشتر این مقالات در مجلات اروپایی و امریکای شمالی به چاپ رسیده‌اند. این لیست از نظر کمیت و کیفیت با لیست مطالب منتشره، توسط اعضای یک دانشکده بزرگ ایالتی در آمریکا قابل قیاس است.

اگر قصد آن را داشته باشیم که بدانیم ویتنامی‌ها چگونه توانسته‌اند دستاوردهای مهمی در تحقیقات و آموزش ریاضیات تحت شرایط نامناسب به دست آورند، لازم است که با بعضی از ریاضیدانان ارشد در مورد زندگی‌شان و روند توسعه ریاضیات در ویتنام صحبت کنیم. در ژانویه ۱۹۸۹، یک مجموعه مصاحبه با مدیر وقت انستیتو ریاضیات هانوی، پروفسور هوانگ توی، انجام دادم. بیشتر مطالبی که او گفته بود در مجله ریاضی اینتلیجنسر[4] (جلد ۱۲ شمارهٔ ۳ سال ۱۹۹۰) در مقاله‌ای با عنوان «ریاضیات در ویتنام» به چاپ رسید.

هوانگ توی در دوران پرتلاطمی که بسیاری از ویتنامی‌های تحصیل کرده، از جمله خانوادهٔ او، سخت سرگرم مبارزه برای استقلال از فرانسه بودند، در جنوب ویتنام بزرگ شد. او عمدتاً به صورت خودآموز تحصیل کرد و در اواخر دهه ۱۹۴۰ در اوج جنگ‌های ضد استعمار توسط چریکهای ویت‌مین معلم دبیرستان در یکی از مناطق آزاد شده گردید. در ۱۹۴۹، کتاب درسی هندسه دبیرستانی به زبان ویتنامی نوشت، و این کتاب توسط انتشارات ویت‌مین به‌چاپ رسید. شاید این اولین کتاب ریاضی‌ای بوده که توسط یک جنبش چریکی به چاپ رسیده است.

دو سال بعد، هوانگ توی تصمیم گرفت خانه را به منظور تحصیل و تدریس در دانشگاه علوم پایه که توسط سازمان چریک های ویت‌مین در شمال برپا شده بود، ترک کند. آن چنان که هوانگ توی نقل می‌کند:

«در سال ۱۹۴۹، در حالی که هانوی اشغال شده بود و دانشگاه بسته بود، بعضی از کلاس های ریاضیات دانشگاه در مناطق آزاد شده، در کوهستانهای نزدیک مرز چین، برقرار بود. مسافرت به شمال سه ماه طول می‌کشید. ما هر کاری را که امکان داشت بارمان را سبک کند، انجام دادیم. ما فقط برنج و نمک را حمل می‌کردیم. قبل از آن که حرکت کنیم، کتاب های ریاضی‌ام را برداشته، جلدهای آن را کندم و حواشی هر صفحه را بریدم تا در مسافرت به شمال بارم سبکتر باشد.»

در مباحثاتمان هوانگ توی نکات جالبی از زندگی خود و تاریخ ریاضیات در ویتنام

---

4 · Mathematical Intelligencer

را برایم بیان کرد. مصاحبهٔ من باهوانگ توی، یکی از معدود چیزهایی است که در مورد تاریخ مؤسسات و شخصیت‌های ریاضی جهان سوم منتشر شده است. کار اندکی در این زمینه شده است، و هنگامی که چیزی هم در این زمینه نوشته می‌شود، پیدا کردن ناشری برای آن ساده نیست.[۵]

برای دریافتن گرایش قوی به اروپاییان در دنیای ناشرین احتیاج به کمک نیست. چه تعداد مقالات مربوط به بیوگرافی، بیوگرافیهای کامل و تاریخ در مورد ریاضیدانان جهان سوم دیده‌اید؟ (خوب کتاب های زیادی در مورد رامانوجان نوشته شده است، ولی در مورد دیگران چه؟) برای نمونه، تمام ریاضیدانانی که مصاحبه با آنان در دو جلد کتاب ریاضی‌ورزان [۶] و بیشتر جامعه ریاضی[۷] می‌باشد، در اروپا و یا امریکای شمالی زندگی می‌کنند؛ و اگر صادق باشیم، بعضی از مصاحبه‌ها فرد را به خواب می‌برد. اگر من ناشر بودم، آن مصاحبه‌های خواب‌آور را دور می‌انداختم و با تاریخ زندگی ریاضیدانان سایر نقاط جهان را جایگزین آنها می‌کردم.

با جستجو در قفسه‌های هر کتابخانه ریاضی دانشگاهی، به راحتی خواهید توانست تعداد قابل توجهی اتوبیوگرافی از ریاضیدانان برجسته مرد سفیدپوست آمریکایی بیابید، که در حال حاضر واقعاً در حال چرت زدن هستند، در حالی که برای چاپ آن مطالب مشکلی برای پیدا کردن ناشر نداشته‌اند. اما هنوز ناشری برای چاپ مجموعه خاطرات از توسعه ریاضیات ویتنام در دوران جنگ که سرگرم ویراستاری آن هستم، نیافته‌ام. علاوه بر مجموعه آثار ریاضیدانان ویتنامی، این مجموعه شامل ترجمه انگلیسی گزارش چاپ نشده سال ۱۹۶۷ ریاضیدان بزرگ فرانسوی گروتندیک[۸] نیز خواهد شد، که درس کوتاهی در مورد هندسه جبری مجرد را در جنگل های شمال ویتنام، جایی که بمبارانها به آنجا منتقل شده بود، ارائه کرده بود.

علاقه‌مندم چند کلامی در تجلیل از والتر کافمن ـ بوهلر، که یکی از معدود ناشرینی بود که مخاطره چاپ چیزهای نامتعارف را قبول می‌کرد صحبت کنم.او در زمان شروع چاپ در مؤسسه اشپرینگر فرلاگ[۹] ویراستار ریاضی بود. این مجله جایی است که مقالاتی تاریخی و فرهنگی در مورد جهان سوم می‌تواند در آن به چاپ برسد.

همچنان که بیشتر ناشرین، جهان سوم را در نشریات تاریخ ریاضی خود نادیده

۵.اعتراضی صادقانه و تأسف‌بار.

6 · Mathematicalpeople

7 · More mathematical pepole

8 · Grothendieck

9 · Springer – Verlag

می‌گیرند، همچنین نیازهای ریاضیدانان جهان سوم را نیز در قیمت‌گذاری کتب و نشریات خود نادیده می‌گیرند. تا آنجا که می‌دانیم، هیچ ناشر خصوصی عمده‌ای نیست که تخفیف های ویژه برای کتابخانه‌های ریاضی جهان سوم را در نظر بگیرد.این مایه تأسف است و آن را به راحتی نمی‌توان درک کرد، چرا که حتی از دیدگاه تنگ مادی نیز به نفع ناشرین خواهد بود که چنین تخفیف هایی را ارائه دهند. نکته مهمی که باید به خاطر سپرد این است که این ترکیبات نباید به حساب فروش های با قیمت معمولی گذاشته شود. (نه مشابه با تخفیف های ویژهٔ ریاضیدانان در کشورهای ثروتمندتر) از اینرو، جنبه‌های مالی برای کشورهای جهان سوم باید بر مبنای هزینهٔ حاشیه‌ای محاسبه گردد؛ بدون احتساب هزینه ثابت تولید کتاب و یا مجله.

موضوع دیگری که علاقه‌مندم در اینجا در آن مورد صحبت کنم «فرار مغزها» می‌باشد؛ یک مشکل اساسی که اکثر کشورهای در حال توسعه با آن روبرو هستند. عبارت «فرار مغزها» به معنی از دست رفتن ریاضیدانان، دانشمندان و سایر متخصصان می‌باشد، که پس از فراگرفتن بیشتر آموزشها در کشور خویش (معمولاً تا سطوح قبل از لیسانس) به دنبال یک زندگی بهتر به کشورهای توسعه یافته (معمولاً آمریکا) مهاجرت می‌کنند. «فرار مغزها» در واقع یک منبع مهم از متخصصین مورد نیاز آمریکا می‌باشد، و اخیراً بهمین دلیل آمریکا قوانین مهاجرت خود را در جهت تسهیل مهاجرت متخصصین به این کشور اصلاح کرده است. چندی قبل، یک گزارش انگیسی را که کوشش کرده بود تا ارزش دلاری منفعت آمریکا از فرار مغزها را تعیین کند، خواندم. نتیجه این بود که کل کمک های خارجی آمریکا کمتر از کل کمک هایی است که این کشور به صورت مهاجرت افراد تحصیل کرده دریافت می‌کند. البته بدیهی است که مانند هر کوشش دیگر، برای نسبت دادن مقدار دلاری به چیزی که واقعاً کمّی نیست، در اینجا نیز نقایصی وجود دارد. به‌نظر من این مطالعه منافع آمریکا را کمتر از مقدار واقعی تخمین زده است و همچنین صدمات وارده بر جهان سوم ناشی از فرار مغزها را دست کم گرفته است. در واقع می‌توان استدلال کرد که ضرر کشور مبداء به دلیل تحلیل روحیه و نیروی متخصص در موسسات و انستیتوها بسیار بیشتر از سود آمریکا می‌باشد.

برای مثال، هنگامی که در مدرس هندوستان بودم، یک فیزیکدان هندی را ملاقات کردم که پس از پایان تحصیلات خود در آمریکا به هندوستان بازگشته بود. او شدیداً از این شکایت می‌کرد که بیشتر هندیان معتقدند که او بازگشته است چون به اندازهٔ کافی خوب نبوده تا در آمریکا بماند. اگر احساس مردم این است ـ چه درست و چه غلط ـ که بهترین و هوشمندترین افراد مهاجرت می‌کنند، همان طور بهترین دانشمندان جوان خود

را برای ترک کشور تحت فشار احساس می‌کنند، و این احساس به صورت یک رسالت شخصی درخواهد آمد.

با همین مشخصه، هنگامی که دانشمندان جوان و مستعد از مؤسسات علمی کشورشان ناراضی می‌شوند، به جای ماندن و کوشش برای تغییر وضع، وسوسه می‌شوند تا دست را از کار بشویند و به مقصد آمریکا کشورشان را ترک کنند. از این رو، فرار مغزها انرژی انسانی‌ای را که می‌توانست صرف رفرم و بازسازی شود، تخلیه می‌کند.

من معتقدم که تفاوت های زندگی مادی در جهان سوم و آمریکا تنها دلیل ـ و نه حتی لزوماً اصلی‌ترین دلیل ـ فرار مغزها نمی‌باشد. برای مثال، گرچه به ریاضیدانان ویتنامی کمترین حقوق در سطح جهان پرداخت می‌شود، اما در این کشور فرار مغزها صورت نگرفته است . بهترین ریاضیدانان ویتنامی برای چندین ماه و یا یک سال به خارج می‌روند، و سپس بدون تردید باز می‌گردند. بگذارید در اینجا اشاره کنم که از بین حدود ۲۰۰ دانشمند ویتنامی که بازدید آنها از طریق «کمیته آمریکایی همکاری های علمی با ویتنام» ترتیب داده شده بود، حتی یک بازدید نیز با مشکل روبرو نشد. نکته مهم این است که در ویتنام ـ و تا حدود زیادی در هندوستان ـ دانشمندان مورد احترام فراوان هستند و آنها دارای احساس روحیه گروهی هستند.

علاقه‌مندم که دو مثال از این روحیه گروهی را ارائه دهم. هنگامی که آخرین بار در ژانویه در هانوی بودم، انستیتو ریاضی هانوی برای اولین بار یک اتوبوس کوچک داشت که می‌توانستند برای جابه‌جایی بازدیدکنندگان و انجام سایر کارهای انستیتو از آن استفاده کنند. قیمت خودرو ۱۲۰۰۰ دلار بود که کلاً توسط اعضای انستیتو و از پس‌انداز حقوق هایی که در زمان فرصت های مطالعاتی و یا دوره‌های بعد از دکتری در غرب دریافت کرده بودند، پرداخت شده بود. ریاضیدانان از این مسأله مغرور بودند که این مقدار پول داوطلبانه تهیه شده بود.

مثال دوم من مربوط به توپولوژیست جبری هوهین میو [۱۰] ، استاد فعلی دانشگاه هانوی می‌باشد. او هنگامی که در اواخر دههٔ ۶۰ از ویتنام جنوبی تبعید شد، بیشتر سالهای جنگ را در ژاپن به سر برد؛ جایی که او تحصیلات بعد از لیسانس داشت و اولین شغل خود را به دست آورد. علی‌رغم وضع مادی نامطلوب ویتنام بعد از جنگ، میو در اواخر دههٔ ۷۰ به هانوی بازگشت تا دانشکدهٔ کوچک توپولوژی جبری را تأسیس کند. یکی از مشکلاتی که او با آن روبه رو بود فقدان هرگونه امکانات اقامتی برای

10 · Huhyn Miu

دانشجویان و سایر شرکت‌کنندگان از نقاط دیگر کشور بود. برای فائق آمدن براین مشکل، بعضی از دوستان ژاپنی وی برای او یک دوچرخه آخرین مدل فرستادند، که او توانست آن را به قیمت خوبی بفروشد. (در ویتنام دوچرخه عمده‌ترین وسیله حمل و نقل است) میو سپس پول حاصل از فروش دوچرخه را صرف ساخت یک خوابگاه کوچک در حومهٔ هانوی نمود.

میو یکی از اعضای گروه کوچک اما مهم ریاضیدانان است که در کشورهای غنی آموزش دیده‌اند و سپس تصمیم گرفته‌اند به ویتنام بازگردند و خود را وقف آموزش نسل بعدی محققین و استادان ریاضیات ویتنامی کنند. این جریان ریاضیدانان به ویتنام نوعی «فرار مغزها» در جهت معکوس بوده است.

نمونه دیگری از این گروه هوانگ زیان سینه [11] متخصص جبر است که کارهای او در نظریه رسته ها اولین بار به تشویق گروتندیک در بازدید سال ۱۹۶۷ آغاز شد. او دکتری خود را ۲۰ سال قبل در فرانسه اخذ کرد ـ و قسمت عمدهٔ تز خویش را در اوج بمبارانها نوشته بود ـ از آن زمان تاکنون در انستیتو تربیت معلم هانوی به تدریس اشتغال داشته است. پروفسور سینه که اولین زن پروفسور در یک شاخه علمی در ویتنام نیز می‌باشد، قائم مقام اتحادیه زنان ویتنام بوده و نقش کلیدی در تشویق زنان جوان ویتنامی به مطالعه ریاضیات داشته است.

تعداد کثیری از ریاضیدانان در ویتنام قسمتی و یا تمام آموزش عالی خود را در شوروی سابق و یا اروپای شرقی فرا گرفته‌اند. تا همین اواخر، کتابخانه‌های ریاضی ویتنام می‌توانستند مجلات شوروی سابق را با قیمتهایی ناچیز تهیه کنند. اما دیگر چنین کمک‌هایی وجود ندارد. هنگامی که در ژانویه قبل در هانوی بودم، به من گفته شد که روسها هم اکنون انتظار دارند که ویتنامی‌ها هزینهٔ کامل مجلات را به دلار بپردازند. البته در واقع این به معنی آن است که ویتنامی ها دیگر نمی‌توانند مشترک مجلات چاپ شوروی سابق باشند. قطع ناگهانی کمک از اتحاد شوروی سابق و اروپای شرقی یکی از دلایلی است که آنها نیازمند کمک ریاضیدانان غربی هستند.

علاقه‌مندم چند توضیح کلی در مورد ریاضیات در کشورهای در حال توسعه ارائه دهم. علی رغم تمام موانع، ریاضیدانان جهان سوم ابزارهای مثبتی هم دراختیار دارند. برای مثال، ریاضیات نیازمند سرمایه‌گذاری های زیربنایی و مادی که بیشتر شاخه‌های علوم به آنها نیاز دارند تا بتوانند در سطوح عالی فعالیت کنند، نمی‌باشد. از این رو، در

11 · Hoang Xuan Sinh

بسیاری از کشورهای در حال توسعه ـ برای نمونه در ویتنام، چین و هند ـ ریاضیات قوی‌ترین شاخه علوم به حساب می‌آید، و بیشترین نفوذ را داراست. در ویتنام، ریاضیدانان غالباً از طرف رهبران سیاسی مورد مشورت قرار می‌گیرند. این برخلاف ایالات متحده است که در واشنگتن ریاضیدانان نفوذ کمتری از سایر دانشمندان دارند.

علاوه براین، بسیاری از کشورهای در حال توسعه دارای سنت های تاریخی و باستانی در ریاضیات هستند. ما می‌دانیم که تعدادی از ایده‌ها و روش های پایه اولین بار در چین، هند و خاورمیانه کشف شده‌اند. نمونه‌ای از کارهای اولیه ریاضی در قسمت دیگری از جهان، نظیر آمریکای مرکزی، را می‌توان در بین مایاها یافت که نجوم ریاضی را تا آن حد گسترش دادند که حتی قرنها بعد نیز اروپاییان به آن دست نیافتند. شاید بدانید که مایاها موفقیت چشمگیری در پیش‌بینی ماه گرفتگی ها داشته‌اند.

اگر درک خود از ایده‌های ریاضیات را گسترده‌تر کنیم، درمی‌یابیم که تفکر ریاضی قدمت و تاریخی طولانی در فرهنگ های بومی جهان سوم داشته است. این شاخه از تاریخ ریاضیات «غالباً ریاضیات قومی خوانده می‌شود ـ عبارتی که ریاضیدانان برزیلی اوبیراتان امبرسیو [۱۲] ابداع کرد. مطالعات بیشتر و عمومی‌تر «ریاضیات قومی» می‌تواند منجر به آگاهی از سهم و نقش کارهایی که آسیا، آفریقا و آمریکای لاتین در دنیای ریاضیات داشته‌اند، بشود. درک این واقعیت می‌تواند حس اعتماد به‌نفس بیشتری را در بین دانشجویان ریاضی کشورهای در حال توسعه، ایجاد کرده و عزم کنارگذاشتن میراث دوران استعمار را به وجود آورد تا بار دیگر سهم عمده‌ای در فرهنگ ریاضی جهانی داشته باشند.

علاقه‌مندم با فهرستی از کارهایی که می‌توانیم برای حمایت از همکاران جهان سومی خود انجام دهیم صحبت را به پایان برسانم.

- ما می‌توانیم برنامه‌های فرصت مطالعاتی برای ریاضیدانان جهان سوم به وجود آوریم تا آنها بتوانند هر پنج یا شش سال یک بار در یک کشور توسعه یافته به سر برند. به این ترتیب محققین فعال دیگر با دو انتخاب مهاجرت به آمریکا و یا ماندن در کشور خود و دور ماندن از مراکز عمده تحقیقاتی، روبه رو نخواهند بود.
- ما باید کوششی را برای حفظ ارتباط با دانش آموختگان قبلی قدیمی که به کشور خود بازگشته‌اند، مبذول داریم. تماس و ارتباط مرتب می‌تواند تا حدود زیادی آنها را از انزوا رهایی دهد.

---

12 · Ubiratan d'Ambrosia

• ما می‌توانیم کتاب و مجلات را به مؤسسات و دانشگاه های کشورهای در حال توسعه اهدا کنیم. فرستادن انبار کتاب های قدیمی شخصی و نسخه‌های کپک‌زده بعضی مجلات ریاضی مفید نیست. به جای آن باید دریابیم که آنها واقعاً چه می‌خواهند و سعی کنیم که مطالب مورد نیاز را برای آنها فراهم کنیم. بخصوص ۱) جامعه ریاضی آمریکا و انجمن ریاضی آمریکا باید تمام کتابها و مجلات خود را با قیمت نازل دراختیار کتابخانه‌های کشورهای جهان سوم قرار دهند. و ۲) باید با روش سازمان یافته‌ای با ناشرین خصوصی ریاضی تماس گرفته و از آنها بخواهیم که نشریات خود را با تخفیف های زیاد به کتابخانه‌های کشورهای در حال توسعه عرضه کنند.

• ناشرین باید دید وسیعتری در مورد امکان چاپ مطالب در مورد فرهنگ و تاریخ ریاضیات در جهان سوم داشته باشند.

• مؤسسات ریاضی و ریاضیدانان منفرد باید ارتباط خود را به بهترین مراکز تحقیقاتی محدود کنند. متأسفانه، مثلاً در هندوستان، سیستم دانشگاهها توسط بازدیدکنندگان که به صورت سنتی در ارتباط با مؤسسات تحقیقاتی متفاوتی هستند (بخصوص انستیتو تاتا در بمبئی) نادیده گرفته می‌شود.

• سرانجام از دیدگاه شخصی، فرد می‌تواند روابط خود را با یک و یا دو گروه و یا انستیتو در جهان سوم برقرار کند. مثلاً جایی را انتخاب کنید که قبلاً دانشجویی از آنجا داشته‌اید و یا ریاضیدانی را با علایق یکسان تحقیقاتی می‌شناسید و یا ناحیه‌ای را که پیوند خانوادگی دارید، و یا کشوری را که علاقه سیاسی و یا فرهنگی به آنجا دارید و یا جایی را که همواره غذای آن را دوست دارید.

من به این نتیجه رسیده‌ام که آدم آنچه که از ارتباط با سایر همکاران در جهان سوم به دست می‌آورد بسیار گرانبهاتر از زمان، پول، و یا انرژی‌ای است که صرف آن می‌کند.

یکی از جنبه‌های ریاضیات که ما به راستی می‌توانیم به آن مباهات کنیم، این است که بین‌المللی ترین شاخه علوم می‌باشد. علی‌رغم تمامی تفاوت های فرهنگی و تمامی تفاوت های مادی بین فقیر و غنی، همه ما واقعاً در یک خط هستیم. ما علاقه‌مند به مسائل تحقیقاتی و مسائل آموزش ریاضی یکسانی می‌باشیم. هنگامی که ارتباطات و حمایت های خود از همکاران جهان سومی را تقویت می‌کنیم، باشد که در حیات جهانی حرفه ریاضی سهیم باشیم.

فهرست مطالب

سخن مدیر مسئول

نگاهی به مسئلهٔ N-جسم از طریق متغیرهای مختلط — دانالد ساری

قانون دوّم کپلر و توپولوژی انتگرالهای آبلی — ولادیمیر آرنولد

دانش الگوها — لین آرتور استین

برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و رمزنگاری — هـ.و. لنسترا

تصادفی بودن و اثبات ریاضی — گریگوری ج. چایتین

مثالهای نقض در نظریهٔ احتمال — جوردن استویانف

نکته‌ها

در باب یک قضیهٔ فروبنیویس — ی.م. آیزاکس و ج.ر. رابینسون

روشن کردن قلمروهای کراندار — جفری راح

اثبات لانه کبوتری قضیهٔ کاپلانسکی — ایرا روزنهولتز

اثبات قضیهٔ سرپینسکی با ... — ا.آ. اکیف

آیا حاصلضرب مشتقهای... — م.و. بوتسکو

دیدگاه

مصاحبه‌ای با پرویز شهریاری

گزارش

ریاضیات در شرایط دشوار کشورهای جهان سوم — نیل کوبلیتز